# TOÁN RỜI RẠC

**Đặng Cao Cường**

*Bộ môn Khoa học và Kỹ thuật tính toán, Khoa CNTT, ĐHQGHN*

*cuongdc@vnu.edu.vn*

# LOGIC (8 TIẾT)

- Logic mệnh đề
- Các phép toán mệnh đề
- Biểu thức logic
- Các luật logic
- Logic vị từ
- Lượng từ

# KHÁI NIỆM MỆNH ĐỀ VÀ CHÂN TRỊ

- Mệnh đề là một phát biểu xác định được rõ tính đúng sai của phát biểu đó.
- Ký hiệu X, Y, Z,… (có thể đi kèm với chỉ số)
- Tính đúng sai được gọi là chân trị của mệnh đề: đúng (True, T, 1); sai (False, F, 0).
- Ví dụ:
  - ✓ A="19 là số nguyên tố" → đúng (True, T, 1)
  - ✓ B="8 lớn hơn 10" → sai (False, F, 0)

# CÁC PHÉP TOÁN MỆNH ĐỀ

- Phép tuyển
- Phép hội
- Phép phủ định
- Phép kéo theo
- Kéo theo hai chiều

# PHÉP TUYỂN

- Mệnh đề X tuyển với mệnh đề Y (ký hiệu $X \vee Y$) là mệnh đề được định nghĩa như sau: $X \vee Y$ nhận giá trị đúng khi và chỉ khi ít nhất một trong hai mệnh đề X, Y nhận giá trị đúng; Mệnh đề $X \vee Y$ nhận giá trị sai khi và chỉ khi cả X, Y đều nhận giá trị sai.
- Lập bảng chân trị

| X | Y | $X \vee Y$ |
|---|---|---|
| F | F | F |
| F | T | T |
| T | F | T |
| T | T | T |

# PHÉP HỘI

- Mệnh đề X hội với mệnh đề Y (ký hiệu $X \wedge Y$) là mệnh đề được định nghĩa như sau: $X \wedge Y$ nhận giá trị đúng khi và chỉ khi cả hai mệnh đề X, Y nhận giá trị đúng; Mệnh đề $X \wedge Y$ nhận giá trị sai khi và chỉ khi ít nhất một mệnh đề nhận giá trị sai.
- Lập bảng chân trị?

| X | Y | $X \wedge Y$ |
|---|---|---|
| F | F | F |
| F | T | F |
| T | F | F |
| T | T | T |

# PHÉP PHỦ ĐỊNH

- Phủ định mệnh đề X (ký hiệu $\bar{X}$ hoặc ¬ X) nhận giá trị sai khi X nhận giá trị đúng, ngược lại mệnh $\bar{X}$ nhận giá trị đúng khi X giá trị sai.
- Lập bảng chân trị?

| X | $\bar{X}$ (hoặc ¬ X) |
|---|---|
| F | T |
| T | F |

# PHÉP KÉO THEO

- Mệnh đề X kéo theo (suy ra) mệnh đề Y (ký hiệu $X \rightarrow Y$) là mệnh đề được định nghĩa như sau: $X \rightarrow Y$ nhận giá trị sai khi và chỉ khi mệnh đề X nhận giá trị đúng, Y nhận giá trị sai; $X \rightarrow Y$ nhận giá trị đúng trong các trường hợp còn lại.
- Lập bảng chân trị?

| X | Y | $X \rightarrow Y$ |
|---|---|---|
| F | F | T |
| F | T | T |
| T | F | F |
| T | T | T |

# PHÉP KÉO THEO HAI CHIỀU

- Mệnh đề X kéo theo hai chiều (tương đương) mệnh đề Y (ký hiệu X ↔ Y)?

là mệnh đề được định nghĩa như sau: X ↔ Y nhận giá trị đúng khi và chỉ khi mệnh đề X và Y cùng đúng hoặc cùng sai; X ↔ Y nhận giá trị sai trong các trường hợp còn lại.

- Lập bảng chân trị?

| X | Y | X ↔ Y |
|---|---|---|
| F | F | T |
| F | T | F |
| T | F | F |
| T | T | T |

# BIỂU THỨC LOGIC

- Định nghĩa:
  - Mỗi mệnh đề (ký hiệu X, Y, Z,…) là một biểu thức;
  - Nếu A là một biểu thức thì $\bar{A}$ cũng là một biểu thức;
  - Nếu A, B là một biểu thức thì $(A \vee B)$, $(A \wedge B)$, $(A \rightarrow B)$, $(A \leftrightarrow B)$ cũng là một biểu thức.
- Bảng chân trị: là bảng tính toán chân trị của biểu thức logic theo từng bộ giá trị của từng biến tham gia trong biểu thức.
- Ví dụ lập bảng chân trị của biểu thức $X \vee (Y \wedge Z)$?

# CHỨNG MINH HAI BIỂU THỨC TƯƠNG ĐƯƠNG

- Chứng minh hai biểu thức E và F tương đương → Chứng minh E và F cùng chân trị trong mọi trường hợp (chứng minh E↔F nhận giá trị đúng).
- Biểu thức hằng đúng: Biểu thức E được gọi là hằng đúng nếu E luôn nhận giá trị đúng (E ↔ 1);
- Biểu thức hằng sai: Biểu thức E được gọi là hằng sai nếu E luôn nhận giá trị sai (E ↔ 0).

# CÁC LUẬT LOGIC (1)

- Các luật về phép phủ định
  - $\neg\neg p \Leftrightarrow p$ (luật phủ định của phủ định)
  - $\neg 1 \Leftrightarrow 0$
  - $\neg 0 \Leftrightarrow 1$
- Luật giao hoán
  - $p \wedge q \Leftrightarrow q \wedge p$
  - $p \vee q \Leftrightarrow q \vee p$
- Luật kết hợp
  - $p \wedge (q \wedge r) \Leftrightarrow (p \wedge q) \wedge r$
  - $p \vee (q \vee r) \Leftrightarrow (p \vee q) \vee r$
- Luật phân bố
  - $p \wedge (q \vee r) \Leftrightarrow (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$
  - $p \vee (q \wedge r) \Leftrightarrow (p \vee q) \wedge (p \vee r)$
- Luật De Morgan
  - $\neg(p \wedge q) \Leftrightarrow \neg p \vee \neg q$
  - $\neg(p \vee q) \Leftrightarrow \neg p \wedge \neg q$

