1 Bài tập chương 1

Bài 1.1. Trong các câu dưới đây câu nào là mệnh đề?

a. Phnompênh là thủ đô của nước Lào.

b. Mùa xuân có hoa đào nở.

c. $x + 4 = 8$.

d. Hãy trả lời câu hỏi này.

e. $x + y = y + x$ với mọi cặp số thực x, y.

f. Có một số thực x sao cho $x^2 + 4x + 4 = 1$.

g. Bây giờ là mấy giờ?

Bài 1.2. Tìm phủ định các mệnh đề sau:

a. Hôm nay là Chủ nhật.

b. $1 + 2 = 3$

c. Lào và Campuchia không có bờ biển.

d. Mùa hè ở Đà Lạt có nắng nhưng không nóng.

Bài 1.3. Cho hai mệnh đề:
p : Tôi đã mua vé xổ số tuần này.
q : Tôi đã trúng giải đặc biệt 2 tỷ đồng vào hôm thứ bảy.
Diễn đạt các mệnh đề sau bằng các câu thông thường:

a. $\neg p$

b. $p \vee q$

c. $p \to q$

d. $p \wedge q$

e. $p \leftrightarrow q$

f. $\neg p \to \neg q$

g. $\neg p \wedge \neg q$

h. $\neg(p \wedge q)$

Bài 1.4. Cho hai mệnh đề.
p : Nhiệt độ dưới không.
q : Tuyết rơi.
Dùng p và q và các liên từ logic viết các mệnh đề sau:

a. Nhiệt độ dưới không và tuyết rơi.

b. Nhiệt độ dưới không nhưng không có tuyết rơi.

c. Nhiệt độ không dưới không và không có tuyết rơi.

d. Có tuyết rơi hoặc nhiệt độ dưới không.

e. Nếu nhiệt độ dưới không thì không có tuyết rơi.

f. Hoặc nhiệt độ dưới không hoặc có tuyết rơi.

g. Nhiệt độ dưới không là điều kiện cần và đủ để có tuyết rơi.

Bài 1.5. Cho hai mệnh đề

p : Bạn lái xe với tốc độ trên 80 km/h.

q : Bạn bị phạt vì vượt quá tốc độ cho phép.

Hãy viết các mệnh đề sau bằng cách dùng p, q và các liên từ logic.

a. Bạn không lái xe với tốc độ trên 80 km/h.

b. Bạn lái xe với tốc độ trên 80 km/h nhưng bạn không bị phạt vì vượt quá tốc độ cho phép.

c. Bạn bị phạt vì vượt quá tốc độ cho phép nếu bạn lái xe với tốc độ trên 80 km/h.

d. Nếu bạn không lái xe với tốc độ trên 80 km/h thì bạn sẽ không bị phạt vì vượt quá tốc độ cho phép.

e. Bạn lái xe với tốc độ trên 80 km/h là đủ để bạn bị phạt vì vượt quá tốc độ cho phép.

f. Bạn bị phạt vì vượt quá tốc độ cho phép nhưng bạn không lái xe với tốc độ trên 80 km/h.

g. Mỗi lần bạn bị phạt vì vượt quá tốc độ cho phép là bạn đã lái xe với tốc độ trên 80 km/h.

Bài 1.6. Cho ba mệnh đề

p : Bạn nhận được điểm giỏi trong kỳ thi cuối khóa.

q : Bạn làm hết bài tập trong quyển sách này.

r : Bạn sẽ được công nhận là giỏi ở lớp này.

Hãy viết các mệnh đề sau bằng cách dùng p, q, r và các liên từ logic.

a. Bạn được công nhận là giỏi ở lớp này nhưng bạn không làm hết các bài tập trong quyển sách này.

b. Bạn nhận được điểm giỏi trong kỳ thi cuối khóa, bạn làm hết bài tập trong quyển sách này và bạn được công nhận là giỏi ở lớp này.

c. Để được công nhận là giỏi ở lớp này bạn cần phải được điểm giỏi ở kỳ thi cuối khóa.

d. Bạn nhận được điểm giỏi trong kỳ thi cuối khóa nhưng bạn không làm hết bài tập trong quyển sách này, tuy nhiên bạn vẫn được công nhận là giỏi ở lớp này.

e. Nhận được điểm giỏi trong kỳ thi cuối khóa và làm hết bài tập trong quyển sách này là đủ để bạn được công nhận là giỏi ở lớp này.

f. Bạn sẽ được công nhận là giỏi ở lớp này nếu và chỉ nếu bạn làm hết bài tập trong quyển sách này hoặc bạn nhận được điểm giỏi trong kỳ thi cuối khóa.

Bài 1.7. Đối với các câu sau đây, hãy cho biết câu nào liên từ "hoặc" mang nghĩa bao hàm (tức là tuyển)? Câu nào liên từ "hoặc" mang nghĩa loại trừ (tuyển loại)?

a. Để theo học môn toán rời rạc, bạn cần phải đã học giải tích hoặc một khóa tin học.

b. Khi bạn mua một chiếc xe mới của hãng Ford bạn sẽ được bớt 2000 USD tiền mặt hoặc được tặng 20000 lít xăng.

c. Bữa ăn tối gồm hai món ở cột A hoặc ba món ở cột B.

d. Trường sẽ đóng cửa nếu bão cấp 12 hoặc lạnh dưới -10^0C.

e. Nếu trúng thưởng bạn sẽ được tặng một chuyến du lịch Thái Lan hoặc được tặng 300 USD.

f. Để được học đại học bạn phải thi đỗ đại học hoặc là học sinh giỏi quốc gia.

