LOGIC, SUY LUẬN TOÁN HỌC
VÀ KỸ THUẬT ĐẾM

NHÀ XUẤT BẢN KHOA HỌC VÀ KỸ THUẬT

HÀ NỘI - 2017

Lời nói đầu

Giáo trình "Lôgic suy luận toán học và kỹ thuật đếm" là một trong những giáo trình cơ sở được giảng dạy chung cho các khoa khác nhau của trường Đại học Thăng Long.

Với mục đích giúp cho sinh viên có những kiến thức cần thiết cơ bản về tư duy lôgic và suy luận toán học, đồng thời trang bị cho sinh viên những kiến thức cơ sở để học tiếp các môn Toán và Tin học trong chương trình giảng dạy của trường.

Giáo trình này được giảng dạy cho sinh viên năm thứ nhất, bao gồm bốn chương:

Chương 1 (Lôgic, tập hợp và hàm). Trong chương này trình bày một cách tổng quan về lôgic và tập hợp. Mặc dù khái niệm về tập hợp, hàm (ánh xạ) và lôgic đã được giảng dạy trong chương trình toán phổ thông từ lớp sáu trung học cơ sở đến lớp mười trung học phổ thông. Song trên thực tế khi bước vào đại học, nhiều sinh viên đã quên hết. Vì vậy trong giáo trình này, chúng tôi cố gắng trình bày một cách chi tiết, có hệ thống, và minh họa bằng nhiều ví dụ đơn giản, dễ hiểu.

Chương 2 (Suy luận toán học). Chương này bao gồm các quy tắc suy luận và các phương pháp chứng minh. Có thể nói, đây là một sự tổng kết khá đầy đủ và hệ thống các phương pháp chứng minh mà ta đã từng gặp trong các phép chứng minh các mệnh đề toán học. Mỗi phương pháp chứng minh đều được chỉ ra cơ sở lôgic và cơ sở toán học của nó. Trong đó, đáng chú ý là các phương pháp chứng minh trực tiếp, gián tiếp, phản chứng và quy nạp toán học.

Chương 3 (Phép đếm và giải tích tổ hợp). Từ thời nguyên thủy, loài người đã phải tiến hành các phép đếm. Khi toán học ra đời, người ta đã đúc kết được một số nguyên lý cơ bản của phép đếm. Đó là quy tắc cộng, quy tắc nhân và nguyên lý bù trừ. Trong giáo trình này, chúng tôi trình bày một cách đơn giản, dễ hiểu các nguyên lý trên thông qua các ví dụ cụ thể. Trong phần giải tích tổ hợp, ngoài việc nhắc lại các khái niệm về hoán vị, chỉnh hợp, chỉnh hợp lặp, tổ hợp, đưa ra các công thức tính số các hoán vị, chỉnh hợp, chỉnh hợp lặp, tổ hợp như trong chương trình toán phổ thông, chúng tôi đã trình bày tất cả các phép chứng minh việc xây dựng các công thức trên (chủ yếu dựa vào quy tắc cộng và nhân). Ngoài ra trong chương này, khái niệm về tổ hợp lặp được mô tả và xây dựng công thức tính một cách đơn giản và dễ hiểu. Nó được ứng dụng khá nhiều trong thực tiễn.

Chương 4 (Đệ quy và hệ thức truy hồi). Trước hết, chúng tôi trình bày định nghĩa khái niệm bằng đệ quy, trong đó có định nghĩa hàm và định nghĩa tập bằng đệ quy. Từ định nghĩa hàm bằng đệ quy dẫn đến định nghĩa các dãy số bằng đệ quy. Từ đó hình thành các công thức gọi là các hệ thức truy hồi của dãy số. Một trong những nội dung của chương này là mô hình hóa bằng hệ thức truy hồi, tức là lập hệ thức truy hồi cho các bài toán thực tế. Đồng thời với việc lập hệ thức truy hồi là đưa ra các phương pháp giải các hệ thức truy hồi, đặc biệt là giải các hệ thức truy hồi tuyến tính với hệ số là hằng.

Trong giáo trình này, các ví dụ minh họa đã được chọn lọc một cách kỹ càng, từ đơn giản đến phức tạp, giúp cho người học dễ hiểu và vận dụng tốt nhất vào thực tiễn. Cuối mỗi chương đều có một khối lượng phong phú bài tập dùng cho nhiều đối tượng sinh viên thuộc các chuyên ngành khác nhau.

Cuối giáo trình có phần hướng dẫn giải bài tập, một số bài tập khó có lời giải chi tiết giúp cho sinh viên có thể tự học một cách dễ dàng. Khi biên soạn giáo trình này chúng tôi đã sử dụng nhiều tài liệu có liên quan (xem các tài liệu tham khảo) với tinh thần có chọn lọc, tinh giản và thiết thực nhằm có được một giáo trình phù hợp nhất đối với sinh viên các năm đầu của Trường Đại học Thăng Long.

Nhóm biên soạn

Mục lục

Chương 1

Logic, tập hợp và hàm

1.1. Logic mệnh đề

1.1.1. Khái niệm về mệnh đề

Mệnh đề đơn giản và mệnh đề phức hợp

Mệnh đề là đối tượng nghiên cứu của logic. Ta chia mệnh đề làm hai loại là mệnh đề đơn giản và mệnh đề phức hợp.

Mệnh đề đơn giản là khái niệm cơ bản của logic mệnh đề. Đó là những câu mang một trong hai tính chất đúng hoặc sai.

Ví dụ 1.1.1.

- *"Mặt trời mọc ở hướng Đông" là mệnh đề đúng.*
- *"Nước sôi ở $0°C$" là mệnh đề sai.*
- *"Số 5 là một số lẻ" là mệnh đề đúng.*
- *"Số 8 là một số nguyên tố" là mệnh đề sai.*

Từ một hay nhiều mệnh đề đã cho, bằng các phép toán logic, ta tạo nên được những mệnh đề mới gọi là *mệnh đề phức hợp*. Tính đúng, sai của mệnh đề phức hợp phụ thuộc vào tính đúng sai của các mệnh đề thành phần và các quy tắc của các phép toán logic tạo ra mệnh đề phức hợp này.

Sau này không cần phân biệt mệnh đề đơn giản và mệnh đề phức hợp, ta dùng một thuật ngữ chung là *mệnh đề*.

Như vậy, mệnh đề là câu mà ta có thể chỉ ra được rằng nó là đúng hay sai. Những câu không thuộc loại này không phải là mệnh đề. Ví dụ: câu hỏi, câu cảm thán, câu có chứa các biến, ... không phải là những mệnh đề.

Giá trị chân lý của mệnh đề: Đối với mỗi mệnh đề đã cho ta gán cho một giá trị chân lý. Nếu p là một mệnh đề đúng thì ta nói rằng p có giá trị chân lý là T (hoặc 1). Nếu p là mệnh đề sai thì ta nói rằng p có giá trị chân lý là F (hoặc 0). Tuy ta không định nghĩa giá trị chân lý là gì nhưng có thể hiểu rằng T hoặc F đặc trưng cho tính đúng hay sai của một mệnh đề.

Ví dụ 1.1.2.

- *Mặt trời mọc ở hướng Đông có giá trị chân lý là T.*
- *Nước sôi ở $0°C$ có giá trị chân lý là F.*

1.1.2. Phép toán logic trên các mệnh đề

Ta có thể tạo nên được những mệnh đề mới từ một hay nhiều mệnh đề đã cho bằng các phép toán logic. Ta sẽ xét sáu phép toán sau đây.

1.1.2.1. Phép phủ định

Định nghĩa 1.1.1. *Cho mệnh đề p. Phủ định của p, ký hiệu là $\neg p$ (hoặc $\overline{p}$), đọc là "không p", là mệnh đề đúng khi p sai và sai khi p đúng.*

Ví dụ 1.1.3. *Cho mệnh đề p: "Mặt trời mọc ở hướng Đông", khi đó $\neg p$ là mệnh đề: "Mặt trời không mọc ở hướng Đông".*

Để minh họa cho quy tắc của phép phủ định, ta lập một bảng gọi là bảng giá trị chân lý của phép phủ định.

Bảng 1.1: Bảng giá trị chân lý của phép phủ định

p	$\neg p$
T	F
F	T

1.1.2.2. Phép hội

Định nghĩa 1.1.2. *Cho hai mệnh đề p và q. Hội của p và q, ký hiệu là $p \wedge q$, đọc là "p và q", là mệnh đề đúng khi cả p và q cùng đúng và sai trong ba trường hợp còn lại.*

Trong ngôn ngữ thông thường nếu ta nối hai câu dạng mệnh đề với nhau bằng liên từ *"và"* sẽ được một câu đúng nếu cả hai câu thành phần đều đúng và được một câu sai nếu có ít nhất một trong hai câu thành phần sai.

Bảng 1.2: Bảng giá trị chân lý của phép hội

p	q	$p \wedge q$
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	F

Ví dụ 1.1.4.

- *"Nước sôi ở* $100^\circ C$ *và nước đóng băng ở* $0^\circ C$*" là câu đúng.*
- *"Mặt trời mọc ở hướng Đông và nước sôi ở* $0^\circ C$*" là câu sai.*
- *"Số 5 là một số chẵn và số 6 là một số lẻ" là một câu sai.*

1.1.2.3. Phép tuyển

Định nghĩa 1.1.3. *Cho hai mệnh đề* p *và* q*. Tuyển của* p *và* q*, ký hiệu là* $p \vee q$*, đọc là "*p *hoặc* q*", là mệnh đề sai khi cả* p *và* q *cùng sai và đúng trong ba trường hợp còn lại.*

Trong ngôn ngữ thông thường, nếu ta nối hai câu dạng mệnh đề với nhau bằng liên từ *"hoặc"* sẽ được một câu đúng nếu có ít nhất một trong hai câu thành phần là đúng và sai nếu cả hai câu thành phần đều sai.

Bảng 1.3: Bảng giá trị chân lý của phép tuyển

p	q	$p \vee q$
T	T	T
T	F	T
F	T	T
F	F	F

Ví dụ 1.1.5.

- *"Hà Nội là thủ đô của nước Việt Nam hoặc Huế ở miền bắc" là mệnh đề đúng.*
- *"Hà Nội là thủ đô của nước Việt Nam hoặc Viên là thủ đô của Áo" là mệnh đề đúng.*

- *"Áo thuộc châu Á hoặc Thái Lan thuộc liên minh EU" là mệnh đề sai.*

1.1.2.4. Phép tuyển có loại

Định nghĩa 1.1.4. *Cho hai mệnh đề p và q. Tuyển có loại của p và q, ký hiệu là $p \oplus q$, đọc là "hoặc p hoặc q", là mệnh đề đúng khi một trong hai mệnh đề là đúng, mệnh đề còn lại sai; và sai khi cả hai mệnh đề cùng đúng hoặc cùng sai.*

Phép toán *"hoặc"* ở đây mang ý nghĩa loại trừ.

Bảng 1.4: Bảng giá trị chân lý của phép tuyển có loại

p	q	$p \oplus q$
T	T	F
T	F	T
F	T	T
F	F	F

Ví dụ 1.1.6.

- *"Hoặc số 5 là số chẵn hoặc số 5 là số lẻ" là một mệnh đề đúng.*
- *"Hoặc mặt trời mọc ở hướng Đông hoặc mặt trời mọc ở hướng Tây" là mệnh đề đúng.*

1.1.2.5. Phép kéo theo

Định nghĩa 1.1.5. *Cho hai mệnh đề p và q. p kéo theo q, ký hiệu là $p \to q$, đọc là "nếu p thì q", là mệnh đề sai khi p đúng, q sai và đúng trong các trường hợp còn lại.*

Bảng 1.5: Bảng giá trị chân lý của phép kéo theo

p	q	$p \to q$
T	T	T
T	F	F
F	T	T
F	F	T

Có nhiều cách biểu đạt $p \to q$. Dưới đây là một số cách đọc thường gặp:

- "p kéo theo q."
- "q khi p."
- "p là điều kiện đủ của q."
- "q là điều kiện cần của p."

Trong mệnh đề $p \to q$, p được gọi là giả thiết và q được gọi là kết luận. Theo định nghĩa, nếu giả thiết p sai thì dù kết luận q đúng hay sai, $p \to q$ luôn là mệnh đề đúng.

Ví dụ 1.1.7. *"Nếu số 5 là số chẵn thì số 5^2 là số chẵn" là một mệnh đề đúng.*

Trong toán học, mệnh đề có dạng $p \to q$ được gặp khá phổ biến. Trong trường hợp này giả thiết p đã cho là đúng, vì vậy để chứng minh $p \to q$ là mệnh đề đúng thì cần phải chứng minh q là đúng (Đó chính là cơ sở logic của phương pháp chứng minh trực tiếp sau này).

Ví dụ 1.1.8. *"Nếu tam giác ABC vuông thì bình phương cạnh huyền bằng tổng bình phương của hai cạnh góc vuông." (Định lý Pytago)*

1.1.2.6. Phép tương đương

Cho hai mệnh đề p và q, mệnh đề p *tương đương* q, ký hiệu là $p \leftrightarrow q$, đọc là *"p nếu và chỉ nếu q"*, là mệnh đề đúng nếu cả p và q cùng đúng hoặc cùng sai và sai trong các trường hợp còn lại.

Bảng 1.6: Bảng giá trị chân lý của phép tương đương

p	q	$p \leftrightarrow q$
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	T

Mệnh đề $p \leftrightarrow q$ còn có các cách đọc như sau:

- "Điều kiện cần và đủ của p là q."

- "Điều kiện cần và đủ của q là p."
- "q nếu và chỉ nếu p."
- "p khi và chỉ khi q."
- "q khi và chỉ khi p."
- "Nếu p thì q và ngược lại."

Ví dụ 1.1.9. *"Số tự nhiên a là lẻ khi và chỉ khi a^2 là số lẻ" là một mệnh đề đúng.*

1.1.3. Các mệnh đề liên hợp

Cho mệnh đề $p \to q$, gọi là mệnh đề thuận. Từ mệnh đề này ta có thể thiết lập các mệnh đề sau đây, gọi là các mệnh đề liên hợp của mệnh đề đã cho.

- Mệnh đề *đảo*: $q \to p$.
- Mệnh đề *phản* $\neg p \to \neg q$.
- Mệnh đề *phản đảo* $\neg q \to \neg p$.

Ví dụ 1.1.10. *"Nếu số tự nhiên a có chữ số hàng đơn vị là 5 thì a chia hết cho 5" (mệnh đề thuận). Mệnh đề này có các mệnh đề liên hợp sau:*

- *Mệnh đề đảo: "Nếu số tự nhiên a chia hết cho 5 thì a có chữ số hàng đơn vị là 5".*
- *Mệnh đề phản "Nếu số tự nhiên a không có chữ số hàng đơn vị là 5 thì a không chia hết cho 5".*
- *Mệnh đề phản đảo "Nếu số tự nhiên a không chia hết cho 5 thì a không có chữ số hàng đơn vị là 5".*

Ta thấy rằng các mệnh đề thuận và phản đảo có tính chất đúng sai giống nhau, các mệnh đề đảo và phản có tính chất đúng sai giống nhau.

Chú ý: Sự kết hợp giữa các mệnh đề thông qua các phép toán logic được gọi là biểu thức logic, chẳng hạn, $p \to q, (p \vee q) \to p, \ldots$

1.1.4. Dịch câu thông thường thành biểu thức logic

Dịch một câu thông thường thành biểu thức logic là làm mất đi tính không rõ ràng của các loại ngôn ngữ hiện nay. Hơn nữa, khi đã dịch một câu thông thường thành một biểu thức logic, chúng ta có thể xác định giá trị chân lý của nó, cũng có thể sử dụng những quy tắc suy diễn để suy luận về chúng.

Ví dụ 1.1.11. *Hãy dịch các câu sau thành biểu thức logic.*
"Nếu bạn chưa đủ mười tám tuổi hoặc nồng độ cồn trong máu của bạn vượt quá 80° thì bạn không được phép lái xe máy."

Lời giải: Có nhiều cách để diễn đạt câu này thành một biểu thức logic. Cách đơn giản nhất là diễn đạt câu đó thành mệnh đề đơn, chẳng hạn p, nhưng cách làm này không giúp ích gì cho ta nếu muốn phân tích hoặc dùng nó để suy luận. Vì vậy, ta nên dùng các mệnh đề đơn giản để biểu diễn các bộ phận của câu đó và dùng các phép toán logic thích hợp để liên kết chúng. Cho p, q, r lần lượt là các mệnh đề "Bạn chưa đủ mười tám tuổi", "Nồng độ cồn trong máu của bạn vượt quá 80°", "Bạn được phép lái xe máy" thì câu trên có thể dịch thành biểu thức logic sau:

$$(p \vee q) \to \neg r.$$

Câu này cũng có thể dịch là: $(p \to \neg r) \wedge (q \to \neg r)$.

1.1.5. Các phép toán logic và các phép toán bit

Máy tính dùng các bit để biểu diễn thông tin. Một bit có thể mang một trong hai giá trị là 0 và 1, đó là các số được dùng trong biểu diễn nhị phân của các số nguyên. Các bit cũng có thể dùng để biểu diễn giá trị chân lý: người ta dùng bit 1 để biểu diễn giá trị chân lý của mệnh đề đúng, bit 0 để biểu diễn giá trị chân lý của mệnh đề sai. Một biến được gọi là biến Boole (Boolean variable) nếu giá trị của nó hoặc là đúng hoặc là sai. Ta cũng có thể dùng bit để biểu diễn một biến Boole. Các phép toán bit trong máy tính tương ứng với các phép toán logic. Bằng cách thay đúng bằng 1, thay sai bằng 0 trong các bảng giá trị chân lý đối với các phép toán $\vee, \wedge, \oplus$ ta sẽ nhận được các phép toán bit tương ứng. Chúng ta sẽ dùng các ký hiệu OR, AND, XOR thay cho các phép toán $\vee, \wedge, \oplus$ như thường làm trong các ngôn ngữ lập trình khác nhau.

Định nghĩa 1.1.6. *Một xâu bit (hoặc xâu nhị phân) là một dãy không hoặc nhiều bit. Chiều dài của xâu là số bit trong xâu đó.*

Ví dụ 1.1.12. *Xâu 10011010 là một xâu bit có chiều dài bằng 8. Xâu không chứa bit nào được gọi là xâu rỗng và có độ dài bằng 0.*

Trong cuốn sách này các xâu bit sẽ được tách thành các khối, mỗi khối gồm 5 bit (trừ khối cuối cùng có thể ít hơn 5 bit) cho dễ đọc. Chúng ta có thể mở rộng các phép toán bit tới các xâu bit bằng cách định nghĩa các OR bit, AND bit, XOR bit đối với hai xâu bit có cùng chiều dài là các xâu có các bit là: OR bit, AND bit, XOR bit tương ứng. Chúng ta cũng sử dụng các ký hiệu $\vee, \wedge, \oplus$ để biểu diễn các phép toán OR bit, AND bit, XOR bit tương ứng. Sau đây là bảng toán Boole:

Bảng 1.7: Bảng phép toán $\wedge$

$\wedge$	0	1
0	0	0
1	0	1

Bảng 1.8: Bảng phép toán $\vee$

$\vee$	0	1
0	0	1
1	1	1

Bảng 1.9: Bảng phép toán $\oplus$

$\oplus$	0	1
0	0	1
1	1	0

Ví dụ 1.1.13. *Tìm OR bit, AND bit và XOR bit đối với hai xâu 11010 0110 và 01010 1101.*

Lời giải: OR bit, AND bit và XOR bit đối với hai xâu 11010 0110 và 01010 1101 lần lượt là

$$11010\ 0110 \vee 01010\ 1101 = 11010\ 1111$$
$$11010\ 0110 \wedge 01010\ 1101 = 01010\ 0100$$
$$11010\ 0110 \oplus 01010\ 1101 = 10000\ 1011$$

1.1.6. Mệnh đề hằng đúng, mệnh đề hằng sai

Đối với các mệnh đề đơn giản, khi phát biểu ta có thể biết ngay được đó là mệnh đề đúng hay sai, tức là giá trị chân lý của nó là T hay F. Tuy nhiên, đối với những mệnh đề phức hợp, tính đúng sai của nó còn phụ thuộc vào tính đúng sai của các mệnh đề thành phần và các quy tắc của các phép toán logic tạo nên mệnh đề phức hợp này. Có nhiều trường hợp một mệnh đề phức hợp luôn là đúng (hoặc sai) mà không phụ thuộc vào các mệnh đề thành phần đúng hay sai. Một mệnh đề như vậy được gọi là hằng đúng (hằng sai). Ta sẽ đưa ra chính xác định nghĩa cho các khái niệm này.

Định nghĩa 1.1.7. *Mệnh đề phức hợp M được gọi là mệnh đề hằng đúng nếu giá trị chân lý của M luôn là T, đối với mọi hệ giá trị chân lý của các mệnh đề thành phần.*

Một mệnh đề hằng đúng còn được gọi là một luật logic.

Ví dụ 1.1.14.

1. *$M = p \vee \neg p$ là một mệnh đề hằng đúng. Thật vậy, ta có thể lập bảng giá trị chân lý như bảng 1.10.*

   Bảng 1.10: Bảng giá trị chân lý của $p \vee \neg p$

p	$\neg p$	$p \vee \neg p$
T	F	T
F	T	T

   Qua bảng 1.10, ta thấy rằng $M = p \vee \neg p$ luôn có giá trị chân lý là T nên nó là một mệnh đề hằng đúng.

2. *$(p \to q) \leftrightarrow (\neg p \vee q)$ là mệnh đề hằng đúng. Thật vậy, ta có bảng chân lý như bảng sau:*

   Bảng 1.11: Bảng giá trị chân lý của $(p \to q) \leftrightarrow (\neg p \vee q)$

p	q	$\neg p$	$p \to q$	$\neg p \vee q$	$(p \to q) \leftrightarrow (\neg p \vee q)$
T	T	F	T	T	T
T	F	F	F	F	T
F	T	T	T	T	T
F	F	T	T	T	T

Qua bảng 1.11, ta thấy mệnh đề $(p \to q) \leftrightarrow (\neg p \vee q)$ luôn có giá trị chân lý là T, nên nó là mệnh đề hằng đúng.

Định nghĩa 1.1.8. *Mệnh đề phức hợp M được gọi là mệnh đề hằng sai nếu giá trị chân lý của M luôn là F đối với mọi hệ giá trị chân lý của các mệnh đề thành phần.*

Mệnh đề hằng sai còn được gọi là một mâu thuẫn.

Ví dụ 1.1.15.

1. *$M = p \wedge \neg p$ là một mệnh đề hằng sai. Thật vậy, ta có bảng giá trị chân lý sau đây:*

   Bảng 1.12: Bảng giá trị chân lý của $p \wedge \neg p$

p	$\neg p$	$p \wedge \neg p$
T	F	F
F	T	F

   Qua bảng 1.12 ta thấy giá trị chân lý của $p \wedge \neg p$ luôn là F, nên nó là mệnh đề hằng sai.

2. *Rõ ràng nếu M là một mệnh đề hằng đúng thì $\neg M$ là một mệnh đề hằng sai, từ đó ta có ngay $\neg[(p \to q) \leftrightarrow (\neg p \vee q)]$ là một mệnh đề hằng sai.*

Định nghĩa 1.1.9. *Một mệnh đề không là hằng đúng, cũng không là hằng sai được gọi là một tiếp liên.*

Ví dụ 1.1.16. *$p \wedge q$, $p \vee q, p \leftrightarrow q$ đều là những tiếp liên.*

1.1.7. Sự tương đương logic giữa các mệnh đề

Trong các lập luận toán học, ta thường thay mệnh đề này bằng các mệnh đề khác có cùng giá trị chân lý. Bằng cách này, rất nhiều suy luận được chỉ ra một cách chặt chẽ và tường minh.

Định nghĩa 1.1.10. *Cho hai mệnh đề M và N. Ta nói rằng M tương đương logic với N, ký hiệu là $M \Leftrightarrow N$ nếu M và N có cùng giá trị chân lý ứng với mọi hệ giá trị chân lý của các mệnh đề thành phần.*

Ví dụ 1.1.17. *Cho p, q là hai mệnh đề. Chứng minh hai mệnh đề* $p \to q$ *và* $\neg p \vee q$ *tương đương logic.*

Lời giải: Ta có bảng giá trị chân lý của chúng như bảng 1.13.

Bảng 1.13: Bảng giá trị chân lý của $p \to q$ và $\neg p \vee q$

p	q	$\neg p$	$p \to q$	$\neg p \vee q$
T	T	F	T	T
T	F	F	F	F
F	T	T	T	T
F	F	T	T	T

Qua bảng 1.13 ta thấy các giá trị chân lý của $p \to q$ ở cột 4 và $\neg p \vee q$ ở cột 5 luôn trùng nhau nên hai mệnh đề $p \to q$ và $\neg p \vee q$ tương đương logic với nhau.

Ý nghĩa quan trọng của sự tương đương logic của hai mệnh đề này là ta có thể thay thế phép kéo theo bằng phép phủ định và phép tuyển.

Bảng 1.14 trong trang kế tiếp cho ta một số tương đương logic hay được sử dụng. Trong đó, T là ký hiệu hằng đúng bất kì và F là hằng sai.

Nhận xét. Từ định nghĩa suy ra rằng quan hệ tương đương logic giữa các mệnh đề có tính chất bắc cầu, nghĩa là đối với ba mệnh đề M, N, P, nếu $M \Leftrightarrow N$ và $N \Leftrightarrow P$ thì $M \Leftrightarrow P$.

Từ nhận xét này, để chứng minh hai mệnh đề tương đương logic ngoài việc lập bảng giá trị chân lý, ta có thể dùng phương pháp biến đổi tương đương.

Ví dụ 1.1.18. *(Xem bảng 1.14 trước khi đọc ví dụ này)*

Chứng minh $p \to q \Leftrightarrow \neg q \to \neg p$.

Lời giải: Thật vậy, ta có

$$\begin{aligned}
\neg q \to \neg p &\Leftrightarrow \neg(\neg q) \vee \neg p && \text{(Tương đương tiện ích)}\\
&\Leftrightarrow q \vee \neg p && \text{(Luật phủ định kép)}\\
&\Leftrightarrow \neg p \vee q && \text{(Luật giao hoán)}\\
&\Leftrightarrow p \to q && \text{(Tương đương tiện ích)}
\end{aligned}$$

Bảng 1.14: Bảng một số tương đương logic hay được sử dụng

Tương đương logic	Tên gọi
$p \vee F \Leftrightarrow p$ $p \wedge T \Leftrightarrow p$	Luật đồng nhất
$p \wedge F \Leftrightarrow F$ $p \vee T \Leftrightarrow T$	Luật nuốt
$p \wedge p \Leftrightarrow p$ $p \vee p \Leftrightarrow p$	Luật lũy đẳng
$p \wedge q \Leftrightarrow q \wedge p$ $p \vee q \Leftrightarrow q \vee p$	Luật giao hoán
$(p \wedge q) \wedge r \Leftrightarrow p \wedge (q \wedge r)$ $(p \vee q) \vee r \Leftrightarrow p \vee (q \vee r)$	Luật kết hợp
$p \wedge (q \vee r) \Leftrightarrow (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$ $p \vee (q \wedge r) \Leftrightarrow (p \vee q) \wedge (p \vee r)$	Luật phân phối
$\neg(p \wedge q) \Leftrightarrow \neg p \vee \neg q$ $\neg(p \vee q) \Leftrightarrow \neg p \wedge \neg q$	Luật De Morgan
$\neg(\neg p) \Leftrightarrow p$	Luật phủ định kép
$p \to q \Leftrightarrow \neg q \to \neg p$	Luật phản đảo
$p \vee \neg p \Leftrightarrow T$ $p \wedge \neg p \Leftrightarrow F$	Tương đương tiện ích
$p \to q \Leftrightarrow \neg p \vee q$	

Ví dụ 1.1.19. *Trong ví dụ 1.1.11 đối với câu "Nếu bạn chưa đủ mười tám tuổi hoặc nồng độ cồn trong máu của bạn vượt quá 80° thì bạn không được phép lái xe máy" ta có hai cách dịch là:* $(p\vee q) \to \neg r$ *và* $(p \to \neg r)\wedge(q \to \neg r)$*. Bây giờ, ta sẽ chứng minh hai cách dịch đó là tương đương. Thật vậy, ta có:*

$$\begin{aligned}
(p \vee q) \to \neg r &\Leftrightarrow \neg(p \vee q) \vee \neg r && \text{(Tiện ích)}\\
&\Leftrightarrow (\neg p \wedge \neg q) \vee \neg r && \text{(De Morgan)}\\
&\Leftrightarrow (\neg p \vee \neg r) \wedge (\neg q \vee \neg r) && \text{(Phân phối)}\\
&\Leftrightarrow (p \to \neg r) \wedge (q \to \neg r) && \text{(Tiện ích).}
\end{aligned}$$

1.2. Tập hợp

Khái niệm tập hợp đã được đưa vào giảng dạy ngay từ lớp 6 của các trường phổ thông cơ sở và đã được học sinh sử dụng suốt trong quá trình học tập ở các trường phổ thông. Trong mục này, ta sẽ hệ thống những kiến thức cơ bản nhất về tập hợp giúp cho người học sử dụng trong suốt quá trình học tập.

1.2.1. Khái niệm về tập hợp

Tập hợp là khái niệm cơ bản của toán học. Đó là sự tụ tập các đối tượng thường mang một tính chất chung nào đó.

Ví dụ 1.2.1.

- *Tập hợp các sinh viên trong một lớp.*
- *Tập hợp các chữ số trong hệ thập phân.*
- *Tập hợp các đường thẳng trong một mặt phẳng.*

Mỗi đối tượng của tập hợp được gọi là phần tử của tập hợp. Nếu a là một phần tử của A thì ta viết $a \in A$ và đọc là "a thuộc A", phủ định của "a thuộc A" ký hiệu là $a \notin A$ và đọc là "a không thuộc A". Ta thường dùng các chữ hoa $A, B, C, \ldots$ để ký hiệu tập hợp và dùng các chữ thường $a, b, c, \ldots$ để ký hiệu các phần tử của tập hợp.

Các ký hiệu của tập hợp số thông dụng:

- $\mathbb{N}$: Tập các số tự nhiên.
- $\mathbb{Z}$: Tập các số nguyên.
- $\mathbb{Z}^+$: Tập các số nguyên dương.
- $\mathbb{Q}$: Tập các số hữu tỉ.
- $\mathbb{Q}^+$: Tập các số hữu tỉ dương.
- $\mathbb{R}$: Tập các số thực.
- $\mathbb{R}^+$: Tập các số thực dương.

1.2.2. Cách xác định một tập hợp

Để xác định một tập hợp, ta có thể:

- Liệt kê tất cả các phần tử của tập hợp.

  Ví dụ 1.2.2.
  $$A = \{0, 1, 2, 3\},$$
  $$B = \{\textit{Nam, Bắc, Đông, Tây}\},$$
  $$C = \{\textit{Toán, Văn, Sử, Địa}\}.$$

- Nêu tính chất đặc trưng của các phần tử của tập hợp. Trong trường hợp này để xác định tập hợp A, ta viết như sau:

  $$A = \{x|\ p(x)\}$$

  trong đó $p(x)$ là tính chất đặc trưng của các phần tử của tập hợp A.

  Ví dụ 1.2.3. *Tập $A = \{0, 1, 2, 3\}$ có thể viết như sau:*

  $$A = \{x|x \text{ là số nguyên và } 0 \leq x \leq 3\}.$$

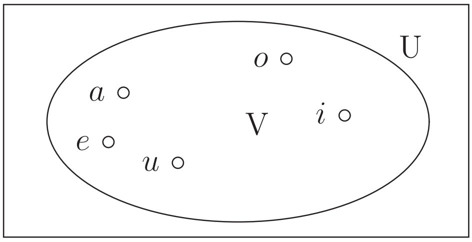
  Để xác định tập B các số nguyên là bội của 3 thì ta viết:

  $$B = \{x|x \text{ là số nguyên và } x \text{ là bội của } 3\}.$$

Định nghĩa 1.2.1. *Hai tập A và B là bằng nhau, ký hiệu $A = B$, nếu chúng có các phần tử như nhau, nghĩa là mỗi phần tử của A là một phần tử của B và mỗi phần tử của B là phần tử của A.*

Ví dụ 1.2.4. *Hai tập $A = \{x|x$ là số nguyên dương lẻ và $x < 10\}$ và $B = \{1, 3, 5, 7, 9\}$ là bằng nhau.*

Các tập hợp cũng có thể được minh họa bằng hình vẽ nhờ giản đồ Venn, do nhà toán học John Venn đưa ra lần đầu tiên vào năm 1881. Trong các giản đồ Venn, tập hợp vũ trụ U - tập hợp chứa tất cả các đối tượng đang xét – được biểu diễn bằng một hình chữ nhật. Bên trong hình chữ nhật này những hình tròn hoặc những hình hình học khác được dùng để biểu diễn những tập hợp. Đôi khi một số điểm được dùng để biểu diễn các phần tử đặc biệt của tập hợp. Giản đồ Venn còn được dùng để chỉ ra mối quan hệ giữa các tập hợp.



Hình 1.1: Giản đồ Venn biểu diễn tập hợp V các nguyên âm.

Có một tập hợp đặc biệt không chứa phần tử nào được gọi là tập rỗng và được ký hiệu là $\varnothing$. Thường xảy ra trường hợp tập hợp các phần tử thoả mãn một số tính chất nào đó lại không tồn tại phần tử nào, ví dụ, tập các số thực thỏa mãn đẳng thức $x^2 + 1 = 0$ là một tập rỗng.

1.2.3. Tập hữu hạn, tập vô hạn

Định nghĩa 1.2.2. *Các tập* $\varnothing, \{a\}, \{a, b\}$, $\{a_1, a_2, ..., a_n\}$ *được gọi là những tập hữu hạn. Số phần tử của tập hữu hạn A được gọi là bản số của A và ký hiệu là* $|A|$.

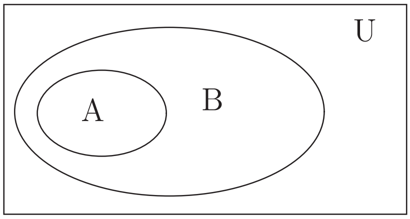
Ví dụ 1.2.5. $|\varnothing| = 0$, $|\{a\}| = 1$, $|\{a, b\}| = 2$.

Định nghĩa 1.2.3. *Các tập không phải là hữu hạn được gọi là tập vô hạn.*

Ví dụ 1.2.6. *Tập các số tự nhiên* $\mathbb{N}$, *tập các số nguyên* $\mathbb{Z}$ *là những tập vô hạn.*

1.2.4. Tập con và tập lũy thừa

Định nghĩa 1.2.4. *Cho hai tập hợp A và B. Tập A được gọi là tập con của tập B, ký hiệu là* $A \subseteq B$ *nếu mỗi phần tử của tập A đều là phần tử của tập B.*



Hình 1.2: Giản đồ Venn biểu diễn tập hợp A là tập con của tập hợp B.

Ví dụ 1.2.7.

1. *Tập các số tự nhiên* $\mathbb{N}$ *là tập con của tập các số nguyên* $\mathbb{Z}$ *(*$\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z}$*).*
2. *Với mỗi tập* A *ta luôn có* $A \subseteq A$ *và* $\varnothing \subseteq A$*.*

Nếu $A \subseteq B$ thì ta nói rằng A bị chứa trong B hoặc B chứa A và cũng có thể ký hiệu là $B \supseteq A$.

Nếu A là tập con của B và $A \neq B$ thì A được gọi là tập con thực sự của B và ký hiệu là $A \subsetneq B$ hoặc $A \subset B$.

Nhận xét. Từ định nghĩa suy ra rằng:

$$A = B \text{ khi và chỉ khi } A \subseteq B \text{ và } B \subseteq A.$$

Định nghĩa 1.2.5. *Cho tập A. Tập hợp tất cả các tập con của tập A được gọi là tập lũy thừa của A và ký hiệu là P(A).*

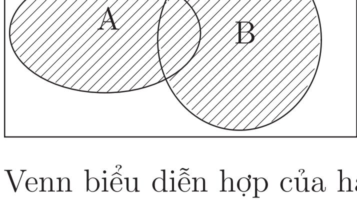
Ví dụ 1.2.8. *Nếu* $A = \{a, b, c\}$ *thì*

$$P(A) = \{\varnothing, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{b, c\}, \{a, c\}, \{a, b, c\}\}.$$

Chú ý. Ta có thể chứng minh được rằng nếu A có n phần tử thì $P(A)$ có 2^n tập con.

1.2.5. Hợp, giao và hiệu của các tập hợp

Định nghĩa 1.2.6. *Cho A và B là hai tập hợp. Hợp của A và B, ký hiệu* $A \cup B$*, là tập hợp tất cả các phần tử thuộc A hoặc thuộc B (có thể thuộc vào cả A lẫn B).*



Hình 1.3: Giản đồ Venn biểu diễn hợp của hai tập hợp A và B.

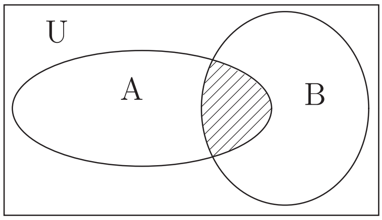
Như vậy, $A \cup B = \{x|x \in A \vee x \in B\}$.

Ví dụ 1.2.9. *Với* $A = \{a, b, c, d\}$, $B = \{c, d, e, g, h\}$, *ta có:*

$$A \cup B = \{a, b, c, d, e, g, h\}.$$

Định nghĩa 1.2.7. *Cho A và B là hai tập hợp. Giao của A và B, ký hiệu* $A \cap B$, *là tập tất cả các phần tử thuộc cả A lẫn B.*

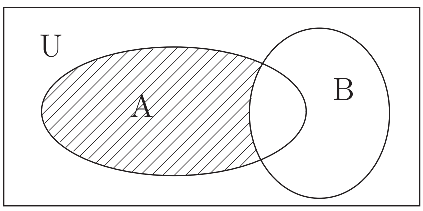
Như vậy: $A \cap B = \{x|x \in A \wedge x \in B\}$.



Hình 1.4: Giản đồ Venn biểu diễn giao của hai tập hợp A và B.

Ví dụ 1.2.10. *Với* $A = \{a, b, c, d\}$ *và* $B = \{c, d, e\}$, *ta có:* $A \cap B = \{c, d\}$.

Định nghĩa 1.2.8. *Cho A và B là hai tập hợp. Hiệu của A và B, ký hiệu* $A \setminus B$, *là tập hợp chứa các phần tử thuộc A nhưng không thuộc B.*

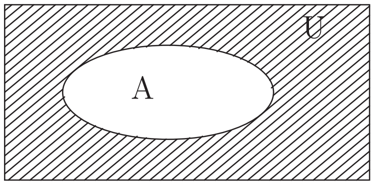


Hình 1.5: Giản đồ Venn biểu diễn hiệu của hai tập hợp A và B.

Ví dụ 1.2.11. *Cho* $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ *và* $B = \{2, 5, 7, 9\}$. *Ta có* $A \setminus B = \{1, 3, 4, 6\}$, $B \setminus A = \{7, 9\}$.

Định nghĩa 1.2.9. *Cho U là tập vũ trụ. Phần bù của tập A, ký hiệu* $\overline{A}$, *là tập hợp tất cả các phần tử thuộc U nhưng không thuộc A. Nói một cách khác phần bù của A chính là* $U \setminus A$.

Như vậy $\overline{A} = \{x|x \notin A\}$.



Hình 1.6: Giản đồ Venn biểu diễn phần bù của tập hợp A.

Sau đây chúng tôi sẽ đưa ra một số cách để chứng minh hai tập hợp bằng nhau. Một trong những cách để chứng minh hai tập hợp bằng nhau là chứng minh tập này là con của tập kia và ngược lại. Chúng ta sẽ minh họa phương pháp chứng minh này bằng cách thiết lập luật De Morgan thứ nhất.

Bảng 1.15: Bảng một số đẳng thức tập hợp

Hằng đẳng thức	Tên gọi
$A \cup \varnothing = A$ $A \cap U = A$	Luật đồng nhất
$A \cup U = U$ $A \cap \varnothing = \varnothing$	Luật nuốt
$A \cup A = A$ $A \cap A = A$	Luật lũy đẳng
$A \cup B = B \cup A$ $A \cap B = B \cap A$	Luật giao hoán
$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$ $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$	Luật kết hợp
$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$	Luật phân phối
$\overline{(A \cap B)} = \overline{A} \cup \overline{B}$ $\overline{(A \cup B)} = \overline{A} \cap \overline{B}$	Luật De Morgan
$\overline{\overline{A}} = A$	Luật bù

Ví dụ 1.2.12. *Chứng minh* $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$.

Lời giải: Trước hết, ta giả sử $x \in \overline{A \cup B}$. Từ đó, ta có $x \notin A \cup B$, tức là $x \notin A$ và $x \notin B$. Do đó $x \in \overline{A}$ và $x \in \overline{B}$, tức là $x \in \overline{A} \cap \overline{B}$. Điều này chứng tỏ $\overline{A \cup B} \subseteq \overline{A} \cap \overline{B}$.
Bây giờ, ta lại giả sử rằng $x \in \overline{A} \cap \overline{B}$. Từ đó, $x \in \overline{A}$ và $x \in \overline{B}$, ta suy ra $x \notin A$ và $x \notin B$ và do đó, $x \notin A \cup B$ suy ra $x \in \overline{A \cup B}$. Điều này cho ta:

$\overline{A} \cap \overline{B} \subseteq \overline{A \cup B}$. Vậy $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$.

Ví dụ 1.2.13. *Cho A và B là hai tập hợp của tập vũ trụ U. Chứng minh hằng đẳng thức tập hợp $A \setminus B = A \cap \overline{B}$.*

Lời giải: Ta có dãy các hằng đẳng thức sau

$$A \setminus B = \{x | x \in A \wedge x \notin B\} = \{x | x \in A \wedge x \in \overline{B}\} = \{x | x \in (A \cap \overline{B})\} = A \cap \overline{B}.$$

Vậy: $A \setminus B = A \cap \overline{B}$.

Chú ý. Hằng đẳng thức tập hợp này được dùng khá nhiều trong việc chứng minh nhiều đẳng thức tập hợp.
Ta còn có thể chứng minh các đẳng thức tập hợp dựa trên các hằng đẳng thức tập hợp như sau:

Ví dụ 1.2.14. *Cho A, B, C là ba tập hợp. Chứng minh đẳng thức tập hợp*

$$\overline{A \cup (B \cap C)} = (\overline{C} \cup \overline{B}) \cap \overline{A}.$$

Lời giải:

$$\begin{aligned}\overline{A \cup (B \cap C)} &= \overline{A} \cap \overline{B \cap C} = \overline{A} \cap (\overline{B} \cup \overline{C}) \qquad \text{(Luật De Morgan)}\\ &= (\overline{B} \cup \overline{C}) \cap \overline{A} = (\overline{C} \cup \overline{B}) \cap \overline{A} \qquad \text{(Luật giao hoán).}\end{aligned}$$

Ta cũng có thể chứng minh các đẳng thức tập hợp bằng cách dùng bảng tính thuộc. Để chỉ một phần tử thuộc một tập hợp ta dùng số 1, để chỉ một phần tử không thuộc tập hợp ta dùng số 0. Ta sẽ xét mỗi tổ hợp của các tập mà một phần tử có thể được chứa trong đó và chứng minh rằng những phần tử thuộc hai tập ở hai vế của đẳng thức nằm trong cùng những tổ hợp như nhau. Ở đây, có sự tương tự giữa bảng tính thuộc và bảng giá trị chân lý.

Ta có bảng tính thuộc của các phép toán giao, hợp, phép lấy phần bù như sau:

Ví dụ 1.2.15. *Dùng bảng tính thuộc chứng minh rằng $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$.*

Lời giải: Ta lập bảng tính thuộc như sau:

Bảng này có 4 dòng. Vì cột $\overline{A \cup B}$ và $\overline{A} \cap \overline{B}$ giống hệt nhau nên hằng đẳng thức trên là đúng.

Bảng 1.16: Bảng tính thuộc của phép giao

A	B	$A \cap B$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

Bảng 1.17: Bảng tính thuộc của phép hợp

A	B	$A \cup B$
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	0

Bảng 1.18: Bảng tính thuộc của phép lấy phần bù

A	$\overline{A}$
1	0
0	1

Bảng 1.19: Bảng tính thuộc đối với $\overline{A \cup B}$ và $\overline{A} \cap \overline{B}$

A	B	$A \cup B$	$\overline{A \cup B}$	$\overline{A}$	$\overline{B}$	$\overline{A} \cap \overline{B}$
1	1	1	0	0	0	0
1	0	1	0	0	1	0
0	1	1	0	1	0	0
0	0	0	1	1	1	1

1.2.6. Hợp và giao tổng quát

Vì hợp và giao của những tập hợp thỏa mãn luật kết hợp nên các tập hợp $A \cup B \cup C$ và $A \cap B \cap C$ là hoàn toàn xác định khi A, B, C là những tập hợp. Tập $A \cup B \cup C$ chứa tất cả các phần tử thuộc vào ít nhất một trong ba tập hợp A, B, C, còn $A \cap B \cap C$ là tập hợp chứa tất cả các phần tử thuộc vào cả ba tập hợp A, B, C.

Định nghĩa 1.2.10. *Hợp của n tập hợp $A_1, A_2, ..., A_n$ là tập hợp chứa tất cả các phần tử thuộc vào ít nhất một trong n tập hợp $A_1, A_2, ..., A_n$. Ta dùng* *ký hiệu*

$$A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_n = \bigcup_{i}^{n} A_i$$

để chỉ hợp của n tập hợp $A_1, A_2, ..., A_n$.

Như vậy: $\bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i = \{x | x \in A_1 \vee x \in A_2 \vee ... \vee x \in A_n\}$.

Định nghĩa 1.2.11. *Giao của n tập hợp $A_1, A_2, ..., A_n$ là tập hợp chứa tất cả các phần tử thuộc vào tất cả n tập hợp $A_1, A_2, ..., A_n$. Ta dùng ký hiệu*

$$A_1 \cap A_2 \cap ... \cap A_n = \bigcap_{i}^{n} A_i$$

để chỉ giao của n tập hợp $A_1, A_2, ..., A_n$.

Như vậy: $\bigcap\limits_{i=1}^{n} A_i = \{x | x \in A_1 \wedge x \in A_2 \wedge ... \wedge x \in A_n\}$.

1.2.7. Tích Đề các

Giả sử a và b là hai vật nào đó. Từ a và b ta có thể tạo nên vật thứ ba, ký hiệu là (a, b) và gọi là một cặp. Hai cặp (a, b) và (b, a) bằng nhau khi và chỉ khi $a = b$. Điều này cho thấy rằng thứ tự mà ta viết các vật a và b là quan trọng. Nếu a và b là hai phần tử của những tập hợp nào đó thì (a, b) được gọi là một cặp phần tử. Ví dụ $(3, 4)$ là một cặp số thực, $(3, 4) \neq (4, 3)$.

Định nghĩa 1.2.12. *Cho hai tập hợp A và B. Tích Đề các của A và B, ký hiệu là $A \times B$, là tập hợp gồm các cặp (a, b) trong đó $a \in A$ và $b \in B$.*

Như vậy $A \times B = \{(a, b) | a \in A \wedge b \in B \}$.
Nếu $A = B$ thì $A \times B$ được gọi là bình phương của tập A và ký hiệu là A^2.

Ví dụ 1.2.16.

1. *Cho $A = \{a, b, c\}, B = \{1, 2\}$ khi đó:*

$$A \times B = \{(a, 1), (b, 1), (c, 1), (a, 2), (b, 2), (c, 2)\},$$
$$B \times A = \{(1, a), (2, a), (1, b), (2, b), (1, c), (2, c)\}.$$

Rõ ràng $A \times B \neq B \times A$.

2. *Cho* $A = B = \mathbb{R}$ *là tập các số thực, khi đó* $\mathbb{R}^2 = \{(a,b)|a \in \mathbb{R} \wedge b \in \mathbb{R}\}$. *Tập này được mô tả trên mặt phẳng có một hệ trục tọa độ vuông góc, đó chính là các điểm của mặt phẳng này.*

Định lý 1.2.1. *Cho A, B là hai tập hợp bất kỳ. Khi đó ta có:*

1. $A \times \varnothing = \varnothing \times A$.
2. $A \times B = \varnothing$ *khi và chỉ khi* $A = \varnothing$ *hoặc* $B = \varnothing$.

Định lý 1.2.2. *Cho A, B, C là ba tập hợp bất kỳ, khi đó ta có:*

1. $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$.
2. $A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$.
3. $A \times (B \setminus C) = (A \times B) \setminus (A \times C)$.

Định nghĩa 1.2.13. *Cho* $a_1, a_2, ..., a_n$ *là những đối tượng, từ* $a_1, a_2, ..., a_n$ *ta có thể tạo nên được một đối tượng mới, ký hiệu là* $(a_1, a_2, ..., a_n)$ *và được gọi là một bộ. Hai bộ* $(a_1, a_2, ..., a_n)$ *và* $(a'_1, a'_2, ..., a'_n)$ *bằng nhau nếu* $a_1 = a'_1, a_2 = a'_2, ..., a_n = a'_n$.

Định nghĩa 1.2.14. *Cho* $A_1, A_2, ..., A_n$ *là những tập hợp. Tích đề các của các tập* $A_1, A_2, ..., A_n$, *ký hiệu là* $A_1 \times A_2 \times ... \times A_n$ *hay* $\prod_{i=1}^{n} A_i$, *là tập hợp các bộ* $(a_1, a_2, ..., a_n)$, *trong đó* $a_1 \in A_1, a_2 \in A_2, ..., a_n \in A_n$. *Như vậy:*
$\prod_{i=1}^{n} A_i = \{(a_1, a_2, ..., a_n)|a_1 \in A_1, a_2 \in A_2, ..., a_n \in A_n\}$.

Nếu $A_1 = A_2 = ... = A_n = A$ thì $\prod_{i=1}^{n} A_i$ được gọi là lũy thừa bậc n của A và được ký hiệu là A^n.

Ví dụ 1.2.17. $\mathbb{R}^3 = \{(a_1, a_2, a_3)|a_i \in \mathbb{R}, i = 1, 2, 3\}$ *là tập các bộ ba số thực, mỗi bộ ba này được xem như một điểm trong không gian ba chiều với một hệ trục tọa độ.*

Dưới đây, chúng ta sẽ trình bày một trong những cách biểu diễn các tập hợp trên máy tính nhằm thuận lợi cho việc tính những tổ hợp của các tập hợp. Giả sử tập vũ trụ U là một tập hữu hạn gồm n phần tử và n không quá lớn so với dung lượng của máy tính mà bạn đang dùng. Trước hết, hãy chỉ rõ sự sắp xếp tùy ý các phần tử của U, ví dụ, $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Sau đó, biểu diễn tập con A của U bằng một xâu bit có chiều dài n, trong đó bit thứ i ở xâu này bằng 1 nếu a_i thuộc A và bằng 0 nếu a_i không thuộc A. Nếu xâu bit có chiều dài lớn hơn 5, chúng ta thường tách xâu bit đó thành các khối, mỗi khối gồm 5 bit (trừ bit cuối cùng có thể ít hơn 5 bit) từ trái sang phải cho dễ đọc.

Ví dụ 1.2.18. *Cho tập vũ trụ $U = \{1, 2, 3, \ldots, 10\}$ và sắp xếp các phần tử của U theo thứ tự tăng dần, tức là $a_i = i$. Xác định các xâu bit biểu diễn tập $A = \{1, 3, 4, 6, 8, 9\}$ và tập $B = \{2, 4, 5, 6, 7, 9, 10\}$.*

Lời giải: Xâu bit biểu diễn tập A là 10110 10110 vì các phần tử của A ở các vị trí thứ một, ba, bốn, sáu, tám, chín. Tương tự, xâu bit biểu diễn tập B là 01011 11011.

Bằng cách dùng các xâu bit để biểu diễn một tập hợp, ta dễ dàng tìm được hợp, giao, hiệu hay phần bù của hai tập hợp.

Ví dụ 1.2.19. *Tìm xâu biểu diễn phần bù của tập hợp $A = \{1, 3, 4, 6, 8, 9\}$.*

Lời giải: Thông thường ta tìm phần bù của tập A rồi tìm xâu bit biểu diễn tập hợp đó. Ta cũng dễ dàng tìm được xâu bit biểu diễn phần bù của tập hợp $A = \{1, 3, 4, 6, 8, 9\}$ bằng cách từ xâu bit 10110 10110 biểu diễn cho tập hợp A, ta chỉ cần thay các bit 0 bằng bit 1 và thay các bit 1 bằng bit 0, ta sẽ nhận được xâu bit cho 01001 01001 biểu diễn cho tập phần bù của A.

Để nhận được các xâu bit cho các hợp và giao của hai tập hợp ta sẽ thực hiện các phép toán Boole trên các xâu bit biểu diễn hai tập hợp đó.

Ví dụ 1.2.20. *Cho hai tập hợp $A = \{1, 3, 4, 6, 8, 9\}$ và $B = \{2, 4, 5, 6, 7, 9, 10\}$. Hợp của A và B được biểu diễn bằng xâu bit:*

$$1011010110 \vee 0101111011 = 1111111111.$$

Giao của hai tập hợp trên được biểu diễn bằng xâu bit

$$1011010110 \wedge 0101111011 = 0001010010.$$

1.3. Logic vị từ

1.3.1. Khái niệm hàm mệnh đề

Đối tượng nghiên cứu của logic vị từ là các hàm mệnh đề. Đó là những câu có chứa biến.

Ví dụ 1.3.1. *$p(x)$ là câu: "$x + 2 = 0$" là hàm mệnh đề một biến với biến mệnh đề là x. Câu này không phải là mệnh đề nhưng khi gán cho x một giá trị cụ thể thì ta được một mệnh đề, chẳng hạn khi thay x bởi -2 thì ta được một mệnh đề đúng, khi thay x bởi 3 thì ta được mệnh đề sai.*

Tương tự, ta có các câu $p(x, y)$: "$x + y = 0$" hay $q(x, y)$: "$x \geq y$" là những hàm mệnh đề hai biến với biến mệnh đề là x và y.

Một cách tổng quát, nếu $p(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ là một câu chứa các biến $x_1, x_2, \ldots, x_n$ với $x_1 \in X_1, x_2 \in X_2, \ldots, x_n \in X_n$ mà khi ta thay các giá trị cụ thể của các biến ta được một mệnh đề thì được gọi là một hàm mệnh đề n biến với các biến mệnh đề là $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Khi đó X_1 được gọi là không gian biện luận của x_1, …, X_n là không gian biện luận của X_n.

Định nghĩa 1.3.1. *Cho hàm mệnh đề $p(x)$. Tập hợp M gồm tất cả các phần tử x đặc biệt sao cho $p(x)$ có nghĩa được gọi là không gian biện luận của biến x, hay còn gọi là tập xác định của hàm mệnh đề $p(x)$.*

Ví dụ 1.3.2. *Cho hàm mệnh đề $p(x)$:" $x + 2 = 5, x \in \mathbb{Z}$". Khi đó không gian biện luận của x là tập các số nguyên $\mathbb{Z}$.*

Ví dụ 1.3.3. *Với $p(x, y)$ là câu "x là bạn của y" với x và y là sinh viên của một lớp học.*

1.3.2. Miền đúng của hàm mệnh đề

Định nghĩa 1.3.2. *Cho $p(x)$ là một hàm mệnh đề xác định trên M, $x_0 \in M$. Khi đó $p(x_0)$ được gọi là giá trị của hàm mệnh đề $p(x)$ tại x_0. Trong trường hợp này, $p(x_0)$ là một mệnh đề.*

Ví dụ 1.3.4. *Cho $p(x)$ là câu "$x + 2 = 0$" xác định trên tập các số thực $\mathbb{R}$. Khi đó, ta có $p(-2)$ là câu "$-2 + 2 = 0$" là một mệnh đề đúng và $p(3)$ là câu "$3 + 2 = 0$" là một mệnh đề sai.*

Định nghĩa 1.3.3. *Cho $p(x)$ là một hàm mệnh đề xác định trên M. Tập hợp:*

$$E_{p(x)} = \{x_0 \in M|\ p(x_0) \text{ là mệnh đề đúng}\}$$

được gọi là miền đúng của hàm mệnh đề $p(x)$.

Ví dụ 1.3.5.

1. *Cho $p(x)$ là câu "$x+2=0$" xác định trên tập số thực $\mathbb{R}$, khi đó $E_{p(x)} = \{-2\}$.*

2. *Cho $q(x)$ là câu "$x^2 \geq 0$" xác định trên tập các số thực $\mathbb{R}$, khi đó $E_{q(x)} = \mathbb{R}$.*

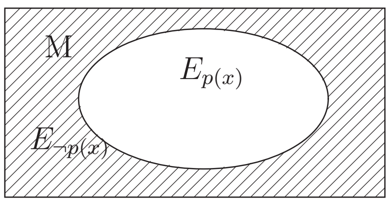
3. *Cho $r(x)$ là câu "$x^2+x+1=0$" xác định trên tập các số thực $\mathbb{R}$. Khi đó $E_{r(x)} = \varnothing$.*

1.3.3. Các phép toán trên hàm mệnh đề

Trong giáo trình này ta không đi sâu nghiên cứu các phép toán logic trên các hàm mệnh đề. Tuy nhiên, để độc giả tham khảo ta có thể xây dựng các phép toán logic trên các hàm mệnh đề dựa vào định nghĩa các phép toán logic trên các mệnh đề như sau.