# CÁC LUẬT LOGIC (2)

- Luật về phần tử bù
  - $p \vee \neg p \Leftrightarrow 1$
  - $p \wedge \neg p \Leftrightarrow 0$
- Luật kéo theo
  - $p \rightarrow q \Leftrightarrow \neg p \vee q$
- Luật tương đương
  - $p \leftrightarrow q \Leftrightarrow (p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$
- Các luật đơn giản của phép tuyển
  - $p \vee p \Leftrightarrow p$ (tính lũy đẳng của phép tuyển)
  - $p \vee 1 \Leftrightarrow 1$ (luật này còn được gọi là luật thống trị)
  - $p \vee 0 \Leftrightarrow p$ (luật này còn được gọi là luật trung hòa)
  - $p \vee (p \wedge q) \Leftrightarrow p$ (luật này còn được gọi là luật hấp thụ)
- Các luật đơn giản của phép hội
  - $p \wedge p \Leftrightarrow p$ (tính lũy đẳng của phép hội)
  - $p \wedge 1 \Leftrightarrow p$ (luật này còn được gọi là luật trung hòa)
  - $p \wedge 0 \Leftrightarrow 0$ (luật này còn được gọi là luật thống trị)
  - $p \wedge (p \vee q) \Leftrightarrow p$ (luật này còn được gọi là luật hấp thụ)

# LUẬT ĐỐI NGẪU

Giả sử A là một biểu thức chỉ chứa các phép toán $\wedge$, $\vee$, $\neg$ và không chứa phép toán $\rightarrow$. Biểu thức A* được tạo bằng cách thay tất cả các phép toán $\vee$ thành $\wedge$ và thay tất cả các phép toán $\wedge$ thành $\vee$, khi đó A* được gọi là biểu thức đối ngẫu của biểu thức A.

Ví dụ: biểu thức $(X \vee Y) \wedge \neg Z$ và $(X \wedge Y) \vee \neg Z$ đối ngẫu nhau.

**Định lý**: $A^*(X_1, X_2,\ldots,X_n) \leftrightarrow \neg A(\neg X_1, \neg X_2,\ldots, \neg X_n)$

- *Nếu A là mệnh đề sơ cấp thì $\neg A(\neg X) \leftrightarrow \neg(\neg X) \leftrightarrow X$*
- *Giả sử đã chứng minh được cho các công thức $A^* \leftrightarrow \neg A(\neg X)$ và $B^* \leftrightarrow \neg B(\neg X)$, ta cần chứng minh định lý đúng cho các biểu thức $(A \vee B)$, $(A \wedge B)$, và $\neg A$*
- *$(A \vee B)^* \leftrightarrow (A^* \wedge B^*) \leftrightarrow \neg A(\neg X) \wedge \neg B(\neg X) \leftrightarrow \neg(A \vee B)(\neg X)$*

# LUẬT THAY THẾ

Giả sử A là một biểu thức chứa mệnh đề sơ cấp q, tạo biểu thức B bằng cách thay q bởi một biểu thức E nào đó ta có: $A \rightarrow B$

Ví dụ: A là biểu thức $((p\rightarrow q)\wedge p)\rightarrow q$, A là hằng đúng,

thay q bằng $(x\wedge y)$ ta được B:

$((p\rightarrow (x \wedge y))\wedge p)\rightarrow (x \wedge y)$

- Ví dụ 1: Chứng minh rằng $(p \to q) \Leftrightarrow (\neg q \to \neg p)$.

Ta có

$(p \to q)$

$\Leftrightarrow \neg p \vee q$ (luật kéo theo)

$\Leftrightarrow q \vee \neg p$ (luật giao hoán)

$\Leftrightarrow \neg(\neg q) \vee \neg p$ (luật phủ định)

$\Leftrightarrow \neg q \to \neg p$ (luật kéo theo)

- Ví dụ 2: Chứng minh rằng biểu thức

$$((p \to q) \wedge p) \to q$$

là một hằng đúng.

Luật kết luận

Ta có

$((p \to q) \wedge p) \to q$

$\Leftrightarrow \neg ((p \to q) \wedge p) \vee q$ (luật kéo theo)

$\Leftrightarrow (\neg (p \to q) \vee \neg p) \vee q$ (luật De Morgan)

$\Leftrightarrow \neg (p \to q) \vee (\neg p \vee q)$ (luật kết hợp)

$\Leftrightarrow \neg (p \to q) \vee (p \to q)$ (luật kéo theo)

$\Leftrightarrow 1$ (luật về phần tử bù)

Vậy biểu thức $((p \to q) \wedge p) \to q$ là hằng đúng.

- **Ví dụ 3: Chứng minh rằng biểu thức $p \wedge q \rightarrow p$ là một hằng đúng.**

**Ta có**

$p \wedge q \rightarrow p$

$\Leftrightarrow \neg (p \wedge q) \vee p$ **(luật kéo theo)**

$\Leftrightarrow (\neg p \vee \neg q) \vee p$ **(luật De Morgan)**

$\Leftrightarrow (\neg q \vee \neg p) \vee p$ **(luật giao hoán)**

$\Leftrightarrow \neg q \vee (\neg p \vee p)$ **(luật kết hợp)**

$\Leftrightarrow \neg q \vee 1$ **(luật về phần tử bù)**

$\Leftrightarrow 1$ **(luật đơn giản)**

**Vậy mệnh đề $p \wedge q \rightarrow p$ là hằng đúng.**

Chứng minh các biểu thức logic sau đây là hằng đúng bằng hai cách: lập bảng chân trị và dùng luật.

a/ $(p \vee q) \wedge (\neg p \vee q) \rightarrow q$

b/ $(p \wedge q) \rightarrow (p \vee q)$

c/ $(p \rightarrow q \wedge r) \rightarrow ((p \rightarrow q) \wedge (p \rightarrow r))$

d/ $\neg (p \wedge q) \wedge p \rightarrow \neg q$

e/ $((p \wedge q) \leftrightarrow p) \rightarrow (p \rightarrow q)$

# TUYỂN VÀ HỘI SƠ CẤP

- Tuyển các mệnh đề sơ cấp và phủ định của nó gọi là tuyển sơ cấp (TSC)
- Hội các mệnh đề sơ cấp và phủ định của nó gọi là hội sơ cấp (HSC)
- Điều kiện cần và đủ để một tuyển sơ cấp đồng nhất đúng là trong tuyển đó có chứa một mệnh đề sơ cấp đồng thời chứa cả phủ định của nó.

  Ví dụ: $X \vee \neg X \vee Y$ đồng nhất đúng

- Điều kiện cần và đủ để một hội sơ cấp đồng nhất sai là trong hội đó có chứa một mệnh đề sơ cấp đồng thời chứa cả phủ định của nó.