Bài 1.8. Một nhà thám hiểm bị một nhóm người ăn thịt bắt cóc. Có hai loại người ăn thịt người: loại luôn luôn nói thật và loại luôn luôn nói dối. Họ sẽ nướng sống nhà thám hiểm nếu ông không xác định được người nào trong họ là luôn luôn nói dối hay luôn luôn nói thật. Ông được phép hỏi người đó chỉ một câu hỏi.

a. Hãy giải thích tại sao câu hỏi "Anh là người nói dối phải không?" không mang lại kết quả?

b. Tìm câu hỏi mà nhà thám hiểm đã dùng để xác định người ăn thịt người đó là luôn luôn nói thật hay nói dối.

Bài 1.9. Hãy viết những câu sau đây dưới dạng "nếu p thì q".

a. Có tuyết rơi mỗi khi có gió Đông Bắc.

b. Các cây táo sẽ nở hoa nếu trời ấm kéo dài một tuần.

c. Đội tuyển bóng đá Việt Nam giành chức vô địch có nghĩa là họ đã đánh bại đội tuyển bóng đá Thái Lan.

d. Cần phải đi 8 km nữa mới tới được sông Hàn.

e. Để được phong giáo sư, nổi tiếng thế giới là đủ.

f. Nếu bạn cho xe chạy hơn 500 km, bạn cần phải mua xăng.

g. Giấy bảo hành của bạn còn hiệu lực nếu bạn đã mua chiếc đầu DVD của bạn ít hơn 90 ngày trước đây.

Bài 1.10. Viết các mệnh đề sau đây dưới dạng "p nếu và chỉ nếu q" trong ngôn ngữ thông thường.

a. Để được công nhận là một công dân tốt điều kiện cần và đủ là bạn luôn sống và làm việc theo pháp luật.

b. Nếu bạn đọc báo mỗi ngày, bạn sẽ thạo tin tức và ngược lại.

c. Tam giác ABC là tam giác đều nếu tam giác ABC có ba góc bằng nhau và tam giác ABC có ba góc bằng nhau nếu nó là tam giác đều.

d. Bạn sẽ trúng xổ số nếu bạn mua hết tất cả các vé số và ngược lại.

Bài 1.11. Phát biểu mệnh đề đảo, phản và phản đảo của mỗi mệnh đề kéo theo sau:

a. Nếu hôm nay tuyết rơi, ngày mai tôi sẽ đi trượt tuyết.

b. Tôi tới lớp học nhóm mỗi khi sắp có kỳ thi.

c. Tôi đi ra bãi tắm bất cứ ngày nào trời nắng.

d. Một số nguyên dương là số nguyên tố nếu chỉ có hai ước dương là 1 và chính nó.

Bài 1.12. Lập bảng chân lý đối với các mệnh đề phức hợp sau:

a. $p \wedge \neg p$

b. $p \vee \neg p$

c. $(p \vee \neg q) \rightarrow q$

d. $(p \vee q) \rightarrow (p \wedge q)$

e. $(p \rightarrow q) \leftrightarrow (\neg q \rightarrow \neg p)$

f. $(p \rightarrow q) \rightarrow (q \rightarrow p)$

g. $p \oplus \neg q$

h. $(p \oplus q) \wedge (p \oplus \neg q)$

Bài 1.13. Lập bảng chân lý đối với các mệnh đề phức hợp sau:

a. $(p \rightarrow q) \vee (\neg p \rightarrow q)$

b. $(p \rightarrow q) \wedge (\neg p \rightarrow q)$

c. $(p \leftrightarrow q) \vee (\neg p \leftrightarrow q)$

d. $(\neg p \leftrightarrow \neg q) \leftrightarrow (p \leftrightarrow q)$

e. $(p \oplus q) \vee (p \oplus \neg q)$

f. $(p \oplus q) \wedge (p \oplus \neg p)$

g. $(p \vee q) \vee r$

h. $(p \vee q) \wedge r$

Bài 1.14. Lập bảng chân lý đối với các mệnh đề phức hợp sau:

a. $p \rightarrow (\neg q \vee r)$

b. $\neg p \rightarrow (q \rightarrow r)$

c. $(p \rightarrow q) \vee (\neg p \rightarrow r)$

d. $(p \leftrightarrow q) \oplus (\neg p \vee r)$

e. $(\neg p \rightarrow q) \vee (r \rightarrow q)$

f. $\neg(p \wedge q) \wedge (r \oplus p)$

g. $(r \oplus q) \leftrightarrow (p \vee r)$

h. $(p \wedge q) \rightarrow \neg(r \wedge p)$

Bài 1.15. Tìm các OR bit, AND bit và XOR bit của mỗi cặp xâu bit sau:

a. 10001 11010; 10011 01011

b. 11011 10001; 11011 10001

c. 11101 10011; 00101 11111

d. 10111 10000; 10111 11000

e. 11011 11010; 11001 11000

Bài 1.16. Dùng bảng chân lý để chứng minh các tương đương logic sau:

a. $p \wedge T \Leftrightarrow p$

b. $p \vee F \Leftrightarrow p$

c. $p \wedge F \Leftrightarrow F$

d. $p \vee T \Leftrightarrow T$

e. $p \wedge p \Leftrightarrow p$

f. $p \vee p \Leftrightarrow p$

Bài 1.17. Chứng minh rằng $\neg(\neg p)$ và p là tương đương logic.