1.3.3.1. Phép phủ định

Định nghĩa 1.3.4. *Cho $p(x)$ là hàm mệnh đề xác định trên M. Phủ định của $p(x)$, ký hiệu là $\neg p(x)$ hoặc $\overline{p(x)}$, đọc là "không $p(x)$", là một hàm mệnh đề xác định trên M có miền đúng là $E_{\neg p(x)} = M \setminus E_{p(x)}$.*



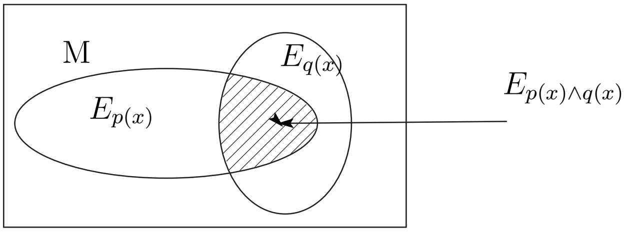
Hình 1.7: Miền đúng của hàm mệnh đề $\neg p(x)$.

Như vậy, $\neg p(x)$ là hàm mệnh đề xác định trên M có tính chất sau đây, với mỗi $x_0 \in M$ nếu $p(x_0)$ là đúng thì $\neg p(x_0)$ là sai và nếu $p(x_0)$ là sai thì $\neg p(x_0)$ là đúng.

1.3.3.2. Phép hội

Định nghĩa 1.3.5. *Cho $p(x)$ và $q(x)$ là hai hàm mệnh đề xác định trên M. Hội của $p(x)$ và $q(x)$, ký hiệu là $p(x) \wedge q(x)$, đọc là "$p(x)$ và $q(x)$" là hàm mệnh đề xác định trên M có miền đúng là:*

$$E_{p(x)\wedge q(x)} = E_{p(x)} \cap E_{q(x)}.$$



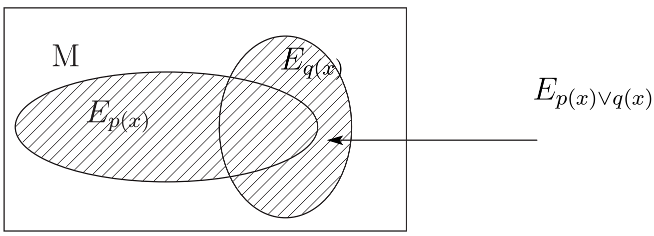
Hình 1.8: Miền đúng của hàm mệnh đề $p(x) \wedge q(x)$.

Như vậy, $p(x) \wedge q(x)$ là hàm mệnh đề xác định trên M có tính chất sau đây, với mỗi $x_0 \in M$ nếu $p(x_0)$ và $q(x_0)$ là đúng thì $p(x_0) \wedge q(x_0)$ là đúng và nếu $p(x_0)$ sai hoặc $q(x_0)$ sai thì $p(x_0) \wedge q(x_0)$ là sai.

1.3.3.3. Phép tuyển

Định nghĩa 1.3.6. *Cho $p(x)$ và $q(x)$ là hai hàm mệnh đề xác định trên M. Tuyển của $p(x)$ và $q(x)$, ký hiệu là $p(x) \vee q(x)$, đọc là "$p(x)$ hoặc $q(x)$", là hàm mệnh đề xác định trên M, có miền đúng là*

$$E_{p(x)\vee q(x)} = E_{p(x)} \cup E_{q(x)}$$



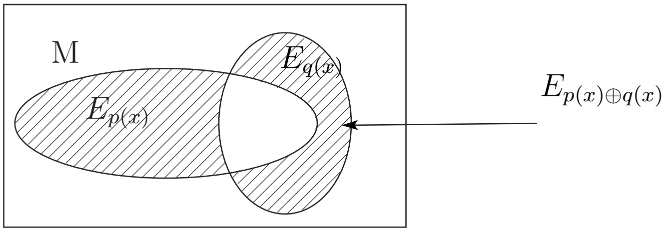
Hình 1.9: Miền đúng của hàm mệnh đề $p(x) \vee q(x)$.

Như vậy, $p(x) \vee q(x)$ là hàm mệnh đề xác định trên M có tính chất sau đây: với mỗi $x_0 \in M$ nếu $p(x_0)$ đúng hoặc $q(x_0)$ đúng thì $p(x_0) \vee q(x_0)$ là đúng và nếu cả $p(x_0)$ và $q(x_0)$ sai thì $p(x_0) \vee q(x_0)$ là sai.

1.3.3.4. Phép tuyển có loại

Định nghĩa 1.3.7. *Cho $p(x)$ và $q(x)$ là hai hàm mệnh đề xác định trên M. Tuyển có loại của $p(x)$ và $q(x)$, ký hiệu là $p(x) \oplus q(x)$, đọc là "hoặc $p(x)$ hoặc $q(x)$", là hàm mệnh đề xác định trên M, có miền đúng là:*

$$E_{p(x)\oplus q(x)} = [E_{p(x)} \cup E_{q(x)}] \setminus [E_{p(x)} \cap E_{q(x)}].$$



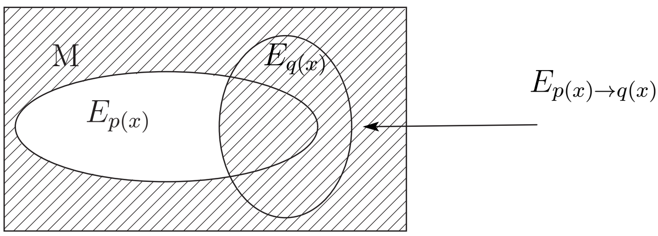
Hình 1.10: Miền đúng của hàm mệnh đề $p(x) \oplus q(x)$.

Như vậy, $p(x) \oplus q(x)$ là hàm mệnh đề xác định trên M có tính chất sau đây: với mỗi $x_0 \in M$ nếu $p(x_0)$ đúng và $q(x_0)$ sai hoặc $p(x_0)$ sai $q(x_0)$ đúng thì $p(x_0) \oplus q(x_0)$ là đúng và nếu cả $p(x_0)$ và $q(x_0)$ cùng đúng hoặc cùng sai thì $p(x_0) \oplus q(x_0)$ là sai.

1.3.3.5. Phép kéo theo

Định nghĩa 1.3.8. *Cho $p(x)$ và $q(x)$ là hai hàm mệnh đề xác định trên M. $p(x)$ kéo theo $q(x)$, ký hiệu là $p(x) \to q(x)$, đọc là "nếu $p(x)$ thì $q(x)$", là hàm mệnh đề xác định trên M, có miền đúng là:*

$$E_{p(x)\to q(x)} = [E_{p(x)} \cap E_{q(x)}] \cup [M \setminus E_{p(x)}] = M \setminus [E_{p(x)} \setminus (E_{p(x)} \cap E_{q(x)})].$$



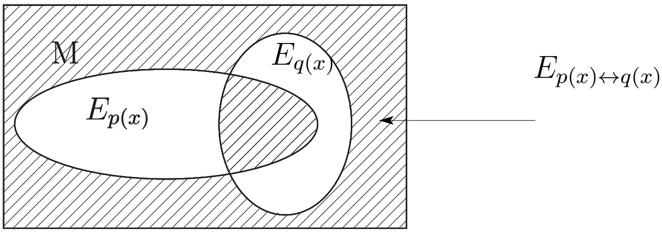
Hình 1.11: Miền đúng của hàm mệnh đề $p(x) \to q(x)$.

Như vậy, $p(x) \to q(x)$ là hàm mệnh đề xác định trên M có tính chất sau đây: với mỗi $x_0 \in M$ nếu $p(x_0)$ đúng và $q(x_0)$ đúng hoặc $p(x_0)$ sai $q(x_0)$ đúng hoặc $p(x_0)$ sai $q(x_0)$ sai thì $p(x_0) \to q(x_0)$ là đúng và nếu $p(x_0)$ đúng và $q(x_0)$ sai thì $p(x_0) \to q(x_0)$ là sai.

1.3.3.6. Phép tương đương

Định nghĩa 1.3.9. *Cho $p(x)$ và $q(x)$ là hai hàm mệnh đề cùng xác định trên M. $p(x)$ tương đương $q(x)$, ký hiệu là $p(x) \leftrightarrow q(x)$, đọc là "$p(x)$ tương đương $q(x)$", là hàm mệnh đề xác định trên M, có miền đúng là:*

$$E_{p(x)\leftrightarrow q(x)} = [E_{p(x)} \cap E_{q(x)}] \cup [M \setminus (E_{p(x)} \cup E_{q(x)}].$$



Hình 1.12: Miền đúng của hàm mệnh đề $p(x) \leftrightarrow q(x)$.

Như vậy, $p(x) \leftrightarrow q(x)$ là hàm mệnh đề xác định trên M có tính chất sau đây: với mỗi $x_0 \in M$ nếu $p(x_0)$ và $q(x_0)$ cùng đúng hoặc cùng sai thì $p(x_0) \leftrightarrow q(x_0)$ là đúng và nếu $p(x_0)$ đúng và $q(x_0)$ sai hoặc $p(x_0)$ sai và $q(x_0)$ đúng thì $p(x_0) \leftrightarrow q(x_0)$ là sai.

1.3.4. Lượng hóa

Cho hàm mệnh đề $p(x)$ xác định trên M. Ta biết rằng nếu gán cho x một giá trị cụ thể là $x_0 \in M$ thì ta được $p(x_0)$ là một mệnh đề. Ngoài ra, ta cũng có thể biến $p(x)$ thành mệnh đề bằng các phép lượng hóa sau đây:

Định nghĩa 1.3.10. *Lượng từ phổ dụng của $p(x)$, ký hiệu là $\forall x, p(x)$, đọc là "với mọi $x, p(x)$", là mệnh đề đúng nếu $E_{p(x)} = M$ và sai nếu $E_{p(x)} \neq M$.*

Như vậy, $\forall x, p(x)$ là một mệnh đề đúng khi và chỉ khi với bất kỳ $x_0 \in M$ ta luôn có $p(x_0)$ là mệnh đề đúng.

Ví dụ 1.3.6. *Xét các hàm mệnh đề $p(x)$: "$x + 2 = 0$", $q(x)$: "$x^2 \geq 0$" và $r(x)$: "$x^2 + x + 1 = 0$" đều xác định trên $\mathbb{R}$.*
Khi lượng hóa bằng các lượng từ phổ dụng, ta sẽ được:

- *$\forall x, p(x)$ là một mệnh đề sai, vì $E_{p(x)} = \{-2\} \neq \mathbb{R}$.*
- *$\forall x, q(x)$ là một mệnh đề đúng, vì $E_{p(x)} = \mathbb{R}$.*
- *$\forall x, r(x)$ là một mệnh đề sai, vì $E_{p(x)} = \varnothing \neq \mathbb{R}$.*

Định nghĩa 1.3.11. *Cho $p(x)$ là hàm mệnh đề xác định trên M. Lượng từ tồn tại của $p(x)$, ký hiệu là $\exists x, p(x)$, đọc là "tồn tại x, sao cho $p(x)$", là mệnh đề đúng nếu $E_{p(x)} \neq \varnothing$ và sai nếu $E_{p(x)} = \varnothing$.*

Như vậy, $\exists x, p(x)$ là mệnh đề đúng khi và chỉ khi có ít nhất một $x_0 \in M$ sao cho $p(x_0)$ là mệnh đề đúng.
Với các hàm mệnh đề $p(x), q(x), r(x)$ ở ví dụ 1.3.6 ta có:

- $\exists x, p(x)$ là mệnh đề đúng, vì $E_{p(x)} = \{-2\} \neq \varnothing$.
- $\exists x, q(x)$ là mệnh đề đúng, vì $E_{q(x)} = \mathbb{R} \neq \varnothing$.
- $\exists x, r(x)$ là mệnh đề sai, vì $E_{p(x)} = \varnothing$.

1.3.5. Dịch câu thông thường thành biểu thức logic

Ví dụ 1.3.7. *Biểu diễn câu "Mọi người đều có đúng một người bạn tốt nhất" thành một biểu thức logic.*

Lời giải: Giả sử $P(x, y)$ là câu "y là người bạn tốt nhất của x". Câu trên muốn nói rằng đối với mỗi cá nhân x có một cá nhân là y sao cho y là người bạn tốt nhất của x, và nếu có một cá nhân z sao cho z là bạn tốt nhất của x, thì do tính chất "có đúng một người" mà z phải trùng với y. Ta có thể dịch câu trên thành:

$$\forall x \exists y \forall z [P(x, y) \wedge (P(x, z) \to (z = y))]$$

Câu trên cũng có thể dịch thành:

$$\forall x \exists y \forall z [P(x, y) \wedge ((z \neq y) \to \neg P(x, z))]$$

với suy luận nếu z là một cá nhân khác với y thì z không phải là bạn tốt nhất của x.

1.3.6. Những ví dụ của Lewis Carroll

Lewis Carroll (bút danh của C.L. Dodgson), tác giả của cuốn truyện nổi tiếng thế giới "Alice ở xứ sở kỳ diệu", cũng là tác giả của một số công trình về logic ký hiệu. Các cuốn sách của ông chứa nhiều ví dụ về sự suy luận bằng cách dùng lượng từ. Các ví dụ dưới đây minh họa các lượng từ đã được dùng để diễn đạt các loại câu khác nhau như thế nào.

Ví dụ 1.3.8. *Xét các câu sau, hai câu đầu được gọi là tiền đề, còn câu sau được gọi là kết luận. Toàn bộ tập hợp ba câu này được gọi là một suy lý.*

a. "Tất cả sư tử đều hung dữ."

b. "Một số sư tử không uống cà phê."

c. "Một số sinh vật hung dữ không uống cà phê."

Về sau, chúng ta sẽ bàn tới vấn đề xác định kết luận trên có là hệ quả đúng của các tiền đề hay không. Gọi $P(x), Q(x)$ và $R(x)$ lần lượt là các câu "x là sư tử" "x hung dữ" và "x uống cà phê" với không gian là toàn bộ các sinh vật. Hãy diễn đạt các câu trong suy lý trên bằng cách dùng $P(x), Q(x), R(x)$ và các lượng từ.

Lời giải: Ta có thể lần lượt diễn đạt các câu đó như sau:

a. $\forall x(P(x) \to Q(x))$.

b. $\exists x(P(x) \wedge \neg R(x))$.

c. $\exists x(Q(x) \wedge \neg R(x))$.

Chú ý. Câu thứ hai không thể được viết là:

$$\exists x(P(x) \to \neg R(x))$$

vì

$$P(x) \to \neg R(x)$$

là đúng bất cứ khi nào x không phải là sư tử, do đó mệnh đề:

$$\exists x(P(x) \to \neg R(x))$$

là đúng chừng nào còn có ít nhất một sinh vật không phải là sư tử, thậm chí cả khi tất cả sư tử đều uống cà phê. Tương tự câu thứ ba cũng không thể được viết là:

$$\exists x(Q(x) \to \neg R(x)).$$

1.3.7. Các biến bị ràng buộc

Cho hàm mệnh đề nhiều biến $p(x, y, ...)$ ta nói rằng biến x bị ràng buộc nếu trong biểu thức của $p(x, y, ...)$, x được thay bởi x_0 trong không gian biện luận của x hoặc hàm mệnh đề $p(x, y, ...)$ được lượng hóa theo biến x. Các biến không bị ràng buộc được gọi là biến tự do. Một hàm mệnh đề chỉ trở thành mệnh đề khi tất cả các biến đều bị ràng buộc. Ví dụ sau đây minh họa cho sự khác nhau giữa biến bị ràng buộc và biến tự do.

Ví dụ 1.3.9. *Cho $p(x, y)$ là hàm mệnh đề "$x + y = 0$", không gian biện luận của x và y là tập các số thực $\mathbb{R}$. Khi đó với các câu $p(2, y)$, $\exists x, p(x, y)$, $\forall x p(x, y)$ ta có x là biến bị ràng buộc và y là biến tự do. Các câu này trở thành hàm mệnh đề với một biến y.*
Các câu $\exists y p(2, y)$, $p(2, 3)$, $\exists x \forall y p(x, y)$, $\forall y \exists x p(x, y)$ là những mệnh đề (cả x và y đều bị ràng buộc).

Có nhiều phát biểu toán học trong đó chứa nhiều lượng hóa của những hàm mệnh đề chứa nhiều biến. Điều cần phải lưu ý là trật tự của các lượng từ là rất quan trọng nếu tất cả các lượng từ không cùng là lượng từ phổ dụng hoặc không cùng là lượng từ tồn tại.

Ví dụ 1.3.10. *Cho $P(x, y)$ là câu "$x + y = 0$" với không gian của x, y là tập hợp các số thực. Xác định giá trị chân lý của các lượng hóa $\exists x \exists y P(x, y)$, $\exists x \forall y P(x, y)$, $\forall y \exists x P(x, y)$ và $\forall x \forall y P(x, y)$.*

Lời giải:

- Lượng hóa $\exists x \exists y P(x, y)$ là ký hiệu của mệnh đề "Tồn tại một số thực x sao cho có một số thực y để $P(x, y)$ là đúng". Vì có: $x = 0$ và $y = 0$ để cho "$x + y = 0$" nên mệnh đề $\exists x \exists y P(x, y)$ là đúng.

- Lượng hóa $\exists x \forall y P(x, y)$ là ký hiệu của câu "Tồn tại một số thực x sao cho với mọi số thực y $P(x, y)$ đúng". Vì với mọi số thực x luôn tồn tại số thực $y = -x + 2$ sao cho $P(x, y)$ sai nên mệnh đề $\exists x \forall y P(x, y)$ là sai.

- Lượng hóa $\forall y \exists x P(x, y)$ là ký hiệu của câu "Với mọi số thực y luôn tồn tại một số thực x sao cho $P(x, y)$ đúng". Mệnh đề này là đúng vì với mỗi số thực y luôn tồn tại số thực $x = -y$ sao cho $P(x, y)$ đúng.

- Lượng hóa $\forall x \forall y P(x, y)$ là ký hiệu của câu "Với mọi số thực x và với mọi số thực y ta luôn có $P(x, y)$ đúng". Mệnh đề này sai vì với số thực $x = 2$ có số thực $y = 2$ sao cho $P(x, y)$ sai.

Từ ví dụ trên, ta thấy thứ tự xuất hiện khác nhau của các lượng từ có thể dẫn đến các kết quả khác nhau. Các mệnh đề $\exists x \forall y P(x, y)$ và $\forall y \exists x P(x, y)$ là không tương đương logic. Mệnh đề $\exists x \forall y P(x, y)$ là đúng nếu và chỉ nếu có một x làm cho $P(x, y)$ đúng với mọi y. Vì vậy, để mệnh đề này đúng cần phải chọn được một giá trị đặc biệt của x để $P(x, y)$ là đúng bất kể chọn y bằng bao nhiêu. Nhưng mệnh đề $\forall y \exists x P(x, y)$ là đúng nếu và chỉ nếu với mọi giá trị của y có một giá trị của x sao cho $P(x, y)$ là đúng. Vì vậy, mệnh đề này là đúng, bất kể giá trị y được chọn như thế nào, cũng cần có một giá trị của x (có thể phụ thuộc vào y) để cho $P(x, y)$ là đúng.

Từ những nhận xét trên suy ra rằng: nếu $\exists x \forall y P(x, y)$ đúng thì $\forall y \exists x P(x, y)$ cũng đúng. Tuy nhiên, điều ngược lại chưa chắc đã đúng.
Khi làm việc với các lượng hóa có nhiều biến, sẽ rất hữu ích nếu chúng ta suy nghĩ cách đi qua các vòng kín theo từng nhóm nếu không gian của các biến gồm hữu hạn phần tử. Ví dụ để xem $\forall x \forall y P(x, y)$ có đúng không, ta đi một vòng hết các giá trị của x, rồi đối với mỗi x ta lại đi vòng hết các giá trị của y, từ đó đưa ra kết luận cho giá trị chân lý của mệnh đề.

Đối với vị ngữ hai biến, ta có các lượng hoá sau:

1. $\exists x \exists y P(x, y)$ đọc là tồn tại x, tồn tại y sao cho $P(x, y)$. Mệnh đề này đúng nếu có một x, có một y sao cho mệnh đề $P(x, y)$ là đúng và sai nếu như với mọi x, mọi y ta đều có $P(x, y)$ sai.

2. $\exists y \exists x P(x, y)$ đọc là tồn tại y, tồn tại x sao cho $P(x, y)$. Mệnh đề này đúng nếu có một y, có một x sao cho mệnh đề $P(x, y)$ là đúng và sai nếu như với mọi y, mọi x ta đều có $P(x, y)$ sai.

3. $\exists x \forall y P(x, y)$ đọc là tồn tại x sao cho với mọi y $P(x, y)$. Mệnh đề này đúng nếu như có một x mà mọi y đều thoả mãn mệnh đề $P(x, y)$ là đúng và sai khi không tồn tại x nào làm cho $P(x, y)$ đúng với mọi y.

4. $\exists y \forall x P(x, y)$ đọc là tồn tại y sao cho với mọi x $P(x, y)$. Mệnh đề này đúng nếu như có một y mà mọi x đều thoả mãn mệnh đề $P(x, y)$ là đúng và sai khi không tồn tại y nào làm cho $P(x, y)$ đúng với mọi x.

5. $\forall x \exists y P(x, y)$ đọc là với mọi x tồn tại y sao cho $P(x, y)$. Mệnh đề này đúng nếu với mỗi x đều có một y làm cho $P(x, y)$ đúng và sai nếu có một giá trị x làm cho $P(x, y)$ sai với mọi y.

6. $\forall y \exists x P(x, y)$ đọc là với mọi y tồn tại x sao cho $P(x, y)$. Mệnh đề này đúng nếu với mỗi y đều có một x làm cho $P(x, y)$ đúng và sai nếu có một giá trị y làm cho $P(x, y)$ sai với mọi x.

7. $\forall x \forall y P(x, y)$ đọc là với mọi x, với mọi y sao cho $P(x, y)$. Mệnh đề này đúng nếu $P(x, y)$ đúng với mọi x và mọi y thuộc không gian biện luận của mỗi biến và sai nếu tồn tại một x và một y làm cho $P(x, y)$ sai.

8. $\forall y \forall x P(x, y)$ đọc là với mọi y, với mọi x sao cho $P(x, y)$. Mệnh đề này đúng nếu $P(x, y)$ đúng với mọi y và mọi x thuộc không gian biện luận của mỗi biến và sai nếu tồn tại một y và một x làm cho $P(x, y)$ sai.

Hai lượng hoá 1 và 2 và hai lượng hoá 7 và 8 luôn nhận cùng một giá trị chân lý, nhưng hai lượng hoá 3 và 6 và hai lượng hoá 4 và 5 thường có giá trị chân lý khác nhau. Hơn nữa nếu lượng hoá 7 hoặc 8 đúng thì tất cả các lượng hoá trên đều đúng. Ta thấy rằng nếu trong một lượng hoá chỉ chứa một loại lượng từ thì ta không quan trọng thứ tự của các biến, nhưng nếu lượng hoá chứa cả hai loại lượng từ thì sự thay đổi vị trí của các lượng từ kèm theo các biến có thể làm thay đổi giá trị chân lý của lượng hoá.

Người ta cũng thường gặp các lượng hóa có nhiều hơn hai biến, như ví dụ dưới đây:

Ví dụ 1.3.11. *Cho $Q(x, y, z)$ là câu "$x + y = z$" với không gian của x, y, z đều là tập hợp các số thực. Xác định giá trị chân lý của lượng hóa $\forall x \forall y \exists z Q(x, y, z)$ và lượng hóa $\exists z \forall x \forall y Q(x, y, z)$*

Lời giải: Giả sử x, y đã được gán giá trị. Khi đó tồn tại một giá trị z sao cho $x + y = z$. Vì vậy lượng hóa $\forall x \forall y \exists z Q(x, y, z)$ là ký hiệu của câu "Đối với mọi số thực x và mọi số thực y, tồn tại một số thực z sao cho đẳng thức $x + y = z$ là đúng". Mệnh đề này có giá trị chân lý là đúng.

Còn mệnh đề $\exists z \forall x \forall y Q(x, y, z)$ là ký hiệu của câu "Có một số thực z sao cho với mọi số thực x và mọi số thực y ta đều có đẳng thức $x + y = z$ là đúng". Mệnh đề này nhận giá trị chân lý là sai vì ta không thể tìm được một số thực z nào thỏa mãn đẳng thức trên với mọi x và mọi y.

Ví dụ dưới đây minh họa các lượng từ có thể được dùng để diễn đạt các câu có nhiều biến và thường có nhiều cách để diễn đạt một câu nhiều biến bằng cách lượng hóa:

Ví dụ 1.3.12. *Dùng lượng từ để diễn đạt câu "Có một phụ nữ đã bay trên tất cả các tuyến bay trên thế giới".*

Lời giải: Cho $P(w, f)$ là câu "w đã bay chuyến bay f" và $Q(f, a)$ là câu "f là chuyến bay trên tuyến a".

- Ta có thể diễn đạt câu trong bài như sau:

$$\exists w \forall a \exists f (P(w, f) \wedge Q(f, a))$$

  Ở đây không gian của w, f, a là tất cả các phụ nữ, tất cả các chuyến bay và tất cả các tuyến bay trên thế giới.

- Câu trên cũng có thể được diễn đạt như sau:

$$\exists w \forall a \exists f R(w, f, a)$$

với $R(w, f, a)$ là câu: "w đã đi chuyến bay f trên tuyến bay a".

Mặc dù sự diễn đạt thứ hai có phần gọn gàng hơn, nhưng nó lại làm cho mối quan hệ giữa các biến thiếu rõ ràng nên người ta thường ưa dùng cách thứ nhất hơn.

1.3.8. Mối quan hệ giữa các lượng từ và phép phủ định

Chúng ta cũng thường muốn xem xét phủ định của một biểu thức có chứa lượng từ.

Ví dụ 1.3.13. *Tìm phủ định của câu "Tất cả sinh viên lớp này đều đã học môn Tiếng Việt".*

Lời giải: Câu này được biểu diễn thành lượng hóa là $\forall x, P(x)$ với $P(x)$ là câu "x đã học môn Tiếng Việt". Phủ định của câu này chính là câu "Có một sinh viên lớp này chưa học môn Tiếng Việt" mà biểu diễn lượng hóa của nó là $\exists x \neg P(x)$.

Ví dụ này minh họa cho tương đương logic $\neg \forall x P(x) \Leftrightarrow \exists x \neg P(x)$.

Ta có định lý sau:

Định lý 1.3.1. *Cho $p(x)$ là hàm mệnh đề xác định trên M. Khi đó, ta có*

1. $\neg(\forall x, p(x)) \Leftrightarrow \exists x, \neg p(x)$;
2. $\neg(\exists x, p(x)) \Leftrightarrow \forall x, \neg p(x)$.

Chứng minh. Đặt $E = E_{p(x)}$ là miền đúng của hàm mệnh đề $p(x)$.

1. Nếu $E = M$ thì $\forall x, p(x)$ là mệnh đề đúng và do đó $\neg(\forall x, p(x))$ là mệnh đề sai. Mặt khác, vì $E = M$ nên $E_{\neg p(x)} = M \setminus E = \varnothing$ nên $\exists x, \neg p(x)$ sai. Như vậy, trong trường hợp này, cả $\neg(\forall x, p(x))$ và $\exists x, \neg p(x)$ đều có giá trị chân lý là F.
   Nếu $E \neq M$ thì $\forall x, p(x)$ là mệnh đề sai và do đó $\neg(\forall x, p(x))$ là mệnh đề đúng. Mặt khác, vì $E \neq M$ nên $E_{\neg p(x)} = M \setminus E \neq \varnothing$ nên $\exists x, \neg p(x)$ là mệnh đề đúng. Như vậy trong trường hợp này, cả $\neg(\forall x, p(x))$ và $\exists x, \neg p(x)$ đều có giá trị chân lý là T.
   Vậy $\neg(\forall x, p(x)) \Leftrightarrow \exists x, \neg p(x)$.

2. Để chứng minh $\neg(\exists x, p(x)) \Leftrightarrow \forall x, \neg p(x)$ ta lập luận tương tự như trên và so sánh E với $\varnothing$.
   - Nếu $E = \varnothing$ thì cả hai mệnh đề đều có giá trị chân lý là T.
   - Nếu $E \neq \varnothing$ thì cả hai mệnh đề đều có giá trị chân lý là F.

$\square$

1.4. Hàm

1.4.1. Định nghĩa

Khái niệm hàm, hay còn gọi là ánh xạ là một trong những khái niệm được sử dụng rất nhiều trong toán học và tin học. Về phương diện nào đó, nó là sự mở rộng của khái niệm hàm số khi ta thay tập xác định và tập giá trị của hàm số bằng những tập bất kỳ mà có thể không phải là tập số thực.

Định nghĩa 1.4.1. *Cho hai tập X và Y. Một hàm f từ tập X đến Y, ký hiệu là $f : X \longrightarrow Y$ là một quy tắc đặt tương ứng mỗi $x \in X$ một phần tử duy nhất xác định $y \in Y$. Phần tử y tương ứng với x được gọi là ảnh của x qua hàm f và ký hiệu là $y = f(x)$. Tập X được gọi là tập xác định và tập Y được gọi là tập giá trị của hàm f.*

Trong trường hợp cần chỉ rõ quy tắc của hàm f thì ta viết:

$$\begin{aligned} f:\ X &\longrightarrow Y \\ x &\longmapsto f(x) \end{aligned}$$

Dòng thứ hai cho ta biết quy tắc cụ thể của hàm f.

Chú ý. Trong định nghĩa ta không loại trừ trường hợp các tập X và Y là những tập rỗng. Tuy nhiên sau này nếu không nói gì thêm thì khi có hàm $f : X \longrightarrow Y$ ta luôn quy ước rằng X và Y là hai tập khác rỗng.

Định nghĩa 1.4.2. *Cho hai hàm $f : X \longrightarrow Y$ và $g : X \longrightarrow Y$. Hai hàm f và g bằng nhau, ký hiệu là $f = g$, nếu với mọi $x \in X$ ta có $f(x) = g(x)$.*

1.4.2. Ví dụ

Ví dụ 1.4.1. *Cho $\mathbb{R}$ là tập các số thực, khi đó quy tắc f đặt tương ứng mỗi $x \in \mathbb{R}$ một số $f(x) = 2x + 1$ là một hàm từ $\mathbb{R}$ đến $\mathbb{R}$. Khi đó ta viết*

$$\begin{aligned} f:\ \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto f(x) = 2x + 1 \end{aligned}$$

Ví dụ 1.4.2. *Tương tự như trên ta có hàm*

$$\begin{aligned} g:\ \ & \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ & x \longmapsto g(x) = x^2 \end{aligned}$$

g là một hàm vì với mỗi số thực $x \in \mathbb{R}, g(x) = x^2$ cũng là số thực duy nhất xác định thuộc $\mathbb{R}$.

Ví dụ 1.4.3. *Với $\mathbb{Z}$ là tập các số nguyên, $\mathbb{N}$ là tập các số tự nhiên ta có quy tắc*

$$\begin{aligned} h:\ \ & \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{N} \\ & n \longmapsto h(n) = |n| \end{aligned}$$

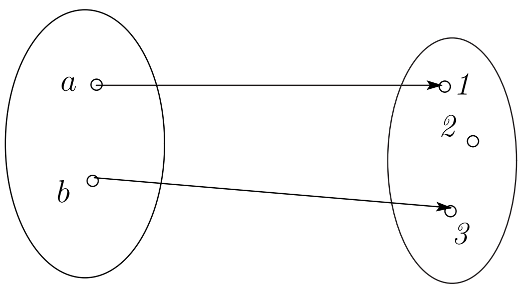
là một hàm.

Các quy tắc của hàm không nhất thiết phải là những biểu thức toán học như đã nêu, nó có thể là một sơ đồ hoặc cho tương ứng một người với một địa danh.

Ví dụ 1.4.4. *Quy tắc sau là một hàm:*

$$\begin{aligned} k:\ \ & \{a, b\} \longrightarrow \{1, 2, 3\} \\ & a \longmapsto k(a) = 1 \\ & b \longmapsto k(b) = 3 \end{aligned}$$

Hàm k cũng có thể được mô tả như sau:



Ví dụ 1.4.5. *Cho X là tập các sinh viên trong một lớp. Y là tập các địa danh (đơn vị là tỉnh, thành phố). Khi đó, quy tắc sau là một hàm:*

$$\begin{aligned} T:\ \ & X \longrightarrow Y \\ & x \longmapsto T(x) \text{ là tỉnh (thành phố) sinh viên } x \text{ được sinh ra.} \end{aligned}$$

Trong hình học ta cũng gặp rất nhiều phép biến hình là những hàm theo định nghĩa trên đây.

Ví dụ 1.4.6. *Cho tam giác đều ABC, gọi G là trọng tâm của tam giác, khi đó phép quay q tam giác ABC, tâm G, góc quay 120° thì q là một hàm biến mỗi điểm của tam giác ABC thành một điểm của tam giác ABC.*

1.4.3. Một số hàm quan trọng

1.4.3.1. Hàm đồng nhất

Cho X là một tập bất kỳ, khi đó ta có hàm xác định bởi quy tắc đặt tương ứng với mỗi x là chính nó. Hàm này được gọi là hàm đồng nhất của tập X và ký hiệu là 1_X. Như vậy

$$\begin{aligned} 1_X :\ & X \longrightarrow X \\ & x \longmapsto 1_X(x) = x \end{aligned}$$

1.4.3.2. Hàm sàn, hàm trần

Chúng ta sẽ làm quen hai hàm quan trọng trong toán học rời rạc, đó là *hàm sàn* và *hàm trần*. Cho x là một số thực. Hàm sàn làm tròn số x xuống số nguyên gần nhất nhỏ hơn hoặc bằng nó. Còn hàm trần làm tròn số x thành số nguyên gần nhất lớn hơn hoặc bằng nó. Các hàm này thường được dùng khi đếm số vật. Chúng đóng vai trò quan trọng trong phân tích số các bước được dùng bởi các thủ tục để giải một bài toán có quy mô đặc biệt nào đó.

Định nghĩa 1.4.3. *Hàm sàn gán cho số thực x số nguyên lớn nhất có giá trị nhỏ hơn hay bằng x. Giá trị của hàm sàn tại điểm x được ký hiệu là $\lfloor x \rfloor$. Hàm trần gán cho số x số nguyên nhỏ nhất có giá trị lớn hơn hay bằng x. Giá trị của hàm trần tại x được ký hiệu là $\lceil x \rceil$.*

Chú ý. Hàm sàn còn được gọi là hàm phần nguyên và được ký hiệu là $[x]$. Từ định nghĩa hàm sàn và hàm trần như trên ta luôn có:

$$\begin{aligned} \lceil x \rceil - 1 < x \le \lceil x \rceil \\ \lfloor x \rfloor \le x < \lfloor x \rfloor + 1. \end{aligned}$$

Sau đây ta xét một số phản ví dụ về hàm.

Ví dụ 1.4.7. *Quy tắc đặt tương ứng mỗi số thực $x \in \mathbb{R}$ với $\dfrac{1}{x}$ không phải là hàm vì khi $x = 0 \in \mathbb{R}$ thì $\dfrac{1}{x}$ không xác định. Tuy nhiên, quy tắc này lại là một hàm từ tập $\mathbb{R}^*$ các số thực khác 0 đến tập các số thực $\mathbb{R}$.*

Ví dụ 1.4.8. *Quy tắc đặt tương ứng mỗi số hữu tỷ* $\dfrac{a}{b} \in \mathbb{Q}$ *với* $a + b$ *không phải là hàm từ tập các số hữu tỷ* $\mathbb{Q}$ *đến tập các số nguyên* $\mathbb{Z}$, *vì ta có hai số* $\dfrac{1}{2}$ *và* $\dfrac{2}{4}$ *bằng nhau nhưng phần tử tương ứng lại khác nhau.*

1.4.4. Ảnh và tạo ảnh

Định nghĩa 1.4.4. *Cho* $f : X \longrightarrow Y$ *là một hàm,* A *là một tập con của* X. *Khi đó tập hợp* $f(A) = \{y \in Y |\ \exists a \in A, f(a) = y\}$ *được gọi là ảnh của tập* A *qua hàm* f.

Ta còn có thể viết:

$$f(A) = \{f(a) \in Y |\ a \in A\}$$

Như vậy, nếu $A \neq \varnothing$ thì hiển nhiên $f(A) \neq \varnothing$.

Ví dụ 1.4.9. *Cho hàm*

$$\begin{aligned} h :\ & \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{N} \\ & n \longmapsto h(n) = |n| \end{aligned}$$

$A = \{-4, -3, -2, 0, 1\}$, *tìm* $h(A)$.

Lời giải: Ta có $h(A) = \{4, 3, 2, 0, 1\}$.

Ví dụ 1.4.10. *Cho hàm*

$$\begin{aligned} g :\ & \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ & x \longmapsto g(x) = x^2 \end{aligned}$$

$A = [-1, 3]$. *Tìm g(A).*

Lời giải: Ta có $g(x)$ là một hàm liên tục, nghịch biến trong khoảng $(-\infty, 0)$ và đồng biến trong khoảng $(0, +\infty)$.
Đặt $A = [-1, 0] \cup [0, 3]$, $A_1 = [-1, 0]$, $A_2 = [0, 3]$. Ta có ngay:

$$\begin{aligned} g(A_1) &= \{x^2 | -1 \leq x \leq 0\} = [0, 1]; \\ g(A_2) &= \{x^2 | 0 \leq x \leq 3\} = [0, 9]. \end{aligned}$$

Từ đó suy ra: $g(A) = g(A_1) \cup g(A_2)$ nên $g(A) = [0, 1] \cup [0, 9] = [0, 9]$.

Định nghĩa 1.4.5. *Cho $f : X \longrightarrow Y$ là một hàm, $B \subseteq Y$. Khi đó, tập hợp $f^{-1}(B) = \{x \in X | f(x) \in B\}$ được gọi là tập tạo ảnh của B.*

Ví dụ 1.4.11. *Cho*

$$\begin{aligned} f:\ & \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{N} \\ & n \longmapsto f(n) = |n| \end{aligned}$$

$B = \{2, 4, 6, 8\}$. *Tìm* $f^{-1}(B)$

Lời giải: Ta có $f^{-1}(B) = \{n \in \mathbb{Z} | f(n) \in B\} = \{n \in \mathbb{Z} | |n| \in \{2, 4, 6, 8\}\}$. Giải các phương trình $|n| = 2, |n| = 4, |n| = 6, |n = 8|$ ta được tập tạo ảnh của B là: $f^{-1}(B) = \{-2, 2, -4, 4, -6, 6, -8, 8\}$.

Ví dụ 1.4.12. *Cho*

$$\begin{aligned} g:\ & \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ & x \longmapsto g(x) = x^2 \end{aligned}$$

$B = \{1, 2, 3, 4\}$. *Tìm* $g^{-1}(B)$.

Lời giải: Tương tự ví dụ trên ta có:

$$g^{-1}(B) = \{-1, 1, -\sqrt{2}, \sqrt{2}, -\sqrt{3}, \sqrt{3}, -2, 2\}.$$

Chú ý.

1. Có thể xảy ra trường hợp tập $B \neq \varnothing$ nhưng $f^{-1}(B) = \varnothing$. Ví dụ, xét hàm g trên đây, nếu $B = \{-2, -1\} \subseteq \mathbb{R}$ thì $f^{-1}(B) = \varnothing$.

2. Cho $f : X \longrightarrow Y$ là một hàm, ta luôn có $X \subseteq X$ do đó, $f(X) \subseteq Y$ và tập $f(X)$ được gọi là ảnh của hàm f.

1.4.5. Đơn ánh, toàn ánh và song ánh

Định nghĩa 1.4.6. *Hàm $f : X \longrightarrow Y$ được gọi là một đơn ánh nếu với mọi x_1, x_2 thuộc $X, f(x_1) = f(x_2)$ suy ra $x_1 = x_2$ hay với mọi x_1, x_2 thuộc $X, x_1 \neq x_2$ suy ra $f(x_1) \neq f(x_2)$.*

Ví dụ 1.4.13. *Hàm*

$$\begin{aligned} f:\ & \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ & x \longmapsto f(x) = 2x + 1 \end{aligned}$$

là một đơn ánh vì với x_1, x_2 thuộc $\mathbb{R}$ mà $f(x_1) = f(x_2)$ thì ta có: $2x_1 + 1 = 2x_2 + 1$ suy ra $x_1 = x_2$.

Ví dụ 1.4.14. *Hàm*

$$\begin{aligned} g:\ & \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ & x \longmapsto g(x) = x^2 \end{aligned}$$

không là đơn ánh vì ta có thể chỉ ra có hai phần tử khác nhau thuộc tập xác định $\mathbb{R}$ mà ảnh của chúng qua hàm g lại bằng nhau. Cụ thể là $1 \neq -1$ nhưng $g(1) = g(-1) = 1$.

Nhận xét. Để chứng minh một hàm $f : X \longrightarrow Y$ là đơn ánh, ta chứng minh $\forall x_1, \forall x_2, [(f(x_1) = f(x_2)) \to (x_1 = x_2)]$ đúng.

Để chứng minh một hàm $f : X \longrightarrow Y$ không là đơn ánh, ta chứng minh $\exists x_1, \exists x_2[(x_1 \neq x_2) \wedge f(x_1) = f(x_2)]$ đúng.

Định nghĩa 1.4.7. *Hàm $f : X \longrightarrow Y$ được gọi là toàn ánh nếu với mỗi $y \in Y$, tồn tại $x \in X$ sao cho $f(x) = y$.*

Ta biết rằng $f(X) \subseteq Y$ vì vậy, theo định nghĩa ta có ngay f là một toàn ánh khi và chỉ khi $f(X) = Y$.

Ví dụ 1.4.15. *Hàm*

$$\begin{aligned} f:\ & \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ & x \longmapsto f(x) = 2x + 1 \end{aligned}$$

là một toàn ánh vì, với mỗi $y \in \mathbb{R}$, ta có thể tìm được $x \in \mathbb{R}$ sao cho $f(x) = y$. Thật vậy, xét phương trình $f(x) = y$, hay $2x + 1 = y$ ta có $x = \dfrac{y-1}{2}$. Rõ ràng $f(x) = f(\dfrac{y-1}{2}) = 2(\dfrac{y-1}{2}) + 1 = y$.

Ví dụ 1.4.16. *Hàm*

$$\begin{aligned} g:\ & \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ & x \longmapsto g(x) = x^2 \end{aligned}$$

không là toàn ánh vì $-2 \in \mathbb{R}$ nhưng $\forall x \in \mathbb{R}$, $g(x) = x^2 \neq -2$.

Nhận xét. Để chứng minh một hàm $f : X \longrightarrow Y$ là một toàn ánh, ta cần chứng minh $\forall y \in Y, \exists x \in X, f(x) = y$ đúng.

Để chứng minh một hàm $f : X \longrightarrow Y$ không là toàn ánh ta chứng minh $\exists y \in Y, \forall x \in X, f(x) \neq y$ đúng.

Định nghĩa 1.4.8. *Hàm $f : X \longrightarrow Y$ được gọi là một song ánh nếu nó vừa là đơn ánh, vừa là toàn ánh.*

Như vậy $f : X \longrightarrow Y$ là song ánh nếu và chỉ nếu với mọi $y \in Y$, tồn tại duy nhất $x \in X$ sao cho $y = f(x)$.

Trong các ví dụ đã nêu, hàm

$$\begin{aligned} f: \ \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto f(x) = 2x + 1 \end{aligned}$$

là một song ánh.

Hàm đồng nhất

$$\begin{aligned} f: \ X &\longrightarrow X \\ x &\longmapsto 1_X(x) = x \end{aligned}$$

là một song ánh.

1.4.6. Phép cộng và phép nhân các hàm

Cũng giống như xây dựng phép cộng và phép nhân cho các hàm số, ta có thể xây dựng tổng và tích của hai hàm f và g như sau:

Định nghĩa 1.4.9. *Cho f và g là hai hàm từ A đến $\mathbb{R}$. Khi đó, tổng của f và g, ký hiệu là $f + g$, được định nghĩa bởi:*

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x),$$

và tích của f và g, ký hiệu là $f.g$, được định nghĩa bởi:

$$(f.g)(x) = f(x).g(x).$$

Định lý 1.4.1. *Tổng và tích của hai hàm được định nghĩa như trên cho ta các hàm từ A đến $\mathbb{R}$.*

Chứng minh. Do f và g là hai hàm từ A đến $\mathbb{R}$ nên với mỗi $x \in A$, $f(x)$ và $g(x)$ là hàm xác định duy nhất, từ đó tổng $f(x) + g(x)$ xác định duy nhất và tích $f(x).g(x)$ xác định duy nhất với mỗi $x \in A$, ta được $f + g$ và $f.g$ là những hàm từ A đến $\mathbb{R}$. □

Chú ý rằng, các hàm $f + g$ và $f.g$ đã được định nghĩa bằng cách chỉ ra các giá trị của chúng tại x thông qua các giá trị của f và g tại x.

Ví dụ 1.4.17. *Cho f và g là hai hàm từ $\mathbb{Z}$ đến $\mathbb{R}$ với $f(x) = x^2 + 4$ và $g(x) = x - 2$. Xác định các hàm $f + g$ và $f.g$*

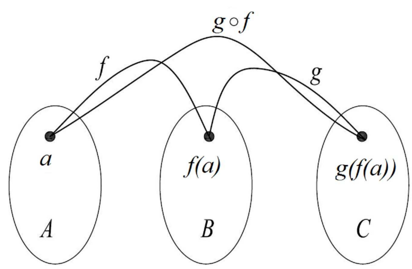
Lời giải: Ta có các hàm $f+g$ và $f.g$ đều từ $\mathbb{Z}$ đến $\mathbb{R}$ với
$(f+g)(x) = f(x) + g(x) = (x^2+4) + (x-2) = x^2 + x + 2$
và $(f.g)(x) = f(x).g(x) = (x^2+4)(x-2) = x^3 - 2x^2 + 4x - 8$.

1.4.7. Hợp thành của các hàm

Trong đại số sơ cấp ta có khái niệm hàm hợp, đó là quy tắc thực hiện liên tiếp hai quy tắc của các hàm số đã cho. Trong mục này, ta sẽ khái quát hóa khái niệm hàm hợp cho trường hợp tổng quát.

Định nghĩa 1.4.10. *Cho $f : A \longrightarrow B, g : B \longrightarrow C$. Hợp thành của hàm f và g, ký hiệu là $g \circ f$, là một hàm từ A đến C được xác định bởi quy tắc:*

$$\forall x \in A, (g \circ f)(x) = g(f(x)).$$



Hình 1.13: Hợp thành của hàm f và hàm g

Chú ý. Hợp thành của f và g chỉ được thực hiện khi tập giá trị của f trùng với tập xác định của g.

Ví dụ 1.4.18. *Giả sử*

$$\begin{aligned} f:\ & \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ & x \longmapsto f(x) = 2x+1 \\ g:\ & \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ & x \longmapsto f(x) = x^2 \end{aligned}$$

Khi đó ta có:

$$\begin{aligned} g \circ f : \mathbb{R} & \longrightarrow \mathbb{R} \\ x & \longmapsto (g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(2x+1) \\ & \qquad = (2x+1)^2 = 4x^2 + 4x + 1. \end{aligned}$$

Như vậy, $(g \circ f)(x) = 4x^2 + 4x + 1$ *với mọi* $x \in \mathbb{R}$.
Mặt khác ta có:

$$\begin{aligned} f \circ g :\ & \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ & x \longmapsto (f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(x^2) = 2x^2 + 1 \end{aligned}$$

Như vậy, $(f \circ g)(x) = 2x^2 + 1$ *với mọi* $x \in \mathbb{R}$.

Từ ví dụ trên ta thấy rằng phép hợp thành các hàm không có tính chất giao hoán. Tuy nhiên, ta có tính chất sau đây:

Định lý 1.4.2. *Cho* $f : A \longrightarrow B, g : B \longrightarrow C$ *và* $h : C \longrightarrow D$ *là ba hàm. Khi đó, ta có:*

$$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f.$$

Chứng minh. Rõ ràng $h \circ (g \circ f)$ và $(h \circ g) \circ f$ là những hàm từ A đến D.

Với mọi $a \in A$ ta có: $(h \circ (g \circ f))(a) = h(g \circ f(a)) = h(g(f(a))) = (h \circ g)(f(a)) = ((h \circ g) \circ f)(a)$.
Vậy, $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$. □

Định lý sau đây cho ta thấy tính đơn ánh, toàn ánh và song ánh được bảo toàn qua phép hợp thành.

Định lý 1.4.3. *Cho* $f : A \longrightarrow B, g : B \longrightarrow C$ *là hai hàm. Khi đó:*

a) Nếu f *và* g *là hai đơn ánh thì* $g \circ f$ *là một đơn ánh.*

b) Nếu f *và* g *là hai toàn ánh thì* $g \circ f$ *là một toàn ánh.*

c) Nếu f *và* g *là hai song ánh thì* $g \circ f$ *là một song ánh.*

Chứng minh.

a) Giả sử f và g là hai đơn ánh, $a_1, a_2 \in A$ sao cho $g \circ f(a_1) = g \circ f(a_2)$, như vậy $g(f(a_1)) = g(f(a_2))$. Vì g là đơn ánh nên $f(a_1) = f(a_2)$. Và vì f là đơn ánh nên $a_1 = a_2$. Vậy $g \circ f$ là một đơn ánh.

b) Giả sử f và g là hai toàn ánh. Với $c \in C$ là phần tử bất kỳ, vì g là toàn ánh nên tồn tại $b \in B$ sao cho $g(b) = c$. Vì f là toàn ánh nên tồn tại $a \in A$ sao cho $f(a) = b$. Từ đó ta có: $g \circ f(a) = g(f(a)) = g(b) = c$. Vậy $g \circ f$ là một toàn ánh.

c) Từ a) và b) suy ra nếu f và g là hai song ánh thì $g \circ f$ là một song ánh.

$\square$

1.4.8. Hàm ngược

Định nghĩa 1.4.11. *Cho $f : A \longrightarrow B$ là một song ánh. Theo định nghĩa với mỗi $b \in B$, tồn tại duy nhất $a \in A$ sao cho $f(a) = b$. Như vậy, ta có một hàm $g : B \longrightarrow A$ được cho bởi quy tắc với mọi $b \in B$, $g(b) = a$, với $f(a) = b$. Hàm g được gọi là hàm ngược của f và ký hiệu là f^{-1}.*

Như vậy:

$$\begin{aligned} f^{-1}:\ & B \longrightarrow A \\ & b \longmapsto f^{-1}(b) = a \text{ với } f(a) = b \end{aligned}$$

Ví dụ 1.4.19. *Hàm*

$$\begin{aligned} f:\ & \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ & x \longmapsto f(x) = 2x + 1 \end{aligned}$$

là một song ánh.
Giả sử $y \in \mathbb{R}$, theo định nghĩa $f^{-1}(y) = x$ sao cho $f(x) = y$, từ đó ta có phương trình $2x+1 = y$. Giải phương trình này ta tìm được $x = \dfrac{y-1}{2}$. Vậy:

$$\begin{aligned} f^{-1}:\ & \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ & y \longmapsto f^{-1}(y) = x = \frac{y-1}{2} \end{aligned}$$

là hàm ngược của f.

Chú ý. Ta chỉ xét hàm ngược của $f : A \longrightarrow B$ khi hàm f là song ánh và khi đó f^{-1} cũng là một song ánh. Đồng thời ta có:

$$\begin{aligned} f^{-1} \circ f &= 1_A \\ f \circ f^{-1} &= 1_B. \end{aligned}$$

Cũng vì lí do đó mà ta còn nói hàm f khả nghịch. Mặt khác ta cũng chứng minh được rằng nếu $f : A \longrightarrow B$ là một hàm khả nghịch, tức là tồn tại hàm $g : B \longrightarrow A$ sao cho $g \circ f = 1_A, f \circ g = 1_B$ thì f là một song ánh.

1.4.9. Đồ thị của hàm

Định nghĩa 1.4.12. *Cho* $f : A \longrightarrow B$. *Tập* $G(f) = \{(a, b) \in A \times B | a \in A, b \in B, b = f(a)\}$ *được gọi là đồ thị của hàm* f.

Ví dụ 1.4.20. $A = \{1, 2, 3\}, B = \{a, b\}$.

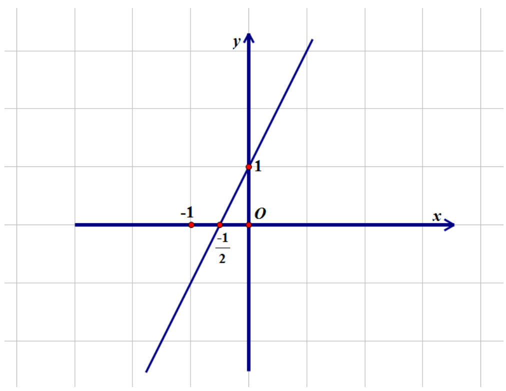
$$\begin{aligned} f: \quad A &\longrightarrow B \\ 1 &\longmapsto a \\ 2 &\longmapsto b \\ 3 &\longmapsto b \end{aligned}$$

Khi đó, đồ thị của hàm f *là* $G(f) = \{(1, a), (2, b), (3, b)\}$.

Ví dụ 1.4.21. *Nếu hàm* f *được cho bởi một tương quan hàm số thì đồ thị của* f *được biểu diễn bằng một hình ảnh hình học. Đó chính là đồ thị của hàm số mỗi khi ta vẽ trong mặt phẳng tọa độ trong quá trình khảo sát và vẽ đồ thị của hàm số. Chẳng hạn, hàm:*

$$\begin{aligned} f: \quad \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto f(x) = 2x + 1 \end{aligned}$$

có đồ thị là $G(f) = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} | y = 2x + 1\}$, *và trong mặt phẳng tọa độ, đó là một đường thẳng qua hai điểm* $(0, 1)$ *và* $(-\dfrac{1}{2}, 0)$.



Hình 1.14: Đồ thị của hàm f: $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto f(x) = 2x + 1$.

1.5. Dãy và phép tính tổng

1.5.1. Dãy

Định nghĩa 1.5.1. *Một dãy là một hàm từ một tập con I của tập các số nguyên (thường là tập $\{0, 1, 2, \ldots\}$ hay tập $\{1, 2, 3, \ldots\}$) đến một tập S. Ảnh của số nguyên n thường được ký hiệu là a_n và được gọi là số hạng của dãy. Ta dùng ký hiệu $\{a_n\}_{n\in I}$ để mô tả một dãy.*

Chú ý rằng, ký hiệu $\{a_n\}$ của dãy dễ lẫn với ký hiệu của một tập hợp. Tuy nhiên, tùy thuộc vào bối cảnh sử dụng các ký hiệu đó mà ta dễ dàng phân biệt được khi nào nó dùng để biểu diễn một dãy, khi nào nó được dùng để biểu diễn một tập hợp.

Ví dụ 1.5.1. *Xét dãy $\{a_n\}$ trong đó $a_n = 2^n$ với $n = 0, 1, 2, 3, \ldots,$*

Bảng liệt kê các số hạng của dãy này bắt đầu từ a_0 nên dãy này là $1, 2, 4, \ldots$

Các dãy có dạng: $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$ thường được dùng trong tin học. Các dãy hữu hạn này cũng được gọi là các xâu và được ký hiệu là $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$. Chiều dài của xâu là số các số hạng trong xâu đó. Xâu rỗng là xâu không có số hạng nào và có chiều dài bằng 0.

1.5.2. Phép tính tổng

Cho dãy $\{a_n\}$. Ta dùng ký hiệu $\displaystyle\sum_{i=m}^{n} a_i$ để biểu diễn tổng $a_m + a_{m+1} + \ldots + a_n$, trong đó i được gọi là chỉ số lấy tổng. Việc chọn chữ $i, j, k, \ldots,$ là hoàn toàn tùy ý. Chỉ số lấy tổng chạy qua tất cả các số hạng bắt đầu từ giới hạn dưới m và kết thúc ở giới hạn trên n.

Ví dụ 1.5.2. *Biểu diễn tổng của 20 số hạng đầu tiên của dãy $\{a_n\}$ với $a_n = n^2$ và $n = 1, 2, 3, \ldots.$*

Lời giải: Chỉ số dưới của tổng là 1 và chỉ số trên của tổng là 20, nên tổng được viết là:

$$\sum_{n=1}^{20} n^2.$$

Ví dụ 1.5.3. *Xác định giá trị của* $\displaystyle\sum_{i=3}^{7} i^2.$

Lời giải: Ta có $\sum_{i=3}^{7} i^2 = 3^2 + 4^2 + 5^2 + 6^2 + 7^2 = 135.$

Cấp số nhân là một dãy số thực có dạng: a, ar, ar^2, $ar^3, \ldots, ar^k \ldots$, trong đó a là số hạng đầu, r được gọi là công bội. Chúng ta sẽ tìm cách tính tổng của $n+1$ số hạng đầu của một cấp số nhân.

Đặt $S = \sum_{i=0}^{n} ar^i$. Để tính S, nhân cả hai vế của đẳng thức trên với r, ta được:

$$rS = r\sum_{i=0}^{n} ar^i = \sum_{i=0}^{n} ar^{i+1} = \sum_{k=1}^{n+1} ar^k = S + (ar^{n+1} - a).$$

Từ các đẳng thức trên với $r \neq 1$ ta được:

$$S = \frac{ar^{n+1} - a}{r-1}.$$

Với $r = 1$ tổng này bằng $(n+1)a$.