  Ví dụ: $X \wedge \neg X \wedge Y$ đồng nhất sai

# CHUẨN TẮC TUYỂN VÀ CHUẨN TẮC HỘI

Giả sử A là một biểu thức.

- Nếu A' $\leftrightarrow$ A mà A' là tuyển của các hội sơ cấp, tức là A' = $(HSC_1) \vee (HSC_2) \vee \ldots \vee (HSC_n)$ thì A' được gọi là dạng chuẩn tắc tuyển của A.
- Nếu A'' $\leftrightarrow$ A mà A'' là hội của các tuyển sơ cấp, tức là A'' = $(TSC_1) \wedge (TSC_2) \wedge \ldots \wedge (TSC_n)$ thì A'' được gọi là dạng chuẩn tắc hội của A.
- **Định lý: mọi biểu thức đều có dạng chuẩn tắc tuyển và chuẩn tắc hội**
- Điều kiện cần và đủ để biểu thức A đồng nhất đúng là trong dạng chuẩn tắc hội mỗi tuyển sơ cấp đều chứa mệnh đề sơ cấp và phủ định của nó.
- Điều kiện cần và đủ để biểu thức A đồng nhất sai là trong dạng chuẩn tắc tuyển mỗi hội sơ cấp đều chứa mệnh đề sơ cấp và phủ định của nó.

# THUẬT TOÁN NHẬN BIẾT HẰNG ĐÚNG

**Input**: Biểu thức A

**Output**: Dạng chuẩn tắc hội, A là hằng đúng?

**Thuật toán:**

*Bước 1*: Khử phép toán kéo theo ($\rightarrow$) trong A bằng cách áp dụng $X \rightarrow Y \leftrightarrow \neg X \vee Y$

*Bước 2*: Đưa phép toán phủ định về trực tiếp liên quan đến từng mệnh đề sơ cấp bằng cách áp dụng $\neg(A \vee B) \leftrightarrow (\neg A \wedge \neg B)$ hoặc $\neg(A \wedge B) \leftrightarrow (\neg A \vee \neg B)$

*Bước 3*: Đưa về dạng chuẩn tắc hội bằng cách áp dụng $X \vee (Y \wedge Z) \leftrightarrow (X \vee Y) \wedge (X \vee Z)$

*Bước 4*: Kiểm tra điều kiện và kết luận

Nếu mỗi tuyển sơ cấp đều chứa mệnh đề sơ cấp và phủ định của nó → Hằng đúng

# THUẬT TOÁN NHẬN BIẾT HẰNG SAI

Input: Biểu thức A

Output: Dạng chuẩn tắc tuyển của A, A là hằng sai?

Thuật toán

Bước 1: Khử phép toán kéo theo ($\rightarrow$) trong A bằng cách áp dụng $X \rightarrow Y \leftrightarrow \neg X \vee Y$

Bước 2: Đưa phép toán phủ định về trực tiếp liên quan đến từng mệnh đề sơ cấp bằng cách áp dụng $\neg(A \vee B) \leftrightarrow (\neg A \wedge \neg B)$ hoặc $\neg(A \wedge B) \leftrightarrow (\neg A \vee \neg B)$

Bước 3: Đưa về dạng chuẩn tắc tuyển bằng cách áp dụng $X \wedge (Y \vee Z) \leftrightarrow (X \wedge Y) \vee (X \wedge Z)$

Bước 4: Kiểm tra điều kiện và kết luận

Nếu mỗi hội sơ cấp đều chứa mệnh đề sơ cấp và phủ định của nó → Hằng sai

- Ví dụ 1: Chứng minh rằng $(p \rightarrow q) \Leftrightarrow (\neg q \rightarrow \neg p)$.

**Input**: Biểu thức A

**Output**: Dạng chuẩn tắc hội, A là hằng đúng?

**Thuật toán:**

***Bước 1***: Khử phép toán kéo theo ($\rightarrow$) trong A bằng cách áp dụng $X\rightarrow Y \leftrightarrow \neg X\vee Y$

***Bước 2***: Đưa phép toán phủ định về trực tiếp liên quan đến từng mệnh đề sơ cấp bằng cách áp dụng $\neg(A \vee B) \leftrightarrow (\neg A \wedge \neg B)$ hoặc $\neg(A \wedge B) \leftrightarrow (\neg A \vee \neg B)$

***Bước 3***: Đưa về dạng chuẩn tắc hội bằng cách áp dụng $X\vee(Y\wedge Z) \leftrightarrow (X\vee Y)\wedge(X\vee Z)$

***Bước 4***: Kiểm tra điều kiện và kết luận

Nếu mỗi tuyển sơ cấp đều chứa mệnh đề sơ cấp và phủ định của nó → Hằng đúng

- Ví dụ 2: Chứng minh rằng biểu thức

$$((p \to q) \land p) \to q$$

là một hằng đúng.

Luật kết luận

**Input**: Biểu thức A

**Output**: Dạng chuẩn tắc hội, A là hằng đúng?

**Thuật toán:**

***Bước 1***: Khử phép toán kéo theo ($\to$) trong A bằng cách áp dụng $X \to Y \leftrightarrow \neg X \lor Y$

***Bước 2***: Đưa phép toán phủ định về trực tiếp liên quan đến từng mệnh đề sơ cấp bằng cách áp dụng $\neg(A \lor B) \leftrightarrow (\neg A \land \neg B)$ hoặc $\neg(A \land B) \leftrightarrow (\neg A \lor \neg B)$

***Bước 3***: Đưa về dạng chuẩn tắc hội bằng cách áp dụng $X \lor (Y \land Z) \leftrightarrow (X \lor Y) \land (X \lor Z)$

***Bước 4***: Kiểm tra điều kiện và kết luận

Nếu mỗi tuyển sơ cấp đều chứa mệnh đề sơ cấp và phủ định của nó → Hằng đúng

# CÁC QUY TẮC SUY DIỄN TRONG LOGIC MỆNH ĐỀ

- Trong hệ thống toán học bao gồm các tiên đề (được giả định là đúng), ta có thể suy ra được các định lý (một định lý là một khẳng định được chứng minh là đúng).
- Logic là một công cụ phục vụ cho việc phân tích các chứng minh.
- Một chứng minh bao gồm nhiều bước suy luận mà ở mỗi bước ta đi đến (hay suy ra) một khẳng định mới từ những khẳng định đã biết.
- Trong toán học, ta thường gặp dạng suy diễn sau: nếu $A_1$ và $A_2$ và … và $A_n$ thì B. Dạng suy luận này là hợp lý (chấp nhận là đúng) khi $(A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_n) \rightarrow B$ là hằng đúng [$A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_n$ là giả thiết (tiên đề), B là kết luận (hệ quả logic của giả thiết)].