Bài 1.18. Dùng bảng chân lý để chứng minh các luật giao hoán, kết hợp, phân phối và De Morgan sau:

a. $p \vee q \Leftrightarrow q \vee p$

b. $p \wedge q \Leftrightarrow q \wedge p$

c. $(p \vee q) \vee r \Leftrightarrow p \vee (q \vee r)$

d. $(p \wedge q) \wedge r \Leftrightarrow p \wedge (q \wedge r)$

e. $p \wedge (q \vee r) \Leftrightarrow (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$

f. $p \vee (q \wedge r) \Leftrightarrow (p \vee q) \wedge (p \vee r)$

g. $\neg(p \vee q) \Leftrightarrow \neg p \wedge \neg q$

h. $\neg(p \wedge q) \Leftrightarrow \neg p \vee \neg q$

Bài 1.19. Chứng minh các mệnh đề kéo theo sau là hằng đúng

a. $(p \wedge q) \rightarrow q$

b. $p \rightarrow (p \vee q)$

c. $\neg p \rightarrow (p \rightarrow q)$

d. $(p \wedge q) \rightarrow (p \rightarrow q)$

e. $\neg(p \rightarrow q) \rightarrow p$

f. $\neg(p \rightarrow q) \rightarrow \neg q$

Bài 1.20. Chứng minh các mệnh đề kéo theo sau là hằng đúng:

a. $[\neg p \wedge (p \vee q)] \rightarrow q$

b. $[(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow r)] \rightarrow (p \rightarrow r)$

c. $[p \wedge (p \rightarrow q)] \rightarrow q$

d. $[(p \vee q) \wedge (p \rightarrow r) \wedge (q \rightarrow r)] \rightarrow r$

Bài 1.21. Chứng minh các tương đương logic (được gọi là **luật hấp thụ**) sau:

a. $[p \vee (p \wedge q)] \Leftrightarrow p$ b. $[p \wedge (p \vee q)] \Leftrightarrow p$

Bài 1.22. Xác định xem mỗi mệnh đề sau đây có phải là hằng đúng không

a. $[\neg p \wedge (p \rightarrow q)] \rightarrow \neg q$

b. $[\neg q \wedge (p \vee q)] \rightarrow \neg p$

c. $[(p \leftrightarrow q)] \leftrightarrow [(p \wedge q) \vee (\neg p \wedge \neg q)]$

d. $[(p \rightarrow q) \rightarrow r] \leftrightarrow [p \rightarrow (q \rightarrow r)]$

Bài 1.23. Chứng minh mỗi cặp mệnh đề sau là tương đương:

a.	$p \rightarrow q$	và	$\neg q \rightarrow \neg p$.
b.	$\neg p \leftrightarrow q$	và	$p \leftrightarrow \neg q$.
c.	$\neg(p \oplus q)$	và	$p \leftrightarrow q$.
d.	$\neg(p \leftrightarrow q)$	và	$\neg p \leftrightarrow q$.

Bài 1.24. Lập mệnh đề phức hợp gồm các mệnh đề p, q và r sao cho nó đúng chỉ khi p và r đúng, q sai hoặc p sai còn q và r đúng.

Bài 1.25. Lập mệnh đề phức hợp gồm các mệnh đề p, q và r sao cho nó sai chỉ khi p sai, r đúng, q sai hoặc p đúng, q và r sai hoặc cả p, q và r đều đúng.

Bài 1.26. Liệt kê các phần tử của các tập hợp sau:

a. $\{x \mid x$ là số thực sao cho $x^2 = 1\}$

b. $\{x \mid x$ là số nguyên dương nhỏ hơn $10\}$

c. $\{x \mid x$ là bình phương của một số nguyên và $x < 100\}$

d. $\{x \mid x$ là số nguyên sao cho $x^2 = 2\}$

Bài 1.27. Dùng cách chỉ rõ các thuộc tính, mô tả các tập hợp sau:

a. $\{0,\ 3,\ 6,\ 9,\ 12\}$

b. $\{-3,\ -2,\ -1,\ 0,\ 1,\ 2,\ 3\}$

c. $\{1,\ 4,\ 9,\ 16,\ 25\}$

d. $\{2,\ 3,\ 5,\ 7,\ 11,\ 13,\ 17,\ 19\}$.

Bài 1.28. Xác định xem các tập sau đây có bằng nhau không?

a. $\{1,\ 3,\ 3,\ 5,\ 5,\ 5\}$ và $\{5,\ 3,\ 1\}$,

b. $\{\{1\}\}$ và $\{1\}$,

c. $\{\varnothing\}$ và $\varnothing$,

d. $\{1,\ 2\}$ và $\{1,\ \{2\}\}$.

Bài 1.29. Xác định xem mỗi mệnh đề sau đúng hay sai?

a. $x \in \{x\}$,

b. $\{x\} \subseteq \{x\}$,

c. $\{x\} \in \{x\}$,

d. $\{x\} \in \{\{x\}\}$,

e. $\varnothing \subseteq \{x\}$,

f. $\varnothing \in \{x\}$.

