Bài giảng Xác suất Thống kê và ứng dụng

Nguyễn Thị Nhung

Bộ môn Toán - Đại học THĂNG LONG

Ngày 7 tháng 8 năm 2013

Chương V

Biến ngẫu nhiên và Hàm phân phối

Chương V

1. Biến ngẫu nhiên
   - Biến ngẫu nhiên, định nghĩa và ví dụ
   - Qui luật phân phối xác suất của biến ngẫu nhiên
   - Hàm xác suất
   - Hàm mật độ xác suất
   - Hàm phân phối xác suất
2. Các đặc trưng cơ bản của biến ngẫu nhiên
   - Kì vọng
   - Các tính chất của kì vọng
   - Ý nghĩa của kì vọng toán
   - Phương sai và độ lệch chuẩn
   - Các tính chất của phương sai
   - Ý nghĩa và ứng dụng của phương sai

1. Biến ngẫu nhiên
   - Biến ngẫu nhiên, định nghĩa và ví dụ
   - Qui luật phân phối xác suất của biến ngẫu nhiên
   - Hàm xác suất
   - Hàm mật độ xác suất
   - Hàm phân phối xác suất
2. Các đặc trưng cơ bản của biến ngẫu nhiên
   - Kì vọng
   - Các tính chất của kì vọng
   - Ý nghĩa của kì vọng toán
   - Phương sai và độ lệch chuẩn
   - Các tính chất của phương sai
   - Ý nghĩa và ứng dụng của phương sai

Nội dung chính trong chương

- Giới thiệu về biến ngẫu nhiên: định nghĩa, ví dụ và phân loại biến ngẫu nhiên;
- Giới thiệu qui luật phân phối xác suất của biến ngẫu nhiên;
- Giới thiệu những cách mô tả qui luật phân phối xác suất của biến ngẫu nhiên: bảng phân phối xác suất, hàm phân phối xác suất và hàm mật độ xác suất;
- Giới thiệu những đặc trưng cơ bản của biến ngẫu nhiên: kì vọng, phương sai, độ lệch chuẩn. Ý nghĩa của những đại lượng này và ứng dụng trong thực tế.

Yêu cầu đối với sinh viên

- Hiểu định nghĩa về biến ngẫu nhiên, phân loại biến ngẫu nhiên và cho ví dụ;
- Hiểu được qui luật phân phối xác suất của biến ngẫu nhiên và cho ví dụ;
- Hiểu được những cách mô tả qui luật phân phối xác suất của biến ngẫu nhiên: bảng phân phối xác suất, hàm phân phối xác suất và hàm mật độ xác suất và phân biệt với biến ngẫu nhiên nào thì dùng cách nào cho phù hợp;
- Nắm được định nghĩa, công thức tính những đặc trưng cơ bản của biến ngẫu nhiên: kì vọng, phương sai, độ lệch chuẩn và hiểu được ý nghĩa của những đại lượng này trong thực tế.

Ví dụ mô tả biến ngẫu nhiên

Xét phép thử: Một gia đình dự định sinh ba đứa con. Kí hiệu T là biến cố sinh con trai và G là biến cố sinh con gái. Khi đó ta có thể mô tả phép thử này dưới dạng không gian mẫu với xác suất tương ứng như sau:

Biến cố	Xác suất	Biến cố	Xác suất
TTT	1/8	TGG	1/8
TTG	1/8	GTG	1/8
TGT	1/8	GGT	1/8
GTT	1/8	GGG	1/8

Ví dụ mô tả biến ngẫu nhiên

Phép thử trên cũng có thể mô tả theo cách liệt kê theo số con trai (gái) trong ba lần sinh như sau:

Số con trai	Biến cố	Xác suất
3	TTT	1/8
2	TTG, TGT, GTT	3/8
1	TGG, GTG, GGT	3/8
0	GGG	1/8

Gọi X là hàm nhận giá trị là số con trai trong ba lần sinh con. Ta thấy X nhận bốn giá trị là $0, 1, 2, 3$ với xác suất tương ứng là:

$$P(X = 0) = 1/8, P(X = 1) = 3/8, P(X = 2) = 3/8, P(X = 3) = 1/8.$$

Câu hỏi dẫn nhập

Trong phép thử một gia đình sinh ba con ở trên, cách mô tả phép thử theo số con trai có ưu điểm gì hơn so với liệt kê các phần tử của không gian mẫu?

Nội dung trình bày

1. Biến ngẫu nhiên
   - Biến ngẫu nhiên, định nghĩa và ví dụ
   - Qui luật phân phối xác suất của biến ngẫu nhiên
   - Hàm xác suất
   - Hàm mật độ xác suất
   - Hàm phân phối xác suất
2. Các đặc trưng cơ bản của biến ngẫu nhiên
   - Kì vọng
   - Các tính chất của kì vọng
   - Ý nghĩa của kì vọng toán
   - Phương sai và độ lệch chuẩn
   - Các tính chất của phương sai
   - Ý nghĩa và ứng dụng của phương sai

Định nghĩa Biến ngẫu nhiên

Định nghĩa

Biến ngẫu nhiên là hàm số thực xác định trên không gian mẫu Ω, tức là với mỗi biến cố của không gian mẫu ta gán với một số thực.

- Ta thường kí hiệu các biến ngẫu nhiên bởi các chữ $X, Y, Z, \ldots$. Các giá trị mà biến ngẫu nhiên nhận thường kí hiệu là: $x, y, z, \ldots$. Với một biến ngẫu nhiên X ta có thể viết:

$$\begin{aligned} X : &\Omega \longrightarrow \mathbb{R} \\ &A \longmapsto X(A) = x \end{aligned}$$

- Với X là biến ngẫu nhiên chỉ số lần sinh con trai trong ba lần sinh con, ta có $X(TTT) = 3$ hay $X(TGT) = 2$.

Định nghĩa Biến ngẫu nhiên

Định nghĩa

Biến ngẫu nhiên là hàm số thực xác định trên không gian mẫu Ω, tức là với mỗi biến cố của không gian mẫu ta gán với một số thực.

- Ta thường kí hiệu các biến ngẫu nhiên bởi các chữ $X, Y, Z, \ldots$. Các giá trị mà biến ngẫu nhiên nhận thường kí hiệu là: $x, y, z, \ldots$. Với một biến ngẫu nhiên X ta có thể viết:

$$
\begin{aligned}
X : &\Omega \longrightarrow \mathbb{R} \\
&A \longmapsto X(A) = x
\end{aligned}
$$

- Với X là biến ngẫu nhiên chỉ số lần sinh con trai trong ba lần sinh con, ta có $X(TTT) = 3$ hay $X(TGT) = 2$.