Mô hình suy diễn của công thức $(A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_n) \rightarrow B$ viết dưới

$$\begin{array}{l} A_1 \\ A_2 \\ \vdots \\ \underline{A_n} \\ \therefore B \end{array}$$

dạng (đọc là: Nếu $A_1$ đúng, $A_2$ đúng, ..., $A_n$ đúng thì B đúng).

### *1. Quy tắc suy diễn rút gọn (Rg)*

Cơ sở của quy tắc suy diễn rút gọn là hằng đúng: $(A \wedge B) \rightarrow A$.

Mô hình suy diễn của công thức này viết dưới dạng:

$$\begin{array}{c} A \\ B \\ \hline \therefore A \end{array}$$

Ký hiệu trên vạch là *giả thiết*, ký hiệu dưới vạch là *kết luận*, còn ký hiệu $\therefore$ có nghĩa là *thì*. Đọc: "Nếu A đúng và B đúng thì A đúng".

### *2. Quy tắc suy diễn cộng (Cg)*

Cơ sở của quy tắc suy diễn là hằng đúng: $A \rightarrow (A \vee B)$.

Mô hình suy diễn của công thức này là:

$$\begin{array}{c} A \\ \hline \therefore A \vee B \end{array}$$

***3. Quy tắc suy diễn khẳng định (Kđ)***

Cơ sở của quy tắc suy diễn khẳng định là hằng đúng: $(A \wedge (A \rightarrow B)) \rightarrow B$.

Mô hình suy diễn của công thức này là:

$$\begin{array}{l} A \\ \underline{A \rightarrow B} \\ \therefore B \end{array}$$

***4. Quy tắc suy diễn phủ định (Pđ)***

Cơ sở của quy tắc suy diễn này là hằng đúng: $\left((A \rightarrow B) \wedge \overline{B}\right) \rightarrow \overline{A}$.

Mô hình suy diễn của công thức này là:

$$\begin{array}{l} A \rightarrow B \\ \underline{\overline{B}\qquad\quad} \\ \therefore \ \overline{A} \end{array}$$

### *5. Quy tắc suy diễn tam đoạn luận (Tđl)*

Cơ sở của quy tắc suy diễn tam đoạn luận là hằng đúng:

$$((A \to B) \land (B \to C)) \to (A \to C).$$

Mô hình suy diễn của công thức này là:

$$\begin{array}{l} A \to B \\ B \to C \\ \hline \therefore\ A \to C \end{array}$$

### *6. Quy tắc suy diễn tam đoạn luận rời (Tđlr)*

Cơ sở của quy tắc tam đoạn luận rời là hằng đúng: $\left((A \lor B) \land \overline{A}\right) \to B$.

Mô hình suy diễn của công thức này là:

$$\begin{array}{l} A \lor B \\ \overline{A} \\ \hline \therefore\ B \end{array}$$

# 7. QUY TẮC SUY DIỄN MÂU THUẪN

$$(A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_n) \to B \equiv (A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_n \wedge \overline{B}) \to 0$$

Mô hình suy diễn của công thức này là:

$$\begin{array}{l} A_1 \\ A_2 \\ \vdots \\ A_n \\ \hline \therefore B \end{array} \equiv \begin{array}{l} A_1 \\ A_2 \\ \vdots \\ A_n \\ \overline{B} \\ \hline \therefore 0 \end{array}$$

Công thức này có nghĩa là: Nếu ta thêm vào giả thiết ban đầu giả thiết phụ $\overline{B}$ mà dẫn tới mâu thuẫn thì B là hệ quả lôgic của các giả thiết ban đầu.

### *8. Quy tắc suy diễn theo trường hợp (Th)*

Cơ sở của quy tắc suy diễn này là hằng đúng:

$$((A \to C) \land (B \to C)) \to ((A \lor B) \to C).$$

Mô hình suy diễn của công thức này là:

$$\begin{array}{c} A \to C \\ B \to C \\ \hline \therefore (A \lor B) \to C \end{array}$$

Công thức này có nghĩa là: Nếu một giả thiết có thể tách làm hai trường hợp A đúng hay B đúng, và ta đã chứng minh được riêng rẽ cho từng trường hợp là kết luận C đúng thì C cũng đúng trong cả hai trường hợp.

"Bình đi chơi thì Bình không học toán rời rạc. Bình không học toán rời rạc thì Bình thi trượt toán rời rạc. Mà Bình thích đi chơi. Vậy Bình thi trượt toán rời rạc."

Đặt $X_1$: Bình đi chơi;

$X_2$: Bình không học toán rời rạc;

$X_3$: Bình thi trượt toán rời rạc.

Đoạn văn trên có thể viết dưới dạng mô hình suy diễn sau đây:

$$\frac{\begin{cases} X_1 \to X_2 \\ X_2 \to X_3 \end{cases} \\ X_1}{\therefore X_3} \text{(Tđl)} \equiv \frac{\begin{cases} X_1 \to X_3 \\ X_1 \end{cases}}{\therefore X_3} \equiv \frac{X_3}{\therefore X_3} \equiv 1$$

"Nếu được thưởng cuối năm An sẽ đi Đà Lạt. Nếu đi Đà Lạt thì An sẽ thăm Thiền Viện. Mà An không thăm Thiền Viện. Vậy An không được thưởng cuối năm."

Suy luận của đoạn văn trên có đúng không?

Đặt $X_1$: An được thưởng cuối năm;

$X_2$: An sẽ đi Đà Lạt;

$X_3$: An sẽ thăm Thiền Viện.

Đoạn văn trên tương đương với mô hình suy diễn dưới đây:

$$\begin{array}{l} X_1 \to X_2 \\ \begin{cases} X_2 \to X_3 \\ \overline{X_3} \end{cases} \\ \hline \therefore \overline{X_1} \end{array} \text{ (Pd)} \equiv \begin{array}{l} X_1 \to X_2 \\ \overline{X_2} \\ \hline \therefore \overline{X_1} \end{array} \text{ (Pd)} \equiv \begin{array}{l} \overline{X_1} \\ \hline \therefore \overline{X_1} \end{array} \equiv 1$$

$\left((A \to B) \land (B \to C) \land (D \lor \overline{C}) \land (\overline{D} \lor E) \land \overline{E}\right) \to \overline{A}$ hằng đúng.