Bài 1.30. Tìm hai tập A và B sao cho $A \in B$ và $A \subseteq B$.

Bài 1.31. Giả sử rằng A, B, C là những tập hợp sao cho $A \subseteq B$ và $B \subseteq C$. Chứng minh rằng $A \subseteq C$.

Bài 1.32. Tìm tập lũy thừa của mỗi tập hợp sau:

a. $\{a\}$

b. $\{a, b\}$

c. $\varnothing$

d. $\{\varnothing, \{\varnothing\}\}$

Bài 1.33. Xác định bản số và tìm tập lũy thừa của mỗi tập hợp sau:

a. $\{a\}$,

b. $\{\{a\}\}$,

c. $\{a, \{a\}\}$,

d. $\{a, \{a\}, \{a, \{a\}\}\}$.

Bài 1.34. Giả sử rằng A, B là hai tập hợp sao cho $P(A) = P(B)$. Chứng minh rằng $A = B$.

Bài 1.35. Cho $A = \{a, b, c, d\}$ và $B = \{x, y\}$. Tìm:

a. $A \times B$

b. $B \times A$

Bài 1.36. Cho $A \times B = \varnothing$ với A, B là hai tập hợp. Chứng minh rằng $A = \varnothing$ hoặc $B = \varnothing$.

Bài 1.37. Chứng minh rằng $A \times B \neq B \times A$ nếu A, B là những tập không rỗng và $A \neq B$.

Bài 1.38. *Nghịch lý Russell.*
Cho S là tập chứa x nếu tập x không thuộc chính nó, tức là $S = \{x \mid x \notin x\}$.

a. Chứng minh rằng giả thiết S là một phần tử của S sẽ dẫn tới mâu thuẫn.

b. Chứng minh rằng giả thiết S không phải là phần tử của nó cũng dẫn tới mâu thuẫn.

Bài 1.39. Cho A là tập hợp các sinh viên sống cách trường trong vòng 3 km và B là tập hợp các sinh viên đang trên đường tới lớp. Hãy mô tả thuộc tính của các sinh viên thuộc mỗi tập hợp sau:

a. $A \cap B$

b. $B \cup A$

c. $A \backslash B$

d. $B \backslash A$.

Bài 1.40. Cho $A = \{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5\}$ và $B = \{0,\ 3,\ 4,\ 6\}$. Tìm:

a. $A \cap B$

b. $B \cup A$

c. $A \backslash B$

d. $B \backslash A$.

Bài 1.41. Cho A là một tập hợp, U là tập vũ trụ, chứng minh rằng:

a. $A \cup \varnothing = A$

b. $A \cap \varnothing = \varnothing$

c. $A \cup A = A$

d. $A \cap A = A$

e. $A \backslash \varnothing = A$

f. $A \cup U = U$

g. $A \cap U = A$

h. $\overline{\overline{A}} = A$.

Bài 1.42. Cho A, B là hai tập hợp, chứng minh rằng:

a. $A \cup B = B \cup A$

b. $A \cap B = B \cap A$

c. $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$

d. $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$.

Bài 1.43. Cho A, B là hai tập hợp, chứng minh rằng:

a. $(A \cap B) \subseteq A$

b. $A \subseteq (A \cup B)$

c. $(A \backslash B) \subseteq A$

d. $A \cap (B \backslash A) = \varnothing$

e. $A \cup (B \backslash A) = A \cup B$

h. $(A \cap B) \cup (A \cap \overline{B}) = A$.

Bài 1.44. Chứng minh rằng nếu A, B và C là những tập hợp thì

$$\overline{A \cap B \cap C} = \overline{A} \cup \overline{B} \cup \overline{C}$$

a. bằng cách chứng tỏ vế này là tập con của vế kia.

b. bằng cách dùng bảng tính thuộc.

Bài 1.45. Tìm hai tập A, B nếu biết $A \backslash B = \{1,\ 5,\ 7,\ 8\}$, $B \backslash A = \{2,\ 10\}$ và $A \cap B = \{3,\ 6,\ 9\}$.

Bài 1.46. Cho A, B, C là những tập hợp. Chứng minh rằng:

a. $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$

b. $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$

c. $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

d. $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$.

Bài 1.47. Cho A, B, C là những tập hợp. Chứng minh rằng:

a. $(A \backslash C) \cap (C \backslash B) = \varnothing$

b. $(B \backslash A) \cup (C \backslash A) = (B \cup C) \backslash A$

c. $(A \backslash B) \backslash C = (A \backslash C) \backslash (B \backslash C)$

d. $(A \cap B) \backslash C) = (A \backslash C) \cap B$.

Bài 1.48. Hai tập A và B có quan hệ gì nếu chúng thỏa mãn đẳng thức sau:

a. $A \cup B = A$

b. $A \cap B = A$

c. $A \backslash B = A$

d. $A \backslash B = \varnothing$

e. $A \backslash B = B \backslash A$

f. $A \backslash B = B$

g. $A \backslash B = A \cup B$

h. $A \cap B = B \backslash A$.

Bài 1.49. Có thể kết luận rằng $A = B$ nếu A, B và C thỏa mãn đẳng thức sau:

a. $A \cup C = B \cup C$

b. $A \cap C = B \cap C$

c. Cả a và b đúng.

Bài 1.50. Cho A và B là hai tập con của tập vũ trụ U. Chứng minh rằng $A \subseteq B$ nếu và chỉ nếu $\overline{B} \subseteq \overline{A}$.

