Xác suất Thống kê ứng dụng trong Kinh tế Xã hội

Nguyễn Thị Nhung

Bộ môn Toán - Đại học THĂNG LONG

Ngày 7 tháng 8 năm 2013

Chương V

Xác suất cơ bản - 2

Chương V

1. Tính chất của xác suất
   - Tính chất của xác suất
2. Một số qui tắc tính xác suất
   - Qui tắc cộng xác suất
   - Qui tắc nhân xác suất
   - Qui tắc xác suất có điều kiện
   - Công thức xác suất đầy đủ
   - Công thức Bayes

Nội dung chính trong chương

- Trình bày các tính chất cơ bản của xác suất;
- Trình bày các qui tắc tính xác suất cơ bản như: qui tắc cộng, qui tắc nhân, qui tắc xác suất có điều kiện, công thức Bayes.
- Minh họa ứng dụng của các qui tắc tính toán này trong các ví dụ thực tế.

Yêu cầu đối với sinh viên

- Nắm được các tính chất cơ bản của xác suất;
- Nắm được các qui tắc tính xác suất cơ bản như: qui tắc cộng, qui tắc nhân, qui tắc xác suất có điều kiện, công thức Bayes và biết cách vận dụng những qui tắc trong việc tính xác suất của những tình huống cụ thể.

Bài toán tình huống

Câu hỏi tình huống

Tình huống 1: Ba xạ thủ mỗi người bắn một viên đạn vào mục tiêu với xác suất trúng đích lần lượt là 0.6, 0.7 *và* 0.8. *Tính xác suất để có ít nhất một người bắn trúng đích? Có ít nhất một người bắn trúng đích?*

Bài toán tình huống

Câu hỏi tình huống

Tình huống 2: Hưởng ứng phong trào "Toàn dân nói KHÔNG với thuốc lá, bạn tham gia vào chương trình tuyên truyền ra công chúng những tác hại của việc hút thuốc lá. Hút thuốc lá là nguyên nhân gây ra nhiều bệnh, trong đó có bệnh ung thư họng. Để đưa ra những bằng chứng có tính thuyết phục, bạn đã xin được số liệu về tỉ lệ trong dân chúng ở một vùng liên quan đến hút thuốc lá và ung thư họng, cụ thể như sau:

- *Tỉ lệ nghiện thuốc lá mà mắc chứng ung thư họng là* 15%*;*
- *Tỉ lệ số người nghiện thuốc lá nhưng không mắc ung thư họng là* 25%*;*
- *Tỉ lệ số người không nghiện thuốc và cũng không bị ung thư họng là* 50%*;*
- *Tỉ lệ số người không nghiện thuốc nhưng mắc chứng ung thư họng là* 10%*;*

Với những dữ liệu này làm thế nào bạn có thể rút ra kết luận gì về mối quan hệ giữa bệnh ung thư họng và thói quen hút thuốc lá?

Bài toán tình huống

Câu hỏi tình huống

Tình huống 2: Hưởng ứng phong trào "Toàn dân nói KHÔNG với thuốc lá, bạn tham gia vào chương trình tuyên truyền ra công chúng những tác hại của việc hút thuốc lá. Hút thuốc lá là nguyên nhân gây ra nhiều bệnh, trong đó có bệnh ung thư họng. Để đưa ra những bằng chứng có tính thuyết phục, bạn đã xin được số liệu về tỉ lệ trong dân chúng ở một vùng liên quan đến hút thuốc lá và ung thư họng, cụ thể như sau:

- *Tỉ lệ nghiện thuốc lá mà mắc chứng ung thư họng là* 15%;
- *Tỉ lệ số người nghiện thuốc lá nhưng không mắc ung thư họng là* 25%;
- *Tỉ lệ số người không nghiện thuốc và cũng không bị ung thư họng là* 50%;
- *Tỉ lệ số người không nghiện thuốc nhưng mắc chứng ung thư họng là* 10%;

Với những dữ liệu này làm thế nào bạn có thể rút ra kết luận gì về mối quan hệ giữa bệnh ung thư họng và thói quen hút thuốc lá?

