Bài tập giải tích 1 có đáp án

giải tích (Đại học Giao thông Vận tải)

BÀI TẬP GIẢI TÍCH A1

Ts. Lê Xuân Đại

Ngày 7 tháng 7 năm 2011

Mục lục

Chương 1

GIỚI HẠN CỦA DÃY SỐ

1.1 Khái niệm dãy số

1.1.1 Định nghĩa dãy số

Định nghĩa 1.1.1 *Ánh xạ $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$ từ tập hợp số tự nhiên lên tập hợp số thực $\mathbb{R}$ được gọi là* ***dãy số****.*

Dãy số được kí hiệu là (x_n).

1.1.2 Tính chất của dãy số

1. Tính tăng và tính giảm.

Định nghĩa 1.1.2 *Dãy số (x_n) được gọi là* ***dãy tăng (dãy giảm)*** *nếu như với mọi $n \in \mathbb{N}$ luôn có bất đẳng thức $x_n < x_{n+1} (x_n < x_{n+1})$.*

Ví dụ 1.1.1 *Dãy $x_n = (1 + \frac{1}{n})^n, (n \in \mathbb{N})$ là dãy tăng.*

Chứng minh. Vì $x_n = (1 + \frac{1}{n})^n > 0$ nên ta chỉ cần chứng minh $\frac{x_{n+1}}{x_n} > 1$. Ta có

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{(1 + \frac{1}{n+1})^{n+1}}{(1 + \frac{1}{n})^n} = \frac{(\frac{n+2}{n+1})^{n+1}}{(\frac{n+1}{n})^n} = \left(\frac{\frac{n+2}{n+1}}{\frac{n+1}{n}}\right)^{n+1} . \frac{n+1}{n} = \left(\frac{n^2+2n}{n^2+2n+1}\right)^{n+1} . \frac{n+1}{n} =$$

$$\left(1 - \frac{1}{(n+1)^2}\right)^{n+1} . \frac{n+1}{n} > \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) . \frac{n+1}{n} = \frac{n}{n+1} . \frac{n+1}{n} = 1$$

(Bất đẳng thức Bernuli.) Chứng minh rằng, nếu số $h > -1$ và $h \neq 0$ thì luôn có bất đẳng thức $(1 + h)^n > 1 + nh$ với mọi số tự nhiên $n \geqslant 2$.

Chú ý rằng dấu đẳng thức có được là do dùng bất đẳng thức Bernuli.

Như vậy $x_n < x_{n+1}$ ■

Ví dụ 1.1.2 *Dãy số* $x_n = (1 + \frac{1}{n})^{n+1}, (n \in \mathbb{N})$ *là dãy giảm.*

Chứng minh. Vì $x_n = (1 + \frac{1}{n})^{n+1} > 0$ nên ta chỉ cần chứng minh $\frac{x_n}{x_{n+1}} > 1$. Ta có

$$\frac{x_n}{x_{n+1}} = \frac{(1+\frac{1}{n})^{n+1}}{(1+\frac{1}{n+1})^{n+2}} = \frac{(\frac{n+1}{n})^{n+1}}{(\frac{n+2}{n+1})^{n+2}} = \left(\frac{\frac{n+1}{n}}{\frac{n+2}{n+1}}\right)^{n+2} . \frac{n}{n+1} = \left(\frac{n^2+2n+1}{n^2+2n}\right)^{n+2} . \frac{n}{n+1} =$$

$$\left(1 + \frac{1}{n(n+2)}\right)^{n+2} . \frac{n}{n+1} > \left(1 + \frac{1}{n}\right) . \frac{n}{n+1} = \frac{n+1}{n} . \frac{n}{n+1} = 1.$$

Chú ý rằng dấu bất đẳng thức có được là do dùng bất đẳng thức Bernuli.

Như vậy $x_n > x_{n+1}$■

2. Tính bị chặn.

Định nghĩa 1.1.3 *Dãy số* $(x_n) \subset \mathbb{R}$ *được gọi là bị chặn trên (dưới), nếu như tồn tại số* $\exists M \in \mathbb{R}$ $(m \in \mathbb{R})$, *sao cho với mọi* $\forall n \in \mathbb{N}$ *luôn có* $x_n \leqslant M (x_n \geqslant m)$.

Số M (m) được gọi là cận trên (cận dưới) của dãy (x_n).

Định nghĩa 1.1.4 *Dãy số* $(x_n) \subset \mathbb{R}$ *được gọi là bị chặn, nếu nó bị chặn trên và chặn dưới có nghĩa là nếu như tồn tại số* $\exists M, m \in \mathbb{R}$ *sao cho với mọi* $\forall n \in \mathbb{N}$ *luôn có* $m \leqslant x_n \leqslant M$.

Định nghĩa 1.1.5 *Dãy số* $(x_n) \subset \mathbb{R}$ *được gọi là không bị chặn trên (dưới), nếu như với mọi số* $\forall M \in \mathbb{R}$ $(m \in \mathbb{R})$, *tồn tại số hạng của dãy số* x_{n_0} *sao cho* $x_{n_0} > M$ $(x_{n_0} < m)$.

Ví dụ 1.1.3 *Dãy số* $x_n = (1 + \frac{1}{n})^{n+1}$ $(n \in \mathbb{N})$ *bị chặn dưới bởi số* $m = 0$, *và bị chặn trên bởi số* $M = (1+1)^2 = 4$.

Chứng minh. Vì dãy này là dãy giảm nên với mọi $\forall n \in \mathbb{N}$ luôn có $x_n \leqslant x_1 = 4$.

Với mọi $\forall n \in \mathbb{N}$ ta có $x_n > 0$■

Ví dụ 1.1.4 *Dãy số* $x_n = (1 + \frac{1}{n})^n, (n \in \mathbb{N})$ *bị chặn dưới bởi số* $m = 0$ *và bị chặn trên bởi số* $M = 4$.

Chứng minh. Với mọi $\forall n \in \mathbb{N}$ luôn có $x_n > 0$, và $x_n = (1 + \frac{1}{n})^n < (1 + \frac{1}{n})^{n+1} \leqslant 4$■

1.2 Giới hạn của dãy số

1.2.1 Những khái niệm cơ bản

Định nghĩa 1.2.1 *Số* $a \in \mathbb{R}$ *được gọi là* ***giới hạn của dãy*** $(x_n) \subset \mathbb{R}$, *nếu như với mọi* $\forall \varepsilon > 0$ *tồn tại số* $N = N(\varepsilon)$ *sao cho với mọi* $\forall n > N$ *luôn có bất đẳng thức* $|x_n - a| < \varepsilon$.

Chú ý. Nếu số $a \in \mathbb{R}$ là giới hạn của dãy $(x_n) \subset \mathbb{R}$ thì ta viết là $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$.

Định nghĩa 1.2.2 *Dãy số $(x_n) \subset \mathbb{R}$ có giới hạn hữu hạn $a \in \mathbb{R}$ được gọi là **dãy hội tụ đến** a. Khi đó ta viết là $x_n \to a$.*

Định nghĩa 1.2.3 *Dãy số $(x_n) \subset \mathbb{R}$ được gọi là **phân kỳ** nếu như mọi số $\forall a \in \mathbb{R}$ không là giới hạn của dãy số này.*

1.2.2 Tính chất của giới hạn hữu hạn của dãy số

Định lý 1.2.1 *Mọi dãy hội tụ $(x_n) \subset \mathbb{R}$ đều bị chặn.*

Chú ý. Điều ngược lại không đúng. Ví dụ dãy $a_n = (-1)^n$ bị chặn nhưng phân kỳ.