Bài 1.51. Giả sử tập vũ trụ

$$U = \{0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8,\ 9\}.$$

Biểu diễn các tập hợp sau bằng xâu bit.

a. $\{3,\ 4,\ 5\}$

b. $\{1,\ 3,\ 6,\ 9\}$

c. $\{0,\ 2,\ 4,\ 7,\ 8,\ 9\}$

d. $\varnothing$.

Bài 1.52. Cho tập vũ trụ U như trên, tìm các tập hợp được biểu diễn bởi những xâu bit sau

a. 11001 10010

b. 00010 10101

c. 11111 11111

d. 01011 00001

Bài 1.53. Cho $P(x)$ là câu "$x \leqslant 4$". Xác định giá trị chân lý của mỗi mệnh đề sau

a. $P(0)$.

b. $P(4)$.

c. $P(6)$.

d. $P(-5)$.

Bài 1.54. Cho $P(x)$ là câu "từ x chứa chữ cái a". Xác định giá trị chân lý của mỗi mệnh đề sau

a. $P(\text{cam})$

b. $P(\text{táo})$.

c. $P(\text{mít})$

d. $P(\text{lê})$.

Bài 1.55. Cho $Q(x, y)$ là câu "x là thủ đô của y". Xác định giá trị chân lý của mỗi mệnh đề sau

a. $Q(\text{Pari, Pháp})$

b. $Q(\text{Luân Đôn, Ý})$

c. $Q(\text{Bắc Kinh, Đức})$

d. $Q(\text{Bình Nhưỡng, Triều Tiên})$

Bài 1.56. Cho $P(x)$ là câu "x học ở lớp hơn 5 giờ mỗi ngày trong tuần", ở đây không gian biện luận là tập hợp các sinh viên. Hãy diễn đạt mỗi lượng hóa sau thành câu thông thường

a. $\exists\, x P(x)$

b. $\forall\, x P(x)$.

c. $\exists\, x \neg P(x)$

d. $\forall\, x \neg P(x)$.

Bài 1.57. Cho $P(x, y)$ là câu "x đã học môn y", với không gian biện luận của x là tập tất cả các sinh viên trong lớp và không gian biện luận của y là tập tất cả các môn học ở trường. Hãy diễn đạt mỗi lượng hóa sau thành câu thông thường

a. $\exists x \exists\, y P(x, y)$.

b. $\exists x \forall\, y P(x, y)$.

c. $\forall x \exists\, y P(x, y)$.

d. $\exists y \forall\, x P(x, y)$.

e. $\forall y \exists\, x P(x, y)$.

f. $\forall x \forall\, y P(x, y)$.

Bài 1.58. Cho $P(x)$ là câu "x nói được tiếng Anh" và $Q(x)$ là câu "x nói được tiếng Pháp". Hãy diễn đạt các câu sau bằng cách dùng $P(x), Q(x)$, các lượng từ và các liên từ logic. Cho không gian biện luận của x là tập hợp tất cả các sinh viên trong trường bạn.

a. Có một sinh viên trong trường bạn nói được tiếng Anh và tiếng Pháp.

b. Có một sinh viên trong trường bạn nói được tiếng Anh nhưng không nói được tiếng Pháp

c. Mọi sinh viên trong trường bạn nói được tiếng Anh hoặc tiếng Pháp.

d. Không có sinh viên nào trong trường nói được tiếng Anh hoặc tiếng Pháp.

e. Có ít nhất hai sinh viên trong trường bạn nói được tiếng Anh.

Bài 1.59. Cho $L(x, y)$ là câu "x yêu y", với không gian biện luận của cả x và y là tập mọi người trên thế giới. Hãy dùng các lượng từ để diễn đạt các câu sau:

a. Mọi người đều yêu Sơn.

b. Mọi người đều yêu một ai đó.

c. Có một người mà tất cả mọi người đều yêu.

d. Không ai yêu tất cả mọi người.

e. Có một người mà Hồng không yêu.

f. Có một người mà không ai yêu.

g. Có đúng một người yêu Mai.

h. Có đúng một người mà tất cả mọi người đều yêu.

i. Có đúng hai người mà Hoa yêu.

j. Có một người nào đó không yêu ai ngoài chính mình.

Bài 1.60. Cho $F(x, y)$ là câu "x có thể lừa gạt y", với không gian biện luận là tập mọi người trên thế giới. Hãy dùng các lượng từ để diễn đạt các câu sau:

a. Mọi người đều có thể lừa gạt Lan.

b. Hùng có thể lừa gạt được mọi người.

c. Mọi người đều có thể lừa gạt được ai đó.

d. Không ai có thể lừa gạt được tất cả mọi người.

e. Mọi người đều có thể bị lừa gạt bởi ai đó.

f. Không ai có thể lừa gạt được cả Chiến và Thắng.

g. Cường có thể lừa gạt được chính xác hai người.

h. Có chính xác một người mà ai cũng lừa được.

i. Không ai có thể lừa gạt được chính mình.

j. Nếu có ai đó lừa gạt được người khác thì sẽ bị một người nào đó lừa lại.