Bài toán tình huống

Câu hỏi tình huống

Tình huống 3: Bạn nghi là mình mắc một loại bệnh, bạn đi xét nghiệm thấy có kết quả dương tính. Bạn rất lo lắng và tìm hiểu thì thấy tỉ lệ người dân mắc bệnh này là $1/1000$. *Loại xét nghiệm mà bạn vừa thử, ai mắc bệnh khi xét nghiệm cũng ra phản ứng dương tính, nhưng tỉ lệ phản ứng dương tính nhầm là* 5% *(tức là trong những người không bị bệnh có* 5% *số người thử ra phản ứng dương tính). Với những thông tin này, bạn thử tính xem khả năng mắc bệnh của mình là bao nhiêu và bạn nên làm thế nào?*

Câu hỏi tình huống

Tình huống 4: Giả sử bạn là thư kí cho một viên thanh tra chịu trách nhiệm điều tra kẻ phạm tội và đang điều tra một vụ án mạng vừa xảy ra. Viên thanh tra của bạn đang nghi ngờ một kẻ tình nghi và cho rằng kẻ này có khả năng đã phạm tội là 60%. Có một chứng cớ mới được tìm thấy cho thấy kẻ phạm tội có màu tóc nâu và kẻ mà bị tình nghi cũng có màu tóc nâu. Bạn tìm hiểu và thấy 20% dân số có màu tóc nâu. Viên thanh tra yêu cầu bạn tính xem bây giờ khả năng phạm tội của kẻ tình nghi là bao nhiêu?

Nội dung trình bày

1. Tính chất của xác suất
   - Tính chất của xác suất
2. Một số qui tắc tính xác suất
   - Qui tắc cộng xác suất
   - Qui tắc nhân xác suất
   - Qui tắc xác suất có điều kiện
   - Công thức xác suất đầy đủ
   - Công thức Bayes

Một vài tính chất của xác suất

Tính chất

- *Xác suất của một biến cố là một số nằm trong đoạn từ 0 đến 1:* $0 \leqslant P(A) \leqslant 1$.
- *Xác suất của biến cố không thể bằng 0:* $P(\varnothing) = 0$.
- *Xác suất của biến cố chắc chắn bằng 1:* $P(\Omega) = 1$.

Một vài tính chất của xác suất

Tính chất

- *Xác suất của một biến cố là một số nằm trong đoạn từ 0 đến 1:* $0 \leqslant P(A) \leqslant 1$.
- *Xác suất của biến cố không thể bằng 0:* $P(\varnothing) = 0$.
- *Xác suất của biến cố chắc chắn bằng 1:* $P(\Omega) = 1$.

Đại học Thăng Long
Khương Trung, Thanh Xuân, Hà Nội
Tel.: 04.8587346 , Fax: 04.5636775

Một vài tính chất của xác suất

Tính chất

- *Xác suất của một biến cố là một số nằm trong đoạn từ 0 đến 1:* $0 \leqslant P(A) \leqslant 1$.
- *Xác suất của biến cố không thể bằng 0:* $P(\varnothing) = 0$.
- *Xác suất của biến cố chắc chắn bằng 1:* $P(\Omega) = 1$.

Một vài tính chất của xác suất

Tính chất

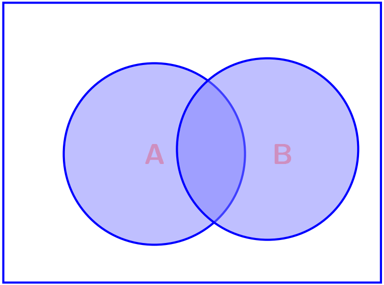
- *Xác suất của một biến cố là một số nằm trong đoạn từ 0 đến 1:* $0 \leqslant P(A) \leqslant 1$.
- *Xác suất của biến cố không thể bằng 0:* $P(\varnothing) = 0$.
- *Xác suất của biến cố chắc chắn bằng 1:* $P(\Omega) = 1$.