Định lý 1.2.2 *Nếu dãy số $(x_n) \subset \mathbb{R}$ có giới hạn hữu hạn a thì giới hạn đó là duy nhất.*

Định lý 1.2.3 *Nếu dãy số $(x_n) \subset \mathbb{R}$ và $(y_n) \subset \mathbb{R}$ có giới hạn hữu hạn tương ứng là a và b thì luôn có đẳng thức sau:*

$$\lim_{n\to\infty} |x_n| = |a|.$$

$$\lim_{n\to\infty} (x_n \pm y_n) = a \pm b$$

$$\lim_{n\to\infty} (x_n.y_n) = a.b$$

Nếu bổ sung thêm điều kiện $b \neq 0$ thì ta có

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = \frac{a}{b}.$$

Định lý 1.2.4 *Nếu $y_n \leqslant x_n \leqslant z_n, \quad \forall n > n_0$ và $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = \lim\limits_{n\to\infty} z_n = a$ thì $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$.*

1.2.3 Giới hạn vô cùng của dãy số

Định nghĩa 1.2.4 *Số $+\infty(-\infty; \infty)$ được gọi giới hạn của dãy số $(x_n) \subset \mathbb{R}$, nếu như với mọi $\forall M > 0$ tồn tại số $N = N(M) >)$ sao cho với mọi $\forall n > N$ luôn có bất đẳng thức $x_n > M(x_n < -M; |x_n| > M)$.*

1.2.4 Dãy con

Định nghĩa 1.2.5 *Cho dãy số* $(x_n) \subset \mathbb{R}$ *và* $n_1 < n_2 < \ldots < n_k < \ldots$ *một dãy số tự nhiên tăng bất kỳ, khi đó dãy số* $x_{n_1}, x_{n_2}, \ldots, x_{n_k}, \ldots$ *được gọi là* ***dãy con của dãy*** (x_n)*. Dãy con được kí hiệu là* (x_{n_k})*.*

Định nghĩa 1.2.6 *Số* $c \in \mathbb{R}$ *được gọi là* ***giới hạn riêng của dãy*** (x_n)*, nếu như tồn tại dãy con* (x_{n_k}) *của dãy* (x_n)*, hội tụ đến số* c*.*

1.2.5 Mối quan hệ giữa giới hạn riêng và giới hạn của dãy số hội tụ

Nếu như dãy (x_n) hội tụ đến số a, thì với mọi dãy con (x_{n_k}) của dãy (x_n), giới hạn của nó là a.

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a \Longrightarrow \lim_{k\to\infty} x_{n_k} = a$$

Định lý 1.2.5 *Nếu dãy* (x_n) *hội tụ thì tất cả giới hạn riêng của dãy* (x_n) *đều bằng nhau và bằng giới hạn của dãy số* (x_n)*.*

Chú ý. Để chứng minh dãy (x_n) phân kỳ ta làm như sau:

Cách 1. Chỉ ra 2 dãy con hội tụ về 2 giới hạn riêng khác nhau.

Cách 2. Chỉ ra 1 dãy con phân kỳ.

Ví dụ 1.2.1 *Nói chung đối với một số dãy số thì có thể tồn tại những giới hạn riêng khác nhau.*

Đối với dãy $(x_n) = (-1)^n$ $(n \in \mathbb{N})$, dãy con của nó $(x_{2k}) = (-1)^{2k} = 1$ và $(x_{2k-1}) = (-1)^{2k-1} = -1$ có giới hạn riêng lần lượt là 1 và -1. Chúng không bằng nhau.

Ví dụ 1.2.2 *Không phải với dãy số nào cũng có giới hạn riêng.*

Dãy số $1, 2, \ldots, n, \ldots$ không có giới hạn riêng.

1.3 Giới hạn của dãy đơn điệu. Định lý Weierstrass

Định lý 1.3.1 *Nếu dãy số đơn điệu tăng (giảm)* $(x_n) \subset \mathbb{R}$ *bị chặn trên (dưới):* $x_1 \leqslant x_2 \leqslant \ldots \leqslant x_n \leqslant \ldots \leqslant y$ $(x_1 \geqslant x_2 \geqslant \ldots \geqslant x_n \geqslant \ldots \geqslant z)$*, thì nó có giới hạn hữu hạn. Còn nếu* *như dãy số đơn điệu tăng (giảm) $(x_n) \subset \mathbb{R}$ không bị chặn trên (dưới) thì giới hạn của nó là $+\infty(-\infty)$.*

Ví dụ 1.3.1 *Chứng minh rằng dãy số $(x_n) = (1 + \frac{1}{n})^n (n \in \mathbb{N})$ có giới hạn hữu hạn. Giới hạn này được kí hiệu là e.*

Chứng minh. Như ta đã biết dãy (x_n) trên là dãy tăng và bị chặn trên. Vì vậy theo định lý Weierstrass tồn tại giới hạn hữu hạn

$$\lim_{n\to\infty} (1 + \frac{1}{n})^n = e.$$

Chú ý. Số e là số siêu việt (không phải là số đại số). Nó không là nghiệm của đa thức với hệ số nguyên có bậc $n \geqslant 1$. Số $e \approx 2,718281828459045$, số này còn được gọi là số Neper hay số Ơle.

1.4 Các phương pháp tìm giới hạn của dãy số

1.4.1 Dùng biến đổi đại số để tìm giới hạn của dãy số

Bài 1.4.1 *Tìm giới hạn* $I = \lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{n^2}{n+1} - \dfrac{n^3}{n^2+1} \right)$.

Giải.

$$I = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2(n^2+1) - n^3(n+1)}{(n+1)(n^2+1)} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2 - n^3}{(n+1)(n^2+1)} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n} - 1}{(1+\frac{1}{n})(1+\frac{1}{n^2})} = -1.$$

Bài 1.4.2 *Tìm giới hạn* $I = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(n+1)^4 - (n-1)^4}{(n^2+1)^2 - (n^2-1)^2}$.

Giải.

$$I = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1-n+1)(n+1+n-1)((n+1)^2+(n-1)^2)}{(n^2+1-n^2+1)(n^2+1+n^2-1)} = \lim_{n\to\infty} \frac{2n(n^2+1)}{n^2} = \infty.$$

Bài 1.4.3 *Tìm giới hạn* $I = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n(\sqrt{n^2-1} - n)}$.

Giải.

$$I = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n^2-1} + n}{n(n^2-1-n^2)} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{1 - \frac{1}{n^2}} + 1}{-1} = -2.$$

Bài 1.4.4 *Tìm giới hạn* $I = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt{n^2+1} - n}{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}}$.

Giải.

$$I=\lim_{n\to\infty}\frac{(n^2+1-n^2)(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})}{(n+1-n)(\sqrt{n^2+1}+n)}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}+\sqrt{\frac{1}{n}}}{\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}+1}=0.$$

Bài 1.4.5 *Tìm giới hạn* $I=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{n^2+1}-n}{\sqrt{n^3+1}-n\sqrt{n}}$.

Giải.

$$I=\lim_{n\to\infty}\frac{(n^2+1-n^2)(\sqrt{n^3+1}+n\sqrt{n})}{(n^3+1-n^3)(\sqrt{n^2+1}+n)}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n+\frac{1}{n^3}}+\sqrt{n}}{\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}+1}=\infty.$$

Bài 1.4.6 *Tìm giới hạn* $I=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt[4]{n^3+n}-\sqrt{n}}{n+2+\sqrt{n+1}}$.