Bài 1.61. Lớp toán học rời rạc có 1 sinh viên ngành toán năm thứ nhất, 12 sinh viên ngành toán năm thứ hai, 15 sinh viên ngành tin năm thứ hai, 2 sinh viên ngành toán năm thứ ba, 2 sinh viên ngành tin năm thứ ba và 1 sinh viên ngành tin năm thứ tư. Diễn đạt các câu sau bằng cách dùng các lượng từ rồi sau đó xác định giá trị chân lý của chúng.

a. Có một sinh viên trong lớp là sinh viên năm thứ ba.

b. Mọi sinh viên trong lớp đều là sinh viên ngành tin học.

c. Có một sinh viên trong lớp không phải sinh viên ngành toán và cũng không phải sinh viên năm thứ ba.

d. Mọi sinh viên trong lớp là sinh viên năm thứ ba hoặc là sinh viên ngành tin học.

e. Có một ngành học sao cho mỗi khóa học có một sinh viên ở lớp này học ngành đó.

f. Có một khóa học mà với mọi ngành học đều có sinh viên theo học.

Bài 1.62. Hãy đặt hàm mệnh đề và biểu diễn các câu sau thành biểu thức có chứa lượng từ

a. Có một người trong lớp cao hơn Nam.

b. Mọi nước trên thế giới đều nối mạng Internet.

c. Mọi người đều nói được ít nhất một ngôn ngữ trên thế giới.

d. Không ai biết mọi ngôn ngữ trên thế giới.

e. Có một môn thể thao mà mọi người trên thế giới đều thích xem.

f. Nếu một người muốn khỏe mạnh thì người này phải chơi ít nhất một mô thể thao nào đó.

g. Có một sinh viên đã học ở tất cả các phòng của ít nhất một khu nhà trong trường.

h. Tất cả các sinh viên đã học ít nhất một phòng của mọi khu nhà trong trường.

Bài 1.63. Cho $P(x)$ là câu "$x = x^2$". Nếu không gian biện luận là tập các số nguyên thì giá trị chân lý của mỗi mệnh đề sau như thế nào?

a. $P(0)$.

b. $P(1)$.

c. $P(2)$.

d. $P(-1)$.

e. $\exists\, x\, P(x)$.

f. $\forall\, x\, P(x)$.

Bài 1.64. Cho $Q(x,y)$ là câu "$x+y=x-y$". Cho không gian biện luận của hai biến là tập các số nguyên, hãy xác định giá trị chân lý của mỗi mệnh đề sau

a. $Q(1,1)$.

b. $Q(2,0)$.

c. $\forall y\, Q(1,y)$.

d. $\exists\, x\, Q(x,2)$.

e. $\exists\, x\, \exists y\, Q(x,y)$.

f. $\forall\, x\, \exists y\, Q(x,y)$.

g. $\exists\, y\, \forall x\, Q(x,y)$.

h. $\forall\, y\, \exists x\, Q(x,y)$.

Bài 1.65. Cho $R(x,y)$ là câu "$2x+5y=1$". Cho không gian biện luận của hai biến là tập các số nguyên, hãy xác định giá trị chân lý của mỗi mệnh đề sau

a. $\exists\, x\, \exists y\, R(x,y)$.

b. $\forall\, x\, \exists y\, R(x,y)$.

c. $\exists\, x\, \forall y\, R(x,y)$.

d. $\forall\, x\, \forall y\, R(x,y)$.

Bài 1.66. Giả sử không gian biện luận của hàm mệnh đề $P(x,y)$ gồm các cặp số x và y với x,y là $1,2$ hoặc 3. Dùng các phép hội và tuyển viết các mệnh đề sau

a. $\exists x\, P(x,3)$.

b. $\forall y\, P(1,y)$.

c. $\forall x \forall y\, P(x,y)$.

d. $\exists x\, \exists y\, P(x,y)$.

e. $\exists\, x\, \forall y\, P(x,y)$.

f. $\forall\, y\, \exists x\, P(x,y)$.

Bài 1.67. Cho $P(x), Q(x)$ và $R(x)$ lần lượt là các câu "x là giáo sư", "x là kẻ ngu dốt" và "x là kẻ vô tích sự". Bằng cách dùng các lượng từ, các liên từ logic cùng với $P(x), Q(x)$ và $R(x)$, hãy diễn đạt các câu sau với không gian biện luận là tập hợp toàn thể loài người.

a. Không có giáo sư nào là kẻ ngu dốt.

b. Mọi kẻ ngu dốt đều là vô tích sự.

c. Không có giáo sư nào là vô tích sự.

Giả sử các mệnh đề ở các câu (a) và (b) đúng, có thể suy ra mệnh đề ở câu (c) đúng không?

Bài 1.68. Cho các mệnh đề sau:

1. Tất cả những người ngủ sớm và dạy sớm đều khỏe mạnh.
2. Một số trẻ em không khỏe mạnh.
3. Một số trẻ em không ngủ sớm và dạy sớm.

a. Hãy đặt hàm mệnh đề và diễn đạt các câu trên thành biểu thức có chứa lượng từ.

b. Từ cách biểu diễn trong câu (a), hãy xét xem nếu câu (1) và (2) đúng thì câu (3) có đúng không?

Bài 1.69. Cho $P(x), Q(x), R(x)$ và $S(x)$ lần lượt là các câu "x là một đứa bé", "x là logic", "x có khả năng cai quản một con cá sấu" và "x bị coi thường". Bằng cách dùng các lượng từ, các liên từ logic cùng với $P(x), Q(x), R(x)$ và $S(x)$, hãy diễn đạt các câu sau với không gian biện luận là tập hợp toàn thể loài người.

a. Trẻ em là không logic.

b. Không ai bị coi thường nếu cai quản được cá sấu.

c. Mọi người không logic đều bị coi thường.

d. Trẻ em không cai quản được cá sấu.