Định nghĩa Biến ngẫu nhiên

Định nghĩa

Biến ngẫu nhiên là hàm số thực xác định trên không gian mẫu Ω, tức là với mỗi biến cố của không gian mẫu ta gán với một số thực.

- Ta thường kí hiệu các biến ngẫu nhiên bởi các chữ $X, Y, Z, \ldots$. Các giá trị mà biến ngẫu nhiên nhận thường kí hiệu là: $x, y, z, \ldots$. Với một biến ngẫu nhiên X ta có thể viết:

$$\begin{aligned} X : \Omega &\longrightarrow \mathbb{R} \\ A &\longmapsto X(A) = x \end{aligned}$$

- Với X là biến ngẫu nhiên chỉ số lần sinh con trai trong ba lần sinh con, ta có $X(TTT) = 3$ hay $X(TGT) = 2$.

Ví dụ về biến ngẫu nhiên

- Tung một con xúc xắc, gọi X là số chấm xuất hiện ở mặt trên của con xúc xắc. Khi đó X là biến ngẫu nhiên nhận các giá trị là $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.
- Kiểm nghiệm 1000 sản phẩm, gọi X là số sản phẩm đạt chất lượng. Khi đó X là biến ngẫu nhiên có miền giá trị là $\{0, 1, \ldots, 1000\}$.
- Đo chiều cao của một sinh viên, gọi X là chiều cao được đo. Khi đó, X là biến ngẫu nhiên có miền giá trị nằm trong khoảng (a, b) nào đó.
- Bắn một viên đạn vào bia, gọi X là khoảng cách từ điểm chạm của viên đạn đến tâm bia. Khi đó, X là biến ngẫu nhiên có miền giá trị nằm trong khoảng (a, b) nào đó.

Ví dụ về biến ngẫu nhiên

- Tung một con xúc xắc, gọi X là số chấm xuất hiện ở mặt trên của con xúc xắc. Khi đó X là biến ngẫu nhiên nhận các giá trị là $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.
- Kiểm nghiệm 1000 sản phẩm, gọi X là số sản phẩm đạt chất lượng. Khi đó X là biến ngẫu nhiên có miền giá trị là $\{0, 1, \ldots, 1000\}$.
- Đo chiều cao của một sinh viên, gọi X là chiều cao được đo. Khi đó, X là biến ngẫu nhiên có miền giá trị nằm trong khoảng (a, b) nào đó.
- Bắn một viên đạn vào bia, gọi X là khoảng cách từ điểm chạm của viên đạn đến tâm bia. Khi đó, X là biến ngẫu nhiên có miền giá trị nằm trong khoảng (a, b) nào đó.

Ví dụ về biến ngẫu nhiên

- Tung một con xúc xắc, gọi X là số chấm xuất hiện ở mặt trên của con xúc xắc. Khi đó X là biến ngẫu nhiên nhận các giá trị là $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.
- Kiểm nghiệm 1000 sản phẩm, gọi X là số sản phẩm đạt chất lượng. Khi đó X là biến ngẫu nhiên có miền giá trị là $\{0, 1, \ldots, 1000\}$.
- Đo chiều cao của một sinh viên, gọi X là chiều cao được đo. Khi đó, X là biến ngẫu nhiên có miền giá trị nằm trong khoảng (a, b) nào đó.
- Bắn một viên đạn vào bia, gọi X là khoảng cách từ điểm chạm của viên đạn đến tâm bia. Khi đó, X là biến ngẫu nhiên có miền giá trị nằm trong khoảng (a, b) nào đó.

Ví dụ về biến ngẫu nhiên

- Tung một con xúc xắc, gọi X là số chấm xuất hiện ở mặt trên của con xúc xắc. Khi đó X là biến ngẫu nhiên nhận các giá trị là $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.
- Kiểm nghiệm 1000 sản phẩm, gọi X là số sản phẩm đạt chất lượng. Khi đó X là biến ngẫu nhiên có miền giá trị là $\{0, 1, \ldots, 1000\}$.
- Đo chiều cao của một sinh viên, gọi X là chiều cao được đo. Khi đó, X là biến ngẫu nhiên có miền giá trị nằm trong khoảng (a, b) nào đó.
- Bắn một viên đạn vào bia, gọi X là khoảng cách từ điểm chạm của viên đạn đến tâm bia. Khi đó, X là biến ngẫu nhiên có miền giá trị nằm trong khoảng (a, b) nào đó.

Phân loại biến ngẫu nhiên

Định nghĩa

- *Biến ngẫu nhiên X được gọi là rời rạc nếu tập giá trị của X là hữu hạn hoặc đếm được.*
- *Biến ngẫu nhiên X được gọi là liên tục nếu tập giá trị của X lấp đầy một khoảng số thực.*

Câu hỏi: Trong ví dụ biến ngẫu nhiên, biến ngẫu nhiên nào là rời rạc, biến ngẫu nhiên nào là liên tục?

Phân loại biến ngẫu nhiên

Định nghĩa

- *Biến ngẫu nhiên X được gọi là rời rạc nếu tập giá trị của X là hữu hạn hoặc đếm được.*
- *Biến ngẫu nhiên X được gọi là liên tục nếu tập giá trị của X lấp đầy một khoảng số thực.*

Câu hỏi: Trong ví dụ biến ngẫu nhiên, biến ngẫu nhiên nào là rời rạc, biến ngẫu nhiên nào là liên tục?

Nội dung trình bày

1. Biến ngẫu nhiên
   - Biến ngẫu nhiên, định nghĩa và ví dụ
   - Qui luật phân phối xác suất của biến ngẫu nhiên
   - Hàm xác suất
   - Hàm mật độ xác suất
   - Hàm phân phối xác suất
2. Các đặc trưng cơ bản của biến ngẫu nhiên
   - Kì vọng
   - Các tính chất của kì vọng
   - Ý nghĩa của kì vọng toán
   - Phương sai và độ lệch chuẩn
   - Các tính chất của phương sai
   - Ý nghĩa và ứng dụng của phương sai

Định nghĩa

Qui luật phân phối xác suất của biến ngẫu nhiên là sự tương ứng giữa các giá trị có thể của nó và các xác suất tương ứng với các giá trị đó.

