Bài giảng Xác suất Thống kê và ứng dụng

Nguyễn Thị Nhung

Bộ môn Toán - Đại học THĂNG LONG

Ngày 24 tháng 8 năm 2013

Chương VIII

Kiểm định giả thuyết

1. Giới thiệu chung về kiểm định giả thuyết
   - Giả thuyết thống kê
   - Sai lầm loại I và loại II
2. Kiểm định giả thuyết một tổng thể
   - Kiểm định giả thuyết về trung bình tổng thể
   - Sử dụng p-giá trị trong bài toán kiểm định
   - Kiểm định giả thuyết về tỉ lệ tổng thể
   - Kiểm định phương sai tổng thể
3. Kiểm định giả thuyết hai tổng thể
   - Kiểm định giả thuyết về sự khác biệt của trung bình hai tổng thể
   - Kiểm định tỉ lệ hai tổng thể
   - Kiểm định giả thuyết cho phương sai của hai tổng thể

1. Giới thiệu chung về kiểm định giả thuyết
   - Giả thuyết thống kê
   - Sai lầm loại I và loại II
2. Kiểm định giả thuyết một tổng thể
   - Kiểm định giả thuyết về trung bình tổng thể
   - Sử dụng p-giá trị trong bài toán kiểm định
   - Kiểm định giả thuyết về tỉ lệ tổng thể
   - Kiểm định phương sai tổng thể
3. Kiểm định giả thuyết hai tổng thể
   - Kiểm định giả thuyết về sự khác biệt của trung bình hai tổng thể
   - Kiểm định tỉ lệ hai tổng thể
   - Kiểm định giả thuyết cho phương sai của hai tổng thể

Chương VIII

1. Giới thiệu chung về kiểm định giả thuyết
   - Giả thuyết thống kê
   - Sai lầm loại I và loại II
2. Kiểm định giả thuyết một tổng thể
   - Kiểm định giả thuyết về trung bình tổng thể
   - Sử dụng p-giá trị trong bài toán kiểm định
   - Kiểm định giả thuyết về tỉ lệ tổng thể
   - Kiểm định phương sai tổng thể
3. Kiểm định giả thuyết hai tổng thể
   - Kiểm định giả thuyết về sự khác biệt của trung bình hai tổng thể
   - Kiểm định tỉ lệ hai tổng thể
   - Kiểm định giả thuyết cho phương sai của hai tổng thể

Nội dung chính được giới thiệu trong chương

- Giới thiệu khái niệm và ví dụ về giả thuyết thống kê;
- Giới thiệu cấu trúc của cặp giả thuyết thống kê và phân loại giả thuyết thống kê;
- Giới thiệu cách đặt giả thuyết thống kê, logic của bài toán kiểm định và các loại sai lầm khi tiến hành kiểm định bài toán thống kê;
- Giới thiệu qui trình thực hiện một bài toán kiểm định thống kê;
- Trình bày bài toán kiểm định giả thuyết tham số một tổng thể: kiểm định trung bình một tổng thể, tỉ lệ một tổng thể, phương sai một tổng thể;
- Trình bày bài toán kiểm định giả thuyết tham số hai tổng thể: so sánh trung bình hai tổng thể, so sánh tỉ lệ hai tổng thể, phương sai của hai tổng thể.

Những kiến thức sinh viên phải hiểu được trong chương

- Nắm được khái niệm và lấy được ví dụ về giả thuyết thống kê;
- Biết được cấu trúc của một cặp giả thuyết trong thống kê và phân loại giả thuyết thống kê;
- Biết cách đặt giả thuyết trong một bài toán thống kê;
- Hiểu được logic của bài toán kiểm định và các loại sai lầm khi tiến hành kiểm định bài toán thống kê;
- Nắm được qui trình thực hiện một bài toán kiểm định trong thống kê;
- Biết cách thực hiện bài toán kiểm định giả thuyết tham số một tổng thể: kiểm định trung bình một tổng thể, tỉ lệ một tổng thể, phương sai một tổng thể;
- Biết cách thực hiện bài toán kiểm định giả thuyết tham số hai tổng thể: so sánh trung bình hai tổng thể, so sánh tỉ lệ hai tổng thể, phương sai của hai tổng thể.

Bài toán

Giả sử bạn là giám đốc điều hành sản xuất của một nhà máy chế biến các loại thực phẩm ăn liền đang quan tâm đặc biệt đến dây chuyền tự động đóng hộp ngũ cốc dinh dưỡng cho người ăn kiêng. Theo đúng qui định thì trọng lượng tịnh của mỗi hộp ngũ cốc là 368gram. Gần đây có một số thông tin làm bạn nghi ngờ rằng dây chuyền có thể gặp trục trặc gì đó khiến qui định trên không được đảm bảo. Làm thế nào để bạn kiểm định được nghi ngờ của mình, tức là kiểm tra xem dây chuyền hoạt động bình thường hay không bình thường?

Câu hỏi tình huống

Bài toán tình huống trên dẫn việc ta phải trả lời một số câu hỏi:

- Để kiểm định xem trọng lượng các hộp có đúng bằng 368gram hay không thì ta phải đặt ra cặp giả thuyết gì? Có điều kiện gì trong cặp giả thuyết đề ra không?
- Để kiểm định ta cần phải chọn mẫu để từ mẫu đưa ra thông tin xem trọng lượng có đúng là 368gram, với trọng lượng của những hộp trong mẫu làm sao ta kết luận được là trọng lượng các hộp có còn đúng là 368gram hay không?

Nội dung trình bày

1. Giới thiệu chung về kiểm định giả thuyết
   - Giả thuyết thống kê
   - Sai lầm loại I và loại II
2. Kiểm định giả thuyết một tổng thể
   - Kiểm định giả thuyết về trung bình tổng thể
   - Sử dụng p-giá trị trong bài toán kiểm định
   - Kiểm định giả thuyết về tỉ lệ tổng thể
   - Kiểm định phương sai tổng thể
3. Kiểm định giả thuyết hai tổng thể
   - Kiểm định giả thuyết về sự khác biệt của trung bình hai tổng thể
   - Kiểm định tỉ lệ hai tổng thể
   - Kiểm định giả thuyết cho phương sai của hai tổng thể

Khái niệm về giả thuyết và giả thuyết thống kê

Khái niệm

Giả thuyết là một kết luận tạm đưa ra để giải thích một hiện tượng nào đó trong tự nhiên hoặc xã hội.

Khái niệm

Giả thuyết thống kê là giả thuyết về phân phối của tổng thể, về các tham số của tổng thể hoặc về tính độc lập của các đặc điểm trong tổng thể.

Khái niệm về giả thuyết và giả thuyết thống kê

Khái niệm

Giả thuyết là một kết luận tạm đưa ra để giải thích một hiện tượng nào đó trong tự nhiên hoặc xã hội.

Khái niệm

Giả thuyết thống kê là giả thuyết về phân phối của tổng thể, về các tham số của tổng thể hoặc về tính độc lập của các đặc điểm trong tổng thể.

Cấu trúc của giả thuyết thống kê

Giả thuyết thống kê luôn bao gồm cặp giả thuyết: Giả thuyết không H_0 và giả thuyết đối H_1 (còn được gọi là đối thuyết).

- Trong H_0 và H_1 phải có giả thuyết đang cần được kiểm định;
- Trong cấu trúc của H_0 luôn có một dấu bằng: $=, \leqslant, \geqslant$. Giả thuyết H_0 thường mô tả hiện tượng lúc bình thường, tức là không có gì mới xảy ra, lí thuyết cũ vẫn đúng, tiêu chuẩn cũ vẫn đúng và hệ thống vẫn đang kiểm soát được,...
- Trong cấu trúc của H_1 không có dấu bằng: $\neq, <, >$. Giả thuyết H_1 mô tả tình trạng ngược với H_0, nó thể hiện các phát biểu, các nghi ngờ, các nhận định về hiện tượng mà ta đang muốn chứng minh.

Cấu trúc của giả thuyết thống kê

Giả thuyết thống kê luôn bao gồm cặp giả thuyết: Giả thuyết không H_0 và giả thuyết đối H_1 (còn được gọi là đối thuyết).

- Trong H_0 và H_1 phải có giả thuyết đang cần được kiểm định;
- Trong cấu trúc của H_0 luôn có một dấu bằng: $=, \leqslant, \geqslant$. Giả thuyết H_0 thường mô tả hiện tượng lúc bình thường, tức là không có gì mới xảy ra, lí thuyết cũ vẫn đúng, tiêu chuẩn cũ vẫn đúng và hệ thống vẫn đang kiểm soát được,...
- Trong cấu trúc của H_1 không có dấu bằng: $\neq, <, >$. Giả thuyết H_1 mô tả tình trạng ngược với H_0, nó thể hiện các phát biểu, các nghi ngờ, các nhận định về hiện tượng mà ta đang muốn chứng minh.

Cấu trúc của giả thuyết thống kê

Giả thuyết thống kê luôn bao gồm cặp giả thuyết: Giả thuyết không H_0 và giả thuyết đối H_1 (còn được gọi là đối thuyết).

- Trong H_0 và H_1 phải có giả thuyết đang cần được kiểm định;
- Trong cấu trúc của H_0 luôn có một dấu bằng: $=, \leqslant, \geqslant$. Giả thuyết H_0 thường mô tả hiện tượng lúc bình thường, tức là không có gì mới xảy ra, lí thuyết cũ vẫn đúng, tiêu chuẩn cũ vẫn đúng và hệ thống vẫn đang kiểm soát được,...
- Trong cấu trúc của H_1 không có dấu bằng: $\neq, <, >$. Giả thuyết H_1 mô tả tình trạng ngược với H_0, nó thể hiện các phát biểu, các nghi ngờ, các nhận định về hiện tượng mà ta đang muốn chứng minh.

Ví dụ về giả thuyết thống kê

Giả sử ta đang nghiên cứu nhu cầu thị trường về một loại hàng hóa nào đó, ta có thể đưa ra các cặp giả thuyết thống kê sau:

- H_0: Nhu cầu của thị trường tuân theo phân phối chuẩn;
  H_1: Nhu cầu của thị trường không tuân theo phân phối chuẩn;
- H_0: Nhu cầu trung bình về loại hàng hóa này là $\mu = 1000$ đơn vị/tháng;
  H_1: Nhu cầu trung bình về loại hàng hóa này là $\mu \neq 1000$ đơn vị/tháng;
- H_0: Nhu cầu thị trường về hàng hóa này là độc lập với thu nhập của người tiêu dùng;
  H_1: Nhu cầu thị trường về hàng hóa này phụ thuộc vào thu nhập của người tiêu dùng.

Ví dụ về giả thuyết thống kê

Giả sử ta đang nghiên cứu nhu cầu thị trường về một loại hàng hóa nào đó, ta có thể đưa ra các cặp giả thuyết thống kê sau:

- H_0: Nhu cầu của thị trường tuân theo phân phối chuẩn;
  H_1: Nhu cầu của thị trường không tuân theo phân phối chuẩn;
- H_0: Nhu cầu trung bình về loại hàng hóa này là $\mu = 1000$ đơn vị/tháng;
  H_1: Nhu cầu trung bình về loại hàng hóa này là $\mu \neq 1000$ đơn vị/tháng;
- H_0: Nhu cầu thị trường về hàng hóa này là độc lập với thu nhập của người tiêu dùng;
  H_1: Nhu cầu thị trường về hàng hóa này phụ thuộc vào thu nhập của người tiêu dùng.

Ví dụ về giả thuyết thống kê

Giả sử ta đang nghiên cứu nhu cầu thị trường về một loại hàng hóa nào đó, ta có thể đưa ra các cặp giả thuyết thống kê sau:

- H_0: Nhu cầu của thị trường tuân theo phân phối chuẩn;
  H_1: Nhu cầu của thị trường không tuân theo phân phối chuẩn;
- H_0: Nhu cầu trung bình về loại hàng hóa này là $\mu = 1000$ đơn vị/tháng;
  H_1: Nhu cầu trung bình về loại hàng hóa này là $\mu \neq 1000$ đơn vị/tháng;
- H_0: Nhu cầu thị trường về hàng hóa này là độc lập với thu nhập của người tiêu dùng;
  H_1: Nhu cầu thị trường về hàng hóa này phụ thuộc vào thu nhập của người tiêu dùng.

Ví dụ về giả thuyết thống kê

Giả sử ta đang nghiên cứu nhu cầu thị trường về một loại hàng hóa nào đó, ta có thể đưa ra các cặp giả thuyết thống kê sau:

- H_0: Nhu cầu của thị trường tuân theo phân phối chuẩn;
  H_1: Nhu cầu của thị trường không tuân theo phân phối chuẩn;
- H_0: Nhu cầu trung bình về loại hàng hóa này là $\mu = 1000$ đơn vị/tháng;
  H_1: Nhu cầu trung bình về loại hàng hóa này là $\mu \neq 1000$ đơn vị/tháng;
- H_0: Nhu cầu thị trường về hàng hóa này là độc lập với thu nhập của người tiêu dùng;
  H_1: Nhu cầu thị trường về hàng hóa này phụ thuộc vào thu nhập của người tiêu dùng.

Các kiểu giả thuyết: Giả thuyết đơn, kép, một bên, hai bên

- Giả thuyết H_0 hay H_1 được gọi là đơn nếu nó chỉ liên quan đến một giá trị duy nhất. Chẳng hạn, $H_0 : \mu = \mu_0$.
- Giả thuyết H_0 hay H_1 được gọi là kép nếu nó liên quan đến một phạm vi giá trị. Chẳng hạn, $H_1 : \mu > \mu_0$, $H_1 : \mu < \mu_0$ hay $H_1 : \mu \neq \mu_0$.
- Các giả thuyết $H_0 : \mu > \mu_0$, $H_0 : \mu < \mu_0$, $H_0 : \mu \leqslant \mu_0$ hay $H_0 : \mu \geqslant \mu_0$ được gọi là giả thuyết một bên.
- Giả thuyết $H_0 : \mu \neq \mu_0$ được gọi là giả thuyết hai bên.

Các kiểu giả thuyết: Giả thuyết đơn, kép, một bên, hai bên

- Giả thuyết H_0 hay H_1 được gọi là đơn nếu nó chỉ liên quan đến một giá trị duy nhất. Chẳng hạn, $H_0 : \mu = \mu_0$.
- Giả thuyết H_0 hay H_1 được gọi là kép nếu nó liên quan đến một phạm vi giá trị. Chẳng hạn, $H_1 : \mu > \mu_0$, $H_1 : \mu < \mu_0$ hay $H_1 : \mu \neq \mu_0$.
- Các giả thuyết $H_0 : \mu > \mu_0$, $H_0 : \mu < \mu_0$, $H_0 : \mu \leqslant \mu_0$ hay $H_0 : \mu \geqslant \mu_0$ được gọi là giả thuyết một bên.
- Giả thuyết $H_0 : \mu \neq \mu_0$ được gọi là giả thuyết hai bên.

Các kiểu giả thuyết: Giả thuyết đơn, kép, một bên, hai bên

- Giả thuyết H_0 hay H_1 được gọi là đơn nếu nó chỉ liên quan đến một giá trị duy nhất. Chẳng hạn, $H_0 : \mu = \mu_0$.
- Giả thuyết H_0 hay H_1 được gọi là kép nếu nó liên quan đến một phạm vi giá trị. Chẳng hạn, $H_1 : \mu > \mu_0$, $H_1 : \mu < \mu_0$ hay $H_1 : \mu \neq \mu_0$.
- Các giả thuyết $H_0 : \mu > \mu_0$, $H_0 : \mu < \mu_0$, $H_0 : \mu \leqslant \mu_0$ hay $H_0 : \mu \geqslant \mu_0$ được gọi là giả thuyết một bên.
- Giả thuyết $H_0 : \mu \neq \mu_0$ được gọi là giả thuyết hai bên.

Các kiểu giả thuyết: Giả thuyết đơn, kép, một bên, hai bên

- Giả thuyết H_0 hay H_1 được gọi là đơn nếu nó chỉ liên quan đến một giá trị duy nhất. Chẳng hạn, $H_0 : \mu = \mu_0$.
- Giả thuyết H_0 hay H_1 được gọi là kép nếu nó liên quan đến một phạm vi giá trị. Chẳng hạn, $H_1 : \mu > \mu_0$, $H_1 : \mu < \mu_0$ hay $H_1 : \mu \neq \mu_0$.
- Các giả thuyết $H_0 : \mu > \mu_0$, $H_0 : \mu < \mu_0$, $H_0 : \mu \leqslant \mu_0$ hay $H_0 : \mu \geqslant \mu_0$ được gọi là giả thuyết một bên.
- Giả thuyết $H_0 : \mu \neq \mu_0$ được gọi là giả thuyết hai bên.

Ví dụ

Bài toán

Giám đốc điều hành sản xuất của một nhà máy chế biến các loại thực phẩm ăn liền đang quan tâm đặc biệt đến dây chuyền tự động đóng hộp ngũ cốc dinh dưỡng cho người ăn kiêng. Theo đúng qui định thì trọng lượng tịnh của mỗi hộp ngũ cốc là 368gram. Nhưng ông ta nghi ngờ rằng dây chuyền có thể gặp trục trặc gì đó khiến qui định trên không được đảm bảo. Hãy nêu cặp giả thuyết mà ông Giám đốc điều hành lập ra để kiểm định nghi ngờ của mình.