Tổng kép cũng thường gặp trong nhiều bài toán. Để tính tổng này, trước hết hãy khai triển tổng trong rồi mới khai triển đến tổng ngoài.

Ví dụ 1.5.4.

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{4}\sum_{j=2}^{5} ij &= \sum_{i=1}^{4}(2i + 3i + 4i + 5i) = \sum_{i=1}^{4} 14i\\ &= 14 + 28 + 42 + 56 = 140.\end{aligned}$$

Chúng ta cũng có thể dùng ký hiệu lấy tổng để cộng tất cả các giá trị của một hàm hoặc các số hạng của một tập chỉ số, lưu ý rằng tập chỉ số chạy qua tất cả các giá trị trong tập. Ví dụ, ta viết:

$$\sum_{s \in S} f(s)$$

để biểu diễn tổng các giá trị $f(s)$ đối với mọi phần tử s thuộc S.

Ví dụ 1.5.5. *Xác định giá trị của* $\sum_{s \in \{2,4,6,8,10\}} 2s.$

Lời giải: Vì $\sum\limits_{s\in\{2,4,6,8,10\}} 2s$ biểu diễn tổng các giá trị $2s$ đối với mọi phần tử s thuộc tập $\{2, 4, 6, 8, 10\}$ nên:

$$\sum_{s\in\{2,4,6,8,10\}} 2s = 4 + 8 + 12 + 16 + 20 = 60.$$

1.6. Bài tập chương 1

Bài 1.1. Trong các câu dưới đây câu nào là mệnh đề?

a. Phnompênh là thủ đô của nước Lào.

b. Mùa xuân có hoa đào nở.

c. $x + 4 = 8$.

d. Hãy trả lời câu hỏi này.

e. $x + y = y + x$ với mọi cặp số thực x, y.

f. Có một số thực x sao cho $x^2 + 4x + 4 = 1$.

g. Bây giờ là mấy giờ?

Bài 1.2. Tìm phủ định các mệnh đề sau:

a. Hôm nay là Chủ nhật.

b. $1 + 2 = 3$

c. Lào và Campuchia không có bờ biển.

d. Mùa hè ở Đà Lạt có nắng nhưng không nóng.

Bài 1.3. Cho hai mệnh đề:
p : Tôi đã mua vé xổ số tuần này.
q : Tôi đã trúng giải đặc biệt 2 tỷ đồng vào hôm thứ bảy.
Diễn đạt các mệnh đề sau bằng các câu thông thường:

a. $\neg p$

b. $p \vee q$

c. $p \to q$

d. $p \wedge q$

e. $p \leftrightarrow q$

f. $\neg p \to \neg q$

g. $\neg p \wedge \neg q$

h. $\neg(p \wedge q)$

Bài 1.4. Cho hai mệnh đề.

p : Nhiệt độ dưới không.

q : Tuyết rơi.

Dùng p và q và các liên từ logic viết các mệnh đề sau:

a. Nhiệt độ dưới 0°C và tuyết rơi.

b. Nhiệt độ dưới 0°C nhưng không có tuyết rơi.

c. Nhiệt độ không dưới 0°C và không có tuyết rơi.

d. Có tuyết rơi hoặc nhiệt độ dưới 0°C.

e. Nếu nhiệt độ dưới 0°C thì không có tuyết rơi.

f. Hoặc nhiệt độ dưới 0°C hoặc có tuyết rơi.

g. Nhiệt độ dưới 0°C là điều kiện cần và đủ để có tuyết rơi.

Bài 1.5. Cho hai mệnh đề

p : Bạn lái xe với tốc độ trên 80 km/h.

q : Bạn bị phạt vì vượt quá tốc độ cho phép.

Hãy viết các mệnh đề sau bằng cách dùng p, q và các liên từ logic.

a. Bạn không lái xe với tốc độ trên 80 km/h.

b. Bạn lái xe với tốc độ trên 80 km/h nhưng bạn không bị phạt vì vượt quá tốc độ cho phép.

c. Bạn bị phạt vì vượt quá tốc độ cho phép nếu bạn lái xe với tốc độ trên 80 km/h.

d. Nếu bạn không lái xe với tốc độ trên 80 km/h thì bạn sẽ không bị phạt vì vượt quá tốc độ cho phép.

e. Bạn lái xe với tốc độ trên 80 km/h là đủ để bạn bị phạt vì vượt quá tốc độ cho phép.

f. Bạn bị phạt vì vượt quá tốc độ cho phép nhưng bạn không lái xe với tốc độ trên 80 km/h.

g. Mỗi lần bạn bị phạt vì vượt quá tốc độ cho phép là bạn đã lái xe với tốc độ trên 80 km/h.

Bài 1.6. Cho ba mệnh đề

p : Bạn nhận được điểm giỏi trong kỳ thi cuối khóa.
q : Bạn làm hết bài tập trong quyển sách này.
r : Bạn được công nhận là giỏi ở lớp này.

Hãy viết các mệnh đề sau bằng cách dùng p, q, r và các liên từ logic.

a. Bạn được công nhận là giỏi ở lớp này nhưng bạn không làm hết các bài tập trong quyển sách này.

b. Bạn nhận được điểm giỏi trong kỳ thi cuối khóa, bạn làm hết bài tập trong quyển sách này và bạn được công nhận là giỏi ở lớp này.

c. Để được công nhận là giỏi ở lớp này bạn cần phải được điểm giỏi ở kỳ thi cuối khóa.

d. Bạn nhận được điểm giỏi trong kỳ thi cuối khóa nhưng bạn không làm hết bài tập trong quyển sách này, tuy nhiên bạn vẫn được công nhận là giỏi ở lớp này.

e. Nhận được điểm giỏi trong kỳ thi cuối khóa và làm hết bài tập trong quyển sách này là đủ để bạn được công nhận là giỏi ở lớp này.

f. Bạn sẽ được công nhận là giỏi ở lớp này nếu và chỉ nếu bạn làm hết bài tập trong quyển sách này hoặc bạn nhận được điểm giỏi trong kỳ thi cuối khóa.

Bài 1.7. Đối với các câu sau đây, hãy cho biết câu nào liên từ "hoặc" mang nghĩa bao hàm (tức là tuyển)? Câu nào liên từ "hoặc" mang nghĩa loại trừ (tuyển loại)?

a. Để theo học môn toán rời rạc, bạn cần phải đã học giải tích hoặc một khóa tin học.

b. Khi bạn mua một chiếc xe mới của hãng Ford bạn sẽ được bớt 2000 USD tiền mặt hoặc được tặng 20000 lít xăng.

c. Bữa ăn tối gồm hai món ở cột A hoặc ba món ở cột B.

d. Trường sẽ đóng cửa nếu bão cấp 12 hoặc lạnh dưới -10^0C.

e. Nếu trúng thưởng bạn sẽ được tặng một chuyến du lịch Thái Lan hoặc được tặng 300 USD.

f. Để được học đại học bạn phải thi đỗ đại học hoặc là học sinh giỏi quốc gia.

Bài 1.8. Một nhà thám hiểm bị một nhóm người ăn thịt bắt cóc. Có hai loại người ăn thịt người: loại luôn luôn nói thật và loại luôn luôn nói dối. Họ sẽ nướng sống nhà thám hiểm nếu ông không xác định được người nào trong họ là luôn luôn nói dối hay luôn luôn nói thật. Ông được phép hỏi người đó chỉ một câu hỏi.

a. Hãy giải thích tại sao câu hỏi "Anh là người nói dối phải không?" không mang lại kết quả?

b. Tìm câu hỏi mà nhà thám hiểm đã dùng để xác định người ăn thịt người đó là luôn luôn nói thật hay nói dối.

Bài 1.9. Hãy viết những câu sau đây dưới dạng "nếu p thì q".

a. Có tuyết rơi mỗi khi có gió Đông Bắc.

b. Các cây táo sẽ nở hoa nếu trời ấm kéo dài một tuần.

c. Đội tuyển bóng đá Việt Nam giành chức vô địch có nghĩa là họ đã đánh bại đội tuyển bóng đá Thái Lan.

d. Cần phải đi 8 km nữa mới tới được sông Hàn.

e. Để được phong giáo sư, nổi tiếng thế giới là đủ.

f. Nếu bạn cho xe chạy hơn 500 km, bạn cần phải mua xăng.

g. Giấy bảo hành của bạn còn hiệu lực nếu bạn đã mua chiếc đầu DVD của bạn ít hơn 90 ngày trước đây.

Bài 1.10. Viết các mệnh đề sau đây dưới dạng "p nếu và chỉ nếu q" trong ngôn ngữ thông thường.

a. Để được công nhận là một công dân tốt điều kiện cần và đủ là bạn luôn sống và làm việc theo pháp luật.

b. Nếu bạn đọc báo mỗi ngày, bạn sẽ thạo tin tức và ngược lại.

c. Tam giác ABC là tam giác đều nếu tam giác ABC có ba góc bằng nhau và tam giác ABC có ba góc bằng nhau nếu nó là tam giác đều.

d. Bạn sẽ trúng xổ số nếu bạn mua hết tất cả các vé số và ngược lại.

Bài 1.11. Phát biểu mệnh đề đảo, phản và phản đảo của mỗi mệnh đề kéo theo sau:

a. Nếu hôm nay tuyết rơi, ngày mai tôi sẽ đi trượt tuyết.

b. Tôi tới lớp học nhóm mỗi khi sắp có kỳ thi.

c. Tôi đi ra bãi tắm bất cứ ngày nào trời nắng.

d. Một số nguyên dương là số nguyên tố nếu chỉ có hai ước dương là 1 và chính nó.

Bài 1.12. Lập bảng chân lý đối với các mệnh đề phức hợp sau:

a. $p \wedge \neg p$

b. $p \vee \neg p$

c. $(p \vee \neg q) \rightarrow q$

d. $(p \vee q) \rightarrow (p \wedge q)$

e. $(p \rightarrow q) \leftrightarrow (\neg q \rightarrow \neg p)$

f. $(p \rightarrow q) \rightarrow (q \rightarrow p)$

g. $p \oplus \neg q$

h. $(p \oplus q) \wedge (p \oplus \neg q)$

Bài 1.13. Lập bảng chân lý đối với các mệnh đề phức hợp sau:

a. $(p \rightarrow q) \vee (\neg p \rightarrow q)$

b. $(p \rightarrow q) \wedge (\neg p \rightarrow q)$

c. $(p \leftrightarrow q) \vee (\neg p \leftrightarrow q)$

d. $(\neg p \leftrightarrow \neg q) \leftrightarrow (p \leftrightarrow q)$

e. $(p \oplus q) \vee (p \oplus \neg q)$

f. $(p \oplus q) \wedge (p \oplus \neg p)$

g. $(p \vee q) \vee r$

h. $(p \vee q) \wedge r$

Bài 1.14. Lập bảng chân lý đối với các mệnh đề phức hợp sau:

a. $p \rightarrow (\neg q \vee r)$

b. $\neg p \rightarrow (q \rightarrow r)$

c. $(p \rightarrow q) \vee (\neg p \rightarrow r)$

d. $(p \leftrightarrow q) \oplus (\neg p \vee r)$

e. $(\neg p \rightarrow q) \vee (r \rightarrow q)$

f. $\neg(p \wedge q) \wedge (r \oplus p)$

g. $(r \oplus q) \leftrightarrow (p \vee r)$

h. $(p \wedge q) \rightarrow \neg(r \wedge p)$

Bài 1.15. Tìm các OR bit, AND bit và XOR bit của mỗi cặp xâu bit sau:

a. 10001 11010; 10011 01011

b. 11011 10001; 11011 10001

c. 11101 10011; 00101 11111

d. 10111 10000; 10111 11000

e. 11011 11010; 11001 11000

Bài 1.16. Dùng bảng chân lý để chứng minh các tương đương logic sau:

a. $p \wedge T \Leftrightarrow p$

b. $p \vee F \Leftrightarrow p$

c. $p \wedge F \Leftrightarrow F$

d. $p \vee T \Leftrightarrow T$

e. $p \wedge p \Leftrightarrow p$

f. $p \vee p \Leftrightarrow p$

Bài 1.17. Chứng minh rằng $\neg(\neg p)$ và p là tương đương logic.

Bài 1.18. Dùng bảng chân lý để chứng minh các luật giao hoán, kết hợp, phân phối và De Morgan sau:

a. $p \vee q \Leftrightarrow q \vee p$

b. $p \wedge q \Leftrightarrow q \wedge p$

c. $(p \vee q) \vee r \Leftrightarrow p \vee (q \vee r)$

d. $(p \wedge q) \wedge r \Leftrightarrow p \wedge (q \wedge r)$

e. $p \wedge (q \vee r) \Leftrightarrow (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$

f. $p \vee (q \wedge r) \Leftrightarrow (p \vee q) \wedge (p \vee r)$

g. $\neg(p \vee q) \Leftrightarrow \neg p \wedge \neg q$

h. $\neg(p \wedge q) \Leftrightarrow \neg p \vee \neg q$

Bài 1.19. Chứng minh các mệnh đề kéo theo sau là hằng đúng:

a. $(p \wedge q) \to q$

b. $p \to (p \vee q)$

c. $\neg p \to (p \to q)$

d. $(p \wedge q) \to (p \to q)$

e. $\neg(p \to q) \to p$

f. $\neg(p \to q) \to \neg q$

Bài 1.20. Chứng minh các mệnh đề kéo theo sau là hằng đúng:

a. $[\neg p \wedge (p \vee q)] \to q$

b. $[(p \to q) \wedge (q \to r)] \to (p \to r)$

c. $[p \wedge (p \to q)] \to q$

d. $[(p \vee q) \wedge (p \to r) \wedge (q \to r)] \to r$

Bài 1.21. Chứng minh các tương đương logic (được gọi là luật hấp thụ) sau:

a. $[p \vee (p \wedge q)] \Leftrightarrow p$

b. $[p \wedge (p \vee q)] \Leftrightarrow p$

Bài 1.22. Xác định xem mỗi mệnh đề sau đây có phải là hằng đúng không:

a. $[\neg p \wedge (p \to q)] \to \neg q$

b. $[\neg q \wedge (p \vee q)] \to \neg p$

c. $[(p \leftrightarrow q)] \leftrightarrow [(p \wedge q) \vee (\neg p \wedge \neg q)]$

d. $[(p \to q) \to r] \leftrightarrow [p \to (q \to r)]$

Bài 1.23. Chứng minh mỗi cặp mệnh đề sau là tương đương:

a.	$p \to q$	và	$\neg q \to \neg p$.
b.	$\neg p \leftrightarrow q$	và	$p \leftrightarrow \neg q$.
c.	$\neg(p \oplus q)$	và	$p \leftrightarrow q$.
d.	$\neg(p \leftrightarrow q)$	và	$\neg p \leftrightarrow q$.

Bài 1.24. Lập mệnh đề phức hợp gồm các mệnh đề p, q và r sao cho nó đúng chỉ khi p và r đúng, q sai hoặc p sai còn q và r đúng.

Bài 1.25. Lập mệnh đề phức hợp gồm các mệnh đề p, q và r sao cho nó sai chỉ khi p sai, r đúng, q sai hoặc p đúng, q và r sai hoặc cả p, q và r đều đúng.

Bài 1.26. Liệt kê các phần tử của các tập hợp sau:

a. $\{x \mid x$ là số thực sao cho $x^2 = 1\}$

b. $\{x \mid x$ là số nguyên dương nhỏ hơn $10\}$

c. $\{x \mid x$ là bình phương của một số nguyên và $x < 100\}$

d. $\{x \mid x$ là số nguyên sao cho $x^2 = 2\}$

Bài 1.27. Dùng cách chỉ rõ các thuộc tính, mô tả các tập hợp sau:

a. $\{0,\ 3,\ 6,\ 9,\ 12\}$

b. $\{-3,\ -2,\ -1,\ 0,\ 1,\ 2,\ 3\}$

c. $\{1,\ 4,\ 9,\ 16,\ 25\}$

d. $\{2,\ 3,\ 5,\ 7,\ 11,\ 13,\ 17,\ 19\}$.

Bài 1.28. Xác định xem các tập sau đây có bằng nhau không?

a. $\{1,\ 3,\ 3,\ 5,\ 5,\ 5\}$ và $\{5,\ 3,\ 1\}$,

b. $\{\{1\}\}$ và $\{1\}$,

c. $\{\varnothing\}$ và $\varnothing$,

d. $\{1,\ 2\}$ và $\{1,\ \{2\}\}$.

Bài 1.29. Xác định xem mỗi mệnh đề sau đúng hay sai?

a. $x \in \{x\}$,

b. $\{x\} \subseteq \{x\}$,

c. $\{x\} \in \{x\}$,

d. $\{x\} \in \{\{x\}\}$,

e. $\varnothing \subseteq \{x\}$,

f. $\varnothing \in \{x\}$.

Bài 1.30. Tìm hai tập A và B sao cho $A \in B$ và $A \subseteq B$.

Bài 1.31. Giả sử rằng A, B, C là những tập hợp sao cho $A \subseteq B$ và $B \subseteq C$. Chứng minh rằng $A \subseteq C$.

Bài 1.32. Tìm tập lũy thừa của mỗi tập hợp sau:

a. $\{a\}$

b. $\{a, b\}$

c. $\varnothing$

d. $\{\varnothing, \{\varnothing\}\}$

Bài 1.33. Xác định bản số và tìm tập lũy thừa của mỗi tập hợp sau:

a. $\{a\}$,

b. $\{\{a\}\}$,

c. $\{a, \{a\}\}$,

d. $\{a, \{a\}, \{a, \{a\}\}\}$.

Bài 1.34. Giả sử rằng A, B là hai tập hợp sao cho $P(A) = P(B)$. Chứng minh rằng $A = B$.

Bài 1.35. Cho $A = \{a, b, c, d\}$ và $B = \{x, y\}$. Tìm:

a. $A \times B$

b. $B \times A$

Bài 1.36. Cho $A \times B = \varnothing$ với A, B là hai tập hợp. Chứng minh rằng $A = \varnothing$ hoặc $B = \varnothing$.

Bài 1.37. Chứng minh rằng $A \times B \neq B \times A$ nếu A, B là những tập không rỗng và $A \neq B$.

Bài 1.38. *Nghịch lý Russell.*
Cho S là tập chứa x nếu tập x không thuộc chính nó, tức là $S = \{x \,|\, x \notin x\}$.

a. Chứng minh rằng giả thiết S là một phần tử của S sẽ dẫn tới mâu thuẫn.

b. Chứng minh rằng giả thiết S không phải là phần tử của nó cũng dẫn tới mâu thuẫn.

Bài 1.39. Cho A là tập hợp các sinh viên sống cách trường trong vòng 3 km và B là tập hợp các sinh viên đang trên đường tới lớp. Hãy mô tả thuộc tính của các sinh viên thuộc mỗi tập hợp sau:

a. $A \cap B$

b. $B \cup A$

c. $A \backslash B$

d. $B \setminus A$.

Bài 1.40. Cho $A = \{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5\}$ và $B = \{0,\ 3,\ 4,\ 6\}$. Tìm:

a. $A \cap B$

b. $B \cup A$

c. $A \backslash B$

d. $B \setminus A$.

Bài 1.41. Cho A là một tập hợp, U là tập vũ trụ, chứng minh rằng:

a. $A \cup \varnothing = A$

b. $A \cap \varnothing = \varnothing$

c. $A \cup A = A$

d. $A \cap A = A$

e. $A \setminus \varnothing = A$

f. $A \cup U = U$

g. $A \cap U = A$

h. $\overline{\overline{A}} = A$.

Bài 1.42. Cho A, B là hai tập hợp, chứng minh rằng:

a. $A \cup B = B \cup A$

b. $A \cap B = B \cap A$

c. $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$

d. $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$.

Bài 1.43. Cho A, B là hai tập hợp, chứng minh rằng:

a. $(A \cap B) \subseteq A$

b. $A \subseteq (A \cup B)$

c. $(A \setminus B) \subseteq A$

d. $A \cap (B \setminus A) = \varnothing$

e. $A \cup (B \setminus A) = A \cup B$

h. $(A \cap B) \cup (A \cap \overline{B}) = A$.

Bài 1.44. Chứng minh rằng nếu A, B và C là những tập hợp thì:

$$\overline{A \cap B \cap C} = \overline{A} \cup \overline{B} \cup \overline{C}$$

a. bằng cách chứng tỏ vế này là tập con của vế kia.

b. bằng cách dùng bảng tính thuộc.

Bài 1.45. Tìm hai tập A, B nếu biết $A \setminus B = \{1, 5, 7, 8\}$, $B \setminus A = \{2, 10\}$ và $A \cap B = \{3, 6, 9\}$.

Bài 1.46. Cho A, B, C là những tập hợp. Chứng minh rằng:

a. $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$

b. $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$

c. $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

d. $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$.

Bài 1.47. Cho A, B, C là những tập hợp. Chứng minh rằng:

a. $(A \setminus C) \cap (C \setminus B) = \varnothing$

b. $(B \setminus A) \cup (C \setminus A) = (B \cup C) \setminus A$

c. $(A \setminus B) \setminus C = (A \setminus C) \setminus (B \setminus C)$

d. $(A \cap B) \setminus C = (A \setminus C) \cap B$.

Bài 1.48. Hai tập A và B có quan hệ gì nếu chúng thỏa mãn đẳng thức sau:

a. $A \cup B = A$

b. $A \cap B = A$

c. $A \setminus B = A$

d. $A \setminus B = \varnothing$

e. $A \setminus B = B \setminus A$

f. $A \setminus B = B$

g. $A \setminus B = A \cup B$

h. $A \cap B = B \setminus A$.

Bài 1.49. Có thể kết luận rằng $A = B$ không nếu có tập C để:

a. $A \cup C = B \cup C$ b. $A \cap C = B \cap C$ c. Có cả a và b.

Bài 1.50. Cho A và B là hai tập con của tập vũ trụ U. Chứng minh rằng $A \subseteq B$ nếu và chỉ nếu $\overline{B} \subseteq \overline{A}$.

Bài 1.51. Giả sử tập vũ trụ $U = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$. Biểu diễn các tập hợp sau bằng xâu bit.

a. $\{3, 4, 5\}$

b. $\{1, 3, 6, 9\}$

c. $\{0, 2, 4, 7, 8, 9\}$

d. $\varnothing$.

Bài 1.52. Cho tập vũ trụ U như trên, tìm các tập hợp được biểu diễn bởi những xâu bit sau:

a. 11001 10010

b. 00010 10101

c. 11111 11111

d. 01011 00001

Bài 1.53. Cho $P(x)$ là câu "$x \leq 4$". Xác định giá trị chân lý của mỗi mệnh đề sau:

a. $P(0)$.

b. $P(4)$.

c. $P(6)$.

d. $P(-5)$.

Bài 1.54. Cho $P(x)$ là câu "từ x chứa chữ cái a". Xác định giá trị chân lý của mỗi mệnh đề sau:

a. P(cam)

b. P(táo)

c. P(mít)

d. P(lê).

Bài 1.55. Cho $Q(x, y)$ là câu "x là thủ đô của y". Xác định giá trị chân lý của mỗi mệnh đề sau:

a. Q(Pari, Pháp)

b. Q(Luân Đôn, Ý)

c. Q(Bắc Kinh, Đức)

d. Q(Bình Nhưỡng, Triều Tiên)

Bài 1.56. Cho $P(x)$ là câu "x học ở lớp hơn 5 giờ mỗi ngày trong tuần", ở đây không gian biện luận là tập hợp các sinh viên. Hãy diễn đạt mỗi lượng hóa sau thành câu thông thường:

a. $\exists\, xP(x)$

b. $\forall\, xP(x)$

c. $\exists\, x\neg P(x)$

d. $\forall\, x\neg P(x)$.

Bài 1.57. Cho $P(x, y)$ là câu "x đã học môn y", với không gian biện luận của x là tập tất cả các sinh viên trong lớp và không gian biện luận của y là tập tất cả các môn học ở trường. Hãy diễn đạt mỗi lượng hóa sau thành câu thông thường:

a. $\exists x\, \exists\, yP(x, y)$

b. $\exists x\, \forall\, yP(x, y)$

c. $\forall x\, \exists\, yP(x, y)$

d. $\exists y\, \forall\, xP(x, y)$

e. $\forall y\, \exists\, xP(x, y)$

f. $\forall x\, \forall\, yP(x, y)$.

Bài 1.58. Cho $P(x)$ là câu "x nói được tiếng Anh" và $Q(x)$ là câu "x nói được tiếng Pháp". Hãy diễn đạt các câu sau bằng cách dùng $P(x), Q(x)$, các lượng từ và các liên từ logic. Cho không gian biện luận của x là tập hợp tất cả các sinh viên trong trường bạn:

a. Có một sinh viên trong trường bạn nói được tiếng Anh và tiếng Pháp.

b. Có một sinh viên trong trường bạn nói được tiếng Anh nhưng không nói được tiếng Pháp

c. Mọi sinh viên trong trường bạn nói được tiếng Anh hoặc tiếng Pháp.

d. Không có sinh viên nào trong trường nói được tiếng Anh hoặc tiếng Pháp.

e. Có ít nhất hai sinh viên trong trường bạn nói được tiếng Anh.

Bài 1.59. Cho $L(x, y)$ là câu "x yêu y", với không gian biện luận của cả x và y là tập mọi người trên thế giới. Hãy dùng các lượng từ để diễn đạt các câu sau:

a. Mọi người đều yêu Sơn.

b. Mọi người đều yêu một ai đó.

c. Có một người mà tất cả mọi người đều yêu.

d. Không ai yêu tất cả mọi người.

e. Có một người mà Hồng không yêu.

f. Có một người mà không ai yêu.

g. Có đúng một người yêu Mai.

h. Có đúng một người mà tất cả mọi người đều yêu.

i. Có đúng hai người mà Hoa yêu.

j. Có một người nào đó không yêu ai ngoài chính mình.

Bài 1.60. Cho $F(x, y)$ là câu "x có thể lừa gạt y", với không gian biện luận là tập mọi người trên thế giới. Hãy dùng các lượng từ để diễn đạt các câu sau:

a. Mọi người đều có thể lừa gạt Lan.

b. Hùng có thể lừa gạt được mọi người.

c. Mọi người đều có thể lừa gạt được ai đó.

d. Không ai có thể lừa gạt được tất cả mọi người.

e. Mọi người đều có thể bị lừa gạt bởi ai đó.

f. Không ai có thể lừa gạt được cả Chiến và Thắng.

g. Cường có thể lừa gạt được chính xác hai người.

h. Có chính xác một người mà ai cũng lừa được.

i. Không ai có thể lừa gạt được chính mình.

j. Nếu có ai đó lừa gạt được người khác thì sẽ bị một người nào đó lừa lại.

Bài 1.61. Lớp toán học rời rạc có 1 sinh viên ngành toán năm thứ nhất, 12 sinh viên ngành toán năm thứ hai, 15 sinh viên ngành tin năm thứ hai, 2 sinh viên ngành toán năm thứ ba, 2 sinh viên ngành tin năm thứ ba và 1 sinh viên ngành tin năm thứ tư. Diễn đạt các câu sau bằng cách dùng các lượng từ rồi sau đó xác định giá trị chân lý của chúng.

a. Có một sinh viên trong lớp là sinh viên năm thứ ba.

b. Mọi sinh viên trong lớp đều là sinh viên ngành tin học.

c. Có một sinh viên trong lớp không phải sinh viên ngành toán và cũng không phải sinh viên năm thứ ba.

d. Mọi sinh viên trong lớp là sinh viên năm thứ ba hoặc là sinh viên ngành tin học.

e. Có một ngành học sao cho mỗi khóa học có một sinh viên ở lớp này học ngành đó.

f. Có một khóa học mà với mọi ngành học đều có sinh viên theo học.

Bài 1.62. Hãy đặt hàm mệnh đề và biểu diễn các câu sau thành biểu thức có chứa lượng từ:

a. Có một người trong lớp cao hơn Nam.

b. Mọi nước trên thế giới đều nối mạng Internet.

c. Mọi người đều nói được ít nhất một ngôn ngữ trên thế giới.

d. Không ai biết mọi ngôn ngữ trên thế giới.

e. Có một môn thể thao mà mọi người trên thế giới đều thích xem.

f. Nếu một người muốn khỏe mạnh thì người này phải chơi ít nhất một môn thể thao nào đó.

g. Có một sinh viên đã học ở tất cả các phòng của ít nhất một khu nhà trong trường.

h. Tất cả các sinh viên đã học tại ít nhất một phòng của mọi khu nhà trong trường.

Bài 1.63. Cho $P(x)$ là câu "$x = x^2$". Nếu không gian biện luận là tập các số nguyên thì giá trị chân lý của mỗi mệnh đề sau như thế nào?

a. $P(0)$.

b. $P(1)$.

c. $P(2)$.

d. $P(-1)$.

e. $\exists\, x\, P(x)$.

f. $\forall\, x\, P(x)$.

Bài 1.64. Cho $Q(x, y)$ là câu "$x + y = x - y$". Cho không gian biện luận của hai biến là tập các số nguyên, hãy xác định giá trị chân lý của mỗi mệnh đề sau:

a. $Q(1, 1)$.

b. $Q(2, 0)$.

c. $\forall y\, Q(1, y)$.

d. $\exists\, x\, Q(x, 2)$.

e. $\exists\, x\, \exists y\, Q(x, y)$.

f. $\forall\, x\, \exists y\, Q(x, y)$.

g. $\exists\, y\, \forall x\, Q(x, y)$.

h. $\forall\, y\, \exists x\, Q(x, y)$.

Bài 1.65. Cho $R(x, y)$ là câu "$2x + 5y = 1$". Cho không gian biện luận của hai biến là tập các số nguyên, hãy xác định giá trị chân lý của mỗi mệnh đề sau:

a. $\exists\, x\, \exists y\, R(x, y)$.

b. $\forall\, x\, \exists y\, R(x, y)$.

c. $\exists\, x\, \forall y\, R(x, y)$.

d. $\forall\, x\, \forall y\, R(x, y)$.

Bài 1.66. Giả sử không gian biện luận của hàm mệnh đề $P(x, y)$ gồm các cặp số x và y với x, y là $1, 2$ hoặc 3. Dùng các phép hội và tuyển viết các mệnh đề sau:

a. $\exists x\, P(x, 3)$.

b. $\forall y\, P(1, y)$.

c. $\forall x \forall y\, P(x, y)$.

d. $\exists x\, \exists y\, P(x, y)$.

e. $\exists\, x\, \forall y\, P(x, y)$.

f. $\forall\, y\, \exists x\, P(x, y)$.

Bài 1.67. Cho $P(x), Q(x)$ và $R(x)$ lần lượt là các câu "x là giáo sư", "x là kẻ ngu dốt" và "x là kẻ vô tích sự". Bằng cách dùng các lượng từ, các liên từ logic cùng với $P(x), Q(x)$ và $R(x)$, hãy diễn đạt các câu sau với không gian biện luận là tập hợp toàn thể loài người:

a. Không có giáo sư nào là kẻ ngu dốt.

b. Mọi kẻ ngu dốt đều là vô tích sự.

c. Không có giáo sư nào là vô tích sự.

Giả sử các mệnh đề ở các câu (a) và (b) đúng, có thể suy ra mệnh đề ở câu (c) đúng không?

Bài 1.68. Cho các mệnh đề sau:

1. Tất cả những người ngủ sớm đều khỏe mạnh.
2. Một số trẻ em không khỏe mạnh.
3. Một số trẻ em không ngủ sớm.

a. Hãy đặt hàm mệnh đề và diễn đạt các câu trên thành biểu thức có chứa lượng từ.

b. Từ cách biểu diễn trong câu (a), hãy xét xem nếu câu (1) và (2) đúng thì câu (3) có đúng không?

Bài 1.69. Cho $P(x), Q(x), R(x)$ và $S(x)$ lần lượt là các câu "x là một đứa bé", "x là logic", "x có khả năng cai quản được cá sấu" và "x bị coi thường". Bằng cách dùng các lượng từ, các liên từ logic cùng với $P(x), Q(x), R(x)$ và $S(x)$, hãy diễn đạt các câu sau với không gian biện luận là tập hợp toàn thể loài người:

a. Trẻ em là không logic.

b. Không ai bị coi thường nếu cai quản được cá sấu.

c. Mọi người không logic đều bị coi thường.

d. Trẻ em không cai quản được cá sấu.

Giả sử các mệnh đề ở các câu (a), (b) và (c) đúng, có thể suy ra mệnh đề ở câu (d) đúng không?

Bài 1.70. Chứng tỏ rằng mỗi cặp mệnh đề sau có cùng giá trị chân lý:

a. $\forall x\,(P(x) \wedge Q(x))$ và $\forall x\, P(x) \wedge \forall x\, Q(x)$

b. $\exists x\,(P(x) \vee Q(x))$ và $\exists x\, P(x) \vee \exists x\, Q(x)$

c. $\forall x\, P(x) \wedge \exists x\, Q(x)$ và $\forall x \exists y\,(P(x) \wedge Q(y))$

d. $\forall x\, P(x) \vee \exists x\, Q(x)$ và $\forall x \exists y\,(P(x) \vee Q(y))$

Bài 1.71. Chứng minh rằng mỗi cặp mệnh đề sau là không tương đương logic:

a. $\forall x\, P(x) \vee \forall x\, Q(x)$ và $\forall x\,(P(x) \vee Q(x))$.

b. $\exists x\, P(x) \wedge \exists x\, Q(x)$ và $\exists x\,(P(x) \wedge Q(x))$.

Bài 1.72. Xác định xem f có phải là một hàm không:

a. $f:\ \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ xác định bởi $f(x) = \dfrac{1}{x}$.

b. $f:\ \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ xác định bởi $f(x) = \pm\sqrt{x^4 + x^2 + 1}$.

c. $f:\ \mathbb{Z} \to \mathbb{R}$ xác định bởi $f(n) = \dfrac{1}{n^2 - 3}$.

d. $f:\ \mathbb{R} \to \mathbb{Z}$ xác định bởi $f(x) = \sqrt{x^2 + 1}$.

e. $f:\ \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ xác định bởi $f(n) = 2n - 3$.

f. $f:\ \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ xác định bởi $f(x) = \sqrt{x}$.

g. $f:\ \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ xác định bởi $f(n) = \dfrac{1}{n+1}$.

Bài 1.73. Xác định xem f có là một hàm từ tập các xâu bit đến tập các số nguyên không, nếu:

a. $f(S)$ là vị trí của một bít 0 trong xâu S.

b. $f(S)$ là số các bít 1 trong xâu S.

c. $f(S)$ là vị trí bit 1 đầu tiên của xâu S tính từ phải sang trái.

d. $f(S)$ là độ dài của xâu S.

Bài 1.74. Tính các giá trị sau:

a. $\lceil \frac{3}{4} \rceil$ c. $\lfloor \frac{4}{5} \rfloor$ e. $\lceil 4,3 \rceil$

b. $\lceil \frac{13}{7} \rceil$ d. $\lfloor 3,6 \rfloor$ f. $\lfloor 6,8 \rfloor$.

Bài 1.75. Xác định xem hàm từ {1, 2, 3, 4} đến chính nó cho dưới đây có phải là đơn ánh hay toàn ánh không:

a. $f(1) = 2$ $f(2) = 1$ $f(3) = 3$ $f(4) = 4$.

b. $f(1) = 3$ $f(2) = 4$ $f(3) = 1$ $f(4) = 3$.

c. $f(1) = 4$ $f(2) = 2$ $f(3) = 1$ $f(4) = 3$.

d. $f(1) = 1$ $f(2) = 1$ $f(3) = 4$ $f(4) = 3$.

Bài 1.76. Xác định xem mỗi hàm từ $\mathbb{Z}$ đến $\mathbb{Z}$ sau đây có là đơn ánh hay toàn ánh không:

a. $f(n) = n - 1$.

b. $f(n) = n^2 + 3$.

c. $f(n) = n^3$.

d. $f(n) = \lceil \frac{n}{2} \rceil$.

Bài 1.77. Xác định xem hàm f sau đây có phải là đơn ánh hay toàn ánh không

a. $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ xác định bởi $f(x) = \dfrac{1}{x}$.

b. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ xác định bởi $f(x) = \sqrt{x^4 + 1}$.

c. $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ xác định bởi $f(n) = n^2 + 4$.

d. $f : \mathbb{R} \to [-1, 1]$ xác định bởi $f(x) = \sin x$.

e. $f : \mathbb{R} \setminus \{1\} \to \mathbb{R}$ xác định bởi $f(x) = \dfrac{2x+1}{x-1}$.

f. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ xác định bởi $f(x) = x^3 + 2x + 1$.

g. $f : [0, 2] \to \mathbb{R}$ xác định bởi $f(x) = x^2 + 2x + 3$.

Bài 1.78. Cho một ví dụ về hàm từ $\mathbb{N}$ đến $\mathbb{N}$ là:

a. Đơn ánh nhưng không là toàn ánh.

b. Toàn ánh nhưng không là đơn ánh.

c. Không là đơn ánh cũng không là toàn ánh.

d. Song ánh nhưng không phải là hàm đồng nhất.

Bài 1.79. Xác định xem mỗi hàm từ $\mathbb{R}$ đến $\mathbb{R}$ cho dưới đây có phải là song ánh không

a. $f(x) = 3x + 2$.

b. $f(x) = x^2 - 3x + 2$.

c. $f(x) = \sqrt[3]{x+1}$.

d. $f(x) = \dfrac{x+1}{x^2+1}$.

Bài 1.80. Cho $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $S = \{-1,\ 0,\ 2,\ 5\}$. Tìm $f(S)$ nếu:

a. $f(x) = 2$.

b. $f(x) = 3x + 1$.

c. $f(x) = \lceil \dfrac{4x+1}{3} \rceil$.

d. $f(x) = \lfloor \dfrac{x^2+1}{4} \rfloor$.

Bài 1.81. Cho $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{Z}$ xác định bởi $f(x) = \lfloor \dfrac{2x+1}{3} \rfloor$. Tìm $f(S)$ nếu:

a. $S = \{-1,\ 0,\ 2,\ 3\}$.

b. $S = \{2,\ 4,\ 6\}$.

c. $S = [1, 7]$.

d. $S = (3, 8)$.

Bài 1.82. Tìm $f(S)$ trong các trường hợp sau:

a. $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = x^2 + 3x$ với $S = (-3, 5)$.

b. $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = \dfrac{3x}{x^2+4}$ với $S = \mathbb{R}$.

c. $f : \mathbb{R} \backslash \{\frac{-5}{2}\} \longrightarrow \mathbb{R} \quad f(x) = \dfrac{x+1}{2x+5}$ với $S = [0, 3)$.

d. $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = \sin x$ với $S = [\dfrac{\pi}{6}, \dfrac{3\pi}{2}]$.

Bài 1.83. Cho f là một hàm từ $\mathbb{R}$ đến $\mathbb{R}$ xác định bởi $f(x) = x^2$. Tìm:

a. $f^{-1}(\{1\})$.

b. $f^{-1}(\{y \mid 0 < y < 1\})$.

c. $f^{-1}(\{y \mid y > 4\})$.

d. $f^{-1}(\{y \mid y < 3\})$.

Bài 1.84. Cho g là một hàm từ $\mathbb{R}$ đến $\mathbb{Z}$ xác định bởi $g(x) = \lfloor \frac{x+1}{3} \rfloor$. Tìm:

a. $g^{-1}(\{0\})$.

b. $g^{-1}(\{1, 2, 3\})$.

c. $g^{-1}(\{n \mid 5 > n > 1\})$.

d. $g^{-1}([0, 4])$.

Bài 1.85. Cho f là một hàm từ tập A đến tập B và S, T là hai tập con của B. Chứng minh rằng:

a. $f^{-1}(S \cup T) = f^{-1}(S) \cup f^{-1}(T)$.

b. $f^{-1}(S \cap T) = f^{-1}(S) \cap f^{-1}(T)$.

Bài 1.86. Cho f là một hàm từ tập A đến tập B và S là tập con của B. Chứng minh rằng $f^{-1}(\overline{S}) = \overline{f^{-1}(S)}$.

Bài 1.87. Chứng minh rằng nếu $f \circ g$ là đơn ánh thì g cũng là đơn ánh.

Bài 1.88. Chứng minh rằng nếu $f \circ g$ là toàn ánh thì f cũng là toàn ánh.

Bài 1.89. Cho hai hàm số $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ xác định bởi quy tắc $f(x) = x^2 + 1$ và $g(x) = 2x + 3$. Xác định các hàm số sau:

a. $f \circ g$.

b. $g \circ f$.

c. $f + g$.

d. $f.g$.

Bài 1.90. Cho hai hàm $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ lần lượt xác định bởi $f(x) = ax + b$ và $g(x) = cx + d$, hãy xác định a, b, c, d để $f \circ g = g \circ f$ và $f(f(x)) = f(x) + 1, \forall x$.

Bài 1.91. Chứng tỏ rằng những hàm sau có hàm ngược và tìm hàm ngược:

a. $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = ax + b$ với a, b là những hằng số và $a \neq 0$.

b. $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^3 + 3x^2 + 3x + 2$.

c. $f : \mathbb{R}^+ \longrightarrow (1, +\infty)$, $f(x) = x^2 + 1$.

Bài 1.92. Cho f là một hàm từ tập A đến tập B và S, T là hai tập con của A. Chứng minh rằng:

a. $f(S \cup T) = f(S) \cup f(T)$.

b. $f(S \cap T) \subseteq f(S) \cap f(T)$.

Bài 1.93. Cho f là một hàm từ tập A đến tập B. Chứng minh rằng f là đơn ánh khi và chỉ khi $f(S \cap T) = f(S) \cap f(T)$ với mọi tập con S, T của A.

Bài 1.94. Chứng minh rằng $\lceil x \rceil = -\lfloor -x \rfloor$.

Bài 1.95. Chứng minh rằng $\lfloor 2x \rfloor = \lfloor x \rfloor + \lfloor x + \frac{1}{2} \rfloor$.

Bài 1.96. Chứng minh rằng $\lfloor 3x \rfloor = \lfloor x \rfloor + \lfloor x + \frac{1}{3} \rfloor + \lfloor x + \frac{2}{3} \rfloor$.

Chương 2

Suy luận và chứng minh

2.1. Quy tắc suy luận

2.1.1. Mở đầu

Hai vấn đề quan trọng xuất hiện trong toán học là:

1. Khi nào một suy luận toán học là đúng?

2. Có thể dùng những phương pháp nào để xây dựng các suy luận toán học?

Trong mục này chúng ta sẽ trả lời các câu hỏi này bằng cách mô tả những dạng khác nhau của suy luận toán học. Để bắt đầu, chúng ta hãy định nghĩa lại những thuật ngữ rất quen thuộc của toán học như: định lý, bổ đề, hệ quả,...

Tiên đề *là một khẳng định được thừa nhận là đúng mà không chứng minh.*

Tiên đề thường là những khẳng định cơ bản và có vẻ rất "hiển nhiên". Nó được coi là viên gạch đầu tiên xây dựng nên lâu đài toán học đồ sộ như ngày nay.

Định lý *là một phát biểu có thể chỉ ra là đúng.* Chúng ta thể hiện một định lý là đúng bằng một dãy những suy luận đúng đắn mà ta gọi là **sự chứng minh**. Để xây dựng các chứng minh cần có những phương pháp rút ra những khẳng định mới từ những khẳng định cũ. Những khẳng định được dùng khi chứng minh có thể bao gồm những tiên đề hay định đề, chúng là những giả thiết cơ sở của cấu trúc toán học, ngoài ra còn có những giả thiết của định lý cần được chứng minh và những định lý đã được chứng minh từ trước.

Suy luận *là cách rút ra những kết luận từ những điều khẳng định khác, chúng liên kết các bước của một chứng minh lại với nhau.*

Bổ đề *là một định lý đơn giản được dùng trong chứng minh định lý khác.* Những chứng minh phức tạp sẽ dễ hiểu hơn khi sử dụng một số bổ đề đã được chứng minh từ trước.

Hệ quả *là khẳng định được suy ra từ một định lý đã được chứng minh.*

Tuy nhiên có những khẳng định mà người ta vẫn chưa biết được nó đúng hay sai, chúng ta gọi nó là những *giả thuyết*. Nhiều giả thuyết hay đã đóng góp vô cùng to lớn cho sự phát triển của toán học.

Các phương pháp chứng minh là rất quan trọng không chỉ bởi vì chúng thường xuyên được dùng để chứng minh các định lý toán học mà còn được áp dụng nhiều trong tin học. Chẳng hạn, đó là sự kiểm tra tính đúng đắn của một chương trình trên máy tính hay việc khẳng định sự an toàn của một hệ điều hành, xây dựng các luật suy diễn trong lĩnh vực trí tuệ nhân tạo ... Do vậy, nắm vững các kỹ thuật chứng minh là vô cùng cốt yếu trong cả toán học lẫn tin học.

Trong phần này, chúng ta sẽ đưa ra một số quy tắc suy luận. Điều này làm sáng tỏ cái gì tạo thành một chứng minh đúng đắn. Một số dạng suy luận sai thường gặp được gọi là các *ngụy biện*. Sau cùng, chúng ta sẽ đề cập đến những phương pháp chứng minh thường gặp.

2.1.2. Các quy tắc suy luận

Định nghĩa 2.1.1. *Cho $A_1, A_2, \ldots, A_n$ và B là những mệnh đề. Ta nói rằng có một quy tắc suy luận với các tiền đề là $A_1, A_2, \ldots, A_n$ và hệ quả lôgic là B nếu $(A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_n) \to B$ là một mệnh đề hằng đúng.*

Quy tắc suy luận trên đây được ký hiệu là:

$$\begin{array}{c} A_1 \\ \vdots \\ A_n \\ \hline \therefore\ B \end{array}$$

Nhận xét. Ta có quy tắc suy luận

$$\begin{array}{c} A_1 \\ \vdots \\ A_n \\ \hline \therefore\ B \end{array}$$

nếu và chỉ nếu mỗi khi các mệnh đề $A_1, A_2, \ldots, A_n$ đều đúng thì B cũng đúng.

Hằng đúng $(p \wedge (p \to q)) \to q$ là cơ sở của quy tắc suy luận có tên là Modus ponens hay luật tách rời. Hằng đúng này được viết như sau:

$$\begin{array}{c} p \\ \underline{p \to q} \\ \therefore\ q \end{array}$$

Khi dùng ký hiệu này, các giả thiết được viết trên dấu gạch ngang còn kết luận viết dưới dấu gạch ngang. Ký hiệu "$\therefore$" có nghĩa là "vậy thì". Luật tách rời phát biểu rằng nếu cả mệnh đề kéo theo và các giả thiết của nó là đúng thì kết luận của mệnh đề là đúng.

Ví dụ 2.1.1. *Giả sử mệnh đề kéo theo "Nếu hôm nay trời nắng thì chúng ta sẽ đi bơi" và giả thiết của nó "hôm nay trời nắng" là đúng. Khi đó theo luật tách rời, "chúng ta sẽ đi bơi" là đúng.*

Ví dụ 2.1.2. *Mệnh đề kéo theo "nếu n chia hết cho 3 thì n^2 chia hết cho 9" là đúng. Do vậy, nếu n chia hết cho 3, thì theo luật tách rời ta suy ra n^2 chia hết cho 9.*

Bảng sau đây liệt kê một số quy tắc suy luận quan trọng. Việc kiểm nghiệm chúng coi như bài tập. Ở đây, chúng ta sẽ đưa ra một số chứng minh có dùng các quy tắc suy luận này.

Bảng 2.1: Các quy tắc suy luận

Quy tắc suy luận	Hằng đúng	Tên gọi
$\dfrac{p}{\therefore\ p \vee q}$	$p \to (p \vee q)$	Luật cộng
$\dfrac{p \wedge q}{\therefore\ p}$	$(p \wedge q) \to p$	Luật rút gọn
$\begin{array}{c} p \to q \\ \underline{p} \\ \therefore\ q \end{array}$	$[(p \to q) \wedge p] \to q$	Luật tách rời
$\begin{array}{c} p \to q \\ \underline{\neg q} \\ \therefore\ \neg p \end{array}$	$[(p \to q) \wedge \neg q] \to \neg p$	Luật phản chứng
$\begin{array}{c} p \to q \\ \underline{q \to r} \\ \therefore\ p \to r \end{array}$	$[(p \to q) \wedge (q \to r)] \to (p \to r)$	Luật bắc cầu
$\begin{array}{c} p \vee q \\ \underline{\neg p} \\ \therefore\ q \end{array}$	$[(p \vee q) \wedge \neg p] \to q$	Luật loại trừ

Ví dụ 2.1.3. *Quy tắc suy luận nào là cơ sở của suy diễn sau: "Bây giờ trời đang mưa. Vậy thì bây giờ trời đang mưa hoặc trời đang rét." ?*

Lời giải: Giả sử p là mệnh đề "Bây giờ trời đang mưa" và q là mệnh đề "Trời đang rét". Khi đó, suy diễn trên có dạng:

$$\frac{p}{\therefore\ p \vee q}$$

Vậy, ta đã sử dụng quy tắc cộng.

Ví dụ 2.1.4. *Quy tắc nào là cơ sở của suy diễn sau: "Hôm nay là chủ nhật và hôm nay được nghỉ học. Vậy, hôm nay là chủ nhật." ?*

Lời giải: Giả sử p là mệnh đề "Hôm nay là chủ nhật" và q là mệnh đề "Hôm nay được nghỉ học". Khi đó, suy diễn trên có dạng:

$$\frac{p \wedge q}{\therefore\ p}$$

Vậy, ta đã sử dụng luật rút gọn.

Ví dụ 2.1.5. *Quy tắc nào là cơ sở của suy diễn sau: "Nếu bạn chăm học thì bạn sẽ vượt qua kỳ thi. Bạn không vượt qua kỳ thi. Vậy bạn đã không chăm học."?*

Lời giải: Giả sử p là mệnh đề "Bạn chăm học" và q là mệnh đề "bạn vượt qua kỳ thi". Khi đó, suy diễn trên có dạng:

$$\begin{array}{c} \neg q \\ \underline{p \to q} \\ \therefore\ \neg p \end{array}$$

Vậy, ta đã sử dụng luật phản chứng.

Ví dụ 2.1.6. *Quy tắc nào là cơ sở của suy diễn sau: "Nếu bạn học giỏi thì bạn kiếm được việc làm. Nếu bạn kiếm được việc làm thì bạn sẽ có tiền. Vậy thì, nếu bạn học giỏi thì bạn sẽ có tiền."?*

Lời giải: Giả sử p là mệnh đề "bạn học giỏi", q là mệnh đề "bạn kiếm được việc làm" và r là mệnh đề "bạn sẽ có tiền". Khi đó suy diễn trên có dạng:

$$\begin{array}{c} p \to q \\ \underline{q \to r} \\ \therefore\ p \to r \end{array}$$

Vậy, ta đã sử dụng luật bắc cầu.

Ví dụ 2.1.7. *Quy tắc nào là cơ sở của suy diễn sau: "Bố ở nhà hoặc mẹ ở nhà. Bố đi công tác. Vậy, mẹ ở nhà."?*

Lời giải: Giả sử p là mệnh đề "Bố ở nhà" và q là mệnh đề "mẹ ở nhà". Khi đó, suy diễn trên có dạng:

$$\begin{array}{c} p \vee q \\ \underline{\neg p} \\ \therefore\ q \end{array}$$

Vậy, ta đã sử dụng luật loại trừ.

Những suy luận có dùng các quy tắc suy luận gọi là suy luận có cơ sở. Khi tất cả các mệnh đề dùng trong một suy luận có cơ sở là đúng thì sẽ dẫn tới một kết luận đúng. Tuy nhiên, một suy luận có cơ sở có thể dẫn đến một kết luận sai nếu một trong các mệnh đề dùng trong suy diễn là sai. Ví dụ: "Nếu 11 chia hết cho 3 thì 11^2 chia hết cho 9. 11 chia hết cho 3, vậy thì 11^2 chia hết cho 9". Cách chứng minh trên là có cơ sở vì đã dùng luật tách rời. Tuy vậy, kết luận của suy diễn là sai vì $11^2 = 121$ không chia hết cho 9. Sở dĩ ta có kết luận sai vì đã sử dụng mệnh đề sai "11 chia hết cho 3".

2.1.3. Ngụy biện

Có một số ngụy biện rất hay gặp trong chứng minh sai. Chúng giống như các suy luận không dựa trên những mệnh đề hằng đúng mà chỉ là những mệnh đề tiếp liên. Bây giờ, ta sẽ chỉ ra sự khác nhau giữa suy luận đúng và suy luận sai.

- Mệnh đề $[(p \to q) \wedge q] \to p$ không là hằng đúng vì nó sai khi p sai và q đúng. Tuy nhiên, có nhiều chứng minh sai xem nó như hằng đúng. Sở dĩ có sai lầm này là người ta cho rằng mệnh đề $p \to q$ tương đương với mệnh đề $q \to p$ nên khi có q đúng suy ra p đúng. Loại suy luận sai điển hình này gọi là **ngộ nhận kết luận**.

Ví dụ 2.1.8. *Suy diễn dưới đây có cơ sở hay không?*
Nếu bạn giải mọi bài tập trong cuốn sách này thì bạn sẽ nắm vững môn Toán cơ sở. Bạn đã nắm vững môn Toán cơ sở. Vậy thì bạn đã giải mọi bài tập trong cuốn sách này.

Lời giải: Giả sử p là mệnh đề "bạn đã giải mọi bài tập trong cuốn sách này" còn q là mệnh đề "bạn đã nắm vững môn Toán cơ sở". Khi đó, cách suy diễn trên có dạng: $[(p \to q) \wedge q] \to p$. Đây là suy diễn sai dạng ngộ nhận kết luận. Thật vậy, hoàn toàn có thể bạn học môn Toán cơ sở bằng nhiều cách khác nhau mà không nhất thiết phải làm đầy đủ các bài tập trong cuốn sách này, như là: tự đọc sách, nghe bài giảng, làm một số mà không làm hết các bài tập của cuốn sách này, ...

Ví dụ 2.1.9. *Giả sử p là mệnh đề "n chia 3 dư 1" và q là mệnh đề "n^2 chia 3 dư 1". Mệnh đề kéo theo "nếu n chia 3 dư 1 thì n^2 chia 3 dư 1" có dạng $p \to q$ là đúng. Nếu q đúng, tức là n^2 chia 3 dư 1 thì có thể suy ra p là đúng tức là n chia 3 dư 1 không?*

Lời giải: Không thể kết luận p đúng được bởi vì có thể n chia 3 dư 2, khi đó $n^2 = (3k+2)^2 = 9k^2 + 12k + 4 = 3(3k^2 + 4k + 1) + 1$ chia 3 dư 1. Chứng minh sai vì đã ngộ nhận kết luận.

- Mệnh đề $[(p \to q) \wedge \neg p] \to \neg q$ không phải là hằng đúng, vì nó sai khi p sai và q đúng.

  Nhiều chứng minh sai vì đã sử dụng mệnh đề này như một luật suy diễn. Sở dĩ có sai lầm này là do người ta cho rằng mệnh đề $p \to q$ tương đương với mệnh đề $\neg p \to \neg q$ nên khi có $\neg p$ đúng suy ra $\neg q$ đúng. Loại suy diễn sai lầm kiểu này gọi là **ngụy biện phủ nhận giả thiết**.

Ví dụ 2.1.10. *Suy diễn sau đây có đúng hay không?*
Nếu x lớn hơn 1 thì x^2 lớn hơn 1. Ta có x không lớn hơn 1. Vậy thì x^2 không lớn hơn 1.

Lời giải: Giả sử p là mệnh đề "x lớn hơn 1" còn q là mệnh đề "x^2 lớn hơn 1". Khi đó, cách suy diễn trên có dạng: $[(p \to q) \wedge \neg p] \to \neg q$. Đây là suy diễn sai dạng ngụy biện phủ nhận giả thiết. Thật vậy, ta có $x = -2$ nhỏ hơn 1 nhưng $x^2 = 4$ lớn hơn 1.

Ví dụ 2.1.11. *Suy diễn sau đây có đúng hay không?*
Nếu số nguyên n có chữ số tận cùng là 5 thì n chia hết cho 5. Ta có n không có chữ số tận cùng là 5. Vậy, n không chia hết cho 5.

Lời giải: Giả sử p là mệnh đề "số nguyên n có chữ số tận cùng là 5" còn q là mệnh đề "n chia hết cho 5". Khi đó, cách suy diễn trên có dạng: nếu $[(p \to q) \wedge \neg p] \to \neg q$. Đây là suy diễn sai dạng ngụy biện phủ nhận giả thiết. Thật vậy, ta có $n = 10$ không có chữ số tận cùng là 5 nhưng n vẫn chia hết cho 5.

Nhiều chứng minh sai vì đã dựa trên ngụy biện dùng ngay câu hỏi. Ngụy biện này xuất hiện khi một hay nhiều bước chứng minh dựa trên sự đúng đắn của một mệnh đề đang cần phải chứng minh. Nói cách khác, ngụy biện này xuất hiện khi chứng minh một mệnh đề lại sử dụng chính nó hoặc một mệnh đề tương đương với nó. Vì vậy, ngụy biện này gọi là **suy luận quẩn**.