Nội dung trình bày

Mệnh đề (Qui tắc cộng)

Cho A và B là hai biến cố của cùng một phép thử. Khi đó ta có

$$P(A+B) = P(A) + P(B) - P(AB).$$



Một số hệ quả qui tắc cộng

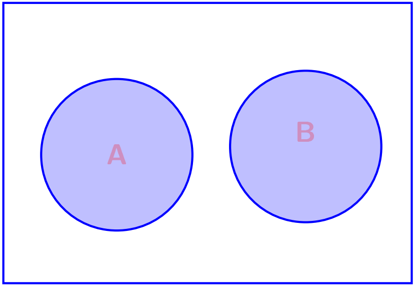
Hệ quả (Biến cố xung khắc)

- *Nếu A và B là hai biến cố xung khắc thì ta có:*

$$P(A+B) = P(A) + P(B).$$

- *Nếu các biến cố $A_1, \dots, A_n$ xung khắc từng đôi thì ta có:*

$$P(A_1 + \ldots + A_n) = P(A_1) + \ldots + P(A_n).$$

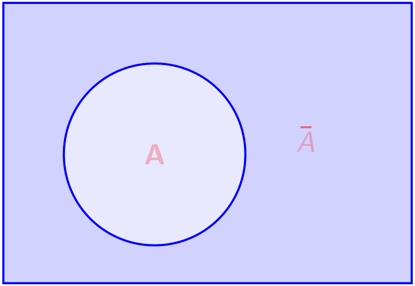


Một số hệ quả qui tắc cộng

Hệ quả (Biến cố đối)

Nếu $\bar{A}$ là biến cố đối của biến cố A thì ta có

$$P(\bar{A}) = 1 - P(A).$$



Nội dung trình bày

1. Tính chất của xác suất
   - Tính chất của xác suất
2. Một số qui tắc tính xác suất
   - Qui tắc cộng xác suất
   - Qui tắc nhân xác suất
   - Qui tắc xác suất có điều kiện
   - Công thức xác suất đầy đủ
   - Công thức Bayes

Qui tắc nhân xác suất

Định nghĩa

Hai biến cố A và B được gọi là độc lập với nhau nếu nếu việc xảy ra hay không xảy ra của biến cố này không làm thay đổi xác suất xảy ra của biến cố kia và ngược lại.

Định nghĩa

Nhóm các biến cố $A_1, A_2, \ldots, A_n$ được gọi là độc lập nếu mọi tập biến cố con bất kì trong các biến cố trên là độc lập với nhau.

Mệnh đề

Cho A và B là hai biến cố độc lập với nhau. Khi đó ta có

$$P(AB) = P(A)P(B).$$

Qui tắc nhân xác suất

Định nghĩa

Hai biến cố A và B được gọi là độc lập với nhau nếu nếu việc xảy ra hay không xảy ra của biến cố này không làm thay đổi xác suất xảy ra của biến cố kia và ngược lại.

Định nghĩa

Nhóm các biến cố $A_1, A_2, \ldots, A_n$ được gọi là độc lập nếu mọi tập biến cố con bất kì trong các biến cố trên là độc lập với nhau.

Mệnh đề

Cho A và B là hai biến cố độc lập với nhau. Khi đó ta có

$$P(AB) = P(A)P(B).$$

Qui tắc nhân xác suất

Định nghĩa

Hai biến cố A và B được gọi là độc lập với nhau nếu nếu việc xảy ra hay không xảy ra của biến cố này không làm thay đổi xác suất xảy ra của biến cố kia và ngược lại.

Định nghĩa

Nhóm các biến cố $A_1, A_2, \ldots, A_n$ được gọi là độc lập nếu mọi tập biến cố con bất kì trong các biến cố trên là độc lập với nhau.

Mệnh đề

Cho A và B là hai biến cố độc lập với nhau. Khi đó ta có

$$P(AB) = P(A)P(B).$$

Ví dụ

Bài toán

Ba người, mỗi người bắn vào mục tiêu với xác suất trúng của mỗi người lần lượt là 0,6; 0,7 và 0,8. Tìm xác suất của biến cố:

a. *Có đúng một người bắn trúng.*

b. *Có ít nhất một người bắn trúng.*

Lời giải

Lời giải

Giải bài toán Méré

Nhắc lại rằng trong bài toán Méré ta đi so sánh xác suất của biến cố A = "Tung một con xúc xắc 4 lần, có ít nhất một lần xuất hiện mặt 6" và biến cố B = "Tung hai con xúc xắc 24 lần, có ít nhất một lần hiện lên một đôi 6".