Ví dụ: Tìm qui luật phân phối xác suất của biến ngẫu nhiên chỉ số con trai trong ba lần sinh.

Ta có thể sử dụng những phương pháp sau để mô tả qui luật phân phối xác suất của một biến ngẫu nhiên:

- Hàm xác suất (hoặc bảng phân phối xác suất);
- Hàm mật độ xác suất;
- Hàm phân phối xác suất.

Nội dung trình bày

1. Biến ngẫu nhiên
   - Biến ngẫu nhiên, định nghĩa và ví dụ
   - Qui luật phân phối xác suất của biến ngẫu nhiên
   - Hàm xác suất
   - Hàm mật độ xác suất
   - Hàm phân phối xác suất
2. Các đặc trưng cơ bản của biến ngẫu nhiên
   - Kì vọng
   - Các tính chất của kì vọng
   - Ý nghĩa của kì vọng toán
   - Phương sai và độ lệch chuẩn
   - Các tính chất của phương sai
   - Ý nghĩa và ứng dụng của phương sai

Định nghĩa

Hàm xác suất của biến ngẫu nhiên rời rạc X, kí hiệu là P_X, được xác định như sau $P_X(x)$ là xác suất để X nhận giá trị x: $P_X(x) = P(X = x)$.

Ví dụ: Hàm xác suất của biến ngẫu nhiên chỉ số con trai trong ba lần sinh là:

$$P_X(0) = 1/8, P_X(1) = 3/8, P_X(2) = 3/8, P_X(3) = 1/8.$$

Bảng phân phối xác suất

Định nghĩa

Giả sử biến ngẫu nhiên X nhận các giá trị $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ *với các xác suất tương ứng là* $p_1, p_2, \ldots, p_n, \ldots$. *Hàm xác suất của X có thể được biểu diễn dưới dạng bảng phân phối xác suất như sau:*

X	x_1	x_2	$\ldots$	x_n	$\ldots$
P_X	p_1	p_2	$\ldots$	p_n	$\ldots$

Trong đó $\sum_i p_i = 1, 0 \leqslant p_i \leqslant 1, \forall i = 1, 2, \ldots$

Ví dụ: Lập bảng phân phối xác suất của biến ngẫu nhiên chỉ số con trai trong ba lần sinh.

Nhận xét:

- Hàm xác suất hoặc bảng phân phối xác suất chỉ dùng để miêu tả qui luật phân bố xác suất của các biến ngẫu nhiên rời rạc.
- Bảng phân phối xác suất của biến ngẫu nhiên rời rạc X cho biết mức độ tập trung xác suất tại từng điểm của X.

Ví dụ

Bài toán

Trong hộp có 10 sản phẩm trong đó có 6 chính phẩm. Lấy ngẫu nhiên ra 2 sản phẩm và gọi X là biến ngẫu nhiên chỉ số chính phẩm được lấy ra. Tìm qui luật phân phối xác suất của X.

Ví dụ

Lời giải: Để tìm qui luật phân phối xác suất của X ta cần tìm các giá trị có thể của X và xác suất để X nhận từng giá trị đó. Nhận thấy X là biến ngẫu nhiên rời rạc nhận các giá trị là 0, 1, 2 và xác suất để X nhận từng giá trị này được xác định như sau:

$$P(X=0)=\frac{C_4^2}{C_{10}^2}=\frac{2}{15},\; P(X=0)=\frac{C_6^1C_4^1}{C_{10}^2}=\frac{8}{15},\; P(X=2)=\frac{C_6^2}{C_{10}^2}=\frac{5}{15}.$$

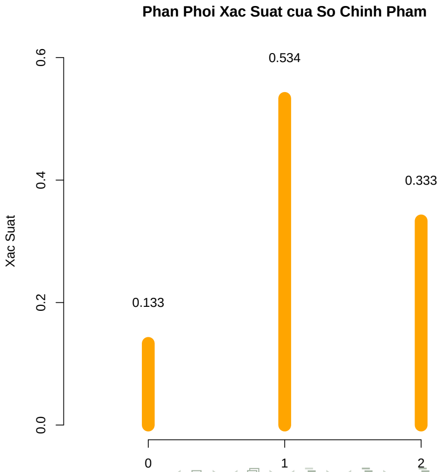
Như vậy, qui luật phân phối xác suất của X có dạng:

X	0	1	2
P_X	2/15	8/15	5/15

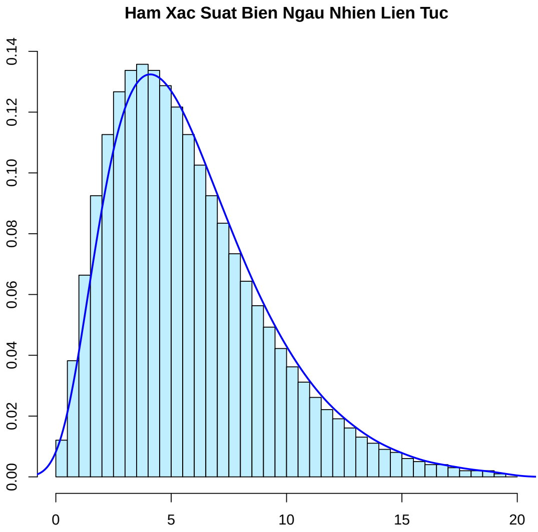
Minh họa phân phối xác suất của số chính phẩm

Phân phối xác suất của số chính phẩm:

X	0	1	2
P_X	$2/15$	$8/15$	$5/15$



Minh họa hàm mật độ xác suất cho bnn liên tục



Nội dung trình bày

1. Biến ngẫu nhiên
   - Biến ngẫu nhiên, định nghĩa và ví dụ
   - Qui luật phân phối xác suất của biến ngẫu nhiên
   - Hàm xác suất
   - Hàm mật độ xác suất
   - Hàm phân phối xác suất
2. Các đặc trưng cơ bản của biến ngẫu nhiên
   - Kì vọng
   - Các tính chất của kì vọng
   - Ý nghĩa của kì vọng toán
   - Phương sai và độ lệch chuẩn
   - Các tính chất của phương sai
   - Ý nghĩa và ứng dụng của phương sai

Hàm mật độ xác suất

Định nghĩa

Hàm $f(x)$ được gọi là hàm mật độ xác suất của biến ngẫu nhiên X nào đó nếu thỏa mãn hai điều kiện sau:

- $f(x) \geqslant 0, \forall x;$
- $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1.$

Nhận xét:

- Nếu biến ngẫu nhiên X có hàm mật độ xác suất là $f(x)$ thì $P(X \leqslant a) = \int_{-\infty}^{a} f(x)dx$.
- Khái niệm hàm mật độ xác suất chỉ áp dụng đối với biến ngẫu nhiên liên tục mà không áp dụng đối với biến ngẫu nhiên rời rạc.
- Hàm mật độ xác suất của biến ngẫu nhiên X tại mỗi điểm x cho biết mức độ tập trung xác suất tại điểm đó.