Ví dụ

- Đặt giả thuyết cho kiểm định:
  - H_0 được đặt trên cơ sở cho rằng dây chuyền sản xuất vẫn hoạt động bình thường, tức là $H_0 : \mu = 368$.
  - H_1 mô tả tình trạng ngược với H_0
    - Nếu nghi ngờ trục trặc của dây chuyền làm cho nó đóng hộp một lượng bột nhiều hơn tiêu chuẩn thì ông ta sẽ đặt $H_1 : \mu > 368$.
    - Nếu nghi ngờ trục trặc của dây chuyền làm cho nó đóng hộp một lượng bột ít hơn tiêu chuẩn thì ông ta sẽ đặt $H_1 : \mu < 368$.
    - Nếu không biết rõ hướng sai lệch mà chỉ nghi ngờ chung là dây chuyền gặp trục trặc trong vấn đề đóng hộp thì ông ta sẽ đặt $H_1 : \mu \neq 368$.

- Thực hiện bài toán kiểm định là việc ta phải đi đến một trong hai quyết định: Không bác bỏ H_0 (bác bỏ H_1) hoặc ngược lại bác bỏ H_0 (tức chấp nhận H_1).
- Tuy nhiên, ta phải nhớ rằng khi ta không bác bỏ được H_0 không đồng nghĩa với việc ta đã chứng minh được H_0 đúng mà chỉ **không có đủ bằng chứng thống kê** để bác bỏ nó mà thôi. Lí do một nhà thống kê không bao giờ có thể chứng minh H_0 hoàn toàn đúng vì họ chỉ có thông tin trên một mẫu dữ liệu chứ không có thông tin trên toàn bộ tổng thể. Khi bác bỏ H_0 không có nghĩa là ta chấp nhận H_1 đúng hoàn toàn mà chỉ có bằng chứng thống kê để cho rằng H_1 đúng.

Thực hiện bài toán kiểm định

- Thực hiện bài toán kiểm định là việc ta phải đi đến một trong hai quyết định: Không bác bỏ H_0 (bác bỏ H_1) hoặc ngược lại bác bỏ H_0 (tức chấp nhận H_1).
- Tuy nhiên, ta phải nhớ rằng khi ta không bác bỏ được H_0 không đồng nghĩa với việc ta đã chứng minh được H_0 đúng mà chỉ **không có đủ bằng chứng thống kê** để bác bỏ nó mà thôi. Lí do một nhà thống kê không bao giờ có thể chứng minh H_0 hoàn toàn đúng vì họ chỉ có thông tin trên một mẫu dữ liệu chứ không có thông tin trên toàn bộ tổng thể. Khi bác bỏ H_0 không có nghĩa là ta chấp nhận H_1 đúng hoàn toàn mà chỉ có bằng chứng thống kê để cho rằng H_1 đúng.

Thực hiện bài toán kiểm định

- Thực hiện bài toán kiểm định là việc ta phải đi đến một trong hai quyết định: Không bác bỏ H_0 (bác bỏ H_1) hoặc ngược lại bác bỏ H_0 (tức chấp nhận H_1).
- Tuy nhiên, ta phải nhớ rằng khi ta không bác bỏ được H_0 không đồng nghĩa với việc ta đã chứng minh được H_0 đúng mà chỉ **không có đủ bằng chứng thống kê** để bác bỏ nó mà thôi. Lí do một nhà thống kê không bao giờ có thể chứng minh H_0 hoàn toàn đúng vì họ chỉ có thông tin trên một mẫu dữ liệu chứ không có thông tin trên toàn bộ tổng thể. Khi bác bỏ H_0 không có nghĩa là ta chấp nhận H_1 đúng hoàn toàn mà chỉ có bằng chứng thống kê để cho rằng H_1 đúng.

Logic của bài toán kiểm định

Ta sẽ xét logic của bài toán kiểm định thông qua cách thức sử dụng thông tin mẫu để quyết định về sự đúng đắn của H_0 với ví dụ về kiểm định khối lượng ngũ cốc đóng hộp:

- Giả sử giả thuyết H_0 là trọng lượng trung bình của các hộp ngũ cốc trong tổng thể đúng là 368*gram*;
- Chọn một mẫu ngẫu nhiên các hộp ngũ cốc và tính trọng lượng trung bình của các hộp được chọn;
- Con số trung bình này là một thông tin từ mẫu dùng để ước lượng cho trung bình tổng thể và ngay cả khi giả thuyết H_0 đúng, tức là trung bình của tổng thể đúng là 368*gram*, thì con số trung bình tính được từ mẫu vẫn có thể khác 368*gram*;

Logic của bài toán kiểm định

Ta sẽ xét logic của bài toán kiểm định thông qua cách thức sử dụng thông tin mẫu để quyết định về sự đúng đắn của H_0 với ví dụ về kiểm định khối lượng ngũ cốc đóng hộp:

- Giả sử giả thuyết H_0 là trọng lượng trung bình của các hộp ngũ cốc trong tổng thể đúng là 368*gram*;
- Chọn một mẫu ngẫu nhiên các hộp ngũ cốc và tính trọng lượng trung bình của các hộp được chọn;
- Con số trung bình này là một thông tin từ mẫu dùng để ước lượng cho trung bình tổng thể và ngay cả khi giả thuyết H_0 đúng, tức là trung bình của tổng thể đúng là 368*gram*, thì con số trung bình tính được từ mẫu vẫn có thể khác 368*gram*;

Logic của bài toán kiểm định

Ta sẽ xét logic của bài toán kiểm định thông qua cách thức sử dụng thông tin mẫu để quyết định về sự đúng đắn của H_0 với ví dụ về kiểm định khối lượng ngũ cốc đóng hộp:

- Giả sử giả thuyết H_0 là trọng lượng trung bình của các hộp ngũ cốc trong tổng thể đúng là 368*gram*;
- Chọn một mẫu ngẫu nhiên các hộp ngũ cốc và tính trọng lượng trung bình của các hộp được chọn;
- Con số trung bình này là một thông tin từ mẫu dùng để ước lượng cho trung bình tổng thể và ngay cả khi giả thuyết H_0 đúng, tức là trung bình của tổng thể đúng là 368*gram*, thì con số trung bình tính được từ mẫu vẫn có thể khác 368*gram*;

Logic của bài toán kiểm định

Ta sẽ xét logic của bài toán kiểm định thông qua cách thức sử dụng thông tin mẫu để quyết định về sự đúng đắn của H_0 với ví dụ về kiểm định khối lượng ngũ cốc đóng hộp:

- Giả sử giả thuyết H_0 là trọng lượng trung bình của các hộp ngũ cốc trong tổng thể đúng là $368gram$;
- Chọn một mẫu ngẫu nhiên các hộp ngũ cốc và tính trọng lượng trung bình của các hộp được chọn;
- Con số trung bình này là một thông tin từ mẫu dùng để ước lượng cho trung bình tổng thể và ngay cả khi giả thuyết H_0 đúng, tức là trung bình của tổng thể đúng là $368gram$, thì con số trung bình tính được từ mẫu vẫn có thể khác $368gram$;

Logic của bài toán kiểm định

Tuy nhiên, nếu H_0 đúng thì ta hy vọng giá trị tính được từ mẫu gần với con số thực của tổng thể là $368gram$:

- Nếu giá trị tính từ mẫu gần với 368, chẳng hạn là 367.5 thì ta tin rằng mẫu này được chọn ra từ tổng thể có trọng lượng trung bình là 368, tức là dây chuyền vẫn hoạt động bình thường và không bác bỏ H_0; Trong trường hợp này ta nói giá trị 367.5 sai biệt không có ý nghĩa thống kê so với 368.
- Nếu giá trị tính từ mẫu xa với 368, chẳng hạn là 345 thì ta khó có thể chấp nhận rằng mẫu này được chọn ra từ tổng thể có trọng lượng trung bình đúng bằng 368, tức là ta nghi ngờ dây chuyền hoạt động không bình thường và bác bỏ H_0; Trong trường hợp này ta nói 345 sai biệt có ý nghĩa thống kê so với 368.

Logic của bài toán kiểm định

Tuy nhiên, nếu H_0 đúng thì ta hy vọng giá trị tính được từ mẫu gần với con số thực của tổng thể là 368$gram$:

- Nếu giá trị tính từ mẫu gần với 368, chẳng hạn là 367.5 thì ta tin rằng mẫu này được chọn ra từ tổng thể có trọng lượng trung bình là 368, tức là dây chuyền vẫn hoạt động bình thường và không bác bỏ H_0; Trong trường hợp này ta nói giá trị 367.5 sai biệt không có ý nghĩa thống kê so với 368.
- Nếu giá trị tính từ mẫu xa với 368, chẳng hạn là 345 thì ta khó có thể chấp nhận rằng mẫu này được chọn ra từ tổng thể có trọng lượng trung bình đúng bằng 368, tức là ta nghi ngờ dây chuyền hoạt động không bình thường và bác bỏ H_0; Trong trường hợp này ta nói 345 sai biệt có ý nghĩa thống kê so với 368.

Tuy nhiên, nếu H_0 đúng thì ta hy vọng giá trị tính được từ mẫu gần với con số thực của tổng thể là 368*gram*:

- Nếu giá trị tính từ mẫu gần với 368, chẳng hạn là 367.5 thì ta tin rằng mẫu này được chọn ra từ tổng thể có trọng lượng trung bình là 368, tức là dây chuyền vẫn hoạt động bình thường và không bác bỏ H_0; Trong trường hợp này ta nói giá trị 367.5 sai biệt không có ý nghĩa thống kê so với 368.
- Nếu giá trị tính từ mẫu xa với 368, chẳng hạn là 345 thì ta khó có thể chấp nhận rằng mẫu này được chọn ra từ tổng thể có trọng lượng trung bình đúng bằng 368, tức là ta nghi ngờ dây chuyền hoạt động không bình thường và bác bỏ H_0; Trong trường hợp này ta nói 345 sai biệt có ý nghĩa thống kê so với 368.

Logic của bài toán kiểm định

Chú ý: Việc quyết định con số tính ra từ mẫu là "gần hay xa" so với con số thực phải dựa trên lí thuyết kiểm định thống kê. Dựa vào giá trị kiểm định thống kê tính toán từ mẫu và phân phối của giá trị kiểm định để đưa ra quyết định chấp nhận hay bác bỏ H_0.

Nội dung trình bày

1. Giới thiệu chung về kiểm định giả thuyết
   - Giả thuyết thống kê
   - Sai lầm loại I và loại II
2. Kiểm định giả thuyết một tổng thể
   - Kiểm định giả thuyết về trung bình tổng thể
   - Sử dụng p-giá trị trong bài toán kiểm định
   - Kiểm định giả thuyết về tỉ lệ tổng thể
   - Kiểm định phương sai tổng thể
3. Kiểm định giả thuyết hai tổng thể
   - Kiểm định giả thuyết về sự khác biệt của trung bình hai tổng thể
   - Kiểm định tỉ lệ hai tổng thể
   - Kiểm định giả thuyết cho phương sai của hai tổng thể

Xác suất sai lầm loại I và sai lầm loại II

- Sai lầm loại I: Bác bỏ giả thuyết H_0 nhưng thực ra H_0 đúng. Xác suất để xảy ra sai lầm loại I kí hiệu là α và được gọi là mức ý nghĩa của phép kiểm định.
- Sai lầm loại II: Chấp nhận giả thuyết H_0 nhưng thực ra H_0 sai. Xác suất để xảy ra sai lầm loại II kí hiệu là β và khi đó $1-\beta$ là xác suất bác bỏ giả thuyết H_0 khi nó sai và được gọi là năng lực của phép kiểm định.
- Bảng sau đây cho ta mối quan hệ giữa hai loại sai lầm:

Quyết định	H_0 đúng	H_0 sai
Bác bỏ H_0	Sai lầm loại I xác suất $=\alpha$ α là mức ý nghĩa	Quyết định đúng xác suất $=1-\beta$ $1-\beta$ là năng lực của phép kiểm định
Không bác bỏ H_0	Quyết định đúng xác suất $=1-\alpha$	Sai lầm loại II xác suất $=\beta$

Xác suất sai lầm loại I và sai lầm loại II

- Sai lầm loại I: Bác bỏ giả thuyết H_0 nhưng thực ra H_0 đúng. Xác suất để xảy ra sai lầm loại I kí hiệu là α và được gọi là mức ý nghĩa của phép kiểm định.
- Sai lầm loại II: Chấp nhận giả thuyết H_0 nhưng thực ra H_0 sai. Xác suất để xảy ra sai lầm loại II kí hiệu là β và khi đó $1-\beta$ là xác suất bác bỏ giả thuyết H_0 khi nó sai và được gọi là năng lực của phép kiểm định.
- Bảng sau đây cho ta mối quan hệ giữa hai loại sai lầm:

Quyết định	H_0 đúng	H_0 sai
Bác bỏ H_0	Sai lầm loại I xác suất $=\alpha$ α là mức ý nghĩa	Quyết định đúng xác suất $=1-\beta$ $1-\beta$ là năng lực của phép kiểm định
Không bác bỏ H_0	Quyết định đúng xác suất $=1-\alpha$	Sai lầm loại II xác suất $=\beta$

Xác suất sai lầm loại I và sai lầm loại II

- Sai lầm loại I: Bác bỏ giả thuyết H_0 nhưng thực ra H_0 đúng. Xác suất để xảy ra sai lầm loại I kí hiệu là α và được gọi là mức ý nghĩa của phép kiểm định.
- Sai lầm loại II: Chấp nhận giả thuyết H_0 nhưng thực ra H_0 sai. Xác suất để xảy ra sai lầm loại II kí hiệu là β và khi đó $1-\beta$ là xác suất bác bỏ giả thuyết H_0 khi nó sai và được gọi là năng lực của phép kiểm định.
- Bảng sau đây cho ta mối quan hệ giữa hai loại sai lầm:

Quyết định	H_0 đúng	H_0 sai
Bác bỏ H_0	Sai lầm loại I xác suất $=\alpha$ α là mức ý nghĩa	Quyết định đúng xác suất $=1-\beta$ $1-\beta$ là năng lực của phép kiểm định
Không bác bỏ H_0	Quyết định đúng xác suất $=1-\alpha$	Sai lầm loại II xác suất $=\beta$

Mối quan hệ giữa hai loại sai lầm

- Trong khi kiểm định nếu ta bác bỏ H_0 thì ta đang đứng trước nguy cơ phạm sai lầm loại I, còn ta không bác bỏ H_0 thì ta đối mặt với sai lầm loại II.
- Khi cỡ mẫu nghiên cứu không thay đổi xác suất để xảy ra sai lầm loại I và II là α, β biến thiên ngược chiều nhau. Tức là nếu ta giảm khả năng xảy ra sai lầm loại I thì làm cho khả năng xảy ra sai lầm loại II tăng lên và ngược lại.
- Cách duy nhất để cùng làm giảm xác suất của hai loại sai lầm α, β là tăng cỡ mẫu nghiên cứu.

Mối quan hệ giữa hai loại sai lầm

- Trong khi kiểm định nếu ta bác bỏ H_0 thì ta đang đứng trước nguy cơ phạm sai lầm loại I, còn ta không bác bỏ H_0 thì ta đối mặt với sai lầm loại II.
- Khi cỡ mẫu nghiên cứu không thay đổi xác suất để xảy ra sai lầm loại I và II là α, β biến thiên ngược chiều nhau. Tức là nếu ta giảm khả năng xảy ra sai lầm loại I thì làm cho khả năng xảy ra sai lầm loại II tăng lên và ngược lại.
- Cách duy nhất để cùng làm giảm xác suất của hai loại sai lầm α, β là tăng cỡ mẫu nghiên cứu.

Mối quan hệ giữa hai loại sai lầm

- Trong khi kiểm định nếu ta bác bỏ H_0 thì ta đang đứng trước nguy cơ phạm sai lầm loại I, còn ta không bác bỏ H_0 thì ta đối mặt với sai lầm loại II.
- Khi cỡ mẫu nghiên cứu không thay đổi xác suất để xảy ra sai lầm loại I và II là α, β biến thiên ngược chiều nhau. Tức là nếu ta giảm khả năng xảy ra sai lầm loại I thì làm cho khả năng xảy ra sai lầm loại II tăng lên và ngược lại.
- Cách duy nhất để cùng làm giảm xác suất của hai loại sai lầm α, β là tăng cỡ mẫu nghiên cứu.

Mức ý nghĩa và kết luận có ý nghĩa thống kê

- Nếu như giả thuyết không bị bác bỏ và do đó giả thuyết đối được chấp nhận, thì ta nói một kết quả có ý nghĩa thống kê đã đạt được. Các nhà thống kê và nhà nghiên cứu sử dụng từ "có ý nghĩa" ở đây chỉ mang nghĩa là kết quả không phải là tình cờ đạt được. Chẳng hạn khi ta nói "sự sai biệt có ý nghĩa thống kê" có nghĩa là có bằng chứng thống kê để chỉ ra sự sai biệt, nó không mang ý là sự sai biệt có ý nghĩa lớn lao hay quan trọng như từ "có ý nghĩa" như ta hiểu trong cuộc sống.
- Mức ý nghĩa α cho ta xác suất xảy ra sai lầm loại I, với $\alpha = 5\%$ thì ta chỉ có 5% khả năng phạm phải lỗi đã bác bỏ H_0 khi thực tế nó đúng, nói theo chiều khác, chúng ta tin cậy 95% là ta đã quyết định đúng. Lúc này ta phát biểu là giả thuyết đã bị bác bỏ ở mức ý nghĩa 5%.
- Nếu một nhà thống kê kết luận rằng kiểm định của họ "có ý nghĩa thống kê ở mức $p\%$", tức là họ đã đi đến bác bỏ H_0 và có thể sai tối đa $p\%$ với kết luận đó.