Giải.

$$I=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[4]{\frac{1}{n}+\frac{1}{n^3}}-\sqrt{\frac{1}{n}}}{1+\frac{2}{n}+\sqrt{\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}}=0.$$

1.4.2 Dùng định lý kẹp giữa tìm giới hạn của dãy số

Định lý 1.4.1 *Nếu* $y_n\leqslant x_n\leqslant z_n,\quad \forall n>n_0$ *và* $\lim\limits_{n\to\infty}y_n=\lim\limits_{n\to\infty}z_n=a$ *thì* $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$.

Bài 1.4.7 *Tìm giới hạn*

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1+2^2+\ldots+n^n}{n^n}.$$

Giải.

Đặt

$$a_n=\frac{1+2^2+\ldots+n^n}{n^n}.$$

Khi đó ta có

$$1=\frac{n^n}{n^n}\leqslant a_n\leqslant\frac{n^1+n^2+\ldots+n^n}{n^n}=\frac{n^{n+1}-n}{(n-1)n^n}=\frac{n^n-1}{n^n}.\frac{n}{n-1}<\frac{n}{n-1}.$$

Vì $\dfrac{n}{n-1}\to 1$ nên $a_n\to 1$ khi $n\to\infty$. $n\to\infty$

Bài 1.4.8 $I=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{\sqrt{n!}}$

Giải.

Bằng phương pháp qui nạp toán học ta có thể chứng minh được $n!>\dfrac{n^2}{4},\ \forall n\in\mathbb{N}$.

Do đó $0<\dfrac{1}{\sqrt{n!}}<\dfrac{2}{n}$. Mặt khác $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2}{n}=0$ nên $I=0$.

Bài 1.4.9 $I = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n}$

Giải.

Theo công thức nhị thức Newton ta có

$$n = (1 + (\sqrt[n]{n} - 1))^n = 1 + n(\sqrt[n]{n} - 1) + \frac{n(n+1)}{2}(\sqrt[n]{n} - 1)^2 + \ldots + (\sqrt[n]{n} - 1)^n.$$

Với mọi $\forall n > 1$ ta có $n > \frac{n(n+1)}{2}(\sqrt[n]{n} - 1)^2$. Do đó với mọi $\forall n > 1$, $0 < \sqrt[n]{n} - 1 < \sqrt{\dfrac{2}{n+1}}$. Mặt khác $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{\dfrac{2}{n+1}} = 0$ nên $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} - 1 = 0$ hay $I = 1$.

Bài 1.4.10 $I = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a},\ a > 1.$

Giải.

Theo công thức nhị thức Newton ta có

$$a = (1 + (\sqrt[n]{a} - 1))^n = 1 + n(\sqrt[n]{a} - 1) + \frac{n(n+1)}{2}(\sqrt[n]{a} - 1)^2 + \ldots + (\sqrt[n]{a} - 1)^n.$$

Với $a > 1$ ta có $a > n(\sqrt[n]{a} - 1)$. Do đó $0 < \sqrt[n]{a} - 1 < \dfrac{a}{n}$. Mặt khác $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a}{n} = 0$ nên $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} - 1 = 0$ hay $I = 1$.

Bài 1.4.11 $I = \lim\limits_{n\to\infty} q^n,\ |q| < 1.$

Giải.

Nếu $q = 0$ thì $I = 0$.

Nếu $q \neq 0$ thì ta có $\dfrac{1}{|q|} > 1$, do đó $\dfrac{1}{|q|} = 1 + h, h > 0$. Từ đó theo bất đẳng thức Bernouli ta có

$$\frac{1}{|q|^n} = (1 + h)^n > 1 + nh > nh \Rightarrow 0 < |q|^n < \frac{1}{nh}.$$

Mặt khác $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{nh} = 0$ nên $I = 0$.

Bài 1.4.12 $I = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n}{a^n},\ a > 1.$

Giải.

Theo công thức nhị thức Newton ta có

$$a^n = (1 + (a - 1))^n = 1 + n(a - 1) + \frac{n(n+1)}{2}(a - 1)^2 + \ldots + (a - 1)^n.$$

Với $a > 1$ ta có $a^n > \frac{n(n+1)}{2}(a - 1)^2$. Do đó $0 < \dfrac{n}{a^n} < \dfrac{2}{(n+1)(a-1)^2}$. Mặt khác $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2}{(n+1)(a-1)^2} = 0$ nên $I = 0$.

Bài 1.4.13 $I = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{(-1)^n}{n^\alpha}, \ \alpha > 0$

Giải.

Với $\alpha > 0$ ta có

$$\frac{-1}{n^\alpha} \leqslant \frac{(-1)^n}{n^\alpha} \leqslant \frac{1}{n^\alpha}$$

Mặt khác $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{-1}{n^\alpha} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n^\alpha} = 0$ nên $I = 0$.

1.4.3 Sử dụng giới hạn cơ bản $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} q^n = 0, \ |q| < 1}$ để tìm giới hạn của dãy

Bài 1.4.14 *Tìm giới hạn của dãy* $a_n = \dfrac{1 + 7^{n+2}}{3 - 7^n}$

Giải.

Chia tử số và mẫu số cho 7^n ta có

$$a_n = \frac{\frac{1}{7^n} + 7^2}{\frac{3}{7^n} - 1}$$

Do đó $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\frac{1}{7^n} + 7^2}{\frac{3}{7^n} - 1} = -49$ vì $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{7^n} = 0$.

Bài 1.4.15 *Tìm giới hạn* $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2^{n+2} + 3^{n+3}}{2^n + 3^n}$

Giải.

Chia tử số và mẫu số cho 3^n ta có

$$a_n = \frac{\frac{4.2^n}{3^n} + 3^3}{\frac{2^n}{3^n} + 1}$$

Do đó $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\frac{4.2^n}{3^n} + 3^3}{\frac{2^n}{3^n} + 1} = 27$ vì $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2^n}{3^n} = 0$.

Bài 1.4.16 *Tìm giới hạn* $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{5.2^n - 3.5^{n+1}}{100.2^n + 2.5^n}$

Giải.

Chia tử số và mẫu số cho 5^n ta có

$$a_n = \frac{\frac{5.2^n}{5^n} - 3.5}{\frac{100.2^n}{5^n} + 2}$$

Do đó $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\frac{5.2^n}{5^n} - 3.5}{\frac{100.2^n}{5^n} + 2} = -\dfrac{15}{2}$ vì $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2^n}{5^n} = 0$.

Bài 1.4.17 *Tìm giới hạn* $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(-1)^n.6^n - 5^{n+1}}{5^n - (-1)^n.6^{n+1}}$

Giải.

Chia tử số và mẫu số cho $(-6)^n$ ta có

$$a_n = \frac{1 - \frac{5.5^n}{(-6)^n}}{\frac{5^n}{(-6)^n} - 6}$$

Do đó $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1 - \frac{5.5^n}{(-6)^n}}{\frac{5^n}{(-6)^n} - 6} = -\dfrac{1}{6}$ vì $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{5^n}{(-6)^n} = 0.$

Bài 1.4.18 *Tìm giới hạn* $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2^n + 3^{-n}}{2^{-n} - 3^n}$

Giải.