Hãy giải bài toán Méré bằng cách thực hiện các yêu cầu sau:

- Lập biến cố đối $\bar{A}$, tính $P(\bar{(A)})$, tính $P(A)$.
- Lập biến cố đối $\bar{B}$, tính $P(\bar{(B)})$, tính $P(B)$.
- So sánh $P(A)$ và $P(B)$ và trả lời thắc mắc của Méré.

Nội dung trình bày

1. Tính chất của xác suất
   - Tính chất của xác suất
2. Một số qui tắc tính xác suất
   - Qui tắc cộng xác suất
   - Qui tắc nhân xác suất
   - Qui tắc xác suất có điều kiện
   - Công thức xác suất đầy đủ
   - Công thức Bayes

Định nghĩa xác suất có điều kiện

Định nghĩa

Xác suất của biến cố A được tính với điều kiện biến cố B đã xảy ra gọi là xác suất có điều kiện của A khi B đã xảy ra và kí hiệu là $P(A|B)$.

Nhận xét: Khi xem xét biến cố A trong điều kiện biến cố B đã xảy ra:

- Nếu $P(A|B) > P(A)$ thì ta nói biến cố B có lợi cho biến cố A.
- Nếu $P(A|B) < P(A)$ thì ta nói biến cố B không có lợi cho biến cố A. Nếu $P(A|B) = P(A)$ thì ta nói biến cố B xảy ra không ảnh hưởng đến khả năng xảy ra của A hay A, B độc lập với nhau.

Định nghĩa xác suất có điều kiện

Định nghĩa

Xác suất của biến cố A được tính với điều kiện biến cố B đã xảy ra gọi là xác suất có điều kiện của A khi B đã xảy ra và kí hiệu là $P(A|B)$.

Nhận xét: Khi xem xét biến cố A trong điều kiện biến cố B đã xảy ra:

- Nếu $P(A|B) > P(A)$ thì ta nói biến cố B có lợi cho biến cố A.
- Nếu $P(A|B) < P(A)$ thì ta nói biến cố B không có lợi cho biến cố A. Nếu $P(A|B) = P(A)$ thì ta nói biến cố B xảy ra không ảnh hưởng đến khả năng xảy ra của A hay A, B độc lập với nhau.

Qui tắc xác suất có điều kiện

Mệnh đề

Cho A và B là hai biến cố tùy ý. Khi đó ta có

$$P(AB) = P(A)P(B|A) = P(B)P(A|B).$$

Hệ quả

- *Nếu* $P(B) > 0$ *thì ta có:* $P(A|B) = \dfrac{P(AB)}{P(B)}$.
- *Nếu* $P(A) > 0$ *thì ta có:* $P(B|A) = \dfrac{P(AB)}{P(A)}$.

Nhận xét: Hai biến cố A và B là độc lập với nhau khi và chỉ khi $P(A|B) = P(A)$ hoặc $P(B|A) = P(B)$ hay $P(AB) = P(A)P(B)$.

Qui tắc xác suất có điều kiện

Mệnh đề

Cho A và B là hai biến cố tùy ý. Khi đó ta có

$$P(AB) = P(A)P(B|A) = P(B)P(A|B).$$

Hệ quả

- *Nếu $P(B) > 0$ thì ta có:* $P(A|B) = \dfrac{P(AB)}{P(B)}$.
- *Nếu $P(A) > 0$ thì ta có:* $P(B|A) = \dfrac{P(AB)}{P(A)}$.

Nhận xét: Hai biến cố A và B là độc lập với nhau khi và chỉ khi $P(A|B) = P(A)$ hoặc $P(B|A) = P(B)$ hay $P(AB) = P(A)P(B)$.

Qui tắc xác suất có điều kiện

Mệnh đề

Cho A và B là hai biến cố tùy ý. Khi đó ta có

$$P(AB) = P(A)P(B|A) = P(B)P(A|B).$$

Hệ quả

- *Nếu $P(B) > 0$ thì ta có:* $P(A|B) = \dfrac{P(AB)}{P(B)}$.
- *Nếu $P(A) > 0$ thì ta có:* $P(B|A) = \dfrac{P(AB)}{P(A)}$.

Nhận xét: Hai biến cố A và B là độc lập với nhau khi và chỉ khi $P(A|B) = P(A)$ hoặc $P(B|A) = P(B)$ hay $P(AB) = P(A)P(B)$.