Mức ý nghĩa và kết luận có ý nghĩa thống kê

- Nếu như giả thuyết không bị bác bỏ và do đó giả thuyết đối được chấp nhận, thì ta nói một kết quả có ý nghĩa thống kê đã đạt được. Các nhà thống kê và nhà nghiên cứu sử dụng từ "có ý nghĩa" ở đây chỉ mang nghĩa là kết quả không phải là tình cờ đạt được. Chẳng hạn khi ta nói "sự sai biệt có ý nghĩa thống kê" có nghĩa là có bằng chứng thống kê để chỉ ra sự sai biệt, nó không mang ý là sự sai biệt có ý nghĩa lớn lao hay quan trọng như từ "có ý nghĩa" như ta hiểu trong cuộc sống.
- Mức ý nghĩa α cho ta xác suất xảy ra sai lầm loại I, với $\alpha = 5\%$ thì ta chỉ có 5% khả năng phạm phải lỗi đã bác bỏ H_0 khi thực tế nó đúng, nói theo chiều khác, chúng ta tin cậy 95% là ta đã quyết định đúng. Lúc này ta phát biểu là giả thuyết đã bị bác bỏ ở mức ý nghĩa 5%.
- Nếu một nhà thống kê kết luận rằng kiểm định của họ "có ý nghĩa thống kê ở mức $p\%$", tức là họ đã đi đến bác bỏ H_0 và có thể sai tối đa $p\%$ với kết luận đó.

Mức ý nghĩa và kết luận có ý nghĩa thống kê

- Nếu như giả thuyết không bị bác bỏ và do đó giả thuyết đối được chấp nhận, thì ta nói một kết quả có ý nghĩa thống kê đã đạt được. Các nhà thống kê và nhà nghiên cứu sử dụng từ "có ý nghĩa" ở đây chỉ mang nghĩa là kết quả không phải là tình cờ đạt được. Chẳng hạn khi ta nói "sự sai biệt có ý nghĩa thống kê" có nghĩa là có bằng chứng thống kê để chỉ ra sự sai biệt, nó không mang ý là sự sai biệt có ý nghĩa lớn lao hay quan trọng như từ "có ý nghĩa" như ta hiểu trong cuộc sống.
- Mức ý nghĩa α cho ta xác suất xảy ra sai lầm loại I, với $\alpha = 5\%$ thì ta chỉ có 5% khả năng phạm phải lỗi đã bác bỏ H_0 khi thực tế nó đúng, nói theo chiều khác, chúng ta tin cậy 95% là ta đã quyết định đúng. Lúc này ta phát biểu là giả thuyết đã bị bác bỏ ở mức ý nghĩa 5%.
- Nếu một nhà thống kê kết luận rằng kiểm định của họ "có ý nghĩa thống kê ở mức $p\%$", tức là họ đã đi đến bác bỏ H_0 và có thể sai tối đa $p\%$ với kết luận đó.

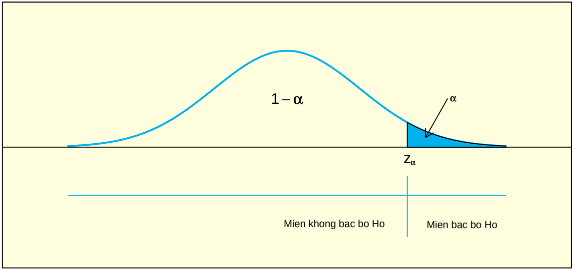
Giá trị tới hạn

- Khi xác định được α thì ta đã xác định được vùng bác bỏ và vùng chấp nhận H_0. Khi đó ta cũng xác định biên giới chia đôi hai vùng chấp nhận và bác bỏ H_0 trên phân phối của giá trị kiểm định, giá trị biên giới này được gọi là giá trị tới hạn.
- Nếu giá trị thống kê kiểm định rơi vào vùng bác bỏ H_0 thì chúng ta bác bỏ H_0 và ngược lại, nếu nó rơi vào vùng chấp nhận H_0 thì ta không bác bỏ H_0.

Giá trị tới hạn

- Khi xác định được α thì ta đã xác định được vùng bác bỏ và vùng chấp nhận H_0. Khi đó ta cũng xác định biên giới chia đôi hai vùng chấp nhận và bác bỏ H_0 trên phân phối của giá trị kiểm định, giá trị biên giới này được gọi là giá trị tới hạn.
- Nếu giá trị thống kê kiểm định rơi vào vùng bác bỏ H_0 thì chúng ta bác bỏ H_0 và ngược lại, nếu nó rơi vào vùng chấp nhận H_0 thì ta không bác bỏ H_0.

Minh họa bằng hình vẽ



Bài toán

Một kĩ sư cầu đường quyết định kiểm định khả năng chịu lực của cây cầu 20 tuổi xem có chịu lực được 10 tấn nữa không? Hãy xét xem phép kiểm định một bên hay hai bên là thích hợp và hãy đặt cặp giả thuyết cần kiểm định.

Ôn luyện cách đặt giả thuyết

Bài toán

Bác sĩ Xuân cho rằng chất nicotin trong thuốc lá làm cho số nhịp tim trung bình của những người nghiện thuốc lá cao hơn trung bình của những người không hút thuốc. Ông ta cũng tin rằng những người hút thuốc lá thèm nicotin hơn là chỉ hút để thỏa mãn hành động hút, do đó người hút trung bình sẽ hút nhiều hơn mỗi ngày nếu người ấy chuyển từ một loại thuốc chứa nhiều nicotin sang một loại thuốc chứa ít nicotin.

a. Giả sử rằng bác sĩ Xuân biết rằng nhịp tim trung bình của những người không hút thuốc là 78 lần/phút. Tìm giả thuyết H_0 và H_1 thích hợp cho việc kiểm định niềm tin thứ nhất của bác sĩ Xuân.

b. Trong ba tháng vừa qua, bác sĩ Xuân đã theo dõi một mẫu gồm 48 người hút trung bình 15 điếu thuốc chứa nhiều nicotin mỗi ngày. Ông ta vừa mới chuyển họ qua một loại thuốc chứa ít nicotin hơn. Hãy nêu các giả thuyết H_0 và H_1 cho việc kiểm định niềm tin thứ hai của bác sĩ Xuân.

c. Trong câu (b) nếu đặt cặp giả thuyết là $H0 : \mu \geqslant 15, H1 : \mu < 15$ có được không?

Ôn luyện cách đặt giả thuyết

Bài toán

Giả thuyết không của bạn là viên pin của một máy trợ tim có thời gian dùng trung bình là 300 ngày, với giả thuyết đối lập là thời gian dùng nhỏ hơn 300 ngày. Nếu bạn là một chuyên viên kiểm tra chất lượng của máy trợ tim thì:

a. *Bạn sẽ ưu tiên cho sai lầm loại 1 hay loại 2?*

b. *Dựa vào câu trả lời của bạn ở phần a. thì bạn sẽ dùng một mức ý nghĩa cao hay thấp?*

Bài tập tự học

Bài toán

a. *Một cơ sở sản xuất bóng đèn muốn sản xuất các bóng đèn với thời gian dùng trung bình là 1000 giờ. Nếu thời gian dùng ngắn hơn 1000 giờ thì cơ sở sẽ mất khách hàng. Nếu thời gian dùng dài hơn thì chi phí phải tăng lên. Đứng trên cương vị của nhà sản xuất bạn chọn cặp giả thuyết nào khi muốn kiểm tra thời gian dùng trung bình của bóng đèn?*

b. *Một nhà buôn mua bóng đèn theo từng lô lớn và sẽ không muốn nhận một lô bóng đèn trừ khi thời gian dùng trung bình là 1000 giờ. Khi các lô bóng đèn được chở tới, nhà buôn sẽ kiểm định một mẫu để quyết định xem có nên nhận lô ấy không. Theo bạn nhà buôn sẽ chọn cặp giả thuyết nào?*

Qui trình kiểm định giả thuyết

- Bước 1: Thiết lập giả thuyết không và giả thuyết đối.
- Bước 2: Xác định kiểm định thống kê thích hợp và thiết lập qui tắc quyết định;
- Bước 3: Tính các giá trị kiểm định trên mẫu và đưa ra kết luận.
- Bước 4: Trình bày các quyết định trong kinh tế và xã hội.

Qui trình kiểm định giả thuyết

- Bước 1: Thiết lập giả thuyết không và giả thuyết đối.
- Bước 2: Xác định kiểm định thống kê thích hợp và thiết lập qui tắc quyết định;
- Bước 3: Tính các giá trị kiểm định trên mẫu và đưa ra kết luận.
- Bước 4: Trình bày các quyết định trong kinh tế và xã hội.

Qui trình kiểm định giả thuyết

- Bước 1: Thiết lập giả thuyết không và giả thuyết đối.
- Bước 2: Xác định kiểm định thống kê thích hợp và thiết lập qui tắc quyết định;
- Bước 3: Tính các giá trị kiểm định trên mẫu và đưa ra kết luận.
- Bước 4: Trình bày các quyết định trong kinh tế và xã hội.

Qui trình kiểm định giả thuyết

- Bước 1: Thiết lập giả thuyết không và giả thuyết đối.
- Bước 2: Xác định kiểm định thống kê thích hợp và thiết lập qui tắc quyết định;
- Bước 3: Tính các giá trị kiểm định trên mẫu và đưa ra kết luận.
- Bước 4: Trình bày các quyết định trong kinh tế và xã hội.

Nội dung trình bày

1. Giới thiệu chung về kiểm định giả thuyết
   - Giả thuyết thống kê
   - Sai lầm loại I và loại II
2. Kiểm định giả thuyết một tổng thể
   - Kiểm định giả thuyết về trung bình tổng thể
   - Sử dụng p-giá trị trong bài toán kiểm định
   - Kiểm định giả thuyết về tỉ lệ tổng thể
   - Kiểm định phương sai tổng thể
3. Kiểm định giả thuyết hai tổng thể
   - Kiểm định giả thuyết về sự khác biệt của trung bình hai tổng thể
   - Kiểm định tỉ lệ hai tổng thể
   - Kiểm định giả thuyết cho phương sai của hai tổng thể

Câu hỏi

Câu hỏi: Hãy nêu lại các trường hợp về phân phối của trung bình mẫu và từ đó đưa ra các trường hợp về kiểm định trung bình một tổng thể.

Kiểm định trung bình tổng thể tuân theo phân phối chuẩn, phương sai đã biết

Bài toán

Tổng thể tuân theo phân phối chuẩn với trung bình μ *chưa biết và phương sai* σ^2 *đã biết. Ta muốn kiểm định các cặp giả thuyết* H_0 *và* H_1 *cho giá trị trung bình* μ *tại mức ý nghĩa* α*.*

Thiết lập cặp giả thuyết

- Ta có thể thiết lập được 5 cặp giả thuyết không và giả thuyết đối:

$$\begin{array}{llllll} H_0: & \mu = \mu_0 & \mu = \mu_0 & \mu = \mu_0 & \mu \geqslant \mu_0 & \mu \leqslant \mu_0 \\ H_1: & \mu > \mu_0 & \mu < \mu_0 & \mu \neq \mu_0 & \mu < \mu_0 & \mu > \mu_0 \end{array}$$

- Do cùng chung qui luật bác bỏ nên ta đưa về xét ba bài toán chính:

$$\begin{array}{lccc} & \text{Bài toán 1} & \text{Bài toán 2} & \text{Bài toán 3} \\ H_0: & \mu = \mu_0;\ \mu \leqslant \mu_0 & \mu = \mu_0;\ \mu \geqslant \mu_0 & \mu = \mu_0 \\ H_1: & \mu > \mu_0 & \mu < \mu_0 & \mu \neq \mu_0 \end{array}$$

Qui trình thực hiện

- Bước 1: Thiết lập cặp giả thuyết

	Bài toán 1	Bài toán 2	Bài toán 3
H_0 :	$\mu = \mu_0;\ \mu \leqslant \mu_0$	$\mu = \mu_0;\ \mu \geqslant \mu_0$	$\mu = \mu_0$
H_1 :	$\mu > \mu_0$	$\mu < \mu_0$	$\mu \neq \mu_0$

- Bước 2: Xác định qui luật kiểm định và tính toán các giá trị:
  - Qui luật: $\dfrac{\overline{X} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0,1)$.
  - Tính giá trị thống kê: $z = \dfrac{\overline{x} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}$.
  - Tính giá trị tới hạn: z_α hoặc $z_{\alpha/2}$.
- Bước 3: Kết luận tại mức ý nghĩa α:
  - Bài toán 1: Bác bỏ H_0 nếu $z > z_\alpha$.
  - Bài toán 2: Bác bỏ H_0 nếu $z < -z_\alpha$.
  - Bài toán 3: Bác bỏ H_0 nếu $z < -z_{\alpha/2}$ hoặc $z > z_{\alpha/2}$ hay $|z| > z_{\alpha/2}$.
- Bước 4: Đưa ra những quyết định phù hợp trong kinh tế - xã hội.

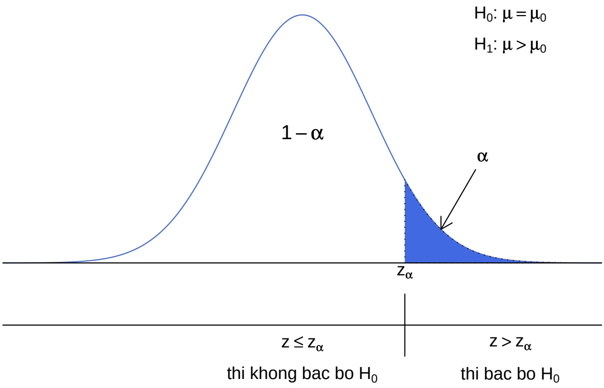
Qui trình thực hiện

- Bước 1: Thiết lập cặp giả thuyết

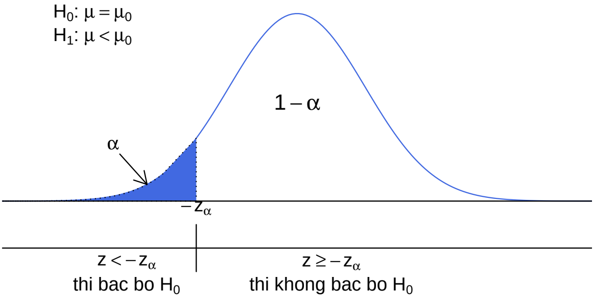
	Bài toán 1	Bài toán 2	Bài toán 3
H_0 :	$\mu = \mu_0; \mu \leqslant \mu_0$	$\mu = \mu_0; \mu \geqslant \mu_0$	$\mu = \mu_0$
H_1 :	$\mu > \mu_0$	$\mu < \mu_0$	$\mu \neq \mu_0$

- Bước 2: Xác định qui luật kiểm định và tính toán các giá trị:
  - Qui luật: $\dfrac{\overline{X} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0,1)$.
  - Tính giá trị thống kê: $z = \dfrac{\overline{x} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}$.
  - Tính giá trị tới hạn: z_α hoặc $z_{\alpha/2}$.
- Bước 3: Kết luận tại mức ý nghĩa α:
  - Bài toán 1: Bác bỏ H_0 nếu $z > z_\alpha$.
  - Bài toán 2: Bác bỏ H_0 nếu $z < -z_\alpha$.
  - Bài toán 3: Bác bỏ H_0 nếu $z < -z_{\alpha/2}$ hoặc $z > z_{\alpha/2}$ hay $|z| > z_{\alpha/2}$.
- Bước 4: Đưa ra những quyết định phù hợp trong kinh tế - xã hội.

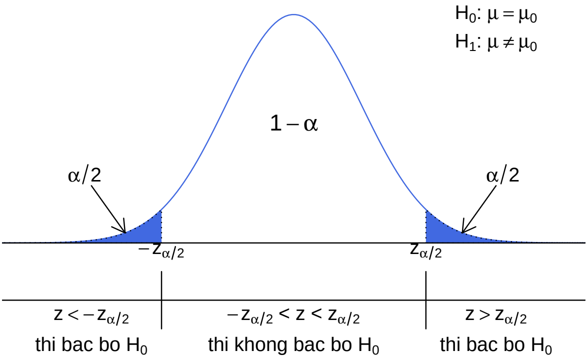
Minh họa bằng hình vẽ



Minh họa bằng hình vẽ



Minh họa bằng hình vẽ



Ví dụ

Bài toán

Trong ví dụ về trọng lượng trung bình của các hộp ngũ cốc, biết rằng ông giám đốc điều hành chọn ngẫu nhiên 25 hộp ngũ cốc thì thấy trọng lượng trung bình của mẫu này là 372.5 gram. Giả sử tổng thể tuân theo phân phối chuẩn với độ lệch chuẩn là 15, tại mức ý nghĩa $\alpha = 5\%$*, nếu ông giám đốc chỉ nghi ngờ là dây chuyền trục trặc nói chung, thì ông ta phải tiến hành kiểm định như thế nào để kiểm định nghi ngờ của mình?*

Lời giải

Nội dung trình bày

1. Giới thiệu chung về kiểm định giả thuyết
   - Giả thuyết thống kê
   - Sai lầm loại I và loại II
2. Kiểm định giả thuyết một tổng thể
   - Kiểm định giả thuyết về trung bình tổng thể
   - Sử dụng p-giá trị trong bài toán kiểm định
   - Kiểm định giả thuyết về tỉ lệ tổng thể
   - Kiểm định phương sai tổng thể
3. Kiểm định giả thuyết hai tổng thể
   - Kiểm định giả thuyết về sự khác biệt của trung bình hai tổng thể
   - Kiểm định tỉ lệ hai tổng thể
   - Kiểm định giả thuyết cho phương sai của hai tổng thể

Logic của việc kiểm định dựa trên p-giá trị

Thống kê hiện đại đưa ra quyết định chấp nhận hay bác bỏ H_0 dựa trên p-giá trị của phép kiểm định. Để xét logic của việc sử dụng đại lượng này trong việc đưa ra quyết định, ta lấy ví dụ về bài toán kiểm định cặp giả thuyết: $H_0 : \mu = \mu_0, H1 : \mu > \mu_0$, với phương sai của tổng thể đã biết tại mức ý nghĩa α. Ta tiến hành điều tra chọn mẫu, tính giá trị

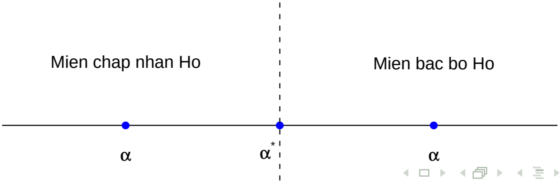
$$z_0 = \frac{\overline{x} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}}$$

sau đó thực hiện so sánh nếu $z_0 > z_\alpha$ thì bác bỏ H_0.

