Bài giảng Xác suất Thống kê và ứng dụng

Nguyễn Thị Nhung

Bộ môn Toán - Đại học THĂNG LONG

Ngày 25 tháng 8 năm 2013

Chương X

Kiểm định phi tham số

1. Kiểm định phi tham số
   - Chọn số đo độ tập trung nào: Trung bình hay Trung vị?
   - Kiểm định tham số và kiểm định phi tham số
   - So sánh trung vị với một số bằng phương pháp kiểm định hạng theo dấu Wilcoxon
   - So sánh trung vị của hai mẫu độc lập bằng phương pháp kiểm định tổng hạng Wilcoxon
   - So sánh trung vị hai mẫu theo đôi bằng phương pháp kiểm định hạng theo dấu Wilcoxon
   - So sánh nhiều trung bình bằng phương pháp kiểm định Kruskal Wallis (mẫu độc lập)

Nội dung chính được giới thiệu trong chương

- Giới thiệu bài toán kiểm định tham số và kiểm định phi tham số;
- Trình bày bài toán so sánh trung vị với một số bằng phương pháp kiểm định hạng theo dấu Wilcoxon;
- Trình bày bài toán so sánh trung vị của hai mẫu độc lập bằng phương pháp kiểm định tổng hạng Wilcoxon;
- Trình bày bài toán so sánh trung vị hai mẫu theo đôi bằng phương pháp kiểm định hạng theo dấu Wilcoxon;
- Trình bày bài toán so sánh nhiều trung bình bằng phương pháp kiểm định Kruskal Wallis;
- Trình bày các bài toán kiểm định chi-bình phương: kiểm chứng tính độc lập, kiểm chứng mức phù hợp của phân phối tổng thể.

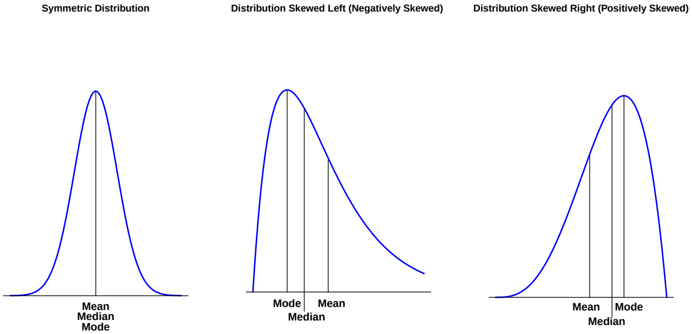
Yêu cầu đối với sinh viên

- Phân biệt bài toán kiểm định tham số và kiểm định phi tham số;
- Nắm được bài toán so sánh trung vị với một số bằng phương pháp kiểm định hạng theo dấu Wilcoxon;
- Nắm được bài toán so sánh trung vị của hai mẫu độc lập bằng phương pháp kiểm định tổng hạng Wilcoxon;
- Nắm được bài toán so sánh trung vị hai mẫu theo đôi bằng phương pháp kiểm định hạng theo dấu Wilcoxon;
- Nắm được bài toán so sánh nhiều trung bình bằng phương pháp kiểm định Kruskal Wallis;
- Nắm được các bài toán kiểm định chi-bình phương: kiểm chứng tính độc lập, kiểm chứng mức phù hợp của phân phối tổng thể.

Nội dung trình bày

1. Kiểm định phi tham số
   - Chọn số đo độ tập trung nào: Trung bình hay Trung vị?
   - Kiểm định tham số và kiểm định phi tham số
   - So sánh trung vị với một số bằng phương pháp kiểm định hạng theo dấu Wilcoxon
   - So sánh trung vị của hai mẫu độc lập bằng phương pháp kiểm định tổng hạng Wilcoxon
   - So sánh trung vị hai mẫu theo đôi bằng phương pháp kiểm định hạng theo dấu Wilcoxon
   - So sánh nhiều trung bình bằng phương pháp kiểm định Kruskal Wallis (mẫu độc lập)

So sánh trung bình và trung vị



Phân biệt bài toán kiểm định giả thuyết về trung vị và trung bình

- Khi phân bố của tổng thể nghiêng hẳn sang bên trái hoặc bên phải thì trung vị của tổng thể là số đo độ tập trung tốt hơn trung bình tổng thể;
- Hơn nữa, khi mẫu có cỡ nhỏ và tổng thể được chọn mẫu có phân phối khác hẳn phân phối chuẩn thì phép kiểm định về trung bình tổng thể không còn đúng nữa;

Vì những lí do trên, khi tổng thể khác xa phân phối chuẩn ta dùng phép kiểm định trung vị của tổng thể.

Nội dung trình bày

1. Kiểm định phi tham số
   - Chọn số đo độ tập trung nào: Trung bình hay Trung vị?
   - Kiểm định tham số và kiểm định phi tham số
   - So sánh trung vị với một số bằng phương pháp kiểm định hạng theo dấu Wilcoxon
   - So sánh trung vị của hai mẫu độc lập bằng phương pháp kiểm định tổng hạng Wilcoxon
   - So sánh trung vị hai mẫu theo đôi bằng phương pháp kiểm định hạng theo dấu Wilcoxon
   - So sánh nhiều trung bình bằng phương pháp kiểm định Kruskal Wallis (mẫu độc lập)

Kiểm định tham số và kiểm định phi tham số

Định nghĩa

- *Kiểm định tham số là kiểm định sử dụng những kĩ thuật thống kê dựa vào những giả sử về tham số và phân phối của tổng thể dữ liệu đang nghiên cứu.*
- *Kiểm định phi tham số là kiểm định sử dụng những kĩ thuật thống kê dựa vào rất ít những giả định về tham số và phân phối của tổng thể dữ liệu đang nghiên cứu.*

Kiểm định tham số và kiểm định phi tham số

Định nghĩa

- *Kiểm định tham số là kiểm định sử dụng những kĩ thuật thống kê dựa vào những giả sử về tham số và phân phối của tổng thể dữ liệu đang nghiên cứu.*
- *Kiểm định phi tham số là kiểm định sử dụng những kĩ thuật thống kê dựa vào rất ít những giả định về tham số và phân phối của tổng thể dữ liệu đang nghiên cứu.*

Kiểm định tham số và kiểm định phi tham số

Ưu điểm và nhược điểm của phương pháp kiểm định phi tham số so với kiểm định tham số:

- Ưu điểm:
  - Không đòi hỏi những giả định về tham số và phân phối của tổng thể;
  - Một số phép kiểm định phi tham số có thể dùng cho dữ liệu định danh và thứ bậc;
  - Những tính toán trong kiểm định phi tham số ít phức tạp hơn kiểm định tham số, đặc biệt là mẫu có cỡ nhỏ;
  - Những kết luận đưa ra tốt hơn trong trường hợp mẫu chọn ra có các giá trị ngoại biên.
- Nhược điểm:
  - Khả năng tìm được những sai biệt thực sự kém hơn khi các giả định của bài toán kiểm định tham số được thỏa mãn;
  - Khó mở rộng sang những phương pháp thống kê cao cấp như kiểm định tham số;
  - Khi cỡ mẫu lớn, tính toán theo phương pháp phi tham số thường tẻ nhạt và buồn chán.