Ví dụ 2.1.12. *Suy luận sau đây có đúng không?*
Nếu n^2 là một số chẵn thì n cũng là một số chẵn. Thật vậy, vì n^2 là một số chẵn nên $n^2 = 2k$ với k là một số nguyên nào đó. Giả sử $k = 2m^2$ với m là một số nguyên nào đó. Điều này chứng tỏ $n^2 = 4m^2$ suy ra $n = 2m$ hoặc $n = -2m$ tức là n là số chẵn.

Lời giải: Suy luận trên là sai. Phát biểu "giả sử $k = 2m^2$ với m là số nguyên nào đó" xuất hiện trong chứng minh mà không đưa ra lý lẽ nào chứng tỏ nó là đúng. Đây là lý luận luẩn quẩn vì phát biểu này kết hợp với $n^2 = 2k$ tương đương với mệnh đề đang phải chứng minh. Ở đây, kết quả hiển nhiên là đúng (n chẵn), chỉ có cách chứng minh là sai.

Ngoài những ngụy biện nêu trên còn có những suy luận sai do áp dụng không đúng các định lý hoặc tính chất. Sai lầm này rất hay gặp đối với những sinh viên, học sinh không nắm chắc kiến thức cơ bản.

Ví dụ 2.1.13. *Chứng minh "Nếu $a > b$ thì $a^3 > b^3$" như sau có đúng không?*
Do $a > b$ nên nhân hai vế của bất đẳng thức với $a > b$ ta được $a^2 > b^2$, tiếp tục nhân hai vế của bất đẳng thức này với $a > b$ suy ra $a^3 > b^3$.

Lời giải: Chứng minh trên là sai, vì bạn đã áp dụng tính chất nhân cả hai vế của bất đẳng thức cùng chiều với nhau mà quên rằng điều kiện để có được tính chất này là các vế của hai bất đẳng thức phải dương mà điều kiện này thì không có trong giả thiết của bài toán.

2.2. Các phương pháp chứng minh

Dưới đây, chúng ta sẽ mô tả cách chứng minh các kiểu mệnh đề. Bởi vì, rất nhiều định lý là các mệnh đề kéo theo, nên các kỹ thuật chứng minh kéo theo là rất quan trọng. Nhớ lại rằng $p \to q$ là đúng trừ khi p đúng nhưng q sai. Và lưu ý là để chứng minh mệnh đề $p \to q$ là đúng chỉ cần chỉ ra q là đúng nếu p đúng. Sau đây, ta sẽ bàn tới những kỹ thuật chứng minh phép kéo theo.

2.2.1. Chứng minh rỗng

Giả sử rằng giả thiết p của phép kéo theo $p \to q$ là sai. Khi đó, phép kéo theo là đúng vì hai dạng mệnh đề $F \to T$ và $F \to F$ đều đúng. Do vậy, nếu có thể chỉ ra p là sai thì phép kéo theo $p \to q$ được chứng minh. Một chứng minh như vậy gọi là **chứng minh rỗng**. Chứng minh rỗng thường được dùng để thiết lập trong các trường hợp đặc biệt của các định lý phát biểu rằng phép kéo theo là đúng cho tất cả các số nguyên dương.

Ví dụ 2.2.1. *Chỉ ra rằng mệnh đề $P(0)$ là đúng, trong đó $P(n)$ là hàm mệnh đề "Nếu $n > 1$ thì $n^2 > n$".*

Lời giải: Dễ thấy $P(0)$ là mệnh đề kéo theo "nếu $0 > 1$ thì $0^2 > 0$". Vì giả thiết $0 > 1$ sai nên mệnh đề kéo theo $P(0)$ tự động đúng.

Chú ý rằng kết luận của phép kéo theo $0^2 > 0$ là sai. Nhưng không vì thế mà mệnh đề $P(0)$ là sai, vì theo định nghĩa, mệnh đề kéo theo chỉ sai khi giả thiết của nó đúng còn kết luận của nó là sai.

2.2.2. Chứng minh tầm thường

Giả sử rằng kết luận q của phép kéo theo $p \to q$ là đúng. Khi đó $p \to q$ là đúng vì nó có dạng $T \to T$ hoặc $F \to T$ đều đúng cả. Do vậy, nếu có thể chỉ ra được q là đúng thì mệnh đề $p \to q$ được chứng minh. Một chứng minh như vậy gọi là **chứng minh tầm thường**. Những chứng minh tầm thường như vậy lại rất quan trọng khi cần chứng minh các trường hợp đặc biệt của một số định lý và trong quy nạp toán học sẽ được đề cập sau này.

Ví dụ 2.2.2. *Gọi $P(n)$ là mệnh đề "Nếu a và b là hai số nguyên dương và $a \geq b$ thì $a^n \geq b^n$". Hãy chỉ ra rằng $P(0)$ là đúng.*

Lời giải: Mệnh đề $P(0)$ là câu "Nếu a và b là hai số nguyên dương và $a \geq b$ thì $a^0 \geq b^0$". Vì $a^0 = b^0 = 1$ nên kết luận của $P(0)$ là đúng. Do đó, $P(0)$ là đúng. Đây là ví dụ về một chứng minh tầm thường. Lưu ý là giả thiết của mệnh đề $a \geq b$ không cần cho chứng minh này.

2.2.3. Chứng minh trực tiếp

Trên đây là hai cách chứng minh đặc biệt mệnh đề kéo theo $p \to q$ là đúng khi ta đã có p sai hoặc có q đúng. Còn cách chứng minh thông thường hơn là cho p đúng rồi sử dụng các suy luận có lý để chỉ ra rằng q cũng đúng, tức là tổ hợp p đúng q sai không bao giờ xảy ra. Chứng minh này gọi là **chứng minh trực tiếp**.

Ví dụ 2.2.3. *Hãy chứng minh trực tiếp mệnh đề "Nếu n là số lẻ thì n^2 cũng là số lẻ".*

Lời giải: Giả sử rằng giả thiết của mệnh đề kéo theo này là đúng, tức là n là một số lẻ. Khi đó $n = 2k + 1$, với k là số nguyên. Từ đó suy ra $n^2 = (2k + 1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 2(2k^2 + 2k) + 1$, do đó n^2 cũng là số lẻ.

2.2.4. Chứng minh gián tiếp

Ta biết rằng hai mệnh đề tương đương lôgic với nhau nếu và chỉ nếu tính đúng sai của chúng như nhau. Vì vậy, để chứng minh một mệnh đề M đã cho là đúng, ta có thể chứng minh một mệnh đề tương đương lôgic với M là đúng. Chẳng hạn để chứng minh mệnh đề $p \to q$ là đúng, ta có thể chứng minh mệnh đề $\neg q \to \neg p$ là đúng.
Vì mệnh đề kéo theo $p \to q$ tương đương với mệnh đề phản đảo của nó là $\neg q \to \neg p$, nên phép kéo theo sẽ được chứng minh bằng cách chỉ ra rằng mệnh đề $\neg q \to \neg p$ là đúng. Mệnh đề kéo theo này thường được chứng minh trực tiếp nhưng cũng có thể sử dụng bất cứ kỹ thuật chứng minh nào. Chứng minh kiểu này gọi là **chứng minh gián tiếp**.

Ví dụ 2.2.4. *Hãy chứng minh gián tiếp định lý "Nếu $3n+2$ là một số lẻ thì n cũng là số lẻ".*

Lời giải: Giả sử ngược lại kết luận của phép kéo theo là sai, tức là n chẵn. Khi đó $n = 2k$ với k là số nguyên nào đó. Từ đó suy ra $3n+2 = 3(2k)+2 = 2(3k+1)$ và do đó $3n+2$ là số chẵn. Vậy, phủ định kết luận của phép kéo theo dẫn đến phủ định giả thiết của nó, nên mệnh đề kéo theo ban đầu là đúng.

2.2.5. Chứng minh bằng phản chứng

Ta có $[\neg A \to F] \to A$ là một mệnh đề hằng đúng, do đó có một quy tắc suy luận

$$\frac{\neg A \to F}{\therefore\ A}\ .$$

Như vậy, để chứng minh mệnh đề A đã cho là đúng, ta giả sử A sai, tức $\neg A$ đúng từ đó suy ra một mâu thuẫn F nào đó. Kiểu chứng minh này gọi là chứng minh phản chứng.

Ví dụ 2.2.5. *Chứng minh rằng $\sqrt{2}$ là số vô tỷ.*

Lời giải: Gọi p là mệnh đề "$\sqrt{2}$ là số vô tỷ". Giả sử ngược lại $\neg p$ là đúng, khi đó $\sqrt{2}$ là số hữu tỷ. Ta sẽ chỉ ra điều này dẫn tới mâu thuẫn. Vì $\sqrt{2}$ là số hữu tỷ nên tồn tại những số nguyên a, b sao cho $\sqrt{2} = a/b$ là một phân số tối giản. Bình phương hai vế, ta được:

$$2 = \frac{a^2}{b^2} \quad \text{vì thế} \quad 2b^2 = a^2.$$

Điều này có nghĩa là a^2 là số chẵn và do đó a là số chẵn (vì ta đã biết rằng nếu a lẻ thì a^2 cũng lẻ). Đặt $a = 2c$ với c là số nguyên nào đó. Do đó: $2b^2 = 4c^2$ hay $b^2 = 2c^2$ tức là b^2 là số chẵn. Đặt $b = 2d$ với d là một số nguyên.

Như vậy ta có $\sqrt{2} = \dfrac{a}{b} = \dfrac{2c}{2d} = \dfrac{c}{d}$. Dẫn đến phân số $\dfrac{a}{b}$ lại không phải tối giản. Điều này mâu thuẫn với cách chọn a, b ban đầu.

Vậy $\sqrt{2}$ là số vô tỷ.

Chú ý, khi A là mệnh đề kéo theo $p \to q$, việc giả sử A sai tức là giả sử $p \to q$ sai. Dẫn đến p đúng và q sai. Từ hai điều này lập luận đến điều mâu thuẫn.

Ví dụ 2.2.6. *Hãy chứng minh bằng phản chứng định lý: "Nếu a là số vô tỷ thì $b = a+2$ là số vô tỷ."*

Lời giải: Giả sử mệnh đề nói trên sai, từ đó dẫn tới có a vô tỉ mà $b = a + 2$ là số hữu tỷ. Do b hữu tỉ nên $b = \dfrac{m}{n}$ với m, n là số nguyên. Khi đó, từ đẳng thức $b = a + 2$ suy ra $a = b - 2 = \dfrac{m}{n} - 2 = \dfrac{m - 2n}{n}$ là số hữu tỷ. Điều này mâu thuẫn với a là số vô tỷ. Định lý được chứng minh.

2.2.6. Chứng minh bằng cách xét từng trường hợp

Để chứng minh mệnh đề có dạng $(p_1 \vee p_2 \vee \ldots \vee p_n) \to q$ là đúng người ta dùng hằng đúng

$$[(p_1 \vee p_2 \vee \ldots \vee p_n) \to q] \leftrightarrow [(p_1 \to q) \wedge (p_2 \to q) \wedge \ldots \wedge (p_n \to q)].$$

Điều này chứng tỏ mệnh đề kéo theo có giả thiết là tuyển của các mệnh đề $p_1, p_2, \ldots, p_n$ có thể được chứng minh bằng cách chứng minh mỗi một trong n mệnh đề kéo theo $p_i \to q$ với $i = \overline{1, n}$ một cách riêng rẽ. Cách chứng minh như trên gọi là **chứng minh từng trường hợp**. Đôi khi để chứng minh $p \to q$ người ta thay p bởi mệnh đề tương đương $(p_1 \vee p_2 \vee \ldots \vee p_n)$ sau đó lần lượt chứng minh các $p_i \to q$ là đúng.

Ví dụ 2.2.7. *Hãy chứng minh mệnh đề "Nếu số nguyên n không chia hết cho 3 thì n^2 chia 3 dư 1".*

Lời giải: Gọi p là mệnh đề "n không chia hết cho 3" và q là mệnh đề "n^2 chia 3 dư 1". Khi đó, p tương đương với $p_1 \vee p_2$ trong đó p_1 là mệnh đề "n chia 3 dư 1" còn p_2 là mệnh đề "n chia 3 dư 2". Từ đó, để chứng tỏ $p \to q$ ta sẽ chứng minh $p_1 \to q$ và $p_2 \to q$. Hai mệnh đề kéo theo này được chứng minh dễ dàng như sau:
Giả sử p_1 đúng, tức là $n = 3k + 1$ với k là một số nguyên nào đó. Khi đó: $n^2 = 9k^2 + 6k + 1 = 3(3k^2 + 2k) + 1$, tức là "$n^2$ chia 3 dư 1" hay $p_1 \to q$ là đúng.

Tiếp theo, giả sử p_2 là đúng, tức là $n = 3k + 2$ với k là một số nguyên nào đó. Khi đó: $n^2 = 9k^2 + 12k + 4 = 3(3k^2 + 4k + 1) + 1$, tức là "$n^2$ chia 3 dư 1" hay $p_2 \to q$ là đúng.

Vì cả hai mệnh đề $(p_1 \to q)$ và $(p_2 \to q)$ là đúng nên kết luận $(p_1 \vee p_2) \to q$ là đúng. Hơn thế nữa, vì p tương đương với $p_1 \vee p_2$ nên suy ra mệnh đề $p \to q$ là đúng.

2.2.7. Chứng minh mệnh đề tương đương

Để chứng minh định lý có dạng cần và đủ, tức là nó có dạng $p \leftrightarrow q$, trong đó p và q là hai mệnh đề, ta sử dụng hằng đúng:

$$(p \leftrightarrow q) \leftrightarrow [(p \to q) \land (q \to p)]$$

tức là mệnh đề "p nếu và chỉ nếu q" là đúng nếu cả hai mệnh đề kéo theo "nếu p thì q" và "nếu q thì p" được chứng minh là đúng.

Ví dụ 2.2.8. *Hãy chứng minh định lý "$a^4 = b^4$ khi và chỉ khi $a^2 = b^2$".*

Lời giải: Định lý này có dạng "p nếu và chỉ nếu q", trong đó p là mệnh đề "$a^4 = b^4$" còn q là mệnh đề "$a^2 = b^2$". Để chứng minh định lý này, ta chỉ cần chỉ ra $p \to q$ và $q \to p$ là đúng.

Để chứng minh phép kéo theo thứ nhất ta giả sử p đúng, tức là $a^4 = b^4$. Suy ra: $a^4 - b^4 = (a^2 + b^2)(a^2 - b^2) = 0$. Mệnh đề này tương đương với mệnh đề $p_1 \lor p_2$, trong đó $p_1 =$"$a^2 + b^2 = 0$" và $p_2 =$"$a^2 - b^2 = 0$".

Nếu p_1 đúng tức là $a^2 + b^2 = 0$, suy ra $a = b = 0$. Do đó, $a^2 = b^2 = 0$, tức là q đúng.

Nếu p_2 đúng, tức là $a^2 - b^2 = 0$, suy ra $a^2 = b^2$, tức là q đúng.

Như vậy, mệnh đề kéo theo thứ nhất đã được chứng minh.

Để chứng minh mệnh đề kéo theo thứ hai, ta giả sử q đúng, tức là $a^2 = b^2$, suy ra $a^4 = a^2.a^2 = b^2.b^2 = b^4$, tức là ta có p đúng, mệnh đề kéo theo thứ hai được chứng minh.

Vì cả hai mệnh đề $p \to q$ và $q \to p$ đã được chứng minh là đúng nên mệnh đề tương đương với chúng $p \leftrightarrow q$ là đúng.

Đôi khi một định lý biểu đạt nhiều mệnh đề là tương đương. Định lý này được viết như sau:

$$p_1 \leftrightarrow p_2 \leftrightarrow \ldots \leftrightarrow p_n$$

hay các mệnh đề $p_1, p_2, \ldots, p_n$ có cùng giá trị chân lý. Một cách chứng minh các mệnh đề này tương đương lẫn nhau là dùng hằng đúng:

$$[p_1 \leftrightarrow p_2 \leftrightarrow \ldots \leftrightarrow p_n] \leftrightarrow [(p_1 \to p_2) \land (p_2 \to p_3) \land \ldots \land (p_n \to p_1)].$$

Như vậy, thay vì phải chứng minh $2(n-1)$ mệnh đề kéo theo ở vế trái ta chỉ cần chứng minh n mệnh đề kéo theo ở vế phải là $p_1 \to p_2,\ p_2 \to p_3, \ldots, p_n \to p_1$.

Ví dụ 2.2.9. *Hãy chứng minh rằng ba mệnh đề sau là tương đương:*

p_1 : $a = b$ *hoặc* $a = -b$
p_2 : $|a| = |b|$
p_3 : $a^2 = b^2$.

Lời giải: Để chứng minh ba mệnh đề trên tương đương, ta phải chứng minh ba mệnh đề kéo theo $p_1 \to p_2$, $p_2 \to p_3$, $p_3 \to p_1$ là đúng:

Dễ thấy rằng: khi $a = b$ thì $|a| = |b|$ còn khi $a = -b$ thì $|a| = |-b| = |b|$, tức là mệnh đề kéo theo $p_1 \to p_2$ là đúng.

Vì $|a|$ và $|b|$ phụ thuộc vào dấu của a và b nên để chứng minh $p_2 \to p_3$ là đúng, ta cần chia thành 4 trường hợp sau:

1. Nếu $a \geq 0$ và $b \geq 0$ thì $|a| = a$ và $|b| = b$ nên từ $|a| = |b|$ suy ra $a = b$, do đó $a^2 = b^2$.

2. Nếu $a \geq 0$ và $b \leq 0$ thì $|a| = a$ và $|b| = -b$ nên từ $|a| = |b|$ suy ra $a = -b$, do đó $a^2 = (-b)^2 = b^2$.

3. Nếu $a \leq 0$ và $b \geq 0$ thì $|a| = -a$ và $|b| = b$ nên từ $|a| = |b|$ suy ra $-a = b$, do đó $b^2 = (-a)^2 = a^2$.

4. Nếu $a \leq 0$ và $b \leq 0$ thì $|a| = -a$ và $|b| = -b$ nên từ $|a| = |b|$ suy ra $a = b$, do đó $a^2 = b^2$.

Như vậy, mệnh đề $p_2 \to p_3$ được chứng minh là đúng.

Mệnh đề $p_3 \to p_1$ được chứng minh trực tiếp như sau: giả sử p_3 đúng, tức là $a^2 = b^2$, suy ra $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b) = 0$. Mệnh đề này tương đương với $a - b = 0$ hoặc $a + b = 0$, tức là nó tương đương với mệnh đề p_1 là $a = b$ hoặc $a = -b$.

Đến đây, cả ba mệnh đề kéo theo đã được chứng minh và do đó ba mệnh đề tương đương cũng đã được chứng minh.

2.2.8. Vài lời bình luận

Chúng ta đã mô tả các phương pháp khác nhau để chứng minh định lý. Bạn đọc có thể nhận thấy rằng ở đây không đưa ra một thuật toán nào để chứng minh định lý. Không tồn tại một thủ tục như vậy.

Có nhiều định lý chúng ta có thể dễ dàng chứng minh được nhờ những định nghĩa và những định lý đã được chứng minh. Nhưng cũng có nhiều định lý nếu không sử dụng một cách thông minh các chứng minh gián tiếp, chứng minh bằng phản chứng sẽ rất vất vả. Xây dựng các chứng minh là một nghệ thuật có thể học được chỉ bằng cách thử tấn công bằng nhiều cách khác nhau và phải chấp nhận nhiều chứng minh sai để cuối cùng thu được chứng minh đúng đắn.

Tuy vậy, có nhiều giả thuyết vẫn cứ ngoan cố chống lại những cố gắng không mệt mỏi của các nhà toán học từ mấy trăm năm nay. Ví dụ, giả thuyết "mọi số nguyên dương chẵn lớn hơn 4 đều là tổng của hai số nguyên tố" vẫn chưa được chứng minh là đúng và cũng chưa tìm được một phản ví dụ nào. Giả thuyết này mang tên là bài toán Goldbach. Đây là một trong nhiều giả thuyết trong toán học vẫn chưa được chứng minh.

2.2.9. Định lý và lượng từ

2.2.9.1. Chứng minh tồn tại

Nhiều định lý được phát biểu như là những mệnh đề có chứa những lượng từ. Người ta dùng nhiều cách khác nhau để chứng minh các định lý có dạng các lượng từ như thế. Chúng ta sẽ mô tả một vài loại quan trọng nhất.

Nhiều định lý là các khẳng định sự tồn tại của các đối tượng thuộc một loại nào đó. Một định lý loại này là mệnh đề có dạng $\exists x P(x)$ với P là vị ngữ. Chứng minh mệnh đề dạng $\exists x P(x)$ gọi là **chứng minh tồn tại**. Có nhiều cách chứng minh định lý loại này. Đôi khi một chứng minh tồn tại của mệnh đề $\exists x P(x)$ được hoàn tất bằng cách tìm được một phần tử a sao cho $P(a)$ đúng. Cách chứng minh tồn tại như vậy gọi là chứng minh **tồn tại kiến thiết**. Có cách chứng minh khác gọi là chứng minh **tồn tại không kiến thiết**, tức là chúng ta không chỉ ra phần tử a sao cho $P(a)$ đúng mà chứng minh rằng $\exists x P(x)$ là đúng bằng một cách khác. Một cách thông thường để xây dựng chứng minh tồn tại không kiến thiết là chứng minh bằng phản chứng và chỉ ra rằng phủ định lượng từ tồn tại dẫn tới mâu thuẫn. Ví dụ sau minh họa khái niệm chứng minh tồn tại kiến thiết.

Ví dụ 2.2.10. *Chứng minh rằng với mọi số nguyên dương n tồn tại n số nguyên dương liên tiếp đều là hợp số.*

Lời giải: Điều phải chứng minh tương đương với lượng hóa $\forall n \,\exists\, x \forall (i = \overline{1,n})(x+i)$ là hợp số. Với mọi n nguyên dương ta đặt $x = (n+1)! + 1$. Khi đó:

$$x + i = (n+1)! + (i+1)$$

chia hết cho $(i+1)$ với mọi $i = \overline{1,n}$. Vì vậy, $x+1, x+2, \ldots, x+n$ là n hợp số liên tiếp. Trong cách chứng minh này ta đã chỉ ra số x để cho $P(x)$ đúng. Đó là cách chứng minh kiến thiết.

Ví dụ 2.2.11. *Chứng minh rằng với mọi số nguyên dương n đều tồn tại số nguyên tố lớn hơn n.*

Lời giải: Bài này đòi hỏi chứng minh lượng hóa $\exists x Q(x)$ đúng, trong đó $Q(x)$ là mệnh đề "x là số nguyên tố lớn hơn n". Để chỉ ra có một số nguyên tố lớn hơn n ta xét số nguyên $n! + 1$. Vì mọi số nguyên đều có ít nhất một ước số nguyên tố nên có ít nhất một số nguyên tố là ước của $n! + 1$ (có thể $n! + 1$ cũng là số nguyên tố). Ta thấy rằng khi chia $n! + 1$ cho các số nguyên nhỏ hơn hoặc bằng n đều dư 1, nên mọi ước nguyên tố của $n! + 1$ đều lớn hơn n. Đó chính là điều phải chứng minh. Chứng minh này là cách chứng minh tồn tại không kiến thiết vì không tìm ra được số nguyên tố lớn hơn n mà đơn giản chỉ khẳng định là phải có nó.

2.2.9.2. Phản ví dụ

Giả sử mệnh đề $\forall x P(x)$ là sai. Chúng ta chứng tỏ điều này bằng cách nào? Nhớ lại rằng các mệnh đề $\neg\forall x P(x)$ và $\exists x \neg P(x)$ là tương đương. Điều này có nghĩa là nếu ta tìm được một phần tử a sao cho $P(a)$ sai thì chúng ta chỉ ra được $\exists x \neg P(x)$ là đúng hay $\forall x P(x)$ là sai. Phần tử a sao cho $P(a)$ sai gọi là **một phản ví dụ**. Nếu tìm được dù chỉ một phản ví dụ cũng đủ chứng tỏ $\forall x P(x)$ là sai.

Ví dụ 2.2.12. *Chứng tỏ rằng khẳng định "Tất cả các số nguyên tố đều lẻ" là sai.*

Lời giải: Mệnh đề "tất cả các số nguyên tố đều lẻ" là một lượng hóa phổ dụng, tức là $\forall x P(x)$, trong đó $P(x)$ là mệnh đề "x là lẻ" và không gian đang xét là tập số nguyên tố. Chú ý rằng $x = 2$ là một phản ví dụ, vì 2 là số nguyên tố nhưng là số chẵn. Vì thế, mệnh đề "Tất cả các số nguyên tố đều lẻ" là sai.

Hãy nhớ rằng dù có rất nhiều ví dụ minh chứng một định lý là đúng cũng không thể khẳng định sự đúng đắn của định lý dạng $\forall x P(x)$ trừ khi các ví dụ này phủ hết mọi giá trị của không gian. Ví dụ, việc chỉ ra rằng $x^2 - x + 41$ là số nguyên tố với những $x = 0, 1, 2, \ldots, 40$ cũng không thể khẳng định rằng đa thức này luôn nhận giá trị nguyên tố khi x là số nguyên không âm. Dễ thấy khi $x = 41$ thì giá trị của đa thức là hợp số.
Cuối cùng trong cuốn sách này chúng tôi tuân theo những quy ước chuẩn của toán học là một mệnh đề với các biến tự do được giả thiết là lượng hóa

phổ dụng khi nghiên cứu các giá trị chân lý của nó. Ví dụ, mệnh đề kéo theo "nếu n chia hết cho 3 thì n^2 chia hết cho 9" là đúng, ta ngầm hiểu là lượng hóa "với mọi số nguyên n, nếu n chia hết cho 3 thì n^2 chia hết cho 9" là đúng. Ta cũng ngầm giả thiết là ở đây không gian là tập các số nguyên dương.

2.3. Quy nạp toán học

2.3.1. Mở đầu

Quy nạp toán học là một trong những phương pháp chứng minh quan trọng. Ta thường dùng nó để chứng minh nhiều kết quả và nhiều đối tượng rời rạc thuộc nhiều kiểu khác nhau. Trong phần này, chúng ta sẽ trình bày cơ sở và nội dung của phương pháp chứng minh quy nạp.

Trước hết, ta trình bày về những vấn đề liên quan đến tính sắp thứ tự tốt của tập các số tự nhiên $\mathbb{N}$.

Tiên đề 2.3.1. *Mọi tập không rỗng của tập các số tự nhiên $\mathbb{N}$ luôn có số bé nhất.*

Với tính chất này, ta nói rằng tập các số tự nhiên là một tập sắp thứ tự tốt.

Định lý 2.3.1. *Cho A là một tập con của tập các số tự nhiên $\mathbb{N}$. Nếu $0 \in A$ và $a \in A$ suy ra $a + 1 \in A$ thì $A = \mathbb{N}$.*

Chứng minh. Giả sử $A \neq \mathbb{N}$ khi đó $M = \mathbb{N} \setminus A \neq \varnothing$. Theo tiên đề trên M có số bé nhất là m_0, tức là tồn tại $m_0 \in M$ sao cho với mọi $m \in M$ ta có $m_0 \leq m$.
Vì $m_0 \in M$ nên $m_0 \notin A$, do đó $m_0 \neq 0$. Vì m_0 là số tự nhiên khác 0 nên $a = m_0 - 1$ cũng là một số tự nhiên. Vì $a < m_0$ nên $a \notin M$, suy ra $a \in A$. Theo giả thiết, $a + 1 \in A$. Nhưng $a + 1 = m_0$. Vậy, $m_0 \in A$. Trên đây ta có $m_0 \notin A$. Mâu thuẫn này chứng tỏ $A = \mathbb{N}$. □

2.3.2. Nguyên lý quy nạp

Định lý sau đây là cơ sở để chúng ta đưa ra phương pháp chứng minh quy nạp.

Định lý 2.3.2. *Cho $P(n)$ là một hàm mệnh đề xác định trên tập các số tự nhiên $\mathbb{N}$. Nếu $P(0)$ đúng và $\forall a, P(a) \to P(a+1)$ đúng thì $\forall n P(n)$ đúng.*

Chứng minh. Đặt $A = \{n_0 \in \mathbb{N} | P(n_0) \text{ đúng}\}$ là miền đúng của $P(n)$. Khi đó ta có $A = \mathbb{N}$.

Thật vậy, vì $P(0)$ đúng nên $0 \in A$. Giả sử $a \in A$, tức là $P(a)$ đúng, theo giả thiết suy ra $P(a+1)$ đúng, do đó $a + 1 \in A$.
Theo định lý 2.3.1 ta có $A = \mathbb{N}$. Vì $A = \mathbb{N}$ nên $\forall n P(n)$ đúng. □

Định lý 2.3.2 có thể được phát biểu như sau:
Cho $P(n)$ là một tính chất về số tự nhiên n. Nếu $P(0)$ đúng và giả sử $P(a)$ đúng suy ra $P(a+1)$ cũng đúng thì $P(n)$ đúng với mọi số tự nhiên n. Trên thực tế, có nhiều tính chất $P(n)$ chỉ đúng với $n \geq n_0$, n_0 là một số tự nhiên đã cho. Để chứng minh điều này, ta có định lý sau đây.

Định lý 2.3.3. *Cho $P(n)$ là một hàm mệnh đề xác định trên $\mathbb{N}$. Nếu $P(n_0)$ đúng và $P(a)$ đúng, $a \geq n_0$ suy ra $P(a+1)$ đúng thì $\forall n \geq n_0, P(n)$ đúng.*

Chứng minh. Đặt $A = \{0, 1, ..., n_0 - 1\} \cup E_{P(n)}$, trong đó $E_{P(n)}$ là miền đúng của $P(n)$ rồi chứng minh giống như chứng minh trong định lý 2.3.2 ta có $A = \mathbb{N}$. Suy ra với mọi $x_0 \geq n_0, x_0 \in E_{P(n)}$ suy ra $P(x_0)$ đúng. □

2.3.3. Phương pháp chứng minh quy nạp thứ nhất

Dựa vào định lý 2.3.3 ta đưa ra phương pháp chứng minh quy nạp thứ nhất như sau.

Cho $P(n)$ là một hàm mệnh đề với biến mệnh đề là các số tự nhiên $\mathbb{N}$. Để chứng minh $P(n)$ đúng với mọi $n \geq n_0$, n_0 là một số tự nhiên đã cho ta tiến hành các bước sau:

- **Bước 1 (bước cơ sở):** Chứng minh rằng $P(n_0)$ đúng, tức là chứng minh rằng $P(n)$ đúng với $n = n_0$.
- **Bước 2 (bước quy nạp):** Giả sử $P(k)$ đúng với $k \geq n_0$ (gọi là giả thuyết quy nạp) rồi chứng minh rằng $P(k+1)$ đúng, tức là giả sử $P(n)$ đúng với $n = k$ rồi chứng minh rằng $P(n)$ đúng với $n = k + 1$.

Một số ví dụ:

Chúng ta sẽ minh họa cách sử dụng quy nạp toán học để chứng minh những định lý thông qua những ví dụ.

Ví dụ 2.3.1. *Tìm công thức tính tổng của n số nguyên dương lẻ đầu tiên.*

Trước hết, ta dự đoán công thức với những giá trị nhỏ của n, sau đó dùng quy nạp toán học chứng minh công thức đúng với mọi n nguyên dương.

Lời giải: Đặt $S(n) = 1 + 3 + \ldots + (2n - 1)$. Với $n = 1, 2, 3, 4, 5$ ta được:

$$\begin{aligned}
&S_1 = 1 = 1^2\\
&S_2 = 1 + 3 = 4 = 2^2\\
&S_3 = 1 + 3 + 5 = 9 = 3^2\\
&S_4 = 1 + 3 + 5 + 7 = 16 = 4^2\\
&S_5 = 1 + 3 + 5 + 7 + 9 = 25 = 5^2
\end{aligned}$$

Từ các kết quả này, ta dự đoán tổng n số nguyên dương lẻ đầu tiên là n^2, ta sẽ chứng minh dự đoán trên là đúng.

Gọi $P(n)$ là hàm mệnh đề: "Tổng n số nguyên lẻ đầu tiên bằng n^2" hoặc "$S(n) = n^2$".

Bước cơ sở: Vì $S(1) = 1 = 1^2$ nên $P(1)$ đúng.

Bước quy nạp: Giả sử $P(n)$ đúng, tức là ta có:

$$S(n) = 1 + 3 + 5 + \ldots + (2n - 1) = n^2.$$

Ta phải chứng minh $P(n + 1)$ đúng, tức là:

$$S(n + 1) = 1 + 3 + 5 + \ldots + (2n - 1) + (2n + 1) = (n + 1)^2.$$

Do giả thiết quy nạp, ta có:

$$\begin{aligned}
S(n + 1) &= 1 + 3 + 5 + \ldots + (2n - 1) + (2n + 1)\\
&= S(n) + (2n + 1)\\
&= n^2 + (2n + 1)\\
&= (n + 1)^2
\end{aligned}$$

Đẳng thức này chứng tỏ $P(n + 1)$ được suy ra từ $P(n)$.

Vậy $P(n)$ đúng với mọi n nguyên dương.

Ví dụ 2.3.2. *Chứng minh rằng $n^3 - n$ chia hết cho 3 với mọi n nguyên không âm.*

Lời giải: Gọi $P(n)$ là hàm mệnh đề: "$n^3 - n$ chia hết cho 3".

Bước cơ sở: $P(0)$ đúng vì $0^3 - 0 = 0$ chia hết cho 3 .

Bước quy nạp: Giả sử $P(n)$ đúng, tức là $n^3 - n$ chia hết cho 3. Ta cần chứng minh $P(n + 1)$ đúng. Thật vậy, biểu thức:

$$\begin{aligned}(n+1)^3-(n+1) &= (n^3+3n^2+3n+1)-(n+1)\\ &= (n^3-n)+3(n^2+n)\end{aligned}$$ chia hết cho 3 vì n^3-n chia hết cho 3 theo giả thiết quy nạp, còn $3(n^2+n)$ chia hết cho 3 vì n^2+n nguyên. Bước quy nạp được hoàn thành.

Vậy, $P(n)$ đúng với mọi n nguyên không âm.

Ví dụ 2.3.3. *Cho cấp số nhân $a, ar, ar^2, \ldots, ar^n, \ldots$ với a là một số thực và r là một số thực khác 1. Dùng quy nạp toán học chứng minh rằng:*

$$\sum_{k=0}^{n} ar^k = \frac{ar^{n+1}-a}{r-1}$$

với mọi n nguyên không âm.

Lời giải: Giả sử $P(n)$ là hàm mệnh đề:

$$"\sum_{k=0}^{n} ar^k = \frac{ar^{n+1}-a}{r-1}."$$

Ta sẽ chứng minh $P(n)$ đúng với mọi n nguyên không âm.

Bước cơ sở: $P(0)$ đúng vì $a = \dfrac{ar-a}{r-1}$.

Bước quy nạp: Giả sử $P(n)$ đúng, tức là:

$$a+ar+ar^2+\ldots+ar^n = \frac{ar^{n+1}-a}{r-1}.$$

Ta sẽ chứng minh $P(n+1)$ cũng đúng. Thật vậy, cộng vào hai vế của đẳng thức trên với ar^{n+1}, ta được:

$$a+ar+ar^2+\ldots+ar^n+ar^{n+1} = \frac{ar^{n+1}-a}{r-1}+ar^{n+1}.$$

$$= \frac{ar^{n+1}-a}{r-1}+\frac{ar^{n+2}-ar^{n+1}}{r-1} = \frac{ar^{n+2}-a}{r-1}.$$

nên $P(n+1)$ đúng. Vậy, công thức trên đúng với mọi n nguyên không âm.

Chúng ta vừa chứng minh được công thức tính tổng $n+1$ số hạng đầu tiên của một cấp số nhân. Sau đây chúng ta sẽ tính số tập con chứa hai phần tử của một tập hợp hữu hạn bằng quy nạp toán học.

Ví dụ 2.3.4. *Chứng minh bằng quy nạp toán học rằng tập hợp gồm n phần tử có $\dfrac{n(n-1)}{2}$ tập con chứa đúng hai phần tử với n là số nguyên lớn hơn hay bằng* 2.

Lời giải: Gọi $P(n)$ là hàm mệnh đề: "Tập hợp gồm n phần tử có $\dfrac{n(n-1)}{2}$ tập con chứa đúng hai phần tử."

Bước cơ sở: $P(2)$ đúng vì tập gồm 2 phần tử có một tập con chứa hai phần tử là chính nó và $1 = \dfrac{2(2-1)}{2}$.

Bước quy nạp: Giả sử $P(n)$ đúng với $n \geqslant 2$, tức là tập con gồm n phần tử có $\dfrac{n(n-1)}{2}$ tập con chứa đúng hai phần tử. Ta sẽ chứng minh $P(n+1)$ cũng đúng.

Gọi A là tập hợp gồm $n+1$ phần tử. Vì $n+1 \geqslant 3$ nên $A \neq \emptyset$. Gọi a là một phần tử của A. Khi đó, $T = A \backslash \{a\}$ gồm n phần tử. Theo giả thiết quy nạp T có $\dfrac{n(n-1)}{2}$ tập con chứa đúng hai phần tử. Đây cũng là những tập con của A. Hơn nữa, mỗi phần tử của T kết hợp với phần tử a sẽ cho một tập con chứa hai phần tử của A. Tập T có n phần tử nên có n tập con như vậy. Cuối cùng, có:

$$\frac{n(n-1)}{2} + n = \frac{(n+1)n}{2}$$

tập con chứa đúng hai phần tử của A.
Điều đó chứng tỏ rằng nếu $P(n)$ đúng thì $P(n+1)$ cũng đúng. Như vậy, $P(n)$ đúng với mọi n nguyên lớn hơn hay bằng 2.

Ví dụ 2.3.5. *Chứng tỏ rằng mọi bưu phí lớn hơn hay bằng* 12 *xu đều có thể tạo ra bằng những con tem* 4 *xu hoặc* 5 *xu.*

Lời giải: Gọi $P(n)$ là hàm mệnh đề "Bưu phí n xu đều có thể tạo được từ những con tem 4 xu hoặc 5 xu". Ta chứng minh $P(n)$ đúng với mọi $n \geqslant 12$.

Bước cơ sở: $P(12)$ đúng vì dùng ba con tem 4 xu, ta có được bưu phí 12 xu.

Bước quy nạp: Giả sử $P(n)$ đúng, tức là bưu phí n xu có thể tạo được từ những con tem 4 xu hoặc 5 xu. Nếu có ít nhất một con tem 4 xu thì ta chỉ việc đổi con tem này bằng một con tem 5 xu ta sẽ tạo được cước phí $n+1$ xu. Nếu không có con tem 4 xu nào thì cước phí n xu được tạo nên chỉ bởi những con tem 5 xu. Vì $n \geqslant 12$ nên ta đã dùng ít nhất 3 con tem 5 xu. Thay ba con tem 5 xu bởi 4 con tem 4 xu, ta sẽ tạo được cước phí $n+1$ xu. Vậy, $P(n)$ đúng với mọi $n \geqslant 12$.

Ví dụ 2.3.6. *Giả sử n là một số nguyên dương. Một bàn cờ hình vuông mỗi chiều bằng 2^n đơn vị và bị bỏ đi một ô vuông. Chứng minh rằng có thể lát bàn cờ đó bằng những miếng hình chữ L (gồm 3 hình vuông đơn vị).*

Lời giải: Gọi $P(n)$ là hàm mệnh đề:"Có thể lát bàn cờ đó bằng những miếng hình chữ L".

Bước cơ sở: $P(1)$ đúng vì dùng một miếng lát chữ L ta sẽ lát được bàn cờ chiều dài bằng 2 cắt bỏ một ô vuông.

Bước quy nạp: Giả sử $P(n)$ đúng, tức là mọi bàn cờ hình vuông chiều dài 2^n đơn vị bị khuyết một ô vuông đều có thể lát bằng những miếng hình chữ L. Ta phải chứng minh điều này cũng đúng với $P(n+1)$. Thật vậy, ta chia hình vuông mỗi cạnh bằng 2^{n+1} thành bốn hình vuông mỗi cạnh 2^n. Một trong bốn hình vuông đó sẽ bị khuyết một ô, theo giả thiết quy nạp, ta có thể lát hình vuông đó bằng những miếng hình chữ L. Với ba hình vuông còn lại, ta đặt một miếng hình chữ L tại giao điểm của ba hình vuông đó sao cho mỗi hình bị khuyết một ô vuông. Theo giả thiết quy nạp ba hình vuông còn lại cũng lát được bằng những miếng lát hình chữ L. Tóm lại, có thể lát được hình vuông cạnh 2^{n+1} bị khuyết một ô vuông bằng những miếng lát hình chữ L.

2.3.4. Phương pháp chứng minh quy nạp thứ hai

Ta nhận thấy rằng, trong định lý 2.3.3, nếu thay giả thiết $P(n_0)$ đúng bởi $P(n_0) \wedge P(n_0+1) \wedge \ldots \wedge P(n)$ đúng rồi suy ra $P(n+1)$ đúng thì ta vẫn suy ra được $\forall n \geq n_0, P(n)$ đúng. Đó chính là cơ sở của phương pháp chứng minh quy nạp thứ hai sau đây:

Cho $P(n)$ là một hàm mệnh đề với biến mệnh đề là số tự nhiên n. Để chứng minh $P(n)$ đúng với mọi $n \geq n_0$, n_0 là số tự nhiên đã cho, ta tiến hành các bước sau:

- **Bước 1 (bước cơ sở):** Chứng minh rằng $P(n)$ đúng với $n_0 \leq n \leq n_1$), với n_1 lớn ở mức cần thiết nào đó (tùy bài toán).
- **Bước 2 (bước quy nạp):** Với mỗi $n \geq n_1$, giả sử rằng $P(k)$ đúng với mọi số k thỏa mãn $n_0 \leq k \leq n$ (giả thiết quy nạp) từ đó chứng minh $P(n+1)$ đúng.

Trở lại với ví dụ 2.3.5, dùng phương pháp quy nạp toán học thứ hai ta có thể giải như sau.

Lời giải: Gọi $P(n)$ là hàm mệnh đề "Bưu phí n xu đều có thể tạo được từ những con tem 4 xu hoặc 5 xu". Ta chứng minh $P(n)$ đúng với mọi $n \geqslant 12$.

Bước cơ sở: Ta dễ dàng kiểm tra rằng $P(12), P(13), P(14), P(15)$ là đúng.

Bước quy nạp: Giả sử $n \geqslant 15$ và $P(k)$ đúng với mọi $12 \leqslant k \leqslant n$. Để tạo ra bưu phí $n+1$ xu, ta dùng các con tem đã tạo ra bưu phí $n-3$ xu và thêm vào một con tem 4 xu nữa. Ta được $P(n+1)$ đúng. Vậy, $P(n)$ đúng với mọi $n \geqslant 12$.

Ví dụ 2.3.7. *Chứng minh rằng mỗi số tự nhiên $n \geq 2$ đều có một ước là số nguyên tố.*

Lời giải: Đặt $P(n)$ là câu "n có ước là số nguyên tố".

Bước cơ sở: Với $n = 2$, ta có 2 là ước nguyên tố của n. Vậy, $P(2)$ là đúng.

Bước quy nạp: Giả sử $P(k)$ đúng với $2 \leq k \leq n$, tức là với số k, $2 \leq k \leq n$, k có một ước nguyên tố.

Xét số $n+1$. Nếu $n+1$ là số nguyên tố thì nó có ước số nguyên tố là chính nó. Nếu $n+1$ không là số nguyên tố thì nó là một hợp số, tức là $n+1 = h.l$, trong đó $2 \leq h, l \leq n$.

Theo giả thiết quy nạp vì $2 \leq h \leq n$ nên nó có một ước số nguyên tố là p. Khi đó, p cũng là ước số nguyên tố của $n+1$. Vậy $P(n+1)$ đúng.

Ví dụ 2.3.8. *Chỉ ra rằng nếu n là một số nguyên lớn hơn 1 thì n có thể viết dưới dạng tích của những số nguyên tố.*

Lời giải: Gọi $P(n)$ là hàm mệnh đề: "n có thể viết dưới dạng tích của những số nguyên tố".
Bước cơ sở: $P(2)$ đúng vì 2 là tích của chính nó.
Bước quy nạp: Giả sử $P(k)$ là đúng với $k = 2, 3, \ldots, n$. Ta phải chứng minh $P(k+1)$ đúng. Thật vậy, nếu $k+1$ nguyên tố thì hiển nhiên $P(k+1)$ đúng. Nếu $k+1$ là hợp số thì có thể viết $k+1 = a.b$ với $2 \leqslant a \leqslant b \leqslant k$. Theo giả thiết quy nạp a và b có thể viết dưới dạng tích của những số nguyên tố. Như vậy, nếu $k+1$ là hợp số thì nó có thể viết dưới dạng tích của những số nguyên tố. Vậy, $P(n)$ đúng với mọi n nguyên lớn hơn 1.

2.4. Bài tập chương 2

Bài 2.1. Quy tắc suy luận nào được dùng trong mỗi lập luận sau đây?

a. An học giỏi môn toán. Do đó, An học giỏi môn toán hoặc giỏi môn tin.

b. An và Tuấn học giỏi môn toán. Do đó, An học giỏi môn toán.

c. Nếu hôm nay nhiệt độ xuống đến 8°C thì trường tiểu học đóng cửa. Hôm nay, trường tiểu học không đóng cửa. Do đó, hôm nay nhiệt độ trên 8°C.

Bài 2.2. Quy tắc suy luận nào được dùng trong mỗi lập luận sau đây?

a. Nếu có gió Lào thì khí hậu khô và nóng. Có gió Lào, do đó khí hậu khô và nóng.

b. Nếu tôi đi bơi nhiều thì tôi sẽ phải phơi nắng nhiều. Nếu tôi phơi nắng nhiều thì tôi rám nắng. Do đó, nếu tôi đi bơi nhiều thì tôi rám nắng.

c. Hôm nay trời nóng trên 40° hoặc sự ô nhiễm là nguy hại. Hôm nay nhiệt độ không quá 40° độ. Do đó, sự ô nhiễm là nguy hại.

Bài 2.3. Xác định xem mỗi suy luận sau là có cơ sở hay không. Nếu một suy luận là có cơ sở thì nó dùng quy tắc suy luận nào? Nếu không hãy cho biết tên của ngụy biện?

a. Nếu n là một số nguyên dương lớn hơn 1 thì $n^2 > 1$. Giả sử $n^2 > 1$. Khi đó: $n > 1$.

b. $\sqrt{3}$ là một số hữu tỷ nếu nó là tỷ số của hai số nguyên. $\sqrt{3}$ không là tỷ số của hai số nguyên. Do đó, $\sqrt{3}$ là số vô tỷ.

c. Nếu 100 chia hết cho 3 thì 100^2 chia hết cho 9, 100 chia hết cho 3, vậy thì 100^2 chia hết cho 9.

Bài 2.4. Xác định xem mỗi suy luận sau là có cơ sở hay không? Nếu một suy luận là có cơ sở thì nó dùng quy tắc suy luận nào? Nếu không hãy chỉ cho biết tên của ngụy biện.

a. Nếu n là số thực, $n > 2$ thì $n^2 > 4$. Giả sử $n \leqslant 2$. Khi đó $n^2 \leqslant 4$.

b. Cho n là một số nguyên dương. n là số chính phương hoặc có một số chẵn ước nguyên dương. Giả sử n có một số lẻ các ước nguyên dương. Khi đó, n là một số chính phương.

c. Nếu số nguyên n chia 3 dư 1 thì n^2 chia 3 cũng dư 1, vậy nếu n^2 chia 3 không dư 1 thì n chia 3 cũng không dư 1.

Bài 2.5. Cho $P(n)$ là mệnh đề "Nếu n là một số nguyên dương lớn hơn 1 thì $n^2 > n$". Chứng minh $P(0)$ đúng. Bạn đã dùng kiểu chứng minh nào?

Bài 2.6. Cho $P(n)$ là mệnh đề "Nếu a, b là những số thực dương thì $a^n + b^n \leqslant (a+b)^n$". Chứng minh $P(1)$ là đúng. Bạn đã dùng kiểu chứng minh nào?

Bài 2.7. Chứng minh rằng bình phương của một số chẵn là một số chẵn bằng phương pháp:

a. Chứng minh trực tiếp.

b. Chứng minh gián tiếp.

Bài 2.8. Chứng minh rằng nếu n là một số lẻ thì $3n + 2$ cũng là một số lẻ bằng phương pháp:

a. Chứng minh trực tiếp.

b. Chứng minh gián tiếp.

Bài 2.9. Chứng minh tổng của một số hữu tỷ với một số vô tỷ là một số vô tỷ.

Bài 2.10. Chứng minh rằng $\sqrt{3}$ là một số vô tỷ.

Bài 2.11. Chứng minh rằng $\sqrt[3]{3}$ là một số vô tỷ.

Bài 2.12. Hãy chứng minh hoặc bác bỏ rằng tích hai số vô tỷ là một số vô tỷ.

Bài 2.13. Chứng minh hoặc bác bỏ rằng mọi số nguyên dương đều có thể được viết dưới dạng tổng các bình phương của hai số nguyên.

Bài 2.14. Chứng minh rằng một số nguyên không chia hết cho 5 thì bình phương của nó khi chia cho 5 sẽ dư 1 hoặc 4.

Bài 2.15. Chứng minh rằng nếu x và y là hai số thực thì $|x| + |y| \geq |x + y|$.

Bài 2.16. Cho n là số nguyên. Khi đó, n lẻ khi và chỉ khi $5n + 6$ lẻ.

Bài 2.17. Cho m, n là hai số thực. Chứng minh rằng $m^2 = n^2$ nếu và chỉ nếu $m = n$ hoặc $m = -n$.

Bài 2.18. Cho n là một số nguyên. Chứng minh ba mệnh đề sau là tương đương:

a. n chia hết cho 5.

b. n^2 chia hết cho 5.

c. n^2 chia 5 không dư 1 và không dư 4.

Bài 2.19. Cho n là một số nguyên. Chứng minh bốn mệnh đề sau là tương đương:

a. n là số chẵn.

b. $n + 1$ là số lẻ.

c. $3n + 1$ là số lẻ.

d. $3n$ là số chẵn.

Bài 2.20. Dùng quy nạp toán học chứng minh:

$$3 + 3.5 + 3.5^2 + \ldots + 3.5^n = \frac{3(5^{n+1} - 1)}{4}$$

với n là số nguyên không âm.

Bài 2.21. Dùng quy nạp toán học chứng minh những đẳng thức sau đúng với mọi n nguyên dương:

a. $1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

b. $1.2 + 2.3 + 3.4 + \ldots + n.(n+1) = \dfrac{n(n+1)(n+2)}{3}$.

c. $1^2 + 3^2 + \ldots + (2n+1)^2 = \dfrac{(n+1)(2n+1)(2n+3)}{3}$.

d. $1.1! + 2.2! + \ldots + n.n! = (n+1)! - 1$.

Bài 2.22. Tìm công thức tính tổng $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{2^n}$ bằng cách quan sát những giá trị của biểu thức này với n nhỏ. Dùng quy nạp toán học chứng minh kết quả của bạn.

Bài 2.23. Tìm công thức tính tổng $\frac{1}{1.2}+\frac{1}{2.3}+\ldots+\frac{1}{n(n+1)}$ bằng cách quan sát những giá trị của biểu thức này với n nhỏ. Dùng quy nạp toán học chứng minh kết quả của bạn.

Bài 2.24. Bằng quy nạp toán học hãy chứng minh **bất đẳng thức Bernoulli**: Nếu $h > -1$ thì $1 + nh \leqslant (1+h)^n$ với mọi n nguyên không âm.

Bài 2.25. Chứng minh rằng $3^n \leqslant n!$ với mọi n nguyên lớn hơn 6.

Bài 2.26. Chứng minh rằng $2^n \geqslant n^2$ với mọi n nguyên lớn hơn 4.

Bài 2.27. Chứng minh rằng $1+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\ldots+\frac{1}{n^2} < 2-\frac{1}{n}$, với mọi n nguyên lớn hơn 1.

Bài 2.28. Chứng minh bằng quy nạp n^2-1 chia hết cho 8 với mọi n nguyên dương lẻ.

Bài 2.29. Chứng minh bằng quy nạp n^3-n chia hết cho 6 với mọi n nguyên không âm.

Bài 2.30. Chứng minh bằng quy nạp toán học rằng tập hợp gồm n phần tử có $\frac{n(n-1)(n-2)}{6}$ tập con chứa 3 phần tử với n là số nguyên lớn hơn hoặc bằng 3.

Bài 2.31. Chỉ ra rằng với bất cứ bưu phí nào là một số nguyên lớn hơn 7 đều có thể tạo được bằng hai loại tem 3 xu hoặc 5 xu.

Bài 2.32. a. Với những con tem 5 xu và 6 xu có thể tạo được các loại bưu phí nào?

b. Chứng minh câu trả lời của bạn trong phần a. bằng quy nạp toán học.

c. Chứng minh câu trả lời của bạn trong phần a. bằng nguyên lý thứ hai của quy nạp toán học.

Bài 2.33. Dùng quy nạp toán học chứng minh rằng nếu $A_1, A_2, \ldots A_n$ là các tập con của một tập vũ trụ U thì:

a. $\overline{A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n} = \overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \ldots \cap \overline{A_n}$

b. $\overline{A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n} = \overline{A_1} \cup \overline{A_2} \cup \ldots \cup \overline{A_n}$

Bài 2.34. Dùng quy nạp toán học chứng minh rằng:

a. $\neg(p_1 \vee p_2 \vee \ldots \vee p_n) \Leftrightarrow \neg p_1 \wedge \neg p_2 \wedge \ldots \wedge \neg p_n$.

b. $\neg(p_1 \wedge p_2 \wedge \ldots \wedge p_n) \Leftrightarrow \neg p_1 \vee \neg p_2 \vee \ldots \vee \neg p_n$.

Bài 2.35. Sai lầm ở đâu trong "chứng minh" tất cả các con ngựa đều cùng màu như sau:

Cho $P(n)$ là hàm mệnh đề:"tất cả n con ngựa trong một tập đều cùng màu". Rõ ràng $P(1)$ là đúng. Giả sử $P(n)$ đúng, tức là những con ngựa bất kỳ trong một tập n con đều cùng màu. Xét $n+1$ con ngựa tùy ý. Ta đánh số những con ngựa đó là $1, 2, 3, \ldots, n, n+1$. Dễ thấy n con ngựa đầu và n con ngựa sau là cùng màu. Vì tập n con ngựa đầu và tập n con ngựa sau là gối lên nhau nên cả $n+1$ con ngựa là cùng màu. Ta được $P(n+1)$ đúng.

Bài 2.36. Sai lầm ở đâu trong "chứng minh" bất kỳ số tự nhiên nào cũng bằng số kề sau nó:

Ta giả thiết mệnh đề là đúng với $n = k$, tức là $k = k + 1$. Cộng 1 vào cả hai vế của đẳng thức này, ta được $k + 1 = k + 2$, vậy mệnh đề đúng với $n = k + 1$. Ta kết luận rằng mệnh đề là đúng với mọi số tự nhiên n.

Bài 2.37. Chứng minh bàn cờ 8×8 có thể được phủ hoàn toàn bằng các quân đôminô 1×2. Phương pháp chứng minh tồn tại của bạn là kiến thiết hay không kiến thiết.

Bài 2.38. Chứng minh rằng không thể phủ hoàn toàn bàn cờ 8×8 bằng các quân đôminô 1×2 nếu hai ô ở hai góc đối diện bị cắt bỏ.

Bài 2.39. Chứng minh rằng có các số vô tỷ a và b sao cho a^b là hữu tỷ. Chứng minh của bạn thuộc loại kiến thiết hay không kiến thiết? (*Gợi ý: Cho $a = \sqrt{2}$ và $b = \sqrt{2}$. Chỉ ra rằng a^b hoặc $(a^b)^b$ là hữu tỷ*).

Chương 3

Phép đếm và giải tích tổ hợp

3.1. Cơ sở của phép đếm

Trong toán học và trong các lĩnh vực của cuộc sống, nhiều khi chúng ta phải giải quyết những bài toán đếm ở rất nhiều dạng khác nhau như tính số điện thoại có thể có trong một vùng hay một nước, tính số mật khẩu cho phép truy cập hệ máy tính ... Những quy tắc đếm cơ sở mà chúng ta sẽ nghiên cứu trong phần này có thể giúp giải được rất nhiều dạng bài toán đếm khác nhau.

3.1.1. Những nguyên lý đếm cơ bản

Chúng ta sẽ giới thiệu hai quy tắc đếm cơ bản và cách sử dụng chúng như thế nào để giải các bài toán đếm khác nhau.

Quy tắc cộng: *Giả sử có hai công việc. Việc thứ nhất có thể làm bằng* n_1 *cách, việc thứ hai có thể làm bằng* n_2 *cách và hai công việc này không thể làm đồng thời thì sẽ có* $n_1 + n_2$ *cách làm một trong hai việc đó.*

Ví dụ 3.1.1. *Có bao nhiêu cách chọn hoặc là một nam sinh viên, hoặc là một nữ sinh viên trong một lớp học gồm có* 23 *sinh viên nam và* 30 *sinh viên nữ vào Ban chấp hành Hội sinh viên?*

Lời giải: Gọi việc thứ nhất là chọn lấy một nam sinh viên, việc này có thể làm bằng 23 cách. Gọi việc thứ hai là chọn lấy một nữ sinh viên, việc này có thể làm bằng 30 cách. Theo quy tắc cộng có $23 + 30 = 53$ cách chọn một sinh viên trong lớp đó.