Giả sử các mệnh đề ở các câu (a), (b) và (c) đúng, có thể suy ra mệnh đề ở câu (d) đúng không?

Bài 1.70. Chứng tỏ rằng mỗi cặp mệnh đề sau có cùng giá trị chân lý.

a. $\forall x\,(P(x) \wedge Q(x))$ và $\forall x\, P(x) \wedge \forall x\, Q(x)$

b. $\exists x\,(P(x) \vee Q(x))$ và $\exists x\, P(x) \vee \exists x\, Q(x)$

c. $\forall x\, P(x) \wedge \exists x\, Q(x)$ và $\forall x \exists y\,(P(x) \wedge Q(y))$

d. $\forall x\, P(x) \vee \exists x\, Q(x)$ và $\forall x \exists y\,(P(x) \vee Q(y))$

Bài 1.71. Chứng minh rằng mỗi cặp mệnh đề sau là không tương đương logic.

a. $\forall x\, P(x) \vee \forall x\, Q(x)$ và $\forall x\,(P(x) \vee Q(x))$.

b. $\exists x\, P(x) \wedge \exists x\, Q(x)$ và $\exists x\,(P(x) \wedge Q(x))$.

Bài 1.72. Xác định xem f có phải là một hàm không

a. $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ xác định bởi $f(x) = \dfrac{1}{x}$.

b. $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ xác định bởi $f(x) = \pm\sqrt{x^4 + x^2 + 1}$.

c. $f: \mathbb{Z} \to \mathbb{R}$ xác định bởi $f(n) = \dfrac{1}{n^2 - 3}$.

d. $f: \mathbb{R} \to \mathbb{Z}$ xác định bởi $f(x) = \sqrt{x^2 + 1}$.

e. $f: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ xác định bởi $f(n) = 2n - 3$.

f. $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ xác định bởi $f(x) = \sqrt{x}$.

g. $f: \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ xác định bởi $f(n) = \dfrac{1}{n+1}$.

Bài 1.73. Xác định xem f có là một hàm từ tập các xâu bit đến tập các số nguyên không, nếu

a. $f(S)$ là vị trí của một bít 0 trong xâu S.

b. $f(S)$ là số các bít 1 trong xâu S.

c. $f(S)$ là vị trí bit 1 đầu tiên của xâu S tính từ phải sang trái.

d. $f(S)$ là độ dài của xâu S.

Bài 1.74. Tính các giá trị sau:

a. $\lceil \frac{3}{4} \rceil$,

b. $\lceil \frac{13}{7} \rceil$,

c. $\lfloor \frac{4}{5} \rfloor$,

d. $\lfloor 3,6 \rfloor$,

e. $\lceil 4,3 \rceil$,

f. $\lfloor 6,8 \rfloor$.

Bài 1.75. Xác định xem hàm từ $\{1,\ 2,\ 3,\ 4\}$ đến chính nó cho dưới đây có phải là đơn ánh hay toàn ánh không

a. $f(1) = 2 \quad f(2) = 1 \quad f(3) = 3 \quad f(4) = 4$.

b. $f(1) = 3 \quad f(2) = 4 \quad f(3) = 1 \quad f(4) = 3$.

c. $f(1) = 4 \quad f(2) = 2 \quad f(3) = 1 \quad f(4) = 3$.

d. $f(1) = 1 \quad f(2) = 1 \quad f(3) = 4 \quad f(4) = 3$.

Bài 1.76. Xác định xem mỗi hàm từ $\mathbb{Z}$ đến $\mathbb{Z}$ sau đây có là đơn ánh hay toàn ánh không

a. $f(n) = n - 1$.

b. $f(n) = n^2 + 3$.

c. $f(n) = n^3$.

d. $f(n) = \lceil \frac{n}{2} \rceil$.

Bài 1.77. Xác định xem hàm f sau đây có phải là đơn ánh hay toàn ánh không

a. $f:\ \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ xác định bởi $f(x) = \dfrac{1}{x}$.

b. $f:\ \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ xác định bởi $f(x) = \sqrt{x^4 + 1}$.

c. $f:\ \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ xác định bởi $f(n) = n^2 + 4$.

d. $f:\ \mathbb{R} \to [-1, 1]$ xác định bởi $f(x) = \sin x$.

e. $f:\ \mathbb{R}\backslash\{1\} \to \mathbb{R}$ xác định bởi $f(x) = \dfrac{2x+1}{x-1}$.

f. $f:\ \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ xác định bởi $f(x) = x^3 + 2x + 1$.

g. $f:\ [0, 2] \to \mathbb{R}$ xác định bởi $f(x) = x^2 + 2x + 3$.

Bài 1.78. Cho một ví dụ về hàm từ $\mathbb{N}$ đến $\mathbb{N}$ là:

a. đơn ánh nhưng không là toàn ánh.

b. toàn ánh nhưng không là đơn ánh.

c. không là đơn ánh cũng không là toàn ánh.

d. là song ánh nhưng không phải là hàm đồng nhất.