Kiểm định tham số và kiểm định phi tham số

Ưu điểm và nhược điểm của phương pháp kiểm định phi tham số so với kiểm định tham số:

- Ưu điểm:
  - Không đòi hỏi những giả định về tham số và phân phối của tổng thể;
  - Một số phép kiểm định phi tham số có thể dùng cho dữ liệu định danh và thứ bậc;
  - Những tính toán trong kiểm định phi tham số ít phức tạp hơn kiểm định tham số, đặc biệt là mẫu có cỡ nhỏ;
  - Những kết luận đưa ra tốt hơn trong trường hợp mẫu chọn ra có các giá trị ngoại biên.
- Nhược điểm:
  - Khả năng tìm được những sai biệt thực sự kém hơn khi các giả định của bài toán kiểm định tham số được thỏa mãn;
  - Khó mở rộng sang những phương pháp thống kê cao cấp như kiểm định tham số;
  - Khi cỡ mẫu lớn, tính toán theo phương pháp phi tham số thường tẻ nhạt và buồn chán.

Nội dung trình bày

1. Kiểm định phi tham số
   - Chọn số đo độ tập trung nào: Trung bình hay Trung vị?
   - Kiểm định tham số và kiểm định phi tham số
   - So sánh trung vị với một số bằng phương pháp kiểm định hạng theo dấu Wilcoxon
   - So sánh trung vị của hai mẫu độc lập bằng phương pháp kiểm định tổng hạng Wilcoxon
   - So sánh trung vị hai mẫu theo đôi bằng phương pháp kiểm định hạng theo dấu Wilcoxon
   - So sánh nhiều trung bình bằng phương pháp kiểm định Kruskal Wallis (mẫu độc lập)

Các bài toán so sánh trung vị với một số

Gọi M_d là trung vị của tổng thể, để so sánh M_d với M_0 ta xét các bài toán kiểm định sau:

	Bài toán 1	Bài toán 2	Bài toán 3
H_0 :	$M_d = M_0$; $M_d \leqslant M_0$	$M_d = M_0$; $M_d \geqslant M_0$	$M_d = M_0$
H_1 :	$M_d > M_0$	$M_d < M_0$	$M_d \neq M_0$

Qui trình thực hiện kiểm định trung vị một tổng thể

- Bước 1: Thu thập thông tin mẫu;
- Bước 2: Tính toán chênh lệch d_i giữa từng giá trị quan sát được và giá trị trung vị giả thuyết;
- Bước 3: Lấy trị tuyệt đối của chênh lệch;
- Bước 4: Xếp hạng d_i, qui ước giá trị d_i nhỏ nhất có hạng là 1, $d_i = 0$ không tham gia vào vào quá trình xếp hạng. Nếu các d_i có giá trị ngang nhau thì tính hạng trung bình cho tất cả các quan sát có giá trị d_i bằng nhau này;
- Bước 5: Với các giá trị lớn hơn trung vị giả thuyết thì ta đặt hạng của nó vào cột kí hiệu $R+$, với những giá trị nhỏ hơn trung vị giả thuyết thì đặt vào cột kí hiệu $R-$.
- Bước 6: Giá trị thống kê W được tính bằng tổng hạng của cột $R+$.

Qui trình thực hiện kiểm định trung vị một tổng thể

- Bước 1: Thu thập thông tin mẫu;
- Bước 2: Tính toán chênh lệch d_i giữa từng giá trị quan sát được và giá trị trung vị giả thuyết;
- Bước 3: Lấy trị tuyệt đối của chênh lệch;
- Bước 4: Xếp hạng d_i, qui ước giá trị d_i nhỏ nhất có hạng là 1, $d_i = 0$ không tham gia vào vào quá trình xếp hạng. Nếu các d_i có giá trị ngang nhau thì tính hạng trung bình cho tất cả các quan sát có giá trị d_i bằng nhau này;
- Bước 5: Với các giá trị lớn hơn trung vị giả thuyết thì ta đặt hạng của nó vào cột kí hiệu $R+$, với những giá trị nhỏ hơn trung vị giả thuyết thì đặt vào cột kí hiệu $R-$.
- Bước 6: Giá trị thống kê W được tính bằng tổng hạng của cột $R+$.

Qui trình thực hiện kiểm định trung vị một tổng thể

- Bước 1: Thu thập thông tin mẫu;
- Bước 2: Tính toán chênh lệch d_i giữa từng giá trị quan sát được và giá trị trung vị giả thuyết;
- Bước 3: Lấy trị tuyệt đối của chênh lệch;
- Bước 4: Xếp hạng d_i, qui ước giá trị d_i nhỏ nhất có hạng là 1, $d_i = 0$ không tham gia vào vào quá trình xếp hạng. Nếu các d_i có giá trị ngang nhau thì tính hạng trung bình cho tất cả các quan sát có giá trị d_i bằng nhau này;
- Bước 5: Với các giá trị lớn hơn trung vị giả thuyết thì ta đặt hạng của nó vào cột kí hiệu $R+$, với những giá trị nhỏ hơn trung vị giả thuyết thì đặt vào cột kí hiệu $R-$.
- Bước 6: Giá trị thống kê W được tính bằng tổng hạng của cột $R+$.

Qui trình thực hiện kiểm định trung vị một tổng thể

- Bước 1: Thu thập thông tin mẫu;
- Bước 2: Tính toán chênh lệch d_i giữa từng giá trị quan sát được và giá trị trung vị giả thuyết;
- Bước 3: Lấy trị tuyệt đối của chênh lệch;
- Bước 4: Xếp hạng d_i, qui ước giá trị d_i nhỏ nhất có hạng là 1, $d_i = 0$ không tham gia vào vào quá trình xếp hạng. Nếu các d_i có giá trị ngang nhau thì tính hạng trung bình cho tất cả các quan sát có giá trị d_i bằng nhau này;
- Bước 5: Với các giá trị lớn hơn trung vị giả thuyết thì ta đặt hạng của nó vào cột kí hiệu $R+$, với những giá trị nhỏ hơn trung vị giả thuyết thì đặt vào cột kí hiệu $R-$.
- Bước 6: Giá trị thống kê W được tính bằng tổng hạng của cột $R+$.