Chúng ta có thể mở rộng quy tắc cộng cho trường hợp có nhiều hơn hai công việc.

Giả sử những việc $T_1, T_2, \ldots, T_m$ *có thể làm tương ứng bằng* $n_1, n_2, \ldots, n_m$

cách và giả sử không có hai việc nào có thể làm đồng thời. Khi đó, để làm một trong m việc đó sẽ có $n_1 + n_2 + \ldots + n_m$ cách.

Quy tắc cộng cũng có thể phát biểu dưới dạng ngôn ngữ tập hợp như sau:

Cho $A_1, A_2, \ldots, A_m$ là những tập hợp hữu hạn rời nhau. Khi đó, số phần tử của hợp các tập hợp này bằng tổng số các phần tử của các tập hợp thành phần. Ta có đẳng thức:

$$|A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_m| = |A_1| + |A_2| + \ldots + |A_m|$$

Thật vậy, giả sử T_i là việc chọn một phần tử từ tập A_i, với $i = 1, 2, 3, \ldots, m$. Có $|A_i|$ cách làm việc T_i mà không có hai việc nào có thể làm đồng thời. Số cách chọn lấy một phần tử của hợp các tập hợp này, một mặt bằng số phần tử của hợp của n tập hợp trên, mặt khác, theo quy tắc cộng bằng $|A_1| + |A_2| + \ldots + |A_m|$. Từ đó, ta có được đẳng thức trên. Đẳng thức này chỉ đúng khi các tập hợp thành phần là đôi một rời nhau.

Quy tắc nhân: *Giả sử một nhiệm vụ nào đó được tách ra làm hai việc. Việc thứ nhất có thể làm bằng n_1 cách, việc thứ hai có thể làm bằng n_2 cách sau khi việc thứ nhất đã được làm. Khi đó sẽ có $n_1.n_2$ cách thực hiện nhiệm vụ này.*

Ví dụ 3.1.2. *Người ta có thể ghi nhãn cho những chiếc ghế trong một giảng đường bằng một chữ cái và một số nguyên dương không vượt quá 100. Bằng cách như vậy, nhiều nhất có bao nhiêu chiếc ghế có thể được ghi nhãn khác nhau?*

Lời giải: Thủ tục ghi nhãn cho một chiếc ghế gồm hai việc, gán một trong 26 chữ cái và sau đó gán một trong 100 số nguyên dương. Theo quy tắc nhân sẽ có $26 \times 100 = 2600$ cách khác nhau để ghi nhãn cho một chiếc ghế. Vậy, nhiều nhất có 2600 chiếc ghế được ghi nhãn như trên.

Người ta thường sử dụng quy tắc nhân mở rộng như sau:

Giả sử có một nhiệm vụ nào đó được thực hiện bằng cách thực hiện m việc $T_1, T_2, \ldots, T_m$. Nếu việc T_i có thể được làm bằng n_i cách sau khi các việc $T_1, T_2, \ldots, T_{i-1}$ đã được làm $(i = 1, 2, \ldots, m)$, khi đó có $n_1.n_2 \ldots .n_m$ cách để thực hiện nhiệm vụ trên.

Quy tắc nhân mở rộng này có thể chứng minh được bằng phương pháp quy nạp toán học.

Ví dụ 3.1.3. *(Đếm số xâu nhị phân) Có bao nhiêu xâu nhị phân có chiều dài bằng* 10*?*

Lời giải: Bit ở vị trí thứ i của xâu có thể nhận một trong hai giá trị 0 hoặc 1 với mọi $i = 1, 2, \ldots, 10$. Theo quy tắc nhân có $2^{10} = 1024$ xâu nhị phân khác nhau có độ dài bằng 10.

Ví dụ 3.1.4. *(Đếm hàm) Có thể tạo được bao nhiêu hàm từ tập A có m phần tử đến tập B có n phần tử?*

Lời giải: Ta đã biết một hàm từ A đến B là một phép cho tương ứng với mỗi phần tử thuộc A phần tử duy nhất thuộc B. Sau khi đã xác định được ảnh của $i-1$ phần tử đầu, phần tử thứ i của A có n cách xác định ảnh, đó là một trong n phần tử của B. Theo quy tắc nhân có n^m hàm số từ A đến B.

Ví dụ 3.1.5. *Dùng quy tắc nhân hãy chỉ ra rằng nếu tập S có n phần tử thì nó có 2^n tập con.*

Lời giải: Cho S là một tập hợp có n phần tử. Ta liệt kê các phần tử của S theo một thứ tự nào đó, giả sử $s_1, s_2, \ldots, s_n$. Giữa các tập con của S và tập các dãy nhị phân độ dài n có sự tương ứng một - một. Cụ thể, mỗi tập con A của S tương ứng với dãy nhị phân chiều dài n có bit thứ i bằng 1 nếu phần tử $s_i \in A$, bằng 0 nếu $s_i \notin A$. Theo quy tắc nhân có đúng 2^n xâu nhị phân chiều dài n nên tập S cũng có 2^n tập con.

Quy tắc nhân thường được phát biểu bằng ngôn ngữ tập hợp như sau:

Cho $A_1, A_2, \ldots, A_n$ là những tập hữu hạn. Khi đó, số phần tử của tích Đề-các của các tập hợp này bằng tích của số các phần tử của các tập hợp thành phần. Như vậy :

$$|A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n| = |A_1|.|A_2| \ldots |A_n|$$

Trong thực tế, có rất nhiều bài toán nếu chỉ sử dụng một trong hai quy tắc trên sẽ không thể giải được, nhưng lại có thể giải được nếu ta sử dụng cả hai quy tắc trên.

Ví dụ 3.1.6. *Mỗi người sử dụng máy tính đều có mật khẩu dài từ sáu đến tám ký tự, trong đó mỗi ký tự là một chữ cái hay chữ số. Mỗi mật khẩu phải chứa ít nhất một chữ số. Hỏi có thể tạo được bao nhiêu mật khẩu khác nhau dạng đó?*

Lời giải: Gọi P là tổng số mật khẩu có thể có và P_6, P_7, P_8 tương ứng là số các mật khẩu dài $6, 7, 8$ ký tự. Theo quy tắc cộng ta có: $P = P_6 + P_7 + P_8$. Bây giờ, ta sẽ tính P_6, P_7, P_8.

Tính trực tiếp P_6 rất khó. Để dễ tính hơn, ta tính số các xâu dài 6 ký tự là các chữ cái hoặc chữ số, rồi bớt đi số các xâu dài 6 ký tự là các chữ cái mà không chứa chữ số nào. Theo quy tắc nhân, số các xâu dài 6 ký tự là 36^6 và số các xâu dài 6 kí tự không chứa các chữ số là 26^6, nên:

$$P_6 = 36^6 - 26^6 = 1\ 867\ 866\ 560.$$

Hoàn toàn tương tự, ta có:

$$P_7 = 36^7 - 26^7 = 70\ 332\ 353\ 920,$$

$$P_8 = 36^8 - 26^8 = 2\ 612\ 282\ 842\ 880.$$

Vậy, ta được: $P = P_6 + P_7 + P_8 = 2\ 684\ 483\ 063\ 360.$

3.1.2. Nguyên lý bù trừ

Khi hai công việc có thể làm đồng thời, chúng ta không thể dùng quy tắc cộng để tính số cách thực hiện một trong hai công việc trên. Cộng số cách làm của mỗi cách sẽ dẫn đến sự trùng lặp, vì những cách làm cả hai sẽ được tính hai lần. Để tính đúng số cách làm một trong hai việc trên, ta cộng số cách làm mỗi một trong hai việc rồi trừ đi số cách làm đồng thời cả hai việc. Đó là ta đã sử dụng đến nguyên lý bù trừ. Chúng ta có thể phát biểu nguyên lý bù trừ bằng ngôn ngữ tập hợp như sau:

Cho A_1 và A_2 là hai tập hợp. Gọi T_1 là việc chọn lấy một phần tử của A_1, còn T_2 là việc chọn lấy một phần tử của A_2. Có $|A_1|$ cách làm việc T_1 và có $|A_2|$ cách làm việc T_2 và $|A_1 \cap A_2|$ cách làm đồng thời cả hai việc. Ta có số cách làm việc T_1 hoặc T_2 bằng tổng số cách làm việc T_1 và số cách làm việc T_2 trừ đi số cách làm đồng thời cả hai việc. Nên: Số cách làm việc T_1 hoặc việc T_2 là:

$$|A_1 \cup A_2| = |A_1| + |A_2| - |A_1 \cap A_2|$$

Ví dụ 3.1.7. *Một lớp học có 20 sinh viên học tiếng Anh, 15 sinh viên học tiếng Pháp trong đó có 5 sinh viên cùng học tiếng Anh và tiếng Pháp. Hỏi sĩ số của lớp là bao nhiêu?*

Lời giải: Sĩ số của lớp là $15 + 20 - 5 = 30$ sinh viên.

Ví dụ 3.1.8. *Tìm các số nguyên dương không vượt quá 100 mà chia hết cho 3 hoặc 4.*

Lời giải: Gọi A, B, C lần lượt là tập các số nguyên dương không quá 100 chia hết cho 3, chia hết cho 4, chia hết cho 12.
Ta cần tìm $|A \cup B|$. Ta có $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$.

$$A = \{3k | k \in \mathbb{Z}, 0 < 3k \leq 100\}.$$

Với $k \in \mathbb{Z}$, ta có: $0 < 3k \leq 100 \Leftrightarrow 1 \leq k \leq 33$. Từ đây suy ra $|A| = 33$.

$$B = \{4k | k \in \mathbb{Z}, 0 < 4k \leq 100\}.$$

Với $k \in \mathbb{Z}$, ta có: $0 < 4k \leq 100 \Leftrightarrow 1 \leq k \leq 25$. Từ đây suy ra $|B| = 25$.

$$A \cap B = C = \{12k | k \in \mathbb{Z}, 0 < 12k \leq 100\}.$$

Với $k \in \mathbb{Z}$, ta có: $0 < 12k \leq 100 \Leftrightarrow 1 \leq k \leq 8$. Từ đây suy ra $|A \cap B| = 8$.

Suy ra: $|A \cup B| = 33 + 25 - 8 = 50$. Vậy, có 50 số nguyên dương không vượt quá 100 chia hết cho 3 hoặc 4.

Chú ý: Cho n, k là những số nguyên dương. Số các số nguyên dương không vượt quá n mà chia hết cho k là $\left\lfloor \dfrac{n}{k} \right\rfloor$.

3.1.3. Nguyên lý bù trừ mở rộng

Ta thừa nhận kết quả sau đây:

Cho $A_1, A_2, \ldots, A_n (n \geq 3)$ là những tập hữu hạn, khi đó ta có:

$$\left|\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right| = \sum_{i=1}^{n} |A_i| - \sum_{1 \leq i < j \leq n} |A_i \cap A_j| + \sum_{1 \leq i < j < k \leq n} |A_i \cap A_j \cap A_k| - .... + (-1)^{n+1} \left|\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right|$$

3.1.4. Nguyên lý Dirichlet

Định lý 3.1.1 (Nguyên lý Dirichlet)**.** *Nếu có N đồ vật được đặt trong k hộp thì sẽ tồn tại một hộp chứa ít nhất $\left\lceil \dfrac{N}{k} \right\rceil$ vật.*

Chứng minh. Giả sử không có hộp nào chứa nhiều hơn hoặc bằng $\left\lceil \dfrac{N}{k} \right\rceil$

vật, tức là mỗi hộp chứa nhiều nhất là $\left\lceil \dfrac{N}{k} \right\rceil - 1$. Ta có bất đẳng thức $\left\lceil \dfrac{N}{k} \right\rceil < \dfrac{N}{k} + 1$ nên $\left\lceil \dfrac{N}{k} \right\rceil - 1 < \dfrac{N}{k}$. Khi đó tổng số vật được chứa trong k hộp nhiều nhất là:

$$k.\left(\left\lceil \frac{N}{k} \right\rceil - 1\right) < k\frac{N}{k} = N$$

bất đẳng thức này trái với giả thiết đặt N vật vào k hộp. Mâu thuẫn này chứng tỏ có ít nhất một hộp chứa ít nhất $\left\lceil \dfrac{N}{k} \right\rceil$ vật. □

Ví dụ 3.1.9. *Giả sử rằng mọi quả đạn đều bắn trúng một trong các tàu chiến và một tàu chiến sẽ bị chìm nếu nó trúng 3 quả đạn. Hỏi nếu có 5 tàu chiến thì phải bắn ít nhất bao nhiêu quả đạn để chắc chắn đánh chìm được một tàu chiến?*

Lời giải: Giả sử ta đã bắn N quả đạn (N vật) vào 5 tàu chiến (5 hộp) khi đó theo nguyên lý Dirichlet có một tàu chiến bị bắn ít nhất $\left\lceil \dfrac{N}{5} \right\rceil$ quả đạn. Do đó, để chắc chắn đánh chìm ít nhất một tàu chiến thì $\left\lceil \dfrac{N}{5} \right\rceil \geq 3$ từ đây suy ra $N \geqslant 2.5 + 1 = 11$. Như vậy phải bắn ít nhất 11 quả đạn để chắc chắn đánh chìm được ít nhất một tàu chiến.

Ví dụ 3.1.10. *Chứng minh rằng trong lớp học có 37 sinh viên thì có ít nhất 4 sinh viên sinh cùng tháng.*

Lời giải: Mỗi năm có 12 tháng. Có 37 sinh viên mà mỗi sinh viên được sinh vào một trong 12 tháng đó. Theo nguyên lý Dirichlet sẽ có ít nhất $\left\lceil \dfrac{N}{12} \right\rceil = 4$ sinh viên được sinh vào cùng một tháng.

Để ý rằng mặc dù nguyên lý Dirichlet phát biểu mối quan hệ giữa số vật được đưa vào hộp và số hộp nhưng thực tế nó lại được áp dụng cho rất nhiều đối tượng khác nhau. Do vậy, công việc khó khăn đối với sinh viên là xác định đâu là "vật" còn đâu là "hộp" và mối quan hệ giữa "vật" và "hộp" trong trường hợp cụ thể như thế nào. Để giải quyết khó khăn này ta đưa ra phát biểu tương đương của nguyên lý Dirichlet giúp sinh viên dễ nhận biết hơn.

Giả sử có N đối tượng và mỗi đối tượng có đúng một trong k tính chất nào đó, khi đó tồn tại ít nhất $\left\lceil \dfrac{N}{k} \right\rceil$ đối tượng có cùng một tính chất.

Với phát biểu này thường sau những từ "cùng", "giống","chung" sẽ là tính chất, số tính chất là k, còn số đối tượng là N và có ít nhất $m = \left\lceil \frac{N}{k} \right\rceil$ đối tượng có cùng một tính chất.

Ví dụ 3.1.11. *Khi chia 33 số nguyên bất kỳ cho 8 thì sẽ có ít nhất bao nhiêu số có cùng số dư?*

Lời giải: Sau từ "cùng" là "số dư" và như vậy mỗi tính chất là một số dư trong phép chia một số nguyên cho 8. Khi chia cho 8, ta sẽ có được một trong 8 số dư là $0, 1, 2, \ldots, 7$. Đối tượng ở đây là số nguyên, theo đề bài thì số đối tượng là 33. Do vậy, theo nguyên lý Dirichlet sẽ có ít nhất $\left\lceil \frac{33}{8} \right\rceil = 5$ đối tượng có cùng một tính chất, nghĩa là trong 33 số có ít nhất 5 số có cùng số dư khi chia cho 8.

Sau đây là một vài ứng dụng hay của nguyên lý Dirichlet.

Ví dụ 3.1.12. *Trong một tháng (30 ngày), một đội bóng chày chơi ít nhất mỗi ngày một trận nhưng cả tháng chơi không quá 45 trận. Hãy chỉ ra rằng có những ngày liên tiếp mà đội bóng đã chơi tất cả 14 trận.*

Lời giải: Gọi a_j là số trận mà đội đã chơi kể từ ngày đầu tháng tới hết ngày j. Khi đó $a_1, a_2, \ldots, a_{30}$ là một dãy những số nguyên dương phân biệt và tăng dần với $1 \leq a_j \leq 45$. Do đó: $a_1 + 14, a_2 + 14, \ldots, a_{30} + 14$ cũng là một dãy những số nguyên dương phân biệt và tăng dần với $15 \leq a_j + 14 \leq 59$. Sáu mươi số nguyên dương $a_1, a_2, \ldots, a_{30}, a_1 + 14, a_2 + 14, \ldots, a_{30} + 14$ luôn luôn nhỏ hơn hoặc bằng 59. Theo nguyên lý Dirichlet có ít nhất hai trong số 60 số này bằng nhau. Vì các dãy $a_1, a_2, \ldots, a_{30}$ và $a_1 + 14, a_2 + 14, \ldots, a_{30} + 14$ gồm những số phân biệt nên tồn tại các chỉ số i, j sao cho $a_i = a_j + 14$ $(i > j)$. Điều này chứng tỏ là từ ngày $j + 1$ đến hết ngày i đội bóng đã chơi đúng 14 trận.

Ví dụ 3.1.13. *Chứng tỏ rằng trong $n + 1$ số nguyên dương không vượt quá $2n$ tồn tại ít nhất một số chia hết cho số khác trong $n + 1$ số đó.*

Lời giải: Ta viết mỗi số nguyên dương $a_1, a_2, \ldots, a_{n+1}$ dưới dạng tích của một lũy thừa cơ số 2 với một số lẻ. Nói cách khác, ta có $a_j = 2^{k_j} q_j$, trong đó k_j là số nguyên không âm còn q_j là số nguyên dương lẻ nhỏ hơn $2n$. Vì chỉ có n số nguyên dương lẻ nhỏ hơn $2n$ nên theo nguyên lý Dirichlet tồn tại hai trong các số lẻ $q_1, q_2, \ldots, q_{n+1}$ bằng nhau, tức là có hai chỉ số i và j

sao cho $q_i = q_j = q$. Khi đó: $a_i = 2^{k_i}q$ và $a_j = 2^{k_j}q$. Suy ra, nếu $k_i \le k_j$ thì a_j chia hết cho a_i còn trong trường hợp ngược lại ta có a_i chia hết cho a_j.

Ví dụ 3.1.14. *Trên một đường tròn có 6 điểm phân biệt, hai điểm bất kỳ được nối với nhau bằng đoạn thẳng màu xanh hoặc màu đỏ. Chứng tỏ rằng tồn tại một tam giác tạo bởi các đoạn thẳng trên có các cạnh cùng màu.*

Lời giải: Gọi A là một trong 6 điểm đó. Theo nguyên lý Dirichlet trong số 5 điểm còn lại có ít nhất $\lceil 5/2 \rceil = 3$ điểm được nối với A cùng màu, ta có thể giả sử 3 điểm đó là B, C, D và cùng nối với A bằng màu đỏ. Nếu trong tam giác BCD có một cạnh màu đỏ thì cạnh này kết hợp với điểm A sẽ tạo thành tam giác với 3 cạnh màu đỏ, ngược lại nếu tam giác BCD không có cạnh màu đỏ thì tức là tất cả các cạnh của nó màu xanh và đây chính là tam giác cần tìm. Trường hợp ba điểm B, C, D nối với điểm A bằng màu xanh được chứng minh tương tự.

Ví dụ 3.1.15. *Chứng minh rằng tồn tại số chỉ gồm chữ số* 7 *chia hết cho* 2003.

Lời giải: Xét dãy số sau: $a_1 = 7,\ a_2 = 77,\ a_3 = 777, \ldots, a_{2004} = 777\ldots777$ (2004 chữ số 7). Chia 2004 số này cho 2003, ta được các số dư tương ứng là $d_1, d_2, d_3, \ldots d_{2004}$. Mặt khác, tập các số dư khi chia cho 2003 là 0, 1, 2, …, 2002, tức là ta có 2003 số dư khác nhau. Theo nguyên lý Dirichlet trong 2004 số dư $d_1, d_2, \ldots, d_{2004}$ sẽ có hai số dư bằng nhau, ta gọi chúng là d_i và d_j với $1 \le j < i \le 2004$. Từ đây suy ra:
$a_i - a_j = (2003m_i + d_i) - (2003m_j + d_j) = 2003(m_i - m_j)$ chia hết cho 2003.

Mặt khác:

$$a_i - a_j = \underbrace{77\ldots77}_{i \text{ chữ số}} - \underbrace{77\ldots77}_{j \text{ chữ số}} = \underbrace{77\ldots77}_{i-j \text{ chữ số}}\underbrace{00\ldots00}_{j \text{ chữ số}}$$
$$= \underbrace{77\ldots77}_{i-j \text{ chữ số}}.10^j = a_{i-j}.10^j$$

Như vậy, $a_{i-j}.10^j = a_{i-j}.2^j.5^j$ chia hết cho 2003 mà 2003 là số nguyên tố nên a_{i-j} chia hết cho 2003. Đó là điều phải chứng minh.

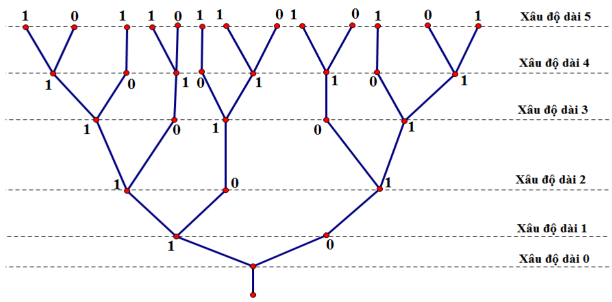
3.1.5. Biểu đồ cây

Một số bài toán đếm có thể được giải bằng biểu đồ cây. Biểu đồ cây là một biểu đồ bao gồm các đoạn thẳng được gọi là các cành và các lá. Cành là những đoạn thẳng mà điểm cuối của nó là điểm xuất phát của một số đoạn thẳng khác. Lá là những đoạn thẳng mà điểm cuối của nó không là xuất phát của đoạn thẳng nào. Số các lá, ứng với các đoạn thẳng cuối cùng, là kết quả của phép đếm.

Ví dụ sau đây cho ta một cách giải bài toán đếm bằng biểu đồ cây.

Ví dụ 3.1.16. *Có bao nhiêu xâu nhị phân chiều dài 5 mà không chứa hai số 0 liên tiếp?*

Lời giải: Ta có biểu đồ cây như sau:



Hình 3.1: Xâu nhị phân dài 5 bit không có hai bit 0 liên tiếp

Biểu đồ cây cho ta tìm được 13 đoạn thẳng kết thúc là lá ứng với 13 xâu nhị phân có độ dài 5 mà không có 2 số 0 liên tiếp.

3.2. Chỉnh hợp, tổ hợp và hệ số nhị thức

3.2.1. Chỉnh hợp

Định nghĩa 3.2.1. *Một hoán vị của một tập hợp gồm n phần tử khác nhau là một cách sắp xếp có thứ tự n phần tử này.*

Định lý 3.2.1. *Số hoán vị của tập n phần tử là $P_n = n!$.*

Định nghĩa 3.2.2. *Một chỉnh hợp chập r của tập hợp gồm n phần tử là một cách sắp xếp có thứ tự r phần tử của tập hợp này.*

Như vậy, một hoán vị của tập S gồm n phần tử chính là một chỉnh hợp chập n của S.

Ví dụ 3.2.1. *Cho tập $S = \{a, b, c, d\}$. Tìm một hoán vị của S và một chỉnh hợp chập 3 của S.*

Lời giải: Cách sắp xếp c, a, d, b là một hoán vị của S. Cách sắp xếp ba phần tử a, d, c là một chỉnh hợp chập 3 của S.

Số chỉnh hợp chập r của một tập có n phần tử được ký hiệu là A_n^r.

Định lý 3.2.2. *Số chỉnh hợp chập r của một tập có n phần tử là:*

$$A_n^r = \frac{n!}{(n-r)!}.$$

Chứng minh. Ta sẽ sử dụng quy tắc nhân để chứng minh định lý này. Giả sử tập S có n phần tử. Phần tử đầu tiên của chỉnh hợp được chọn trong n phần tử của S nên có n cách chọn. Phần tử thứ hai được chọn trong $n-1$ phần tử còn lại của S nên có $n-1$ cách chọn. Tương tự, phần tử thứ ba có $n-2$ cách chọn, và cứ như vậy phần tử thứ r có $n-r+1$ cách chọn. Theo quy tắc nhân ta được
$n(n-1)(n-2)\ldots(n-r+1) =$
$\dfrac{n(n-1)...(n-r+1).(n-r)!}{(n-r)!} = \dfrac{n!}{(n-r)!}$ chỉnh hợp chập r của tập S.
Đặt A_n^r là số chỉnh hợp chập r của tập n phần tử. Vậy, $A_n^r = \dfrac{n!}{(n-r)!}$. □

Đặc biệt, số hoán vị của tập gồm n phần tử là: $A_n^n = n!$.

Ví dụ 3.2.2. *Một đội bóng đá có 18 cầu thủ. Có bao nhiêu cách chọn 11 cầu thủ ra sân mà mỗi cầu thủ chơi ở một vị trí đã định?*

Lời giải: Mỗi cách chọn 11 cầu thủ ra sân thi đấu như trên là một chỉnh hợp chập 11 của 18. Theo định lý 3.2.2 ta có

$$A_{18}^{11} = \frac{18!}{(18-11)!} = 1\ 270\ 312\ 243\ 000$$

cách chọn.

Ví dụ 3.2.3. *Giả sử có tám vận động viên chạy thi. Người về đích đầu tiên được nhận huy chương vàng, người về đích thứ hai được nhận huy chương bạc, người về đích thứ ba được nhận huy chương đồng. Có bao nhiêu cách trao các huy chương này nếu tất cả các kết cục của cuộc thi đều có thể xảy ra?*

Lời giải: Số cách trao huy chương chính là số chỉnh hợp chập 3 của tập hợp gồm 8 phần tử. Vì vậy có:

$$A_8^3 = \frac{8!}{(8-3)!} = 336$$

cách trao huy chương.

Ví dụ 3.2.4. *Giả sử một thương nhân định đi bán hàng tại tám địa điểm nào đó. Người đó bắt đầu cuộc hành trình của mình từ một trong tám địa điểm trên. Biết rằng từ đó có thể đi đến bảy địa điểm còn lại theo thứ tự bất kỳ mà người đó muốn. Hỏi người đó có thể đi đến bảy địa điểm này theo bao nhiêu lộ trình khác nhau?*

Lời giải: Vì địa điểm đầu tiên đã hoàn toàn xác định và người đó có thể đến bảy địa điểm còn lại một cách tùy ý, nên số lộ trình có thể có bằng số hoán vị của tập có bảy phần tử và bằng $7! = 5040$. Nếu muốn tìm lộ trình ngắn nhất người đó phải tính khoảng cách cho mỗi lộ trình trong 5040 lộ trình đó.

3.2.2. Tổ hợp

Định nghĩa 3.2.3. *Một tổ hợp chập r của một tập hợp gồm n phần tử là một cách chọn không quan tâm tới thứ tự r phần tử của tập hợp đã cho. Như vậy, một tổ hợp chập r của một tập hợp gồm n phần tử chính là một tập con gồm r phần tử của tập hợp đó.*

Ví dụ 3.2.5. *Cho tập $A = \{a, b, c, d\}$. Tìm các tổ hợp chập 2 của A.*

Lời giải: Các tập con gồm hai phần tử của A là: $\{a, b\}$, $\{a, c\}$, $\{a, d\}$, $\{b, c\}$, $\{b, d\}$, $\{c, d\}$. Vậy, có sáu tổ hợp chập 2 của tập gồm 4 phần tử.

Số tổ hợp chập r của tập gồm n phần tử được ký hiệu là C_n^r.
Chúng ta có thể xác định số tổ hợp chập r của một tập hợp gồm n phần tử nhờ công thức tính số chỉnh hợp chập r của tập hợp đó.

Định lý 3.2.3. *Số tổ hợp chập r của tập gồm n phần tử $(0 \leqslant r \leqslant n)$ là:*

$$C_n^r = \frac{n!}{r!(n-r)!}.$$

Chứng minh. Giả sử tập S có n phần tử. Từ mỗi tổ hợp chập r của S, sắp thứ tự cho r phần tử này sẽ cho $r!$ chỉnh hợp chập r của S. Ta có C_n^r tổ hợp chập r của S và có A_n^r chỉnh hợp chập r của S nên:

$$A_n^r = C_n^r.r!$$

Từ đó suy ra: $C_n^r = \dfrac{A_n^r}{r!} = \dfrac{n!}{r!(n-r)!}$. □

Hệ quả 3.2.1. *Cho n và r là những số nguyên không âm sao cho $r \leqslant n$. Khi đó, $C_n^r = C_n^{n-r}$.*

Chứng minh. Theo định lý 3.2.3 ta có :

$$C_n^r = \frac{n!}{r!(n-r)!}$$

và

$$C_n^{n-r} = \frac{n!}{(n-r)!(n-(n-r))!} = \frac{n!}{r!(n-r)!}.$$

Vậy $C_n^r = C_n^{n-r}$. □

Người ta còn dùng ký hiệu

$$\binom{n}{r} \tag{3.1}$$

để ký hiệu số tổ hợp chập r của n phần tử. Số đó cũng được gọi là **hệ số nhị thức** vì tổ hợp chập r của n phần tử chính là hệ số của $a^{n-r}b^r$ trong khai triển của nhị thức $(a+b)^n$ $(r = 0, 1, 2, \ldots, n)$.

Ví dụ 3.2.6. *Có bao nhiêu cách chọn* 5 *trong số* 30 *sinh viên trong lớp tham dự đại hội Hội sinh viên trường?*

Lời giải: Số cách chọn chính là số tổ hợp chập 5 của tập hợp gồm 30 phần tử. Theo định lý 3.2.3 ta có:

$$C_{30}^5 = \frac{30!}{5!(30-5)!} = 142506$$

cách chọn.

3.2.3. Hệ số nhị thức

Định lý 3.2.4. *Cho n và k là những số nguyên dương với $n \geqslant k$. Khi đó:*

$$C_{n+1}^{k} = C_n^{k-1} + C_n^k.$$

Chứng minh. Ta có:

$$C_n^{k-1} + C_n^k = \frac{n!}{(n-k+1)!(k-1)!} + \frac{(n+1-k).n!}{(n+1-k)!k!} = \frac{(n+1)!}{(n+1-k)!k!} = C_{n+1}^k$$

□

Hằng đẳng thức trên được gọi là *hằng đẳng thức Pascal*. Hằng đẳng thức Pascal là cơ sở để sắp xếp hình học các hệ số nhị thức thành tam giác như trong hình sau:

$$\begin{array}{ccccccccccc}
 & & & & & C_0^0 & & & & & \\
 & & & & C_1^0 & & C_1^1 & & & & \\
 & & & C_2^0 & & C_2^1 & & C_2^2 & & & \\
 & & C_3^0 & & C_3^1 & & C_3^2 & & C_3^3 & & \\
 & C_4^0 & & C_4^1 & & C_4^2 & & C_4^3 & & C_4^4 & \\
C_5^0 & & C_5^1 & & C_5^2 & & C_5^3 & & C_5^4 & & C_5^5
\end{array}$$

Hàng thứ n của tam giác gồm các hệ số nhị thức C_n^k với $k = 0, 1, 2, \ldots, n$.

Tam giác này được gọi là tam giác Pascal. Hằng đẳng thức Pascal chỉ ra rằng khi cộng hai hệ số nhị thức liền kề trong tam giác sẽ nhận được hệ số nhị thức của hàng tiếp theo giữa hai hệ số này.

Theo hằng đẳng thức Pascal $C_4^1 + C_4^2 = C_5^2$, ta có thể lập tam giác Pascal như sau:

$$\begin{array}{ccccccccccccccc}
 & & & & & & & 1 & & & & & & & \\
 & & & & & & 1 & & 1 & & & & & & \\
 & & & & & 1 & & 2 & & 1 & & & & & \\
 & & & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 & & \\
 & 1 & & 6 & & 15 & & 20 & & 15 & & 6 & & 1 & \\
1 & & 7 & & 21 & & 35 & & 35 & & 21 & & 7 & & 1 \\
 & & & & & & & \cdots & & & & & & &
\end{array}$$

Tam giác Pascal.

Ngoài hằng đẳng thức Pascal, hệ số nhị thức còn được sử dụng trong nhiều hằng đẳng thức khác. Hai trong số chúng sẽ được cho dưới đây và sẽ được chứng minh bằng lý thuyết tổ hợp.

Định lý sau đây được gọi là **định lý nhị thức** cho ta hệ số trong khai triển lũy thừa của một tổng hai số hạng.

Định lý 3.2.5. *Cho x và y là hai biến và n là một số nguyên dương. Khi đó:*

$$(x+y)^n = C_n^0 x^n + C_n^1 x^{n-1} y + \ldots + C_n^{n-1} x y^{n-1} + C_n^n y^n.$$

Chứng minh. Ta sẽ chứng minh định lý này bằng lý thuyết tổ hợp. Các số hạng trong khai triển của $(x+y)^n$ sẽ có dạng $x^{n-i}y^i$ với $i = 0, 1, 2, \ldots, n$. Để nhận được số hạng $x^{n-i}y^i$ ta chọn x từ $n-i$ tổng $(x+y)$ và có C_n^{n-i} cách chọn như vậy. Khi đó chỉ có đúng một cách chọn y từ i tổng còn lại. Vì $C_n^{n-i} = C_n^i$ nên hệ số của $x^{n-i}y^i$ là C_n^i. □

Ví dụ 3.2.7. *Tìm khai triển của biểu thức $(x+y)^4$.*

Lời giải:

$$\begin{aligned}(x+y)^4 &= \textstyle\sum_{k=0}^{4} C_4^k x^{4-k} y^k \\ &= C_4^0 x^4 + C_4^1 x^3 y + C_4^2 x^2 y^2 + C_4^3 x y^3 + C_4^4 y^4 \\ &= x^4 + 4x^3 y + 6x^2 y^2 + 4 x y^3 + y^4.\end{aligned}$$

Ví dụ 3.2.8. *Tính hệ số của x^7y^3 trong khai triển nhị thức $(2x-3y)^{10}$.*

Lời giải: Theo định lý nhị thức ta có:

$$(2x + (-3y))^{10} = \sum_{k=0}^{10} C_{10}^k (2x)^{10-k} (-3y)^k.$$

Nên hệ số của x^7y^3 là $C_{10}^3.2^7.(-3)^3 = -414.720$.

Hệ quả 3.2.2.

$$2^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k 1^{n-k} 1^k = \sum_{k=0}^{n} C_n^k$$

Chứng minh. Áp dụng định lý 3.2.5 với $x = y = 1$. □

Hệ quả 3.2.3. *Cho n là một số nguyên dương. Khi đó:*

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k . C_n^k = 0.$$

Chứng minh. Áp dụng định lý 3.2.5 với $x = 1, y = -1$. □

Từ hệ quả trên, ta suy ra số tập con có số phần tử lẻ của một tập hợp bằng số tập con có số phần tử chẵn của nó.

Hằng đẳng thức sau đây có tên gọi **hằng đẳng thức Vandermonde** cũng được sử dụng nhiều trong các bài toán đếm.

Định lý 3.2.6. *Giả sử m, n và r là những số nguyên không âm sao cho r không vượt quá m hoặc n. Khi đó:*

$$C^r_{m+n} = \sum_{k=0}^{r} C^{r-k}_m C^k_n.$$

Chứng minh. Giả sử tập A có m phần tử, tập B có n phần tử, và $A \cap B = \varnothing$. Khi đó, số cách chọn r phần tử từ hợp của hai tập hợp này là C^r_{m+n}. Một cách khác để chọn r phần tử từ hai tập hợp này ta chọn k phần tử $(k = 0, 1, \ldots, r)$ từ tập A và $r - k$ phần tử từ tập B. Theo quy tắc nhân ta có $C^k_m . C^{r-k}_n$ cách chọn. Nên tổng số cách chọn r phần tử từ hợp của hai tập hợp này bằng $\sum_{k=0}^{r} C^{r-k}_m C^k_n$. Ta đã chứng minh được:

$$C^r_{m+n} = \sum_{k=0}^{r} C^{r-k}_m C^k_n.$$

□

3.3. Chỉnh hợp và tổ hợp suy rộng

Trong nhiều bài toán đếm, những phần tử có thể được sử dụng lặp lại. Ví dụ, những chữ cái và những chữ số có thể được sử dụng nhiều lần trong một biển đăng ký xe. Khi mua một tá quà tặng, mỗi loại có thể được chọn nhiều lần. Trong chỉnh hợp và tổ hợp, mỗi đối tượng chỉ được sử dụng nhiều nhất một lần. Trong phần này, chúng ta sẽ tìm cách giải các bài toán đếm khi một số phần tử được lặp đi lặp lại nhiều lần.

3.3.1. Chỉnh hợp lặp

Định nghĩa 3.3.1. *Một chỉnh hợp lặp chập r của tập gồm n phần tử là một cách sắp xếp có thứ tự r phần tử từ tập hợp đó mà các phần tử có thể lặp lại.*

Ví dụ 3.3.1. *Cho tập $A = \{a, b, c, d, e\}$. Cách sắp xếp c, a, d, b, d, a, c là một chỉnh hợp lặp chập 7 của A.*

Định lý 3.3.1. *Số các chỉnh hợp lặp chập r của tập n phần tử bằng n^r.*

Chứng minh. Khi cho phép lặp mỗi một trong r vị trí của chỉnh hợp có n cách chọn, mỗi cách chọn là một trong n phần tử của tập đã cho. Theo quy tắc nhân có n^r chỉnh hợp lặp chập r của tập n phần tử. □

Ví dụ 3.3.2. *Có bao nhiêu cách lấy ra ba quả bóng từ một bình kín chứa 8 quả bóng, nếu sau mỗi lần lấy một quả bóng ra lại thả nó vào bình và thứ tự các quả bóng được lấy ra là quan trọng?*

Lời giải: Vì mỗi lần có thể lấy được một trong tám quả bóng nên theo quy tắc nhân có $8^3 = 512$ cách lấy ba quả bóng từ trong bình ra.

Ví dụ 3.3.3. *Từ bảng chữ cái tiếng Anh có thể tạo ra được bao nhiêu xâu có độ dài n với n là một số nguyên dương?*

Lời giải: Vì có 26 chữ cái và mỗi chữ có thể được lặp lại, nên tại mỗi vị trí của xâu sẽ có 26 khả năng. Theo quy tắc nhân có 26^n xâu chữ cái khác nhau có chiều dài n.

3.3.2. Tổ hợp lặp

Định nghĩa 3.3.2. *Một tổ hợp lặp chập r của một tập hợp gồm n loại phần tử là một cách lấy r phần tử không kể thứ tự từ tập hợp đó mà nhiều phần tử có thể cùng một loại.*

Ví dụ 3.3.4. *Giả sử trong một giỏ quả có táo, cam, lê mỗi loại có ít nhất bốn quả. Tính số cách lấy 4 quả từ giỏ quả trên nếu thứ tự các quả được chọn là không quan trọng và các loại quả thuộc cùng một loại là không phân biệt.*

Lời giải: Có tất cả 15 cách chọn 4 quả như sau:

4 táo	4 cam	4 lê
3 táo, 1 cam	3 táo, 1 lê	3 cam, 1 táo
3 cam, 1 lê	3 lê, 1 táo	3 lê, 1 cam
2 táo, 2 cam	2 táo, 2 lê	2 cam, 2 lê
2 táo, 1 cam, 1 lê	2 cam, 1 táo, 1 lê	2 lê, 1 táo, 1 cam

Ví dụ 3.3.5. *Có bao nhiêu cách chọn 5 tờ tiền từ một két đựng tiền gồm những tờ 1 nghìn, 2 nghìn, 5 nghìn, 10 nghìn, 20 nghìn, 50 nghìn và 100 nghìn? Giả sử thứ tự các tờ tiền được chọn ra là không quan trọng, các tờ tiền cùng loại không phân biệt và mỗi loại có ít nhất 5 tờ.*

Lời giải: Vì không kể tới thứ tự chọn những tờ tiền và mỗi loại có thể có nhiều hơn một tờ nên bài toán này chính là tính số tổ hợp lặp chập 5 từ tập 7 phần tử. Liệt kê tất cả các khả năng có thể là một việc làm chán ngắt vì có quá nhiều tổ hợp như vậy. Thay vào đó, chúng ta sẽ minh họa cách sử dụng kỹ thuật đếm các tổ hợp lặp.

Giả sử két tiền có 7 ngăn, mỗi ngăn đựng một loại tiền, các ngăn được phân cách bằng các vách ngăn. Việc chọn 5 tờ tiền tương ứng với việc đặt 5 vật đánh dấu vào 7 ngăn chứa 7 loại tiền. Giả sử 6 vách ngăn được biểu thị bằng thanh đứng còn 5 tờ tiền biểu thị bằng 5 ngôi sao. Khi đó ta có thể biểu thị tổ hợp gồm 2 tờ 2 nghìn, 1 tờ 10 nghìn, 2 tờ 50 nghìn như sau:

$$| * * || * || * * |$$

Số cách chọn 5 tờ tiền tương ứng với số cách sắp xếp 6 thanh và 5 ngôi sao. Do vậy, số cách chọn 5 tờ tiền từ các loại tiền trên là:

$$C_{11}^{5} = \frac{11!}{5!6!} = 462.$$

Tổng quát hóa bài toán trên ta có định lý sau:

Định lý 3.3.2. *Số tổ hợp lặp chập r của tập n loại phần tử bằng C_{r+n-1}^{r}.*

Chứng minh. Mỗi tổ hợp lặp chập r của tập n phần tử có thể biểu diễn bằng một dãy $n-1$ thanh đứng và r ngôi sao. Ta dùng $n-1$ thanh đứng để phân cách các ngăn. Ngăn thứ i chứa bao nhiêu ngôi sao thì có bấy nhiêu lần xuất hiện phần tử thứ i trong tổ hợp. Ví dụ, tổ hợp lặp chập 6 từ tập 4 phần tử được biểu thị bằng 3 thanh đứng và 6 ngôi sao. Dãy:

$$* * | * | * * * |$$

biểu thị tổ hợp chứa đúng 2 phần tử thứ nhất, 1 phần tử thứ hai, 3 phần tử thứ ba và không có phần tử thứ tư nào.

Mỗi dãy $n-1$ thanh đứng và r ngôi sao ứng với một tổ hợp lặp chập r của tập n phần tử. Số các dãy như vậy bằng C_{r+n-1}^{r} vì mỗi dãy ứng với một cách chọn r chỗ cho r ngôi sao trong $r+n-1$ chỗ gồm cả ngôi sao và thanh đứng. Vậy, có đúng C_{r+n-1}^{r} tổ hợp lặp chập r từ tập gồm n loại phần tử. $\square$

Ví dụ 3.3.6. *Một cửa hàng bánh mỳ có 5 loại bánh khác nhau và mỗi loại có ít nhất 8 chiếc. Có bao nhiêu cách chọn lấy 8 chiếc bánh? Giả sử ta chỉ quan tâm đến loại bánh và không quan tâm đến thứ tự chọn chúng.*

Lời giải: Số cách chọn 8 chiếc bánh bằng số tổ hợp lặp chập 8 của tập có 5 phần tử. Theo định lý 3.3.2 ta có:

$$C_{8+5-1}^{8} = C_{12}^{8} = 495$$

cách chọn 8 chiếc bánh.

Định lý 3.3.2 cũng được dùng để tìm số nghiệm nguyên không âm của những phương trình vô định bậc nhất chịu những ràng buộc nào đó. Ta xét ví dụ sau:

Ví dụ 3.3.7. *Phương trình*

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 20$$

có bao nhiêu nghiệm nguyên không âm?

Lời giải: Chúng ta thấy rằng mỗi nghiệm của phương trình ứng với một cách chọn 20 phần tử từ một tập hợp có 4 loại sao cho: có x_1 phần tử loại 1, x_2 phần tử loại 2, x_3 phần tử loại 3, x_4 phần tử loại 4 được chọn. Vì vậy, số nghiệm cần tìm bằng số tổ hợp lặp chập 20 của tập 4 phần tử và bằng:

$$C_{20+4-1}^{20} = C_{23}^{20} = 1771.$$

Chúng ta cũng có thể tìm được số nghiệm của phương trình này khi một số ẩn chịu những ràng buộc nào đó.

Ví dụ 3.3.8. *Tìm số nghiệm nguyên không âm của phương trình*

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 20$$

thỏa mãn điều kiện $x_1 \geqslant 3, x_3 \geqslant 5, x_4 \geqslant 2$.

Lời giải: Ta thấy một nghiệm của phương trình

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 20$$

thỏa mãn điều kiện này ứng với cách chọn 20 phần tử từ tập 4 loại, trong đó loại 1 có ít nhất 3 phần tử, loại 3 có ít nhất 5 phần tử, loại 4 có ít nhất 2 phần tử. Vì thế, trước tiên ta chọn 3 phần tử loại 1, 5 phần tử loại 3, 2 phần tử loại 4, sau đó chọn thêm 10 phần tử nữa. Theo định lý 3.3.2 số nghiệm cần tìm là $C_{10+4-1}^{10} = C_{13}^{10} = 286$.

3.3.3. Hoán vị của tập hợp có những phần tử giống nhau

Trong bài toán đếm một số phần tử có thể giống nhau nên ta cần phải thận trọng, tránh đếm chúng hơn một lần. Ta xét ví dụ sau:

Ví dụ 3.3.9. *Có thể có được bao nhiêu xâu khác nhau bằng cách sắp xếp lại các chữ cái trong từ SUCCESS?*

Lời giải: Vì có một số chữ cái của từ SUCCESS là giống nhau nên ta không thể tính theo số hoán vị của 7 được. Từ này chứa 3 chữ S, 2 chữ C, 1 chữ U và 1 chữ E. Ta nhận thấy có C_7^3 cách đặt chỗ cho 3 chữ S, còn lại 4 chỗ trống. Có C_4^2 cách đặt chỗ cho chữ C, còn lại 2 chỗ trống. Có C_2^1 cách đặt chỗ cho chữ U và C_1^1 cách đặt chỗ cho chữ E. Theo quy tắc nhân, số các xâu khác nhau là:

$$C_7^3.C_4^2.C_2^1.C_1^1 = \frac{7!4!2!1!}{3!4!2!2!1!1!1!0!} = \frac{7!}{3!2!1!1!} = 420.$$

Định lý sau đây sẽ cho chúng ta cách tính hoán vị của n phần tử trong đó mỗi loại có thể có hơn một phần tử và những phần tử cùng loại không phân biệt.

Định lý 3.3.3. *Số hoán vị của n phần tử trong đó có n_1 phần tử như nhau thuộc loại 1, n_2 phần tử như nhau thuộc loại 2, ..., n_m phần tử như nhau thuộc loại m bằng*

$$\frac{n!}{n_1!.n_2!...n_m!}.$$

Chứng minh. Để xác định số hoán vị, ta sẽ tìm số cách đặt chỗ cho từng loại phần tử trong hoán vị. Trước tiên, có $C_n^{n_1}$ đặt chỗ cho n_1 phần tử loại 1, còn lại $n - n_1$ chỗ trống. Sau đó, có $C_{n-n_1}^{n_2}$ cách đặt chỗ cho n_2 phần tử loại 2, còn lại $n - n_1 - n_2$ chỗ trống. Tiếp tục đặt các phần tử loại 3, loại 4, ..., loại $m - 1$ vào những chỗ trống trong hoán vị. Cuối cùng có n_m chỗ trống để đặt n_m phần tử loại m vào hoán vị. Theo quy tắc nhân, số hoán vị có thể có là:

$$C_n^{n_1}.C_{n-n_1}^{n_2}...C_{n_m}^{n_m} = = \frac{n!}{n_1!(n-n_1)!}.\frac{(n-n_1)!}{n_2!(n-n_1-n_2)!}\cdots\frac{n_m!}{n_m!0!} = \frac{n!}{n_1!.n_2!\dots n_m!}.$$

□

Ví dụ 3.3.10. *Một người có ba quả xoài, hai quả lê và hai quả đu đủ. Nếu người đó ăn mỗi ngày một quả và chỉ có loại quả là quan trọng thì có bao nhiêu cách ăn các quả này?*

Lời giải: Vì chỉ có loại quả là quan trọng nên số cách ăn các quả đó bằng số hoán vị của 7 quả, trong đó có 3 quả xoài, 2 quả lê và 2 quả đu đủ. Vậy, người đó có:

$$\frac{7!}{3!2!2!} = 210$$

cách ăn các quả trên.

3.3.4. Phân bố những đồ vật vào trong hộp

Một trong những bài toán mà ta thường gặp là tìm số cách đặt những vật khác nhau vào trong những hộp khác nhau sao cho mỗi hộp chứa số phần tử đã được ấn định. Ta xét ví dụ sau:

Ví dụ 3.3.11. *Có bao nhiêu cách chia những xấp bài* 8 *quân cho mỗi một người trong* 4 *người chơi từ một cỗ bài chuẩn* 52 *quân?*

Lời giải: Chúng ta sẽ dùng quy tắc nhân để giải bài toán này. Trước tiên, người đầu tiên có thể nhận được 8 quân bài bằng C_{52}^8 cách, còn lại 44 quân bài. Sau đó, người thứ hai có thể nhận 8 quân bài bằng C_{44}^8 cách, còn lại 36 quân bài. Người thứ ba có thể nhận được 8 quân bài bằng C_{36}^8 và người thứ tư có thể nhận được 8 quân bài bằng C_{28}^8 cách. Theo quy tắc nhân, số cách chia cho 4 người mỗi người 8 quân bài là:

$$C_{52}^8.C_{44}^8.C_{36}^8.C_{28}^8 = \frac{52!}{8!44!}\frac{44!}{8!36!}\frac{36!}{8!28!}\frac{28!}{8!20!} = \frac{52!}{(8!)^4.20!}.$$

Lưu ý. Bài toán trên có thể chuyển thành bài toán tìm số hoán vị của 52 phần tử trong đó có năm loại, bốn loại đầu mỗi loại có 8 phần tử giống hệt nhau, loại thứ năm có 20 phần tử giống hệt nhau. Thật vậy, ta có thể xây dựng được phép tương ứng một - một giữa tập các hoán vị và tập các cách chia bài như sau: Giả sử ta có 52 ô được đánh số từ 1 đến 52. Mỗi một trong bốn người chơi được phát 8 ô. Những ô chia cho người thứ nhất là ô loại 1, những ô chia cho người thứ hai là ô loại 2, ..., còn lại 20 ô là ô loại 5. Khi đó cách chia sấp bài 8 quân cho mỗi người chơi chính là một cách xếp mỗi quân bài vào một ô.
Số cách sắp xếp những đồ vật vào trong hộp được cho bởi định lý sau:

Định lý 3.3.4. *Số cách phân chia n đồ vật khác nhau vào trong m hộp khác nhau sao cho có n_i vật được đặt vào hộp thứ i với $i = 1, 2, \ldots, m$ bằng:*

$$\frac{n!}{n_1!.n_2!...n_m!}.$$

Định lý này được chứng minh tương tự như định lý 3.3.3. Chúng tôi giành cho độc giả tự chứng minh định lý này.

3.4. Bài tập chương 3

Bài 3.1. Trong một lớp học có 12 sinh viên nam và 25 sinh viên nữ.

a. Có bao nhiêu cách chọn hai đại diện trong đó một là sinh viên nam, một là sinh viên nữ?

b. Có bao nhiêu cách chọn một đại diện hoặc là sinh viên nam hoặc là sinh viên nữ?

Bài 3.2. Một phiếu trắc nghiệm đa lựa chọn gồm 10 câu hỏi. Mỗi câu hỏi có 4 phương án trả lời.

a. Có bao nhiêu cách điền một phiếu trắc nghiệm nếu mọi câu hỏi đều được trả lời?

b. Có bao nhiêu cách điền một phiếu trắc nghiệm nếu có thể bỏ trống?

Bài 3.3. Có bao nhiêu người có họ tên viết tắt khác nhau bằng ba chữ cái trong bảng chữ cái tiếng Anh?

Bài 3.4. Có bao nhiêu người có họ tên viết tắt khác nhau bằng ba chữ cái trong bảng chữ cái tiếng Anh mà không chữ nào bị lặp lại?

Bài 3.5. Có bao nhiêu xâu nhị phân có độ dài bằng 6?

Bài 3.6. Có bao nhiêu xâu tam phân có độ dài bằng 10 bắt đầu và kết thúc bởi số 1?

Bài 3.7. Có bao nhiêu xâu nhị phân (khác xâu rỗng) có độ dài ít hơn hoặc bằng n với n là một số nguyên dương?

Bài 3.8. Có bao nhiêu xâu chữ trong bảng chữ cái tiếng Anh có chiều dài bằng 4 và có chứa chữ x?

Bài 3.9. Trong những số nguyên dương có ba chữ số, có bao nhiêu số:

a. Chia hết cho 7?

b. Có ba chữ số như nhau?

c. Chia hết cho 3 hoặc 4?

d. Không chia hết cho 3 hoặc 4?

e. Chia hết cho 3 nhưng không chia hết cho 4?

Bài 3.10. Có bao nhiêu xâu gồm ba chữ số trong hệ thập phân

a. Không chứa cùng một chữ số ba lần?

b. Bắt đầu bằng chữ số lẻ?

c. Có đúng hai chữ số 2?

d. Có chứa chữ số 3?

Bài 3.11. Có bao nhiêu hàm khác nhau từ tập 10 phần tử đến tập

a. Có 3 phần tử?

b. Có 7 phần tử?

c. Có n phần tử và là hàm đơn ánh với n là một số nguyên dương?

Bài 3.12. Có bao nhiêu hàm số từ tập $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ tới tập $\{a, b, c, d\}$ sao cho

a. đó là các hàm đơn ánh?

b. a là ảnh của 1 và 6?

c. b không là ảnh của 1 và d không là ảnh của 4?

Bài 3.13. Có bao nhiêu xâu nhị phân độ dài bằng 8 bắt đầu bằng hai số 0 hoặc kết thúc bằng ba số 1?

Bài 3.14. Có bao nhiêu xâu nhị phân độ dài 10 và có năm số 0 hoặc năm số 1 liền nhau?

Bài 3.15. Dùng biểu đồ cây tìm số xâu nhị phân độ dài 4 không có ba số 0 liền nhau.

Bài 3.16. Có bao nhiêu cách xếp các chữ a, b, c, d sao cho chữ b không đi liền sau chữ a?

Bài 3.17. Dùng quy nạp toán học chứng minh quy tắc cộng cho m công việc từ quy tắc cộng cho hai việc.

Bài 3.18. Dùng quy nạp toán học chứng minh quy tắc nhân tính số cách làm một nhiệm vụ gồm m việc từ quy tắc nhân cho hai việc.

Bài 3.19. Chứng tỏ rằng trong một lớp có 30 sinh viên thì ít nhất có 2 sinh viên có tên bắt đầu bằng cùng một chữ cái.

Bài 3.20. Cho d là một số nguyên dương. Chứng tỏ rằng trong một nhóm tùy ý gồm $d+1$ số nguyên có ít nhất hai số khi chia cho d có cùng số dư.

Bài 3.21. Cho S và T là hai tập hữu hạn và $|S| > |T|$. Chứng minh rằng nếu f là một hàm từ tập S đến tập T thì sẽ có ít nhất hai phần tử $s_1, s_2 \in S$ sao cho $f(s_1) = f(s_2)$.

Bài 3.22. Mỗi sinh viên trong một trường đại học có quê ở một trong 26 tỉnh. Cần phải tuyển ít nhất bao nhiêu sinh viên để chắc chắn có 50 sinh viên cùng tỉnh?

Bài 3.23. Cho (x_i, y_i), $i = 1, 2, 3, 4, 5$ là tập hợp gồm năm điểm khác nhau có các tọa độ nguyên trên mặt phẳng Oxy. Chứng tỏ rằng có ít nhất một trung điểm của đoạn nối các cặp điểm này có tọa độ nguyên.

Bài 3.24. Cần có bao nhiêu cặp số nguyên (a, b) để chắc chắn có hai cặp số nguyên (a_1, b_1) và (a_2, b_2) sao cho: a_1 *mod* $5 = a_2$ *mod* 5 và b_1 *mod* $5 = b_2$ *mod* 5?

Bài 3.25. Chỉ ra rằng trong 5 số chọn từ 8 số nguyên dương đầu tiên nhất thiết có một cặp có tổng bằng 9.

Bài 3.26. Chỉ ra rằng trong 7 số chọn từ 10 số nguyên dương đầu tiên chắc chắn có hai cặp có tổng bằng 11.

Bài 3.27. Có 51 ngôi nhà trong một phố. Mỗi ngôi nhà có địa chỉ là một trong những con số từ 1000 đến 1099. Chỉ ra rằng ít nhất có hai nhà có địa chỉ là hai số nguyên liên tiếp.

Bài 3.28. Chỉ ra rằng trong một nhóm có 5 người trong đó hai người bất kỳ hoặc là bạn hoặc là kẻ thù không phải luôn có ba người là bạn của nhau hoặc là kẻ thù của nhau.

Bài 3.29. Một mạng máy tính gồm có 6 máy. Mỗi máy nối trực tiếp hoặc không nối với những máy khác. Chỉ ra rằng có ít nhất hai máy mà số máy khác nối với chúng là bằng nhau.

Bài 3.30. Cho A là tập hợp có 10 phần tử mà mỗi phần tử là một trong những số nguyên từ 1 đến 50. Chứng minh rằng có ít nhất hai tập con gồm 5 phần tử của A có tổng các phần tử bằng nhau.

Bài 3.31. Liệt kê tất cả các hoán vị của tập $\{a, b, c\}$.