Logic của việc kiểm định dựa trên p-giá trị

Nhận thấy tại những mức ý nghĩa α để $z_\alpha < z_0$ thì giả thuyết H_0 vẫn bị bác bỏ. Ta xác định giá trị $z_{\alpha*}$ lớn nhất mà tại đó $z_{\alpha*} < z_0$ hay giá trị α^* nhỏ nhất mà tại đó $z_{\alpha*} < z_0$ hay giả thuyết H_0 bị bác bỏ. Khi đó:

- Tại mức ý nghĩa α mà $\alpha > \alpha^*$ thì bác bỏ H_0;
- Tại mức ý nghĩa α mà $\alpha < \alpha^*$ thì không bác bỏ H_0.



Định nghĩa p-giá trị và qui tắc sử dụng P-giá trị khi đưa quyết định

Định nghĩa

Mức ý nghĩa α nhỏ nhất mà tại đó giả thuyết H_0 bị bác bỏ được gọi là p-giá trị của phép kiểm định.

Qui tắc kiểm định sử dụng p-giá trị tại mức ý nghĩa α:

- Nếu p-giá trị $< \alpha$ thì bác bỏ H_0;
- Nếu p-giá trị $\geqslant \alpha$ thì chấp nhận H_0.

Định nghĩa p-giá trị và qui tắc sử dụng P-giá trị khi đưa quyết định

Định nghĩa

Mức ý nghĩa α nhỏ nhất mà tại đó giả thuyết H_0 bị bác bỏ được gọi là p-giá trị của phép kiểm định.

Qui tắc kiểm định sử dụng p-giá trị tại mức ý nghĩa α:

- Nếu p-giá trị $< \alpha$ thì bác bỏ H_0;
- Nếu p-giá trị $\geqslant \alpha$ thì chấp nhận H_0.

Sử dụng p-giá trị trong bài toán kiểm định

Cách tìm p-giá trị cho bài toán kiểm định trung bình tổng thể khi biết phương sai tổng thể:

- Nếu $H_1 : \mu > \mu_0$ thì p-giá trị $= P(Z > z_0)$;
- Nếu $H_1 : \mu < \mu_0$ thì p-giá trị $= P(Z < z_0)$;
- Nếu $H_1 : \mu \neq \mu_0$ thì p-giá trị $= 2P(Z > |z_0|)$.

Ở đây, $z_0 = \dfrac{\bar{x} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}$.

Sử dụng p-giá trị trong bài toán kiểm định

Cách tìm p-giá trị cho bài toán kiểm định trung bình tổng thể khi biết phương sai tổng thể:

- Nếu $H_1 : \mu > \mu_0$ thì p-giá trị $= P(Z > z_0)$;
- Nếu $H_1 : \mu < \mu_0$ thì p-giá trị $= P(Z < z_0)$;
- Nếu $H_1 : \mu \neq \mu_0$ thì p-giá trị $= 2P(Z > |z_0|)$.

Ở đây, $z_0 = \dfrac{\bar{x} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}$.

Sử dụng p-giá trị trong bài toán kiểm định

Cách tìm p-giá trị cho bài toán kiểm định trung bình tổng thể khi biết phương sai tổng thể:

- Nếu $H_1 : \mu > \mu_0$ thì p-giá trị $= P(Z > z_0)$;
- Nếu $H_1 : \mu < \mu_0$ thì p-giá trị $= P(Z < z_0)$;
- Nếu $H_1 : \mu \neq \mu_0$ thì p-giá trị $= 2P(Z > |z_0|)$.

Ở đây, $z_0 = \dfrac{\bar{x} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}$.

Sử dụng p-giá trị trong bài toán kiểm định

Cách tìm p-giá trị cho bài toán kiểm định trung bình tổng thể khi biết phương sai tổng thể:

- Nếu $H_1 : \mu > \mu_0$ thì p-giá trị $= P(Z > z_0)$;
- Nếu $H_1 : \mu < \mu_0$ thì p-giá trị $= P(Z < z_0)$;
- Nếu $H_1 : \mu \neq \mu_0$ thì p-giá trị $= 2P(Z > |z_0|)$.

Ở đây, $z_0 = \dfrac{\bar{x} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}$.

Kiểm định giả thuyết cho trung bình phương sai đã biết

H_0	H_1	Giá trị thống kê z	Qui luật bác bỏ H_0	p-giá trị
$\mu \leqslant \mu_0$	$\mu > \mu_0$	$z = \dfrac{\overline{x} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}$	$z > z_\alpha$	$P(Z > z)$
$\mu \geqslant \mu_0$	$\mu < \mu_0$	$z = \dfrac{\overline{x} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}$	$z < -z_\alpha$	$P(Z < z)$
$\mu = \mu_0$	$\mu \neq \mu_0$	$z = \dfrac{\overline{x} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}$	$\lvert z \rvert > z_{\alpha/2}$	$2P(Z > z)$

Ví dụ

Bài toán

Trong ví dụ về trọng lượng trung bình của các hộp ngũ cốc, biết rằng ông giám đốc điều hành chọn ngẫu nhiên 25 hộp ngũ cốc thì thấy trọng lượng trung bình của mẫu này là 372.5 gram. Giả sử tổng thể tuân theo phân phối chuẩn với độ lệch chuẩn là 15, tại mức ý nghĩa $\alpha = 5\%$, *nếu ông giám đốc chỉ nghi ngờ là dây chuyền trục trặc nói chung, hãy xét xem ông ra kiểm định nghi ngờ của mình thế nào nếu dựa vào cách tính p-giá trị.*

Lời giải

Kiểm định trung bình tổng thể tuân theo phân phối chuẩn và phương sai chưa biết

Bài toán

Tổng thể tuân theo phân phối chuẩn với trung bình μ chưa biết và phương sai σ^2 chưa biết. Ta muốn kiểm định cặp giả thuyết H_0 và H_1 về trung bình tổng thể tại mức ý nghĩa α.

Khi tổng thể tuân theo phân phối chuẩn ta có biến ngẫu nhiên

$$\frac{\overline{X} - \mu}{S_X/\sqrt{n}}$$

tuân theo phân phối student với $n-1$ bậc tự do.

Kiểm định trung bình tổng thể tuân theo phân phối chuẩn và phương sai chưa biết

Bài toán

Tổng thể tuân theo phân phối chuẩn với trung bình μ chưa biết và phương sai σ^2 chưa biết. Ta muốn kiểm định cặp giả thuyết H_0 và H_1 về trung bình tổng thể tại mức ý nghĩa α.

Khi tổng thể tuân theo phân phối chuẩn ta có biến ngẫu nhiên

$$\frac{\overline{X} - \mu}{S_X/\sqrt{n}}$$

tuân theo phân phối student với $n - 1$ bậc tự do.

Qui trình thực hiện

- Bước 1: Thiết lập giả thuyết

	Bài toán 1	Bài toán 2	Bài toán 3
H_0 :	$\mu = \mu_0; \mu \leqslant \mu_0$	$\mu = \mu_0; \mu \geqslant \mu_0$	$\mu = \mu_0$
H_1 :	$\mu > \mu_0$	$\mu < \mu_0$	$\mu \neq \mu_0$

- Bước 2: Xác định qui luật và tính các giá trị kiểm định:
  - $\dfrac{\overline{X} - \mu}{S_X/\sqrt{n}}$ tuân theo phân phối student với $n-1$ bậc tự do.
  - Tính giá trị kiểm định $t = \dfrac{\overline{x} - \mu_0}{s_x/\sqrt{n}}$.
  - Tính giá trị tới hạn $t_{n-1,\alpha}$ hoặc $t_{n-1,\alpha/2}$.
- Bước 3: Đưa ra kết luận tại mức ý nghĩa α:
  - Bài toán 1: Bác bỏ H_0 nếu $t_{n-1} > t_{n-1,\alpha}$.
  - Bài toán 2: Bác bỏ H_0 nếu $t_{n-1} < -t_{n-1,\alpha}$.
  - Bài toán 3: Bác bỏ H_0 nếu $t_{n-1} < -t_{n-1,\alpha/2}$ hoặc $t_{n-1} > t_{n-1,\alpha/2}$.
- Bước 4: Nhà quản lí đưa ra những quyết định phù hợp trong kinh tế - xã hội dựa trên kết luận kiểm định.

Qui trình thực hiện

- Bước 1: Thiết lập giả thuyết

	Bài toán 1	Bài toán 2	Bài toán 3
H_0 :	$\mu = \mu_0$; $\mu \leqslant \mu_0$	$\mu = \mu_0$; $\mu \geqslant \mu_0$	$\mu = \mu_0$
H_1 :	$\mu > \mu_0$	$\mu < \mu_0$	$\mu \neq \mu_0$

- Bước 2: Xác định qui luật và tính các giá trị kiểm định:
  - $\dfrac{\overline{X} - \mu}{S_X/\sqrt{n}}$ tuân theo phân phối student với $n-1$ bậc tự do.
  - Tính giá trị kiểm định $t = \dfrac{\overline{x} - \mu_0}{s_x/\sqrt{n}}$.
  - Tính giá trị tới hạn $t_{n-1,\alpha}$ hoặc $t_{n-1,\alpha/2}$.
- Bước 3: Đưa ra kết luận tại mức ý nghĩa α:
  - Bài toán 1: Bác bỏ H_0 nếu $t_{n-1} > t_{n-1,\alpha}$.
  - Bài toán 2: Bác bỏ H_0 nếu $t_{n-1} < -t_{n-1,\alpha}$.
  - Bài toán 3: Bác bỏ H_0 nếu $t_{n-1} < -t_{n-1,\alpha/2}$ hoặc $t_{n-1} > t_{n-1,\alpha/2}$.
- Bước 4: Nhà quản lí đưa ra những quyết định phù hợp trong kinh tế - xã hội dựa trên kết luận kiểm định.

Qui trình thực hiện

- Bước 1: Thiết lập giả thuyết

	Bài toán 1	Bài toán 2	Bài toán 3
H_0 :	$\mu = \mu_0; \mu \leqslant \mu_0$	$\mu = \mu_0; \mu \geqslant \mu_0$	$\mu = \mu_0$
H_1 :	$\mu > \mu_0$	$\mu < \mu_0$	$\mu \neq \mu_0$

- Bước 2: Xác định qui luật và tính các giá trị kiểm định:
  - $\dfrac{\overline{X} - \mu}{S_X/\sqrt{n}}$ tuân theo phân phối student với $n-1$ bậc tự do.
  - Tính giá trị kiểm định $t = \dfrac{\overline{x} - \mu_0}{s_x/\sqrt{n}}$.
  - Tính giá trị tới hạn $t_{n-1,\alpha}$ hoặc $t_{n-1,\alpha/2}$.
- Bước 3: Đưa ra kết luận tại mức ý nghĩa α:
  - Bài toán 1: Bác bỏ H_0 nếu $t_{n-1} > t_{n-1,\alpha}$.
  - Bài toán 2: Bác bỏ H_0 nếu $t_{n-1} < -t_{n-1,\alpha}$.
  - Bài toán 3: Bác bỏ H_0 nếu $t_{n-1} < -t_{n-1,\alpha/2}$ hoặc $t_{n-1} > t_{n-1,\alpha/2}$.
- Bước 4: Nhà quản lí đưa ra những quyết định phù hợp trong kinh tế - xã hội dựa trên kết luận kiểm định.

Qui trình thực hiện

- Bước 1: Thiết lập giả thuyết

	Bài toán 1	Bài toán 2	Bài toán 3
H_0 :	$\mu = \mu_0$; $\mu \leqslant \mu_0$	$\mu = \mu_0$; $\mu \geqslant \mu_0$	$\mu = \mu_0$
H_1 :	$\mu > \mu_0$	$\mu < \mu_0$	$\mu \neq \mu_0$

- Bước 2: Xác định qui luật và tính các giá trị kiểm định:
  - $\dfrac{\overline{X} - \mu}{S_X/\sqrt{n}}$ tuân theo phân phối student với $n-1$ bậc tự do.
  - Tính giá trị kiểm định $t = \dfrac{\overline{x} - \mu_0}{s_x/\sqrt{n}}$.
  - Tính giá trị tới hạn $t_{n-1,\alpha}$ hoặc $t_{n-1,\alpha/2}$.
- Bước 3: Đưa ra kết luận tại mức ý nghĩa α:
  - Bài toán 1: Bác bỏ H_0 nếu $t_{n-1} > t_{n-1,\alpha}$.
  - Bài toán 2: Bác bỏ H_0 nếu $t_{n-1} < -t_{n-1,\alpha}$.
  - Bài toán 3: Bác bỏ H_0 nếu $t_{n-1} < -t_{n-1,\alpha/2}$ hoặc $t_{n-1} > t_{n-1,\alpha/2}$.
- Bước 4: Nhà quản lí đưa ra những quyết định phù hợp trong kinh tế - xã hội dựa trên kết luận kiểm định.

Kiểm định giả thuyết cho trung bình phương sai chưa biết

H_0	H_1	Giá trị thống kê z	Qui luật bác bỏ H_0	p-giá trị
$\mu \leqslant \mu_0$	$\mu > \mu_0$	$t = \dfrac{\overline{x} - \mu_0}{s_x/\sqrt{n}}$	$t > t_{n-1,\alpha}$	$P(t_{n-1} > t)$
$\mu \geqslant \mu_0$	$\mu < \mu_0$	$t = \dfrac{\overline{x} - \mu_0}{s_x/\sqrt{n}}$	$t < -t_{n-1,\alpha}$	$P(t_{n-1} < t)$
$\mu = \mu_0$	$\mu \neq \mu_0$	$t = \dfrac{\overline{x} - \mu_0}{s_x/\sqrt{n}}$	$\lvert t\rvert > t_{n-1,\alpha/2}$	$2P(t_{n-1} > \lvert t\rvert)$

Ví dụ

Bài toán

Một hãng sản xuất đèn điện tử tuyên bố rằng sản phẩm của họ có tuổi thọ trung bình không dưới 25000 giờ. Một công ty cần một số lượng lớn linh kiện máy tính này muốn tiến hành kiểm định lời khẳng định này. Nếu khẳng định trên là đúng, họ sẽ mua sản phẩm, ngược lại họ sẽ tìm nhà cung cấp khác. Công ty chọn ngẫu nhiên 25 linh kiện điện tử, kết quả cho thấy thời gian sử dụng trung bình của sản phẩm là 22500 giờ, với độ lệch chuẩn 5000 giờ. Giả sử rằng tuổi thọ của các bóng đèn tuân theo phân phối chuẩn, tại mức ý nghĩa $\alpha = 5\%$, *hãy xét xem công ty có mua đèn điện tử của hãng sản xuất này không.*

Kiểm định trung bình tổng thể khi cỡ mẫu lớn

Bài toán

Tổng thể có trung bình μ chưa biết và phương sai σ^2 chưa biết. Ta muốn kiểm định cặp giả thuyết H_0 và H_1 tại mức ý nghĩa α khi cỡ của mẫu được chọn ra $n \geqslant 30$.

Theo định lí giới hạn trung tâm, khi cỡ mẫu $n \geqslant 30$, phương sai tổng thể chưa biết được thay bằng phương sai của mẫu, biến ngẫu nhiên $z = \dfrac{\overline{X} - \mu}{S_X/\sqrt{n}}$ xấp xỉ phân phối chuẩn hóa. Khi đó các qui trình kiểm định được thực hiện giống như trường hợp phương sai đã biết ở trên.

Kiểm định trung bình tổng thể khi cỡ mẫu lớn

Bài toán

Tổng thể có trung bình μ chưa biết và phương sai σ^2 chưa biết. Ta muốn kiểm định cặp giả thuyết H_0 và H_1 tại mức ý nghĩa α khi cỡ của mẫu được chọn ra $n \geqslant 30$.

Theo định lí giới hạn trung tâm, khi cỡ mẫu $n \geqslant 30$, phương sai tổng thể chưa biết được thay bằng phương sai của mẫu, biến ngẫu nhiên $z = \dfrac{\overline{X} - \mu}{S_X/\sqrt{n}}$ xấp xỉ phân phối chuẩn hóa. Khi đó các qui trình kiểm định được thực hiện giống như trường hợp phương sai đã biết ở trên.

Kiểm định trung bình khi cỡ mẫu lớn

H_0	H_1	Giá trị thống kê z	Qui luật bác bỏ H_0	p-giá trị
$\mu \leqslant \mu_0$	$\mu > \mu_0$	$z = \dfrac{\overline{x} - \mu_0}{s_x/\sqrt{n}}$	$z > z_\alpha$	$P(Z > z)$
$\mu \geqslant \mu_0$	$\mu < \mu_0$	$z = \dfrac{\overline{x} - \mu_0}{s_x/\sqrt{n}}$	$z < -z_\alpha$	$P(Z < z)$
$\mu = \mu_0$	$\mu \neq \mu_0$	$z = \dfrac{\overline{x} - \mu_0}{s_x/\sqrt{n}}$	$\|z\| > z_{\alpha/2}$	$2P(Z > \|z\|)$

Kiểm định trung bình một tổng thể trong R

- Khi phương sai của tổng thể đã biết và dữ liệu mẫu dạng sơ cấp ta sử dụng hàm `z.test`;
- Khi phương sai của tổng thể đã biết và dữ liệu mẫu dạng thứ cấp ta sử dụng hàm `zsum.test`;
- Khi phương sai của tổng thể chưa biết và dữ liệu sơ cấp ta sử dụng hàm `t.test`;
- Khi phương sai của tổng thể chưa biết và dữ liệu mẫu dạng thứ cấp ta sử dụng hàm `tsum.test`.