Qui trình thực hiện kiểm định trung vị một tổng thể

- Bước 1: Thu thập thông tin mẫu;
- Bước 2: Tính toán chênh lệch d_i giữa từng giá trị quan sát được và giá trị trung vị giả thuyết;
- Bước 3: Lấy trị tuyệt đối của chênh lệch;
- Bước 4: Xếp hạng d_i, qui ước giá trị d_i nhỏ nhất có hạng là 1, $d_i = 0$ không tham gia vào vào quá trình xếp hạng. Nếu các d_i có giá trị ngang nhau thì tính hạng trung bình cho tất cả các quan sát có giá trị d_i bằng nhau này;
- Bước 5: Với các giá trị lớn hơn trung vị giả thuyết thì ta đặt hạng của nó vào cột kí hiệu $R+$, với những giá trị nhỏ hơn trung vị giả thuyết thì đặt vào cột kí hiệu $R-$.
- Bước 6: Giá trị thống kê W được tính bằng tổng hạng của cột $R+$.

Qui trình thực hiện kiểm định trung vị một tổng thể

- Bước 1: Thu thập thông tin mẫu;
- Bước 2: Tính toán chênh lệch d_i giữa từng giá trị quan sát được và giá trị trung vị giả thuyết;
- Bước 3: Lấy trị tuyệt đối của chênh lệch;
- Bước 4: Xếp hạng d_i, qui ước giá trị d_i nhỏ nhất có hạng là 1, $d_i = 0$ không tham gia vào vào quá trình xếp hạng. Nếu các d_i có giá trị ngang nhau thì tính hạng trung bình cho tất cả các quan sát có giá trị d_i bằng nhau này;
- Bước 5: Với các giá trị lớn hơn trung vị giả thuyết thì ta đặt hạng của nó vào cột kí hiệu $R+$, với những giá trị nhỏ hơn trung vị giả thuyết thì đặt vào cột kí hiệu $R-$.
- Bước 6: Giá trị thống kê W được tính bằng tổng hạng của cột $R+$.

Qui trình thực hiện

- Bước 7: Qui luật quyết định tại mức ý nghĩa α:
  - Nếu cỡ mẫu nhỏ $n' \leqslant 20$ (n' là số chênh lệch khác 0) thì ta tìm cặp giá trị tương ứng (L, U) trong bảng để so sánh với W.
    - Bài toán 1: Bác bỏ H_0 nếu W lớn hơn giá trị trên U;
    - Bài toán 2: Bác bỏ H_0 nếu W nhỏ hơn giá trị dưới L;
    - Bài toán 3: Bác bỏ H_0 nếu W lớn hơn giá trị trên U hoặc nhỏ hơn giá trị dưới L.
  - Nếu cỡ mẫu lớn $n' > 20$ thì W tuân theo phân phối chuẩn với trung bình $\mu_W = \dfrac{n'(n'+1)}{4}$ và độ lệch chuẩn $\sigma_W = \sqrt{\dfrac{n'(n'+1)(2n'+1)}{24}}$.
    Từ đó giá trị chuẩn hóa z được tính theo công thức: $z = \dfrac{W - \mu_W}{\sigma_W}$.
    - Bài toán 1: Bác bỏ H_0 nếu $z > z_\alpha$;
    - Bài toán 2: Bác bỏ H_0 nếu $z < -z_\alpha$;
    - Bài toán 3: Bác bỏ H_0 nếu $|z| > z_{\alpha/2}$.

Qui trình thực hiện

- Bước 7: Qui luật quyết định tại mức ý nghĩa α:
  - Nếu cỡ mẫu nhỏ $n' \leqslant 20$ (n' là số chênh lệch khác 0) thì ta tìm cặp giá trị tương ứng (L, U) trong bảng để so sánh với W.
    - Bài toán 1: Bác bỏ H_0 nếu W lớn hơn giá trị trên U;
    - Bài toán 2: Bác bỏ H_0 nếu W nhỏ hơn giá trị dưới L;
    - Bài toán 3: Bác bỏ H_0 nếu W lớn hơn giá trị trên U hoặc nhỏ hơn giá trị dưới L.
  - Nếu cỡ mẫu lớn $n' > 20$ thì W tuân theo phân phối chuẩn với trung bình $\mu_W = \dfrac{n'(n'+1)}{4}$ và độ lệch chuẩn $\sigma_W = \sqrt{\dfrac{n'(n'+1)(2n'+1)}{24}}$.
  Từ đó giá trị chuẩn hóa z được tính theo công thức: $z = \dfrac{W - \mu_W}{\sigma_W}$.
    - Bài toán 1: Bác bỏ H_0 nếu $z > z_\alpha$;
    - Bài toán 2: Bác bỏ H_0 nếu $z < -z_\alpha$;
    - Bài toán 3: Bác bỏ H_0 nếu $|z| > z_{\alpha/2}$.

Cận dưới và cận trên của W trong kiểm định hạng theo dấu Wilcoxon

	Một bên $\alpha = 0.05$ Hai bên $\alpha = 0.1$	$\alpha = 0.025$ $\alpha = 0.05$	$\alpha = 0.1$ $\alpha = 0.2$	$\alpha = 0.005$ $\alpha = 0.01$
	(cận dưới; cận trên)			
5	0;15	_ ; _	_ ; _	_ ; _
6	2;19	0;21	_ ; _	_ ; _
7	3;25	2;26	0;28	_ ; _
8	5;31	3;33	1;35	0;36
9	8;37	5;40	3;42	1;44
10	10;45	8;47	5;50	3;52
11	13;53	10;56	7;59	5;61
12	17;61	13;65	10;68	7;61
13	21;70	17;74	12;79	10;81
14	25;80	21;84	16;89	13;92
15	30;90	25;95	19;101	16;104
16	35;101	29;107	23;113	19;117
17	41;112	34;119	27;126	23;130
18	47;124	40;131	32;139	27;144
19	53;137	46;144	37;153	32;158
20	60;150	52;158	43;167	37;173

Ví dụ

Bài toán

Giám đốc trung tâm hỗ trợ việc làm của một trường đại học cho rằng các sinh viên tốt nghiệp sau 2 năm làm việc ở khu vực có vốn đầu tư nước ngoài có thu nhập có vượt quá 350 \$/tháng hay không. Để kiểm định những khẳng định của mình, ông giám đốc tiến hành điều tra thu nhập của 10 sinh viên được bảng số liệu như sau:

Sinh viên	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Thu nhập	364	385	270	350	290	400	520	340	389	410

Theo những thông tin đã biết thì ông giám đốc biết rằng phân phối thu nhập là một phân phối tập trung bên trái, tại mức ý nghĩa $\alpha = 5\%$ *làm thế nào để ông giám đốc kiểm định được những khẳng định của mình là có cơ sở không?*

Ví dụ

- **Nhận xét:**

- Đặt cặp giả thuyết kiểm định:

- Giá trị kiểm định thống kê $W =$, mức ý nghĩa $\alpha =$, $n' =$, cặp giá trị tới hạn $(L, U) =$.
- Kết luận:

Ví dụ

Lương X_i	$d_i = X_i - 350$	$\lvert d_i \rvert$	Hạng	$R+$	$R-$
364	14	14	2	2	
385	35	35	3	3	
270	-80	80	8		8
350	0	0			
290	-60	60	6.5		6.5
400	50	50	5	5	
520	170	170	9	9	
340	-10	10	1		1
389	39	39	4	4	
410	60	60	6.5	6.5	
Tổng				**29.5**	**15.5**

Thực hiện kiểm định trung vị một tổng thể trong R

```
wilcox.test(x, alternative = , mu = , conf.int = ,
conf.level = )
```

trong đó,

- `x` là vec tơ dữ liệu mẫu.
- `alternative` xem trong hàm `z.test`.
- `mu` là trung vị của tổng thể xác định theo giả thuyết không, mặc định là 0;
- `conf.int=FALSE (TRUE)` là tham số xét xem kết quả có đưa ra khoảng ước lượng cho trung vị không, mặc định là `FALSE`.
- `conf.level=` là số chỉ độ tin cậy, mặc định là 0.95.