*Giải:* Thay $D \lor \overline{C} \equiv C \to D$ và $\overline{D} \lor E \equiv D \to E$.

Công thức trên có mô hình suy diễn là:

$$\left\{\begin{array}{l} A \to B \\ B \to C \\ C \to D \\ D \to E \end{array}\right. \qquad\qquad A \to E$$

$$\frac{\overline{E}}{\therefore\ \overline{A}}(\text{Tđl}) \equiv \frac{\overline{E}}{\therefore\ \overline{A}}(\text{Pđ}) \equiv \frac{\overline{A}}{\therefore\ \overline{A}} \equiv 1$$

Chứng minh công thức sau hằng đúng

$$\left((X_1 \to X_2) \wedge (\overline{X}_3 \vee X_4) \wedge (X_1 \vee X_3)\right) \to (\overline{X}_2 \to X_4)$$ bằng cách:

a) Lập bảng.

b) Đưa công thức về DCTH.

c) Dùng quy tắc suy diễn.

# LOGIC VỊ TỪ

- Giả sử Ω là một tập hợp các phần tử (Ω thường gọi là trường hay không gian), xét các mệnh đề trên trường Ω:
  - Mệnh đề gồm một phần tử nói lên tính chất của phần tử đó;
  - Mệnh đề gồm hai phần tử tham gia nói lên quan hệ giữa hai phần tử;
  - Ví dụ: Ω = {1, 2, 3,…,}, mệnh đề "Số 3 là số nguyên tố", "Số 2 lớn hơn số 3"
- Biểu thức P(x) gọi là vị từ xác định trên trường Ω, nếu khi thay x bởi phần tử bất kỳ của trường Ω thì P(x) sẽ trở thành mệnh đề xác định trên trường Ω.
- Như vậy, P(x) có thể xem như một ánh xạ (hay một hàm) xác định trên trường Ω và nhận giá trị trong tập {đúng, sai}. Loại vị từ này gọi là vị từ một ngôi, nói lên tính chất của một phần tử thuộc Ω.
- Logic vị từ có thể mô tả được tập hợp rộng so với logic mệnh đề.

# VỊ TỪ NHIỀU NGÔI

Để nói lên quan hệ giữa các phần tử của trường $\Omega$, người ta cần đưa vào vị từ nhiều ngôi.

Biểu thức $P(x_1, x_2,\ldots,x_n)$ gọi là vị từ xác định trên tập $\Omega^n= \Omega_1\times \Omega_2\times\ldots\times\Omega_n$, nếu thay $x_i$ bởi phần tử bất kỳ của trường $\Omega_i$ thì ta được mệnh đề xác định trên $\Omega^n$ . Khi đó $P(x_1, x_2,\ldots,x_n)$ gọi là vị từ n ngôi.

Các vị từ thường được ký hiệu bởi chữ P, F, Q, R (có thể có chỉ số đi kèm), cũng gọi là biến vị từ.

Các mệnh đề thường được ký hiệu bởi chữ X, Y, Z (có thể có chỉ số đi kèm), cũng gọi là biến mệnh đề.

# CÔNG THỨC

1) Mỗi một biến mệnh đề hoặc biến vị từ là một công thức;

2) Nếu A, B là công thức thì $(A \vee B)$, $(A \wedge B)$, $(A \rightarrow B)$, $\neg A$ cũng là công thức;

3) Nếu A là công thức thì $(\forall x)A$ hoặc $(\exists x)A$ cũng là công thức.

$(\forall x)A$ là một mệnh đề, mệnh đề này đúng khi A đúng với mọi phần tử của trường $\Omega$; $(\exists x)A$ là một mệnh đề, mệnh đề này đúng nếu có một phần tử của trường $\Omega$ mà A đúng; $(\forall x)$, $(\exists x)$ gọi là lượng từ;

$(\forall x)A$ hoặc $(\exists x)A$ chứa biến x và có thể chứa thêm một số biến khác không nằm dưới dấu $\forall, \exists$ thì x gọi là biến ràng buộc, các biến khác gọi là biến tự do.

Ví dụ với công thức $(\forall x)A(x) \rightarrow F(x)$ hoặc công thức $(\exists x)A(x) \vee F(x)$, khi đó x có mặt trong A gọi là biến ràng buộc, x trong F gọi là biến độc lập;

Cho $P(x)$ là câu "x học ở lớp hơn 5 giờ mỗi ngày trong tuần", ở đây không gian là tập hợp các sinh viên. Hãy diễn đạt các lượng từ sau thành câu thông thường :

a) $\exists x \; P(x)$

b) $\forall x \; P(x)$

c) $\exists x \; \neg P(x)$

d) $\forall x \; \neg P(x)$

# BẢNG LƯỢNG TỪ 2 BIẾN

| MỆNH ĐỀ | KHI NÀO ĐÚNG? | KHI NÀO SAI ? |
|---|---|---|
| $\forall x \forall y\ P(x,y)$<br>$\forall y \forall x\ P(x,y)$ | $P(x,y)$ đúng với mọi cặp $(x,y)$ | Có một cặp $(x,y)$ đối với nó $P(x,y)$ là sai |
| $\forall x \exists y\ P(x,y)$ | Với mọi x, có một $y$ sao cho $P(x,y)$ là đúng | Có một $x$ sao cho $P(x,y)$ là sai với mọi $y$ |
| $\exists x \forall y\ P(x,y)$ | Có một x sao cho $P(x,y)$ đúng với mọi $y$ | Với mọi x có một $y$ sao cho $P(x,y)$ là sai |
| $\exists x \exists y\ P(x,y)$<br>$\exists y \exists x\ P(x,y)$ | Có một cặp (x, y) sao cho $P(x,y)$ là đúng | $P(x,y)$ là sai đối với mọi cặp $(x,y)$ |

Cho $P(x,y)$ là câu "$x$ đã học môn $y$", với không gian của $x$ là tập hợp tất cả sinh viên trong lớp bạn, và không gian của $y$ là tập hợp tất cả các môn tin học ở trường bạn. Hãy diễn đạt các lượng từ sau thành câu thông thường :

a) $\exists x \; \exists y \; P(x,y)$,

b) $\exists x \; \forall y \; P(x,y)$

c) $\forall x \; \exists y \; P(x,y)$,

d) $\exists y \; \forall x \; P(x,y)$

e) $\forall y \; \exists x \; P(x,y)$,

f) $\forall x \; \forall y \; P(x,y)$.

