Z-function

Z-function

Người viết: Nguyễn Nhật Minh Khôi - Đại học Khoa học Tự nhiên - ĐHQG-HCM

Reviewer:

- Trần Quang Lộc - ITMO University
- Hồ Ngọc Vĩnh Phát - Đại học Khoa học Tự nhiên - ĐHQG-HCM
- Nguyễn Phú Bình - THPT chuyên Hùng Vương, Bình Dương
- Nguyễn Hoàng Vũ - THPT chuyên Phan Bội Châu, Nghệ An

Tham khảo: cp-algorithm

Định nghĩa

Trong blog này, chúng ta sẽ tìm hiểu về hàm Z (Z-function) của một chuỗi S và những ứng dụng của nó.

Cho một chuỗi S độ dài n, ký hiệu là $S[0 \dots n-1]$, ta có hàm Z tương ứng là một mảng $z[0 \dots n-1]$, với $z[i]$ là độ dài tiền tố chung lớn nhất của chuỗi $S[0 \dots n-1]$ và $S[i \dots n-1]$.

Ở đây, ta sẽ quy ước hai điều: một là chuỗi và mảng sẽ mặc định bắt đầu từ 0, hai là $z[0] = 0$, ta có thể hiểu quy ước này nghĩa là chuỗi con xét ở đây phải là *chuỗi con nghiêm ngặt* (tức không tính chính nó).

Ví dụ hàm z với $S = aaabaab$:

i	S[0..n-1]	S[i..n-1]	z[i]
0	$aaabaab$	$aaabaab$	0 (quy ước)
1	$aaabaab$	$aabaab$	2
2	$aaabaab$	$abaab$	1
3	$aaabaab$	$baab$	0
4	$aaabaab$	aab	2
5	$aaabaab$	ab	1

i	S[0..n-1]	S[i..n-1]	z[i]
6	$aaabaab$	b	0

Thuật toán ngây thơ

Thuật toán ngây thơ rất đơn giản, với mọi i, ta sẽ tìm $z[i]$ bằng cách vét cạn, bắt đầu với $z[i] = 0$ và tăng $z[i]$ lên cho đến khi gặp kí tự đầu tiên không trùng và lưu ý $i + z[i]$ phải hợp lệ (bé hơn hoặc bằng vị trí cuối chuỗi $n - 1$). Thuật toán được trình bày như sau:

```
vector<int> z_function(string s) {
    int n = s.length();
    vector<int> z(n);
    for (int i = 1; i < n; ++i)
        while (i + z[i] < n && s[z[i]] == s[i + z[i]])
            ++z[i];
    return z;
}
```

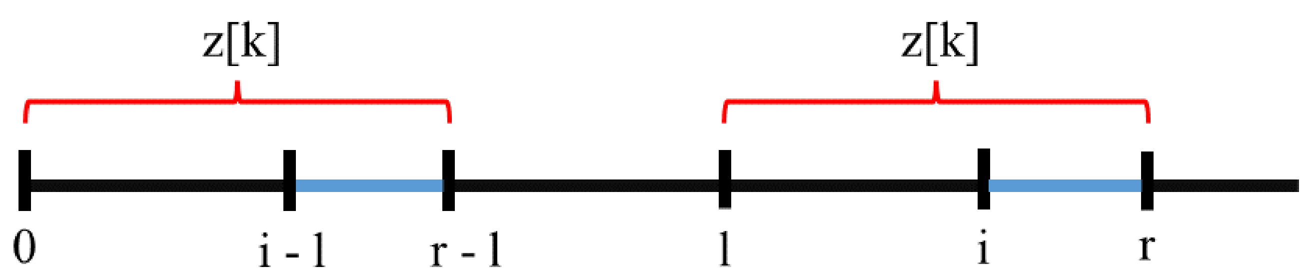
Độ phức tạp của thuật toán này là $O(n^2)$, trong phần sau ta sẽ tối ưu thuật toán này về độ phức tạp $O(n)$.

Thuật toán tối ưu

Để tối ưu thuật toán, ta có một nhận xét: nếu ta đã tính được $z[k]$ (ở đây chỉ xét $z[k] > 0$), ta có thông tin rằng đoạn $S[k \ldots k + z[k] - 1]$ khớp với đoạn $S[0 \ldots z[k] - 1]$. Tận dụng thông tin này, ta có thể rút ngắn quá trình tính các $z[i]$ ở sau ($i > k$). Để ngắn gọn, tạm thời đặt $l = k, r = k + z[k] - 1$. Cụ thể có hai trường hợp:

- $i \le r$: vì đoạn $s[l \ldots r]$ giống với đoạn $s[0 \ldots r - l]$, do đó ta không cần duyệt lại đoạn $s[i \ldots r]$ mà chỉ cần lấy lại $z[i - l]$ đã tính trước đó, tuy nhiên $z[i - l]$ có thể lớn hơn $r - i + 1$, tức vượt biên r đã duyệt, do đó ta chỉ lấy khởi tạo của $z[i]$ là:

$$z[i] = \mathtt{min}(r - i + 1, z[i - l])$$



- $i > r$: khi đó i nằm ngoài vùng ta đã kiểm tra, khi đó ta không thể tận dụng gì nên chỉ khởi tạo $z[i] = 0$ và làm theo thuật toán ngây thơ.