Hàm mật độ xác suất

Định nghĩa

Hàm $f(x)$ được gọi là hàm mật độ xác suất của biến ngẫu nhiên X nào đó nếu thỏa mãn hai điều kiện sau:

- $f(x) \geqslant 0, \forall x;$
- $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1.$

Nhận xét:

- Nếu biến ngẫu nhiên X có hàm mật độ xác suất là $f(x)$ thì $P(X \leqslant a) = \int_{-\infty}^{a} f(x)dx.$
- Khái niệm hàm mật độ xác suất chỉ áp dụng đối với biến ngẫu nhiên liên tục mà không áp dụng đối với biến ngẫu nhiên rời rạc.
- Hàm mật độ xác suất của biến ngẫu nhiên X tại mỗi điểm x cho biết mức độ tập trung xác suất tại điểm đó.

Hàm mật độ xác suất

Định nghĩa

Hàm $f(x)$ được gọi là hàm mật độ xác suất của biến ngẫu nhiên X nào đó nếu thỏa mãn hai điều kiện sau:

- $f(x) \geqslant 0, \forall x;$
- $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1.$

Nhận xét:

- Nếu biến ngẫu nhiên X có hàm mật độ xác suất là $f(x)$ thì $P(X \leqslant a) = \int_{-\infty}^{a} f(x)dx.$
- Khái niệm hàm mật độ xác suất chỉ áp dụng đối với biến ngẫu nhiên liên tục mà không áp dụng đối với biến ngẫu nhiên rời rạc.
- Hàm mật độ xác suất của biến ngẫu nhiên X tại mỗi điểm x cho biết mức độ tập trung xác suất tại điểm đó.

Hàm mật độ xác suất

Định nghĩa

Hàm $f(x)$ được gọi là hàm mật độ xác suất của biến ngẫu nhiên X nào đó nếu thỏa mãn hai điều kiện sau:

- $f(x) \geqslant 0, \forall x;$
- $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1.$

Nhận xét:

- Nếu biến ngẫu nhiên X có hàm mật độ xác suất là $f(x)$ thì $P(X \leqslant a) = \int_{-\infty}^{a} f(x)dx$.
- Khái niệm hàm mật độ xác suất chỉ áp dụng đối với biến ngẫu nhiên liên tục mà không áp dụng đối với biến ngẫu nhiên rời rạc.
- Hàm mật độ xác suất của biến ngẫu nhiên X tại mỗi điểm x cho biết mức độ tập trung xác suất tại điểm đó.

Tính xác suất thông qua hàm mật độ

Tính chất

Cho X là biến ngẫu nhiên liên tục có hàm mật độ f(x). Khi đó xác suất của các miền giá trị của X được tính thông qua hàm mật độ như sau:

- $P(X = a) = \int_a^a f(x)dx = 0.$
- $P(a \leqslant X \leqslant b) = \int_a^b f(x)dx.$
- $P(X \leqslant a) = \int_{-\infty}^a f(x)dx.$
- $P(X \geqslant b) = \int_b^{+\infty} f(x)dx = 1 - \int_{-\infty}^b f(x)dx.$

Chú ý: Do xác suất tại một điểm của biến ngẫu nhiên liên tục X bằng 0 nên các xác suất sau là như nhau:

- $P(a \leqslant X \leqslant b) = P(a \leqslant X < b) = P(a < X \leqslant b) = P(a < X < b).$
- $P(X \leqslant a) = P(X < a).$
- $P(X \geqslant b) = P(X > b).$

Tính xác suất thông qua hàm mật độ

Tính chất

Cho X là biến ngẫu nhiên liên tục có hàm mật độ f(x). Khi đó xác suất của các miền giá trị của X được tính thông qua hàm mật độ như sau:

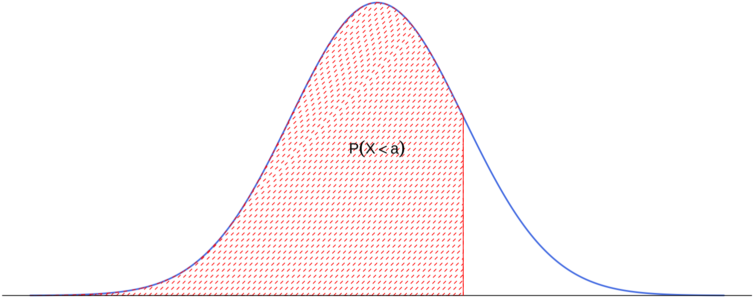
- $P(X = a) = \int_a^a f(x)dx = 0.$
- $P(a \leqslant X \leqslant b) = \int_a^b f(x)dx.$
- $P(X \leqslant a) = \int_{-\infty}^a f(x)dx.$
- $P(X \geqslant b) = \int_b^{+\infty} f(x)dx = 1 - \int_{-\infty}^b f(x)dx.$

Chú ý: Do xác suất tại một điểm của biến ngẫu nhiên liên tục X bằng 0 nên các xác suất sau là như nhau:

- $P(a \leqslant X \leqslant b) = P(a \leqslant X < b) = P(a < X \leqslant b) = P(a < X < b).$
- $P(X \leqslant a) = P(X < a).$
- $P(X \geqslant b) = P(X > b).$

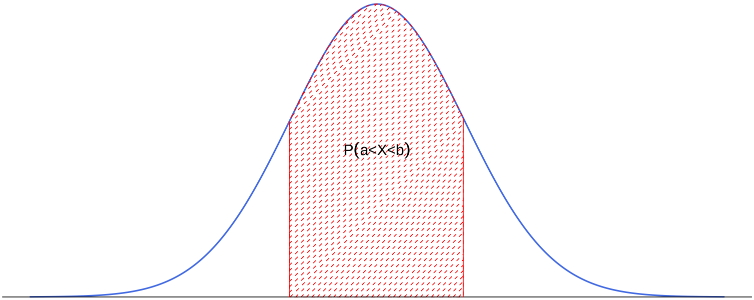
Minh họa các khoảng xác suất của biến ngẫu nhiên liên tục