Bài 3.32. Có bao nhiêu hoán vị của tập $\{a, b, c, d, e\}$ với phần tử cuối cùng là a?

Bài 3.33. Có bao nhiêu thứ tự có thể xảy ra trong cuộc thi chạy giữa 20 vận động viên, biết rằng không có hai vận động viên nào về đích cùng lúc?

Bài 3.34. Có bao nhiêu khả năng có thể xảy ra đối với những vị trí thứ nhất, thứ nhì và thứ ba trong cuộc đua có 12 con ngựa, nếu mọi thứ tự đều có thể?

Bài 3.35. Một nhóm sinh viên gồm n nam và n nữ. Có bao nhiêu cách xếp

a. Nam nữ đứng xen kẽ nhau thành một hàng?

b. Nam nữ đứng xen kẽ nhau thành một vòng tròn?

c. Cả nhóm thành hai hàng sao cho đối diện với một nam là một nữ?

Bài 3.36. Có bao nhiêu cách chọn một tập hợp 5 chữ từ bảng chữ cái tiếng Anh?

Bài 3.37. Có bao nhiêu xâu nhị phân độ dài 10 có:

a. Đúng 3 số 0?

b. Số các số 0 bằng số các số 1?

c. Ít nhất 7 số 1?

d. Ít nhất 3 số 1?

Bài 3.38. Một đội bóng gồm 15 cầu thủ:

a. Có bao nhiêu cách chọn 11 cầu thủ để thi đấu?

b. Có bao nhiêu cách chọn 11 cầu thủ sao cho mỗi cầu thủ chơi ở một vị trí đã định?

c. Trong 15 cầu thủ có 4 cầu thủ dự bị. Có bao nhiêu cách chọn 11 cầu thủ sao cho có ít nhất một cầu thủ dự bị?

Bài 3.39. Trong một đám cưới có 10 người kể cả cô dâu và chú rể. Để chụp ảnh, người ta xếp 6 người thành một hàng. Hỏi có bao nhiêu cách xếp hàng nếu:

a. Mọi kiểu ảnh đều có cô dâu?

b. Mọi kiểu ảnh đều có cô dâu và chú rể?

c. Chỉ có cô dâu hoặc chú rể xuất hiện trong mọi kiểu ảnh?

d. Mọi kiểu ảnh cô dâu đều đứng cạnh chú rể?

Bài 3.40. Có bao nhiêu cách rút 5 quân từ bộ bài gồm 52 quân thỏa mãn:

a. Có tứ quý át?

b. Có cả 5 quân đều cùng một chất?

c. Có đúng một đôi (không nhất thiết cùng màu)?

d. Có ít nhất một đôi (không nhất thiết cùng màu)?

Bài 3.41. Một khách sạn có 10 tầng. Năm khách hàng cùng đi lên thang máy từ tầng một và chọn tầng ra một cách ngẫu nhiên và độc lập. Hỏi có bao nhiêu cách để:

a. Tất cả cùng ra ở tầng năm?

b. Tất cả cùng ra ở một tầng?

c. Mỗi người ra ở một tầng khác nhau?

d. Năm người ra ở bốn tầng khác nhau?

Bài 3.42. Từ tập các số nguyên dương không vượt quá 100 có thể tạo được bao nhiêu chỉnh hợp chập 4 chứa 3 số nguyên liên tiếp:

a. Theo trật tự thông thường và có thể bị ngăn cách bởi các số khác của chỉnh hợp?

b. Tại những vị trí liên tiếp của chỉnh hợp?

Bài 3.43. Trong bảng chữ cái tiếng Anh có 21 phụ âm và 5 nguyên âm. Có bao nhiêu xâu gồm 6 chữ thường chứa

a. Đúng một nguyên âm?

b. Ít nhất hai nguyên âm?

c. Chữ a?

d. Chữ a và chữ b?

Nếu có thêm yêu cầu 6 chữ trong xâu phải phân biệt thì kết quả thay đổi thế nào?

Bài 3.44. Có bao nhiêu xâu nhị phân chứa đúng tám số 0 và mười số 1 và ngay sau mỗi số 0 nhất thiết là một số 1?

Bài 3.45. Có bao nhiêu xâu nhị phân độ dài 10 chứa ít nhất ba số 0 và ít nhất bốn số 1?

Bài 3.46. Tìm khai triển của $(2x - 3y)^5$.

Bài 3.47. Tìm hệ số của x^4y^6 trong khai triển của $(x + 2y)^{10}$

Bài 3.48. Tìm công thức tính hệ số của x^k trong khai triển của $(x + \frac{1}{x})^{100}$ với k là số tự nhiên.

Bài 3.49. Cho S là một tập hữu hạn. Chứng minh rằng số các tập con có số phần tử lẻ cũng bằng số các tập con có số phần tử chẵn của S.

Bài 3.50. Có bao nhiêu cách chọn lần lượt có hoàn lại 5 phần tử từ tập gồm 3 phần tử?

Bài 3.51. Có bao nhiêu xâu gồm 6 chữ cái trong bảng chữ cái tiếng Anh?

Bài 3.52. Có bao nhiêu cách phân 3 công việc cho 5 người làm nếu một người có thể làm được nhiều việc?

Bài 3.53. Trong một cửa hàng có 6 loại túi sau: túi đựng hạt giống cây cải, túi đựng trứng, túi đựng muối, túi đựng đường, túi đựng nho và túi bình thường. Có bao nhiêu cách chọn:

a. 6 túi?

b. 12 túi sao cho mỗi loại có ít nhất một túi?

c. 15 túi sao cho có ít nhất 4 túi muối và có ít nhất 3 túi đựng nho?

d. 12 túi sao cho có ít nhất ba túi trứng và có không quá 5 túi muối?

Bài 3.54. Có bao nhiêu cách chọn 8 đồng tiền xu từ một hộp chứa 100 đồng một nghìn đồng giống hệt nhau và 80 đồng hai nghìn đồng giống hệt nhau?

Bài 3.55. Một nhà xuất bản có 3000 bản của cuốn truyện "Cuốn theo chiều gió". Có bao nhiêu cách cất chúng vào ba kho hàng nếu các cuốn truyện giống hệt nhau?

Bài 3.56. Phương trình: $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 21$ có bao nhiêu nghiệm nguyên không âm sao cho:

a. $x_1 \geqslant 1$?

b. $x_i \geqslant 2$ với $i = 1, 2, 3, 4, 5$?

c. $1 \leqslant x_2 \leqslant 10$?

d. $x_1 \geqslant 1$, $x_2 \geqslant 2$, $x_3 \geqslant 3$, $x_4 \geqslant 4$, $x_5 \geqslant 5$?

e. $x_1 \leqslant 8$, $x_3 \geqslant 8$?

Bài 3.57. Có bao nhiêu xâu tam phân độ dài 10 chứa đúng hai số 0, ba số 1 và năm số 2?

Bài 3.58. Một gia đình có 14 đứa con, trong đó có hai nhóm sinh ba, ba nhóm sinh đôi và hai đứa trẻ sinh đơn. Những đứa trẻ cùng sinh đôi hoặc cùng sinh ba giống nhau như đúc. Hỏi có bao nhiêu cách xếp bọn trẻ:

a. Thành một dãy?

b. Thành một vòng tròn?

Bài 3.59. Bất đẳng thức $x_1 + x_2 + x_3 \leqslant 11$ có bao nhiêu nghiệm nguyên không âm?

Bài 3.60. Có thể lập được bao nhiêu xâu nhị phân nếu dùng tám chữ số 0 và sáu chữ số 1?

Bài 3.61. Một giáo sư cất bộ sưu tập gồm 40 số báo toán học vào 4 ngăn tủ, mỗi ngăn đựng 10 số. Có bao nhiêu cách cất các tờ báo này vào tủ nếu:

a. Mỗi ngăn được đánh số sao cho có thể phân biệt được?

b. Các ngăn tủ là giống hệt nhau?

Bài 3.62. Trong không gian $Oxyz$, một con bọ di chuyển bằng cách nhảy từng bước dài 1 đơn vị theo hướng dương của trục Ox, Oy hoặc Oz. Tính số cách để con bọ di chuyển từ gốc tọa độ đến điểm $(3, 4, 5)$.

Bài 3.63. Có bao nhiêu cách xếp n cuốn sách lên k giá sách khác nhau nếu:

a. Các cuốn sách là những bản chụp của cùng một đầu sách?

b. Không có hai cuốn nào cùng đầu sách và có kể tới vị trí của các cuốn sách trên giá?

Chương 4

Đệ quy và hệ thức truy hồi

4.1. Định nghĩa bằng đệ quy

Có nhiều cách để định nghĩa một đối tượng. Chúng ta có thể định nghĩa một cách tường minh nhưng điều này không phải lúc nào cũng thực hiện được, có một cách khác là ta định nghĩa đối tượng này qua chính nó. Kỹ thuật này được gọi là đệ quy hay hồi quy. Kỹ thuật đệ quy được sử dụng rất nhiều và đặc biệt hữu ích trong lập trình tin học.

Trong mục này chúng ta sẽ đưa ra định nghĩa đệ quy của những dãy số, hàm số và tập hợp bằng đệ quy.

4.1.1. Định nghĩa hàm bằng đệ quy

Để xem một hàm được định nghĩa bằng đệ quy như thế nào, ta hãy xét ví dụ về định nghĩa hàm giai thừa $F(n)$. Chúng ta có thể định nghĩa một cách tường minh $F(n) = n!$. Tuy nhiên, tính toán giá trị của hàm tại một số nguyên dương n bất kì, chẳng hạn $F(5) = 5!$ ta phải tính $5! = 5.4! = 5.4.3! = 5.4.3.2! = 5.4.3.2.1! = 5.4.3.2.1.0!$. Như vậy, giá trị $F(5)$ được tính thông qua các giá trị trước nó và cuối cùng bao giờ ta cũng phải tính $F(0) = 0! = 1$. Từ ví dụ trên, ta thấy có thể định nghĩa hàm giai thừa $F(n)$ như sau: Đầu tiên ta định nghĩa giá trị $F(n)$ tại $n = 0$, sau đó ta xác định giá trị tại số nguyên n bất kì bằng công thức $F(n) = n.F(n-1)$.

Một cách tổng quát, một hàm $f : \mathbb{N} \longrightarrow X$ ($\mathbb{N}$ là tập số tự nhiên, X là một tập con của tập số thực $\mathbb{R}$) được định nghĩa bằng đệ quy là:

1. Cho trước các giá trị $f(0), f(1), \ldots, f(m-1)$ với m là số tự nhiên đã cho.
2. Cho công thức biểu diễn $f(n)$ qua $f(n-1), f(n-2), \ldots$ với $n \geq m$.

Ví dụ 4.1.1. *Cho hàm f được định nghĩa bằng đệ quy như sau:*

- $f(0) = 2$
- $f(n) = 3f(n-1) + 5$ *với* $n \geq 1$.

Hãy tìm $f(1), f(2), f(3)$ *và* $f(4)$.

Lời giải: Từ định nghĩa của hàm f bằng đệ quy ta có:

$$\begin{array}{rcccccl} f(1) & = & 3f(0)+5 & = & 3.2+5 & = & 11, \\ f(2) & = & 3f(1)+5 & = & 3.11+5 & = & 38, \\ f(3) & = & 3f(2)+5 & = & 3.38+5 & = & 119, \\ f(4) & = & 3f(3)+5 & = & 3.119+5 & = & 362. \end{array}$$

Những ví dụ sau sẽ cho ta định nghĩa đệ quy của một số hàm như: hàm lũy thừa, hàm giai thừa, hàm dạng tổng, hàm dạng tích,...

Ví dụ 4.1.2. *Hãy cho định nghĩa đệ quy của hàm giai thừa* $F(n) = n!$.

Lời giải: Nhận thấy $F(0) = 1$. Do $F(n) = n! = 1.2.3\ldots(n-1).n = n.(n-1)!$ nên ta có công thức $F(n) = n.F(n-1)$.

Ví dụ 4.1.3. *Hãy cho định nghĩa đệ quy của hàm lũy thừa* $F(n) = a^n$, *trong đó a là số thực khác không và n là số nguyên không âm.*

Lời giải: Ta xác định $F(0) = a^0 = 1$. Vì $a^n = a.a^{n-1}$ nên ta có công thức $F(n) = a.F(n-1)$.

Ví dụ 4.1.4. *Hãy cho định nghĩa đệ quy của hàm* $F(n) = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k$.

Lời giải: Đầu tiên ta xác định $F(0) = a_0$.
Sau đó ta tìm công thức đệ quy như sau:

$$F(n) = \sum_{k=0}^{n} a_k = \sum_{k=0}^{n-1} a_k + a_n = F(n-1) + a_n.$$

Ví dụ 4.1.5. *Hãy cho định nghĩa đệ quy của hàm* $F(n) = \prod\limits_{k=0}^{n} a_k$.

Lời giải: Phần đầu của định nghĩa đệ quy là: $F(0) = a_0$.
Phần thứ hai của định nghĩa của đệ quy là:

$$F(n) = \prod_{k=0}^{n} a_k = \big(\prod_{k=0}^{n-1} a_k\big).a_n = a_n.F(n-1).$$

Ví dụ 4.1.6. *Hãy đưa ra định nghĩa đệ quy của hàm* max *và* min *sao cho* $\max\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ *và* $\min\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ *tương ứng là số lớn nhất và bé nhất của n số $a_1, a_2, \ldots, a_n$.*

Lời giải: Ta sẽ định nghĩa đệ quy đồng thời hàm max và hàm min như sau:
Đầu tiên, ta xác định $\max\{a_1\} = a_1$ và $\min\{a_1\} = a_1$.

$$\max\{a_1, a_2\} = \begin{cases} a_1 & \text{nếu } a_1 \geq a_2 \\ a_2 & \text{nếu } a_2 > a_1. \end{cases}$$

$$\min\{a_1, a_2\} = \begin{cases} a_1 & \text{nếu } a_1 \leq a_2 \\ a_2 & \text{nếu } a_2 < a_1. \end{cases}$$

Sau đó, ta đưa ra biểu thức đệ quy

$$\max\{a_1, a_2, \ldots, a_n\} = \max\{\max\{a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}\}, a_n\},$$

và

$$\min\{a_1, a_2, \ldots, a_n\} = \min\{\min\{a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}\}, a_n\}.$$

Một dãy số là một hàm số xác định trên tập số nguyên không âm. Chính vì vậy, ta hoàn toàn có thể đưa ra định nghĩa đệ quy của những dãy số. Một trong những dãy số phổ biến nhất là dãy Fibonacci.

Ví dụ 4.1.7. *[Dãy Fibonacci] Dãy số Fibonacci $\{f_n\}$ được định nghĩa bằng đệ quy như sau: $f_0 = 0, f_1 = 1$ và $f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$, với $n = 2, 3, 4, \ldots$. Hãy tính các số hạng $f_2, f_3, f_4, f_5, f_6, f_7$.*

Lời giải: Từ định nghĩa đệ quy của dãy $\{f_n\}$, ta suy ra:

$$\begin{array}{lllllll} f_2 &=& f_1 + f_0 &=& 0+1 &=& 1, \\ f_3 &=& f_2 + f_1 &=& 1+1 &=& 2, \\ f_4 &=& f_3 + f_2 &=& 2+1 &=& 3, \\ f_5 &=& f_4 + f_3 &=& 3+2 &=& 5, \\ f_6 &=& f_5 + f_4 &=& 5+3 &=& 8, \\ f_7 &=& f_6 + f_5 &=& 8+5 &=& 13. \end{array}$$

Dãy số Fibonacci có nhiều ứng dụng quan trọng và lí thú. Ta cũng thường gặp dãy số Fibonacci trong thiên nhiên, chẳng hạn ở số cánh của hầu hết các loài hoa: 3 cánh (hoa loa kèn), 5 cánh (hoa mao lương vàng), 8 cánh (hoa phi yến), 13 cánh và 21 cánh (hoa cúc vạn thọ), 34 cánh (hoa cúc),...

Dãy Fibonacci còn có rất nhiều tính chất hay và có thể được chứng minh bằng cách sử dụng định nghĩa đệ quy. Sau đây, ta sẽ đưa ra một vài ví dụ.

Ví dụ 4.1.8. *Chứng minh rằng với $n \geqslant 3$, ta có $f_n > \alpha^{n-2}$, trong đó $\{f_n\}$ là dãy số Fibonacci được cho ở ví dụ 4.1.7 và $\alpha = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$.*

Lời giải: Gọi $P(n)$ là mệnh đề "$f_n > \alpha^{n-2}$".
Với $n = 3$ và $n = 4$, ta có:

$$\alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2} < 2 = f_3, \quad \alpha^2 = \frac{3+\sqrt{5}}{2} < 3 = f_4.$$

Vậy, $P(3)$ và $P(4)$ là đúng. Giả sử $P(k)$ đúng với mọi k nguyên sao cho $3 \leqslant k \leqslant n$, trong đó $n \geqslant 5$. Ta cần chỉ ra rằng $P(n+1)$ đúng. Thật vậy, vì α là nghiệm của phương trình $x^2 - x - 1 = 0$ nên $\alpha^2 = \alpha + 1$. Do đó:
$\alpha^{n-1} = \alpha^2.\alpha^{n-3} = (\alpha+1)\alpha^{n-3} = \alpha.\alpha^{n-3} + \alpha^{n-3} = \alpha^{n-2} + \alpha^{n-3}$ Theo giả thiết quy nạp nếu $n \geqslant 5$ ta có

$$f_{n-1} > \alpha^{n-3}, f_n > \alpha^{n-2}.$$

Từ đó: $f_{n+1} = f_n + f_{n-1} > \alpha^{n-2} + \alpha^{n-3} = \alpha^{n-1}$.
Vậy $P(n+1)$ đúng. Theo nguyên lí quy nạp toán học ta có $P(n)$ đúng với mọi $n \geqslant 3$.

4.1.2. Định nghĩa tập hợp bằng đệ quy

Các tập hợp thường được định nghĩa bằng đệ quy. Trước tiên, ta đưa ra tập xuất phát. Sau đó xây dựng quy tắc tạo những phần tử mới từ các phần tử đã biết của tập. Những tập được mô tả bằng cách như vậy được gọi là những tập được định nghĩa tốt, những định lí về chúng có thể chứng minh bằng cách sử dụng định nghĩa đệ quy của chúng.

Ví dụ 4.1.9. *Giả sử S được định nghĩa bằng đệ quy như sau:*

1. $3 \in S$.

2. *$x + y \in S$ nếu $x \in S$ và $y \in S$.*

Hãy chỉ ra rằng S là tập các số nguyên dương chia hết cho 3.

Lời giải: Gọi A là tập các số nguyên dương chia hết cho 3. Để chứng minh $A = S$, ta sẽ chứng minh rằng A là tập con của S và S là tập con của A.

Chứng minh $A \subseteq S$.
Nhận thấy rằng các phần tử của A đều có dạng $3n$ với n là một số nguyên dương. Đặt $P(n)$ là hàm mệnh đề "$3n$ thuộc S". Để chứng minh A là tập con của S, ta cần chỉ ra rằng $P(n)$ đúng với mọi n nguyên dương. $P(1)$ đúng vì theo định nghĩa của S ta có $3.1 = 3 \in S$. Giả sử $P(n)$ đúng, tức là $3.n \in S$. Vì $3 \in S$ và $3n \in S$ nên theo định nghĩa $3 + 3n = 3(n + 1) \in S$. Điều này có nghĩa là $P(n+1)$ đúng. Theo quy nạp toán học mọi số có dạng $3n$, với n nguyên dương, thuộc S.

Chứng minh $S \subseteq A$.
Để chứng minh S là tập con của A ta sẽ chỉ ra rằng các phần tử của S sinh ra do phần đầu và phần sau của định nghĩa đệ quy đều thuộc A, tức là đều chia hết cho 3. Hiển nhiên, phần tử đầu tiên của S là 3 thuộc A do 3 chia hết cho 3. Bây giờ, ta chứng minh tất cả các phần tử của S sinh ra do phần sau của định nghĩa, cũng thuộc A. Giả sử x và y là hai phần tử của S, là hai phần tử của A. Theo định nghĩa của S thì $x + y$ cũng là một phần tử của S, vì x và y đều chia hết cho 3 nên $x + y$ cũng chia hết cho 3, tức là $x + y \in A$.

Định nghĩa tập hợp trong ví dụ 4.1.9 là một định nghĩa đệ quy rất điển hình. Đầu tiên tập xuất phát được đưa ra. Tiếp theo là quy tắc tạo những phần tử mới từ những phần tử đã biết của tập.

Một trong các ứng dụng thường gặp nhất của định nghĩa đệ quy cho tập hợp là để định nghĩa biểu thức được tạo đúng quy tắc trong các hệ khác nhau. Ta xét ví dụ sau:

Ví dụ 4.1.10. *Ta xét biểu thức gồm các biến, các số và các toán tử cộng $+$, trừ $-$, nhân $*$, chia $/$ và lũy thừa $\uparrow$ được kết hợp với nhau theo một quy tắc nào đó. Khi đó, một biểu thức (được tạo) đúng quy tắc được định nghĩa như sau:*

1. *x là biểu thức đúng quy tắc nếu x là một số hay một biến.*

2. *$(f + g), (f - g), (f * g), (f/g)$ và $(f \uparrow g)$ là những biểu thức đúng quy tắc nếu f, g là những biểu thức đúng quy tắc.*

Chẳng hạn, do x và 3 là các biểu thức đúng quy tắc nên theo định nghĩa trên $(x+3), (x-3), (x*3), (x/3)$ và $(x \uparrow 3)$ là các biểu thức đúng quy tắc. Tiếp theo, vì y cũng là biểu thức đúng quy tắc nên $((x+3)*y), (y-(x-3))$ cũng là đúng quy tắc,... (lưu ý là $(3/0)$ cũng là biểu thức đúng quy tắc vì ở đây ta chỉ quan tâm đến cú pháp).

Ví dụ 4.1.11. *Biểu thức cho mệnh đề phức hợp gồm T, F, biến mệnh đề và các toán tử $\{\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow\}$ được định nghĩa như sau:*

1. *T, F và p, trong đó p là một biến mệnh đề, là những biểu thức đúng quy tắc.*
2. *$(\neg p), (p \wedge q), (p \vee q), (p \rightarrow q), (p \leftrightarrow q)$ là những biểu thức đúng quy tắc nếu p và q là những biểu thức đúng quy tắc.*

Chẳng hạn, nếu p, q, r là những biến mệnh đề, khi đó dùng định nghĩa đệ quy nhiều lần, ta có thể chỉ ra rằng các biểu thức:

$$(p \wedge q), (r \vee F) \text{ và } ((p \wedge q) \rightarrow (r \vee F))$$

là đúng quy tắc.

Định nghĩa đệ quy thường được dùng khi nghiên cứu các xâu kí tự. Nhắc lại rằng, xâu là dãy những kí tự thuộc bộ chữ cái Σ. Tập hợp các xâu ứng với bộ chữ cái Σ được kí hiệu là Σ^*. Hai xâu có thể kết hợp với nhau theo phép ghép. Ghép hai xâu x và y được xâu xy là xâu tạo nên bằng cách viết tiếp xâu y sau xâu x. Ví dụ, cho x là xâu $abrrs$, y là xâu $zedgt$, khi đó xy là xâu $abrrszedgt$. Khi chứng minh những kết quả về xâu, ta thường dùng định nghĩa đệ quy.

Ví dụ 4.1.12 (Định nghĩa đệ quy của tập các xâu)**.** *Giả sử Σ^* là tập các xâu trên bộ chữ cái Σ. Khi đó, Σ^* được định nghĩa bằng đệ quy như sau:*

1. *$\lambda \in \Sigma^*$, trong đó λ là xâu rỗng, tức là xâu không có phần tử nào.*
2. *$wx \in \Sigma^*$ nếu $w \in \Sigma^*$ và $x \in \Sigma$.*

Phần đầu của định nghĩa nói rằng xâu rỗng thuộc Σ^*. Phần sau khẳng định một xâu mới tạo nên bằng cách ghép một kí tự của Σ với một xâu của Σ^* cũng thuộc Σ^*.
Độ dài của xâu, tức số kí tự trong xâu, cũng được định nghĩa bằng đệ quy.

Ví dụ 4.1.13. *Hãy nêu định nghĩa bằng đệ quy độ dài của xâu w.*

Lời giải: Ta kí hiệu độ dài của xâu w là $l(w)$. Khi đó, định nghĩa đệ quy của $l(w)$ như sau:

1. $l(\lambda) = 0$, với λ là xâu rỗng.

2. $l(wx) = l(w) + 1$, nếu $w \in \Sigma^*$ và $x \in \Sigma$.

Ví dụ 4.1.14. *Chứng minh rằng $l(xy) = l(x) + l(y)$, trong đó x và y là những xâu thuộc Σ^*.*

Lời giải: Ta sẽ chứng minh bằng quy nạp toán học theo độ dài n của xâu khẳng định:

$$l(xy) = l(x) + l(y),$$

với x, y là những xâu thuộc Σ^*.
Đặt $P(n)$ là mệnh đề

$$l(xy) = l(x) + l(y),$$

với $x \in \Sigma^*$ và $y \in \Sigma^*$, y là xâu có độ dài n.
Với $n = 0$, ta có $y = \lambda$, khi đó

$$l(xy) = l(x\lambda) = l(x) = l(x) + 0 = l(x) + l(\lambda).$$

Giả sử $P(n)$ là đúng, ta phải chứng minh rằng nếu $z \in \Sigma^*$ là xâu có độ dài $n + 1$ thì:

$$l(xz) = l(x) + l(z).$$

Do z là xâu có độ dài $n + 1$ nên $z = ya$, với y là xâu có độ dài n và $a \in \Sigma$.
Theo định nghĩa độ dài của xâu, ta có

$$l(xz) = l(xya) = l(xy) + 1.$$

Mặt khác, theo giả thiết quy nạp, ta lại có $l(xy) = l(x) + l(y)$. Từ đó:

$$l(xz) = l(xy) + 1 = l(x) + l(y) + 1 = l(x) + l(ya) = l(x) + l(z).$$

Vậy, $P(n + 1)$ đúng và ta có điều phải chứng minh.

4.2. Hệ thức truy hồi

4.2.1. Hệ thức truy hồi và nghiệm của hệ thức truy hồi

Định nghĩa 4.2.1. Hệ thức truy hồi *của một dãy số* $\{a_n\}$ *là công thức biểu diễn* a_n *qua một hay nhiều số hạng đi trước của dãy, cụ thể là biểu diễn qua* $a_{n_0}, a_{n_0+1}, \ldots, a_{n-1}$*, với mọi* n *nguyên dương và* $n \geqslant n_0$*, trong đó* n_0 *là số nguyên không âm.*
Dãy số được gọi là **lời giải** *hay là* **nghiệm của hệ thức truy hồi** *nếu các số hạng của nó thỏa mãn hệ thức truy hồi này.*

Ví dụ 4.2.1. *Cho* $\{a_n\}$ *là dãy số thỏa mãn hệ thức truy hồi* $a_n = a_{n-1} + 2a_{n-2}$*, với* $n = 2, 3, \ldots,$ *và cho* $a_0 = 1, a_1 = 2$*. Tìm* a_2, a_3*.*

Lời giải: Từ hệ thức truy hồi ta có: $a_2 = a_1 + 2a_0 = 2 + 2.1 = 4$ và $a_3 = a_2 + 2a_1 = 4 + 2.2 = 8$.

Ví dụ 4.2.2. *Cho hệ thức truy hồi* $a_n = 3a_{n-1} - 2a_{n-2}, n = 2, 3, \ldots$ *Kiểm tra xem những dãy nào sau đây là nghiệm của hệ thức truy hồi trên:*

1. $a_n = 2^n, \forall n \in \mathbb{N}$.

2. $a_n = 2n, \forall n \in \mathbb{N}$.

3. $a_n = 2, \forall n \in \mathbb{N}$.

Lời giải:

1. Giả sử $a_n = 2^n$, với mọi $n \in \mathbb{N}$. Khi đó, với $n \geqslant 2$ ta có: $3a_{n-1} - 2a_{n-2} = 3.2^{n-1} - 2.2^{n-2} = 2^n$. Do đó, dãy $\{a_n\}$ với $a_n = 2^n$ là nghiệm của hệ thức truy hồi đã cho.

2. Xét dãy $a_n = 2n$, với mọi $n \in \mathbb{N}$. Khi đó, $a_0 = 0, a_1 = 2, a_2 = 4$. Do $a_2 = 4 \neq 3a_1 - 2a_0$ nên dãy $\{a_n\}$ với $a_n = 2n$ không là nghiệm của hệ thức truy hồi đã cho.

3. Giả sử $a_n = 2$, với mọi $n \in \mathbb{N}$. Khi đó, với $n \geqslant 2$ ta có: $3a_{n-1} - 2a_{n-2} = 2.2 - 2 = 2$. Do đó, dãy $\{a_n\}$ với $a_n = 2$ là một nghiệm của hệ thức truy hồi đã cho.

Những điều kiện đầu đối với dãy số xác định là những số hạng trước số hạng đầu tiên mà kể từ đó hệ thức truy hồi có hiệu lực. Trong ví dụ 4.2.1, $a_0 = 1$ và $a_1 = 2$ là những điều kiện đầu. Những điều kiện đầu và hệ thức truy hồi xác định duy nhất dãy số, chúng cho ta định nghĩa đệ quy của dãy và bất kì số hạng nào của dãy cũng có thể tìm được nhờ điều kiện đầu và sử dụng hệ thức truy hồi với số lần cần thiết. Cùng một hệ thức truy hồi nhưng điều kiện đầu khác nhau cho ta những dãy số khác nhau.

4.2.2. Mô hình hóa bằng hệ thức truy hồi

Ví dụ 4.2.3. *(Lãi suất kép) Giả sử một người gửi* 100 *triệu vào tài khoản của mình tại một ngân hàng với lãi suất kép* $8,4\%$ *mỗi năm. Sau* 20 *năm, anh ta có bao nhiêu tiền trong tài khoản của mình?*

Lời giải: Gọi P_n là tổng số tiền có trong tài khoản sau n năm. Vì số tiền có trong tài khoản sau n năm bằng số tiền có sau $n-1$ năm cộng với lãi suất sinh ra vào năm thứ n nên ta thấy dãy $\{P_n\}$ thỏa mãn hệ thức truy hồi sau:

$$P_n = P_{n-1} + 0,084.P_{n-1} = 1,084.P_{n-1}.$$

Điều kiện đầu là $P_0 = 100$.
Dùng phương pháp lặp ta có thể tìm được công thức cho P_n. Thật vậy, ta có:

$$\begin{aligned} P_1 &= 1,084.P_0, \\ P_2 &= 1,084.P_1 = (1,084)^2.P_0, \\ &\dots \\ P_n &= 1,084.P_{n-1} = (1,084)^n.P_0. \end{aligned}$$

Khi thay điều kiện đầu $P_0 = 100$ vào, ta nhận được công thức:

$$P_n = (1,084)^n.100.$$

Sử dụng quy nạp toán học có thể khẳng định được tính đúng đắn của công thức vừa tìm. Công thức đúng với $n = 0$ vì đó chính là điều kiện đầu. Giả sử công thức đúng đến n, tức là $P_n = (1,084)^n.100$. Khi đó từ hệ thức truy hồi và giả thiết quy nạp ta có:

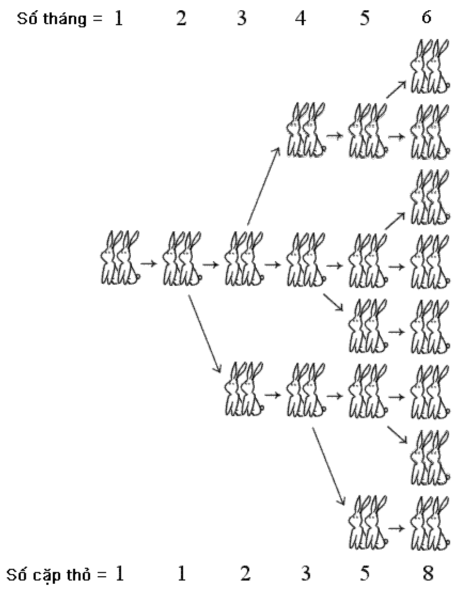
$$P_{n+1} = 1,084.P_n = 1,084.(1,084)^n.100 = (1,084)^{n+1}.100$$

Điều này chứng tỏ công thức tường minh của P_n là đúng.
Thay $n = 20$ vào công thức $P_n = (1,084)^n.100$ cho ta số tiền sau 20 năm trong tài khoản là:

$$P_{20} = (1,084)^{20}.100 = 501,864\,\text{triệu}.$$

Năm 1202, nhà toán học Leonardo Fibonacci (1180-1250) đã công bố một công trình nghiên cứu vĩ đại mà sau gọi là cuốn "sách toán pháp" nổi tiếng (còn gọi là "sách abac"). Trong cuốn sách này, ông đã nêu ra một bài toán thú vị sau:

Ví dụ 4.2.4. *(Họ nhà thỏ và số Fibonacci) Một cặp thỏ mới sinh (một con đực và một con cái) được thả lên một hòn đảo. Giả sử rằng một cặp thỏ chưa sinh sản được trước khi đầy hai tháng tuổi, sau hai tháng tuổi mỗi tháng chúng đẻ ra một đôi thỏ con. Nếu số thỏ sinh ra không bị tử vong thì sau n tháng tổng số cặp thỏ có trên đảo là bao nhiêu?*



Hình 4.1: Số đôi thỏ sau n tháng trên đảo.

Lời giải: Giả sử f_n là số cặp thỏ sau n tháng. Ta sẽ chỉ ra rằng f_n với $n = 1, 2, 3, \ldots$ là những số của dãy Fibonacci. Số lượng các cặp thỏ có thể tính bằng hệ thức truy hồi. Cuối tháng thứ nhất số các cặp thỏ trên đảo là $f_1 = 1$. Vì cặp thỏ này vẫn chưa đến tuổi sinh sản được nên trong tháng thứ hai cũng là $f_2 = 1$. Tổng số cặp thỏ sau n tháng bằng tổng số cặp thỏ trên đảo ở tháng trước f_{n-1} và số cặp thỏ mới đẻ ra là f_{n-2}, do mỗi cặp thỏ con sinh ra từ cặp thỏ có ít nhất hai tháng tuổi.
Vậy dãy $\{f_n\}$ thỏa mãn hệ thức truy hồi:

$$f_n = f_{n-1} + f_{n-2},$$

với $n \geqslant 3$ và những điều kiện đầu $f_1 = 1$ và $f_2 = 1$.
Vì điều kiện đầu và hệ thức truy hồi xác định duy nhất dãy số nên số các cặp thỏ trên đảo sau n tháng được cho bởi số Fibonacci thứ n.

Truyền thuyết của đạo Balamon "Ngày tận thế của thế giới" được chép lại như sau: Trong thánh địa Phật giáo ở phía Bắc Ấn Độ có một tấm đồng, trong đó cắm ba cây kim báu. Khi Brahama sáng tạo ra thế giới, Phạn Thiên đã bắn 64 xuyến vàng vào cây kim thứ nhất, theo thứ tự từ lớn đến nhỏ, tạo thành hình tháp nên được gọi là "tháp Phạn". Phạn Thiên phán rằng: bất cứ ngày hay đêm đều phải cử tu sĩ canh giữ báu vật và liên tục chuyển 64 xuyến vàng đó sang cây kim thứ hai và sử dụng cây kim thứ ba làm trung gian nhưng mỗi lần chỉ được chuyển một xuyến vàng và luôn giữ hình tháp Phạn. Ngày tận thế sẽ đến khi cả 64 xuyến vàng đều được chuyển sang cây kim thứ hai.

Câu chuyện truyền thuyết trên có nội dung như một bài toán có tên là "Tháp Hà Nội".

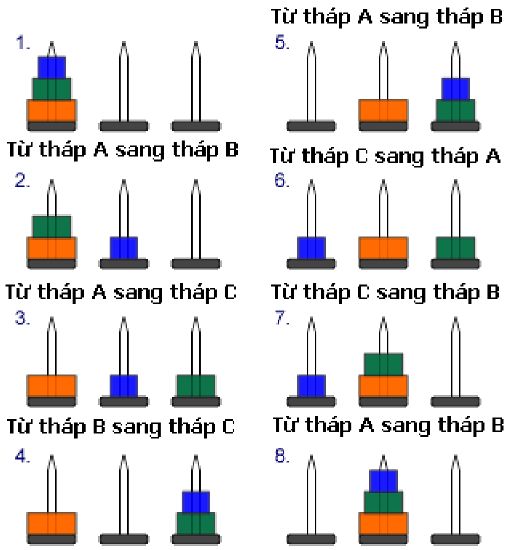
Ví dụ 4.2.5. *(Tháp Hà Nội) Có ba cái cọc dài bằng nhau. Một cọc đã được lồng n cái đĩa chồng lên nhau với đường kính giảm dần. Bài toán đòi hỏi chuyển cả n cái đĩa sang một cọc khác với những điều kiện sau:*

1. *Chỉ được chuyển mỗi lần một đĩa từ cọc này sang cọc khác.*
2. *Trong mỗi lần chuyển đĩa, không được đặt đĩa có đường kính lớn hơn ở trên đĩa có đường kính nhỏ hơn.*

Gọi H_n là số lần dịch chuyển cần thiết để giải bài toán Tháp Hà Nội có n đĩa. Hãy lập hệ thức truy hồi đối với dãy $\{H_n\}$.

Lời giải: Giả sử ở cọc thứ nhất có n đĩa khác nhau. Để chuyển n đĩa này sang cọc thứ hai, ta phải thực hiện những công việc sau:

1. Cố định chiếc đĩa lớn nhất, dịch chuyển $n-1$ chiếc đĩa từ cọc thứ nhất sang cọc thứ ba theo quy tắc ở trên và phải dùng H_{n-1} lần dịch chuyển.
2. Chuyển chiếc đĩa lớn nhất này bằng một lần dịch chuyển từ cọc một sang cọc hai.
3. Cuối cùng, dịch chuyển $n-1$ chiếc đĩa từ cọc ba sang cọc hai và đặt lên trên chiếc đĩa lớn nhất. Bước cuối cùng này ta phải dùng H_{n-1} lần dịch chuyển.



Hình 4.2: Minh họa bài toán Tháp Hà Nội với 3 đĩa.

Từ đó, ta có hệ thức truy hồi:

$$H_n = 2H_{n-1} + 1.$$

Điều kiện đầu $H_1 = 1$ vì chỉ cần một lần dịch chuyển một đĩa ở cọc một sang cọc hai theo đúng quy tắc của bài toán.

Sử dụng phương pháp lặp, ta có thể giải được hệ thức truy hồi trên. Ta có:

$$\begin{aligned}
H_n &= 2H_{n-1} + 1 \\
&= 2(2H_{n-2} + 1) + 1 = 2^2 H_{n-2} + 2 + 1 \\
&= 2^2(2H_{n-3} + 1) + 2 + 1 = 2^3 H_{n-3} + 2^2 + 2 + 1 \\
&= \ldots \\
&= 2^{n-1} H_1 + 2^{n-2} + \ldots + 2 + 1 \\
&= 2^n - 1.
\end{aligned}$$

Phương pháp lặp này cho ta nghiệm của hệ thức truy hồi $H_n = 2H_{n-1} + 1$ với điều kiện đầu $H_1 = 1$. Dùng quy nạp toán học, ta có thể chứng minh được tính đúng đắn của công thức trên.

Muốn thực hiện được lời phán của Phạn Thiên thì phải mất H_{64} lần chuyển xuyến. Thay $n = 64$ vào hệ thức trên ta được:

$$H_{64} = 2^{64} - 1 = 18\ 446\ 744\ 073\ 709\ 551\ 615.$$

Nếu các tu sĩ thay phiên nhau chuyển liên tục, không kể ngày đêm và mỗi lần chuyển mất 1 giây thì phải mất 580 tỷ năm. Như vậy, nhân loại yên tâm, "Ngày tận thế" vẫn còn xa lắm.

Ví dụ 4.2.6. *Tìm hệ thức truy hồi và điều kiện đầu để tính số các xâu nhị phân độ dài n và có chứa hai số 0 liên tiếp. Có bao nhiêu xâu như thế có độ dài bằng 5?*

Lời giải: Gọi P_n là số xâu nhị phân độ dài n và có chứa hai số 0 liên tiếp. Giả sử một xâu như thế có dạng $a_1a_2\ldots a_{n-1}a_n$. Với $n \geqslant 3$, ta xét những trường hợp sau:

Nếu $a_n = 1$ thì xâu đã cho có dạng $a_1a_2\ldots a_{n-1}1$. Số xâu nhị phân độ dài n chứa hai số 0 liên tiếp kiểu này bằng số xâu nhị phân $a_1a_2\ldots a_{n-1}$ độ dài $n-1$ chứa hai số 0 liên tiếp và bằng P_{n-1} xâu.

Nếu $a_n = 0$ thì xâu đã cho có dạng $a_1a_2\ldots a_{n-1}0$. Khi đó, nếu $a_{n-1} = 0$ thì xâu đã cho luôn chứa hai số 0 liên tiếp nên ta có 2^{n-2} xâu, còn nếu $a_{n-1} = 1$ thì số xâu nhị phân độ dài n chứa hai số 0 liên tiếp kiểu này bằng số xâu nhị phân $a_1a_2\ldots a_{n-2}$ độ dài $n-2$ chứa hai số 0 liên tiếp và bằng P_{n-2} xâu.

Như vậy, ta có hệ thức truy hồi:

$$P_n = P_{n-1} + P_{n-2} + 2^{n-2},$$

với $n \geqslant 3$. Điều kiện đầu là $P_1 = 0$ vì không có xâu nhị phân nào độ dài 1 lại có hai số 0 liên tiếp, $P_2 = 1$ vì có duy nhất xâu 00 độ dài hai thỏa mãn đề bài.

Để nhận được P_5, ta sử dụng liên tiếp hệ thức truy hồi:

$$\begin{aligned} P_3 &= P_2 + P_1 + 2 &&= 3,\\ P_4 &= P_3 + P_2 + 2^2 &&= 8,\\ P_5 &= P_4 + P_3 + 2^3 &&= 19. \end{aligned}$$

4.3. Giải hệ thức truy hồi

4.3.1. Hệ thức truy hồi tuyến tính thuần nhất hệ số hằng

Định nghĩa 4.3.1. *Một hệ thức truy hồi tuyến tính thuần nhất bậc k với hệ số hằng số là hệ thức truy hồi có dạng:*

$$a_n = c_1a_{n-1} + c_2a_{n-2} + \ldots + c_ka_{n-k},$$

trong đó $c_1, c_2, \ldots, c_k$ là những số thực và $c_k \neq 0$.

Hệ thức truy hồi trong định nghĩa là tuyến tính vì vế phải chỉ chứa những số hạng tuyến tính, tức là tích của những số hạng bậc nhất với một hệ số; hệ thức truy hồi là thuần nhất vì mọi số hạng đều có dạng ca_j; hệ số hằng vì các hệ số của các số hạng của dãy đều là hằng số, không phải là hàm số phụ thuộc vào n. Bậc của hệ thức truy hồi là k vì a_n được biểu diễn qua k số hạng trước của dãy.

Theo nguyên lí thứ hai của quy nạp toán học thì dãy số thỏa mãn hệ thức truy hồi nêu trong định nghĩa được xác định duy nhất bằng hệ thức truy hồi này và k điều kiện đầu:

$$a_0 = C_0, a_1 = C_1, \ldots, a_{k-1} = C_{k-1}.$$

Ví dụ 4.3.1. *Hệ thức truy hồi* $P_n = 1,084.P_{n-1}$ *là hệ thức truy hồi tuyến tính thuần nhất bậc nhất với hệ số hằng.*
Hệ thức truy hồi $f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$ *là hệ thức truy hồi tuyến tính thuần nhất bậc hai với hệ số hằng.*
Hệ thức truy hồi $a_n = 2a_{n-1} + 5a_{n-5}$ *là hệ thức truy hồi tuyến tính thuần nhất bậc năm với hệ số hằng.*

Ví dụ 4.3.2. *Hệ thức truy hồi* $a_n = a_{n-1} + 2(a_{n-2})^2$ *là không tuyến tính.*
Hệ thức truy hồi $a_n = a_{n-1} + a_{n-2} + 2^{n-2}$ *là không thuần nhất.*
Hệ thức truy hồi $a_n = na_{n-1}$ *không có hệ số hằng.*

Định nghĩa 4.3.2. *Cho hệ thức truy hồi* $a_n = c_1a_{n-1}+c_2a_{n-2}+\ldots+c_ka_{n-k}$. *Khi đó phương trình*

$$r^k - c_1r^{k-1} - c_2r^{k-2} - \ldots - c_{k-1}r - c_k = 0$$

được gọi là phương trình đặc trưng của hệ thức truy hồi và nghiệm của nó được gọi là nghiệm đặc trưng của hệ thức truy hồi.

Ví dụ 4.3.3. *Hệ thức truy hồi* $f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$ *có phương trình đặc trưng là* $r^2 - r - 1 = 0$ *và có hai nghiệm đặc trưng là* $r_1 = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ *và* $r_2 = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$.
Hệ thức truy hồi $a_n = 2a_{n-2} - a_{n-4}$ *có phương trình đặc trưng là* $r^4 - 2r^2 + 1 = 0$ *và có hai nghiệm đặc trưng bội hai là* $r_1 = 1$ *và* $r_2 = -1$.

Các hệ thức truy hồi tuyến tính thuần nhất được nghiên cứu vì hai lí do. Thứ nhất, chúng hay gặp khi mô hình hóa các bài toán. Thứ hai, chúng có thể giải được một cách có hệ thống. Dưới đây, ta sẽ đưa ra cách giải cho một số hệ thức truy hồi tuyến tính thuần nhất hệ số hằng.

4.3.2. Giải hệ thức truy hồi tuyến tính thuần nhất hệ số hằng

Phương pháp cơ bản để giải hệ thức truy hồi tuyến tính thuần nhất là tìm nghiệm dưới dạng $a_n = r^n$, trong đó r là hằng số. Nhận thấy rằng $a_n = r^n$ là nghiệm của hệ thức truy hồi $a_n = c_1a_{n-1} + c_2a_{n-2} + \ldots + c_ka_{n-k}$ khi và chỉ khi:

$$r^n = c_1r^{n-1} + c_2r^{n-2} + \ldots + c_kr^{n-k}.$$

Sau khi chia cả hai vế cho r^{n-k} và chuyển vế ta được phương trình tương đương:

$$r^k - c_1r^{k-1} - c_2r^{k-2} - \ldots - c_{k-1}r - c_k = 0.$$

Vậy, dãy $\{a_n\}$ với $a_n = r^n$ là nghiệm của hệ thức truy hồi khi và chỉ khi r là nghiệm của phương trình đặc trưng tương ứng.

Trước tiên, ta sẽ trình bày những kết quả đối với hệ thức truy hồi tuyến tính thuần nhất bậc hai với hệ số hằng. Sau đó, ta sẽ nêu ra những kết quả tương tự cho các hệ thức truy hồi tuyến tính thuần nhất bậc k lớn hơn hai.

4.3.2.1. Giải hệ thức truy hồi tuyến tính thuần nhất bậc hai với hệ số hằng

Cho hệ thức truy hồi tuyến tính thuần nhất bậc hai với hệ số hằng $a_n = c_1a_{n-1} + c_2a_{n-2}$ có điều kiện đầu là $a_0 = C_0$ và $a_1 = C_1$. Ta sẽ đưa ra công thức nghiệm cho hệ thức truy hồi dựa trên tính chất nghiệm của phương trình đặc trưng.

Trường hợp 1: Phương trình đặc trưng có hai nghiệm phân biệt. Khi đó, công thức nghiệm được cho qua định lí sau:

Định lý 4.3.1. *Cho hệ thức truy hồi:*

$$a_n = c_1a_{n-1} + c_2a_{n-2}, n \geq 2 \quad (1).$$

c_1, c_2 là hai số thực, $c_2 \neq 0$. Nếu phương trình $r^2 - c_1r - c_2 = 0$ có hai nghiệm phân biệt là r_1 và r_2 thì dãy $\{a_n\}_{n\geq 0}$ là nghiệm của (1) khi và chỉ khi $a_n = \alpha_1r_1^n + \alpha_2r_2^n$, với $n = 0, 1, 2, \ldots$, trong đó α_1 và α_2 là những hằng số.

Chứng minh. Trước hết ta sẽ chỉ ra rằng: nếu r_1, r_2 là hai nghiệm của phương trình đặc trưng và α_1, α_2 là những hằng số thì dãy $\{a_n\}$ với $a_n = \alpha_1r_1^n + \alpha_2r_2^n$ là nghiệm của hệ thức truy hồi.

Giả sử r_1, r_2 là hai nghiệm của $r^2 - c_1 r - c_2 = 0$, tức là: $r_1^2 = c_1 r_1 + c_2$ và $r_2^2 = c_1 r_2 + c_2$. Khi đó, ta có:

$$\begin{aligned} c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} &= c_1(\alpha_1 r_1^{n-1} + \alpha_2 r_2^{n-1}) + c_2(\alpha_1 r_1^{n-2} + \alpha_2 r_2^{n-2}) \\ &= \alpha_1 r_1^{n-2}(c_1 r_1 + c_2) + \alpha_2 r_2^{n-2}(c_1 r_2 + c_2) \\ &= \alpha_1 r_1^{n-2} r_1^2 + \alpha_2 r_2^{n-2} r_2^2 \\ &= \alpha_1 r_1^n + \alpha_2 r_2^n \\ &= a_n. \end{aligned}$$

Vậy, dãy $\{a_n\}$ với $a_n = \alpha_1 r_1^n + \alpha_2 r_2^n$ là nghiệm của hệ thức truy hồi đã cho.

Ngược lại, giả sử $\{a_n\}$ là một nghiệm bất kì của hệ thức truy hồi, ta sẽ chỉ ra rằng tồn tại những hằng số α_1 và α_2 sao cho $a_n = \alpha_1 r_1^n + \alpha_2 r_2^n$, với $n = 0, 1, 2, \ldots$

Xét hệ phương trình:

$$\begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 & = C_0, \\ \alpha_1 r_1 + \alpha_2 r_2 & = C_1. \end{cases}$$

Giải ra ta được nghiệm:

$$\alpha_1^* = \frac{C_1 - C_0 r_2}{r_1 - r_2} \quad \text{và} \quad \alpha_2^* = \frac{C_0 r_1 - C_1}{r_1 - r_2}.$$

Đặt $b_n = \alpha_1^* r_1^n + \alpha_2^* r_2^n$ với $n = 0, 1, 2, \ldots$ Theo chứng minh trên ta có dãy $\{b_n\}$ là một nghiệm của hệ thức truy hồi và có cùng điều kiện đầu với dãy $\{a_n\}$. Vì nghiệm của một hệ thức truy hồi với điều kiện đầu đã cho được xác định duy nhất nên $a_n = b_n = \alpha_1^* r_1^n + \alpha_2^* r_2^n$, $n = 0, 1, 2, \ldots$. Định lí được chứng minh. □

Ví dụ 4.3.4. *Tìm nghiệm của hệ thức truy hồi $a_n = 3a_{n-1} - 2a_{n-2}$ với điều kiện đầu $a_0 = 5$ và $a_1 = 8$.*

Lời giải: Phương trình đặc trưng của hệ thức truy hồi có dạng $r^2 - 3r + 2 = 0$. Các nghiệm đặc trưng là $r_1 = 1$ và $r_2 = 2$. Theo định lí 4.3.1 dãy $\{a_n\}$ là nghiệm của hệ thức truy hồi khi và chỉ khi:

$$a_n = \alpha_1.1^n + \alpha_2.2^n,$$

với α_1 và α_2 là những hằng số. Từ điều kiện đầu ta có:

$$\begin{cases} a_0 = 5 = \alpha_1 + \alpha_2, \\ a_1 = 8 = \alpha_1 + 2\alpha_2. \end{cases}$$

Giải ra ta được: $\alpha_1 = 2$ và $\alpha_2 = 3$.
Vậy, nghiệm của hệ thức truy hồi thỏa mãn điều kiện đầu đã cho là dãy $\{a_n\}$ với $a_n = 2 + 3.2^n$.

Ví dụ 4.3.5. *Tìm công thức tường minh của các số Fibonacci.*

Lời giải: Dãy các số Fibonacci thỏa mãn hệ thức truy hồi $f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$ với điều kiện đầu $f_0 = 0$ và $f_1 = 1$. Các nghiệm đặc trưng là:

$$r_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \quad \text{và} \quad r_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}.$$

Theo định lí 4.3.1 các số Fibonacci được cho bởi công thức sau:

$$f_n = \alpha_1\Big(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\Big)^n + \alpha_2\Big(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\Big)^n$$

với α_1 và α_2 là những hằng số. Từ điều kiện đầu, ta có những hằng số α_1 và α_2 thỏa mãn hệ phương trình:

$$\begin{cases} f_0 = 0 = \alpha_1 + \alpha_2, \\ f_1 = 1 = \alpha_1\Big(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\Big) + \alpha_2\Big(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\Big). \end{cases}$$

Giải ra ta được: $\alpha_1 = \dfrac{1}{\sqrt{5}}$ và $\alpha_2 = -\dfrac{1}{\sqrt{5}}$.
Do đó, các số Fibonacci được cho bởi công thức tường minh sau:

$$f_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\Big(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\Big)^n - \frac{1}{\sqrt{5}}\Big(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\Big)^n.$$

Trường hợp 2: Phương trình đặc trưng có nghiệm kép. Khi đó nghiệm của hệ thức truy hồi được xác định qua định lí sau:

Định lý 4.3.2. *Cho hệ thức truy hồi*

$$a_n = c_1a_{n-1} + c_2a_{n-2}, n \geq 2 \quad (1).$$

c_1, c_2 là hai số thực, $c_2 \neq 0$. Nếu phương trình $r^2 - c_1r - c_2 = 0$ có nghiệm kép là r_0 thì dãy $\{a_n\}_{n\geq 0}$ là nghiệm của (1) khi và chỉ khi $a_n = \alpha_1 r_0^n + \alpha_2 n r_0^n$, với $n = 1, 2, \ldots$, trong đó α_1 và α_2 là những hằng số.

Chứng minh. Đầu tiên, ta sẽ chỉ ra rằng: nếu r_0 là nghiệm kép của phương trình đặc trưng và α_1, α_2 là những hằng số thì dãy $\{a_n\}$ với $a_n = \alpha_1 r_0^n + \alpha_2 n r_0^n$ là nghiệm của hệ thức truy hồi.

Giả sử r_0 là nghiệm kép của $r^2 - c_1 r - c_2 = 0$, ta có $r_0^2 = c_1 r_0 + c_2$, $\Delta = c_1^2 + 4c_2 = 0$ và $r_0 = \dfrac{c_1}{2}$. Khi đó:

$$\begin{aligned}
c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} &= c_1(\alpha_1 r_0^{n-1} + \alpha_2(n-1)r_0^{n-1}) + c_2(\alpha_1 r_0^{n-2} + \alpha_2(n-2)r_0^{n-2}) \\
&= \alpha_1 r_0^{n-2}(c_1 r_0 + c_2) + \alpha_2 n r_0^{n-2}(c_1 r_0 + c_2) - \alpha_2 r_0^{n-2}(c_1 r_0 + 2c_2) \\
&= \alpha_1 r_0^{n-2} r_0^2 + \alpha_2 n r_0^{n-2} r_0^2 - \alpha_2 r_0^{n-2}(\frac{c_1^2 + 4c_2}{2}) \\
&= \alpha_1 r_0^n + \alpha_2 n r_0^n \\
&= a_n.
\end{aligned}$$

Vậy, dãy $\{a_n\}$ với $a_n = \alpha_1 r_0^n + \alpha_2 n r_0^n$ là nghiệm của hệ thức truy hồi đã cho.

Ngược lại, giả sử $\{a_n\}$ là một nghiệm bất kì của hệ thức truy hồi, ta sẽ chỉ ra rằng tồn tại những hằng số α_1 và α_2 sao cho $a_n = \alpha_1 r_0^n + \alpha_2 n r_0^n$, với $n = 1, 2, \ldots$.
Ta chọn α_1 và α_2 là nghiệm của hệ phương trình:

$$\begin{cases} \alpha_1 & = C_0, \\ \alpha_1 r_0 + \alpha_2 r_0 & = C_1. \end{cases}$$

Giải ra ta được nghiệm:

$$\alpha_1^* = C_0 \quad \text{và} \quad \alpha_2^* = \frac{C_1}{r_0} - C_0.$$

Đặt $b_n = \alpha_1^* r_0^n + \alpha_2^* n r_0^n$. Theo chứng minh điều kiện cần ở trên ta có dãy $\{b_n\}$ là một nghiệm của hệ thức truy hồi và có cùng điều kiện đầu với dãy $\{a_n\}$. Vì hệ thức truy hồi và điều kiện đầu xác định duy nhất dãy nên $a_n = b_n = \alpha_1^* r_0^n + \alpha_2^* n r_0^n$. Định lí được chứng minh. □

Ví dụ 4.3.6. *Tìm nghiệm của hệ thức truy hồi $a_n = -4a_{n-1} - 4a_{n-2}$ với điều kiện đầu $a_0 = 1$ và $a_1 = 4$.*

Lời giải: Ta thấy phương trình đặc trưng $r^2 + 4r + 4 = 0$ có nghiệm kép $r = -2$. Theo định lí 4.3.2 nghiệm của hệ thức truy hồi có dạng:

$$a_n = \alpha_1(-2)^n + \alpha_2 n(-2)^n,$$

với α_1 và α_2 là những hằng số. Từ hai điều kiện đầu ta suy ra:

$$\begin{cases} a_0 = 1 = \alpha_1, \\ a_1 = 4 = \alpha_1(-2) + \alpha_2(-2). \end{cases}$$

Hệ phương trình trên cho ta nghiệm $\alpha_1 = 1$ và $\alpha_2 = -3$.