Kiểm định trung bình tổng thể, phương sai đã biết, dữ liệu sơ cấp trong R

- `z.test(x, sigma.x =, mu =, alternative =)`
- trong đó,
  - `x` là véc tơ dữ liệu mẫu;
  - `sigma.x` là độ lệch chuẩn của tổng thể;
  - `alternative` chuỗi kí tự chỉ giả thuyết đối, `alternative = c("two.sided", "less", "greater")` tương ứng chỉ giả thuyết đối tương ứng là hai bên, bên trái, bên phải. Mặc định giả thuyết đối là `"two.sided"`.
  - `mu` là trung bình xác định theo giả thuyết không, mặc định là 0.

Kiểm định trung bình tổng thể, phương sai đã biết, dữ liệu thứ cấp trong R

- `zsum.test(mean.x, sigma.x = NULL, n.x = NULL, mu = 0, alternative = "two.sided")`
- trong đó,
    - `mean.x` là trung bình mẫu;
    - `sigma.x` là độ lệch chuẩn của tổng thể;
    - `n.x` là cỡ mẫu;
    - `mu` xem hàm `z.test`.
    - `alternative` xem hàm `z.test`.

Kiểm định trung bình tổng thể, phương sai chưa biết, dữ liệu sơ cấp trong R

- `t.test(x, alternative = c("two.sided", "less", "greater"), mu = 0)`
- trong đó,
  - `x` là dữ liệu mẫu;
  - `mu` xem hàm `z.test`;
  - `alternative` xem hàm `z.test`.

Kiểm định trung bình tổng thể, phương sai chưa biết, dữ liệu thứ cấp trong R

- `tsum.test(mean.x, s.x = NULL, n.x = NULL, mu = 0, alternative = "two.sided")`
- trong đó,
  - `mean.x` là trung bình mẫu;
  - `s.x` là độ lệch chuẩn của mẫu;
  - `n.x` là cỡ mẫu;
  - `mu` xem hàm `z.test`;
  - `alternative` xem hàm `z.test`.

Ví dụ trong R

```
> library(BSDA)
> zsum.test(mean.x=372.5, sigma.x=15,n.x=25,mu=368,alt="two.sided")

        One-sample z-Test

data:  Summarized x
z = 1.5, p-value = 0.1336
alternative hypothesis: true mean is not equal to 368
95 percent confidence interval:
 366.6201 378.3799
sample estimates:
mean of x
    372.5
```

Ví dụ trong R

```
> library(BSDA)
> tsum.test(mean.x=22500,s.x=5000,n.x=25,mu=25000,alt="less")

        One-sample t-Test

data:  Summarized x
t = -2.5, df = 24, p-value = 0.009827
alternative hypothesis: true mean is less than 25000
95 percent confidence interval:
       NA 24210.88
sample estimates:
mean of x
    22500
```

Nội dung trình bày

Bài toán kiểm định tỉ lệ tổng thể

Bài toán

Kiểm định cặp giả thuyết H_0 và H_1 tại mức ý nghĩa α về tỉ lệ p của tổng thể.

Chú ý: Khi cỡ mẫu đủ lớn ($np \geqslant 5, n(1-p) \geqslant 5$) thì phân phối của tỉ lệ mẫu xấp xỉ phân phối chuẩn, tức là biến ngẫu nhiên $z = \dfrac{P_X - p}{\sqrt{p(1-p)/n}}$ xấp xỉ phân phối chuẩn hóa.

Bài toán kiểm định tỉ lệ tổng thể

Bài toán

Kiểm định cặp giả thuyết H_0 và H_1 tại mức ý nghĩa α về tỉ lệ p của tổng thể.

Chú ý: Khi cỡ mẫu đủ lớn ($np \geqslant 5, n(1-p) \geqslant 5$) thì phân phối của tỉ lệ mẫu xấp xỉ phân phối chuẩn, tức là biến ngẫu nhiên $z = \dfrac{P_X - p}{\sqrt{p(1-p)/n}}$ xấp xỉ phân phối chuẩn hóa.

Qui trình thực hiện

- Bước 1: Thiết lập cặp giả thuyết:

	Bài toán 1	Bài toán 2	Bài toán 3
H_0 :	$p = p_0$; $p \leqslant p_0$	$p = p_0$; $p \geqslant p_0$	$p = p_0$
H_1 :	$p > p_0$	$p < p_0$	$p \neq p_0$

- Bước 2: Xác định qui luật và tính các giá trị kiểm định:
  - $\dfrac{P_X - p}{\sqrt{p(1-p)/n}}$ xấp xỉ phân phối chuẩn hóa.
  - Tính giá trị kiểm định $z = \dfrac{p_x - p_0}{\sqrt{p_0(1-p_0)/n}}$.
  - Tính giá trị tới hạn z_α hoặc $z_{\alpha/2}$.
- Bước 3: Đưa ra kết luận tại mức ý nghĩa α:
  - Bài toán 1: Bác bỏ H_0 nếu $z > z_\alpha$.
  - Bài toán 2: Bác bỏ H_0 nếu $z < -z_\alpha$.
  - Bài toán 3: Bác bỏ H_0 nếu $z < -z_{\alpha/2}$ hoặc $z > z_{\alpha/2}$.
- Đưa ra những chiến lược phù hợp trong kinh tế và xã hội từ những kết luận khi kiểm định.

Ví dụ

Bài toán

Tỉ lệ khách hàng tiêu dùng một loại sản phẩm ở địa phương A là 60%. Sau một chiến dịch quảng cáo người ta muốn đánh giá xem chiến dịch quảng cáo này có thực sự mang lại hiệu quả hay không. Để làm điều này người ta phỏng vấn ngẫu nhiên 400 khách hàng thì thấy có 250 người tiêu dùng loại sản phẩm nói trên. Với mức ý nghĩa 0.01 hãy kết luận về hiệu quả của chiến dịch quảng cáo trên.

Thực hiện kiểm định tỉ lệ một tổng thể trong R

`prop.test(x, n, p =, alternative =, correct = TRUE(FALSE))`

trong đó

- x là véc tơ đếm số lần "thành công" trong mẫu, n là số phần tử của mẫu;
- `alternative` xem trong hàm z.test;
- `p` là tỉ lệ tổng thể cần so sánh theo giả thiết không, mặc định là 0.5;
- `correct` là tham số chỉ có hay không có sự điều chỉnh liên tục Yate, mặc định là `TRUE`.

Ví dụ trong R

```
> prop.test(250, 400,p = 0.6, alt="greater",correct = F)

        1-sample proportions test without continuity correction

data:  250 out of 400, null probability 0.6
X-squared = 1.0417, df = 1, p-value = 0.1537
alternative hypothesis: true p is greater than 0.6
95 percent confidence interval:
 0.5844697 1.0000000
sample estimates:
    p
0.625
```

Nội dung trình bày

1. Giới thiệu chung về kiểm định giả thuyết
   - Giả thuyết thống kê
   - Sai lầm loại I và loại II
2. Kiểm định giả thuyết một tổng thể
   - Kiểm định giả thuyết về trung bình tổng thể
   - Sử dụng p-giá trị trong bài toán kiểm định
   - Kiểm định giả thuyết về tỉ lệ tổng thể
   - Kiểm định phương sai tổng thể
3. Kiểm định giả thuyết hai tổng thể
   - Kiểm định giả thuyết về sự khác biệt của trung bình hai tổng thể
   - Kiểm định tỉ lệ hai tổng thể
   - Kiểm định giả thuyết cho phương sai của hai tổng thể

Bài toán kiểm định phương sai tổng thể

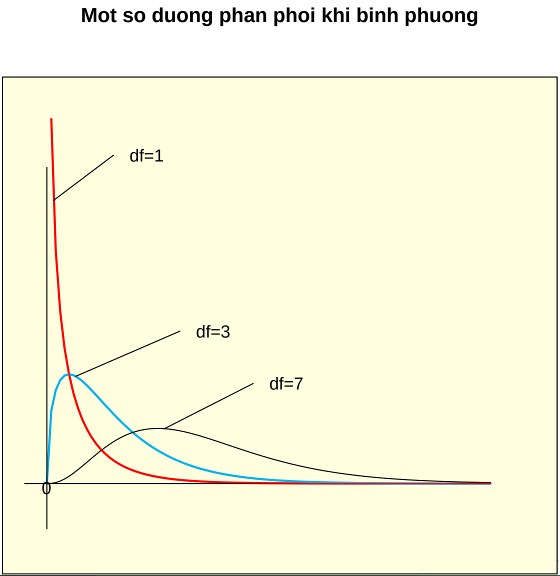
Bài toán

Tổng thể tuân theo phân phối chuẩn với phương sai chưa biết. Kiểm định ở mức ý nghĩa α giả thuyết H_0 và H_1 về phương sai tổng thể.

Phân phối chi- bình phương

- Khi tổng thể tuân theo phân phối chuẩn thì biến ngẫu nhiên $\dfrac{(n-1)S_X^2}{\sigma^2}$ tuân theo phân phối chi- bình phương với (n-1) bậc tự do.
- Phân phối chi- bình phương không đối xứng và hình dáng thay đổi theo các bậc tự do khác nhau. Nếu X là biến ngẫu nhiên tuân theo phân phối chi- bình phương với n bậc tự do ta kí hiệu $X \backsim \chi_n^2$.

Minh họa bằng hình vẽ



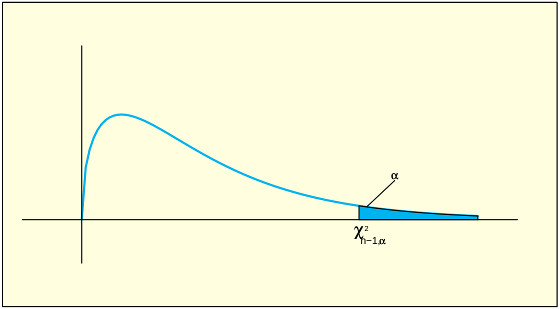
Phân phối chi- bình phương

- Hai giá trị $\chi^2_{n,\alpha}$ và $\chi^2_{n,1-\alpha}$ được xác định bởi:

$$P(\chi^2_n > \chi^2_{n,\alpha}) = \alpha, \qquad (\chi^2_n < \chi^2_{n,1-\alpha}) = \alpha$$

- Hai giá trị trên được tính trong R như sau:
  $\chi^2_{n,\alpha}$ = `qchisq(1 -` α`, n)` và $\chi^2_{n,1-\alpha}$ = `qchisq(`α`, n)`.

Minh họa bằng hình vẽ



Qui trình thực hiện

- Bước 1: Thiết lập giả thuyết không và giả thuyết đối:

	Bài toán 1	Bài toán 2	Bài toán 3
H_0 :	$\sigma^2 = \sigma_0^2; \sigma^2 \leqslant \sigma_0^2$	$\sigma^2 = \sigma_0^2; \sigma^2 \geqslant \sigma_0^2$	$\sigma^2 = \sigma_0^2$
H_1 :	$\sigma^2 > \sigma_0^2$	$\sigma^2 < \sigma_0^2$	$\sigma^2 \neq \sigma_0^2$

- Bước 2: Xác định qui luật và tính các giá trị kiểm định
  - $\dfrac{(n-1)S_X^2}{\sigma^2}$ tuân theo phân phối chi- bình phương với (n-1) bậc tự do.
  - Tính giá trị kiểm định $\dfrac{(n-1)s_x^2}{\sigma_0^2}$.
  - Tính giá trị tới hạn $\chi^2_{n-1,\alpha}$, $\chi^2_{n-1,1-\alpha}$ hoặc $\chi^2_{n-1,\alpha/2}$, $\chi^2_{n-1,1-\alpha/2}$.

Qui trình thực hiện

- Bước 3: Đưa ra kết luận tại mức ý nghĩa α
  - Bài toán 1: Bác bỏ H_0 nếu $\dfrac{(n-1)s_x^2}{\sigma_0^2} > \chi^2_{n-1,\alpha}$.
  - Bài toán 2: Bác bỏ H_0 nếu $\dfrac{(n-1)s_x^2}{\sigma_0^2} < \chi^2_{n-1,1-\alpha}$.
  - Bài toán 3: Bác bỏ H_0 nếu $\dfrac{(n-1)s_x^2}{\sigma_0^2} > \chi^2_{n-1,\alpha/2}$ hoặc $\dfrac{(n-1)s_x^2}{\sigma_0^2} < \chi^2_{n-1,1-\alpha/2}$.
- Bước 4: Đưa ra những chiến lược phù hợp trong kinh tế và xã hội từ những kết luận khi kiểm định.

Ví dụ

Bài toán

Giả sử rằng thành phần phần trăm của một hoạt chất A trong các lô dược phẩm tuân theo phân phối chuẩn. Để đạt tiêu chuẩn chất lượng thì phương sai của nó không được vượt quá 4%. *Một mẫu ngẫu nhiên gồm* 20 *lô dược phẩm được chọn ra và tìm thấy phương sai là* 5.6%. *Ở mức ý nghĩa* $\alpha = 5\%$ *có thể kết luận tổng thể các lô dược phẩm đạt tiêu chuẩn chất lượng hay không?*

Ví dụ

Lời giải: Gọi σ^2 là phương sai của toàn bộ các lô dược phẩm.

- Bước 1: Thiết lập cặp giả thuyết: $H_0 : \sigma^2 \leqslant 4$ và $H_1 : \sigma^2 > 4$.
- Bước 2: Quyết định bác bỏ H_0 nếu $\dfrac{(n-1)s_X^2}{\sigma_0^2} > \chi^2_{n-1,\alpha}$.
  - Dữ liệu thu thập được cho ta $s_x^2 = 5.6\%$, n = 20. Thay $\sigma_0^2 = 4$ vào ta được
  $$\chi^2_{n-1} = \frac{(n-1)s_x^2}{\sigma_0^2} = \frac{(20-1)5.6}{4} = 26.6.$$
  - Từ $\alpha = 0.05$ ta có $\chi^2_{19,0.05} = 30.14$.
- Bước 3: Do $\chi^2_{19,0.05} = 30.15 > 26.6$ nên chưa có cơ sở để bác bỏ H_0.
- Bước 4: Với mức ý nghĩa $\alpha = 5\%$ không đủ bằng chứng thống kê cho rằng các lô dược phẩm không đạt tiêu chuẩn chất lượng.

Ví dụ

Lời giải: Gọi σ^2 là phương sai của toàn bộ các lô dược phẩm.

- Bước 1: Thiết lập cặp giả thuyết: $H_0 : \sigma^2 \leqslant 4$ và $H_1 : \sigma^2 > 4$.
- Bước 2: Quyết định bác bỏ H_0 nếu $\dfrac{(n-1)s_X^2}{\sigma_0^2} > \chi^2_{n-1,\alpha}$.
  - Dữ liệu thu thập được cho ta $s_x^2 = 5.6\%$, n = 20. Thay $\sigma_0^2 = 4$ vào ta được
  $$\chi^2_{n-1} = \frac{(n-1)s_x^2}{\sigma_0^2} = \frac{(20-1)5.6}{4} = 26.6.$$
  - Từ $\alpha = 0.05$ ta có $\chi^2_{19,0.05} = 30.14$.
- Bước 3: Do $\chi^2_{19,0.05} = 30.15 > 26.6$ nên chưa có cơ sở để bác bỏ H_0.
- Bước 4: Với mức ý nghĩa $\alpha = 5\%$ không đủ bằng chứng thống kê cho rằng các lô dược phẩm không đạt tiêu chuẩn chất lượng.

Bài toán tình huống

Bài toán

Tại một câu lạc bộ thẩm mỹ người ta quảng cáo một chương trình luyện tập làm giảm trọng lượng rất hữu hiệu là sau khóa huấn luyện thì trọng lượng trung bình của các học viên sẽ giảm ít nhất 17 đơn vị (mỗi đơn vị tương đương 1/2kg). Rất đông quí bà, quí cô muốn tham dự khóa huấn luyện nhưng vẫn nghi ngờ về hiệu quả nên đã nhờ một chuyên gia thống kê điều tra hộ. Chuyên gia thống kê chọn ngẫu nhiên 10 quí bà và theo dõi trọng lượng trước và sau khi dự khóa học. Dữ liệu được ghi lại như sau: (đơn vị 1/2kg)

Quí bà	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Trước	189	202	220	207	194	177	193	202	208	233
Sau	170	179	203	192	172	161	174	187	186	204

Giả sử rằng trọng lượng của các quí bà, quí cô trước và sau khi tập tuân theo phân phối chuẩn, ở mức ý nghĩa 5% chuyên gia thống kê khuyên quí bà, quí cô điều gì?

Bài toán tình huống

Bài toán

Một tạp chí Y học vừa công bố một công trình cho thấy những đứa trẻ được nuôi bằng sữa mẹ có chỉ số thông minh IQ cao hơn những đứa trẻ được nuôi bằng sữa hộp. Để kiểm tra tính đúng đắn của thông báo này, người ta chọn ra một nhóm gồm 10 đứa trẻ bú mẹ và nhóm gồm 10 đứa trẻ bú sữa bình, ghi lại được chỉ số IQ của chúng và được kết quả sau:

Nhóm bú mẹ		Nhóm bú bình	
121	105	102	110
111	119	107	98
108	101	99	103
90	131	86	107
106	112	113	87

Tại mức ý nghĩa $\alpha = 5\%$, có thể kết luận rằng phát biểu của công trình nghiên cứu trên là có cơ sở không nếu chỉ số IQ của hai nhóm này tuân theo phân phối chuẩn và có phương sai bằng nhau.