$P(X \leqslant a) = \int_{-\infty}^{a} f(x)dx$



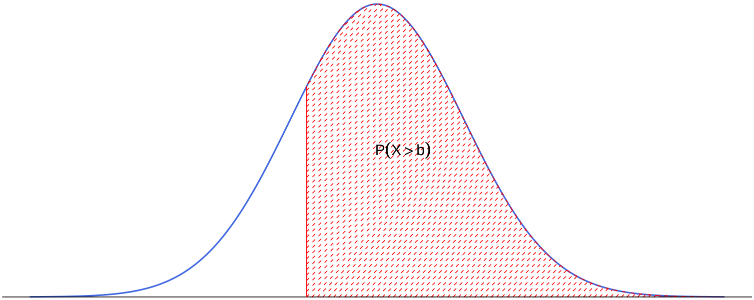
Minh họa các khoảng xác suất của biến ngẫu nhiên liên tục

$P(a \leqslant X \leqslant b) = \int_a^b f(x)dx$



Minh họa các khoảng xác suất của biến ngẫu nhiên liên tục

$P(X \geqslant b) = \int_b^{+\infty} f(x)dx$



Ví dụ về hàm mật độ xác suất

Bài toán

Cho hàm số $f(x)$ được xác định như sau:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{3}{4}(x^2 + 2x) & \textit{với } x \in (0,1), \\ 0 & \textit{với } x \notin (0,1) \end{cases}$$

a. *Chứng tỏ rằng $f(x)$ là hàm mật độ của một biến ngẫu nhiên liên tục X.*

b. *Tính $P(X < \frac{1}{2})$.*

Ví dụ về hàm mật độ xác suất

Lời giải:

- Ta có $f(x) \geqslant 0$ và

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \frac{3}{4}\int_0^1 (x^2 + 2x)dx = \frac{3}{4}(\frac{x^3}{3} + x^2)|_0^1 = 1.$$

Do đó $f(x)$ là hàm mật độ xác suất của một biến ngẫu nhiên liên tục.

- Ta có

$$P(X < \frac{1}{2}) = \int_{-\infty}^{1/2} f(x)dx = \frac{3}{4}\int_0^{1/2} (x^2 + 2x)dx$$
$$= \frac{3}{4}(\frac{x^3}{3} + x^2)|_0^{1/2} = \frac{7}{32}.$$

Nội dung trình bày

1. Biến ngẫu nhiên
   - Biến ngẫu nhiên, định nghĩa và ví dụ
   - Qui luật phân phối xác suất của biến ngẫu nhiên
   - Hàm xác suất
   - Hàm mật độ xác suất
   - Hàm phân phối xác suất
2. Các đặc trưng cơ bản của biến ngẫu nhiên
   - Kì vọng
   - Các tính chất của kì vọng
   - Ý nghĩa của kì vọng toán
   - Phương sai và độ lệch chuẩn
   - Các tính chất của phương sai
   - Ý nghĩa và ứng dụng của phương sai

Hàm phân phối xác suất

Định nghĩa

Hàm phân phối xác suất của biến ngẫu nhiên X, kí hiệu là $F(x)$, là xác suất để biến ngẫu nhiên X nhận giá trị nhỏ hơn hoặc bằng x: $F(x) = P(X \leqslant x)$, với x là một số thực tùy ý.

Nhận xét:

- Hàm phân phối xác suất áp dụng đối với cả biến ngẫu nhiên rời rạc và liên tục.
- Hàm xác suất phản ánh mức độ tập trung xác suất ở về phía bên trái của một số thực x tùy ý.
- Nếu X là biến ngẫu nhiên rời rạc thì $F(x) = \sum_{x_i \leqslant x} P(X = x_i)$.
- Nếu X là biến ngẫu nhiên liên tục có hàm mật độ $f(x)$ thì $F(x) = \int_{-\infty}^{a} f(x)dx$.

Hàm phân phối xác suất

Định nghĩa

Hàm phân phối xác suất của biến ngẫu nhiên X, kí hiệu là $F(x)$, là xác suất để biến ngẫu nhiên X nhận giá trị nhỏ hơn hoặc bằng x: $F(x) = P(X \leqslant x)$, với x là một số thực tùy ý.

Nhận xét:

- Hàm phân phối xác suất áp dụng đối với cả biến ngẫu nhiên rời rạc và liên tục.
- Hàm xác suất phản ánh mức độ tập trung xác suất ở về phía bên trái của một số thực x tùy ý.
- Nếu X là biến ngẫu nhiên rời rạc thì $F(x) = \sum_{x_i \leqslant x} P(X = x_i)$.
- Nếu X là biến ngẫu nhiên liên tục có hàm mật độ $f(x)$ thì $F(x) = \int_{-\infty}^{a} f(x)dx$.

Tính chất của hàm phân phối xác suất

Tính chất

Hàm phân phối F(x) của biến ngẫu nhiên X có một số tính chất cơ bản sau:

- *Hàm phân phối xác định trên toàn* $\mathbb{R}$.
- $0 \leqslant F(x) \leqslant 1, \forall x \in \mathbb{R}; F(-\infty) = 0, F(+\infty) = 1.$
- *Hàm phân phối là hàm không giảm.*
- $P(a < X \leqslant b) = F(b) - F(a).$

Ví dụ

Bài toán

Tìm hàm phân phối của biến ngẫu nhiên X có bảng phân phối xác suất:

x_i	0	1	2
$P(X = x_i)$	2/15	8/15	5/15

Ví dụ

Lời giải:

- Nếu $x < 0$ thì $P(X < x) = 0$. Do đó $F(x) = 0, \forall x < 0$.
- Nếu $0 \leqslant x < 1$ thì $P(X < x) = P(X = 0) = 2/15$. Do đó $F(x) = 2/15, \forall 0 < x \leqslant 1$.
- Nếu $1 \leqslant x < 2$ thì $P(X < x) = P(X = 0) + P(X = 1) = 10/15$. Do đó $F(x) = 10/15, \forall 1 \leqslant x < 2$.
- Nếu $x \geqslant 2$ thì $P(X < x) = P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) = 1$. Do đó $F(x) = 1, \forall x \geqslant 2$.