Ví dụ kiểm định trung vị một tổng thể trong R

```
> ThuNhap = c(364, 385, 270, 350, 290, 400, 520, 340, 389, 410)
> wilcox.test(ThuNhap, alternative = "greater", mu = 350)

        Wilcoxon signed rank test with continuity correction

data:  ThuNhap
V = 29.5, p-value = 0.2204
alternative hypothesis: true location is greater than 350
```

Ví dụ kiểm định trung vị một tổng thể trong R

```
> ThuNhap = c(364, 385, 270, 350, 290, 400, 520, 340, 389, 410)
> wilcox.test(ThuNhap, alternative = "greater", mu = 350,
conf.int = T, conf.level = 0.95)

        Wilcoxon signed rank test with continuity correction

data:  ThuNhap
V = 29.5, p-value = 0.2204
alternative hypothesis: true location is greater than 350
95 percent confidence interval:
 329.5   Inf
sample estimates:
(pseudo)median
           375
```

Nội dung trình bày

1. Kiểm định phi tham số
   - Chọn số đo độ tập trung nào: Trung bình hay Trung vị?
   - Kiểm định tham số và kiểm định phi tham số
   - So sánh trung vị với một số bằng phương pháp kiểm định hạng theo dấu Wilcoxon
   - So sánh trung vị của hai mẫu độc lập bằng phương pháp kiểm định tổng hạng Wilcoxon
   - So sánh trung vị hai mẫu theo đôi bằng phương pháp kiểm định hạng theo dấu Wilcoxon
   - So sánh nhiều trung bình bằng phương pháp kiểm định Kruskal Wallis (mẫu độc lập)

Kiểm định tổng hạng Wilcoxon cho trung vị của hai mẫu độc lập

Khi tổng thể không tuân theo phân phối chuẩn hoặc cỡ mẫu nhỏ, để so độ tập trung của hai tổng thể ta dùng phương pháp tổng hạng Wilcoxon, một phương pháp kiểm định phi tham số nhằm kiểm tra sự giống nhau của hai trung vị.

Gọi M_1, M_2 tương ứng là trung vị của tổng thể thứ nhất và thứ hai, để so sánh M_1 với M_2 ta xét các bài toán kiểm định sau:

	Bài toán 1	Bài toán 2	Bài toán 3
H_0 :	$M_1 - M_2 = 0$	$M_1 - M_2 = 0$	$M_1 - M_2 = 0$
	$M_1 - M_2 \leqslant 0$	$M_1 - M_2 \geqslant 0$	
H_1 :	$M_1 - M_2 > 0$	$M_1 - M_2 < 0$	$M_1 - M_2 \neq 0$

Kiểm định tổng hạng Wilcoxon cho trung vị của hai mẫu độc lập

Khi tổng thể không tuân theo phân phối chuẩn hoặc cỡ mẫu nhỏ, để so độ tập trung của hai tổng thể ta dùng phương pháp tổng hạng Wilcoxon, một phương pháp kiểm định phi tham số nhằm kiểm tra sự giống nhau của hai trung vị.
Gọi M_1, M_2 tương ứng là trung vị của tổng thể thứ nhất và thứ hai, để so sánh M_1 với M_2 ta xét các bài toán kiểm định sau:

	Bài toán 1	Bài toán 2	Bài toán 3
H_0 :	$M_1 - M_2 = 0$	$M_1 - M_2 = 0$	$M_1 - M_2 = 0$
	$M_1 - M_2 \leqslant 0$	$M_1 - M_2 \geqslant 0$	
H_1 :	$M_1 - M_2 > 0$	$M_1 - M_2 < 0$	$M_1 - M_2 \neq 0$

Qui trình thực hiện kiểm định trung vị hai tổng thể

- Bước 1: Chọn hai mẫu ngẫu nhiên từ hai tổng thể với cỡ mẫu lần lượt là n_1 và n_2;
- Bước 2: Gộp hai mẫu vào một và xếp thứ hạng các phần tử trong mẫu gộp;
- Bước 3: Tính tổng hạng Wilcoxon trong từng mẫu;
- Bước 4: Giá trị thống kê T là tổng hạng Wilcoxon của các phần tử trong mẫu có cỡ nhỏ hơn (nếu hai mẫu có cỡ bằng nhau thì tính tổng hạng từ mẫu nào cũng được);

Qui trình thực hiện kiểm định trung vị hai tổng thể

- Bước 1: Chọn hai mẫu ngẫu nhiên từ hai tổng thể với cỡ mẫu lần lượt là n_1 và n_2;
- Bước 2: Gộp hai mẫu vào một và xếp thứ hạng các phần tử trong mẫu gộp;
- Bước 3: Tính tổng hạng Wilcoxon trong từng mẫu;
- Bước 4: Giá trị thống kê T là tổng hạng Wilcoxon của các phần tử trong mẫu có cỡ nhỏ hơn (nếu hai mẫu có cỡ bằng nhau thì tính tổng hạng từ mẫu nào cũng được);

Qui trình thực hiện kiểm định trung vị hai tổng thể

- Bước 1: Chọn hai mẫu ngẫu nhiên từ hai tổng thể với cỡ mẫu lần lượt là n_1 và n_2;
- Bước 2: Gộp hai mẫu vào một và xếp thứ hạng các phần tử trong mẫu gộp;
- Bước 3: Tính tổng hạng Wilcoxon trong từng mẫu;
- Bước 4: Giá trị thống kê T là tổng hạng Wilcoxon của các phần tử trong mẫu có cỡ nhỏ hơn (nếu hai mẫu có cỡ bằng nhau thì tính tổng hạng từ mẫu nào cũng được);

Qui trình thực hiện kiểm định trung vị hai tổng thể

- Bước 1: Chọn hai mẫu ngẫu nhiên từ hai tổng thể với cỡ mẫu lần lượt là n_1 và n_2;
- Bước 2: Gộp hai mẫu vào một và xếp thứ hạng các phần tử trong mẫu gộp;
- Bước 3: Tính tổng hạng Wilcoxon trong từng mẫu;
- Bước 4: Giá trị thống kê T là tổng hạng Wilcoxon của các phần tử trong mẫu có cỡ nhỏ hơn (nếu hai mẫu có cỡ bằng nhau thì tính tổng hạng từ mẫu nào cũng được);