Bài toán tình huống

Bài toán

Một công ty sản xuất dược liệu đang thử nghiệm hai loại thuốc mới làm giảm huyết áp. Việc thử nghiệm được tiến hành trên hai nhóm thú vật khác nhau. Trong nhóm một có 71 con trong 100 con thú giảm huyết áp khi được cho dùng thuốc loại 1. Trong nhóm thứ hai có 58 con trong 90 con thú giảm huyết áp khi được dùng thuốc loại 2. Công ty muốn kiểm định ở mức ý nghĩa 5% *xem có sự khác biệt về tính công hiệu của hai loại thuốc này.*

Nội dung trình bày

1. Giới thiệu chung về kiểm định giả thuyết
   - Giả thuyết thống kê
   - Sai lầm loại I và loại II
2. Kiểm định giả thuyết một tổng thể
   - Kiểm định giả thuyết về trung bình tổng thể
   - Sử dụng p-giá trị trong bài toán kiểm định
   - Kiểm định giả thuyết về tỉ lệ tổng thể
   - Kiểm định phương sai tổng thể
3. Kiểm định giả thuyết hai tổng thể
   - Kiểm định giả thuyết về sự khác biệt của trung bình hai tổng thể
   - Kiểm định tỉ lệ hai tổng thể
   - Kiểm định giả thuyết cho phương sai của hai tổng thể

Bài toán kiểm định sự khác biệt của trung bình hai tổng thể

Bài toán

Hai tổng thể với trung bình lần lượt là μ_1, μ_2 và phương sai lần lượt là σ_1^2, σ_2^2. Ta cần so sánh hai trung bình μ_1 và μ_2 chênh lệch so với nhau một lượng D_0 dựa trên việc kiểm định các cặp giả thuyết H_0, H_1 sau:

	Bài toán 1	*Bài toán 2*	*Bài toán 3*
H_0 :	$\mu_1 - \mu_2 = D_0$	$\mu_1 - \mu_2 = D_0$	$\mu_1 - \mu_2 = D_0$
	$\mu_1 - \mu_2 \leqslant D_0$	$\mu_1 - \mu_2 \geqslant D_0$	
H_1 :	$\mu_1 - \mu_2 > D_0$	$\mu_1 - \mu_2 < D_0$	$\mu_1 - \mu_2 \neq D_0$

Những phân phối trong kiểm định trung bình hai tổng thể

- Gọi X_1, X_2 tương ứng là biến ngẫu nhiên chỉ tổng thể thứ nhất và thứ hai với $E(X_1) = \mu_1, V(X_1) = \sigma_1^2$ và $E(X_2) = \mu_2, V(X_1) = \sigma_2^2$.
- Để thực hiện việc so sánh trung bình của hai tổng thể đã cho, từ tổng thể thứ nhất ta chọn ra một mẫu ngẫu nhiên cỡ n_1 và từ tổng thể thứ hai ta chọn ta mẫu ngẫu nhiên có cỡ là n_2. Gọi $\overline{X}_1, \overline{X}_2$ là biến ngẫu nhiên chỉ trung bình của mẫu thứ nhất và thứ hai. Ta có $E(\overline{X}_1) = \mu_1, V(\overline{X}_1) = \sigma_1^2/n_1$ và $E(\overline{X}_2) = \mu_2, V(\overline{X}_2) = \sigma_2^2/n_2$.
- Gọi S_1^2, S_2^2 là hai biến ngẫu nhiên chỉ phương sai của mẫu thứ nhất và thứ hai.

Những phân phối trong kiểm định trung bình hai tổng thể

- Nếu $X_1 \sim N(\mu_1, \sigma_1^2)$ và $X_2 \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$ và X_1, X_2 độc lập thì $\overline{X}_1 - \overline{X}_2$ tuân theo phân phối chuẩn với trung bình là:

$$E(\overline{X}_1 - \overline{X}_2) = E(\overline{X}_1) - E(\overline{X}_2) = \mu_1 - \mu_2$$

và phương sai là

$$V(\overline{X}_1 - \overline{X}_2) = V(\overline{X}_1) + V(\overline{X}_2) = \frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}$$

Từ đó, biến ngẫu nhiên

$$Z = \frac{(\overline{X}_1 - \overline{X}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}}$$

tuân theo phân phối chuẩn hóa.

Những phân phối trong kiểm định trung bình hai tổng thể

- Ta có $\dfrac{(n_1-1)S_1^2}{\sigma_1^2}$ tuân theo phân phối chi- bình phương với n_1-1 bậc tự do và $\dfrac{(n_2-1)S_2^2}{\sigma_2^2}$ tuân theo phân phối chi- bình phương với n_2-1 bậc tự do. Do đó

$$\chi^2 = \frac{(n_1-1)S_1^2}{\sigma_1^2} + \frac{(n_2-1)S_2^2}{\sigma_2^2}$$

tuân theo phân phối chi bình phương với n_1+n_2-2 bậc tự do.

Những phân phối trong kiểm định trung bình hai tổng thể

- Khi đó nếu $\sigma_1^2 = \sigma_1^2 = \sigma^2$ thì

$$T = \frac{(\overline{X}_1 - \overline{X}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\dfrac{\sigma^2}{n_1} + \dfrac{\sigma^2}{n_2}}} : \frac{\sqrt{\dfrac{(n_1-1)S_1^2}{\sigma^2} + \dfrac{(n_2-1)S_2^2}{\sigma^2}}}{\sqrt{n_1+n_2-2}}$$

$$= \frac{(\overline{X}_1 - \overline{X}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\dfrac{(n_1-1)S_1^2 + (n_2-1)S_2^2}{n_1+n_2-2}}\sqrt{\dfrac{1}{n_1} + \dfrac{1}{n_2}}}$$

  là biến ngẫu nhiên tuân theo phân phối student với $n_1 + n_2 - 2$ bậc tự do.
- Khi $n_1 \geqslant 30, n_2 \geqslant 30$ thì T xấp xỉ phân phối chuẩn hóa $N(0,1)$.

Những phân phối trong kiểm định trung bình hai tổng thể

- Xét biến ngẫu nhiên
$$T = \frac{(\overline{X}_1 - \overline{X}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{S_1^2}{n_1} + \frac{S_2^2}{n_2}}}.$$
- Ta chứng minh được T tuân theo phân phối student với υ bậc tự do cho bởi:
$$\upsilon = \frac{(\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2})^2}{\frac{(\frac{s_1^2}{n_1})^2}{n_1 - 1} + \frac{(\frac{s_1^2}{n_1})^2}{n_2 - 1}}.$$

Các trường hợp khi so sánh trung bình hai tổng thể

- Mẫu chọn ra từ mỗi tổng thể là độc lập:
  - Tổng thể tuân theo phân phối chuẩn, phương sai của hai tổng thể đã biết;
  - Tổng thể tuân theo phân phối chuẩn, phương sai của hai tổng thể chưa biết nhưng bằng nhau;
  - Tổng thể tuân theo phân phối chuẩn, phương sai của hai tổng thể chưa biết không có giả sử bằng nhau;
  - Không biết phân phối của tổng thể nhưng mẫu chọn có cỡ lớn $(n_1, n_2 \geqslant 30)$.
- Chọn mẫu theo đôi và hai tổng thể có phân phối chuẩn.

Kiểm định trung bình hai tổng thể, tổng thể chuẩn và biết phương sai, mẫu độc lập

Bài toán

Giả sử hai tổng thể cần nghiên cứu tuân theo phân phối chuẩn với trung bình lần lượt là μ_1, μ_2 *chưa biết nhưng phương sai* σ_1^2, σ_2^2 *đã biết. Ta cần kiểm định các cặp giả thuyết* H_0, H_1 *về trung bình của hai tổng thể khi mẫu được chọn ra từ mỗi tổng thể này độc lập với nhau.*

Kiểm định trung bình hai tổng thể, biết phương sai, mẫu độc lập

- Giả sử X_1, X_2 là hai biến ngẫu nhiên chỉ tổng thể thứ nhất và thứ hai. Chọn mẫu ngẫu nhiên gồm n_1 phần tử từ tổng thể thứ nhất và mẫu ngẫu nhiên gồm n_2 phần tử độc lập với mẫu đầu từ tổng thể thứ hai.
- Gọi $\overline{X}_1, \overline{X}_2$ là hai trung bình mẫu của mẫu một và hai, khi đó ta có $E(\overline{X}_1 - \overline{X}_2) = E(\overline{X}_1) - E(\overline{X}_2) = \mu_1 - \mu_2$ và $V(\overline{X}_1 - \overline{X}_2) = V(\overline{X}_1) + V(\overline{X}_2) = \dfrac{\sigma_1^2}{n_1} + \dfrac{\sigma_2^2}{n_2}$.
- Do đó, biến ngẫu nhiên

$$Z = \frac{(\overline{X}_1 - \overline{X}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\dfrac{\sigma_1^2}{n_1} + \dfrac{\sigma_2^2}{n_2}}}$$

tuân theo phân phối chuẩn hóa.

Qui trình thực hiện

- Bước 1: Thiết lập giả thuyết không và giả thuyết đối:

	Bài toán 1	Bài toán 2	Bài toán 3
H_0 :	$\mu_1 - \mu_2 = D_0$	$\mu_1 - \mu_2 = D_0$	$\mu_1 - \mu_2 = D_0$
	$\mu_1 - \mu_2 \leqslant D_0$	$\mu_1 - \mu_2 \geqslant D_0$	
H_1 :	$\mu_1 - \mu_2 > D_0$	$\mu_1 - \mu_2 < D_0$	$\mu_1 - \mu_2 \neq D_0$

- Bước 2: Tính các giá trị kiểm định
  - Tính giá trị kiểm định $z = \dfrac{(\overline{x}_1 - \overline{x}_2) - D_0}{\sqrt{\dfrac{\sigma_1^2}{n_1} + \dfrac{\sigma_2^2}{n_2}}}$.
  - Tính giá trị tới hạn z_α hoặc $z_{\alpha/2}$.
- Bước 3: Đưa ra kết luận tại mức ý nghĩa α:
  - Bài toán 1: Bác bỏ H_0 nếu $z > z_\alpha$.
  - Bài toán 2: Bác bỏ H_0 nếu $z < -z_\alpha$.
  - Bài toán 3: Bác bỏ H_0 nếu $z < -z_{\alpha/2}$ hoặc $z > z_{\alpha/2}$.
- Bước 4: Đưa ra những chiến lược phù hợp trong kinh tế và xã hội.

Kiểm định trung bình hai tổng thể chuẩn, biết phương sai, mẫu độc lập

H_0	H_1	Giá trị thống kê z	Qui luật bác bỏ H_0	p-giá trị
$\mu_1 - \mu_2 \leqslant D_0$	$\mu_1 - \mu_2 > D_0$	$z = \dfrac{(\overline{x}_1 - \overline{x}_2) - D_0}{\sqrt{\dfrac{\sigma_1^2}{n_1} + \dfrac{\sigma_2^2}{n_2}}}$	$z > z_\alpha$	$P(Z > z)$
$\mu_1 - \mu_2 \geqslant D_0$	$\mu_1 - \mu_2 < D_0$	$z = \dfrac{(\overline{x}_1 - \overline{x}_2) - D_0}{\sqrt{\dfrac{\sigma_1^2}{n_1} + \dfrac{\sigma_2^2}{n_2}}}$	$z < -z_\alpha$	$P(Z < z)$
$\mu_1 - \mu_2 = D_0$	$\mu_1 - \mu_2 \neq D_0$	$z = \dfrac{(\overline{x}_1 - \overline{x}_2) - D_0}{\sqrt{\dfrac{\sigma_1^2}{n_1} + \dfrac{\sigma_2^2}{n_2}}}$	$\lvert z\rvert > z_{\alpha/2}$	$2P(Z > \lvert z\rvert)$

Kiểm định trung bình hai tổng thể chuẩn, phương sai chưa biết bằng nhau, mẫu độc lập

Bài toán

Giả sử hai tổng thể cần nghiên cứu tuân theo phân phối chuẩn với trung bình lần lượt là μ_1, μ_2 chưa biết và phương sai σ_1^2, σ_2^2 chưa biết nhưng có giả định rằng chúng bằng nhau $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$. Ta cần kiểm định các cặp giả thuyết H_0, H_1 về trung bình của hai tổng thể khi mẫu được chọn ra từ mỗi tổng thể này độc lập với nhau.

Kiểm định trung bình hai tổng thể chuẩn, phương sai chưa biết bằng nhau, mẫu độc lập

Khi phương sai của hai tổng thể chưa biết nhưng được giả định là bằng nhau $\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma^2$. Trong trường hợp này, biến ngẫu nhiên

$$t_{n_1+n_2-2} = \frac{(\overline{X}_1 - \overline{X}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\dfrac{(n_1-1)S_1^2 + (n_2-1)S_2^2}{n_1+n_2-2}}\sqrt{\dfrac{1}{n_1} + \dfrac{1}{n_2}}}$$

tuân theo phân phối student với $n_1 + n_2 - 2$ bậc tự do.
Để cho gọn, ta thường kí hiệu

$$S = \sqrt{\frac{(n_1-1)S_1^2 + (n_2-1)S_2^2}{n_1+n_2-2}}.$$

Qui trình thực hiện

- Bước 1: Thiết lập giả thuyết không và giả thuyết đối:

	Bài toán 1	Bài toán 2	Bài toán 3
H_0 :	$\mu_1 - \mu_2 = D_0$	$\mu_1 - \mu_2 = D_0$	$\mu_1 - \mu_2 = D_0$
	$\mu_1 - \mu_2 \leqslant D_0$	$\mu_1 - \mu_2 \geqslant D_0$	
H_1 :	$\mu_1 - \mu_2 > D_0$	$\mu_1 - \mu_2 < D_0$	$\mu_1 - \mu_2 \neq D_0$

- Bước 2: Tính toán các giá trị kiểm định:
  - Tính $t = \dfrac{(\overline{X}_1 - \overline{X}_2) - D_0}{s\sqrt{\dfrac{1}{n_1} + \dfrac{1}{n_2}}}$, với $s = \sqrt{\dfrac{(n_1-1)s_1^2 + (n_2-1)s_2^2}{n_1+n_2-2}}$.
  - Tính giá trị tới hạn $t_{n_1+n_2-2,\alpha}$ hoặc $t_{n_1+n_2-2,\alpha/2}$.
- Bước 3: Đưa ra kết luận tại mức ý nghĩa α:
  - Bài toán 1: Bác bỏ H_0 nếu $t > t_{n_1+n_2-2,\alpha}$.
  - Bài toán 2: Bác bỏ H_0 nếu $t < -t_{n_1+n_2-2,\alpha}$.
  - Bài toán 3: Bác bỏ H_0 nếu $|t| > t_{n_1+n_2-2,\alpha/2}$.
- Bước 4: Đưa ra những quyết định phù hợp trong kinh tế và xã hội.

Kiểm định trung bình hai tổng thể chuẩn, phương sai bằng nhau, mẫu độc lập

H_0	H_1	Giá trị thống kê t	Qui luật bác bỏ H_0	p-giá trị
$\mu_1 - \mu_2 \leqslant D_0$	$\mu_1 - \mu_2 > D_0$	$t = \dfrac{(\overline{x}_1 - \overline{x}_2) - D_0}{s\sqrt{\dfrac{1}{n_1} + \dfrac{1}{n_2}}}$	$t > t_{n_1+n_2-2,\alpha}$	$P(t_{n_1+n_2-2} > t)$
$\mu_1 - \mu_2 \geqslant D_0$	$\mu_1 - \mu_2 < D_0$	$t = \dfrac{(\overline{x}_1 - \overline{x}_2) - D_0}{s\sqrt{\dfrac{1}{n_1} + \dfrac{1}{n_2}}}$	$t < -t_{n_1+n_2-2,\alpha}$	$P(t_{n_1+n_2-2} < t)$
$\mu_1 - \mu_2 = D_0$	$\mu_1 - \mu_2 \neq D_0$	$t = \dfrac{(\overline{x}_1 - \overline{x}_2) - D_0}{s\sqrt{\dfrac{1}{n_1} + \dfrac{1}{n_2}}}$	$\lvert t\rvert > t_{n_1+n_2-2,\alpha/2}$	$2P(t_{n_1+n_2-2} > \lvert t\rvert)$

Bài toán

Một tạp chí Y học vừa công bố một công trình cho thấy những đứa trẻ được nuôi bằng sữa mẹ có chỉ số thông minh IQ cao hơn những đứa trẻ được nuôi bằng sữa hộp. Để kiểm tra tính đúng đắn của thông báo này, người ta chọn ra một nhóm gồm 10 đứa trẻ bú mẹ và nhóm gồm 10 đứa trẻ bú sữa bình, ghi lại được chỉ số IQ của chúng và được kết quả sau:

Nhóm bú mẹ		Nhóm bú bình	
121	105	102	110
111	119	107	98
108	101	99	103
90	131	86	107
106	112	113	87

Tại mức ý nghĩa $\alpha = 5\%$, có thể kết luận rằng phát biểu của công trình nghiên cứu trên là có cơ sở không nếu chỉ số IQ của hai nhóm này tuân theo phân phối chuẩn và có phương sai bằng nhau.