Chia tử số và mẫu số cho 3^n ta có

$$a_n = \frac{\frac{2^n}{3^n} + \frac{1}{9^n}}{\frac{1}{6^n} - 1}$$

Do đó $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\frac{2^n}{3^n} + \frac{1}{9^n}}{\frac{1}{6^n} - 1} = 0$ vì $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2^n}{3^n} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{9^n} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{6^n} = 0.$

1.4.4 Sử dụng giới hạn cơ bản $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{(-1)^n}{n^\alpha} = 0,\ \alpha > 0}$ để tìm giới hạn của dãy

Bài 1.4.19 *Tìm giới hạn* $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(-1)^n + \frac{1}{n}}{\frac{1}{n^2} - (-1)^n}$

Giải.

Chia tử số và mẫu số cho $(-1)^n$ ta có

$$a_n = \frac{1 + \frac{(-1)^n}{n}}{\frac{(-1)^n}{n^2} - 1}$$

Do đó $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1 + \frac{(-1)^n}{n}}{\frac{(-1)^n}{n^2} - 1} = -1$ vì $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(-1)^n}{n} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(-1)^n}{n^2} = 0.$

1.4.5 Dùng định lý Weierstrass về sự tồn tại giới hạn của dãy đơn điệu

Định lý 1.4.2 *Nếu dãy số đơn điệu tăng (giảm)* $(x_n) \subset \mathbb{R}$ *bị chặn trên (dưới):* $x_1 \leqslant x_2 \leqslant \ldots \leqslant x_n \leqslant \ldots \leqslant y$ $(x_1 \geqslant x_2 \geqslant \ldots \geqslant x_n \geqslant \ldots \geqslant z)$, *thì nó có giới hạn hữu hạn. Còn nếu như dãy số đơn điệu tăng (giảm)* $(x_n) \subset \mathbb{R}$ *không bị chặn trên (dưới) thì giới hạn của nó là* $+\infty(-\infty)$.

Bài 1.4.20 *Chứng minh rằng dãy* $a_n = \frac{1}{5+1} + \frac{1}{5^2+1} + \ldots + \frac{1}{5^n+1}$ *hội tụ.*

Giải.

Dãy a_n là dãy đơn điệu tăng. Thật vậy, vì

$$a_{n+1} = a_n + \frac{1}{5^{n+1}+1}$$

nên $a_{n+1} > a_n$.

Dãy a_n bị chặn trên. Thật vậy

$$a_n = \frac{1}{5+1} + \frac{1}{5^2+1} + \ldots + \frac{1}{5^n+1} < \frac{1}{5} + \frac{1}{5^2} + \ldots + \frac{1}{5^n} = \frac{\frac{1}{5} - \frac{1}{5^{n+1}}}{1-\frac{1}{5}} = \frac{1}{4}\left(1 - \frac{1}{5^n}\right) < \frac{1}{4}.$$

Như vậy, dãy a_n đã cho đơn điệu tăng và bị chặn trên nên nó hội tụ.

Bài 1.4.21 *Chứng minh rằng dãy* $a_n = \frac{1}{3+1} + \frac{1}{3^2+2} + \ldots + \frac{1}{3^n+n}$ *hội tụ.*

Giải.

Dãy a_n là dãy đơn điệu tăng. Thật vậy, vì

$$a_{n+1} = a_n + \frac{1}{3^{n+1}+n+1}$$

nên $a_{n+1} > a_n$.

Dãy a_n bị chặn trên. Thật vậy

$$a_n = \frac{1}{3+1} + \frac{1}{3^2+2} + \ldots + \frac{1}{3^n+n} < \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \ldots + \frac{1}{3^n} = \frac{\frac{1}{3} - \frac{1}{3^{n+1}}}{1-\frac{1}{3}} = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{3^n}\right) < \frac{1}{2}.$$

Như vậy, dãy a_n đã cho đơn điệu tăng và bị chặn trên nên nó hội tụ.

Bài 1.4.22 *Chứng minh rằng dãy* $a_n = \frac{2^n}{n!}$ *hội tụ và tìm giới hạn của nó.*

Giải.

Dãy a_n là dãy đơn điệu giảm. Thật vậy, vì

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\frac{2^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{2^n}{n!}} = \frac{2}{n+1} < 1, \forall n > 1.$$

nên $a_{n+1} < a_n$.

Dãy a_n bị chặn dưới bởi 0 vì $a_n > 0$. Như vậy, dãy a_n đã cho đơn điệu giảm và bị chặn dưới nên nó hội tụ.

Giả sử $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$. Ta có $a_{n+1} = \frac{2}{n+1} a_n$. Lấy giới hạn 2 vế của đẳng thức này khi $n \to \infty$ ta được

$$\lim_{n\to\infty} a_{n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{2}{n+1} . \lim_{n\to\infty} a_n.$$

Do đó $a = 0.a \Rightarrow a = 0$. Vậy $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{2^n}{n!} = 0$.

Bài 1.4.23 *Cho dãy* $a_1 = \sqrt{2}, a_{n+1} = \sqrt{2a_n}$. *Chứng minh rằng dãy* (a_n) *hội tụ và tìm giới hạn của nó.*

Giải.

Dãy a_n là dãy đơn điệu tăng vì $a_1 < a_2 < a_3 < \dots$.

Ta sẽ chứng minh dãy a_n bị chặn trên bởi 2.

Thật vậy, $a_1 = \sqrt{2}, a_2 = \sqrt{2a_1} < \sqrt{2.2} = 2$.

Giả sử đã chứng minh được rằng $a_n \leqslant 2$. Ta sẽ chứng minh $a_{n+1} \leqslant 2$. Thật vậy, $a_{n+1} = \sqrt{2a_n} \leqslant \sqrt{2.2} = 2$. Vậy theo nguyên lý qui nạp ta có $a_n \leqslant 2, \forall n \in \mathbb{N}$

Như vậy, dãy a_n đã cho đơn điệu tăng và bị chặn trên nên nó hội tụ.

Giả sử $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$. Ta có $a_{n+1} = \sqrt{2a_n} \Rightarrow a_{n+1}^2 = 2a_n$. Lấy giới hạn 2 vế của đẳng thức này khi $n \to \infty$ ta được

$$\lim_{n\to\infty} a_{n+1}^2 = 2.\lim_{n\to\infty} a_n.$$

Do đó $a^2 = 2.a \Rightarrow a = 0 \bigvee a = 2$. Vì $a_n > \sqrt{2}$ nên $a = 2$. Vậy $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 2$.

Bài 1.4.24 *Cho dãy* $x_1 = \sqrt{a}, \quad x_2 = \sqrt{a+\sqrt{a}}, \dots, x_n = \underbrace{\sqrt{a+\sqrt{a+\dots+\sqrt{a}}}}_{n \text{ dấu căn}}, \quad a > 0.$ *Chứng minh rằng dãy* (x_n) *hội tụ và tìm giới hạn của nó.*

Giải.

Dãy a_n là dãy đơn điệu tăng vì $x_1 < x_2 < x_3 < \dots$.

Ta sẽ chứng minh dãy x_n bị chặn trên bởi $\sqrt{a}+1$.

Thật vậy, $x_1 = \sqrt{a} < \sqrt{a}+1, x_2 = \sqrt{a+\sqrt{a}} < \sqrt{a+\sqrt{a}+1} < \sqrt{a+2\sqrt{a}+1} = \sqrt{a}+1$.