Qui trình thực hiện

- Bước 5: Qui luật quyết định:
  - Nếu cỡ mẫu nhỏ $n_1 \leqslant 10, n_2 \leqslant 10$ thì ta tìm cặp giá trị tương ứng (L, U) trong bảng để so sánh với T.
    - Bài toán 1: Bác bỏ H_0 nếu T lớn hơn giá trị trên U;
    - Bài toán 2: Bác bỏ H_0 nếu T nhỏ hơn giá trị dưới L;
    - Bài toán 3: Bác bỏ H_0 nếu T lớn hơn giá trị trên U hoặc nhỏ hơn giá trị dưới L.
  - Nếu cỡ mẫu lớn $n_1 > 10$ hoặc $n_2 > 10$ thì T tuân theo phân phối chuẩn với trung bình $\mu_T = \dfrac{n_1(n_1 + n_2 + 1)}{2}$, $n_1 \leqslant n_2$ và độ lệch chuẩn $\sigma_T = \sqrt{\dfrac{n_1 n_2(n_1 + n_2 + 1)}{12}}$. Từ đó giá trị chuẩn hóa z được tính theo công thức: $z = \dfrac{T - \mu_T}{\sigma_T}$.
    - Bài toán 1: Bác bỏ H_0 nếu $z > z_\alpha$;
    - Bài toán 2: Bác bỏ H_0 nếu $z < -z_\alpha$;
    - Bài toán 3: Bác bỏ H_0 nếu $|z| > z_{\alpha/2}$.

- Bước 5: Qui luật quyết định:
  - Nếu cỡ mẫu nhỏ $n_1 \leqslant 10, n_2 \leqslant 10$ thì ta tìm cặp giá trị tương ứng (L, U) trong bảng để so sánh với T.
    - Bài toán 1: Bác bỏ H_0 nếu T lớn hơn giá trị trên U;
    - Bài toán 2: Bác bỏ H_0 nếu T nhỏ hơn giá trị dưới L;
    - Bài toán 3: Bác bỏ H_0 nếu T lớn hơn giá trị trên U hoặc nhỏ hơn giá trị dưới L.
  - Nếu cỡ mẫu lớn $n_1 > 10$ hoặc $n_2 > 10$ thì T tuân theo phân phối chuẩn với trung bình $\mu_T = \dfrac{n_1(n_1 + n_2 + 1)}{2}$, $n_1 \leqslant n_2$ và độ lệch chuẩn $\sigma_T = \sqrt{\dfrac{n_1 n_2(n_1 + n_2 + 1)}{12}}$. Từ đó giá trị chuẩn hóa z được tính theo công thức: $z = \dfrac{T - \mu_T}{\sigma_T}$.
    - Bài toán 1: Bác bỏ H_0 nếu $z > z_\alpha$;
    - Bài toán 2: Bác bỏ H_0 nếu $z < -z_\alpha$;
    - Bài toán 3: Bác bỏ H_0 nếu $|z| > z_{\alpha/2}$.

Cận dưới và cận trên của T_1 trong kiểm định tổng hạng Wilcoxon

	Mức ý nghĩa α		n_1						
n_2	Một bên	Hai bên	4	5	6	7	8	9	10
7	0.05	0.1	14;34	21;44	29;55	39;66			
	0.025	0.05	13;35	20;45	27;57	36;69			
	0.01	0.02	11;37	18;47	25;59	34;71			
	0.005	0.01	10;38	16;49	24;60	32;73			
8	0.05	0.1	15;37	23;47	31;59	41;71	51;85		
	0.025	0.05	14;38	21;49	29;61	38;74	49;87		
	0.01	0.02	12;40	19;51	27;63	35;77	45;91		
	0.005	0.01	11;41	17;53	25;65	34;78	43;93		
9	0.05	0.1	16;40	25;51	33;63	43;76	54;94	66;105	
	0.025	0.05	14;38	22;53	31;65	40;79	51;93	62;109	
	0.01	0.02	13;43	20;55	28;68	37;82	47;97	59;112	
	0.005	0.01	11;45	18;57	26;70	35;84	45;99	56;115	
10	0.05	0.1	17;43	26;54	35;67	45;81	56;96	69;111	82;128
	0.025	0.05	15;45	23;57	32;70	42;84	53;99	65;115	78;132
	0.01	0.02	13;47	21;59	29;73	39;87	49;103	61;119	74;136
	0.005	0.01	12;48	19;61	27;75	37;89	47;105	58;105	71;139

Ví dụ

Bài toán

Để kiểm định tác động của việc trưng bày hàng hóa đến doanh số, người ta chọn hai mẫu ngẫu nhiên, mẫu thứ nhất gồm 10 gian hàng trưng bày bình thường, mẫu thứ hai gồm 10 gian hàng trưng bày đặc biệt, ghi chép doanh số của các gian hàng trong mẫu ta được bảng số liệu sau:

Doanh số tuần trưng bày bình thường	22	34	52	62	30	40	64	84	56	59
Doanh số tuần trưng bày đặc biệt	52	71	76	54	67	83	66	90	77	84

Tại mức ý nghĩa $\alpha = 5\%$*, sử dụng đại lượng đo độ tập trung thích hợp hãy so sánh doanh số bán của tuần trưng bày bình thường và tuần trưng bày đặc biệt.*

Lời giải

- **Nhận xét:**

- Đặt cặp giả thuyết kiểm định:

- Giá trị kiểm định thống kê $W =$, mức ý nghĩa $\alpha =$, $n' =$, cặp giá trị tới hạn $(L, U) =$.
- Kết luận:

Ví dụ

Doanh số tuần trưng bày bình thường	Hạng	Doanh số tuần trưng bày đặc biệt	Hạng
22	1	52	5.5
34	3	71	14
52	5.5	76	15
62	10	54	7
30	2	67	13
40	4	83	17
64	11	66	12
84	18.5	90	20
56	8	77	16
59	9	84	18.5
Tổng	**72**		**138**

Thực hiện so sánh hai trung vị của hai tổng thể trong R, mẫu độc lập

`wilcox.test(x, y, alternative=, mu=, conf.int=, conf.level=)`

trong đó,

- `x, y` là vec tơ dữ liệu mẫu thứ nhất và thứ hai.
- `alternative` xem hàm `z.test`.
- `mu` là hiệu hai trung vị theo giả thuyết không, mặc định là 0.
- `conf.int = FALSE (TRUE)` xem hàm `wilcox.test` ở trên.
- `conf.level` là độ tin cậy, mặc định là 0.95.