Lời giải

Chú ý: Một số giá trị cần thiết khi thực hiện kiểm định là:

- $\overline{x}_1 = 110.4, \overline{x}_2 = 101.2,\ n_1 = 10, n_2 = 10,\ s_1 = 11.41, s_2 = 9.04.$

$$s^2 = \frac{(n_1 - 1)s_1^2 + (n_2 - 1)s_2^2}{n_1 + n_2 - 2} = 105.96.$$

$$t = \frac{(\overline{x}_1 - \overline{x}_2) - D_0}{s\sqrt{\dfrac{n_1 + n_2}{n_1 n_2}}} = 1.999$$

- $t_{n_1+n_2-2,\alpha} = t_{18,0.05} = 1.73.$

Lời giải

Kiểm định trung bình hai tổng thể chuẩn, phương sai chưa biết và không bằng nhau, mẫu độc lập

Bài toán

Giả sử hai tổng thể cần nghiên cứu tuân theo phân phối chuẩn với trung bình lần lượt là μ_1, μ_2 chưa biết và phương sai σ_1^2, σ_2^2 chưa biết nhưng không có giả định bằng nhau: $\sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$. Ta cần kiểm định các cặp giả thuyết H_0, H_1 về trung bình của hai tổng thể khi mẫu được chọn ra từ mỗi tổng thể này độc lập với nhau.

Kiểm định trung bình hai tổng thể chuẩn, phương sai chưa biết và không bằng nhau, mẫu độc lập

Trong trường hợp này ta xét biến ngẫu nhiên

$$t_\upsilon = \frac{(\overline{X}_1 - \overline{X}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\dfrac{S_1^2}{n_1} + \dfrac{S_2^2}{n_2}}}$$

tuân theo phân phối student với bậc tự do υ được cho bởi công thức

$$\upsilon = \frac{\left(\dfrac{s_1^2}{n_1} + \dfrac{s_2^2}{n_2}\right)^2}{\dfrac{\left(\dfrac{s_1^2}{n_1}\right)^2}{n_1 - 1} + \dfrac{\left(\dfrac{s_1^2}{n_1}\right)^2}{n_2 - 1}}.$$

Các bài toán kiểm định trong trường hợp này cũng được tiến hành tương tự như các trường hợp khác.

Câu hỏi tự học

Câu hỏi: Hãy nêu ra những bước để thực hiện bài toán kiểm định trung bình hai tổng thể chuẩn, phương sai chưa biết và không bằng nhau, mẫu độc lập. Từ đó hãy làm bài tập tự học dưới đây.

Chú ý: Một vài số liệu cần thiết của bài tập là:

- $\overline{x}_1 = 16.6, \overline{x}_2 = 27.07$, $n_1 = 15, n_2 = 15$, $s_1 = 7.79, s_2 = 7.74$. Từ đó $t = -3.69$ và bậc tự do $\upsilon = 27.999$.
- $t_{\upsilon,\alpha/2} = t_{27.999,0.025} = 2.05$.

Câu hỏi tự học

Câu hỏi: Hãy nêu ra những bước để thực hiện bài toán kiểm định trung bình hai tổng thể chuẩn, phương sai chưa biết và không bằng nhau, mẫu độc lập. Từ đó hãy làm bài tập tự học dưới đây.

Chú ý: Một vài số liệu cần thiết của bài tập là:

- $\overline{x}_1 = 16.6, \overline{x}_2 = 27.07$, $n_1 = 15, n_2 = 15$, $s_1 = 7.79, s_2 = 7.74$. Từ đó $t = -3.69$ và bậc tự do $\upsilon = 27.999$.
- $t_{\upsilon,\alpha/2} = t_{27.999,0.025} = 2.05$.

Bài toán

Một viện dưỡng lão làm thí nghiệm sau: chọn 30 người già ngẫu nhiên trong viện, chia làm hai nhóm mỗi nhóm 15 người và cho mỗi người một cái cây cảnh. Nhóm thứ nhất được yêu cầu chăm sóc cây hàng ngày, còn nhóm thứ hai không được yêu cầu chăm sóc cây. Ghi lại số lần than phiền về sức khỏe của những người trong hai nhóm trong vòng một tuần thu được bảng số liệu sau:

Nhóm thứ nhất			Nhóm thứ hai		
23	5	23	35	23	23
12	21	14	21	37	41
6	18	19	24	22	27
15	34	23	26	16	24
18	10	8	17	38	32

Tại mức ý nghĩa $\alpha = 5\%$, hãy xét xem việc chăm sóc cây có ảnh hưởng đến số lần than phiền về sức khỏe hay không?

Kiểm định trung bình hai tổng thể chưa rõ phân phối, mẫu độc lập cỡ lớn

Bài toán

Giả sử hai tổng thể cần nghiên cứu chưa rõ phân phối có trung bình lần lượt là μ_1, μ_2 chưa biết và phương sai σ_1^2, σ_2^2 chưa biết. Ta cần kiểm định các cặp giả thuyết H_0, H_1 về trung bình của hai tổng thể khi mẫu được chọn ra từ mỗi tổng thể này độc lập với nhau và cỡ mẫu lớn $(n_1, n_2 \geqslant 30)$.

Kiểm định trung bình hai tổng thể, chưa biết phương sai, mẫu độc lập cỡ lớn

Nếu mẫu được chọn ra từ hai tổng thể với cỡ lớn, $n_1 \geqslant 30, n_2 \geqslant 30$, phương sai σ_1^2, σ_2^2 của hai tổng thể chưa biết có thể thay lần lượt bởi các phương sai mẫu S_1^2, S_2^2. Khi đó biến ngẫu nhiên

$$Z = \frac{(\overline{X}_1 - \overline{X}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\dfrac{S_1^2}{n_1} + \dfrac{S_2^2}{n_2}}}$$

xấp xỉ phân phối chuẩn hóa. Do đó các bài toán kiểm định được đặt ra và thực hiện tương tự như trong trường hợp phương sai của hai tổng thể đã biết.

Kiểm định trung bình hai tổng thể, chưa biết phương sai, mẫu độc lập cỡ lớn

H_0	H_1	Giá trị thống kê z	Qui luật bác bỏ H_0	p-giá trị
$\mu_1 - \mu_2 \leqslant D_0$	$\mu_1 - \mu_2 > D_0$	$z = \dfrac{(\overline{x}_1 - \overline{x}_2) - D_0}{\sqrt{\dfrac{s_1^2}{n_1} + \dfrac{s_2^2}{n_2}}}$	$z > z_\alpha$	$P(Z > z)$
$\mu_1 - \mu_2 \geqslant D_0$	$\mu_1 - \mu_2 < D_0$	$z = \dfrac{(\overline{x}_1 - \overline{x}_2) - D_0}{\sqrt{\dfrac{s_1^2}{n_1} + \dfrac{s_2^2}{n_2}}}$	$z < -z_\alpha$	$P(Z < z)$
$\mu_1 - \mu_2 = D_0$	$\mu_1 - \mu_2 \neq D_0$	$z = \dfrac{(\overline{x}_1 - \overline{x}_2) - D_0}{\sqrt{\dfrac{s_1^2}{n_1} + \dfrac{s_2^2}{n_2}}}$	$\lvert z\rvert > z_{\alpha/2}$	$2P(Z > \lvert z\rvert)$

Bài tập tự học

Bài toán

Tại một diễn đàn, đại diện hội phụ nữ phát biểu rằng một bằng chứng của sự bất bình đẳng giữa nam và nữ là lương phụ nữ vẫn còn thấp hơn lương nam giới. Để kiểm chứng điều này, người ta tiến hành điều tra 100 nam giới thì thấy lương trung bình là 7.5 (triệu/tháng) với độ lệch chuẩn là 2.0, điều tra 80 phụ nữ thấy lương trung bình là 6.0, độ lệch chuẩn là 1.5. Ở mức ý nghĩa $\alpha = 5\%$ *hãy kiểm định nhận xét đưa ra trong diễn đàn.*

Kiểm định trung bình hai tổng thể khi chọn mẫu theo đôi

Bài toán

Giả sử hai tổng thể cần nghiên cứu tuân theo phân phối chuẩn với trung bình lần lượt là μ_1, μ_2. Ta cần kiểm định các cặp giả thuyết H_0, H_1 về trung bình của hai tổng thể khi mẫu được chọn theo đôi từ mỗi tổng thể này.

Kiểm định trung bình hai tổng thể khi chọn mẫu theo đôi

- Gọi X_1, X_2 là hai biến ngẫu nhiên chỉ tổng thể thứ nhất và thứ hai. Từ hai tổng thể ta chọn được hai mẫu gồm n cặp $(X_{11}, X_{21}), (X_{12}, X_{22}), \ldots, (X_{1n}, X_{2n})$, đặt $D_i = X_{1i} - X_{2i}, i = 1, \ldots, n$ là n biến ngẫu nhiên chỉ sự sai lệch trên từng cặp.
- Khi đó nếu ta thiết lập biến ngẫu nhiên D với các giá trị có thể $D_1, D_2, \ldots, D_n$ thì D là biến ngẫu nhiên tuân theo phân phối chuẩn với trung bình $E(D) = E(X_1 - X_2) = E(X_1) - E(X_2) = \mu_1 - \mu_2$. Ta cũng kí hiệu $\overline{D}$ là biến ngẫu nhiên chỉ trung bình mẫu các sai lệch trên mỗi cặp và σ_D^2 là phương sai của toàn bộ các sai lệch.

Kiểm định trung bình hai tổng thể khi chọn mẫu theo đôi

- Gọi X_1, X_2 là hai biến ngẫu nhiên chỉ tổng thể thứ nhất và thứ hai. Từ hai tổng thể ta chọn được hai mẫu gồm n cặp $(X_{11}, X_{21}), (X_{12}, X_{22}), \ldots, (X_{1n}, X_{2n})$, đặt $D_i = X_{1i} - X_{2i}, i = 1, \ldots, n$ là n biến ngẫu nhiên chỉ sự sai lệch trên từng cặp.
- Khi đó nếu ta thiết lập biến ngẫu nhiên D với các giá trị có thể $D_1, D_2, \ldots, D_n$ thì D là biến ngẫu nhiên tuân theo phân phối chuẩn với trung bình $E(D) = E(X_1 - X_2) = E(X_1) - E(X_2) = \mu_1 - \mu_2$. Ta cũng kí hiệu $\overline{D}$ là biến ngẫu nhiên chỉ trung bình mẫu các sai lệch trên mỗi cặp và σ_D^2 là phương sai của toàn bộ các sai lệch.

Các bài toán kiểm định

Nhận xét: So sánh trung bình của hai tổng thể trong trường hợp này chuyển về so sánh trung bình của một tổng thể, cụ thể là:

- $H_0 : \mu_1 - \mu_2 = D_0$ tương ứng với $H_0 : D = D_0$;
- $H_0 : \mu_1 - \mu_2 \geqslant D_0$ tương ứng với $H_0 : D \geqslant D_0$;
- $H_0 : \mu_1 - \mu_2 \leqslant D_0$ tương ứng với $H_0 : D \leqslant D_0$.

Khi chọn ra mẫu ngẫu nhiên gồm n cặp $(x_{11}, x_{21}), (x_{12}, x_{22}), \ldots, (x_{1n}, x_{2n})$ thì biến ngẫu nhiên D nhận n giá trị là $d_i = x_{1i} - y_{2i}, \forall i = \overline{1, n}$.

X_1	x_{11}	x_{12}	$\ldots$	x_{1n}
X_2	x_{21}	x_{22}	$\ldots$	x_{2n}
D	d_1	d_2	$\ldots$	d_n

Các bài toán kiểm định

Nhận xét: So sánh trung bình của hai tổng thể trong trường hợp này chuyển về so sánh trung bình của một tổng thể, cụ thể là:

- $H_0 : \mu_1 - \mu_2 = D_0$ tương ứng với $H_0 : D = D_0$;
- $H_0 : \mu_1 - \mu_2 \geqslant D_0$ tương ứng với $H_0 : D \geqslant D_0$;
- $H_0 : \mu_1 - \mu_2 \leqslant D_0$ tương ứng với $H_0 : D \leqslant D_0$.

Khi chọn ra mẫu ngẫu nhiên gồm n cặp $(x_{11}, x_{21}), (x_{12}, x_{22}), \ldots, (x_{1n}, x_{2n})$ thì biến ngẫu nhiên D nhận n giá trị là $d_i = x_{1i} - y_{2i}, \forall i = \overline{1, n}$.

X_1	x_{11}	x_{12}	...	x_{1n}
X_2	x_{21}	x_{22}	...	x_{2n}
D	d_1	d_2	...	d_n

Qui trình thực hiện

- Bước 1: Thiết lập giả thuyết không và giả thuyết đối:

	Bài toán 1	Bài toán 2	Bài toán 3
H_0 :	$D = D_0; D \leqslant D_0$	$D = D_0; D \geqslant D_0$	$D = D_0$
H_1 :	$D > D_0$	$D < D_0$	$D \neq D_0$

- Bước 2: Xác định qui luật kiểm định và tính các giá trị:
  - $\dfrac{\overline{D} - E(D)}{S_D/\sqrt{n}}$ tuân theo phân phối student với n-1 bậc tự do.
  - Tính giá trị kiểm định $t = \dfrac{\overline{d} - D_0}{s_d/\sqrt{n}}$.
  - Tính giá trị tới hạn $t_{n-1,\alpha}$ hoặc $t_{n-1,\alpha/2}$.
- Bước 3: Đưa ra kết luận tại mức ý nghĩa α:
  - Bài toán 1: Bác bỏ H_0 nếu $t > t_{n-1,\alpha}$.
  - Bài toán 2: Bác bỏ H_0 nếu $t < -t_{n-1,\alpha}$.
  - Bài toán 3: Bác bỏ H_0 nếu $|t| > t_{n-1,\alpha/2}$.
- Bước 4: Đưa ra những chiến lược phù hợp trong kinh tế và xã hội.

Kiểm định trung bình hai tổng thể, mẫu chọn theo đôi

H_0	H_1	Giá trị thống kê t	Qui luật bác bỏ H_0	p-giá trị
$D \leqslant D_0$	$D > D_0$	$t = \dfrac{\overline{d} - D_0}{s_d/\sqrt{n}}$	$t > t_{n-1,\alpha}$	$P(t_{n-1} > t)$
$D \geqslant D_0$	$D < D_0$	$t = \dfrac{\overline{d} - D_0}{s_d/\sqrt{n}}$	$t < -t_{n-1,\alpha}$	$P(t_{n-1} < t)$
$D = D_0$	$D \neq D_0$	$t = \dfrac{\overline{d} - D_0}{s_d/\sqrt{n}}$	$\lvert t\rvert > t_{n-1,\alpha/2}$	$2P(t_{n-1} > \lvert t\rvert)$

Ví dụ

Bài toán

Tại một câu lạc bộ thẩm mỹ người ta quảng cáo một chương trình luyện tập làm giảm trọng lượng rất hữu hiệu là sau khóa huấn luyện thì trọng lượng trung bình của các học viên sẽ giảm ít nhất 17 đơn vị (mỗi đơn vị tương đương 1/2kg). Rất đông quí bà, quí cô muốn tham dự khóa huấn luyện nhưng vẫn nghi ngờ về hiệu quả nên đã nhờ một chuyên gia thống kê điều tra hộ. Chuyên gia thống kê chọn ngẫu nhiên 10 quí bà và theo dõi trọng lượng trước và sau khi dự khóa học. Dữ liệu được ghi lại như sau: (đơn vị 1/2kg)

Quí bà	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Trước	189	202	220	207	194	177	193	202	208	233
Sau	170	179	203	192	172	161	174	187	186	204

Giả sử rằng trọng lượng của các quí bà, quí cô trước và sau khi tập tuân theo phân phối chuẩn, ở mức ý nghĩa 5% chuyên gia thống kê khuyên quí bà, quí cô điều gì?

Ví dụ

Một vài số liệu tính trên mẫu

- Tính hiệu các chênh lệch trong mẫu:

Quí bà	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Trước	189	202	220	207	194	177	193	202	208	233
Sau	170	179	203	192	172	161	174	187	186	204
Chênh lệch	19	23	17	15	22	16	19	15	22	29

- $\overline{d} = 19.7, s_d = 4.4$.
- $t = \dfrac{\overline{d} - D_0}{s_d/\sqrt{n}} = 1.94$.
- $t_{n-1,0.05} = t_{9,0.05} = 1.83$.

Thực hiện so sánh trung bình hai tổng thể trong R

- Chọn mẫu độc lập
  - Hai tổng thể chuẩn với phương sai đã biết và dữ liệu mẫu sơ cấp dùng hàm `z.test`;
  - Hai tổng thể chuẩn với phương sai đã biết và dữ liệu mẫu thứ cấp dùng hàm `zsum.test`;
  - Hai tổng thể chuẩn với phương sai chưa biết và dữ liệu sơ cấp dùng hàm `t.test`;
  - Hai tổng thể chuẩn với phương sai chưa biết và dữ liệu thứ cấp dùng hàm `tsum.test`;
- Chọn mẫu theo đôi
  - Khi dữ liệu dạng sơ cấp dùng hàm `t.test`;
  - Khi dữ liệu dạng thứ cấp dùng hàm `tsum.test`.

Kiểm định trung bình hai tổng thể chuẩn, phương sai đã biết, dữ liệu sơ cấp trong R

- `z.test(x, y, alternative = "two.sided", mu = , sigma.x =, sigma.y =)`
- trong đó,
  - `x` là véc tơ dữ liệu mẫu thứ nhất.
  - `y` là véc tơ dữ liệu mẫu thứ hai.
  - `alternative` là giả thuyết đối. Mặc định giả thuyết đối là "two.sided".
  - `mu` là hiệu chênh lệch của hai giá trị trung bình xác định theo giả thuyết không, mặc định bằng 0.
  - `sigma.x` là độ lệch chuẩn của tổng thể thứ nhất.
  - `sigma.y` là độ lệch chuẩn của tổng thể thứ hai.