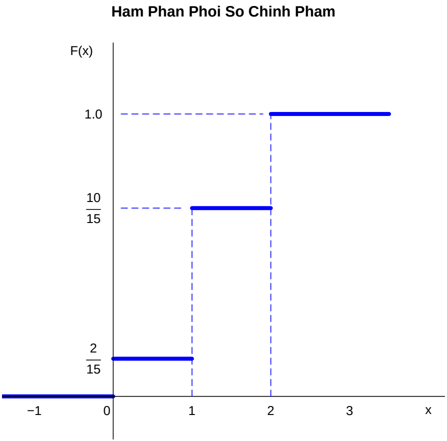
Ví dụ

Vậy hàm phân phối $F(x)$ của X có dạng:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{nếu } x < 0, \\ 2/15 & \text{nếu } 0 \leqslant x < 1, \\ 10/15 & \text{nếu } 1 \leqslant x < 2, \\ 1 & \text{nếu } x \geqslant 2. \end{cases}$$

Minh họa phân phối xác suất của số chính phẩm

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{nếu } x < 0, \\ 2/15 & \text{nếu } 0 \leqslant x < 1, \\ 10/15 & \text{nếu } 1 \leqslant x < 2, \\ 1 & \text{nếu } x \geqslant 2. \end{cases}$$



Ví dụ

Bài toán

Tìm hàm phân phối xác suất của biến ngẫu nhiên liên tục có hàm mật độ được cho bởi:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{3}{4}(x^2 + 2x) & \textit{với } x \in (0, 1), \\ 0 & \textit{với } x \notin (0, 1) \end{cases}$$

Lời giải:

- Nếu $x < 0$ thì $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)dx = 0$.
- Nếu $0 \leqslant x \leqslant 1$ thì

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt = \frac{3}{4}\int_{0}^{x}(t^2 + 2t)dt = \frac{3}{4}(\frac{t^3}{3} + t^2)|_0^x = \frac{3}{4}(\frac{x^3}{3} + x^2).$$

- Nếu $x > 1$ ta có $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)dx = \frac{3}{4}\int_0^1 (x^2 + 2x)dx = 1$.

Ví dụ

Bài toán

Tìm hàm phân phối xác suất của biến ngẫu nhiên liên tục có hàm mật độ được cho bởi:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{3}{4}(x^2 + 2x) & \text{với } x \in (0,1), \\ 0 & \text{với } x \notin (0,1) \end{cases}$$

Lời giải:

- Nếu $x < 0$ thì $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)dx = 0.$
- Nếu $0 \leqslant x \leqslant 1$ thì

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt = \frac{3}{4}\int_{0}^{x}(t^2 + 2t)dt = \frac{3}{4}(\frac{t^3}{3} + t^2)|_0^x = \frac{3}{4}(\frac{x^3}{3} + x^2).$$

- Nếu $x > 1$ ta có $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)dx = \frac{3}{4}\int_0^1(x^2 + 2x)dx = 1.$

Bài toán tình huống

Câu hỏi tình huống

Tình huống 1: Bạn đang có 10000$ *và được đề nghị ba dự án đầu tư trong cùng một thời gian với các ước tính như sau:*

- *Dự án 1: Nếu đầu tư đem về lợi nhuận* 100000$ *với xác suất* 0.15 *và thiệt hại* 10000$ *với xác suất* 0.85;
- *Dự án 2: Nếu đầu tư đem về lợi nhuận* 10000$ *với xác suất* 0.5 *và lợi nhuận* 5000$ *với xác suất* 0.3 *và thiệt hại* 5000$ *với xác suất* 0.2;
- *Dự án 3: Chắc chắn đem về lợi nhuận* 4000$.

Bạn sẽ chọn đầu tư dự án nào?

Bài toán tình huống

Câu hỏi tình huống

Tình huống 2: Bạn mua một chiếc xe khách và thuê người lái. Bạn đang tính toán chuyện đưa ra giá vé mỗi một hành khách trong mỗi chuyến đi để mỗi chuyến lãi trung bình là 500 nghìn. Bạn ước tính được chi phí mỗi chuyến xe là 2 triệu VND không phụ thuộc vào số khách đi trên xe và thống kê số khách đi trên một chuyến trong thời gian gần đây như sau:

Số khách trên một chuyến	*20*	*25*	*30*	*35*	*40*
Xác suất tương ứng	*0,2*	*0,3*	*0,15*	*0,1*	*0,25*

Bạn phải đưa ra giá vé mỗi chuyến là bao nhiêu?

Nội dung trình bày

1. Biến ngẫu nhiên
   - Biến ngẫu nhiên, định nghĩa và ví dụ
   - Qui luật phân phối xác suất của biến ngẫu nhiên
   - Hàm xác suất
   - Hàm mật độ xác suất
   - Hàm phân phối xác suất
2. Các đặc trưng cơ bản của biến ngẫu nhiên
   - Kì vọng
   - Các tính chất của kì vọng
   - Ý nghĩa của kì vọng toán
   - Phương sai và độ lệch chuẩn
   - Các tính chất của phương sai
   - Ý nghĩa và ứng dụng của phương sai

Kì vọng

Định nghĩa

Cho X là biến ngẫu nhiên rời rạc nhận một trong các giá trị có thể $x_1, x_2, \ldots, x_n$ với các xác suất tương ứng $p_1, p_2, \ldots, p_n$. Kì vọng của biến ngẫu nhiên X, kí hiệu là E(X) được xác định bởi công thức:

$$E(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i p_i.$$

Định nghĩa

Cho X là biến ngẫu nhiên liên tục có hàm mật độ xác suất f(x). Khi đó kì vọng E(X) của X được xác định bởi công thức:

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx.$$

Kì vọng

Định nghĩa

Cho X là biến ngẫu nhiên rời rạc nhận một trong các giá trị có thể $x_1, x_2, \ldots, x_n$ với các xác suất tương ứng $p_1, p_2, \ldots, p_n$. Kì vọng của biến ngẫu nhiên X, kí hiệu là E(X) được xác định bởi công thức:

$$E(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i p_i.$$

Định nghĩa

Cho X là biến ngẫu nhiên liên tục có hàm mật độ xác suất f(x). Khi đó kì vọng E(X) của X được xác định bởi công thức:

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx.$$

Ví dụ

Bài toán

Tìm kì vọng của biến ngẫu nhiên rời rạc X có bảng phân phối xác suất:

x_i	0	1	2
$P(X = x_i)$	2/15	8/15	5/15

Ví dụ

Bài toán

Tìm kì vọng của biến ngẫu nhiên liên tục X có hàm mật độ xác suất như sau:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{3}{4}(x^2 + 2x) & \text{với } x \in (0,1), \\ 0 & \text{với } x \notin (0,1) \end{cases}$$

Nội dung trình bày

1. Biến ngẫu nhiên
   - Biến ngẫu nhiên, định nghĩa và ví dụ
   - Qui luật phân phối xác suất của biến ngẫu nhiên
   - Hàm xác suất
   - Hàm mật độ xác suất
   - Hàm phân phối xác suất
2. Các đặc trưng cơ bản của biến ngẫu nhiên
   - Kì vọng
   - Các tính chất của kì vọng
   - Ý nghĩa của kì vọng toán
   - Phương sai và độ lệch chuẩn
   - Các tính chất của phương sai
   - Ý nghĩa và ứng dụng của phương sai

Các tính chất của kì vọng

Tính chất

Kì vọng của biến ngẫu nhiên X, Y có một số tính chất cơ bản sau:

- $E(C) = C$, *với* C *là hằng số.*
- $E(CX) = CE(X)$, *với* C *là hằng số.*
- $E(X + Y) = E(X) + E(Y)$.
- $E(XY) = E(X)E(Y)$, *nếu* X *và* Y *là hai biến ngẫu nhiên độc lập.*

Chú ý: : Hai biến ngẫu nhiên X và Y được gọi là độc lập nếu qui luật phân phối xác suất của biến ngẫu nhiên này không phụ thuộc vào biến ngẫu nhiên kia nhận giá trị bằng bao nhiêu.

Nội dung trình bày

1. Biến ngẫu nhiên
   - Biến ngẫu nhiên, định nghĩa và ví dụ
   - Qui luật phân phối xác suất của biến ngẫu nhiên
   - Hàm xác suất
   - Hàm mật độ xác suất
   - Hàm phân phối xác suất
2. Các đặc trưng cơ bản của biến ngẫu nhiên
   - Kì vọng
   - Các tính chất của kì vọng
   - Ý nghĩa của kì vọng toán
   - Phương sai và độ lệch chuẩn
   - Các tính chất của phương sai
   - Ý nghĩa và ứng dụng của phương sai

Ý nghĩa của kì vọng toán

Giả sử đối với biến ngẫu nhiên X tiến hành n phép thử, trong đó n_1 lần X nhận giá trị x_1, n_2 lần X nhận giá trị x_2,..., n_k lần X nhận giá trị x_k. Đặt $n = \sum_{i=1}^{k} n_i$, khi đó giá trị trung bình của biến ngẫu nhiên X trong n phép thử này là:

$$\bar{x} = \frac{x_1 n_1 + x_2 n_2 + \ldots + x_k n_k}{n} = x_1 \frac{n_1}{n} + x_2 \frac{n_2}{n} + \ldots + x_k \frac{n_k}{n}.$$

Ta chú ý rằng $\frac{n_1}{n}, \frac{n_2}{n}, \ldots, \frac{n_k}{n}$ chính là tần suất xuất hiện các giá trị $x_1, x_2, \ldots, x_k$ trong n phép thử trên. Theo định nghĩa thống kê về xác suất khi $n \to \infty$ các tần suất sẽ hội tụ về các xác suất tương ứng. Do đó, khi n đủ lớn ta có thể viết

$$\bar{x} \approx x_1 p_1 + x_2 p_2 + \ldots + x_k p_k = E(X).$$

Như vậy, ta thu được kết quả $E(X) \approx \bar{x}$.

Ý nghĩa của kì vọng toán

Nhận xét:

- Kì vọng của biến ngẫu nhiên gần bằng trung bình cộng của các giá trị quan sát của biến ngẫu nhiên. Nó phản ánh giá trị trung tâm của phân phối xác suất của biến ngẫu nhiên.
- Khái niệm kì vọng được áp dụng rộng rãi trong nhiều lĩnh vực kinh doanh và quản lí như một tiêu chuẩn để ra quyết định trong tình huống cần lựa chọn giữa nhiều chiến lược khác nhau. Tiêu chuẩn này thường được biểu diễn dưới dạng lợi nhuận kì vọng hay doanh số kì vọng để làm căn cứ lựa chọn chiến lược kinh doanh.

Nội dung trình bày

1. Biến ngẫu nhiên
   - Biến ngẫu nhiên, định nghĩa và ví dụ
   - Qui luật phân phối xác suất của biến ngẫu nhiên
   - Hàm xác suất
   - Hàm mật độ xác suất
   - Hàm phân phối xác suất
2. Các đặc trưng cơ bản của biến ngẫu nhiên
   - Kì vọng
   - Các tính chất của kì vọng
   - Ý nghĩa của kì vọng toán
   - Phương sai và độ lệch chuẩn
   - Các tính chất của phương sai
   - Ý nghĩa và ứng dụng của phương sai

Khái niệm phương sai và độ lệch chuẩn

Định nghĩa

Phương sai của biến ngẫu nhiên X, kí hiệu là V(X) là kì vọng của bình phương sai lệch của biến ngẫu nhiên so với kì vọng của nó:

$$V(X) = E[X - E(X)]^2.$$

Định nghĩa

Độ lệch chuẩn của biến ngẫu nhiên X, kí hiệu là σ_X là căn bậc hai của phương sai.

$$\sigma_X = \sqrt{V(X)}.$$

Khái niệm phương sai và độ lệch chuẩn

Định nghĩa

Phương sai của biến ngẫu nhiên X, kí hiệu là V(X) là kì vọng của bình phương sai lệch của biến ngẫu nhiên so với kì vọng của nó:

$$V(X) = E[X - E(X)]^2.$$

Định nghĩa

Độ lệch chuẩn của biến ngẫu nhiên X, kí hiệu là σ_X là căn bậc hai của phương sai.

$$\sigma_X = \sqrt{V(X)}.$$

Khái niệm phương sai và độ lệch chuẩn

Nhận xét: Ta có $V(X) = E(X^2) - [E(X)]^2$. Từ đó

- Nếu X là biến ngẫu nhiên rời rạc thì phương sai sẽ được xác định bằng công thức:

$$V(X) = \sum_{i=1}^{n} [x_i - E(X)]^2 p_i = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 p_i - [E(X)]^2.$$