Ví dụ

Bài toán

Xét tính độc lập của các cặp biến cố A và B trong các trường hợp sau:

- *Phép thử: một gia đình dự định sinh hai đứa con. A là biến cố đứa con đầu là con trai, B là biến cố đứa con thứ hai là con gái.*
- *Phép thử: một gia đình dự định sinh một đứa con. A là biến cố đứa con sinh ra là con trai, B là biến cố đứa con sinh ra là con gái.*
- *Phép thử: một gia đình dự định sinh hai đứa con. A là biến cố có con trai, B là biến cố có con gái.*

Tính chất của xác suất có điều kiện

Tính chất

- $0 \leqslant P(A/B) \leqslant 1$,
- $P(A/A) = 1$,
- *Nếu* $AC = \varnothing$ *thì* $P(A + C/B) = P(A/B) + P(C/B)$,
- $P(\bar{A}/B) = 1 - P(A/B)$.

Nhận xét: Nếu các biến cố A và B độc lập thì: $P(A/B) = P(A)$ hoặc $P(B/A) = P(B)$. Nếu A và B độc lập với nhau thì $A, \bar{B}$ độc lập với nhau, $\bar{A}, B$ độc lập với nhau và $\bar{A}, \bar{B}$ độc lập với nhau.

Ví dụ

Bài toán

Trong một vùng dân cư, tỷ lệ nghiện thuốc lá và mắc chứng ung thư họng là 15%. *Có* 25% *số người nghiện thuốc lá nhưng không mắc ung thư họng,* 50% *số người không nghiện thuốc và cũng không bị ung thư họng và có* 10% *số người không nghiện thuốc nhưng mắc chứng ung thư họng.*

a. *Tính tỉ lệ những người nghiện thuốc lá.*

b. *Tính tỉ lệ những người bị ung thư họng trong số những người nghiện thuốc lá.*

c. *Tính tỉ lệ những người bị ung thư họng trong số những người không nghiện thuốc lá.*

d. *Liệu có thể rút ra kết luận gì về mối quan hệ giữa bệnh ung thư họng và thói quen hút thuốc lá?*

Nội dung trình bày

1. Tính chất của xác suất
   - Tính chất của xác suất
2. Một số qui tắc tính xác suất
   - Qui tắc cộng xác suất
   - Qui tắc nhân xác suất
   - Qui tắc xác suất có điều kiện
   - Công thức xác suất đầy đủ
   - Công thức Bayes

Công thức xác suất đầy đủ

Định nghĩa

Các biến cố $A_1, A_2, \ldots, A_n$ được gọi là một hệ đầy đủ các biến cố nếu chúng đôi một xung khắc với nhau và hợp của chúng là biến cố chắc chắn.

Mệnh đề

Nếu các biến cố $A_1, A_2, \ldots, A_n$ là một hệ đầy đủ các biến cố thì với mỗi biến cố B ta có:

$$P(B) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i)P(B/A_i).$$

Công thức xác suất đầy đủ

Định nghĩa

Các biến cố $A_1, A_2, \ldots, A_n$ được gọi là một hệ đầy đủ các biến cố nếu chúng đôi một xung khắc với nhau và hợp của chúng là biến cố chắc chắn.

Mệnh đề

Nếu các biến cố $A_1, A_2, \ldots, A_n$ là một hệ đầy đủ các biến cố thì với mỗi biến cố B ta có:

$$P(B) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i)P(B/A_i).$$

Công thức xác xuất đầy đủ

Chứng minh.

Ta có các biến cố $BA_1, BA_2, \ldots, BA_n$ đôi một xung khắc với nhau và

$$B = B\Omega = B \cup_{i=1}^{n} A_i = \cup_{i=1}^{n} BA_i.$$

Vậy $P(B) = \sum_{i=1}^{n} P(BA_i)$. Theo qui tắc nhân $P(BA_i) = P(A_i)P(B/A_i)$, thay vào ta có

$$P(B) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i)P(B/A_i).$$

$\square$

Nhóm đầy đủ

Nhận xét:

- A và $\bar{A}$ tạo thành nhóm đầy đủ.
- Nếu $A_1, A_2, \ldots, A_n$ là nhóm đầy đủ thì

$$P(A_1) + P(A_2) + \ldots + P(A_n) = 1.$$

Thí dụ

Bài toán

Trong một nhà máy có ba phân xưởng A, B, C *tương ứng làm ra* $25\%, 35\%, 40\%$ *tổng số sản phẩm của nhà máy. Biết rằng xác suất làm ra một sản phẩm hỏng của phân xưởng* A *là* $0,01$, *của phân xưởng* B *là* $0,02$ *và của phân xưởng* C *là* $0,025$. *Chọn ngẫu nhiên một sản phẩm của nhà máy. Tính xác suất để đó là một sản phẩm hỏng.*

Lời giải

Nội dung trình bày

1. Tính chất của xác suất
   - Tính chất của xác suất
2. Một số qui tắc tính xác suất
   - Qui tắc cộng xác suất
   - Qui tắc nhân xác suất
   - Qui tắc xác suất có điều kiện
   - Công thức xác suất đầy đủ
   - Công thức Bayes

Mệnh đề (Công thức Bayes)

Nếu $A_1, A_2, \ldots, A_n$ *là một hệ đầy đủ các biến cố và* B *là một biến cố với* $P(B) \neq 0$ *thì với mỗi* $k = 1, 2, \ldots n$ *ta có:*

$$P(A_k/B) = \frac{P(A_k)P(B/A_k)}{\sum_{i=1}^{n} P(A_i)P(B/A_i)}.$$

Chứng minh.

Theo qui tắc nhân ta có: $P(B)P(A_k/B) = P(BA_k) = P(A_k)P(B/A_k)$. Vậy $P(A_k/B) = \dfrac{P(A_k)P(B/A_k)}{P(B)}$. Mặt khác $P(B) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i)P(B/A_i)$. Thay vào mẫu số ta có điều phải chứng minh. □

Công thức Bayes

Mệnh đề (Công thức Bayes)

Nếu $A_1, A_2, \dots, A_n$ *là một hệ đầy đủ các biến cố và* B *là một biến cố với* $P(B) \neq 0$ *thì với mỗi* $k = 1, 2, \dots n$ *ta có:*

$$P(A_k/B) = \frac{P(A_k)P(B/A_k)}{\sum_{i=1}^{n} P(A_i)P(B/A_i)}.$$

Chứng minh.

Theo qui tắc nhân ta có: $P(B)P(A_k/B) = P(BA_k) = P(A_k)P(B/A_k)$. Vậy $P(A_k/B) = \dfrac{P(A_k)P(B/A_k)}{P(B)}$. Mặt khác $P(B) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i)P(B/A_i)$. Thay vào mẫu số ta có điều phải chứng minh. □

Nhận xét:

- Các biến cố $A_1, A_2, \ldots, A_n$ thường được gọi là các giả thiết. Các xác suất $P(A_1), P(A_2), \ldots, P(A_n)$ được xác định trước khi phép thử được tiến hành, do đó thường được gọi là các xác suất tiên nghiệm. Các xác suất $P(A_1|B), P(A_2|B), \ldots P(A_n|B)$ được xác định sau khi phép thử đã tiến hành và biến cố B đã xảy ra, do đó thường được gọi là các xác suất hậu nghiệm. Như vậy, công thức Bayes cho phép đánh giá lại xác suất xảy ra các giả thiết sau khi đã biết kết quả của phép thử là biến cố B đã xảy ra.
- Công thức Bayes có rất nhiều ứng dụng, đặc biệt trong các nghiên cứu về y học, xã hội học, ...

Ví dụ

Bài toán

(Đây là một bài toán được ba nhà toán học Cassels, Shoenberger và Grayboys đem đố 60 *sinh viên và cán bộ y khoa tại Harvard Medical School năm 1978.) Giả sử có một loại bệnh mà tỉ lệ người mắc bệnh là* $1/1000$. *Giả sử có một loại xét nghiệm, mà ai mắc bệnh khi xét nghiệm cũng ra phản ứng dương tính, nhưng tỉ lệ phản ứng dương tính nhầm là* 5% *(tức là trong những người không bị bệnh có* 5% *số người thử ra phản ứng dương tính). Hỏi khi một người xét nghiệm bị phản ứng dương tính, thì khả năng mắc bệnh của người đó là bao nhiêu?*