Từ nhận xét này, ta thấy rằng nếu $k + z[k] - 1$ càng lớn, tức r nào càng lớn thì ta càng có cơ hội khởi tạo được $z[i]$ lớn hơn (tức ít phải xét lại hơn). Do đó trong quá trình tính z ta sẽ duy trì hai biến l và r với ý nghĩa đoạn

$[l, r]$ là đoạn thoả $S[l \dots r] = S[0 \dots r - l]$ và r **là lớn nhất**. khi đó, mỗi lần xét một $z[i]$ mới ta sẽ khởi tạo $z[i]$ như đã đề cập ở trên. Sau khi tính xong $z[i]$, ta sẽ cập nhật lại l và r với đoạn $[i, i + z[i] - 1]$ mới tính. Từ đó ta có thuật toán cải tiến như sau:

```
vector<int> z_function(string s) {
    int n = s.length();
    vector<int> z(n);
    for (int i = 1, l = 0, r = 0; i < n; ++i) {
        // khoi tao z[i] theo thuat toan toi uu
        if (i <= r)
            z[i] = min(r - i + 1, z[i - l]);
        // tinh z[i]
        while (i + z[i] < n && s[z[i]] == s[i + z[i]])
            ++z[i];
        // cap nhat doan [l,r]
        if (i + z[i] - 1 > r) {
            l = i;
            r = i + z[i] - 1;
        }
    }
    return z;
}
```

Lưu ý rằng ở đây ta khởi tạo $l = r = 0$ để đảm bảo đây là một đoạn không chứa bất kỳ $i > 0$ nào.

Để chứng minh thuật toán tối ưu ta sẽ xem xét số phép tính trong vòng lặp `while`. Dễ thấy rằng, mỗi vị trí i sẽ chỉ có hai trường hợp sau:

- $i > r$: khi này nếu $z[i] = 0$ thì vòng lặp while sẽ chỉ lặp một lần, r sẽ được **giữ nguyên**. Ngược lại, nếu $z[i] > 0$ thì sau khi chạy, do $i > r$ nên chắc chắn $i + z[i] - 1 > r$, khi đó ta sẽ **tăng** r lên thành $i + z[i] - 1$.
- $i \le r$: ta có hai trường hợp nhỏ nữa:
  - $z[i - l] < r - i + 1$: do ta đã kiểm soát được $s[l \dots r]$ nên rõ ràng $z[i]$ sẽ không thể tăng lên nữa, do đó vòng lặp while sẽ dừng sau lần kiểm tra điều kiện đầu tiên, r sẽ được **giữ nguyên**.
  - $z[i - l] \ge r - i + 1$: khi đó, do ta chưa biết phía sau đoạn $s[i \dots r]$ có khớp tiếp không, nên có thể vòng while sẽ phải chạy thêm nữa. Tuy nhiên, khi chạy xong, r chắc chắn chỉ có thể **giữ nguyên** (không có thêm ký tự khớp nên $z[i] = r - i + 1$) hoặc **tăng lên** (có thêm ký tự khớp nên $z[i] > r - i + 1$).

Từ hai nhận xét này, ta thấy một điều quan trọng, đó là **phép toán** `++z[i]` **luôn làm tăng** r. Mà r chỉ có thể **tăng chứ không giảm**, hơn nữa **giá trị** r **tối đa chỉ có thể là** $n - 1$ nên số lần tăng của r chỉ có thể là $n - 1$. Từ hai điều này, ta kết luận rằng vòng lặp `while` chỉ lặp không quá $n - 1$ lần phép `++z[i]` trong suốt quá trình tính z. Do đó, độ phức tạp của thuật toán đã cho là $O(n)$.

Kĩ thuật hai con trỏ cũng là một cách giải thích khác cho thuật toán này. Ta có thể tưởng tượng l và r là hai con trỏ luôn tăng, việc thực hiện phép `++z[i]` trong vòng lặp `while` cũng tương đương với việc tăng r lên một đơn vị (l lúc này sẽ được gán lại bằng i hiện tại). Khi đó, vì r không bao giờ tăng quá $n - 1$ lần nên phép `++z[i]` cũng không bao giờ thực hiện quá $n - 1$ lần, ta kết luận thuật toán có độ phức tạp $O(n)$.