Giả sử đã chứng minh được rằng $x_n \leqslant \sqrt{a}+1$. Ta sẽ chứng minh $a_{n+1} \leqslant \sqrt{a}+1$. Thật vậy, $a_{n+1} = \sqrt{a+x_n} < \sqrt{a+\sqrt{a}+1} < \sqrt{a+2\sqrt{a}+1} = \sqrt{a}+1$. Vậy theo nguyên lý qui nạp ta có $x_n \leqslant \sqrt{a}+1, \forall n \in \mathbb{N}$

Như vậy, dãy x_n đã cho đơn điệu tăng và bị chặn trên nên nó hội tụ.

Giả sử $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$. Ta có $x_{n+1} = \sqrt{a+x_n} \Rightarrow x_{n+1}^2 = a + x_n$. Lấy giới hạn 2 vế của đẳng thức này khi $n \to \infty$ ta được

$$\lim_{n\to\infty} x_{n+1}^2 = a + \lim_{n\to\infty} x_n.$$

Do đó $x^2 = a + x \Rightarrow x = \dfrac{1-\sqrt{1+4a}}{2} \bigvee x = \dfrac{1+\sqrt{1+4a}}{2}$. Vì $a_n > 0$ nên $x = \dfrac{1+\sqrt{1+4a}}{2}$.
Vậy $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \dfrac{1+\sqrt{1+4a}}{2}$.

Bài 1.4.25 *Tìm giới hạn của dãy a_n được xác định như sau:*

$$0 < a_1 < 1, a_{n+1} = a_n(2 - a_n), \ \forall n \geqslant 1.$$

Giải.

Đầu tiên ta sẽ chứng minh a_n bị chặn, cụ thể là $0 < a_n < 1$.

Thật vậy, ta có $0 < a_1 < 1$.

Giả sử đã chứng minh được rằng $0 < a_n < 1$. Ta sẽ chứng minh $0 < a_{n+1} < 1$. Thật vậy, $a_{n+1} = a_n(2 - a_n) = 1 - (1 - a_n)^2$. Do $0 < (1 - x_n)^2 < 1$ nên $0 < a_{n+1} < 1$. Vậy theo nguyên lý qui nạp ta có $0 < a_{n+1} < 1, \forall n \in \mathbb{N}$

Bây giờ ta sẽ chứng minh dãy a_n đơn điệu tăng. Thậy vậy $a_{n+1} = a_n(2 - a_n) \Rightarrow \dfrac{a_{n+1}}{a_n} = 2 - a_n > 1$. Từ đó $a_{n+1} > a_n, \forall n \in \mathbb{N}$

Như vậy, dãy a_n đã cho đơn điệu tăng và bị chặn trên nên nó hội tụ.

Giả sử $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$. Ta có $a_{n+1} = a_n(2 - a_n)$. Lấy giới hạn 2 vế của đẳng thức này khi $n \to \infty$ ta được

$$\lim_{n\to\infty} a_{n+1} = \lim_{n\to\infty} a_n. \lim_{n\to\infty} (2 - a_n).$$

Do đó $a = a.(2 - a) \Rightarrow a = 0 \bigvee a = 1$. Vì $a_n > a_0 > 0$ và a_n đơn điệu tăng nên $a = 1$. Vậy $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 1$.

Bài 1.4.26 *Cho dãy* $a_1 = \sqrt[k]{5}, a_{n+1} = \sqrt[k]{5a_n}, \ k \in \mathbb{N}$. *Chứng minh rằng dãy* (a_n) *hội tụ và tìm giới hạn của nó.*

Giải.

Dãy a_n là dãy đơn điệu tăng vì $a_1 < a_2 < a_3 < \dots$.

Ta sẽ chứng minh dãy a_n bị chặn trên bởi $\sqrt[k-1]{5}$.

Thật vậy, $a_1 = \sqrt[k]{5}, a_2 = \sqrt[k]{5a_1} = 5^{\frac{1}{k}+\frac{1}{k^2}} < 5^{\frac{1}{k-1}} = \sqrt[k-1]{5}$.

Giả sử đã chứng minh được rằng $a_n \leqslant \sqrt[k-1]{5}$. Ta sẽ chứng minh $a_{n+1} \leqslant \sqrt[k-1]{5}$. Thật vậy, $a_{n+1} = \sqrt[k]{5a_n} \leqslant 5^{\frac{1}{k}+\frac{1}{k(k-1)}} = 5^{\frac{1}{k-1}} = \sqrt[k-1]{5}$.

Vậy theo nguyên lý qui nạp ta có $a_n \leqslant \sqrt[k-1]{5}, \forall n \in \mathbb{N}$

Như vậy, dãy a_n đã cho đơn điệu tăng và bị chặn trên nên nó hội tụ.

Giả sử $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$. Ta có $a_{n+1} = \sqrt[k]{5a_n} \Rightarrow a_{n+1}^k = 5a_n$. Lấy giới hạn 2 vế của đẳng thức này khi $n \to \infty$ ta được

$$\lim_{n\to\infty} a_{n+1}^k = 5. \lim_{n\to\infty} a_n.$$

Do đó $a^k = 5.a \Rightarrow a = 0 \bigvee a = \sqrt[k-1]{5}$. Vì $a_n > \sqrt[k]{5}$ nên $a = \sqrt[k-1]{5}$. Vậy $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \sqrt[k-1]{5}$.

Bài 1.4.27 *Chứng minh rằng dãy* $a_n = \dfrac{n!}{n^n}$ *hội tụ và tìm giới hạn của nó.*

Giải.

Dãy a_n là dãy đơn điệu giảm. Thật vậy, vì

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}}{\frac{n!}{n^n}} = \frac{n^n}{(n+1)^n} < 1,$$

nên $a_{n+1} < a_n$.

Dãy a_n bị chặn dưới bởi 0 vì $a_n > 0$. Như vậy, dãy a_n đã cho đơn điệu giảm và bị chặn dưới nên nó hội tụ.

Giả sử $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$. Ta có $a_{n+1} = \dfrac{n^n}{(n+1)^n}.a_n$. Lấy giới hạn 2 vế của đẳng thức này khi $n \to \infty$ ta được

$$\lim_{n\to\infty} a_{n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^n}{(n+1)^n}.\lim_{n\to\infty} a_n.$$

Do đó $a = e^{-1}.a \Rightarrow a = 0$. Vậy $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n!}{n^n} = 0$.

1.4.6 Tìm giới hạn của dãy số dùng giới hạn cơ bản $\lim\limits_{n\to\infty}(1+u_n)^{\frac{1}{u_n}} = e$, biết rằng khi $n \to \infty$ thì $u_n \to 0$.

Bài 1.4.28 *Tìm giới hạn* $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1 + \dfrac{1}{n+k}\right)^n, \quad k \in \mathbb{N}$

Giải.

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n+k}\right)^n = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n+k}\right)^{(n+k).\frac{n}{n+k}} = e.$$

Bài 1.4.29 *Tìm giới hạn* $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{n}{n+1}\right)^n$.

Giải.

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right)^n = \lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right)^{-(n+1).\frac{n}{-(n+1)}} = e^{-1}.$$

Bài 1.4.30 *Tìm giới hạn* $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1 + \dfrac{1}{2n}\right)^n$.

Giải.

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{2n}\right)^n = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{2n}\right)^{2n.\frac{n}{2n}} = e^{\frac{1}{2}}.$$

Bài 1.4.31 *Tìm giới hạn* $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{2^n+1}{2^n}\right)^{2^n}$.