- Nếu X là biến ngẫu nhiên liên tục thì phương sai sẽ được xác định bằng công thức:

$$V(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} [x - E(X)]^2 f(x) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x) dx - [E(X)]^2.$$

Ví dụ

Bài toán

Tìm phương sai của biến ngẫu nhiên rời rạc X có bảng phân phối xác suất:

x_i	0	1	2
$P(X = x_i)$	2/15	8/15	5/15

Ví dụ

Bài toán

Tìm kì vọng của biến ngẫu nhiên liên tục X có hàm mật độ xác suất như sau:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{3}{4}(x^2 + 2x) & \textit{với } x \in (0,1), \\ 0 & \textit{với } x \notin (0,1) \end{cases}$$

Lời giải: Theo định nghĩa kì vọng của biến ngẫu nhiên liên tục, ta có

$$E(X^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)dx = \frac{3}{4}\int_0^1 x^2(x^2 + 2x)dx$$
$$= \frac{3}{4}\int_0^1 (x^4 + 2x^3)dx = \frac{3}{4}(\frac{x^5}{5} + \frac{2x^4}{4})|_0^1 = \frac{21}{40}.$$

Từ đó ta có phương sai của X là:
$V(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 = \frac{21}{40} - (\frac{11}{16})^2 = 0.052.$

Nội dung trình bày

1. Biến ngẫu nhiên
   - Biến ngẫu nhiên, định nghĩa và ví dụ
   - Qui luật phân phối xác suất của biến ngẫu nhiên
   - Hàm xác suất
   - Hàm mật độ xác suất
   - Hàm phân phối xác suất
2. Các đặc trưng cơ bản của biến ngẫu nhiên
   - Kì vọng
   - Các tính chất của kì vọng
   - Ý nghĩa của kì vọng toán
   - Phương sai và độ lệch chuẩn
   - Các tính chất của phương sai
   - Ý nghĩa và ứng dụng của phương sai

Các tính chất của phương sai

Tính chất

- $V(C) = 0$, *với mọi* C *là hằng số.*
- $V(CX) = C^2V(X)$, *suy ra* $V(-X) = V(X)$.
- *Nếu* X *và* Y *độc lập thì* $V(X \pm Y) = V(X) + V(Y)$.

Nội dung trình bày

1. Biến ngẫu nhiên
   - Biến ngẫu nhiên, định nghĩa và ví dụ
   - Qui luật phân phối xác suất của biến ngẫu nhiên
   - Hàm xác suất
   - Hàm mật độ xác suất
   - Hàm phân phối xác suất

2. Các đặc trưng cơ bản của biến ngẫu nhiên
   - Kì vọng
   - Các tính chất của kì vọng
   - Ý nghĩa của kì vọng toán
   - Phương sai và độ lệch chuẩn
   - Các tính chất của phương sai
   - Ý nghĩa và ứng dụng của phương sai

Ý nghĩa và ứng dụng của phương sai

- Phương sai phản ánh mức độ phân tán của các giá trị của biến ngẫu nhiên xung quanh giá trị trung bình của nó là kì vọng.
- Trong kĩ thuật phương sai đặc trưng cho mức độ phân tán của các chi tiết gia công hay sai số của thiết bị. Trong quản lí và kinh doanh nó đặc trưng cho mức độ rủi ro của các quyết định.

Ý nghĩa và ứng dụng của phương sai

- Phương sai phản ánh mức độ phân tán của các giá trị của biến ngẫu nhiên xung quanh giá trị trung bình của nó là kì vọng.
- Trong kĩ thuật phương sai đặc trưng cho mức độ phân tán của các chi tiết gia công hay sai số của thiết bị. Trong quản lí và kinh doanh nó đặc trưng cho mức độ rủi ro của các quyết định.

Ví dụ

Bài toán

Bạn đang có 10000\$ *và được đề nghị ba dự án đầu tư trong cùng một thời gian với các ước tính như sau:*

- *Dự án 1: Nếu đầu tư đem về lợi nhuận* 100000\$ *với xác suất* 0.15 *và thiệt hại* 10000\$ *với xác suất* 0.85;
- *Dự án 2: Nếu đầu tư đem về lợi nhuận* 10000\$ *với xác suất* 0.5 *và lợi nhuận* 5000\$ *với xác suất* 0.3 *và thiệt hại* 5000\$ *với xác suất* 0.2;
- *Dự án 3: Chắc chắn đem về lợi nhuận* 4000\$.

Bạn sẽ chọn đầu tư dự án nào?

Lời giải

Ví dụ

Bài toán

Bạn mua một chiếc xe khách và thuê người lái. Bạn đang tính toán chuyện đưa ra giá vé mỗi một hành khách trong mỗi chuyến đi để mỗi chuyến lãi trung bình là 500 nghìn. Bạn ước tính được chi phí mỗi chuyến xe là 2 triệu VND không phụ thuộc vào số khách đi trên xe và thống kê số khách đi trên một chuyến trong thời gian gần đây như sau:

Số khách trên một chuyến	20	25	30	35	40
Xác suất tương ứng	0,2	0,3	0,15	0,1	0,25

Bạn phải đưa ra giá vé mỗi chuyến là bao nhiêu?

Lời giải

Bài tập tự học

Bài toán

Biến ngẫu nhiên rời rạc X có qui luật phân phối xác suất như sau:

X	x_1	x_2
P_X	p_1	*0,7*

Tìm x_1 *và* x_2 $(x_1 < x_2)$ *biết* $\mu_x = 2,7$ *và* $V(X) = 0,21$.

Bài toán

Qua theo dõi trong nhiều năm kết hợp với sự đánh giá của các chuyên gia tài chính thì lãi suất đầu tư vào một công ty là biến ngẫu nhiên có bảng phân phối xác suất như sau:

$X(\%)$	9	10	11	12	13	14	15
P_x	0,05	0,15	0,3	0,2	0,15	0,1	0,05

a. *Tìm lãi suất để khi đầu tư vào công ty đó thì sẽ đạt được lãi suất ít nhất là 12%.*

b. *Tìm lãi suất có thể hi vọng khi đầu tư vào công ty đó.*

c. *Mức độ rủi ro khi đầu tư vào công ty đó có thể đánh giá bằng cách nào?*