# LOGIC MỆNH ĐỀ VÀ LOGIC VỊ TỪ

- Logic vị từ rộng hơn logic mệnh đề, nếu A là biểu thức logic đúng trong logic mệnh đề thì nó cũng là công thức đúng trong logic vị từ. Mọi đồng nhất đúng trong logic mệnh đề cũng đồng nhất đúng trong logic vị từ.
- Ví dụ, các công thức sau vẫn đúng trong logic vị từ: $A \rightarrow B \leftrightarrow \neg A \vee B$; $\neg(A \wedge B) \leftrightarrow (\neg A \vee \neg B)$; …
- Ngoài ra trong logic vị từ: $\overline{(\forall x)A} \leftrightarrow (\exists x)\bar{A}$; $\overline{(\exists x)A} \leftrightarrow (\forall x)\bar{A}$

- Ví dụ 1: P(x) là câu "$x+1 > x$" và không gian là tập hợp các số thực.

  Vì $x+1 > x$ với mọi số thực nên $\forall x\, P(x) \leftrightarrow 1$

- Ví dụ 2: Xác định giá trị của $\forall x\, P(x)$, với P(x) là câu "$x^2 < 10$" và không gian bao gồm các số nguyên dương không vượt quá 4.

  $\forall x\, P(x) \leftrightarrow P(1) \wedge P(2) \wedge P(3) \wedge P(4) \leftrightarrow 0$

- Ví dụ 3: P(x) là câu "$x > 3$" và không gian là tập hợp các số thực.

  Vì P(4) đúng nên $\exists x\, P(x) \leftrightarrow 1$

- Ví dụ 4: Xác định giá trị của $\exists\, x\, P(x)$, với P(x) là câu "$x^2 > 10$" và không gian bao gồm các số nguyên dương không vượt quá 4.

  $\exists\, x\, P(x) \leftrightarrow P(1) \vee P(2) \vee P(3) \vee P(4) \leftrightarrow 1$

# DỊCH CÁC CÂU THÀNH BIỂU THỨC LOGIC (1)

- Mọi người đều có chính xác một người bạn tốt nhất

  B(x,y) là câu "y là bạn tốt nhất của x"

  $\forall \boldsymbol{x}\ \exists \boldsymbol{y}\ \forall \boldsymbol{z}\ [\boldsymbol{B}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) \wedge \left((\boldsymbol{z} \neq \boldsymbol{y}) \rightarrow \neg \boldsymbol{B}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{z})\right)]$

- Nếu một người nào đó là phụ nữ và đã sinh đẻ, thì người đó sẽ là mẹ của một người nào đó"

  F(x) là câu "x là phụ nữ"; P(x) là câu "x đã sinh đẻ";

  M(x,y) là câu "x là mẹ của y"

  $\forall x\ (F(x) \wedge P(x) \rightarrow \exists y M(x,y))$

# DỊCH CÁC CÂU THÀNH BIỂU THỨC LOGIC (2)

Tất cả sư tử đều hung dữ;

Một số sư tử không uống cafe;

Một số sinh vật hung dữ không uống cafe

P(x) là câu "x là sư tử"; Q(x) là câu "x hung dữ"; R(x) là câu "x uống café";

$\forall x\left(P(x) \rightarrow Q(x)\right)$

$\exists x(P(x) \land \neg R(x))$ $\cancel{\exists x(P(x) \rightarrow \neg R(x))}$

$\exists x(Q(x) \land \neg R(x))$ $\cancel{\exists x(Q(x) \rightarrow \neg R(x))}$

# DỊCH CÁC CÂU THÀNH BIỂU THỨC LOGIC (3)

"Tất cả chim ruồi đều có màu sặc sỡ"

"Không có con chim lớn nào sống bằng mật ong"

"Các chim không sống bằng mật ong đều có màu xám"

"Chim ruồi là nhỏ"

P(x): "x là chim ruồi"; Q(x): "x là lớn";

R(x): "x sống bằng mật ong"; S(x): "x có màu sặc sỡ"

$\forall x \left(P(x) \rightarrow S(x)\right)$

$\neg\exists x(Q(x) \land R(x))$

$\forall x(\neg R(x) \rightarrow \neg S(x))$

$\forall x(P(x) \rightarrow \neg Q(x))$

a) Mọi người đều yêu Jerry

b) Mọi người đều yêu một ai đó.

c) Có một người mà tất cả mọi người đều yêu.

d) Không có ai yêu tất cả mọi người.

e) Có một người mà Lydia không yêu.

f) Có một người mà không ai yêu.

g) Có đúng một người mà tất cả mọi người đều yêu.

h) Có đúng hai người mà Lynn yêu.

i) Mọi người đều yêu chính mình.

f) Có một người nào đó không yêu ai ngoài chính mình.

a) $\forall x L(x, \text{Jerry})$

b) $\forall x \exists y\, L(x, y)$

c) $\exists y\ \forall x L(x,y)$

d) $\forall x\ \exists y\ L(x,y)$

e) $\exists x \neg L(\text{Lydia}, x)$

f) $\exists x\ \forall y \neg\ L(x,y)$

g) $\exists x(\forall y L(y,x)\ \wedge\ \forall z\ ((\forall w L(w, z)) \rightarrow z = x))$

h) $\exists x \exists y(x \neq y\ \wedge\ L(\text{Lynn}, x)\ \wedge\ L(\text{Lynn}, y)\ \wedge\ \forall z(L(\text{Lynn}, z)$
$\rightarrow\ (z = x \vee z = y)))$

i) $\forall x\ L(x,x)$

j) $\exists x\ \forall y\ (L(x,y) \rightarrow\ x = y)$.

# MỘT SỐ QUY TẮC SUY DIỄN TRONG LOGIC VỊ TỪ (1)

- ***Quy tắc thay đổi thứ tự lượng từ hoá hai biến***

$$(\forall x)(\forall y)\ P(x, y) \equiv (\forall y)(\forall x)\ P(x, y)$$

$$(\exists x)(\exists y)\ P(x, y) \equiv (\exists y)(\exists x)\ P(x, y)$$

- ***Quy tắc đặc biệt hoá phổ dụng***

Giả sử một mệnh đề có lượng từ, trong đó biến x với miền xác định $\mathcal{M}$ bị ràng buộc bởi lượng từ phổ dụng ($\forall$) và mệnh đề là đúng. Khi đó nếu thay x bởi $a \in \mathcal{M}$ thì ta được mệnh đề đúng.