Ví dụ kiểm định hai trung vị của hai tổng thể trong R, mẫu độc lập

```
> TuanBinhThuong = c(22, 34, 52, 62, 30, 40, 64, 84, 56, 59)
> TuanDacBiet = c(52, 71, 76, 54, 67, 83, 66, 90, 77, 84)
> wilcox.test(TuanBinhThuong, TuanDacBiet, mu = 0, alt = "t", alt)

        Wilcoxon rank sum test with continuity correction

data:  TuanBinhThuong and TuanDacBiet
W = 17, p-value = 0.01395
alternative hypothesis: true location shift is not equal to 0
```

Ví dụ kiểm định hai trung vị của hai tổng thể trong R, mẫu độc lập

```
> TuanBinhThuong = c(22, 34, 52, 62, 30, 40, 64, 84, 56, 59)
> TuanDacBiet = c(52, 71, 76, 54, 67, 83, 66, 90, 77, 84)
> wilcox.test(TuanBinhThuong, TuanDacBiet, mu = 0, alt = "t",
conf.int = T, conf.level = 0.95)

        Wilcoxon rank sum test with continuity correction

data:  TuanBinhThuong and TuanDacBiet
W = 17, p-value = 0.01395
alternative hypothesis: true location shift is not equal to 0
95 percent confidence interval:
 -37.000048  -6.000031
sample estimates:
difference in location
             -21.90783
```

Nội dung trình bày

1. Kiểm định phi tham số
    - Chọn số đo độ tập trung nào: Trung bình hay Trung vị?
    - Kiểm định tham số và kiểm định phi tham số
    - So sánh trung vị với một số bằng phương pháp kiểm định hạng theo dấu Wilcoxon
    - So sánh trung vị của hai mẫu độc lập bằng phương pháp kiểm định tổng hạng Wilcoxon
    - So sánh trung vị hai mẫu theo đôi bằng phương pháp kiểm định hạng theo dấu Wilcoxon
    - So sánh nhiều trung bình bằng phương pháp kiểm định Kruskal Wallis (mẫu độc lập)

Kiểm định hạng theo dấu Wilcoxon cho trung vị hai mẫu theo đôi

Khi tổng thể không tuân theo phân phối chuẩn, chọn mẫu theo đôi, để so độ tập trung của hai tổng thể ta dùng phương pháp hạng theo dấu Wilcoxon, một phương pháp kiểm định phi tham số nhằm kiểm tra sự giống nhau của hai trung vị trong trường hợp chọn mẫu theo đôi.

Gọi M_D là trung vị của toàn bộ hiệu giữa các cặp. Khi đó so sánh hai trung vị tương đương với so sánh M_D với 0 và ta có các bài toán sau:

	Bài toán 1	Bài toán 2	Bài toán 3
H_0 :	$M_D = 0;\ M_D \leqslant 0$	$M_D = 0;\ M_D \geqslant 0$	$M_D = 0$
H_1 :	$M_D > 0$	$M_D < 0$	$M_D \neq 0$

Kiểm định hạng theo dấu Wilcoxon cho trung vị hai mẫu theo đôi

Khi tổng thể không tuân theo phân phối chuẩn, chọn mẫu theo đôi, để so độ tập trung của hai tổng thể ta dùng phương pháp hạng theo dấu Wilcoxon, một phương pháp kiểm định phi tham số nhằm kiểm tra sự giống nhau của hai trung vị trong trường hợp chọn mẫu theo đôi.
Gọi M_D là trung vị của toàn bộ hiệu giữa các cặp. Khi đó so sánh hai trung vị tương đương với so sánh M_D với 0 và ta có các bài toán sau:

	Bài toán 1	Bài toán 2	Bài toán 3
H_0 :	$M_D = 0;\ M_D \leqslant 0$	$M_D = 0;\ M_D \geqslant 0$	$M_D = 0$
H_1 :	$M_D > 0$	$M_D < 0$	$M_D \neq 0$

Qui trình thực hiện

Để tiến hành so sánh trung vị của hai tổng thể ta thực hiện qua các bước sau:

- Bước 1: Chọn mẫu ngẫu nhiên gồm n cặp và tính hiệu D_i cho từng cặp quan sát;
- Bước 2: Xác định giá trị tuyệt đối $|D_i|$;
- Bước 3: Sắp xếp thứ hạng cho $|D_i|$, các $D_i = 0$ không tham gia vào quá trình xếp hạng;
- Bước 4: Tách riêng các hạng mang dấu dương (+) và dấu âm (-);
- Bước 5: Tính tổng hạng W riêng cho các chênh lệch dương, tổng W này chính là giá trị thống kê của kiểm định.

Qui trình thực hiện

Để tiến hành so sánh trung vị của hai tổng thể ta thực hiện qua các bước sau:

- Bước 1: Chọn mẫu ngẫu nhiên gồm n cặp và tính hiệu D_i cho từng cặp quan sát;
- Bước 2: Xác định giá trị tuyệt đối $|D_i|$;
- Bước 3: Sắp xếp thứ hạng cho $|D_i|$, các $D_i = 0$ không tham gia vào quá trình xếp hạng;
- Bước 4: Tách riêng các hạng mang dấu dương (+) và dấu âm (-);
- Bước 5: Tính tổng hạng W riêng cho các chênh lệch dương, tổng W này chính là giá trị thống kê của kiểm định.

Qui trình thực hiện

Để tiến hành so sánh trung vị của hai tổng thể ta thực hiện qua các bước sau:

- Bước 1: Chọn mẫu ngẫu nhiên gồm n cặp và tính hiệu D_i cho từng cặp quan sát;
- Bước 2: Xác định giá trị tuyệt đối $|D_i|$;
- Bước 3: Sắp xếp thứ hạng cho $|D_i|$, các $D_i = 0$ không tham gia vào quá trình xếp hạng;
- Bước 4: Tách riêng các hạng mang dấu dương (+) và dấu âm (-);
- Bước 5: Tính tổng hạng W riêng cho các chênh lệch dương, tổng W này chính là giá trị thống kê của kiểm định.

Qui trình thực hiện

Để tiến hành so sánh trung vị của hai tổng thể ta thực hiện qua các bước sau:

- Bước 1: Chọn mẫu ngẫu nhiên gồm n cặp và tính hiệu D_i cho từng cặp quan sát;
- Bước 2: Xác định giá trị tuyệt đối $|D_i|$;
- Bước 3: Sắp xếp thứ hạng cho $|D_i|$, các $D_i = 0$ không tham gia vào quá trình xếp hạng;
- Bước 4: Tách riêng các hạng mang dấu dương (+) và dấu âm (-);
- Bước 5: Tính tổng hạng W riêng cho các chênh lệch dương, tổng W này chính là giá trị thống kê của kiểm định.