Vậy, nghiệm của hệ thức truy hồi thỏa mãn những điều kiện đầu là: $a_n = (-2)^n - 3n.(-2)^n$.

Trường hợp 3: Phương trình đặc trưng không có nghiệm thực. Khi đó $\Delta := c_1^2 + 4c_2 < 0$. Bằng cách đặt $\rho = \sqrt{-c_2}$ và chọn góc α với $0 \leqslant \alpha \leqslant 2\pi$ sao cho $\cos\alpha = \dfrac{c_1}{2\sqrt{-c_2}}$ và $\sin\alpha = \dfrac{\sqrt{|\Delta|}}{2\sqrt{-c_2}}$, công thức nghiệm của hệ thức truy hồi được cho trong định lí sau:

Định lý 4.3.3. *Cho hệ thức truy hồi :*

$$a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2}, n \geq 2 \quad (1).$$

c_1, c_2 là hai số thực, $c_2 \neq 0$. Nếu phương trình $r^2 - c_1 r - c_2 = 0$ không có nghiệm thực thì dãy $\{a_n\}$ là nghiệm của (1) nếu và chỉ nếu $a_n = \rho^n(\alpha_1 \cos n\alpha + \alpha_2 \sin n\alpha)$, với $n = 1, 2, \ldots$, trong đó α_1 và α_2 là những hằng số.

Ví dụ 4.3.7. *Tìm nghiệm của hệ thức truy hồi $a_n = a_{n-1} - a_{n-2}$ với những điều kiện đầu $a_0 = 1$ và $a_1 = 1$.*

Lời giải: Nhận thấy phương trình đặc trưng $r^2 - r + 1 = 0$ không có nghiệm thực. Xét $\rho = \sqrt{-(-1)} = 1$ và chọn góc α với $0 \leqslant \alpha \leqslant 2\pi$ thỏa mãn $\cos\alpha = \dfrac{1}{2}$ và $\sin\alpha = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$, ta được $\alpha = \dfrac{\pi}{3}$. Theo định lí 4.3.3 nghiệm của hệ thức truy hồi có dạng:

$$a_n = 1^n(\alpha_1 \cos\frac{n\pi}{3} + \alpha_2 \sin\frac{n\pi}{3}),$$

với α_1 và α_2 là những hằng số. Dựa vào hai điều kiện đầu, ta suy ra:

$$\begin{cases} a_0 = 1 = \alpha_1, \\ a_1 = 1 = \alpha_1 \cos\dfrac{\pi}{3} + \alpha_2 \sin\dfrac{\pi}{3}. \end{cases}$$

Giải ra ta được nghiệm $\alpha_1 = 1$ và $\alpha_2 = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$.

Vậy nghiệm của hệ thức truy hồi thỏa mãn hai điều kiện đầu là: $a_n = \cos\dfrac{n\pi}{3} + \dfrac{1}{\sqrt{3}}\sin\dfrac{n\pi}{3}$.

4.3.2.2. Giải hệ thức truy hồi tuyến tính thuần nhất bậc k với hệ số hằng

Trong mục này ta sẽ đưa ra những công thức nghiệm cho các hệ thức truy hồi tuyến tính thuần nhất bậc $k > 2$ với hệ số hằng. Do các chứng minh cho những công thức nghiệm nói trên khá phức tạp nên ta sẽ công nhận mà không đi vào chứng minh cụ thể.

Tương tự như cách giải hệ thức truy hồi tuyến tính thuần nhất bậc hai với hệ số hằng, ta cũng xét các trường hợp sau:

Trường hợp 1: Phương trình đặc trưng có k nghiệm thực phân biệt. Định lí sau là một mở rộng của định lí 4.3.1 cho ta công thức nghiệm của hệ thức truy hồi bậc k:

Định lý 4.3.4. *Cho hệ thức truy hồi $a_n = c_1a_{n-1} + c_2a_{n-2} + ... + c_ka_{n-k}, n \geq k$ (1). $c_1, c_2, ..., c_k$ là k số thực, $c_k \neq 0$. Nếu phương trình $r^k - c_1r^{k-1} - \ldots - c_k = 0$ có k nghiệm phân biệt $r_1, r_2, \ldots, r_k$ thì dãy $\{a_n\}$ là nghiệm của (1) khi và chỉ khi:*

$$a_n = \alpha_1 r_1^n + \alpha_2 r_2^n + \ldots + \alpha_k r_k^n,$$

với $n = 1, 2, \ldots$, trong đó $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$ là những hằng số.

Ví dụ 4.3.8. *Tìm nghiệm của hệ thức truy hồi $a_n = a_{n-1} + 4a_{n-2} - 4a_{n-3}$ thỏa mãn điều kiện đầu $a_0 = 2$, $a_1 = -9$ và $a_2 = 5$.*

Lời giải: Phương trình đặc trưng $r^3 - r^2 - 4r + 4 = 0$ của hệ thức truy hồi có các nghiệm là $r_1 = 1, r_2 = 2, r_3 = -2$. Theo định lí 4.3.4, nghiệm của hệ thức truy hồi có dạng:

$$a_n = \alpha_1 1^n + \alpha_2 2^n + \alpha_3(-2)^n,$$

với α_1, α_2 và α_3 là những hằng số. Để tìm α_1, α_2 và α_3, ta sử dụng điều kiện đầu:

$$\begin{cases} a_0 &= & 2 &= & \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3, \\ a_1 &= & -9 &= & \alpha_1 + 2\alpha_2 - 2\alpha_3, \\ a_2 &= & 5 &= & \alpha_1 + 4\alpha_2 + 4\alpha_3. \end{cases}$$

Giải hệ phương trình trên, ta nhận được $\alpha_1 = 1, \alpha_2 = -2, \alpha_3 = 3$.
Vậy, nghiệm của hệ thức truy hồi thỏa mãn những điều kiện đầu đã cho là $a_n = 1 - 2.2^n + 3.(-2)^n$.

Trường hợp 2: Phương trình đặc trưng có nghiệm bội. Tương tự như định lí 4.3.2, ta có định lí sau:

Định lý 4.3.5. *Cho $c_1, c_2, \ldots, c_k$ là những số thực. Giả sử phương trình đặc trưng $r^k - c_1 r^{k-1} - \ldots - c_k = 0$ có các nghiệm đơn $r_1, \ldots, r_s$ và các nghiệm bội $r_{s+1}, \ldots, r_t$ cấp tương ứng là $l_{s+1}, \ldots, l_t$, với $1 \leqslant s < t < k$ và $s + l_{s+1} + \ldots + l_t = k$. Khi đó dãy $\{a_n\}$ là nghiệm của hệ thức truy hồi:*

$$a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} + \ldots + c_k a_{n-k}$$

nếu và chỉ nếu:

$$\begin{aligned} a_n = \alpha_1 r_1^n + \ldots + \alpha_s r_s^n + (\alpha_{s+1} + \alpha_{s+2} n + \ldots \\ + \alpha_{s+l_{s+1}} n^{l_{s+1}-1}) r_{s+1}^n + \ldots + (\alpha_t + \alpha_{t+1} n + \ldots + \alpha_{t+l_t} n^{l_t - 1}) r_t^n \end{aligned}$$

với $n = 1, 2, \ldots$, trong đó $\alpha_1, \ldots, \alpha_s, \ldots, \alpha_t$ là những hằng số.

Ví dụ 4.3.9. *Tìm nghiệm của hệ thức truy hồi $a_n = 5a_{n-1} - 8a_{n-2} + 4a_{n-3}$ thỏa mãn điều kiện đầu $a_0 = 3$, $a_1 = 2$ và $a_2 = -2$.*

Lời giải: Phương trình đặc trưng $r^3 - 5r^2 + 8r - 4 = 0$ của hệ thức truy hồi có các nghiệm đặc trưng là $r_1 = 1$ và $r_2 = 2$ bội hai. Theo định lí 4.3.5, nghiệm của hệ thức truy hồi có dạng:

$$a_n = \alpha_1 1^n + (\alpha_2 + \alpha_3 n) 2^n,$$

với α_1, α_2 và α_3 là những hằng số. Từ những điều kiện đầu ta có:

$$\begin{cases} a_0 & = & 3 & = & \alpha_1 + \alpha_2, \\ a_1 & = & 2 & = & \alpha_1 + 2\alpha_2 + 2\alpha_3, \\ a_2 & = & -2 & = & \alpha_1 + 4\alpha_2 + 8\alpha_3. \end{cases}$$

Giải hệ phương trình trên ta nhận được $\alpha_1 = 2, \alpha_2 = 1, \alpha_3 = -1$.

Vậy, nghiệm của hệ thức truy hồi thỏa mãn những điều kiện đầu đã cho là $a_n = 2 + (1 - n)2^n$.

4.3.3. Hệ thức truy hồi tuyến tính không thuần nhất hệ số hằng

Định nghĩa 4.3.3. *Một hệ thức truy hồi tuyến tính không thuần nhất bậc k với hệ số hằng số là hệ thức truy hồi có dạng:*

$$a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} + \ldots + c_k a_{n-k} + F(n),$$

trong đó $c_1, c_2, \ldots, c_k$ là những số thực và $c_k \neq 0$.

Ví dụ 4.3.10. *Hệ thức truy hồi* $a_n = 2a_{n-2} + 2^n$ *là hệ thức truy hồi tuyến tính không thuần nhất bậc 2 hệ số hằng.*

Định lý 4.3.6. *Cho hệ thức truy hồi:*

$$a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} + \ldots + c_k a_{n-k} + F(n).$$

Khi đó, nếu $\{p_n\}$ *là một nghiệm của hệ thức truy hồi không thuần nhất thì mọi nghiệm của nó đều có dạng* $\{p_n + h_n\}$*, trong đó* $\{h_n\}$ *là nghiệm của hệ thức truy hồi tuyến tính thuần nhất tương ứng:* $a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} + \ldots + c_k a_{n-k}$.

Chứng minh. Giả sử $\{q_n\}$ là một nghiệm của hệ thức truy hồi không thuần nhất. Ta có:

$$q_n = c_1 q_{n-1} + c_2 q_{n-2} + \ldots + c_k q_{n-k} + F(n)$$

và

$$p_n = c_1 p_{n-1} + c_2 p_{n-2} + \ldots + c_k p_{n-k} + F(n).$$

Trừ từng vế của hai phương trình trên ta được: $q_n - p_n = c_1(q_{n-1} - p_{n-1}) + c_2(q_{n-2} - p_{n-2}) + \ldots + c_k(q_{n-k} - p_{n-k})$. Đặt $h_n = q_n - p_n$. Từ đẳng thức trên ta được $\{h_n\}$ là nghiệm của hệ thức truy hồi thuần nhất.
Vậy, $q_n = p_n + h_n$ và ta có điều phải chứng minh. □

Theo định lí 4.3.6 ta thấy muốn tìm nghiệm của hệ thức truy hồi không thuần nhất ta chỉ cần tìm được một nghiệm bất kì của nó, mà ta gọi là nghiệm riêng, rồi cộng với nghiệm của hệ thức truy hồi thuần nhất tương ứng. Nghiệm riêng của hệ thức truy hồi không thuần nhất phụ thuộc vào $F(n)$. Sau đây, ta sẽ đưa ra một số trường hợp có thể tìm được nghiệm riêng của hệ thức truy hồi không thuần nhất phụ thuộc vào dạng của $F(n)$.

Trường hợp 1. $\boldsymbol{F(n)}$ **có dạng** $\boldsymbol{F(n) = b_0 n^m + b_1 n^{m-1} + \ldots + b_m}$.

a) Nếu phương trình đặc trưng $r^k - c_1 r^{k-1} - \ldots - c_k = 0$ không nhận $r = 1$ làm nghiệm thì ta tìm nghiệm riêng $\{p_n\}$ dưới dạng $p_n = t_0 n^m + t_1 n^{m-1} + \ldots + t_m$, với $t_0, t_1, \ldots, t_m$ là những hằng số được tìm bằng phương pháp hệ số bất định.

Ví dụ 4.3.11. *Tìm một nghiệm riêng của hệ thức truy hồi* $a_n = a_{n-1} + 2a_{n-2} + n + 1$.

Lời giải: Phương trình đặc trưng $r^2 - r - 2 = 0$ không có nghiệm $r = 1$. Ta tìm một nghiệm riêng của hệ thức truy hồi dưới dạng $p_n = bn + c$. Thay $\{p_n\}$ vào hệ thức truy hồi, ta có:

$$bn + c = [b(n-1) + c] + 2[b(n-2) + c] + n + 1.$$

Hay:

$$(2b+1)n + (-5b+2c+1) = 0.$$

Do đẳng thức trên đúng với mọi n nên ta có:

$$\begin{cases} 2b+1=0, \\ -5b+2c+1=0. \end{cases}$$

Giải ra ta được $b = -\dfrac{1}{2}$ và $c = \dfrac{3}{4}$. Vậy, nghiệm riêng của hệ thức truy hồi đã cho có dạng $p_n = \dfrac{-1}{2}n + \dfrac{3}{4}$.

b) Nếu phương trình đặc trưng $r^k - c_1r^{k-1} - \ldots - c_k = 0$ có nghiệm $r = 1$ bội s thì tìm nghiệm riêng $\{p_n\}$ dưới dạng $p_n = n^s(t_0n^m + t_1n^{m-1} + \ldots + t_m)$, với $t_0, t_1, \ldots, t_m$ là những hằng số được tìm bằng phương pháp hệ số bất định.

Ví dụ 4.3.12. *Tìm một nghiệm riêng của hệ thức truy hồi* $a_n = 3a_{n-2} - 2a_{n-3} + 1$.

Lời giải: Do phương trình đặc trưng $r^3 - 3r + 2 = 0$ có nghiệm kép $r_1 = r_2 = 1$ và $r_3 = -2$ nên ta tìm một nghiệm riêng của hệ thức truy hồi dưới dạng $p_n = an^2$. Thay $\{p_n\}$ vào hệ thức truy hồi, ta có:

$$an^2 = 3a(n-2)^2 - 2a(n-3)^2 + 1.$$

Rút gọn hai vế ta được: $-6a + 1 = 0$. Vậy, $a = \dfrac{1}{6}$.

Do đó, một nghiệm riêng của hệ thức truy hồi đã cho có dạng $p_n = \dfrac{n^2}{6}$.

Trường hợp 2. $F(n)$ có dạng lũy thừa: $F(n) = A\beta^n$.

a) Nếu các nghiệm đặc trưng đều khác β thì ta tìm nghiệm riêng dưới dạng $p_n = a\beta^n$.

Ví dụ 4.3.13. *Tìm một nghiệm riêng của hệ thức truy hồi* $a_n = a_{n-2} + 2^n$.

Lời giải: Do phương trình đặc trưng $r^2 - 1 = 0$ có nghiệm là $r_1 = -1$ và $r_2 = 1$ đều khác 2 nên ta tìm một nghiệm riêng của hệ thức truy hồi dưới dạng $p_n = a2^n$. Thay $\{p_n\}$ vào hệ thức truy hồi, ta có:

$$a2^n = a2^{n-2} + 2^n.$$

Giải ra ta được $a = \dfrac{4}{3}$.

Vậy, một nghiệm riêng của hệ thức truy hồi đã cho có dạng $p_n = \frac{4}{3}2^n$.

b) Nếu β là nghiệm bội s của phương trình đặc trưng thì tìm nghiệm riêng dưới dạng $p_n = an^s\beta^n$.

Ví dụ 4.3.14. *Tìm một nghiệm riêng của hệ thức truy hồi* $a_n = 3a_{n-1}+3^n$.

Lời giải: Do phương trình đặc trưng có nghiệm $r = 3$ nên ta tìm một nghiệm riêng của hệ thức truy hồi dưới dạng $p_n = an3^n$. Thay $\{p_n\}$ vào hệ thức truy hồi, ta được

$$an3^n = 3a(n-1)3^{n-1} + 3^n.$$

Giải ra ta được $a = 1$.

Vậy, một nghiệm riêng của hệ thức truy hồi đã cho có dạng $p_n = n3^n$.

Trường hợp 3. $F(n)$ có dạng: $F(n) = (b_0n^m + \ldots + b_m) + A\beta^n$.

Ta tìm nghiệm riêng dưới dạng $p_n = p_n^1 + p_n^2$, trong đó p_n^1 là nghiệm riêng của hệ thức truy hồi:

$$a_n = c_1a_{n-1} + c_2a_{n-2} + \ldots + c_ka_{n-k} + b_0n^m + \ldots + b_m,$$

và p_n^2 là nghiệm riêng của hệ thức truy hồi

$$a_n = c_1a_{n-1} + c_2a_{n-2} + \ldots + c_ka_{n-k} + A\beta^n.$$

Ví dụ 4.3.15. *Tìm một nghiệm riêng của hệ thức truy hồi sau* $a_n = 6a_{n-1} + 3^n + 5n$.

Lời giải: Ta có $p_n^1 = -3^n$ là một nghiệm riêng của hệ thức truy hồi: $a_n = 6a_{n-1} + 3^n$ và $p_n^2 = -n - \frac{6}{5}$ là nghiệm riêng của hệ thức truy hồi $a_n = 6a_{n-1} + 5n$. Vậy, $p_n = p_n^1 + p_n^2 = -3^n - n - \frac{6}{5}$ là một nghiệm riêng của hệ thức truy hồi $a_n = 6a_{n-1} + 3^n + 5n$.

4.4. Bài tập chương 4

Bài 4.1. Nêu cách xác định một hàm đệ quy.
Hãy tìm $f(1), f(2), f(3), f(4), f(5)$ nếu $f(n)$ được định nghĩa bằng đệ quy với điều kiện đầu $f(0) = 3$, và với $n = 1, 2, \ldots$ thì:

a. $f(n) = -2f(n-1)$.

b. $f(n) = 3f(n-1) + 5$.

c. $f(n) = [f(n-1)]^2 - 2f(n-1)$.

d. $f(n) = 3^{f(n-1)/3}$.

Hãy cho một vài hàm được định nghĩa bằng đệ quy.

Bài 4.2. Hãy tìm $f(2), f(3), f(4), f(5)$ nếu $f(n)$ được định nghĩa bằng đệ quy với điều kiện đầu $f(0) = -1$, $f(1) = 2$ và với $n = 2, 3, \ldots$ thì:

a. $f(n) = f(n-1) + 3f(n-2)$.

b. $f(n) = [f(n-1)]^2 f(n-2)$.

c. $f(n) = 3[f(n-1)]^2 - 4[f(n-2)]^2$.

d. $f(n) = \dfrac{f(n-2)}{f(n-1)}$.

Bài 4.3. Hãy cho định nghĩa đệ quy của dãy $\{a_n\}, n = 1, 2, \ldots$ nếu

a. $a_n = 5$.

b. $a_n = 6n$.

c. $a_n = 2n + 1$.

d. $a_n = n(n+1)$.

e. $a_n = 1 + (-1)^n$.

f. $a_n = 10^n$.

g. $a_n = 5^n + (-1)^{n-1}$

h. $a_n = (-4)^n + 3n - 1$

Bài 4.4. Tìm lỗi sai trong các định nghĩa sau:

a. $\begin{cases} a_0 = 1, a_1 = 5 \\ a_n = 5a_{n-1} + 6a_{n-3}, n \geq 3. \end{cases}$

b. $\begin{cases} a_0 = 1, a_1 = 2, a_2 = 0 \\ a_n = 4a_{n-1} - a_{n-2}, n \geq 2. \end{cases}$

c. $\begin{cases} a_0 = 7 \\ a_n = 3a_{n-1} + \dfrac{1}{n^2 - 5n + 6}, n \geq 1. \end{cases}$

d. $\begin{cases} a_0 = 34 \\ a_n = \sqrt{a_{n-1} - 2}, n \geq 1. \end{cases}$

e. $\begin{cases} \max\{a_1\} = a_1 \\ \max\{a_1, a_2, ..., a_n\} = \max\{\max\{a_1, a_2, ..., a_{n-1}\}, a_n\}, \\ n \geq 2. \end{cases}$

Bài 4.5. Lập hệ thức truy hồi cho các dãy số sau:

a. $a_n = \underbrace{\sqrt{2+\sqrt{2+...+\sqrt{2}}}}_{n \text{ dấu căn}}.$

b. $b_n = 2 + \cfrac{1}{\underbrace{2+\cfrac{1}{\ddots 2+\cfrac{1}{2}}}_{n \text{ phép chia}}}.$

Hãy chứng minh rằng $a_n \leq 2$.

Bài 4.6. Nêu định nghĩa dãy Fibonacci.
Cho f_k là số Fibonacci thứ k. Với n nguyên dương, hãy chứng minh những tính chất sau:

a. $f_1^2 + f_2^2 + f_3^2 + \ldots + f_n^2 = f_n f_{n+1}$.

b. $f_1 + f_2 + \ldots + f_n = f_{n+2} - 1$.

c. $f_1 + f_3 + \ldots + f_{2n-1} = f_{2n}$.

d. $f_{n+1}f_{n-1} - f_n^2 = (-1)^n$.

e. $f_0 f_1 + f_1 f_2 + \ldots + f_{2n-1} f_{2n} = f_{2n}^2$.

f. $f_0 - f_1 + f_2 - \ldots - f_{2n-1} + f_{2n} = f_{2n-1} - 1$.

Bài 4.7. Cho $a_1, a_2, \ldots, a_n$ và $b_1, b_2, \ldots, b_n$ là những số thực. Hãy chứng minh những tính chất sau của hàm max và hàm min:

a. $\max\{-a_1, -a_2, \ldots, -a_n\} = -\min\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$.

b. $\max\{a_1+b_1, a_2+b_2, \ldots, a_n+b_n\} \leq \max\{a_1, a_2, \ldots, a_n\} + \max\{b_1, b_2, \ldots, b_n\}$.

c. $\min\{a_1+b_1, a_2+b_2, \ldots, a_n+b_n\} \geq \min\{a_1, a_2, \ldots, a_n\} + \min\{b_1, b_2, \ldots, b_n\}$.

Bài 4.8. Định nghĩa hệ thức truy hồi và cho một vài ví dụ minh họa.
Tìm năm số hạng đầu tiên được xác định bởi mỗi hệ thức truy hồi và những điều kiện đầu sau đây:

a. $a_n = 6a_{n-1}, a_0 = 2$.

b. $a_n = a_{n-1}^2, a_1 = 2$.

c. $a_n = a_{n-1} + 3a_{n-2}, a_0 = 1, a_1 = 2.$

d. $a_n = na_{n-1} + n^2a_{n-2}, a_0 = 1, a_1 = 2.$

e. $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}, a_0 = 1, a_1 = 2, a_2 = 0.$

Bài 4.9. Thế nào là nghiệm của một hệ thức truy hồi? Hãy đề xuất cách kiểm tra một dãy cho trước có là nghiệm của hệ thức truy hồi hay không. Chỉ ra rằng những dãy $\{a_n\}$ sau là nghiệm của hệ thức truy hồi $a_n = -3a_{n-1} + 4a_{n-2}, n \geq 2$:

a. $a_n = 0, n \geq 0.$

b. $a_n = 1, n \geq 0.$

c. $a_n = (-4)^n, n \geq 0.$

d. $a_n = 2(-4)^n + 3, n \geq 0.$

Bài 4.10. Hãy kiểm tra xem dãy $\{a_n\}$ nào sau đây là nghiệm của hệ thức truy hồi $a_n = 8a_{n-1} - 16a_{n-2}, n \geq 2$:

a. $a_n = 0, n \geq 0.$

b. $a_n = 1, n \geq 0.$

c. $a_n = 2^n, n \geq 0.$

d. $a_n = 4^n, n \geq 0.$

e. $a_n = n4^n, n \geq 0.$

f. $a_n = 2.4^n + 3n4^n, n \geq 0.$

g. $a_n = (-4)^n, n \geq 0.$

h. $a_n = n^24^n, n \geq 0.$

Bài 4.11. Với mỗi dãy sau đây hãy tìm một hệ thức truy hồi mà dãy này thỏa mãn (câu trả lời là không duy nhất):

a. $a_n = 3, n \geq 0.$

b. $a_n = 2^n, n \geq 0.$

c. $a_n = 2n + 3, n \geq 0.$

d. $a_n = 5^n, n \geq 0.$

e. $a_n = n^2, n \geq 0.$

f. $a_n = n^2 + n, n \geq 0.$

g. $a_n = n + (-1)^n, n \geq 0.$

h. $a_n = n!, n \geq 0.$

Bài 4.12. Dùng phương pháp lặp hãy tìm nghiệm của mỗi hệ thức truy hồi với những điều kiện đầu sau đây:

a. $a_n = 3a_{n-1}, n \geq 1, a_0 = 2.$

b. $a_n = a_{n-1} + 2, n \geq 1, a_0 = 1.$

c. $a_n = a_{n-1} + n, n \geq 1, a_0 = 1.$

d. $a_n = a_{n-1} + 2n + 3, n \geq 1, a_0 = 4.$

e. $a_n = 2a_{n-1}, n \geq 1, a_0 = 1.$

f. $a_n = \frac{1}{3}a_{n-1} + 1, n \geq 1, a_0 = 2.$

g. $a_n = na_{n-1}, n \geq 1, a_0 = 5.$

h. $a_n = 2na_{n-1}, n \geq 1, a_0 = 1.$

Bài 4.13. Một người gửi 10 000 triệu (VNĐ) vào tài khoản của mình tại một ngân hàng với lãi suất kép 10% một năm.

a. Hãy thiết lập hệ thức truy hồi cho tổng số tiền có trong tài khoản vào cuối năm thứ n.

b. Tìm công thức tường minh cho tổng số tiền có trong tài khoản vào cuối năm thứ n.

c. Sau 20 năm tổng số tiền có trong tài khoản là bao nhiêu?

Bài 4.14. Giả sử dân số thế giới năm 2012 là 7 tỷ người (7,036 tỷ theo USCB) và tốc độ tăng dân số hằng năm là $1,1\%$.

a. Hãy lập hệ thức truy hồi cho dân số thế giới n năm sau năm 2012.

b. Tìm công thức tường minh cho dân số thế giới n năm sau năm 2012.

c. Năm 2050 dân số thế giới là bao nhiêu?

Bài 4.15. Một nhà máy sản xuất ô tô thể thao theo đơn đặt hàng với tốc độ ngày càng tăng. Tháng đầu chỉ sản xuất một chiếc, tháng thứ hai làm được hai chiếc và cứ như vậy tháng thứ n sản xuất được n chiếc.

a. Hãy lập công thức truy hồi tính số ô tô sản xuất được trong n tháng đầu tiên của nhà máy.

b. Hãy tìm công thức tường minh tính số ô tô sản xuất được trong n tháng đầu tiên của nhà máy.

c. Bao nhiêu ô tô được sản xuất trong năm đầu tiên?

Bài 4.16. Một nhóm mười người bắt đầu trò chơi "Viết thư dây chuyền" như sau: Đầu tiên mỗi người gửi thư cho bốn người; mỗi người nhận được thư lại gửi thư cho bốn người khác.

a. Hãy lập công thức truy hồi biểu thị số thư gửi đi ở bước thứ n của "dây chuyền thư" này, nếu không có ai nhận được hơn một lá thư.

b. Hãy tìm những điều kiện đầu.

c. Có bao nhiêu lá thư được gửi đi ở bước thứ mười.

Bài 4.17. Một nhân viên bắt đầu làm việc tại một công ty từ năm 2010, với mức lương khởi điểm là 60 triệu (VNĐ) một năm. Hàng năm, anh ta nhận được thêm 5 triệu và 5% lương của năm trước.

a. Hãy thiết lập hệ thức truy hồi tính lương của nhân viên đó ở năm thứ n kể từ sau năm 2010.

b. Hãy tìm công thức tường minh tính lương của nhân viên này ở năm thứ n kể từ sau năm 2010.

c. Lương năm 2016 của anh ta là bao nhiêu?

Bài 4.18. Một máy bán hàng tự động chỉ nhận những đồng xu 1 nghìn, 2 nghìn và 5 nghìn.

a. Hãy tìm hệ thức truy hồi tính số cách đặt n nghìn vào trong máy bán hàng, biết rằng thứ tự những đồng xu được đặt vào máy là quan trọng.

b. Hãy tìm điều kiện đầu.

c. Bao nhiêu cách đặt 10 nghìn vào trong máy để mua được một bộ tem?

d. Hãy lập hệ thức truy hồi tính số cách đặt n nghìn vào trong máy bán hàng trong trường hợp chỉ có những đồng xu 1 nghìn, 2 nghìn và 10 nghìn, biết rằng thứ tự những đồng xu được đặt vào máy là quan trọng. Tìm điều kiện đầu.

Bài 4.19. **a.** Hãy tìm hệ thức truy hồi cho số cách phủ toàn bộ bàn cờ $2 \times n$ bằng những quân đôminô 1×2.

b. Hãy tìm điều kiện đầu.

c. Có bao nhiêu cách phủ bàn cờ 2×17 bằng những quân đôminô 1×2?

Bài 4.20. **a.** Hãy tìm hệ thức truy hồi cho số xâu nhị phân độ dài n không chứa hai số 0 liên tiếp.

b. Tìm điều kiện đầu.

c. Có bao nhiêu xâu như vậy có độ dài là bảy?

Bài 4.21. **a.** Hãy tìm hệ thức truy hồi cho số xâu nhị phân độ dài n chứa ba số 0 liên tiếp.

b. Tìm điều kiện đầu.

c. Có bao nhiêu xâu nhị phân độ dài là bảy thỏa mãn yêu cầu đề bài?

Bài 4.22. **a.** Hãy tìm hệ thức truy hồi cho số xâu nhị phân độ dài n chứa xâu 01.

b. Tìm điều kiện đầu.

c. Có bao nhiêu xâu nhị phân độ dài bảy chứa dãy 01?

Bài 4.23. Thế nào là hệ thức truy hồi tuyến tính thuần nhất với hệ số hằng?
Trong những hệ thức truy hồi sau đây hệ thức nào là tuyến tính thuần nhất với hệ số hằng số? Bậc của những hệ thức đó bằng bao nhiêu?

a. $a_n = a_{n-2}$.

b. $a_n = 2na_{n-1} + a_{n-2}$.

c. $a_n = a_{n-1} + 2$.

d. $a_n = a_{n-1}^2 + a_{n-2}$.

e. $a_n = 3a_{n-1} + 4a_{n-2} + 5a_{n-3}$.

f. $a_n = \dfrac{a_{n-1}}{n}$.

g. $a_n = 4a_{n-2} + a_{n-5} + a_{n-6}$.

Hãy lập thêm một vài hệ thức truy hồi tuyến tính thuần nhất với hệ số hằng.

Bài 4.24. Nêu cách giải hệ thức truy hồi tuyến tính thuần nhất bậc hai. Giải những hệ thức truy hồi cùng những điều kiện đầu sau:

a. $a_n = 2a_{n-1}$, với $n \geq 1, a_0 = 3$.

b. $a_n = 4a_{n-2}$, với $n \geq 2, a_0 = 0, a_1 = 4$.

c. $a_n = \dfrac{a_{n-2}}{4}$, với $n \geq 2, a_0 = 1, a_1 = 0$.

d. $a_n = 5a_{n-1} - 6a_{n-2}$, với $n \geq 2, a_0 = 1, a_1 = 3$.

e. $a_n = 6a_{n-1} - 9a_{n-2}$, với $n \geq 2, a_0 = 6, a_1 = 8$.

f. $a_n = 4a_{n-1} - 4a_{n-2}$, với $n \geq 2, a_0 = 2, a_1 = 3$.

g. $a_n = 7a_{n-1} - 10a_{n-2}$, với $n \geq 2, a_0 = 2, a_1 = 1$.

h. $a_n = 2a_{n-1} + a_{n-2}$, với $n \geq 2, a_0 = 1, a_1 = 2$.

Bài 4.25. Tìm một hệ thức truy hồi tuyến tính thuần nhất bậc hai hệ số hằng nhận nghiệm là:

a. $a_n = 3.2^n - 4(-1)^n$.
b. $b_n = (4n+1).3^n$.
c. $c_n = 4n - 1$.

Bài 4.26. Chứng minh rằng tồn tại duy nhất hệ thức truy hồi tuyến tính thuần nhất bậc hai hệ số hằng có nghiệm là $a_n = 5.3^n - 4.(-1)^n$.

Bài 4.27. Giả sử số tôm hùm bị đánh bắt trong một năm bằng trung bình cộng số bị đánh bắt trong hai năm trước đó.

a. Hãy tìm hệ thức truy hồi cho $\{L_n\}$, trong đó L_n là số tôm bị đánh bắt trong năm thứ n.

b. Hãy tìm L_n nếu năm đầu có 100 000 tôm hùm bị đánh bắt, năm thứ hai có 300 000 tôm hùm bị đánh bắt.

Bài 4.28. Với những tấm lát 1×2 và 2×2 có thể lát một chiếc bảng $2 \times n$ bằng bao nhiêu cách khác nhau?

Bài 4.29. Có thể truyền được bao nhiêu thông báo khác nhau trong n μs khi sử dụng ba loại tín hiệu, trong đó truyền tín hiệu loại 1 mất 1 μs, hai loại tín hiệu còn lại mỗi tín hiệu cần 2 μs và mỗi tín hiệu trong thông báo được truyền liên tiếp nhau?

Bài 4.30. Hãy lập ra một bài toán có hệ thức truy hồi giống hai bài trên.

Bài 4.31. Một người gửi 100 000 USD vào quĩ đầu tư vào ngày đầu của một năm. Ngày cuối cùng của năm, người đó hưởng hai khoản tiền lãi. Khoản lãi đầu là 20% tổng số tiền có trong tài khoản cả năm. Khoản thứ hai là 45% tổng số tiền có trong tài khoản trong năm trước đó.

a. Hãy tìm hệ thức truy hồi cho $\{P_n\}$, trong đó P_n là tổng số tiền trong tài khoản vào cuối năm thứ n, nếu người đó không rút tiền ra lần nào.

b. Tính số tiền có trong tài khoản sau n năm, nếu người đó không rút tiền ra lần nào.

Bài 4.32. Giả sử rằng mỗi cặp thỏ trên đảo khi được một tháng tuổi đẻ được 2 cặp thỏ con và từ hai tháng tuổi, mỗi tháng đẻ được 6 cặp thỏ con. Giả sử trong thời gian thí nghiệm không có con nào bị chết hoặc rời khỏi đảo.

a. Hãy tìm hệ thức truy hồi cho số cặp thỏ trên đảo sau n tháng kể từ khi thả một cặp thỏ mới sinh lên đảo.

b. Bằng cách giải hệ thức truy hồi trong câu trên, hãy tìm số cặp thỏ trên đảo sau n tháng kể từ khi thả một cặp thỏ mới sinh lên đảo.

c. Giải bài toán này với giả sử những cặp thỏ đẻ xong lứa thứ 2 đều rời khỏi đảo.

Bài 4.33. Nêu cách giải hệ thức truy hồi tuyến tính thuần nhất trong các trường hợp phương trình đặc trưng có: ba nghiệm phân biệt; một nghiệm bội 2; một nghiệm bội 3.
Tìm nghiệm của những hệ thức truy hồi sau:

a. $a_n = 2a_{n-1} + a_{n-2} - 2a_{n-3}$ với $n \geq 3$, $a_0 = 3, a_1 = 6, a_2 = 0$.

b. $a_n = 7a_{n-2} + 6a_{n-3}$ với $n \geq 3$, $a_0 = 9, a_1 = 10, a_2 = 32$.

c. $a_n = 4a_{n-1} - 5a_{n-2} + 2a_{n-3}$ với $n \geq 3$, $a_0 = 0, a_1 = 1, a_2 = 2$.

d. $a_n = 3a_{n-1} - 3a_{n-2} + a_{n-3}$ với $n \geq 3$, $a_0 = 2, a_1 = 2, a_2 = 4$.

e. $a_n = 2a_{n-1} + 3a_{n-2} - 6a_{n-3}$ với $n \geq 3$, $a_0 = 0, a_1 = 2 - 5\sqrt{3}, a_2 = 1$.

f. $a_n = 5a_{n-2} - 4a_{n-4}$ với $n \geq 4$, $a_0 = 3, a_1 = 2, a_2 = 6, a_3 = 8$.

g. $a_n = 4a_{n-1} + a_{n-2} - 16a_{n-3} + 12a_{n-4}$ với $n \geq 4$, $a_0 = 2, a_1 = -7, a_2 = 15, a_3 = -1$.

Bài 4.34. Chứng minh rằng không tồn tại hệ thức truy hồi tuyến tính thuần nhất bậc hai hệ số hằng nhận dãy $a_n = 1 + 2.3^n + 3.4^n$ làm nghiệm.

Bài 4.35. Giải các hệ thức truy hồi sau bằng cách đưa về hệ thức truy hồi tuyến tính thuần nhất bậc hai hệ số hằng:

a. $a_n = \sqrt[3]{a_{n-1}^2 a_{n-2}}, n \geq 2; a_0 = 1; a_1 = 3$.

b. $a_n = a_{n-1} + 4a_{n-2} + 4\sqrt{a_{n-1}a_{n-2}}, n \geq 2; a_0 = 1, a_1 = 4$.

c. $a_n = \dfrac{a_{n-1}a_{n-2}}{2a_{n-1} + 3a_{n-2}}, n \geq 2; a_0 = 3, a_1 = 5$.

Bài 4.36. Tìm một hệ thức truy hồi tuyến tính cấp một (không thuần nhất) và một hệ thức truy hồi tuyến tính thuần nhất cấp hai hệ số hằng nhận dãy số sau là nghiệm:

$$a_n = \begin{cases} 1 & \text{nếu n chẵn} \\ 3 & \text{nếu n lẻ} \end{cases} \qquad n \geq 1.$$

Bài 4.37. Tìm nghiệm của những hệ thức truy hồi sau:

a. $a_n = 3a_{n-1} + 2^n$ với $n \geq 1, a_0 = 1$.

b. $a_n = 3a_{n-1} - 2a_{n-2} + 5$ với $n \geq 2, a_0 = 1, a_1 = 3$.

c. $a_n = 7a_{n-1} - 10a_{n-2} + n$ với $n \geq 2, a_0 = 2, a_1 = 1$.

d. $a_n = 4a_{n-2} + 2^n$ với $n \geq 2, a_0 = 2, a_1 = 3$.

e. $a_n = 4a_{n-1} - a_{n-2} - 6a_{n-3} + n$ với $n \geq 3, a_0 = -2, a_1 = -5, a_2 = -17$.

f. $a_n = 7a_{n-2} - 6a_{n-3} + n$ với $n \geq 3, a_0 = 9, a_1 = 12, a_2 = 38$.

f. $a_n = 4a_{n-1} - a_{n-2} - 6a_{n-3} + 2^n$ với $n \geq 3, a_0 = -2, a_1 = 13, a_2 = 35$.

g. $a_n = 7a_{n-2} - 6a_{n-3} + 1 + (-3)^n$ với $n \geq 3, a_0 = -2, a_1 = -6, a_2 = 35$.

Chương 5

Hướng dẫn giải bài tập

5.1. Hướng dẫn giải bài tập chương 1

1.2.

c. Lào hoặc Campuchia có bờ biển.

d. Mùa hè ở Đà Lạt không có nắng hoặc nóng.

1.4.

a. $p \wedge q$

b. $p \wedge \neg q$

c. $\neg p \wedge \neg q$

d. $q \vee p$

e. $p \to \neg q$

f. $p \oplus q$

g. $p \leftrightarrow q$

1.5.

a. $\neg p$

b. $p \wedge \neg q$

c. $p \to q$

d. $\neg p \to \neg q$

e. $p \to q$

f. $q \wedge \neg p$

g. $q \to p$

1.6.

a. $r \wedge \neg q$

b. $p \wedge q \wedge r$

c. $r \to p$

d. $p \wedge \neg q \wedge r$

e. $(p \wedge q) \to r$

f. $r \leftrightarrow (q \vee p)$

1.7. tuyển (a, d, f,), tuyển loại (b, c, e,).

1.15. Kết quả viết theo thứ tự các phép toán OR, AND và XOR:

a. 10011 11011; 10001 01010; 00010 10001

b.	11011 10001;	11011 10001;	00000 00000
c.	11101 11111;	00101 10011;	11000 01100
d.	10111 11000;	10111 10000;	00000 01000
e.	11011 11010;	11001 11000;	00010 00010

1.20. Ta có thể dùng nhiều cách để chứng minh các mệnh đề phức hợp này là hằng đúng chẳng hạn dùng bảng giá trị chân lý hoặc dùng biến đổi tương đương hoặc chứng minh phản chứng. Sau đây là cách dùng chứng minh phản chứng để chứng minh ý d:

Đặt A là mệnh đề phức hợp: $[(p \vee q) \wedge (p \to r) \wedge (q \to r)] \to r$. Giả sử A không là hằng đúng, khi đó có trường hợp của các mệnh đề thành phần để A nhận giá trị sai. Ta có:

$$A \quad \text{sai} \Longleftrightarrow \begin{cases} p \vee q & \text{đúng} \quad (1) \\ p \to r & \text{đúng} \quad (2) \\ q \to r & \text{đúng} \quad (3) \\ r & \text{sai} \quad (4) \end{cases}$$

Kết hợp (4) và (2) ta được p sai, kết hợp (4) và (3) ta cũng được q sai. Do cả p và q cùng sai, ta suy ra $p \vee q$ sai, điều này mâu thuẫn với (1). Vậy, điều giả sử là sai hay A phải là hằng đúng.

1.22. Có thể dùng bảng giá trị chân lý để xác định các mệnh đề phức hợp có là hằng đúng hay không. Ngoài ra, có thể tham khảo cách sau:

a. Dùng biến đổi tương đương logic đưa mệnh đề phức hợp về dạng $p \vee \neg(\neg p \vee q) \vee \neg q$, và dễ dàng nhận thấy có duy nhất một trường hợp làm mệnh đề nhận giá trị sai là trường hợp p sai, q đúng. Điều đó chứng tỏ mệnh đề phức hợp ban đầu không là hằng đúng.

b. Mệnh đề phức hợp ban đầu tương đương logic với $q \vee \neg(p \vee q) \vee \neg p$, dễ thấy mệnh đề phức hợp này nhận giá trị sai khi p đúng, q sai. Vậy, mệnh đề phức hợp ban đầu không là hằng đúng.

c. Cả $p \leftrightarrow q$ và $(p \wedge q) \vee (\neg p \wedge \neg q)$ đều biến đổi tương đương được về cùng một dạng $(\neg p \vee q) \wedge (\neg q \vee p)$ do đó chúng tương đương logic với nhau. Vì vậy, mệnh đề phức hợp ban đầu là hằng đúng.

d. Ta biến đổi $(p \to q) \to r$ về dạng $(p \wedge \neg q) \vee r$, và $p \to (q \to r)$ về dạng $\neg p \wedge (\neg q \vee r)$. Dễ thấy ở trường hợp p sai, q sai, r sai hai mệnh đề phức hợp này cho ta giá trị chân lý khác nhau, do đó chúng không tương đương logic với nhau. Vậy, mệnh đề phức hợp ban đầu sẽ không là hằng đúng.

1.24. $(p \wedge \neg q \wedge r) \vee (\neg p \wedge q \wedge r)$

1.25. $(p \vee q \vee \neg r) \wedge (\neg p \vee q \vee r) \wedge (\neg p \vee \neg q \vee \neg r)$

1.26.
a. $\{-1; 1\}$.
b. $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$.
c. $\{0, 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81\}$.
d. $\varnothing$.

1.27.
a. $\{3x | x$ là số nguyên dương nhỏ hơn $5\}$.
b. $\{x | x$ là số nguyên thỏa mãn $|x| \leq 3\}$.
c. $\{x^2 | x$ là số nguyên dương không quá $5\}$.
d. $\{x | x$ là số nguyên tố nhỏ hơn $20\}$.

1.28. a. Bằng nhau. b, c, d. Không bằng nhau.

1.29. a, b, d, e. Đúng. c, f. Sai.

1.30. Chọn tập A tùy ý. Sau đó, chọn tập B sao cho B chứa tất cả các phần tử của A và một phần tử nữa là tập A.

Chẳng hạn: chọn tập $A = \{a\}$. Khi đó, $B = \{a, \{a\}\}$ là tập cần tìm.

1.31. Ta chứng minh $A \subseteq C$ theo định nghĩa tập con.

Giả sử $x \in A$ bất kì. Do $A \subseteq B$ nên $x \in B$. Lại có, $B \subseteq C$ nên từ đó cũng có $x \in C$. Vậy, $A \subseteq C$.

1.32.
a. $P(\{a\}) = \{\varnothing, \{a\}\}$.
b. $P(\{a, b\}) = \{\varnothing, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\}$.
c. $P(\varnothing) = \{\varnothing\}$.
d. $P(\{\varnothing, \{\varnothing\}\}) = \{\varnothing, \{\varnothing\}, \{\{\varnothing\}\}, \{\varnothing, \{\varnothing\}\}\}$.

1.33.
a. Với $A = \{a\}$ thì $|A| = 1$ và $P(\{a\}) = \{\varnothing, \{a\}\}$.
b. $B = \{\{a\}\}$. Khi đó $|B| = 1$ và $P(B) = \{\varnothing, \{\{a\}\}\}$.
c. $C = \{a, \{a\}\}$. Khi đó $|C| = 2$ và $P(C) = \{\varnothing, \{a\}, \{\{a\}\}, C\}$.
d. $D = \{a, \{a\}, \{a, \{a\}\}\}$. Khi đó $|D| = 3$ và

$P(D) = \{\varnothing, \{a\}, \{\{a\}\}, \{\{a, \{a\}\}\}, \{a, \{a\}\}, \{\{a\}, \{a, \{a\}\}\}, \{a, \{a, \{a\}\}\}, D\}$.

1.34. Chứng minh hai tập bằng nhau bằng cách chỉ ra tập này là tập con của tập kia và ngược lại.

Ta có, $A \subseteq A$, do đó $A \in P(A)$, mà $P(A) = P(B)$ nên $A \in P(B)$. Theo định nghĩa của $P(B)$ thì $A \subseteq B$.

Tương tự, $B \subseteq B$, do đó $B \in P(B)$, mà $P(A) = P(B)$ nên $B \in P(A)$. Theo định nghĩa của $P(A)$ thì $B \subseteq A$.

Vậy $A = B$.

1.35. Tự làm.

1.36. Giả sử phản chứng rằng $A \neq \varnothing$ và $B \neq \varnothing$. Khi đó tồn tại $x \in A$ và $y \in B$. Nghĩa là ta có cặp $(x, y) \in A \times B$. Điều này cho thấy rằng $A \times B \neq \varnothing$. Mâu thuẫn với giả thiết là $A \times B = \varnothing$. Suy ra đpcm.

1.37. Vì $A \neq \varnothing$ và $A \neq B$ nên ít nhất một trong hai điều sau xảy ra:

1. tồn tại phần tử $a \in A$ mà $a \notin B$.
2. tồn tại phần tử $x \in B$ mà $x \notin A$.

Nếu điều đầu tiên xảy ra thì vì $B \neq \varnothing$ nên tồn tại phần tử $b \in B$, khi đó ta có cặp $(a, b) \in A \times B$ nhưng $(a, b) \notin B \times A$. Vậy trường hợp này dẫn đến $A \times B \neq B \times A$.

Điều thứ hai nếu xảy ra cũng dẫn đến $A \times B \neq B \times A$.

1.38.
a. Vì $S \in S$, mà theo cách định nghĩa tập S, ta phải có $S \notin S$. Do đó, dẫn đến mâu thuẫn.
b. Chứng minh tương tự.

1.39.
a. $A \cap B$ là tập các sinh viên sống cách trường trong vòng 3 km và đang trên đường đến lớp.
b. $B \cup A$ là tập các sinh viên đang trên đường tới lớp hoặc sống cách trường trong vòng 3 km.
c. $A \setminus B$ là tập các sinh viên sống cách trường trong vòng 3 km nhưng không đang trên đường tới lớp.
d. $B \setminus A$ là tập các sinh viên đang trên đường tới lớp nhưng không sống cách

trường trong vòng 3 km.

1.40.

a. $A \cap B = \{3, 4\}$.

b. $B \cup A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

c. $A \setminus B = \{1, 2, 5\}$.

d. $B \setminus A = \{0, 6\}$.

1.41. Đây là các hằng đẳng thức tập hợp cơ bản.
Cách 1. Dùng bảng tính thuộc.
Cách 2. Chứng minh tập này là tập con của tập kia và ngược lại.
Cách 3. Chỉ ra thuộc tính đặc trưng và sử dụng các phép toán logic.

Chẳng hạn:

a. $A \cup \varnothing = \{x|(x \in A) \vee (x \in \varnothing)\} = \{x|(x \in A) \vee F\} = \{x|x \in A\} = A$
e. $A \setminus \varnothing = \{x|(x \in A) \wedge (x \notin \varnothing)\} = \{x|(x \in A) \wedge T\} = \{x|x \in A\} = A$.

1.42. a, b. Tự làm.
c. $\overline{A \cup B} = \{x|x \notin A \cup B\} = \{x|x \notin A \wedge x \notin B\}$
$= \{x|x \in \bar{A} \wedge x \in \bar{B}\} = \bar{A} \cap \bar{B}$
d. $\overline{A \cap B} = \{x|x \notin A \cap B\} = \{x|x \notin A \vee x \notin B\}$
$= \{x|x \in \bar{A} \vee x \in \bar{B}\} = \bar{A} \cup \bar{B}$

1.43.
a. Giả sử $x \in A \cap B$, từ đó có $x \in A$ và $x \in B$, suy ra $x \in A$. Vậy, $A \cap B \subseteq A$.
b. Giả sử $x \in A$, từ đó có $x \in A$ hoặc $x \in B$, suy ra $x \in A \cup B$. Vậy, $A \subseteq A \cup B$.
c. Giả sử $x \in A \setminus B$, suy ra $x \in A$ và $x \notin B$, khi đó $x \in A$. Vậy, $(A \setminus B) \subseteq A$.
e. $A \cup (B \setminus A) = A \cup (B \cap \overline{A}) = (A \cup B) \cap (A \cup \overline{A})$
$= (A \cup B) \cap U = A \cup B$.
d, h. Tự làm.

1.44. Tự làm.

1.45.
$A = \{1, 5, 7, 8, 3, 6, 9\}$ và $B = \{3, 6, 9, 2, 10\}$.

1.46. Tự làm.

1.47.
a. $(A \setminus C) \cap (C \setminus B) = (A \cap \bar{C}) \cap (C \cap \bar{B}) = A \cap (\bar{C} \cap C) \cap \bar{B}$
$= A \cap \varnothing \cap \bar{B} = (A \cap \bar{B}) \cap \varnothing = (A \setminus B) \cap \varnothing = \varnothing$
b. $(B \setminus A) \cup (C \setminus A) = (B \cap \bar{A}) \cup (C \cap \bar{A}) = (B \cup C) \cap \bar{A} = (B \cup C) \setminus A$
c. $(A \setminus C) \setminus (B \setminus C) = (A \cap \bar{C}) \cap \overline{B \cap \bar{C}}. = (A \cap \bar{C}) \cap (\bar{B} \cup C) = A \cap (\bar{C} \cap (\bar{B} \cup C))$

$= A \cap ((\bar{C} \cap \bar{B}) \cup (\bar{C} \cap C)) = A \cap (\bar{C} \cap \bar{B}) \cup \varnothing = A \cap \bar{C} \cap \bar{B} = (A \cap \bar{B}) \cap \bar{C}$
$= (A \setminus B) \cap \bar{C} = (A \setminus B) \setminus C$
d. $(A \cap B) \setminus C = A \cap B \cap \bar{C} = A \cap \bar{C} \cap B = (A \setminus C) \cap B$

1.48.

a. $A \cup B = A$: khi $B \subseteq A$.

b. $A \cap B = A$: khi $A \subseteq B$.

c. $A \setminus B = A$: khi $A \cap B = \varnothing$.

d. $A \setminus B = \varnothing$: khi $A \subseteq B$.

e. $A \setminus B = B \setminus A$: khi $A = B$.

f. $A \setminus B = B$: khi $A = B = \varnothing$.

g. $A \setminus B = A \cup B$: khi $B = \varnothing$.

h. $A \cap B = B \setminus A$: khi $B = \varnothing$.

1.49. c. Chỉ suy ra được khi có cả a và b.

Thật vậy, ta có thể chứng minh bằng hai cách như sau:

Cách 1: Ta có:

$A = ((A \cup C) \setminus C) \setminus (A \cap C) = ((B \cup C) \setminus C) \setminus (B \cap C) = B$

Cách 2: Chỉ ra tập này là con của tập kia.

Giả sử $x \in A$, suy ra $x \in A \cup C$ hay $x \in B \cup C$.

Nếu $x \in C$ thì $x \in A \cap C$, hay $x \in B \cap C$, suy ra $x \in B$.

Nếu $x \notin C$ thì $x \notin B \cap C$, mà $x \in B \cup C$ nên $x \in B$.

Như vậy, trong cả hai trường hợp thì $A \subseteq B$.

Ngược lại, giả sử $x \in B$, ta chứng minh được $B \subseteq A$.

Vậy, có $A = B$.

1.50. Giả sử $A \subseteq B$. Ta chứng minh $\bar{B} \subseteq \bar{A}$.
Lấy x bất kì thuộc $\bar{B}$, từ đó có $x \notin B$, mà $A \subseteq B$ nên $x \notin A$, hay $x \in \bar{A}$.
Vậy, có $\bar{B} \subseteq \bar{A}$.
Giả sử $\bar{B} \subseteq \bar{A}$. Ta chứng minh $A \subseteq B$.
Lấy $x \in A$, khi đó $x \notin \bar{A}$, suy ra $x \notin \bar{B}$, hay là $x \in B$. Vậy, có $A \subseteq B$.

1.51.
a. $\{3, 4, 5\}$: 00011 10000.
b. $\{1, 3, 6, 9\}$: 01010 01001.
c. $\{0, 2, 4, 7, 8, 9\}$: 10101 00111.
d. $\varnothing$: 00000 00000.
1.52. a. 11001 10010 : $\{0, 1, 4, 5, 8\}$.
b. 00010 10101 : $\{3, 5, 7, 9\}$.

c. 11111 11111 : $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$.
d. 01011 00001 : $\{1, 3, 4, 9\}$.
1.59.

a. $\forall x, L(x, \text{ Sơn})$

b. $\forall x \exists y, L(x, y)$

c. $\exists y \forall x, L(x, y)$

d. $\neg(\exists x \forall y, L(x, y))$ hoặc $\forall x \exists y, \neg L(x, y)$

e. $\exists y, \neg L(\text{Hồng}, y)$

f. $\exists y \forall x, \neg L(x, y)$

g. $\exists x \big\{ L(x, \text{ Mai}) \land \forall z[(z \neq x) \to \neg L(z, \text{ Mai})] \big\}$
hoặc $\exists x \forall z \big\{ L(x, \text{ Mai}) \land [(z \neq x) \to \neg L(z, \text{ Mai})] \big\}$

h. $\exists y \big\{ \forall x[L(x, y) \land \forall z((z \neq y) \to \exists t \neg L(t, z))] \big\}$ hoặc $\exists y \big\{ \forall x L(x, y) \land \forall z[\forall t L(t, z) \to (z = y)] \big\}$

i. $\exists y_1 \exists y_2 \big\{ L(\text{ Hoa}, y_1) \land L(\text{ Hoa}, y_2) \land (y_1 \neq y_2) \land \forall z[(z \neq y_1) \land (z \neq y_2) \to \neg L(\text{ Hoa}, z)] \big\}$
hoặc $\exists y_1 \exists y_2 \forall z \big\{ L(\text{ Hoa}, y_1) \land L(\text{ Hoa}, y_2) \land (y_1 \neq y_2) \land [(z \neq y_1) \land (z \neq y_2) \to \neg L(\text{ Hoa}, z)] \big\}$

j. $\exists x \big\{ L(x, x) \land \forall z[(z \neq x) \to \neg L(x, z)] \big\}$
hoặc $\exists x \forall z \big\{ L(x, x) \land [(z \neq x) \to \neg L(x, z)] \big\}$

1.61.
Đặt $M(x, y)$ là câu "x học năm thứ y", $N(x, z)$ là câu "x học nghình z", với không gian biện luận của x là tập các sinh viên trong lớp, của y là $\{1, 2, 3, 4\}$ và không gian biện luận của z là { Toán, Tin }.

a. $\exists x, M(x, 3)$ (Đúng)

b. $\forall x, N(x, \text{Tin})$ (Sai)

c. $\exists x, \neg N(x, \text{Toán}) \land \neg M(x, 3)$ (Đúng)

d. $\forall x, M(x, 3) \lor N(x, \text{Tin})$ (Sai)

e. $\exists z \forall y \exists x (M(x, y) \land N(x, z))$ (Sai)

f. $\exists y \forall z \exists x (M(x,y) \wedge N(x,z))$ (Đúng)

1.62.

a. Đặt $A(x)$ là câu "x cao hơn Nam", không gian biện luận của x là tập các sinh viên trong lớp. Mệnh đề đã cho được diễn đạt thành $\exists x, A(x)$.

b. Đặt $B(x)$ là câu "x nối mạng Internet", không gian biện luận của x là tập các nước trên thế giới. Mệnh đề đã cho được diễn đạt thành $\forall x, B(x)$.

c. Đặt $C(x,y)$ là câu "x nói được ngôn ngữ y", không gian biện luận của x là tập mọi người trên thế giới, không gian biện luận của y là tập các ngôn ngữ trên thế giới. Mệnh đề đã cho được diễn đạt thành $\forall x \exists y, C(x,y)$.

d. $\neg(\exists x \forall y, C(x,y))$ hoặc $(\forall x \exists y, \neg C(x,y))$.

e. Đặt $E(x,y)$ là câu "x thích xem môn thể thao y", không gian biện luận của x là tập mọi người trên thế giới, không gian biện luận của y là tập các môn thể thao trên thế giới. Mệnh đề đã cho được diễn đạt thành $\exists y \forall x, E(x,y)$.

f. Đặt $P(x)$ là câu "x khỏe mạnh" và $Q(x,y)$ là câu "x chơi môn y", không gian biện luận của x là tập mọi người trên thế giới, không gian biện luận của y là tập các môn thể thao. Mệnh đề đã cho được diễn đạt thành $\exists x[P(x) \rightarrow \exists y Q(x,y)]$.

g. Đặt $M(x,y)$ là câu "x học ở phòng y", $N(y,z)$ là câu "y thuộc khu z", không gian biện luận của x là tập các sinh viên trong trường, không gian biện luận của y là tập các phòng trong trường, không gian biện luận của z là tập các khu nhà trong trường. Mệnh đề đã cho được diễn đạt thành $\exists x \exists z \forall y N(y,z) \rightarrow M(x,y)$.

h. $\forall x \forall z \exists y, M(x,y) \wedge N(y,z)$.

