Số học 7 - Bao hàm - Loại trừ (Inclusion-Exclusion)

Số học 7 - Bao hàm - Loại trừ (Inclusion-Exclusion)

Nguồn: HackerEarth

Người dịch: Bùi Việt Dũng

Bao hàm - loại trừ (Inclusion-Exclusion)

Phát biểu công thức

Công thức bao hàm - loại trừ được phát biểu như sau:

Để tính lực lượng của hợp của nhiều tập hợp, ta tính tổng lực lượng các tập hợp đó, rồi trừ đi lực lượng của giao của **các cặp hai** tập hợp khác nhau, rồi cộng lực lượng của giao các **bộ ba** tập hợp khác nhau, rồi trừ đi lực lượng của các **bộ bốn** tập hợp, và cứ thế cho đến khi ta xét đến giao của **tất cả các tập hợp**.

Công thức dành cho tập hợp

Công thức bao hàm - loại trừ có dạng như sau:

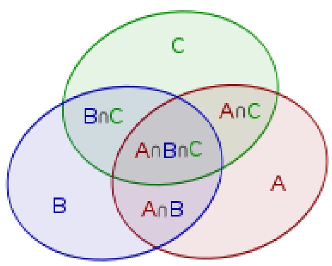
$\|\bigcup_{i=1}^{n} A_i\| = \sum_{i=1}^{n} \|A_i\| - \sum_{i \neq j} \|A_i \cap A_j\| + \|A_1 \cap A_2 \cap A_3\| + \|A_1 \cap A_2 \cap A_4\| + ... + \|A_{n-2} \cap A_{n-1} \cap A_n\| - ... - (-1)^n \|A_1 \cap A_2 \cap ... \cap A_n\|$

Ta có thể viết công thức này một cách gọn hơn bằng cách tính tổng của các tập con. Gọi B là tập hợp các tập hợp A_i. Khi đó công thức bao hàm - loại trừ có dạng:

$\|\bigcup_{i=1}^{n} A_i\| = \sum_{C \subset B} (-1)^{\|C\|-1} \|\bigcap_{e \in C} e\|$

Lập công thức bằng biểu đồ Venn (Venn diagrams)

Ta có biểu đồ sau biểu diễn ba tập hợp A, B và C.



Khi đó ta thấy lực lượng của $A \cup B \cup C$ bằng lực lượng của A, B, C trừ đi lực lượng của $A \cap B$, $B \cap C$, $C \cap A$ rồi cộng thêm lực lượng của $A \cap B \cap C$.

$\|A \cup B \cup C\| = \|A\| + \|B\| + \|C\| - \|A \cap B\| - \|B \cap C\| - \|C \cap A\| + \|A \cap B \cap C\|$

Tương tự, ta có thể lập công thức với n tập hợp.

Công thức dành cho xác suất

Nếu ta có n biến cố $A_1, A_2, \ldots, A_n$, $P(A_i)$ là xác suất của biến cố A_i, xác suất của biến cố hợp của chúng (nghĩa là biến cố "có ít nhất một trong số n biến cố $A_1, A_2, \ldots, A_n$ xảy ra") là

$$P(\bigcup_{i=1}^n A_i) = \sum_{i=1}^n P(A_i) \quad - \sum_{i \neq j} P(A_i A_j) \quad + P(A_1 A_2 A_3) \quad + P(A_1 A_2 A_4) \quad + \ldots + P(A_{n-2} A_{n-1} A_n) \quad - \ldots - (-1)^n . P(A_1 A_2 \ldots A_n)$$

Nếu gọi B là tập hợp các tập hợp A_i, công thức này cũng có thể viết gọn như sau:

$$P(\bigcup_{i=1}^n A_i) = \sum_{C \subset B} (-1)^{\|C\|-1} . P(\bigcap_{e \in C} e)$$

Chứng minh công thức bao hàm - loại trừ

Để thuật tiện trong chứng minh, ta sử dụng công thức viết gọn sau:

$$\| \bigcup_{i=1}^n A_i \| = \sum_{C \subset B} (-1)^{\|C\|-1} \| \bigcap_{e \in C} e \|$$

với B là tập hợp các tập hợp A_i.

Ta cần chứng minh một phần tử bất kì thuộc ít nhất một tập A_i, sẽ chỉ được đếm một lần trong công thức.

Xét một phần tử x bất kì thuộc $k \geq 1$ tập hợp A_i. Ta thấy

- Trong công thức, khi $\|C\| = 1$, x được đếm thêm k lần.
- Trong công thức, khi $\|C\| = 2$, x được đếm bớt đi $\binom{k}{2}$ lần bởi x bị đếm bớt đi khi ta xét một cặp 2 tập hợp khác nhau trong số k tập hợp chứa phần tử x.
- Trong công thức, khi $\|C\| = 3$, x được đếm thêm $\binom{k}{3}$ lần.
- ...
- Trong công thức, khi $\|C\| = k$, x được đếm $\binom{k}{k}$ lần. Nếu k lẻ thì x được đếm thêm, nếu k chẵn thì x được đếm bớt.
- Trong công thức, khi $\|C\| > k$, x không được đếm.

Vì vậy, số lần x được đếm là $T = \binom{k}{1} - \binom{k}{2} + \binom{k}{3} - \ldots + (-1)^{i-1} . \binom{k}{i} + \ldots + (-1)^{k-1} . \binom{k}{k}$.

Để tính T, ta khai triển $(1-x)^k$ bằng **nhị thức Niu-tơn (Newton binomial)**:

$$(1-x)^k = \binom{k}{0} - \binom{k}{1} . x + \binom{k}{2} . x^2 - \binom{k}{3} . x^3 + \ldots + (-1)^k . \binom{k}{k} . x^k.$$

Ta thấy với $x = 1$, $(1-x)^k = T - 1$, do đó $T = (1-1)^k + 1 = 1$ hay điều phải chứng minh.

Ứng dụng: Đếm số số nguyên tố cùng nhau với một số cho trước trong một đoạn

Đây là một bài toán dễ dựa trên công thức bao hàm - loại trừ.

Cho hai số nguyên n và r, đếm số số nguyên tố cùng nhau với n trong đoạn $[1; r]$.

Thuật toán: Tìm **phần bù (the inverse)**: Đếm số số không nguyên tố cùng nhau với n.

Xét các ước nguyên tố của n, đánh số chúng từ 1 đến k.

Ta có thể tính số số trong đoạn $[1; r]$ chia hết cho p_i bằng công thức $[\frac{r}{p_i}]$.

Tuy vậy, nếu ta chỉ tính tổng tất cả các số này, ta sẽ ra kết qủa sai. Đó là do một số số có thể chia hết cho nhiều p_i. Vì vậy ta cần sử dụng đến công thức bao hàm - loại trừ.

```
int solve (int n, int r) {
    int sum = 0;
    vector<int> p;
    for (int i=2; i*i<=n; ++i)
        if (n % i == 0) {

```

```
            p.push_back (i);
            while (n % i == 0) n /= i;
        }
    if (n > 1) p.push_back (n);
    for (int msk=1; msk<(1<<p.size()); ++msk) {
        int mult = 1, bits = 0;
        for (int i=0; i<(int)p.size(); ++i)
        if (msk & (1<<i)) {
            ++bits;
            mult *= p[i];
        }

        int cur = r / mult;
        if (bits % 2 == 1) sum += cur;
        else sum -= cur;
    }
    return r - sum;
}
```

Được cung cấp bởi Wiki.js