Một số ứng dụng

So khớp chuỗi

Cho chuỗi S độ dài n và T độ dài m, ta cần tìm chuỗi con liên tục trong S sao cho chuỗi con đó bằng với chuỗi T. Bạn đọc có thể nộp bài ở VNOJ .

Thuật toán trong trường hợp này rất đơn giản, ta chỉ cần tạo chuỗi mới $P = T + \diamond + S$, khi đó ta chỉ cần tính z của chuỗi P mới này và chọn ra các i có $z[i] = m$. Ở đây, $\diamond$ là một ký tự đặc biệt dùng để phân tách T và S trong chuỗi P, đảm bảo $z[i]$ không vượt quá độ dài của T, ký tự $\diamond$ này phải thoả điều kiện là không nằm trong cả chuỗi S và chuỗi T.

Giả sử $\diamond =$ #, thuật toán có thể cài đặt bằng ngôn ngữ C++ như sau:

```
vector<int> string_matching(string s, string t) {
    string p = t + '#' + s;
    int m = t.length();
    int n = s.length();
    vector<int> z = z_function(p);

    vector<int> res;
    for (int i = m + 1; i <= m + n; ++i) {
        // tim duoc dap an va them vao vector res
        if (z[i] == m)
            res.push_back(i - m - 1);
    }
    return res;
}
```

Số lượng chuỗi con phân biệt trong một chuỗi $O(n^2)$

Cho chuỗi S có độ dài n, ta cần tìm số lượng chuỗi con phân biệt của s.

Chúng ta sẽ giải quyết bài này một cách tuần tự như sau: biết được số lượng chuỗi con phân biệt của chuỗi s hiện tại là k, ta thêm một ký tự c vào, **đếm xem có bao nhiêu chuỗi con phân biệt mới của $s + c$ và cập nhật lại k**.

Gọi $t = reverse(s + c)$ là chuỗi thu được bằng cách viết ngược từ ký tự cuối tới ký tự đầu của $s + c$, ta nhận xét rằng các chuỗi con phân biệt mới sẽ luôn kết thúc tại c. Khi đó nhiệm vụ của chúng ta tương ứng với việc **đếm xem có bao nhiêu tiền tố của t không xuất hiện ở bất cứ đâu trong** t. Ta sẽ làm điều đó bằng cách tính hàm z của t và tìm giá trị lớn nhất z_{max}. Rõ ràng là các chuỗi con có độ dài z_{max} và nhỏ hơn đều xuất hiện lần thứ hai đâu đó trong t, còn các chuỗi con có độ dài lớn hơn z_{max} sẽ chưa xuất hiện. Do đó, số lượng chuỗi con mới xuất hiện là $length(t) - z_{max}$.

Vậy, thuật toán của chúng ta sẽ có vòng lặp i tăng từ 0 đến $n - 1$, tại mỗi i, biết được số lượng chuỗi phân biệt hiện tại là k, ta sẽ tính xem số lượng chuỗi con mới xuất hiện khi thêm $s[i]$ vào chuỗi $s[0 \dots i-1]$ đã xét và cập nhật lại số lượng chuỗi phân biệt. Độ phức tạp của thuật toán này là $O(n^2)$.

```
int num_substr(string s) {
    vector<int> z = z_function(s);
```

```
    string tmp;
    int k = 0;
    int n = s.length();
    for (int i = 0; i < n; ++i) {
        tmp = s[i] + tmp;
        vector<int> z = z_function(tmp);
        int zmax = *max_element(z.begin(), z.end());
        k += (i + 1) - zmax;
    }
    return k;
}
```

Chú ý rằng thay vì thêm dần dần ký tự vào cuối chuỗi s, ta có thể làm điều ngược lại là bỏ dần các ký tự ở đầu chuỗi s, độ phức tạp của hai cách làm này là tương đương nhau.

Period finding

Cho chuỗi S độ dài n, ta cần tìm chuỗi t ngắn nhất sao cho ta có thể tạo ra s bằng cách ghép một hoặc nhiều bản sao của chuỗi t lại.

Cách giải bài này là tính hàm z cho S, sau đó xét các i mà n chia hết cho i và dừng lại ở i đầu tiên thoả $i + z[i] = n$. Khi đó kết quả của chúng ta là i.

```
int length_compress(string s) {
    vector<int> z = z_function(s);
    int n = s.length();

    for (int i = 1; i < n; ++i) {
        if (n % i  == 0 && i + z[i] == n)
            return i;
    }
    return n;
}
```

Tính đúng đắn của thuật toán đã được chứng minh ở phần *Compressing a string* trong link này.

Bài tập luyện tập

- VNOI Z-function collection