CALCULUS II

@arch-techs

2021

CALCULUS II

by: @arch-techs

1. Vi phân

$$\Delta f(x_0, y_0) = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)$$

$$\Delta f(x_0, y_0) = A.\Delta x + B.\Delta' y + \alpha.\Delta x + \beta.\Delta y$$

$$\Rightarrow df(x_0, y_0) = \frac{\partial f}{\partial x}.\Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}.\Delta y$$

Xét sự khả vi của hàm số $f(x, y)$:

$$\Delta f(x_0, y_0) = df(x_0, y_0) + \varepsilon(\rho).\rho$$

Để hàm khả vi:

$$\lim_{\rho \to 0} \varepsilon(\rho) = \lim_{\rho \to 0} \frac{\Delta f(x_0, y_0) - df(x_0, y_0)}{\rho}$$
$$df(x_0, y_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$$

Áp dụng tính gần đúng:

$$\Delta f(x_0, y_0) = df(x_0, y_0) + o(\rho)$$
$$\to \Delta f(x_0, y_0) \approx df(x_0, y_0)$$
$$\to f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0) = df(x_0, y_0)$$

2. Vector Gradient

$$\frac{\partial f}{\partial \overrightarrow{u}}(x_0, y_0) = \overrightarrow{grad} f(x_0, y_0).\overrightarrow{u}$$

$$\frac{\partial f}{\partial \overrightarrow{u}}(x_0, y_0) = \lim_{\Delta x \to 0, \Delta y \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)}{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}}$$
$$= \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) \cos\alpha + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \sin\alpha$$
$$\overrightarrow{u} = (\cos\alpha, \sin\alpha)$$

Ta có:

$$\nabla f(x_0, y_0) = f'_x(x_0, y_0).\overrightarrow{i} + f'_y(x_0, y_0).\overrightarrow{j}$$
$$\overrightarrow{grad} f(x_0, y_0) = (f'_x(x_0, y_0), f'_y(x_0, y_0))$$

$$\to \frac{\partial f}{\partial \overrightarrow{u}}(x_0, y_0) = \nabla f(x_0, y_0).\overrightarrow{u}$$
$$= |\nabla f(x_0, y_0)| . |\overrightarrow{u}| . \cos\alpha \quad : |\overrightarrow{u}| = 1$$

3. Khai triển Taylor

4. Cực trị tự do

- $f(x, y)$ đạt cực đại tương đối tại $M_0(x_0, y_0)$:

$$f(x, y) = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0) \leqslant 0 \quad \forall (\Delta x, \Delta y) \to (0, 0)$$

- $f(x, y)$ đạt cực tiểu tương đối tại $M_0(x_0, y_0)$:

$$f(x, y) = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0) \geqslant 0 \quad \forall (\Delta x, \Delta y) \to (0, 0)$$

- M_0 là điểm tới hạn :
$$\frac{\partial f}{\partial x}(M_0) = \frac{\partial f}{\partial y}(M_0) = 0$$
hoặc một trong hai không tồn tại.
- Điều kiện cần : Nếu hàm số có cực trị tại M_0 thì M_0 là điểm tới hạn.
- Điều kiện đủ : Ta có điểm M_0 là điểm tới hạn của hàm số.
Để M_0 là điểm cực trị của hàm số:
Ta xét:
$$A = f''_{xx}(x_0, y_0)$$
$$B = f''_{xy}(x_0, y_0)$$
$$C = f''_{yy}(x_0, y_0)$$
Để M_0 là điểm cực trị của hàm số:
$$AC - B^2 > 0$$
Nếu $A > 0$ hoặc $C > 0 \Rightarrow$ cực tiểu địa phương.
Nếu $A < 0$ hoặc $C < 0 \Rightarrow$ cực đại địa phương.
Nếu $AC - B^2 < 0 \Rightarrow$ không phải cực trị.
Nếu $AC - B^2 = 0 \Rightarrow$ cũng có thể là có, cũng có thể là không.

5. Cực trị có điều kiện

- Nhân tử Lagrange.
Xét tìm cực trị hàm số $f(x, y)$ với điều kiện $\varphi(x, y) = 0$
$$L(x, y, \lambda) = f(x, y) + \lambda.\varphi(x, y)$$
Ta có các điểm dừng:
$$\begin{aligned} L'_x &= 0 & f'_x(x,y) + \lambda.\varphi'_x(x,y) &= 0 \\ L'_y &= 0 & f'_y(x,y) + \lambda.\varphi'_y(x,y) &= 0 \\ L'_\lambda &= 0 & \varphi(x,y) &= 0 \end{aligned}$$
$$\Rightarrow \lambda, x_0, y_0$$
$$\Rightarrow M(x_0, y_0)$$
Dựa vào dấu của $d^2L(M_0)$ ta biết được $M_0(x_0, y_0)$ có phải là điểm cực trị hay không.
$$d^2L(M_0) = L''_{xx}(M_0)dx^2 + 2L''_{xy}(M_0)dxdy + L''_{yy}(M_0)dy^2$$
Chú ý:
$$d\varphi(M_0) = \varphi'_x(M_0)dx + \varphi'_y(M_0)dy$$
$$\Rightarrow dy = -\frac{\varphi'_x(M_0)dx}{\varphi'_y(M_0)}$$
Nếu $d^2L(M_0) > 0 \Rightarrow$ cực tiểu.
Nếu $d^2L(M_0) < 0 \Rightarrow$ cực đại.
Nếu không xác đinh thì không phải cực trị.

6. Tích phân bội 2 Thuật toán sẽ xuất ra K điểm trung tâm của K nhóm và gắn mác(nhãn, nhóm thuộc về) cho từng điểm đầu vào.

Sau khi có list $distancetocl$ ta sẽ tìm ra (giá trị nhỏ nhất) khoảng cách nhỏ nhất của điểm đầu (points[0]) đến từng điểm trong $clusters$ ghi nhớ vị trí (index) của nó rồi lưu vào list $labels$. Tiếp tục tính tương tự đối với các phần tử tiếp theo trong list $points$.
$$labels = [l_1, l_2, ..., l_n] \in \mathbf{R}^{1.n}$$
Mỗi giá trị trong $labels$ sẽ đánh dấu các điểm K
Múc đích của việc này là đẻ gắn nhãn cho các điểm.

Tiếp theo chúng ta sẽ cập nhật tọa độ của từng điểm K trong $clusters$, cứ tiếp tục vòng lặp cho đến khi phân chia được kết quả.

Tọa độ mới của từng điểm K là trung bình cộng của các điểm trong $points$ được gán vào nhóm K đó. Sau khi có vị trí K mới ta sẽ cập nhật lại cho đến khi vị trí của K được cố định.

Bước tiếp theo là chạy thuật toán. Nói một cách đơn gian chúng ta đang có $points = [p_1, p_2, ..., p_n] \in \mathbf{R}^{2.n}$ là tập hợp các điểm ta nhấp lên màn hình. $clusters = [c_1, c_2, ..., c_K] \in \mathbf{R}^{2.K}$ là số điểm mà chúng ta vừa random. Bây giờ chúng ta sẽ tính khoảng cách của từng điểm trong $points$ tới các điểm trong $clusters$ rồi lưu nó vào một list mới $distancetocl$.

$$distancetocl = [d_1, d_2, ..., d_K] \in \mathbf{R}^{2.K}$$