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{2^n+1}{2^n}\right)^{2^n} = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{2^n}\right)^{2^n} = e.$$

1.4.7 Dùng mối quan hệ giữa giới hạn riêng và giới hạn của dãy số để chứng minh dãy số phân kỳ

Định lý 1.4.3 *Nếu dãy* (x_n) *hội tụ thì tất cả giới hạn riêng của dãy* (x_n) *đều bằng nhau và bằng giới hạn của dãy số* (x_n).

Chú ý. Để chứng minh dãy (x_n) phân kỳ ta làm như sau:

Cách 1. Chỉ ra 2 dãy con hội tụ về 2 giới hạn riêng khác nhau.

Cách 2. Chỉ ra 1 dãy con phân kỳ.

Bài 1.4.32 *Chứng minh rằng dãy* $a_n = (-1)^n \dfrac{2n+3}{3n+1}$ *phân kỳ.*

Giải.

Xét 2 dãy con với chỉ số chẵn và lẻ ta có

$$a_{2k} = (-1)^{2k}\frac{2.2k+3}{3.2k+1} \to \frac{2}{3}, \quad a_{2k+1} = (-1)^{2k+1}\frac{2.(2k+1)+3}{3.(2k+1)+1} \to -\frac{2}{3} \text{ khi } n \to \infty.$$

Vậy tồn tại 2 dãy con có giới hạn khác nhau nên dãy đã cho phân kỳ.

Chương 2

GIỚI HẠN CỦA HÀM SỐ

2.1 Giới hạn của hàm số tại một điểm

Cho $X \subset \mathbb{R}$ là 1 tập hợp số nào đó, còn $a \in \mathbb{R}$ là 1 số cố định nào đó.

Định nghĩa 2.1.1 *Nếu số $a \in \mathbb{R}$ là điểm giới hạn của tập hợp $X \subset \mathbb{R}$, thì tồn tại dãy số $(x_n) \subset X \setminus a$ hội tụ về điểm a này $x_n \to a$.*

Cho hàm số $f(x)$ xác định trên tập hợp số $X \subset \mathbb{R}$ và số $a \in \mathbb{R}$ là điểm giới hạn của tập hợp X.

Định nghĩa 2.1.2 *(theo Côsi) Số $A \in \mathbb{R}$ được gọi là giới hạn của hàm số $f(x)$ khi $x \to a$, nếu như với mọi $\forall \varepsilon > 0$ tồn tại $\exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0$ sao cho với mọi $\forall x \in X \setminus a$ thỏa mãn $|x - a| < \delta$ luôn có $|f(x) - A| < \varepsilon$.*

Định nghĩa 2.1.3 *(theo Gene)*

Số $A \in \mathbb{R}$ được gọi là giới hạn của hàm số $f(x)$ khi $x \to a$, nếu như với mọi dãy $\forall (x_n) \subset X \setminus a$ hội tụ về $a : x_n \to a$, dãy giá trị của hàm số tương ứng hội tụ về $A : f(x_n) \to A$.

2.2 Giới hạn của hàm số từ một phía

Cho hàm số $f(x)$ xác định trên tập hợp $X \subset \mathbb{R}$ còn $a \in \mathbb{R}$ là 1 số nào đó. Xét tập hợp $X_a^+ = \{x \in X \setminus x > a\}$ và $X_a^- = \{x \in X \setminus x < a\}$.

Cho hàm số $f(x)$ xác định trên tập hợp $X \subset \mathbb{R}$ còn $a \in \mathbb{R}$ là điểm giới hạn của tập hợp $X_a^+ (X_a^-)$.

Định nghĩa 2.2.1 *(giới hạn của hàm số từ 1 phía)*

Số $A \in \mathbb{R}$ được gọi là giới hạn của hàm số $f(x)$ khi $x \to a$ từ bên phải (từ bên trái) nếu như

$$\lim_{x \to a, x \in X_a^+} f(x) = A \; (\lim_{x \to a, x \in X_a^-} f(x) = A)$$

Chúng được kí hiệu là $\lim\limits_{x \to a+0} f(x), f(a+0)$ và $\lim\limits_{x \to a-0} f(x), f(a-0)$

Ví dụ.

$$f(x) = signx = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \\ -1, & x < 0 \end{cases}$$

Dễ dàng thấy rằng

$$f(0+0) = \lim_{x \to 0+0} f(x) = 1$$

còn

$$f(0-0) = \lim_{x \to 0-0} f(x) = -1.$$

Cho $a \in \mathbb{R}$ là điểm giới hạn của tập hợp $X_a^+ = \{x \in X \setminus x > a\}$ và tập hợp $X_a^- = \{x \in X \setminus x < a\}$. Khi đó a cũng là điểm giới hạn của tập hợp X. Khi đó ta có định lý sau:

Định lý 2.2.1 *(về mối quan hệ giữa giới hạn từ 2 phía và từ 1 phía của hàm số tại 1 điểm.)* *Đẳng thức $\lim\limits_{x \to a} f(x) = A$ tương đương với 2 đẳng thức sau*

$$\begin{cases} \lim\limits_{x \to a+0} f(x) = A \\ \lim\limits_{x \to a-0} f(x) = A \end{cases}$$

2.3 Giới hạn hữu hạn của hàm số tại điểm vô cùng

Cho hàm số $f(x)$ xác định trên tập hợp $X \subset \mathbb{R}$ và $+\infty(-\infty, \infty)$ là điểm giới hạn của tập hợp X.

Định nghĩa 2.3.1 *Số $A \in \mathbb{R}$ được gọi là giới hạn của hàm số $f(x)$ khi $x \to +\infty(x \to -\infty, x \to \infty)$ nếu như với mọi $\forall \varepsilon > 0$ tồn tại số $\exists N = N(\varepsilon) > 0$ sao cho với mọi $\forall x \in X$ thỏa mãn bất đẳng thức $x > N(x < -N, |x| > N)$ luôn có bất đẳng thức $|f(x) - A| < \varepsilon$.*

2.4 Giới hạn vô cùng của hàm số tại một điểm

Cho hàm số $f(x)$ xác định trên tập hợp $X \subset \mathbb{R}$ và $a \in \mathbb{R}$ là điểm giới hạn của tập hợp X này.

Định nghĩa 2.4.1 *Số* $+\infty(-\infty, \infty)$ *được gọi là giới hạn của hàm số* $f(x)$ *khi* $x \to a$ *nếu như với mọi* $\forall M > 0$ *tồn tại số* $\delta = \delta(M) > 0$ *sao cho với mọi* $\forall x \in X \setminus a$ *thỏa mãn bất đẳng thức* $|x - a| < \delta$ *luôn có bất đẳng thức* $f(x) > M(f(x) < -M, |f(x)| > M)$.

2.5 Giới hạn vô cùng của hàm số tại điểm vô cùng

Cho hàm số $f(x)$ xác định trên tập hợp $X \subset \mathbb{R}$ và $+\infty(-\infty, \infty)$ là điểm giới hạn của tập hợp X.

Định nghĩa 2.5.1 *Số* $+\infty(-\infty, \infty)$ *được gọi là giới hạn của hàm số* $f(x)$ *khi* $x \to +\infty(x \to -\infty, x \to \infty)$ *nếu như với mọi* $\forall M > 0$ *tồn tại số* $\exists N = N(M) > 0$ *sao cho với mọi* $\forall x \in X$ *thỏa mãn bất đẳng thức* $x > N(x < -N, |x| > N)$ *luôn có bất đẳng thức* $f(x) > M(f(x) < -M, |f(x)| > M)$.