Bài 1.79. Xác định xem mỗi hàm từ $\mathbb{R}$ đến $\mathbb{R}$ cho dưới đây có phải là song ánh không

a. $f(x) = 3x + 2$.

b. $f(x) = x^2 - 3x + 2$.

c. $f(x) = \sqrt[3]{x+1}$.

d. $f(x) = \dfrac{x+1}{x^2+1}$.

Bài 1.80. Cho $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $S = \{-1,\ 0,\ 2,\ 5\}$. Tìm $f(S)$ nếu

a. $f(x) = 2$.

b. $f(x) = 3x + 1$.

c. $f(x) = \lceil \dfrac{4x+1}{3} \rceil$.

d. $f(x) = \lfloor \dfrac{x^2+1}{4} \rfloor$.

Bài 1.81. Cho $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{Z}$ xác định bởi $f(x) = \lfloor \dfrac{2x+1}{3} \rfloor$. Tìm $f(S)$ nếu

a. $S = \{-1,\ 0,\ 2,\ 3\}$.

b. $S = \{2,\ 4,\ 6\}$.

c. $S = [1, 7]$.

d. $S = (3, 8)$.

Bài 1.82. Tìm $f(S)$ trong các trường hợp sau:

a. $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $\quad f(x) = x^2 + 3x$ với $S = (1, 5)$.

b. $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $\quad f(x) = \dfrac{3x}{x^2+4}$ với $S = \mathbb{R}$.

c. $f : \mathbb{R} \backslash \{\frac{-5}{2}\} \longrightarrow \mathbb{R}$ $\quad f(x) = \dfrac{x+1}{2x+5}$ với $S = [0, 3)$.

d. $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $\quad f(x) = \sin x$ với $S = [\dfrac{\pi}{6}, \dfrac{3\pi}{2}]$.

Bài 1.83. Cho f là một hàm từ $\mathbb{R}$ đến $\mathbb{R}$ xác định bởi $f(x) = x^2$. Tìm:

a. $f^{-1}(\{1\})$.

b. $f^{-1}(\{y \mid 0 < y < 1\})$.

c. $f^{-1}(\{y \mid y > 4\})$.

d. $f^{-1}(\{y \mid y < 3\})$.

Bài 1.84. Cho g là một hàm từ $\mathbb{R}$ đến $\mathbb{Z}$ xác định bởi $g(x) = \lfloor \dfrac{x+1}{3} \rfloor$. Tìm:

a. $g^{-1}(\{0\})$.

b. $g^{-1}(\{1,\ 2,\ 3\})$.

c. $g^{-1}(\{x \mid 5 > x > 1\})$.

d. $g^{-1}([0, 4])$.

Bài 1.85. Cho f là một hàm từ tập A đến tập B và S, T là hai tập con của B. Chứng minh rằng:

a. $f^{-1}(S \cup T) = f^{-1}(S) \cup f^{-1}(T)$.

b. $f^{-1}(S \cap T) = f^{-1}(S) \cap f^{-1}(T)$.

Bài 1.86. Cho f là một hàm từ tập A đến tập B và S là tập con của B. Chứng minh rằng $f^{-1}(\overline{S}) = \overline{f^{-1}(S)}$.

Bài 1.87. Chứng minh rằng nếu $f \circ g$ là đơn ánh thì g cũng là đơn ánh.

Bài 1.88. Chứng minh rằng nếu $f \circ g$ là toàn ánh thì f cũng là toàn ánh.

Bài 1.89. Cho hai hàm số $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ xác định bởi quy tắc $f(x) = x^2 + 1$ và $g(x) = 2x + 3$. Xác định các hàm số sau:

a. $f \circ g$.

b. $g \circ f$.

c. $f + g$.

d. $f.g$.

Bài 1.90. Cho hai hàm $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ lần lượt xác định bởi $f(x) = ax + b$ và $g(x) = cx + d$, hãy xác định a, b, c, d để $f \circ g = g \circ f$ và $f(f(x)) = f(x) + 1, \forall x$.

Bài 1.91. Chứng tỏ rằng những hàm sau có hàm ngược và tìm hàm ngược.

a. $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\ f(x) = ax + b$ với a, b là hằng số và $a \neq 0$.

b. $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\ f(x) = x^3 + 3x^2 + 3x + 2$.

c. $f : \mathbb{R}^+ \longrightarrow (1, +\infty),\ f(x) = x^2 + 1$.

Bài 1.92. Cho f là một hàm từ tập A đến tập B và S, T là hai tập con của A. Chứng minh rằng

a. $f(S \cup T) = f(S) \cup f(T)$.

b. $f(S \cap T) \subseteq f(S) \cap f(T)$.

Bài 1.93. Cho f là một hàm từ tập A đến tập B. Chứng minh rằng f là đơn ánh khi và chỉ khi $f(S \cap T) = f(S) \cap f(T)$ với mọi tập con S, T của A.

Bài 1.94. Chứng minh rằng $\lceil x \rceil = -\lfloor -x \rfloor$.

Bài 1.95. Chứng minh rằng $\lfloor 2x \rfloor = \lfloor x \rfloor + \lfloor x + \dfrac{1}{2} \rfloor$.

Bài 1.96. Chứng minh rằng $\lfloor 3x \rfloor = \lfloor x \rfloor + \lfloor x + \dfrac{1}{3} \rfloor + \lfloor x + \dfrac{2}{3} \rfloor$.