Kiểm định trung bình hai tổng thể, phương sai đã biết, dữ liệu thứ cấp trong R

- `zsum.test(mean.x, sigma.x = , n.x = , mean.y = , sigma.y = , n.y = , alternative = "two.sided", mu = )`
- trong đó,
  - `mean.x` là trung bình mẫu thứ nhất.
  - `sigma.x` là độ lệch chuẩn của tổng thể thứ nhất.
  - `n.x` là cỡ của mẫu thứ nhất.
  - `mean.y` là trung bình mẫu thứ hai.
  - `sigma.y` là độ lệch chuẩn của tổng thể thứ hai.
  - `n.y` là cỡ của mẫu thứ hai.
  - `alternative` xem hàm `z.test`.
  - `mu` xem hàm `z.test`.

Kiểm định trung bình hai tổng thể, phương sai chưa biết nhưng bằng nhau, dữ liệu sơ cấp trong R

- `t.test(x,y, alternative = , mu =, var.equal = TRUE)`
- trong đó,
  - `x` là dữ liệu mẫu thứ nhất.
  - `y` là dữ liệu mẫu thứ hai.
  - `alternative` xem hàm `z.test`.
  - `mu` xem hàm `z.test`.
  - `var.equal = TRUE` là tham số chỉ phương sai của hai tổng thể bằng nhau.

Kiểm định trung bình hai tổng thể, phương sai chưa biết nhưng bằng nhau, dữ liệu thứ cấp trong R

- `tsum.test(mean.x, s.x = , n.x = , mean.y = , s.y = , n.y = , alternative = "two.sided", mu = , var.equal = TRUE)`
- trong đó,
  - `mean.x` là trung bình mẫu thứ nhất.
  - `s.x` là độ lệch chuẩn của mẫu thứ nhất.
  - `n.x` là cỡ của mẫu thứ nhất.
  - `mean.y` là trung bình mẫu thứ hai.
  - `s.y` là độ lệch chuẩn của mẫu thứ hai.
  - `n.y` là cỡ của mẫu thứ hai.
  - `alternative` xem hàm `z.test`.
  - `var.equal = TRUE` là tham số chỉ phương sai của hai tổng thể bằng nhau.

Ví dụ trong R

```
> t.test(NhomBuMe,NhomBuBinh,mu=0,alt="greater",var.equal=T)

        Two Sample t-test

data:  NhomBuMe and NhomBuBinh
t = 1.9981, df = 18, p-value = 0.03052
alternative hypothesis: true difference in means is greater than 0
95 percent confidence interval:
 1.215772      Inf
sample estimates:
mean of x mean of y
    110.4     101.2
```

Ví dụ trong R

```
> tsum.test(mean.x=7.5,s.x=2,n.x=100,mean.y=6,s.y=1.5,n.y=80,mu=0,alt="g")

        Welch Modified Two-Sample t-Test

data:  Summarized x and y
t = 5.747, df = 177.311, p-value = 1.946e-08
alternative hypothesis: true difference in means is greater than 0
95 percent confidence interval:
 1.068426       NA
sample estimates:
mean of x mean of y
      7.5       6.0
```

Kiểm định trung bình hai tổng thể, chưa biết phương sai không có giả sử bằng nhau, dữ liệu sơ cấp

- `t.test(x,y, alternative = , mu = )`
- trong đó,
    - `x` là dữ liệu mẫu thứ nhất.
    - `y` là dữ liệu mẫu thứ hai.
    - `alternative` xem hàm `z.test`.
    - `mu` xem hàm `z.test`.

Kiểm định trung bình hai tổng thể, chưa biết phương sai không có giả sử bằng nhau, dữ liệu thứ cấp

- `tsum.test(mean.x, s.x = , n.x = , mean.y = , s.y = , n.y = , alternative = , mu = )`
- trong đó,
  - `mean.x` là trung bình mẫu thứ nhất.
  - `s.x` là độ lệch chuẩn của mẫu thứ nhất.
  - `n.x` là cỡ của mẫu thứ nhất.
  - `mean.y` là trung bình mẫu thứ hai.
  - `s.y` là độ lệch chuẩn của mẫu thứ hai.
  - `n.y` là cỡ của mẫu thứ hai.
  - `alternative` xem hàm `z.test`.

Ví dụ trong R

```
> t.test(nhom1,nhom2,mu=0,alt="t")

        Welch Two Sample t-test

data:  nhom1 and nhom2
t = -3.6912, df = 27.999, p-value = 0.0009556
alternative hypothesis: true difference in means is not equal to 0
95 percent confidence interval:
 -16.27514  -4.65819
sample estimates:
mean of x mean of y
 16.60000  27.06667
```

Thực hiện bài toán kiểm định trung bình hai tổng thể, mẫu theo đôi

- `t.test(x,y, alternative = , mu = , paired = TRUE)`
- trong đó,
  - `x` là dữ liệu mẫu thứ nhất.
  - `y` là dữ liệu mẫu thứ hai.
  - `alternative` xem hàm `z.test`.
  - `mu` xem hàm `z.test`.
  - `paired = TRUE` là tham số chỉ việc chọn mẫu là theo đôi.

Ví dụ trong R

```
> t.test(TLTruoc,TLSau,mu=17,alt="less",paired=T)

        Paired t-test

data:  TLTruoc and TLSau
t = 1.9413, df = 9, p-value = 0.958
alternative hypothesis: true difference in means is less than 17
95 percent confidence interval:
     -Inf 22.24957
sample estimates:
mean of the differences
                   19.7
```

Nội dung trình bày

1. Giới thiệu chung về kiểm định giả thuyết
   - Giả thuyết thống kê
   - Sai lầm loại I và loại II
2. Kiểm định giả thuyết một tổng thể
   - Kiểm định giả thuyết về trung bình tổng thể
   - Sử dụng p-giá trị trong bài toán kiểm định
   - Kiểm định giả thuyết về tỉ lệ tổng thể
   - Kiểm định phương sai tổng thể
3. Kiểm định giả thuyết hai tổng thể
   - Kiểm định giả thuyết về sự khác biệt của trung bình hai tổng thể
   - Kiểm định tỉ lệ hai tổng thể
   - Kiểm định giả thuyết cho phương sai của hai tổng thể

Kiểm định tỉ lệ hai tổng thể

Bài toán

Hai tổng thể có tỉ lệ thành công lần lượt là p_1, p_2. Ta cần kiểm định các cặp giả thuyết H_0, H_1 về tỉ lệ của hai tổng thể khi mẫu được chọn ra từ mỗi tổng thể này độc lập với nhau.

Kiểm định tỉ lệ hai tổng thể

- Chọn từ mỗi tổng thể ra một mẫu ngẫu nhiên có cỡ lần lượt là n_1, n_2. Gọi P_{s1}, P_{s2} là hai biến ngẫu nhiên chỉ tỉ lệ mẫu tương ứng. Xét biến ngẫu nhiên hiệu $P_{s1} - P_{s2}$, ta có

$$E(P_{s1} - P_{s2}) = E(P_{s1}) - E(P_{s2}) = p_1 - p_2,$$

$$V(P_1 - P_2) = V(P_1) + V(P_2) = \frac{p_1(1-p_1)}{n_1} + \frac{p_2(1-p_2)}{n_2}.$$

- Khi n_1, n_2 đủ lớn, tức là $n_1 p_{s1} \geqslant 5$ và $n_1(1 - p_{s1}) \geqslant 5$; $n_2 p_{s2} \geqslant 5$ và $n_2(1 - p_{s2}) \geqslant 5$, ta có

$$Z = \frac{(P_{s1} - P_{s2}) - (p_1 - p_2)}{\sqrt{\dfrac{p_1(1-p_1)}{n_1} + \dfrac{p_2(1-p_2)}{n_2}}}$$

xấp xỉ phân phối chuẩn hóa.

Kiểm định tỉ lệ hai tổng thể

- Ước lượng $p_1 = p_2$ bởi giá trị chung

$$p_s = \frac{n_1 p_{s1} + n_2 p_{s2}}{n_1 + n_2}.$$

- Ta dùng biến ngẫu nhiên Z xấp xỉ phân phối chuẩn hóa sau để kiểm định giả thuyết về hai tỉ lệ tổng thể

$$Z = \frac{(P_{s1} - P_{s2}) - (p_1 - p_2)}{\sqrt{p_s(1 - p_s)(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2})}}.$$

Qui trình thực hiện

- Bước 1: Thiết lập giả thuyết không và giả thuyết đối:

	Bài toán 1	Bài toán 2	Bài toán 3
H_0 :	$p_1 - p_2 = 0$	$p_1 - p_2 = 0$	$p_1 - p_2 = 0$
	$p_1 - p_2 \leqslant 0$	$p_1 - p_2 \geqslant 0$	
H_1 :	$p_1 - p_2 > 0$	$p_1 - p_2 < 0$	$p_1 - p_2 \neq 0$

- Bước 2: Tính các giá trị:
  - Tính $z = \dfrac{(p_{s1} - p_{s2})}{\sqrt{p_s(1-p_s)(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2})}}$, với $p_s = \dfrac{n_1 p_{s1} + n_2 p_{s2}}{n_1 + n_2}$.
  - Tính giá trị tới hạn z_α hoặc $z_{\alpha/2}$.
- Bước 3: Thiết lập qui tắc quyết định tại mức ý nghĩa α:
  - Bài toán 1: Bác bỏ H_0 nếu $z > z_\alpha$.
  - Bài toán 2: Bác bỏ H_0 nếu $z < -z_\alpha$.
  - Bài toán 3: Bác bỏ H_0 nếu $|z| > z_{\alpha/2}$.
- Bước 4: Đưa ra những quyết định phù hợp trong kinh tế và xã hội.

Ví dụ

Bài toán

Một công ty sản xuất dược liệu đang thử nghiệm hai loại thuốc mới làm giảm huyết áp. Việc thử nghiệm được tiến hành trên hai nhóm thú vật khác nhau. Trong nhóm một có 71 con trong 100 con thú giảm huyết áp khi được cho dùng thuốc loại 1. Trong nhóm thứ hai có 58 con trong 90 con thú giảm huyết áp khi được dùng thuốc loại 2. Công ty muốn kiểm định ở mức ý nghĩa 5% *xem có sự khác biệt về tính công hiệu của hai loại thuốc này.*

Lời giải

Một số giá trị tính toán trên mẫu

- $p_{s1} = 0.71, p_{s2} = 0.644$, $n_1 = 100, n_2 = 90$.

$$p_s = \frac{n_1 p_{s1} + n_2 p_{s2}}{n_1 + n_2} = 0.6789.$$

$$z = \frac{(p_{s1} - p_{s2})}{\sqrt{p_s(1 - p_s)(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2})}} = 0.973$$

- Ta có $z_{\alpha/2} = z_{0.025} = 1.96$

Lời giải

Thực hiện kiểm định tỉ lệ hai tổng thể trong R

- `prop.test(x, n, alternative = , correct = )`
- trong đó,
  - `x` là số lần "thành công" trong hai mẫu.
  - `n` là số lần thử nghiệm trong hai mẫu.
  - `alternative` xem hàm `z.test`.
  - `correct` là tham số xét xem có hay không sự điều chỉnh liên tục Yate, mặc định là `correct=TRUE`.

Ví dụ trong R

```
> prop.test(c(71,58),c(100,90),alt="t",correct=F)

         2-sample test for equality of proportions without continuity
        correction

data:  c(71, 58) out of c(100, 90)
X-squared = 0.9339, df = 1, p-value = 0.3339
alternative hypothesis: two.sided
95 percent confidence interval:
 -0.06744722  0.19855833
sample estimates:
   prop 1    prop 2
0.7100000 0.6444444
```

Nội dung trình bày

Bài toán kiểm định phương sai hai tổng thể

Bài toán

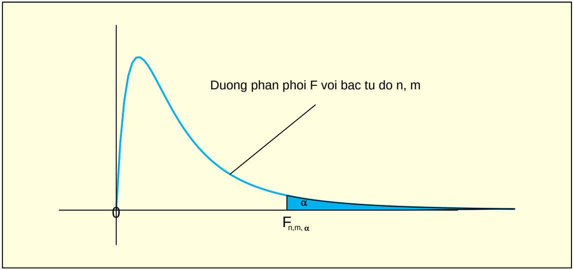
Giả sử hai tổng thể tuân theo phân phối chuẩn với các phương sai σ_1^2, σ_2^2 *chưa biết. Kiểm định ở mức ý nghĩa* α *giả thuyết* H_0 *và* H_1 *về phương sai của hai tổng thể.*

Phân phối Fisher

- Phân phối Fisher với m bậc tự do ở tử và n bậc tự do ở mẫu, kí hiệu là $F_{m,n}$ là phân phối của biến ngẫu nhiên $F_{m,n} = \dfrac{\chi^2_m/m}{\chi^2_n/n}$.
- Giả sử từ mỗi tổng thể chọn ra hai mẫu ngẫu nhiên có cỡ là n_1, n_2, với phương sai mẫu là S_1^2, S_2^2. Khi đó nếu hai tổng thể tuân theo phân phối chuẩn thì biến ngẫu nhiên $F = \dfrac{S_1^2}{S_2^2}$ tuân theo phân phối Fisher với $n_1 - 1$ bậc tự do ở tử và $n_2 - 1$ bậc tự do ở mẫu.
- Với mỗi cặp bậc tự do ta xác định giá trị $F_{m,n,\alpha}$ và $F_{m,n,1-\alpha}$ cho bởi:

$$P(F_{m,n} > F_{m,n,\alpha}) = \alpha \qquad P(F_{m,n} < F_{m,n,1-\alpha}) = \alpha$$

Minh họa bằng hình vẽ



Qui trình thực hiện

- Bước 1: Thiết lập giả thuyết không và giả thuyết đối:

	Bài toán 1	Bài toán 2	Bài toán 3
H_0 :	$\sigma_1^2 = \sigma_2^2$	$\sigma_1^2 = \sigma_2^2$	$\sigma_1^2 = \sigma_2^2$
	$\sigma_1^2 \leqslant \sigma_2^2$	$\sigma_1^2 \geqslant \sigma_2^2$	
H_1 :	$\sigma_1^2 > \sigma_2^2$	$\sigma_1^2 < \sigma_2^2$	$\sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$

- Bước 2: Tính các giá trị:
  - Tính giá trị kiểm định $F = \dfrac{s_1^2}{s_2^2}$.
  - Tính $F_{n_1-1,n_2-1,\alpha}$, $F_{n_1-1,n_2-1,1-\alpha}$ hoặc $F_{n_1-1,n_2-1,\alpha/2}$, $F_{n_1-1,n_2-1,1-\alpha/2}$

Qui trình thực hiện

- Bước 3: Thiết lập qui tắc quyết định tại mức ý nghĩa α:
  - Bài toán 1: Bác bỏ H_0 nếu $F = \frac{s_1^2}{s_2^2} > F_{n_1-1,n_2-1,\alpha}$.
  - Bài toán 2: Bác bỏ H_0 nếu $F = \frac{s_1^2}{s_2^2} < F_{n_1-1,n_2-1,1-\alpha}$.
  - Bài toán 3: Bác bỏ H_0 nếu $F = \frac{s_1^2}{s_2^2} > F_{n_1-1,n_2-1,\alpha/2}$ hoặc $F = \frac{s_1^2}{s_2^2} < F_{n_1-1,n_2-1,1-\alpha/2}$
- Bước 4: Đưa ra những quyết định phù hợp trong kinh tế và xã hội.

Qui trình thực hiện

- Bước 3: Thiết lập qui tắc quyết định tại mức ý nghĩa α:
  - Bài toán 1: Bác bỏ H_0 nếu $F = \dfrac{s_1^2}{s_2^2} > F_{n_1-1,n_2-1,\alpha}$.
  - Bài toán 2: Bác bỏ H_0 nếu $F = \dfrac{s_1^2}{s_2^2} < F_{n_1-1,n_2-1,1-\alpha}$.
  - Bài toán 3: Bác bỏ H_0 nếu $F = \dfrac{s_1^2}{s_2^2} > F_{n_1-1,n_2-1,\alpha/2}$ hoặc $F = \dfrac{s_1^2}{s_2^2} < F_{n_1-1,n_2-1,1-\alpha/2}$
- Bước 4: Đưa ra những quyết định phù hợp trong kinh tế và xã hội.

Ví dụ

Bài toán

Một công ty chuyên cung cấp dịch vụ điện thoại di động muốn khảo sát sự khác biệt trong hóa đơn điện thoại trung bình tháng của khách hàng là nam và nữ. Họ tiến hành thu thập một mẫu ngẫu nhiên 20 khách hàng nam và 10 khách hàng nữ. Tính toán độ lệch chuẩn của mẫu gồm khách hàng nữ và nam tương ứng ta thu được $s_1 = 164000 VND$ *và* $s_2 = 146000 VND$. *Chọn độ tin cậy của kiểm định là 95%. Kiểm định xem có sự khác biệt trong biến động chi tiêu cho điện thoại di động của khách hàng nam so với khách hàng nữ hay không?*

Lời giải

Một vài tính toán trong ví dụ:

- $s_1^2 = 164000, s_2^2 = 146000,\ n_1 = 10, n_2 = 20.$

$$F = \frac{s_1^2}{s_2^2} = \frac{164000^2}{146000^2} = 1.26.$$

- Do $\alpha = 0.05$ nên $F_{n_1-1,n_2-1,\alpha/2} = F_{10-1,20-1,0.025} = 2.88.$

Lời giải

Thực hiện kiểm định phương sai trong R

- `var.test(x, y, alternative = c("two.sided", "less", "greater"))`
- trong đó,
  - `x,y` tương ứng là dữ liệu của mẫu thứ nhất và thứ hai;
  - `alternative = c("two.sided", "less", "greater")` là giả thuyết đối tương ứng là hai bên, bên trái, bên phải, mặc định là `two.sided`.