- ***Quy tắc tổng quát hoá phổ dụng***

Cho mệnh đề lượng từ hoá $(\forall x)\ P(x)$ trên trường $\mathcal{M}$. Nếu ta lấy $x = a$ là phần tử bất kỳ trong $\mathcal{M}$ mà P(a) đúng thì mệnh đề lượng từ hoá $(\forall x)\ P(x)$ là mệnh đề đúng.

# MỘT SỐ QUY TẮC SUY DIỄN TRONG LOGIC VỊ TỪ (2)

Cho P(x), Q(x) là các vị từ theo biến x trên trường $\mathcal{M}$ nào đó, a là một phần tử cố định tuỳ ý thuộc $\mathcal{M}$. Khi đó ta có mô hình suy diễn:

$$\begin{array}{l} (\forall x)(P(x) \rightarrow Q(x)) \\ P(a) \\ \hline \therefore\ Q(a) \end{array}$$

Cho P(x), Q(x) và R(x) là các vị từ theo biến x trên trường $\mathcal{M}$.
Ta có mô hình suy diễn:

$$\begin{array}{l} (\forall x)\ (P(x) \rightarrow Q(x)) \\ (\forall x)\ (Q(x) \rightarrow R(x)) \\ \hline \therefore\ (\forall x)\ (P(x) \rightarrow R(x)) \end{array}$$

# MỘT SỐ QUY TẮC SUY DIỄN TRONG LOGIC VỊ TỪ (3)

$$\frac{(\forall x)P(x)}{\therefore\ P(a)} \equiv \frac{(\forall x)P(x)}{\therefore\ (\exists x)\ P(x)}$$ (a $\in \mathcal{M}$ là phần tử cho trước bất kỳ).

P(x) là vị từ xác định trên $X = X_1 \cup X_2 \cup \ldots \cup X_n$

$$\frac{(\forall x \in X_1)P(x),\ (\forall x \in X_2)P(x),\ \ldots,\ (\forall x \in X_n)P(x)}{\therefore\ (\forall x \in X)P(x)}$$

"Mọi sinh viên CNTT đều học môn Toán rời rạc. Minh là sinh viên CNTT. Vậy Minh học môn Toán rời rạc."

Chỉ ra suy luận trên là đúng.

*Giải:* Đặt $P(x)$ = "x là sinh viên Tin học";

$Q(x)$ = "x học môn Toán rời rạc"

là hai vị từ một biến trên trường sinh viên $\mathcal{M}$.

Mô hình suy diễn của công thức trên có dạng:

$$\frac{\begin{array}{l}(\forall x)(P(x) \rightarrow Q(x)) \\ P(a)\end{array}}{\therefore\ Q(a)}$$

# Chứng minh tồn tại

✦ $P(x)$ là một vị từ, cần chứng minh $\exists x P(x)$

- Chứng minh kiến thiết
  - ✳ Tìm một ví dụ $a$ sao cho $P(a)$ đúng
- Chứng minh không kiến thiết
  - ✳ Chứng minh phản chứng: $\neg \exists x P(x)$ dẫn đến mâu thuẫn

# Chứng minh với mọi

- *P(x)* là một vị từ, chứng minh $\forall x P(x)$
  - Chứng minh bằng các trường hợp
    - Cần chứng minh *P(x)* đúng với mọi ví dụ
    - Có thể rất khó khăn
      - Chia ví dụ thành các nhóm và chứng minh cho từng nhóm có thể là một chiến lược tốt
  - Chứng minh quy nạp (cho một số trường hợp nhất định)

# Chứng minh quy nạp

- Các định lý có dạng: *P(n)* là một hàm mệnh đề, chứng minh $\forall n P(n)$
- Chứng minh quy nạp gồm 2 bước (Nguyên lý 1):
  - **Bước cơ sở**: Chứng minh P(1) là đúng.
  - **Bước quy nạp**: Chứng minh $P(n) \rightarrow P(n+1)$ là đúng $\forall n$
- Hoặc:
  - Bước cơ sở: Chứng minh P(1) đúng
  - Bước quy nạp: $(P(1) \wedge \ldots \wedge P(n)) \rightarrow P(n+1)$ là đúng $\forall n$

# Ví dụ chứng minh quy nạp

**Ví dụ:** Tổng $n$ số nguyên dương lẻ đầu tiên là $n^2$.

**Chứng minh:**

1. Bước cơ sở: $n = 1$. Rõ ràng $P(1)$ là đúng.
2. Bước quy nạp: Giả thiết quy nạp $P(n)$ là đúng,

$$1 + 3 + \ldots + (2n - 1) = n^2.$$

Khi đó

$$1 + 3 + \ldots + (2n - 1) + (2n + 1) = n^2 + (2n + 1) = (n + 1)^2$$

Nói cách khác $P(n + 1)$ là đúng nếu $P(n)$ đúng.

# Ví dụ chứng minh quy nạp

**Ví dụ:** $\sum_{k=1}^{n} k2^k = (n-1)2^{n+1} + 2.$

**Chứng minh:**

1. **Bước cơ sở:**

$$\sum_{k=1}^{1} k2^k = 2 = (1-1)2^2 + 2$$

2. **Bước quy nạp: Giả thiết quy nạp**

$$\sum_{k=1}^{n} k2^k = (n-1)2^{n+1} + 2.$$

   **Khi đó,**

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n+1} k2^k &= (n-1)2^{n+1} + 2 + (n+1)2^{n+1} \\ &= (n-1+n+1)2^{n+1} + 2 \\ &= n2^{n+2} + 2\end{aligned}$$

Chứng minh rằng $(p \rightarrow q) \rightarrow r$ và $p \rightarrow (q \rightarrow r)$ là không tương đương.

Các mệnh đề đó không tương đương lôgic vì khi p, q và r đều sai thì $(p \rightarrow q) \rightarrow r$ là sai, nhưng $p \rightarrow (q \rightarrow r)$ là đúng.

Chứng minh rằng $\neg p \leftrightarrow q$ và $p \leftrightarrow \neg q$ là tương đương.

Mệnh đề $\neg p \leftrightarrow q$ là đúng khi $\neg p$ và q cùng giá trị chân lý, mà điều này có nghĩa là p và q có giá trị chân lý khác nhau. Tương tự, $p \leftrightarrow \neg p$ đúng chỉ trong các trường hợp như trên. Do đó, hai biểu thức trên là tương đương lôgic.

Chứng minh rằng $\neg(p \leftrightarrow q)$ và $\neg p \leftrightarrow q$ là tương đương.