Ví dụ tự học

Bài toán

Tại những giai đoạn nhất định của cuộc điều tra tội phạm, viên thanh tra chịu trách nhiệm cho rằng 60% tội thuộc về một kẻ bị tình nghi nào đó. Giả sử rằng một chứng cớ mới được tìm thấy chỉ ra rằng kẻ phạm tội có một đặc điểm nào đó (chẳng hạn như thuận tay trái, hói đầu, tóc nâu,...). Cho biết rằng 20% dân số có đặc tính này.

a. *Nếu kẻ bị tình nghi thuộc nhóm người có đặc điểm trên, hỏi khả năng để viên thanh tra cho rằng tội thuộc về người đang bị nghi ngờ bây giờ là bao nhiêu?*

b. *Bây giờ chúng ta giả sử rằng bằng chứng mới có những sự giải thích khác nhau, và thực tế chỉ ra rằng chỉ 90% kẻ bị tình nghi có đặc điểm vừa tìm ra. Trong trường hợp này, khả năng để kẻ tình nghi phạm tội là bao nhiêu?*

Lời giải:

a. Gọi G là biến cố "kẻ tình nghi phạm tội" và C biến cố "kẻ tình nghi có đặc điểm giống tên tội phạm". Đầu tiên kẻ tình nghi bị ngờ phạm tội với khả năng là 0.6, tức là $P(G) = 0.6$. Khi biết thêm thông tin tên tội phạm có một đặc điểm nào đó, tức là $P(C|G) = 1$ và dân số có khoảng 20% người có đặc điểm giống tên tội phạm nên ta có thể giả sử $P(C|\bar{G}) = 0.2$. Ta cần phải tính lại xác suất để kẻ tình nghi phạm tội khi biết anh ta có đặc điểm giống tên tội phạm, $P(G|C)$ bây giờ thay đổi so với lúc đầu là bao nhiêu. Ta có

$$P(G|C) = \frac{P(GC)}{P(C)}.$$

Lời giải:

a. Gọi G là biến cố "kẻ tình nghi phạm tội" và C biến cố "kẻ tình nghi có đặc điểm giống tên tội phạm". Đầu tiên kẻ tình nghi bị ngờ phạm tội với khả năng là 0.6, tức là $P(G) = 0.6$. Khi biết thêm thông tin tên tội phạm có một đặc điểm nào đó, tức là $P(C|G) = 1$ và dân số có khoảng 20% người có đặc điểm giống tên tội phạm nên ta có thể giả sử $P(C|\bar{G}) = 0.2$. Ta cần phải tính lại xác suất để kẻ tình nghi phạm tội khi biết anh ta có đặc điểm giống tên tội phạm, $P(G|C)$ bây giờ thay đổi so với lúc đầu là bao nhiêu. Ta có

$$P(G|C) = \frac{P(GC)}{P(C)}.$$

Lời giải:

a. Gọi G là biến cố "kẻ tình nghi phạm tội" và C biến cố "kẻ tình nghi có đặc điểm giống tên tội phạm". Đầu tiên kẻ tình nghi bị ngờ phạm tội với khả năng là 0.6, tức là $P(G) = 0.6$. Khi biết thêm thông tin tên tội phạm có một đặc điểm nào đó, tức là $P(C|G) = 1$ và dân số có khoảng 20% người có đặc điểm giống tên tội phạm nên ta có thể giả sử $P(C|\bar{G}) = 0.2$. Ta cần phải tính lại xác suất để kẻ tình nghi phạm tội khi biết anh ta có đặc điểm giống tên tội phạm, $P(G|C)$ bây giờ thay đổi so với lúc đầu là bao nhiêu. Ta có

$$P(G|C) = \frac{P(GC)}{P(C)}.$$

Ví dụ

Ta sẽ đi tính toán các xác suất $P(GC)$ và $P(C)$:

- $P(GC) = P(C|G)P(G) = 1 \times 0.6 = 0.6$;
- Do G và $\bar{G}$ tạo thành nhóm đầy đủ nên

$$P(C) = P(C|G)P(G) + P(C|\bar{G})P(\bar{G}) = 1 \times 0.6 + 0.2 \times 0.4 = 0.68.$$

Từ đó

$$P(G|C) = \frac{0.6}{0.68} = 0.882.$$

Ví dụ

Ta sẽ đi tính toán các xác suất $P(GC)$ và $P(C)$:

- $P(GC) = P(C|G)P(G) = 1 \times 0.6 = 0.6$;
- Do G và $\bar{G}$ tạo thành nhóm đầy đủ nên

$$P(C) = P(C|G)P(G) + P(C|\bar{G})P(\bar{G}) = 1 \times 0.6 + 0.2 \times 0.4 = 0.68.$$

Từ đó

$$P(G|C) = \frac{0.6}{0.68} = 0.882.$$

Ví dụ

Ta sẽ đi tính toán các xác suất $P(GC)$ và $P(C)$:

- $P(GC) = P(C|G)P(G) = 1 \times 0.6 = 0.6;$
- Do G và $\bar{G}$ tạo thành nhóm đầy đủ nên

$$P(C) = P(C|G)P(G) + P(C|\bar{G})P(\bar{G}) = 1 \times 0.6 + 0.2 \times 0.4 = 0.68.$$

Từ đó

$$P(G|C) = \frac{0.6}{0.68} = 0.882.$$

Ví dụ

Ta sẽ đi tính toán các xác suất $P(GC)$ và $P(C)$:

- $P(GC) = P(C|G)P(G) = 1 \times 0.6 = 0.6$;
- Do G và $\bar{G}$ tạo thành nhóm đầy đủ nên

$$P(C) = P(C|G)P(G) + P(C|\bar{G})P(\bar{G}) = 1 \times 0.6 + 0.2 \times 0.4 = 0.68.$$

Từ đó

$$P(G|C) = \frac{0.6}{0.68} = 0.882.$$

Ví dụ

b. Bây giờ tên phạm tội phạm chỉ có khoảng 0.9 khả năng có đặc điểm vừa tìm ra nên $P(C|G) = 0.9$. Lặp lại các tính toán như câu a. ta có

$$P(G|C) = \frac{P(C|G)P(G)}{P(C)} = \frac{P(C|G)P(G)}{P(C|G)P(G) + P(C|\bar{G})P(\bar{G})} = \frac{0.6 \times 0.9}{0.6 \times 0.9 + 0.2 \times 0.4} = 0.871$$

Ví dụ

b. Bây giờ tên phạm tội phạm chỉ có khoảng 0.9 khả năng có đặc điểm vừa tìm ra nên $P(C|G) = 0.9$. Lặp lại các tính toán như câu a. ta có

$$\begin{aligned} P(G|C) &= \frac{P(C|G)P(G)}{P(C)} \\ &= \frac{P(C|G)P(G)}{P(C|G)P(G) + P(C|\bar{G})P(\bar{G})} \\ &= \frac{0.6 \times 0.9}{0.6 \times 0.9 + 0.2 \times 0.4} \\ &= 0.871 \end{aligned}$$

Bài tập ôn luyện

Bài toán

Hai kẻ trộm đeo mặt nạ, bị cảnh sát đuổi bắt, bèn vứt mặt nạ đi và trà trộn vào một đám đông. Cảnh sát bắt giữ toàn bộ đám đông, tổng cộng 60 *người, và dùng máy phát hiện nói dối để điều tra xem ai trong đám đông là kẻ trộm. Biết rằng đối với kẻ trộm, xác suất bị máy tình nghi là có tội là* 85%, *nhưng đối với người vô tội, thì xác suất để bị máy nghi nhầm thành có tội là* 7%. *Giả sử X là một nhân vật trong đám đông bị máy nghi là có tội. Tính xác suất để X là kẻ trộm.*

Bài tập ôn luyện

Bài toán

Một trận không chiến giữa máy bay ta và máy bay địch. Máy bay ta bắn trước với xác suất trúng là 0.5*. Nếu bắn trượt, máy bay địch bắn trả lại với xác suất trúng là* 0.4*. Nếu không bị trúng đạn, máy bay ta lại bắn trả với xác suất trúng là* 0.3*. Tìm xác suất của các biến cố sau:*

a. *máy bay địch bị rơi trong cuộc không chiến trên.*

b. *máy bay ta bị rơi trong cuộc không chiến trên.*

Bài tập tự học

Hãy đọc ví dụ tự học cho bài toán tính khả năng phạm tội của kẻ tình nghi để giải quyết bài toán tình huống 4 đặt ra từ đầu chương.