Qui trình thực hiện

Để tiến hành so sánh trung vị của hai tổng thể ta thực hiện qua các bước sau:

- Bước 1: Chọn mẫu ngẫu nhiên gồm n cặp và tính hiệu D_i cho từng cặp quan sát;
- Bước 2: Xác định giá trị tuyệt đối $|D_i|$;
- Bước 3: Sắp xếp thứ hạng cho $|D_i|$, các $D_i = 0$ không tham gia vào quá trình xếp hạng;
- Bước 4: Tách riêng các hạng mang dấu dương (+) và dấu âm (-);
- Bước 5: Tính tổng hạng W riêng cho các chênh lệch dương, tổng W này chính là giá trị thống kê của kiểm định.

- Bước 6: Qui luật quyết định tại mức ý nghĩa α:
  - Nếu cỡ mẫu nhỏ $n' \leqslant 20$ (n' là số chênh lệch khác 0) thì ta tìm cặp giá trị tương ứng (L, U) trong bảng để so sánh với W.
    - Bài toán 1: Bác bỏ H_0 nếu W lớn hơn giá trị trên U;
    - Bài toán 2: Bác bỏ H_0 nếu W nhỏ hơn giá trị dưới L;
    - Bài toán 3: Bác bỏ H_0 nếu W lớn hơn giá trị trên U hoặc nhỏ hơn giá trị dưới L.
  - Nếu cỡ mẫu lớn $n' > 20$ thì W tuân theo phân phối chuẩn với trung bình $\mu_W = \dfrac{n'(n'+1)}{4}$ và độ lệch chuẩn $\sigma_W = \sqrt{\dfrac{n'(n'+1)(2n'+1)}{24}}$. Từ đó giá trị chuẩn hóa z được tính theo công thức: $z = \dfrac{W - \mu_W}{\sigma_W}$.
    - Bài toán 1: Bác bỏ H_0 nếu $z > z_\alpha$;
    - Bài toán 2: Bác bỏ H_0 nếu $z < -z_\alpha$;
    - Bài toán 3: Bác bỏ H_0 nếu $|z| > z_{\alpha/2}$.

- Bước 6: Qui luật quyết định tại mức ý nghĩa α:
  - Nếu cỡ mẫu nhỏ $n' \leqslant 20$ (n' là số chênh lệch khác 0) thì ta tìm cặp giá trị tương ứng (L, U) trong bảng để so sánh với W.
    - Bài toán 1: Bác bỏ H_0 nếu W lớn hơn giá trị trên U;
    - Bài toán 2: Bác bỏ H_0 nếu W nhỏ hơn giá trị dưới L;
    - Bài toán 3: Bác bỏ H_0 nếu W lớn hơn giá trị trên U hoặc nhỏ hơn giá trị dưới L.
  - Nếu cỡ mẫu lớn $n' > 20$ thì W tuân theo phân phối chuẩn với trung bình $\mu_W = \dfrac{n'(n'+1)}{4}$ và độ lệch chuẩn $\sigma_W = \sqrt{\dfrac{n'(n'+1)(2n'+1)}{24}}$.

    Từ đó giá trị chuẩn hóa z được tính theo công thức: $z = \dfrac{W - \mu_W}{\sigma_W}$.
    - Bài toán 1: Bác bỏ H_0 nếu $z > z_\alpha$;
    - Bài toán 2: Bác bỏ H_0 nếu $z < -z_\alpha$;
    - Bài toán 3: Bác bỏ H_0 nếu $|z| > z_{\alpha/2}$.

Bài toán

Để so sánh số tiền mà các hộ gia đình tiêu dùng hàng năm cho việc chăm sóc sức khỏe giữa các thành phố ở Mĩ, người ta chọn hai thành phố Pennsylvania và California. Điều tra sáu gia đình có thành phần gia đình tương tự nhau thu được số liệu sau:

Cặp gia đình	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*
Pennsylvania	*1950*	*1840*	*2015*	*1580*	*1790*	*1925*
California	*1760*	*1870*	*1810*	*1660*	*1340*	*1765*

Tại mức ý nghĩa $\alpha = 5\%$*, sử dụng đại lượng đo độ tập trung thích hợp hãy xem có sự khác biệt trong việc các gia đình chi tiêu cho vấn đề chăm sóc sức khỏe ở hai thành phố trên không?*

Ví dụ

- **Nhận xét:**

- Đặt cặp giả thuyết kiểm định:

- Giá trị kiểm định thống kê $W =$, mức ý nghĩa $\alpha =$, $n' =$, cặp giá trị tới hạn $(L, U) =$.
- Kết luận:

Ví dụ

Cặp gia đình	Pennsylvania	California	D_i	$\|D_i\|$	Hạng
1	1950	1760	+190	190	+4
2	1840	1870	-30	30	-1
3	2015	1810	+205	190	+5
4	1580	1660	-80	80	-2
5	1790	1340	+450	450	+6
6	1925	1765	+160	160	+3

Kiểm định hai trung vị của hai tổng thể trong R, mẫu theo đôi

`wilcox.test(x, y, alternative = , mu = , paired = TRUE, conf.int = , conf.level = )`

trong đó,

- `x, y` là dữ liệu trong mẫu thứ nhất và thứ hai.
- `alternative` xem trong hàm `z.test`.
- `mu` hiệu hai trung vị xác định theo giả thuyết không, mặc định là 0.
- `paired = TRUE` là tham số chỉ việc chọn mẫu là theo đôi, mặc định là `FALSE`.
- `conf.int = FALSE (TRUE)` xem trong hàm `wilcox.test` ở trên.
- `conf.level` là độ tin cậy.

Nội dung trình bày

1. Kiểm định phi tham số
   - Chọn số đo độ tập trung nào: Trung bình hay Trung vị?
   - Kiểm định tham số và kiểm định phi tham số
   - So sánh trung vị với một số bằng phương pháp kiểm định hạng theo dấu Wilcoxon
   - So sánh trung vị của hai mẫu độc lập bằng phương pháp kiểm định tổng hạng Wilcoxon
   - So sánh trung vị hai mẫu theo đôi bằng phương pháp kiểm định hạng theo dấu Wilcoxon
   - So sánh nhiều trung bình bằng phương pháp kiểm định Kruskal Wallis (mẫu độc lập)

So sánh nhiều trung bình trong trường tổng thể không tuân theo phân phối chuẩn

Trong bài toán so sánh trung bình của $k \geqslant 3$ tổng thể bằng phương pháp One-way ANOVA ta phải dựa vào các giả sử: tổng thể tuân theo phân phối chuẩn, mẫu chọn ra độc lập, dữ liệu ít nhất đo bằng thang đo khoảng và phương sai của các tổng thể bằng nhau. Khi những giả sử này không được thỏa mãn, ta dùng phương pháp phi tham số tương ứng Kruskal-Wallis. Phương pháp Kruskal-Wallis chỉ dựa vào giả sử mẫu được chọn từ k tổng thể là ngẫu nhiên và độc lập. Cặp giả thuyết của kiểm định Kruskal-Wallis:

$$H_0 : \mu_1 = \mu_2 = \ldots = \mu_k,$$

$$H_1 : \exists i \neq j : \mu_i \neq \mu_j, i, j = 1, 2, \ldots k.$$

Các bước thực hiện kiểm định Kruskal-Wallis

Giả sử tổng thể thứ i ta chọn ra một mẫu gồm có n_i phần tử là $x_{i1}, x_{i2}, \dots, x_{in_i}$, với $i = \overline{1, k}$. Ta tiến hành kiểm định theo các bước sau:

- Bước 1: Gộp k mẫu vào một và xếp thứ hạng cho các phần tử theo mẫu gộp, giả sử phần tử x_{ij} có thứ hạng là r_{ij}.
- Bước 2: Gọi $R_i = r_{i1} + \dots + r_{in_i}, i = \overline{1, k}$ là tổng thứ hạng của các phần tử trong mẫu thứ i.