2.6 Giới hạn vô cùng bé của hàm số

Cho hàm số $\alpha = \alpha(x)$ xác định trên tập hợp $X \subset \mathbb{R}$ và số $a \in \mathbb{R}$ là điểm giới hạn của tập hợp X.

Định nghĩa 2.6.1 *Hàm số* $\alpha = \alpha(x)$ *được gọi là hàm vô cùng bé khi* $x \to a$, *nếu như giới hạn của nó bằng* $0 : \lim\limits_{x \to a} \alpha(x) = 0$.

2.7 Giới hạn vô cùng lớn của hàm số

Cho hàm số $f(x)$ xác định trên tập hợp $X \subset \mathbb{R}$ và số $a \in \mathbb{R}$ là điểm giới hạn của tập hợp X.

Định nghĩa 2.7.1 *Hàm số* $f(x)$ *được gọi là hàm vô cùng lớn khi* $x \to a$ *nếu* $\lim\limits_{x \to a} |f(x)| = +\infty$.

2.8 Tính chất của hàm vô cùng bé

Cho hàm số $\alpha = \alpha(x)$ và $\beta = \beta(x)$ xác định trên cùng 1 tập hợp $X \subset \mathbb{R}$ và số $a \in \mathbb{R}$ là điểm giới hạn của tập hợp X.

1^o Nếu hàm số $\alpha = \alpha(x)$ và $\beta = \beta(x)$ là hàm vô cùng bé khi $x \to a$ thì hàm số $\alpha \pm \beta = \alpha(x) \pm \beta(x)$ cũng là hàm vô cùng bé khi $x \to a$.

2^o Nếu $\alpha = \alpha(x)$ là hàm vô cùng bé khi $x \to a$ thì với mọi $\forall c \in \mathbb{R}$ tích $c.\alpha(x)$ cũng là hàm vô cùng bé khi $x \to a$.

3^o Nếu $\alpha = \alpha(x)$ và $\beta = \beta(x)$ là hàm vô cùng bé khi $x \to a$ thì tích của nó $\alpha.\beta = \alpha(x).\beta(x)$ cũng là hàm vô cùng bé khi $x \to a$.

2.9 Giới hạn của hàm hợp

Định lý 2.9.1 *Cho* $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b, \lim\limits_{y\to b} g(y) = c$ *và tồn tại số* $\delta_0 > 0$ *sao cho với mọi* $\forall x \in X \setminus a$ *thỏa mãn bất đẳng thức* $|x - a| < \delta_0$ *luôn có* $f(x) \neq b$ *thì giới hạn của hàm hợp là* $\lim\limits_{x\to a} g(f(x)) = c.$

2.10 Những giới hạn cơ bản

1. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$
2. $\lim\limits_{x\to 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e$
3. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{log_a(1+x)}{x} = log_a e = \dfrac{1}{\ln a}(a > 0, a \neq 1)$
4. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(1+x)}{x} = 1$
5. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{a^x - 1}{x} = \ln a(a > 0, a \neq 1)$
6. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x - 1}{x} = 1$
7. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{(1+x)^\mu - 1}{x} = \mu(\mu \in \mathbb{R})$
8. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt[n]{1+x} - 1}{x} = \frac{1}{n}(n \in \mathbb{N})$
9. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{1+x} - 1}{x} = \frac{1}{2}$

2.11 So sánh hàm vô cùng bé

Cho hàm số $\alpha = \alpha(x)$ và $\beta = \beta(x)$ xác định trên cùng 1 tập xác định $X \subset \mathbb{R}$ và số $a \in \mathbb{R}$ là điểm giới hạn của tập hợp X.

Cho hàm số $\alpha = \alpha(x)$ và $\beta = \beta(x)$ với cùng 1 tập xác định $X \subset \mathbb{R}$ là những hàm vô cùng bé khi $x \to a$, khi đó nếu như

1. $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 0$ thì $\alpha(x)$ được gọi là hàm vô cùng bé có bậc cao hơn $\beta(x)$.
2. $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)} = c \neq 0 (c \in \mathbb{R})$ thì $\alpha(x), \beta(x)$ được gọi là hàm vô cùng bé có cùng bậc.
3. $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)} = \infty$ thì $\alpha(x)$ được gọi là hàm vô cùng bé có bậc thấp hơn $\beta(x)$.
4. không tồn tại $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}$ hữu hạn hay vô cùng thì $\alpha(x), \beta(x)$ được gọi là những hàm vô cùng bé không so sánh được.

2.12 Những hàm vô cùng bé tương đương

Định nghĩa 2.12.1 *Những hàm vô cùng bé $\alpha = \alpha(x)$ và $\beta = \beta(x)$ khi $x \to a$ được gọi là tương đương nếu như $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 1$.*

Định lý 2.12.1 *(nguyên lý thay thế hàm vô cùng bé tương đương.)*

Cho hàm vô cùng bé $\alpha = \alpha(x)$ khi $x \to a$ tương đương với hàm vô cùng bé $\overline{\alpha} = \overline{\alpha}(x)$ còn hàm vô cùng bé $\beta = \beta(x)$ khi $x \to a$ tương đương với hàm vô cùng bé $\overline{\beta} = \overline{\beta}(x)$. Khi đó luôn có đẳng thức

$$\lim_{x\to a} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = \lim_{x\to a} \frac{\overline{\alpha}(x)}{\overline{\beta}(x)}$$

nếu như có ít nhất 1 trong 2 giới hạn trên tồn tại.

Bảng những hàm vô cùng bé tương đương.

Khi $x \to 0$ những hàm vô cùng bé sau tương đương.

1. $\sin x \sim x$
2. $\tan x \sim x$
3. $1 - \cos x \sim \dfrac{1}{2}x^2$
4. $a^x - 1 \sim x.\ln a (a > 0, a \neq 1)$

   $e^x - 1 \sim x$
5. $\log_a(1 + x) \sim x \log_a e = \frac{x}{\ln a} (a > 0, a \neq 1)$

   $\ln(1 + x) \sim x$

6. $(1+x)^\mu - 1 \sim \mu.x (\mu \in \mathbb{R})$
$\sqrt{1+x} - 1 \sim \dfrac{x}{2}$
$\sqrt[n]{1+x} - 1 \sim \dfrac{x}{n} (n \in \mathbb{N})$

2.13 So sánh hàm vô cùng lớn

Cho hàm số $f(x)$ và $g(x)$ xác định trên cùng 1 tập xác định $X \subset \mathbb{R}$ và số $a \in \mathbb{R}$ là điểm giới hạn của tập hợp X.

Cho hàm số $f(x)$ và $g(x)$ với cùng 1 tập xác định $X \subset \mathbb{R}$ là những hàm vô cùng lớn khi $x \to a$, khi đó nếu như

1. $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \infty$ thì $f(x)$ được gọi là hàm vô cùng lớn có bậc cao hơn $g(x)$.
2. $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = c \neq 0 (c \in \mathbb{R})$ thì $f(x), g(x)$ được gọi là hàm vô cùng lớn có cùng bậc.
3. $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 0$ thì $f(x)$ được gọi là hàm vô cùng lớn có bậc thấp hơn $g(x)$.
4. không tồn tại $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x)}{g(x)}$ hữu hạn hay vô cùng thì $f(x), g(x)$ được gọi là những hàm vô cùng lớn không so sánh được.

Định nghĩa 2.13.1 *Những hàm vô cùng lớn $f(x)$ và $g(x)$ khi $x \to a$ được gọi là tương đương nếu như* $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 1$.

Những giới hạn cơ bản của vô cùng lớn.