Mệnh đề $\neg(p \leftrightarrow q)$ đúng khi $p \leftrightarrow q$ là sai, mà điều này có nghĩa là p và q có các giá trị chân lý khác nhau. Vì điều này cũng xảy ra y như thế khi $\neg(p \leftrightarrow q)$ là đúng, Vậy hai biểu thức trên là tương đương lôgic.

Chứng tỏ rằng các câu $\neg\exists x\ \forall y\ P(x,y)$ và $\forall x\ \exists y\ \neg P(x,y)$ có cùng giá trị chân lý.

$$\neg(\exists x \forall y P(x,y)) \leftrightarrow \forall x\ (\neg \forall y P(x,y)) \leftrightarrow \forall x\ \exists y \neg P(x,y).$$

Xác lập các tương đương logic sau, trong đó $A$ là mệnh đề không có liên quan với lượng từ nào :

a) $(\forall x\ P(x)) \wedge A \Leftrightarrow \forall x\ (P(x) \wedge A)$

b) $(\exists x\ P(x)) \wedge A \Leftrightarrow \exists x\ (P(x) \wedge A)$

a) Nếu $A$ đúng, thì cả hai vế đều tương đương logic với $\forall x P(x)$. Nếu $A$ sai, vế trái hiển nhiên là sai. Hơn nữa, với mọi $x$ $P(x) \wedge A$ là sai, do đó vế phải cũng là sai. Do đó hai vế là tương đương logic.

b) Nếu $A$ đúng, thì cả hai vế đều tương đương logic với $\exists x P(x)$. Nếu $A$ sai, vế trái hiển nhiên là sai. Hơn nữa, với mọi $x$, $P(x) \wedge A$ là sai, do đó $\exists x\ (P(x) \wedge A)$ là sai. Do đó, hai vế là tương đương logic.

Suy luận dưới đây có đúng không?

$$\begin{array}{l} (\overline{X}_1 \vee X_2) \to X_3 \\ X_3 \to (X_4 \vee X_5) \\ \overline{X}_4 \wedge \overline{X}_6 \\ \overline{X}_6 \to \overline{X}_5 \\ \hline \therefore\ X_1 \end{array}$$

$$\begin{cases} (\overline{X}_1 \vee X_2) \to X_3 \\ X_3 \to (X_4 \vee X_5) \end{cases} \qquad \begin{array}{l} (\overline{X}_1 \vee X_2) \to (X_4 \vee X_5) \\ \overline{X}_4 \end{array}$$

$$\frac{\begin{array}{l} \overline{X}_4 \wedge \overline{X}_6 \\ \overline{X}_6 \to \overline{X}_5 \end{array}}{\therefore\ X_1} \equiv (\text{Tđl}) \frac{\begin{cases} \overline{X}_6 \\ \overline{X}_6 \to \overline{X}_5 \end{cases}}{\therefore\ X_1} (\text{Kđ})$$

$$\frac{\begin{cases} (\overline{X}_1 \vee X_2) \to (X_4 \vee X_5) \\ \overline{X}_4 \wedge \overline{X}_5 \equiv \overline{X_4 \vee X_5} \end{cases}}{\therefore\ X_1} (\text{Pđ}) \equiv \frac{\overline{\overline{X}_1 \vee X_2}}{\therefore\ X_1} \equiv \frac{X_1 \wedge \overline{X}_2}{\therefore\ X_1} \equiv \mathbf{1}\,.$$

Mô hình suy diễn dưới đây trên trường $\mathcal{M}$ có đúng không?

$$\begin{array}{l} (\forall x)\,(P(x) \to (Q(x) \wedge R(x))) \\ \underline{(\forall x)\,(P(x) \wedge F(x))\qquad\qquad\qquad} \\ \therefore\ (\forall x)\,(R(x) \wedge F(x)) \end{array}$$

*Giải:* Lấy a là phần tử cố định bất kỳ trong $\mathcal{M}$, thay x = a ta được mô hình suy diễn trong lôgic mệnh đề là

$$\frac{\begin{array}{l} P(a) \to (Q(a) \wedge R(a)) \\ P(a) \wedge F(a) \end{array}}{\therefore\ R(a) \wedge F(a)} \equiv \frac{\begin{cases} P(a) \to (Q(a) \wedge R(a)) \\ P(a) \end{cases} \\ F(a)}{\therefore\ R(a) \wedge F(a)} (\text{Kđ})$$

$$\equiv \frac{\begin{array}{l} Q(a) \wedge R(a) \\ F(a) \end{array}}{\therefore\ R(a) \wedge F(a)} \equiv \frac{Q(a) \wedge R(a) \wedge F(a)}{\therefore\ R(a) \wedge F(a)} (\text{Rg}) \equiv 1.$$

Cho $P(x)$, $Q(x)$, $R(x)$ và $S(x)$ tương ứng là các câu "x là một đứa bé". "x là logic", "x có khả năng cai quản một con cá sấu" và "x bị coi thường". Giả sử rằng không gian là tập hợp tất cả mọi người. Hãy dùng các lượng từ, các liên từ logic cùng với $P(x)$, $Q(x)$, $R(x)$ và $S(x)$ để diễn đạt các câu sau :

a) Những đứa bé là không logic. a) $\forall x\,(P(x) \rightarrow \neg Q(x))$

b) Không ai bị coi thường nếu cai quản được b) $\forall x\,(R(x) \rightarrow \neg S(x))$

c) Những người không logic bị coi thường. c) $\forall x\,(\neg Q(x) \rightarrow S(x))$

d) Những đứa bé không cai quản được cá sấu. d) $\forall x\,(P(x) \rightarrow \neg R(x))$

*e) (d) có suy ra được từ (a), (b) và (c) không?

e) Suy được. Giả sử $x$ là một đứa bé. Khi đó, theo tiền đề thứ nhất $x$ là không logic, do đó theo tiền đề thứ ba $x$ bị coi thường. Tiền đề thứ hai nói rằng nếu $x$ cai quản được cá sấu, thì $x$ không bị coi thường. Do đó, $x$ không cai quản được cá sấu.

# CHỨNG MINH

$$1^2 + 2^2 + \ldots + n^2 = \frac{n.(n+1).(2n+1)}{6}$$

Tính tổng $T = \frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + ... + \frac{1}{n(n+1)}$

Biểu thức logic sau có là hằng đúng không?

$((p \to ((x \vee y) \wedge z)) \wedge p) \to ((x \vee y) \wedge z)$