1.65.

a. Mệnh đề $\exists\, x\, \exists y\, R(x,y)$ đúng do tồn tại $x_0 = -2$ và $y_0 = 1$ để $R(-2,1)$ là đẳng thức đúng.

b. Mệnh đề $\forall\, x\, \exists y\, R(x,y)$ sai do tồn tại $x_0 = 0$ để với mọi $y_0 \in \mathbb{Z}$ ta có $R(0, y_0) = "2.0 + 5.y_0 = 1"$ là đẳng thức sai.

c. Mệnh đề $\exists x \forall y\, R(x,y)$ sai do với mọi $x_0 \in \mathbb{Z}$, tồn tại $y_0 = 0$ để $R(x_0, 0) =$ "$2.x_0 + 5.0 = 1$" là đẳng thức sai.

d. Mệnh đề $\forall x \forall y\, R(x,y)$ sai do có giá trị $x_0 = 1$ và $y_0 = 2$ để $R(1,2)$ là đẳng thức sai.

1.66.

a. $\exists x\, P(x,3) \Leftrightarrow P(1,3) \vee P(2,3) \vee P(3,3)$.

b. $\forall y\, P(1,y) \Leftrightarrow P(1,1) \wedge P(1,2) \wedge P(1,3)$.

c. $\forall x \forall y\, P(x,y) \Leftrightarrow P(1,1) \wedge P(1,2) \wedge P(1,3) \wedge P(2,1) \wedge P(2,2) \wedge P(2,3) \wedge P(3,1) \wedge P(3,2) \wedge P(3,3)$.

d. $\exists x\, \exists y\, P(x,y) \Leftrightarrow P(1,1) \vee P(1,2) \vee P(1,3) \vee P(2,1) \vee P(2,2) \vee P(2,3) \vee P(3,1) \vee P(3,2) \vee P(3,3)$.

e. $\exists x \forall y\, P(x,y) \Leftrightarrow (P(1,1) \wedge P(1,2) \wedge P(1,3)) \vee (P(2,1) \wedge P(2,2) \wedge P(2,3)) \vee (P(3,1) \wedge P(3,2) \wedge P(3,3))$.

f. $\forall y\, \exists x\, P(x,y) \Leftrightarrow (P(1,1) \vee P(2,1) \vee P(3,1)) \wedge (P(1,2) \vee P(2,2) \vee P(3,2)) \wedge (P(1,3) \vee P(2,3) \vee P(3,3))$.

1.68.

a. Đặt $P(x)$ là câu "x ngủ sớm", $Q(x)$ là câu "x khỏe mạnh" và $R(x)$ là câu "x là trẻ em", không gian biện luận của x là toàn bộ mọi người trên thế giới. Khi đó các câu đã cho được diễn đạt thành:

1. $\forall x, P(x) \to Q(x)$.
2. $\exists x, R(x) \wedge \neg Q(x)$.
3. $\exists x, R(x) \wedge \neg P(x)$.

b. Ta sẽ chỉ ra nếu câu (1) và (2) đúng thì suy ra câu (3) đúng.

- Từ câu (1) và câu (2) đúng ta có các mệnh đề $\forall x, P(x) \to Q(x)$ và $\exists x, R(x) \wedge \neg Q(x)$ là đúng. Ta cần chỉ ra câu (3) đúng hay $\exists x, R(x) \wedge \neg P(x)$ là mệnh đề đúng. Thật vậy,
- Từ $\exists x, R(x) \wedge \neg Q(x)$ đúng, tồn tại x_0 sao cho $R(x_0) \wedge \neg Q(x_0)$ đúng hay $R(x_0)$ đúng và $Q(x_0)$ sai.

– Từ $\forall x, P(x) \rightarrow Q(x)$ đúng, ta có $P(x_0) \rightarrow Q(x_0)$ đúng. Do $Q(x_0)$ sai nên $P(x_0)$ sai.
– Như vậy ta có $R(x_0) \wedge \neg P(x_0)$ đúng hay mệnh đề $\exists x, R(x) \wedge \neg P(x)$ đúng.

1.70.

a. Giả sử không gian biện luận của x là M. Đặt $E = E_{P(x)}$ và $F = E_{Q(x)}$, khi đó $E_{P(x)\wedge Q(x)} = E \cap F$.

– Nếu $\forall x\,(P(x) \wedge Q(x))$ đúng thì $E \cap F = M$ và do đó $E = M$ và $F = M$. Vậy $\forall x\, P(x)$ và $\forall x\, Q(x)$ đều có giá trị chân lí đúng hay $\forall x\, P(x) \wedge \forall x\, Q(x)$ đúng.
– Nếu $\forall x\, P(x) \wedge \forall x\, Q(x)$ đúng thì $\forall x\, P(x)$ và $\forall x\, Q(x)$ đúng và do đó $E = M$ và $F = M$. Vậy, $E \cap F = M$ hay $\forall x\,(P(x) \wedge Q(x))$ có giá trị chân lí đúng.

b. Giả sử không gian biện luận của x là M. Đặt $E = E_{P(x)}$ và $F = E_{Q(x)}$, khi đó $E_{P(x)\vee Q(x)} = E \cup F$.

– Nếu $\exists x\,(P(x) \vee Q(x))$ sai thì $E \cup F = \varnothing$ và do đó $E = \varnothing$ và $F = \varnothing$. Vậy $\exists x\, P(x)$ sai và $\exists x\, Q(x)$ sai hay $\exists x\, P(x) \vee \exists x\, Q(x)$ sai.
– $\exists x\, P(x) \vee \exists x\, Q(x)$ sai thì $\exists x\, P(x)$ sai và $\exists x\, Q(x)$ sai. Do đó $E = \varnothing$, $F = \varnothing$ và ta có $E \cup F = \varnothing$ hay $\exists x\,(P(x) \vee Q(x))$ sai.

c.
– Nếu $\forall x\, P(x) \wedge \exists x\, Q(x)$ đúng thì $\forall x\, P(x)$ đúng và $\exists x\, Q(x)$ đúng. Khi đó với mọi giá trị x_0 thì $P(x_0)$ đúng và tồn tại giá trị a để $Q(a)$ đúng. Như vậy, với mọi giá trị x_0, tồn tại giá trị $y = a$ để $P(x_0) \wedge Q(a)$ đúng hay $\forall x \exists y\,(P(x) \wedge Q(y))$ đúng.
– Nếu $\forall x \exists y\,(P(x) \wedge Q(y))$ đúng thì với mọi giá trị $x = x_0$ tồn tại giá trị $y = y_0$ để $P(x_0) \wedge Q(y_0)$ đúng, tức là $P(x_0)$ đúng và $Q(y_0)$ đúng. Từ đó ta có với mọi $x = x_0$ thì $P(x_0)$ đúng và có giá trị y_0 để $Q(y_0)$ đúng. Như vậy $\forall x\, P(x)$ đúng và $\exists x\, Q(x)$ đúng hay $\forall x\, P(x) \wedge \exists x\, Q(x)$ đúng.

d.
– Giả sử $\forall x\, P(x) \vee \exists x\, Q(x)$ sai, khi đó $\forall x\, P(x)$ sai và $\exists x\, Q(x)$ sai. Vậy có tồn tại x_0 sao cho $P(x_0)$ sai và với mọi $x = a$ thì $Q(a)$ sai, suy ra $P(x_0) \vee Q(a)$ sai. Từ đó tồn tại một giá trị x_0 sao cho với mọi giá trị y_0 thì mệnh đề $P(x_0) \vee Q(y_0)$ sai hay mệnh đề $\forall x \exists y\,(P(x) \vee Q(y))$ sai.

– Giả sử $\forall x \exists y\, (P(x) \vee Q(y))$ sai, khi đó tồn tại x_0 sao cho với mọi y_0 thì $P(x_0) \vee Q(y_0)$ sai, tức là $P(x_0)$ sai và $Q(y_0)$ sai. Từ đó ta có $\forall x\, P(x)$ sai và $\exists x\, Q(x)$ sai hay $\forall x\, P(x) \vee \exists x\, Q(x)$ sai.

1.72.

a. Không.
b. Không.
c. Có.
d. Không.
e. Không.
f. Không.
g. Có.

1.73.

a. Không.
b. Có.
c. Không.
d. Có.

1.75.

a. Đơn ánh, toàn ánh.
b. Không đơn ánh, không toàn ánh.
c. Đơn ánh, toàn ánh.
d. Không đơn ánh, không toàn ánh.

1.76.

a. Đơn ánh, toàn ánh.
b. Không đơn ánh, không toàn ánh.
c. Đơn ánh, không toàn ánh.
d. Không đơn ánh, toàn ánh.

1.77.

a. Đơn ánh, toàn ánh.
b. Không đơn ánh, không toàn ánh.
c. Đơn ánh, không toàn ánh.
d. Không đơn ánh, toàn ánh.
e. Đơn ánh, không toàn ánh.
f. Đơn ánh, toàn ánh.
g. Đơn ánh, không toàn ánh.

1.78.

a. $f(n) = n^2$.

b. $f(n) = \left\lceil \dfrac{n}{2} \right\rceil$.

c. $f(n) = n^2 - 2n + 4$.

d. $f(n) = n + 1$ nếu n chẵn và $f(n) = n - 1$ nếu n lẻ.

1.79.

a. Có.

b. Không.

c. Có.

d. Không.

1.81.

c. $f(S) = \{1, 2, 3, 4, 5\}$.

d. $f(S) = \{2, 3, 4, 5\}$.

1.82. Gợi ý: Sử dụng tính liên tục và đồng biến, nghịch biến của hàm số.

a. $f(S) = [\dfrac{-9}{4}, 40)$.

b. $f(S) = [-\frac{3}{4}, \frac{3}{4}]$.

c. $f(S) = [\frac{1}{5}, \frac{4}{11})$.

d. $f(S) = [-1, 1]$.

1.83.

a. $\{-1, 1\}$.

b. $(-1, 0) \cup (0, 1)$.

c. $(-\infty, -2) \cup (2, +\infty)$.

d. $(-\sqrt{3}, +\sqrt{3})$.

1.84.

a. $[-1, 2)$.

b. $[2, 11)$.

c. $[5, 14)$.

d. $[-1, 14)$.

1.85. Gợi ý: Chứng minh vế phải là tập con của vế trái và ngược lại.

a. Giả sử $x \in f^{-1}(S \cup T)$.

$x \in f^{-1}(S \cup T) \Rightarrow f(x) \in S \cup T \Rightarrow f(x) \in S$ hoặc $f(x) \in T \Rightarrow x \in f^{-1}(S)$ hoặc $x \in f^{-1}(T) \Rightarrow x \in f^{-1}(S) \cup f^{-1}(T)$. Do đó $f^{-1}(S \cup T) \subseteq f^{-1}(S) \cup f^{-1}(T)$. Chiều bao hàm còn lại chứng minh tương tự.

b. Chứng minh tương tự ý **a**.

1.86. Gợi ý: Chứng minh vế phải là tập con của vế trái và ngược lại.

1.87. Gọi tập xác định và tập giá trị của g theo thứ tự là A, B; của f là B, C, tức là $g : A \longrightarrow B$, $f : B \longrightarrow C$. Giả sử $x, y \in A$ thỏa mãn $g(x) = g(y)$. Do $x, y \in A$ nên $g(x), g(y) \in B$. Ta có:

$g(x) = g(y) \Rightarrow f(g(x)) = f(g(y)) \Rightarrow (f \circ g)(x) = f \circ g)(y) \Rightarrow x = y$ (do $f \circ g$ là đơn ánh). Vì vậy g là đơn ánh.

1.88. Giả sử g là hàm từ A đến B và f là hàm từ B đến C. Gọi c là một phần tử bất kì của C. Do $f \circ g : A \longrightarrow C$ là toàn ánh nên tồn tại $a \in A$ sao cho $(f \circ g)(a) = c$. Đặt $b = g(a)$ ta có $b \in B$ và $f(b) = f(g(a)) = (f \circ g)(a) = c$. Vì vậy, f là toàn ánh.

1.90. Hướng dẫn:

$f \circ g = g \circ f \Leftrightarrow (f \circ g)(x) = (g \circ f)(x)$ với mọi x $\Leftrightarrow ad + b = cb + d$.

$f(f(x)) = f(x) + 1\ \forall x \Leftrightarrow a^2x + ab + b = ax + b + 1\ \forall x \Leftrightarrow a^2 = a$ và $ab + b = b + 1$. Giải hệ ta tìm được $a = b = c = 1$, d tùy ý.

1.91.

a. $f^{-1} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\ f^{-1}(y) = \dfrac{y - b}{a}$.

b. $f^{-1} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\ f^{-1}(y) = \sqrt[3]{y - 1} - 1$.

c. $f^{-1} : (1, +\infty) \longrightarrow \mathbb{R}^+,\ f^{-1}(y) = \sqrt{y - 1}$.

1.92.

a. Chứng minh vế phải là tập con của vế trái và ngược lại.

   Giả sử $b \in f(S \cup T)$. Suy ra tồn tại $a \in S \cup T$ sao cho $b = f(a)$.

   $a \in S \cup T \Rightarrow a \in S$ hoặc $a \in T \Rightarrow f(a) \in f(S)$ hoặc $f(a) \in f(T) \Rightarrow f(a) \in f(S) \cup f(T)$. Do đó $f(S \cup T) \subseteq f(S) \cup f(T)$.

   Giả sử $b \in f(S) \cup f(T)$. Suy ra $b \in f(S)$ hoặc $b \in f(T)$.

   Nếu $b \in f(S)$ thì tồn tại $a \in S$ sao cho $b = f(a)$. Vì $a \in S$ nên $a \in S \cup T$, do đó $b = f(a) \in f(S \cup T)$.

   Nếu $b \in f(T)$, chứng minh tương tự cũng suy ra $b \in f(S \cup T)$. Vì vậy $f(S) \cup f(T) \subseteq f(S \cup T)$.

b. Chứng minh tương tự.

1.94. Hướng dẫn: Đặt $\lceil x \rceil = k$. Suy ra $k \in \mathbb{Z}$ và $k - 1 < x \leq k$, từ đó chứng minh được $-\lfloor -x \rfloor = k$.

1.95. Đặt $\lfloor x \rfloor = k$, suy ra $k \in \mathbb{Z}$ và $k \leq x < k + 1$. Ta xét hai trường hợp sau:

Trường hợp 1: $k \leq x < k + 1/2$. Khi đó $2k \leq 2x < 2k + 1$ và $k + 1/2 \leq x + \dfrac{1}{2} < k + 1$. Suy ra $\lfloor 2x \rfloor = 2k$ và $\lfloor x + \dfrac{1}{2} \rfloor = k$. Như vậy, trong trường hợp này thì vế trái và vế phải của đẳng thức cần chứng minh bằng nhau và bằng $2k$.

Trường hợp 2: $k + 1/2 \leq x < k + 1$. Chứng minh tương tự.

1.96. Chứng minh tương tự bài 1.95.

5.2. Hướng dẫn giải bài tập chương 2

2.1. a. Luật cộng, b. Luật rút gọn, c. Luật phản chứng.

2.3. a. Không có cơ sở, ngụy biện ngộ nhận kết luận, b. Không có cơ sở, ngụy biện phủ nhận giả thiết, c. Có cơ sở, luật tách rời.

2.7. a. Giả sử n chẵn, ta chứng minh n^2 cũng chẵn.

b. Giả sử n^2 lẻ, ta chứng minh n lẻ. Thật vậy $n^2 = 2k+1$, suy ra $(n-1)(n+1) = 2k$ là chẵn, suy ra $n - 1$ hoặc $n + 1$ chẵn và trường hợp nào ta cũng có n lẻ.

2.9. Chứng minh phản chứng. Hãy chứng tỏ rằng hiệu của 2 số hữu tỷ là một số hữu tỷ để dẫn đến điều mâu thuẫn.

2.10. Hãy xem lại các ví dụ trong phần lý thuyết.

2.12. Bác bỏ, hãy lấy một phản ví dụ.

2.14. Chia trường hợp để chứng minh: một số không chia hết cho 5 thì chia cho 5 có thể dư 1, hoặc 2, hoặc 3, hoặc 4.

2.16. Chứng minh nếu n lẻ thì $5n + 6$ lẻ và ngược lại.

2.18. Chứng minh chiều c. suy ra a. bằng phương pháp chứng minh gián tiếp: nếu n không chia hết cho 5 thì n^2 chia cho 5 sẽ dư 1 hoặc 4.

2.20. Đầu tiên chỉ ra đẳng thức đúng với $n = 0$, kế tiếp giả sử đẳng thức đúng với $n = k \geq 0$, ta chứng minh đẳng thức cũng đúng với $n = k + 1$.

2.22. $\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{4} + \ldots + \dfrac{1}{2^n} = \dfrac{2^n - 1}{2^n}$ với $n \geq 1$.

2.24. Trước tiên, ta chỉ ra bất đẳng thức đúng với trường hợp $n = 0$. Giả sử bất đẳng thức đúng với n tức là $1 + nh \leqslant (1 + h)^n$, vì $(1 + h) > 0$ nên $(1+h)^{n+1} = (1+h)(1+h)^n \geq (1+h)(1+nh) = 1+(n+1)h+nh^2 \geq 1+(n+1)h$, vậy khi đó bất đẳng thức cũng đúng với $n + 1$.

2.26. Trước tiên, ta chỉ ra bất đẳng thức đúng với trường hợp $n = 5$. Giả sử bất đẳng thức đúng với n tức là $2^n \geqslant n^2$, khi đó $2^{n+1} = 2.2^n \geq n^2 + n^2 \geq n^2 + 4n \geq n^2 + 2n + 1 = (n + 1)^2$ (do $n > 4$), suy ra bất đẳng thức cũng đúng với $n + 1$.

2.28. Trước tiên ta chỉ ra $n^2 - 1$ chia hết cho 8 với $n = 1$. Tiếp theo giả sử $n^2 - 1$ chia hết cho 8 với n là số nguyên dương lẻ nào đó, hãy chứng minh $(n + 2)^2 - 1$ cũng chia hết cho 8.

2.31. Gọi $P(n)$ là mệnh đề: "một bưu phí n xu có thể tạo từ các con tem 3 xu và 5 xu". Bước cơ sở: hãy chỉ ra $P(8)$ là đúng. Bước quy nạp: giả sử $P(n)$ là đúng, tức bưu phí n xu có thể tạo ra từ hai loại tem đã cho, giả sử trong số tem đó có chứa tem 5 xu thì ta thay thế nó bằng hai con tem 3 xu để tạo ra bưu phí $n + 1$ xu, nếu ngược lại thì bưu phí n xu chỉ được tạo bởi các tem 3 xu, vì $n \geq 8$ nên bằng cách thay ba tem 3 xu bằng hai tem 5 xu ta sẽ tạo ra bưu phí $n + 1$ xu. Vậy $P(n + 1)$ là đúng.

2.33. Bước quy nạp: giả sử $\overline{A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n} = \overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \ldots \cap \overline{A_n}$, khi đó $\overline{A_1 \cup \ldots \cup A_n \cup A_{n+1}.} = \overline{A_1 \cup \ldots \cup A_n} \cap \overline{A_{n+1}.} = \overline{A_1} \cap \ldots \cap \overline{A_n} \cap \overline{A_{n+1}.}.$

2.35. Hai tập là không gối lên nhau nếu $n = 1$.

2.37. Chỉ ra một cách phủ cụ thể, chứng minh tồn tại kiến thiết.

2.38. Hai ô ở hai góc đối diện của một bàn cờ thì cùng màu, do đó nếu một bàn cờ bị khuyết hai ô ở hai góc đối diện thì sẽ có số ô trắng khác số ô đen. Trong khi đó một quân đômino 1×2 sẽ phủ lên một ô trắng và một ô đen, từ đó suy ra kết luận của đầu bài.

5.3. Hướng dẫn giải bài tập chương 3

3.1. a. 300, b. 37
3.2. a. 4^{10}, b. 5^{10}
3.3. 26^3
3.4. 15600
3.5. 2^6
3.6. 3^8
3.7. $2 + 2^2 + \cdots + 2^n = 2^{n+1} - 2$
3.8. $26^4 - 25^4$

3.9.

a. $\lfloor \frac{999}{7} \rfloor - \lfloor \frac{99}{7} \rfloor = 128$ (số).

b. 9 (số).

c. Sử dụng nguyên lý bù trừ cho hai tập hợp.
Đáp số: 450 (số).

d. 450(số).

e. 225 (số).

3.10.

a. 990 (xâu). b. 500 (xâu). c. 27 (xâu). d. 10^3-9^3.

3.11. a. 3^{10} (hàm). **b.** 7^{10} (hàm).
c. Có 2 trường hợp:

1. Nếu $n < 10$ thì không có hàm đơn ánh nào.
2. Nếu $n \geq 10$ thì có $n(n-1)\ldots(n-9)$ hàm đơn ánh.

3.12.

a. 0 hàm.

b. $4^4 = 256$ hàm.

c. 2304 hàm

3.13. Hướng dẫn: Sử dụng nguyên lý bù trừ cho hai tập hợp.

Đáp số: 88.

3.14. Hướng dẫn:

- Áp dụng nguyên lý bù trừ cho hai tập hợp.
- Đếm số xâu nhị phân độ dài 10 có 5 số 0 liền nhau, ta xét dãy các số 0 liền nhau dài nhất trong xâu bắt đầu từ vị trí thứ i, với $i = \overline{1,6}$.

- Đáp số: 222.

3.16. $4! - 3!$.

3.19. Số đối tượng: 30 (sinh viên), số tính chất 29 (29 chữ cái).

3.20. Một số nguyên dương khi chia cho d được dư là một trong các số 0, 1, ..., $d - 1$.

3.21. Bạn đọc tự làm.

3.22. Gọi x là số sinh viên cần tuyển. Để chắc chắn có 50 sinh viên cùng tỉnh ta phải có $\left\lceil \frac{x}{26} \right\rceil \geq 50$ hay $\frac{x}{26} > 49$. Từ đó $x > 1274$. Vậy cần tuyển 1275 sinh viên.

3.23. Trung điểm của hai điểm A và B có tọa độ nguyên khi và chỉ khi x_A, x_B cùng tính chẵn lẻ và y_A, y_B cùng tính chẵn lẻ. Một điểm có tọa độ nguyên bất kì có tính chẵn lẻ của tọa độ thuộc một trong 4 trường hợp: (chẵn, chẵn), (chẵn, lẻ), (lẻ, chẵn), (lẻ, lẻ). Có 5 điểm (đối tượng) nên có $\left\lceil \frac{5}{4}. \right\rceil = 2$ cặp có tọa độ tương ứng cùng tính chẵn lẻ.

3.24. Làm tương tự bài 3.23 xét trên khía cạnh rằng ở đó thay mod 2 bởi mod 5. Đáp số: cần $5.5 + 1 = 26$ điểm.

3.25. Đối tượng: số nguyên dương trong 8 số nguyên dương đầu tiên. Số đối tượng: 5. Mỗi đối tượng thuộc một trong 4 tập sau: $\{1, 8\}, \{2, 7\}, \{3, 6\}, \{4, 5\}$. Do đó có 2 số thuộc cùng một tập hợp, 2 số đó có tổng bằng 9.

3.26. Có 7 đối tượng. Mỗi đối tượng thuộc một trong 5 tập:

$$\{1, 10\}, \{2, 9\}, \{3, 8\}, \{4, 7\}, \{5, 6\}.$$

Do đó có 2 đối tượng thuộc cùng một tập hợp. Ta được một cặp có tổng bằng 11. Bỏ cặp này ra, ta còn 5 đối tượng và 4 tập. Do đó lại có thêm một cặp đối tượng thuộc cùng một tập.

3.27. Xét 50 tập $\{1000, 1001\}, \{1002, 1003\}, \ldots, \{1098, 1099\}$. Mỗi địa chỉ nhà thuộc một trong 50 tập nói trên.

3.28. Vẽ hình ngũ giác bởi những cạnh nét liền - minh họa cho mối quan hệ "bạn". Kẻ các đường chéo bởi những nét đứt - minh họa cho mối quan hệ "thù".

3.29. Có 6 đối tượng (máy tính). Mỗi đối tượng thuộc một trong 6 nhóm $A_0, A_1, \ldots, A_5$, trong đó A_i là nhóm các máy được nối với i máy khác, $i = 0, 1, \ldots, 5$.

- Nếu có máy không được nối với máy khác, khi đó nhóm A_5 không có máy nào. Do đó ta có 6 máy mà mỗi máy thuộc vào một trong 5 nhóm. Do đó có 2 máy thuộc cùng một nhóm.
- Nếu mỗi máy đều được nối với ít nhất một máy khác thì khi đó nhóm A_0 không có máy nào. Và lại như trên ta có 2 máy thuộc cùng một nhóm.

3.30. Có tất cả 252 tập con 5 phần tử của 10 phần tử. Một tập con gồm 5 phần tử lấy từ những số nguyên từ 1 đến 50 có tổng là các số nguyên trong khoảng 15 đến 240, tức là tổng của tập 5 phần tử chỉ có thể là một trong 226 số.
3.33. 20!.
3.34. A_{12}^3.
3.35.

a. $2.(n!)^2$. b. $n!.(n-1)!$. c. $2^n.(n!)^2$.

3.36. C_{26}^5.
3.37.

a. C_{10}^3.

b. C_{10}^5.

c. $C_{10}^7 + C_{10}^8 + C_{10}^9 + C_{10}^{10}$.

d. $2^{10} - (C_{10}^0 + C_{10}^1 + C_{10}^2)$.

3.38.

a. C_{15}^{11}. b. A_{15}^{11}. c. $C_{15}^{11} - 1$.

3.39.

a. $C_6^1.A_9^5$. b. $6.5.A_8^4$. c. $2.C_6^1.A_8^5$. d. $5.2.A_8^4$.

3.40.

a. C_{48}^1. b. $4.C_{13}^5$. c. $C_{52}^5 - C_{13}^5.4^5$.

3.41.

a. 1. b. 9. c. A_9^5. d. $9.C_5^2 A_8^3$.

3.42.

a. $98.C_4^3.97 - 97$. b. $98.2.3!.97 - 97.4$.

3.43.

a. 122523030. c. 64775151.

b. 100626625. d. 11737502.

Nếu yêu cầu 6 chữ thường phân biệt thì:

a. $5.6.A_{21}^5$. c. $A_{26}^6 - A_{25}^6$.

b. $A_{26}^6 - A_{21}^6 - 30.A_{21}^5$. d. $A_{26}^6 - 2.A_{25}^6 + A_{24}^6$.

3.44. C_{10}^8.

3.45. $C_{10}^3 + C_{10}^4 + C_{10}^5 + C_{10}^6$.

3.46. Sử dụng định lý nhị thức.

3.47. Sử dụng định lý nhị thức.

3.48. Sử dụng định lý nhị thức.

3.50. 3^5.

3.51. 26^6.

3.52. 5^3.

3.53.

a. Số cách chọn ra 6 túi từ 6 loại túi là số tổ hợp lặp chập 6 của 6: $C_{6+6-1}^6 = C_{11}^6$.

b. Chọn ra mỗi loại 1 túi, 6 túi còn lại được chọn từ 6 loại túi, số cách chọn là $C_{6+6-1}^6 = C_{11}^6$.

c. Chọn ra 4 túi muối và 3 túi đựng nho, 8 túi còn lại được chọn từ 6 loại túi, số cách chọn là $C_{8+6-1}^8 = C_{13}^8$.

d. Chọn ra 3 túi trứng, có 1 cách chọn. Số cách chọn 9 túi còn lại sao cho có không quá 5 túi muối = (số cách chọn 9 túi bất kì từ 6 loại túi) − (số cách chọn 9 túi sao cho có nhiều hơn 5 túi muối) $= C^9_{9+6-1} - C^3_{3+6-1} = C^9_{14} - C^3_8$.

3.54. Có 2 loại tiền xu là 1 nghìn và 2 nghìn. Số cách chọn 8 đồng từ 2 loại tiền này là số tổ hợp lặp chập 8 của 2: $C^8_{8+2-1} = C^8_9$.

3.55. Số cách cất 3000 cuốn truyện vào 3 kho hàng là số tổ hợp lặp chập 3000 của 3: $C^{3000}_{3000+3-1} = C^{3000}_{3002}$.

3.56. a. Đặt $x_1^{'} = x_1 - 1 \rightarrow x_1 = x_1^{'} + 1$. Khi đó phương trình trở thành $x_1^{'} + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 20(2)$.

Số nghiệm nguyên không âm của PT(1) thỏa mãn $(x_1 \geq 1)$ = số nghiệm nguyên không âm của PT(2) $= C^{20}_{20+5-1} = C^{20}_{24}$.

b. ĐS: $C^{11}_{11+5-1} = C^{11}_{15}$.

c. Số nghiệm nguyên không âm thỏa mãn $1 \leq x_2 \leq 10$ = số nghiệm nguyên không âm thỏa mãn $(x_2 \geq 1)$− số nghiệm nguyên không âm thỏa mãn $(x_2 \geq 11)$= $C^{20}_{20+5-1} - C^{10}_{10+5-1} = C^{20}_{24} - C^{10}_{14}$.

d. ĐS: $C^6_{6+5-1} = C^6_{10}$.

e. Số nghiệm nguyên không âm thỏa mãn $(x_1 \leq 8, x_3 \geq 8)$ = số nghiệm nguyên không âm thỏa mãn $(x_3 \geq 8)$− số nghiệm nguyên không âm thỏa mãn $(x_3 \geq 8, x_1 > 8)$= $C^{13}_{13+5-1} - C^4_{4+5-1} = C^{13}_{17} - C^4_8$.

3.57. Số xâu thỏa mãn = số hoán vị của 10 phần tử, trong đó có 2 phần tử là 0, 3 phần tử là 1, 5 phần tử là 2 $= \dfrac{10!}{2!3!5!}$.

3.58. a. ĐS: $\dfrac{14!}{3!3!2!2!2!1!1!}$.

b. Chọn một trẻ sinh đơn làm mốc ở một vị trí cố định trên vòng tròn. Khi đó số cách xếp các đứa trẻ thành vòng tròn = số cách xếp 13 đứa trẻ còn lại trên vòng tròn $= \dfrac{13!}{3!3!2!2!2!1!}$.

3.59. Số nghiệm nguyên không âm của bất phương trình bằng số nghiệm nguyên không âm của phương trình $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 11$ với $x_4 \geq 0$ và bằng $C^{11}_{11+4-1} = C^{11}_{14}$.

3.60. ĐS: $\dfrac{14!}{8!6!}$.

3.61.

a. Mỗi cách cất báo thỏa mãn đề bài là một cách chia 40 đồ vật khác nhau vào 4 hộp sao cho mỗi hộp có 10 đồ vật, nên số cách cất là $\dfrac{40!}{10!10!10!10!}$

b. Gọi số cách cất thỏa mãn đề là A. Ta xét lại cách cất ở ý a. Mỗi cách cất thỏa mãn ý a tương ứng với một nhiệm vụ gồm 2 giai đoạn sau:

- Cất 40 cuốn vào 4 ngăn không phân biệt, mỗi ngăn 10 số báo: có A cách.
- Đánh số các ngăn: có 4! cách. Suy ra số cách cất 40 số báo vào 4 ngăn phân biệt, mỗi ngăn 10 số là $A.4!$.

Kết hợp kết quả ý a ta có $A = \dfrac{40!}{10!10!10!10!4!}$.

3.62. Con bọ đến được điểm có tọa độ (3, 4, 5) khi và chỉ khi nó đi được 3 đơn vị theo hướng dương của trục Ox, 4 đơn vị theo hướng dương của trục Oy, 5 đơn vị theo hướng dương của trục Oz (theo bất kể thứ tự nào). Kí hiệu mỗi bước nhảy của con bọ theo hướng dương của Ox, Oy, Oz lần lượt là x, y, z. Một cách di chuyển của con bọ từ gốc tọa độ đến điểm (3, 4, 5) tương ứng với một cách sắp xếp (hay một xâu) 3 chữ x, 4 chữ y, 5 chữ z. Có $\dfrac{12!}{3!4!5!}$ cách di chuyển.

3.63. **a.** C^n_{n+k-1} **b.** $n!C^n_{n+k-1}$

5.4. Hướng dẫn giải bài tập chương 4

4.1. Bạn đọc tự làm.
4.2. Bạn đọc tự làm.
4.3. Chẳng hạn, câu a. và b. có thể làm như sau:

a. $\begin{cases} a_1 = 5 \\ a_n = a_{n-1}, n \geq 2 \end{cases}$ b. $\begin{cases} a_1 = 0 \\ a_n = 6 + a_{n-1}, n \geq 2 \end{cases}$.

4.4. **c.** $a_2 = ?$ **d.** $a_2 < 2$ nên a_3 không có nghĩa.
e. $\max\{a_1, a_2\} = ?$
4.5. **a.** $a_n = \sqrt{2 + a_{n-1}.}, n \geq 1, a_0 = 2.$
b. $b_n = 2 + \dfrac{1}{b_{n-1}.}, n \geq 1, b_0 = 2.$

Để chứng minh $a_n \leq 2$ ta dùng quy nạp toán học.

4.6. Có thể dùng nguyên lý quy nạp toán học để chứng minh, chẳng hạn sau đây trình bày hướng dẫn cho ý a. và f.

a. Đặt $P(n)$ là hàm mệnh đề "$f_1^2 + f_2^2 + f_3^2 + \ldots + f_n^2 = f_n f_{n+1}$".
Ta có $P(1)$ là "$f_1^2 = f_1.f_2$" đúng vì $f_1 = f_2 = 1$.
Giả sử $n \geq 1$ và $P(n)$ đúng. Ta chỉ ra khi đó cũng có $P(n+1)$ đúng.
Thậy vậy, ta có:
$f_1^2 + f_2^2 + f_3^2 + \ldots + f_n^2 + f_{n+1}^2 = f_n f_{n+1} + f_{n+1}^2 = f_{n+1}(f_n + f_{n+1}) = f_{n+1} f_{n+2}$.
Vậy, $P(n+1)$ đúng.
Theo nguyên lý quy nạp toán học $P(n)$ đúng.

f. Đặt $P(n)$ là hàm mệnh đề "$f_0 - f_1 + f_2 - \ldots - f_{2n-1} + f_{2n} = f_{2n-1} - 1$".
Ta có: $P(1)$ là mệnh đề "$f_0 - f_1 + f_2 = f_1 - 1$" đúng vì $f_0 = 0, f_1 = f_2 = 1$.
Giả sử $n \geq 1$ và $P(n)$ đúng. Ta chỉ ra khi đó cũng có $P(n+1)$ đúng.
Thậy vậy, ta có:
$(f_0 - f_1 + f_2 - \ldots - f_{2n-1} + f_{2n}) - f_{2n+1} + f_{2n+2} = (f_{2n-1} - 1) - f_{2n+1} + f_{2n+2} = f_{2n+1} - 1$.
Vậy $P(n+1)$ đúng.
Theo nguyên lý quy nạp toán học $P(n)$ đúng.

4.7. Ta chứng minh bằng quy nạp toán học. Sau đây là hướng dẫn chi tiết cho câu a.
Đặt $P(n)$ là hàm mệnh đề: "$\max\{-a_1, -a_2, \ldots, -a_n\} = -\min\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$."
Ta có $P(1)$ là mệnh đề "$\max\{-a_1\} = -\min\{a_1\}$" đúng vì $\max\{-a_1\}. = -a_1$ và $-\min\{a_1\}. = -a_1$.

$P(2)$ là mệnh đề "$\max\{-a_1, -a_2\} = -\min\{a_1, a_2\}$" đúng vì

$$\max\{-a_1, -a_2\}. = \begin{cases} -a_1 & \text{nếu } a_1 \leq a_2 \\ -a_2 & \text{nếu } a_1 > a_2 \end{cases}$$

và

$$\min\{a_1, a_2\}. = \begin{cases} a_1 & \text{nếu } a_1 \leq a_2 \\ a_2 & \text{nếu } a_1 > a_2 \end{cases} .$$

Giả sử $n \geq 2$ và $P(k)$ đúng với mọi k mà $1 \leq k \leq n$. Ta chỉ ra khi đó cũng có $P(n+1)$ đúng. Thậy vậy, ta có:

$\max\{-a_1, -a_2, \ldots, -a_n, -a_{n+1}\} = \max\{\max\{-a_1, -a_2, \ldots, -a_n\}, -a_{n+1}\}$
$= \max\{-\min\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}, -a_{n+1}\} = -\min\{\min\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}, a_{n+1}\}$
$= -\min\{a_1, a_2, \ldots, a_n, a_{n+1}\}$

Do đó: $P(n+1)$ đúng.

Vậy, $P(n)$ đúng với mọi n nguyên dương.

4.8. Bạn đọc tự làm.

4.9. Thay a_n vào hệ thức, chỉ ra khi đó hệ thức truy hồi được thỏa mãn.

4.10. Chỉ có a. và d. là nghiệm, còn lại không phải là nghiệm.

4.11. Có thể lấy a_n trừ đi a_{n-1} để suy ra hệ thức.

4.12.

a. $a_n = 2.3^n$.
b. $a_n = 1 + 2n$.
c. $a_n = 1 + \dfrac{n(n+1)}{2}$.
d. $a_n = (n+2)^2$.
e. $a_n = 2^n$.
f. $a_n = \dfrac{3^{n+1}+1}{2.3^n}$.
g. $a_n = 5.n!$.
h. $a_n = 2^n.n!$.

4.13. Bạn đọc tự làm.

4.14. Bạn đọc tự làm.

4.15.

a. $a_n = a_{n-1} + n$.
b. $a_n = \dfrac{n(n+1)}{2}$.
c. 78.

4.16. Bạn đọc tự làm.
4.17. **a.** $a_n = 1,05.a_{n-1} + 5$ (triệu đồng).
b. $a_n = 160.1,05^n - 100$ (triệu đồng).
c. 114.4153 (triệu đồng).
4.18. Một máy bán hàng tự động chỉ nhận những đồng xu 1 nghìn, 2 nghìn và 5 nghìn.

a. Gọi a_n số cách đặt n nghìn vào trong máy bán hàng.

   Với $n \geq 6$ có 3 cách bỏ đồng đầu tiên trong n nghìn đặt vào, đó là:

   – Bỏ đồng 1 nghìn. Để bỏ n nghìn vào máy ta còn phải bỏ thêm $n-1$ nghìn nữa. Theo cách gọi a_n, có a_{n-1} cách bỏ $n-1$ nghìn còn lại vào máy. Vậy, trường hợp này có a_{n-1} cách bỏ n nghìn vào máy.

– Bỏ đồng 2 nghìn. Để bỏ n nghìn vào máy ta còn phải bỏ thêm $n-2$ nghìn nữa. Ta có a_{n-2} cách bỏ $n-2$ nghìn còn lại vào máy. Vậy, trường hợp này có a_{n-2} cách bỏ n nghìn vào máy.
– Bỏ đồng 5 nghìn. Để bỏ n nghìn vào máy ta còn phải bỏ thêm $n-5$ nghìn nữa. Ta có a_{n-5} cách bỏ $n-5$ nghìn còn lại vào máy. Vậy, trường hợp này có a_{n-5} cách bỏ n nghìn vào máy.

Vậy, số cách để bỏ n nghìn vào máy là $a_n = a_{n-1} + a_{n-2} + a_{n-5}$ với $n \geq 6$.

b. Bạn đọc tự làm.

c. Bạn đọc tự làm.

d. Làm tương tự lập luận như trên. Để tìm điều kiện đầu ta để ý rằng với $n < 10$ ta có $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$; và khi $n = 10$ ta có $a_{10} =$ số cách bỏ 10 nghìn vào máy mà không dùng tới đồng 10 nghìn + 1.

4.19.

a. Gọi a_n là số cách phủ toàn bộ bàn cờ $2 \times n$ bằng những quân đôminô 1×2.

Tương tự như bài 4.18, ta xét thao tác đầu tiên để lát bàn cờ. Giả sử ô lát đầu tiên của ta là ô trên cùng góc trái và $n \geq 2$. Để lát ô này ta có hai cách:

– Lát bằng một đôminô ngang. Khi đó phần còn lại ta phải lát là bàn cờ $2 \times (n-1)$, có a_{n-1} cách để làm việc này. Vậy trường hợp này có a_{n-1} cách lát.
– Lát bằng một đôminô dọc. Khi đó ta chỉ còn một cách lát cho hai ô còn lại trong bàn 2×2 phía trên cùng. Và phần còn lại phải lát là bàn cờ $2 \times (n-2)$, có a_{n-2} cách để làm việc này.

Vậy, $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$ với $n \geq 3$.

b. Bạn đọc tự làm

c. 2584.

4.20.

a. Gọi a_n là số xâu nhị phân độ dài n không chứa hai số 0 liên tiếp. Bằng cách xét các trường hợp xảy ra cho kí tự đầu tiên (hoặc cuối cùng) của xâu. Ta có: $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$ với $n \geq 2$.

b. $a_0 = 1, a_1 = 2$

c. 34.

4.21.

a. Gọi a_n là số xâu nhị phân độ dài n chứa ba số 0 liên tiếp.Ta có: $a_n = a_{n-1} + a_{n-2} + a_{n-3} + 2^{n-3}, n \geq 6$.

c. 47.

4.22.

a. Giả sử $n \geq 2$, gọi a_n là số xâu nhị phân độ dài n chứa xâu 01, b_n là số xâu nhị phân độ dài n không chứa xâu 01.

Ta có $a_n = 2^n - b_n$. Ta tìm hệ thức truy hồi cho b_n.

Giả sử $x_1x_2\ldots x_n$ là xâu nhị phân độ dài n không chứa xâu 01.

- Nếu $x_1 = 1$ thì ta có xâu $1x_2\ldots x_n$ và số xâu độ dài n không chứa 01 dạng này bằng số xâu dạng $x_2\ldots x_n$ không chứa xâu 01, có b_{n-1} xâu như vậy.
- Nếu $x_1 = 0$ thì $x_2 = 0$ (vì không được chứa 01),..., $x_n = 0$, tức là trường hợp này chỉ có xâu gồm n số 0.

Vậy, $b_n = b_{n-1} + 1$. Do đó: $a_n = 2^n - b_n = 2^n - (b_{n-1} + 1) = 2^n - ((2^{n-1} - a_{n-1}) + 1)$ hay $a_n = a_{n-1} + 2^{n-1} - 1, (n \geq 3)$.

b. $a_2 = 1$.

c. 120.

4.23. **a.** bậc 2; **f.** bậc 3; **h.** bậc 6. Còn lại không phải.

4.24.

a. $a_n = 3.2^n$.

b. $a_n = 2^n - (-2)^n$.

c. $a_n = \dfrac{1+(-1)^n}{2^{n+1}.}$.

d. $a_n = 3^n$.

e. $a_n = 6.3^n - 10n.3^{n-1}$.

f. $a_n = 2^{n-1}(4-n)$.

g. $a_n = 3.2^n - 5^n$.

h. $a_n = \dfrac{(1+\sqrt{2})^{n+1} - (1-\sqrt{2})^{n+1}.}{2\sqrt{2}.}$.

4.25.

a. Có thể chọn hệ thức truy hồi sao cho phương trình đặc trưng có hai nghiệm là 2 và -1, tức là hệ thức $a_n = a_{n-1} + 2a_{n-2}, n \geq 2; a_0 = -1, a_1 = 10$.

b. Ta viết lại nghiệm như sau: $b_n = 3^n + 4n.3^n$. Có thể chọn hệ thức truy hồi sao cho phương trình đặc trưng có nghiệm kép là 3, tức là hệ thức $b_n = 6b_{n-1} - 9b_{n-2}, n \geq 2; b_0 = 1, b_1 = 15$.

c. Ta có: $c_n = 4n - 1 = -1.1^n + 4n.1^n$. Hệ thức truy hồi có thể chọn là $c_n = 2c_{n-1} - c_{n-2}, n \geq 2; c_0 = -1, c_1 = 3$.

Theo bạn các hệ thức truy hồi lập được ở trên có là duy nhất không? Chứng minh.

4.26. Làm như cách trình bày trong bài 4.25 ta được một hệ thức truy hồi tuyến tính thuần nhất bậc hai hệ số hằng nhận a_n làm nghiệm là $a_n = 2a_{n-1} + 3a_{n-2}, n \geq 2; a_0 = 1, a_1 = 19$. Ta sẽ chứng minh chỉ có hệ thức truy hồi này nhận $\{a_n\}$ làm nghiệm.

Giả sử có hệ thức truy hồi $a_n = c_1a_{n-1} + c_2a_{n-2}, n \geq 2; a_0 = \alpha_0, a_1 = \alpha_1$ cũng nhận a_n làm nghiệm.

Từ công thức xác định dãy ta có: $a_0 = 1, a_1 = 19, a_2 = 41, a_3 = 139$. Từ đó ta có hệ $\begin{cases} 41 = 19c_1 + c_2 \\ 139 = 41c_1 + 19c_2 \end{cases}$

Giải hệ này, ta được $c_1 = 2, c_2 = 3$ do đó hệ thức $a_n = c_1a_{n-1} + c_2a_{n-2}, n \geq 2$ trùng với hệ thức $a_n = 2a_{n-1} + 3a_{n-2}, n \geq 2$.

Vậy, có duy nhất một hệ thức truy hồi tuyến tính bậc hai hệ số hằng nhận $\{a_n\}$ làm nghiệm.

4.27. **a.** $L_n = \dfrac{L_{n-1} + L_{n-2}.}{2}$.

b. $L_n = \dfrac{700000}{3} + \dfrac{800000}{3}.\dfrac{(-1)^n}{2^n}$.

4.28. Gọi a_n số cách lát một chiếc bảng $2 \times n$ bằng những tấm lát 1×2 và 2×2.
Làm tương tự bài 4.19, lưu ý là ô đầu tiên còn có thêm một cách lát nữa là dùng tấm lát 2×2. Ta có hệ thức truy hồi là $a_n = a_{n-1} + 2a_{n-2}$, $n \geq 3$, với điều kiện đầu là $a_1 = 1, a_2 = 3$. Giải ra được $a_n = \dfrac{(-1)^n}{3} + \dfrac{2^{n+1}.}{3}$.

4.29. Gọi a_n là số thông báo khác nhau trong n μs.

Bằng việc xét các khả năng xảy ra cho tín hiệu đầu tiên của thông báo (có 3 khả năng: tín hiệu 1 μs, tín hiệu 2 μs loại 1, 2 μs loại 2) ta có hệ thức $a_n = a_{n-1} + 2a_{n-2}$, $n \geq 3$, với điều kiện đầu là $a_1 = 1, a_2 = 3$.

4.30. Bạn đọc tự làm.

4.31.

a. $P_n = 1,2P_{n-1} + 0,45P_{n-2}$.

b. $P_n = \dfrac{8}{3}.(-0,3)^n + \dfrac{220000}{3}.1,5^n$.

4.32.

a. Gọi a_n là số cặp thỏ trên đảo sau n tháng kể từ khi thả một cặp thỏ mới sinh lên đảo.

$a_n =$ Số cặp thỏ có ở tháng $(n-1)$ + Số cặp thỏ mới sinh ra $= a_{n-1} +$ Số cặp thỏ mới sinh ra.

Số cặp thỏ mới sinh ra thuộc một trong hai loại:

- Là con của những cặp thỏ đã được 2 tháng tuổi. Số cặp thỏ đã được 2 tháng tuổi là a_{n-2}, những cặp này sinh ra $6a_{n-2}$ cặp thỏ con.
- Là con của những cặp mới được 1 tháng tuổi. Số cặp thỏ mới được 1 tháng tuổi là $a_{n-1} - a_{n-2}$, những cặp này sinh ra $2(a_{n-1} - a_{n-2})$ cặp thỏ con.

Vậy, $a_n = a_{n-1} + 6a_{n-2} + 2(a_{n-1} - a_{n-2})$ hay $a_n = 3a_{n-1} + 4a_{n-2}$ với $n \geq 2, a_0 = 1, a_1 = 3$.

b. $a_n = \dfrac{(4)^{n+1} + (-1)^n}{5}$.

c. Hệ thức $a_n = 3a_{n-1} + 3a_{n-2}$ với $n \geq 2, a_0 = 1, a_1 = 3$. Giải ta được

$$a_n = \frac{(3+\sqrt{21})^{n+1}.}{2^{n+1}\sqrt{21}.} - \frac{(3-\sqrt{21})^{n+1}.}{2^{n+1}\sqrt{21}.}.$$

4.33.

a. $a_n = 6 - 2.(-1)^n - 2^n$.

b. $a_n = 8.(-1)^n - 3.(-2)^n + 4.3^n$.

c. $a_n = n$.

d. $a_n = 2 - n + n^2$.

e. $a_n = 2^n - 3\sqrt{3}^n + 2(-\sqrt{3})^n$.

f. $a_n = 1 + (-1)^n + 2^n$.

g. $a_n = 1 + 2.3^n + 3.(-2)^n - 4.2^n$.

4.34. Giả sử có hệ thức $a_n = c_1a_{n-1} + c_2a_{n-2}, n \geq 2$ nhận a_n làm nghiệm. Ta có: $a_0 = 6, a_1 = 19, a_2 = 67, a_3 = 247, a_4 = 931$. Thay vào hệ thức trên ta được hệ:

$$\begin{cases} 67 = 19c_1 + 6c_2 \\ 247 = 67c_1 + 19c_2 \\ 931 = 247c_1 + 67c_2 \end{cases}.$$

Hệ này vô nghiệm chứng tỏ không có hệ thức truy hồi tuyến tính thuần nhất bậc hai hệ số hằng nhận a_n làm nghiệm.
Liệu có hệ thức truy hồi tuyến tính thuần nhất bậc 3 hệ số hằng nhận a_n làm nghiệm? Nếu có thì đó có phải là hệ thức truy hồi tuyến tính thuần nhất bậc 3 hệ số hằng duy nhất nhận a_n làm nghiệm?.

4.35.

a. Bằng quy nạp, ta chứng minh được rằng $a_n > 0 \ \forall n$. Từ đó ta có $\ln(a_n) = \ln(\sqrt[3]{a_{n-1}^2 a_{n-2}.})$ hay $\ln a_n = \frac{1}{3}(2\ln a_{n-1} + \ln a_{n-2})$. Đặt $b_n = \ln a_n$ ta có hệ thức truy hồi $b_n = \frac{2}{3}b_{n-1} + \frac{1}{3}b_{n-2}, n \geq 2; b_0 = 0, b_1 = \ln 3$. Giải hệ thức này được b_n và từ đó suy ra a_n.

b. Ta có: $a_n = (\sqrt{a_{n-1}.} + 2\sqrt{a_{n-2}.})^2$ hay $\sqrt{a_n} = \sqrt{a_{n-1}.} + 2\sqrt{a_{n-2}.}$
Do đó, đặt $b_n = \sqrt{a_n}$ ta có hệ $b_n = b_{n-1} + 2b_{n-2}, n \geq 2, b_0 = 1, b_1 = 2$. Giải hệ thức này được b_n và từ đó suy ra a_n.

c. Ta có thể viết lại hệ thức đã cho như sau: $2a_na_{n-1}+3a_na_{n-2} = a_{n-1}a_{n-2}$ hay $2\frac{1}{a_{n-2}.} + 3\frac{1}{a_{n-1}.} = \frac{1}{a_n}$. Do đó, đặt $b_n = \frac{1}{a_n}$ ta được hệ thức truy hồi $b_n = 3b_{n-1} + 2b_{n-2}, n \geq 2, b_0 = \frac{1}{3}, b_1 = \frac{1}{5}$. Giải hệ thức truy hồi này được b_n từ đó suy ra a_n.

4.36.

- Vì ta luôn có $a_n + a_{n-1} = 4$ với mọi $n \geq 1$ nên hệ thức truy hồi tuyến tính cấp một có thể chọn là $a_n = 4 - a_{n-1}, n \geq 1, a_0 = 1$.
- Hệ thức truy hồi tuyến tính cấp hai hệ số hằng: Ta có thể viết a_n dưới dạng $a_n = 2.1^n - (-1)^n$. Do đó, hệ thức truy hồi có thể chọn là $a_n = a_{n-2}, n \geq 2; a_0 = 1, a_1 = 3$.

4.37.

a. $a_n = 3^n - 2^{n+1}$.

b. $a_n = 2^{n+1} - 5n - 1$.

c. $a_n = -5^n + 3.2^n + \frac{n}{4} + \frac{13}{16}$.

d. $a_n = 7.2^{n-2} + (-2)^{n-2} + n2^{n-1}$.

e. $a_n = (-2.3^n - \frac{1}{3}(-1)^n + \frac{1}{3}.2^n) + (\frac{1}{4}n + 1)$.

f. $a_n = 6,25.2^n + 1,03125(-3)^n + 1,71875 + \frac{n^2}{8} + \frac{3n}{4}$.

g. $a_n = -\frac{7}{2}.(-1)^n - 5.2^n + \frac{13}{2}.3^n + \frac{4}{3}n2^n$.

h. $a_n = \frac{41}{4} + \frac{29}{5}.2^n + \frac{49}{20}(-3)^n - 5 - \frac{1}{4}n + \frac{9}{20}n(-3)^n$.

Tài liệu tham khảo

[1] Kenneth H. Rosen, *Toán rời rạc ứng dụng trong Tin học*, NXB Khoa học và Kỹ thuật, Hà Nội, 1998.

[2] Nguyễn Tô Thành, Nguyễn Đức Nghĩa, *Toán rời rạc*, NXB Đại học Quốc gia Hà Nội, 2001.

[3] Ngô Thúc Lanh, *Đại số và Số học, tập 1, 2*, NXB Giáo dục.

[4] Hà Huy Khoái, *Nhập môn Số học Thuật toán*, NXB Khoa học và Kỹ thuật, Hà Nội, 1997.

[5] Phạm Huy Điển, Hà Huy Khoái, *Mã hóa Thông tin - Cơ sở Toán học và Ứng dụng*, *Bộ sách Toán cao cấp - Viện Toán học*, NXB Đại học Quốc gia Hà Nội, 2004.

[6] Nguyễn Hữu Hoan, *Số học phổ thông*, NXB Đại học và Trung học chuyên nghiệp, Hà Nội, 1986.

TRƯỜNG ĐẠI HỌC THĂNG LONG
KHOA TOÁN - TIN

LOGIC, SUY LUẬN TOÁN HỌC VÀ KỸ THUẬT ĐẾM

Chịu trách nhiệm xuất bản: PHẠM NGỌC KHÔI

Biên tập: Nguyễn Kim Dung

Sửa bản in: Nguyễn Kim Dung

Trình bày bìa: Ngọc Anh

NHÀ XUẤT BẢN KHOA HỌC VÀ KỸ THUẬT

70 Trần Hưng Đạo, Hoàn Kiếm, Hà Nội
ĐT: P. KH-TH: 04 3942 3172; TT. Phát hành: 04 3822 0686
Ban Biên tập: 04 3942 1132 – 04 3942 3171
FAX: 04 3822 0658 - Website: http://www.nxbkhkt.com.vn
Email: nxbkhkt@hn.vnn.vn

CHI NHÁNH NHÀ XUẤT BẢN KHOA HỌC VÀ KỸ THUẬT

28 Đồng Khởi – Quận 1 - TP. Hồ Chí Minh. ĐT: 08 3822 5062
Đối tác liên kết: Trường Đại học Thăng Long Địa chỉ: Phường Đại Kim, Quận Hoàng Mai, Hà Nội

---

In 1.000 bản khổ 16 × 24 cm tại Công ty cổ phần In và Thương mại HTC.

Địa chỉ: Số 8, ngõ 23B Lý Nam Đế, quận Hoàn Kiếm, thành phố Hà Nội.

Số đăng ký xuất bản: 2807-2014/CXB/1-161/KHKT.

Quyết định xuất bản số: 223/QĐXB-NXBKHKT ngày 29 tháng 12 năm 2014.

In xong và nộp lưu chiểu Quý I năm 2016.