1. $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^\alpha}{a^x} = 0 \ (a > 1)$

2. $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln^\alpha x}{x^\beta} = 0 \ (\forall \alpha >, \beta > 0)$

2.14 Bài tập

2.14.1 Tìm giới hạn của hàm một biến bằng cách thay vô cùng bé tương đương

Tìm giới hạn của những hàm số sau:

Bài 2.14.1 $I = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\ln(1 + x \tan x)}{x^2 + \sin^3 x}$

Giải.

Ta có $\lim\limits_{x\to 0}\ln(1+x\tan x)=0$ và $\lim\limits_{x\to 0}x^2+\sin^3 x=0$ nên ta có thể thay chúng bằng những vô cùng bé tương đương.

Khi $x\to 0$ thì $\ln(1+x\tan x)\sim x\tan x\sim x^2$ vì $\ln(1+u(x))\sim u(x)$ khi $u(x)\to 0$ và $\tan x\sim x$.

Khi $x\to 0$ thì $x^2+\sin^3 x\sim x^2$.

Vậy $I=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2}{x^2}=1$.

Bài 2.14.2 $I=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(\cos x)}{\ln(1+x^2)}$

Giải.

Ta có $\lim\limits_{x\to 0}\ln(\cos x)=0$ và $\lim\limits_{x\to 0}\ln(1+x^2)=0$ nên ta có thể thay chúng bằng những vô cùng bé tương đương.

Khi $x\to 0$ thì $\ln(\cos x)=\ln(1+(\cos x-1))\sim\cos x-1\sim\dfrac{-x^2}{2}$ vì $\ln(1+u(x))\sim u(x)$ khi $u(x)\to 0$ và $1-\cos x\sim\frac{x^2}{2}$.

Khi $x\to 0$ thì $\ln(1+x^2)\sim x^2$.

Vậy $I=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\frac{-x^2}{2}}{x^2}=-\dfrac{1}{2}$.

Bài 2.14.3 $I=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sin(e^{x-1}-1)}{\ln x}$

Giải.

Ta có $\lim\limits_{x\to 1}\sin(e^{x-1}-1)=0$ và $\lim\limits_{x\to 1}\ln x=0$ nên ta có thể thay chúng bằng những vô cùng bé tương đương.

Khi $x\to 1$ thì $\sin(e^{x-1}-1)\sim e^{x-1}-1\sim x-1$ vì $\sin(u(x))\sim u(x), e^{u(x)}-1\sim u(x)$ khi $u(x)\to 0$.

Khi $x\to 1$ thì $\ln x=\ln(1+(x-1))\sim x-1$.

Vậy $I=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x-1}{x-1}=1$.

Bài 2.14.4 $I=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(e^x-1)(\cos x-1)}{\sin^3 x+2x^4}$

Giải.

Ta có $\lim\limits_{x\to 0}(e^x-1)(\cos x-1)=0$ và $\lim\limits_{x\to 0}\sin^3 x+2x^4=0$ nên ta có thể thay chúng bằng những vô cùng bé tương đương.

Khi $x\to 0$ thì $e^x-1\sim x,\cos x-1\sim\dfrac{-x^2}{2}$ nên $(e^x-1)(\cos x-1)\sim x(\dfrac{-x^2}{2})=\dfrac{-x^3}{2}$

Khi $x\to 0$ thì $\sin^3 x+2x^4\sim x^3$.

Vậy $I=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\frac{-x^3}{2}}{x^3}=-\dfrac{1}{2}$.

Bài 2.14.5 $I = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin 2x + 2\arctan 3x + 3x^2}{\ln(1 + 3x + \sin^2 x) + xe^x}$

2.14.2 So sánh những hàm vô cùng bé

Bài 2.14.6 *Hãy so sánh hai vô cùng bé* $\alpha(x) = x - \sin x, \beta(x) = mx^3, m \neq 0.$

Bài 2.14.7 *Tìm* α, β *để các vô cùng bé sau đây tương đương* $f(x) = x\cos x - \sin x, g(x) = \alpha x^\beta$, *khi* $x \to 0$.

Bài 2.14.8 *Tìm* α, β *để các vô cùng bé sau đây tương đương* $f(x) = x - \dfrac{x^2}{2} - \ln(1 + x)x, g(x) = \alpha x^\beta$, *khi* $x \to 0$.

2.14.3 Tìm giới hạn của hàm một biến bằng cách thay vô cùng lớn tương đương

Tìm giới hạn của những hàm số sau:

Bài 2.14.9 $I = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\sqrt{x^2+4} + 2x + 3\sqrt{x}}{\sqrt{x^2-4} + x}$

Bài 2.14.10 $I = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\sqrt{x^2+14} + x}{\sqrt{x^2-2} + x}$

Bài 2.14.11 $I = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{\sqrt{x^2+14} + x}{\sqrt{x^2-2} + x}$

Tìm giới hạn của những dãy số sau:

Bài 2.14.12 $I = \lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{\ln(n^2 - n + 1)}{\ln(n^{10} + n + 1)}$

Bài 2.14.13 $I = \lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{lg^2 10n}{lg^2 n}$

Bài 2.14.14 $I = \lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{lg(n^2 + 2n\cos n + 1)}{1 + lg(n+1)}$

2.14.4 So sánh những vô cùng lớn

Bài 2.14.15 *Vô cùng lớn nào sau đây có bậc cao nhất khi* $x \to +\infty:$ $3x + \ln^3 x, x\ln x, \sqrt{3x}, x(2 + \sin^4 x)$

Bài 2.14.16 *Vô cùng lớn nào sau đây có bậc cao nhất khi* $x \to +\infty:$ $2^x, x^2, x^2 + \sin^4 x, x\ln x$

2.14.5 Tìm giới hạn của hàm một biến dùng giới hạn cơ bản $\lim\limits_{x\to 0}(1+u(x))^{\frac{1}{u(x)}} = e$, biết rằng khi $x \to a$ thì $u(x) \to 0$.

Bài 2.14.17 $I = \lim\limits_{x\to+\infty} \left(\dfrac{x^2+4}{x^2-4}\right)^{x^2}$

Bài 2.14.18 $I = \lim\limits_{x\to 0} (1+2x^4)^{\frac{1}{\sin^2 x}}$

Bài 2.14.19 $I = \lim\limits_{x\to 0} (\ln(e+x))^{cotgx}$

Bài 2.14.20 $I = \lim\limits_{x\to 0} (1-\tan^2 x)^{\frac{1}{\sin^2 2x}}$

Bài 2.14.21 $I = \lim\limits_{x\to 0} (\cos x)^{\frac{1}{x^2}}$

Bài 2.14.22 $I = \lim\limits_{x\to\infty} \left(\dfrac{2x^2+3}{2x^2-1}\right)^{x^2}$

Bài 2.14.23 $I = \lim\limits_{x\to\infty} \left(e^{\frac{1}{x}} + \dfrac{1}{x}\right)^{x}$

2.14.6 Tìm giới hạn của biểu thức có dạng $f(x)^{g(x)}$ khi $x \to a$

Tìm giới hạn của những dãy số sau:

Bài 2.14.24 $I = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n^2.3^n + 4^n}$

Bài 2.14.25 $I = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n + (-1)^n}$

Bài 2.14.26 $I = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\dfrac{5n+1}{n+5}}$

Bài 2.14.27 $I = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\dfrac{2n^2-5n+3}{n^5+1}}$

Bài 2.14.28 $I = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\dfrac{n^4+3^n}{n+5^n}}$