1	Hạng	2	Hạng	...	k	Hạng
x_{11}	r_{11}	x_{21}	r_{21}	...	x_{k1}	r_{k1}
x_{12}	r_{12}	x_{22}	r_{22}	...	x_{k2}	r_{k2}
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	...	$\vdots$	$\vdots$
x_{1n_1}	r_{1n_1}	x_{2n_2}	r_{2n_2}	...	x_{kn_k}	r_{kn_k}
Tổng	R_1		R_2			R_k

Các bước thực hiện kiểm định Kruskal-Wallis

Giả sử tổng thể thứ i ta chọn ra một mẫu gồm có n_i phần tử là $x_{i1}, x_{i2}, \ldots, x_{in_i}$, với $i = \overline{1, k}$. Ta tiến hành kiểm định theo các bước sau:

- Bước 1: Gộp k mẫu vào một và xếp thứ hạng cho các phần tử theo mẫu gộp, giả sử phần tử x_{ij} có thứ hạng là r_{ij}.
- Bước 2: Gọi $R_i = r_{i1} + \ldots + r_{in_i}, i = \overline{1, k}$ là tổng thứ hạng của các phần tử trong mẫu thứ i.

1	Hạng	2	Hạng	...	k	Hạng
x_{11}	r_{11}	x_{21}	r_{21}	...	x_{k1}	r_{k1}
x_{12}	r_{12}	x_{22}	r_{22}	...	x_{k2}	r_{k2}
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	...	$\vdots$	$\vdots$
x_{1n_1}	r_{1n_1}	x_{2n_2}	r_{2n_2}	...	x_{kn_k}	r_{kn_k}
Tổng	R_1		R_2			R_k

Các bước thực hiện kiểm định Kruskal-Wallis

- Bước 3: Lập biểu thức thống kê

$$W = \frac{12}{n(n+1)} \sum_{i=1}^{k} \frac{R_i^2}{n_i} - 3(n+1),$$

với $n = n_1 + n_2 + \ldots + n_k$.

- Bước 4: Khi $n_i \geqslant 5, \forall i = 1, 2, \ldots, k$ thì biến ngẫu nhiên W tuân theo phân phối chi-bình phương với k-1 bậc tự do. Tại mức ý nghĩa α bác bỏ H_0 nếu $W \geqslant \chi^2_{k-1,\alpha}$.

Các bước thực hiện kiểm định Kruskal-Wallis

- Bước 3: Lập biểu thức thống kê

$$W = \frac{12}{n(n+1)} \sum_{i=1}^{k} \frac{R_i^2}{n_i} - 3(n+1),$$

  với $n = n_1 + n_2 + \ldots + n_k$.
- Bước 4: Khi $n_i \geqslant 5, \forall i = 1, 2, \ldots, k$ thì biến ngẫu nhiên W tuân theo phân phối chi-bình phương với k-1 bậc tự do. Tại mức ý nghĩa α bác bỏ H_0 nếu $W \geqslant \chi^2_{k-1,\alpha}$.

Ví dụ

Bài toán

Để nghiên cứu xem số bác sĩ trong một phòng khám có ảnh hưởng đến số bệnh nhân trên một bác sĩ đến khám trong một ngày hay không, người ta điều tra ba loại phòng khám: (1) phòng có đúng hai bác sĩ, (2) phòng có ba bác sĩ hoặc nhiều hơn và (3) phòng chăm sóc sức khỏe cộng đồng (HMO) thu được kết quả sau:

Phòng 2 bác sĩ	Phòng $\geqslant 3$	Phòng HMO
13	24	26
15	16	22
20	19	31
18	22	27
23	25	28
	14	33
	17	

Tại mức ý nghĩa $\alpha = 5\%$, hãy kiểm định xem có sự khác biệt về trung bình số bệnh nhân trên một bác sĩ đến ba loại phòng khám trên không.

Lời giải

Lời giải

Gộp 3 nhóm mẫu điều tra vào một, xếp thứ hạng các phần tử ta được bảng dưới đây:

Phòng 2 bác sĩ	Hạng	Phòng $\geqslant 3$ bác sĩ	Hạng	Phòng HMO	Hạng
13	1	24	12	26	14
15	3	16	4	22	9.5
20	8	19	7	31	17
18	6	22	9.5	27	15
23	11	25	13	28	16
		14	2	33	18
		17	5		
	$R_1 = 29$		$R_2 = 52.5$		$R_3 = 89.5$

Ta có $\chi^2_{k-1,\alpha} = \chi^2_{3-1,0.05} = 5.991$.

Thực hiện kiểm định Kruskal-Wallis trong R

Để thực hiện kiểm định Kruskal-Wallis trong R, ta dùng
`kruskal.test(x,g)`,
trong đó

- **`x`** là véc tơ gộp các phần tử trong các mẫu.
- g là vec tơ thứ bậc dùng để phân loại các phần tử của x.

```
> SoBenhNhan = c(13, 15, 20, 18, 23,
24, 16, 19, 22, 25, 14, 26, 22, 31, 27, 28, 33)
> PhanLoai = factor(rep(c(1, 2, 3), c(5, 6, 6)))
> kruskal.test(SoBenhNhan, PhanLoai)

> #Hoặc
> PhongLoai1 = c(13, 15, 20, 18, 23)
> PhongLoai2 = c(24, 16, 19, 22, 25, 14)
> PhongLoai3 = c(26, 22, 31, 27, 28, 33)
> kruskal.test(list(PhongLoai1, PhongLoai2, Phongloai3))


        Kruskal-Wallis rank sum test

data:  SoBenhNhan and PhanLoai
Kruskal-Wallis chi-squared = 9.2512, df = 2, p-value = 0.009798
```

Bài tập tự học

Hãy dùng sơ đồ cây để liệt kê lại các trường hợp khi thực hiện bài toán kiểm định:

- so sánh trung bình/trung vị với một số;
- so sánh hai trung bình/trung vị với nhau;
- so sánh nhiều trung bình/trung vị với nhau.