

Số học 4 - Phi hàm Euler

Số học 4 - Phi hàm Euler

Nguồn: [HackerEarth](#) [🔗](#) và 1 số bài viết trên Wikipedia

Người dịch: Bùi Việt Dũng

Phi hàm Euler (Euler's totient function)

Định nghĩa: $\phi(N)$ là số số nguyên tố cùng nhau với N trong đoạn từ 1 đến N .

Cách tính:

Ta đã biết **phân tích một số ra thừa số nguyên tố (factorization)** là biểu diễn số đó dưới dạng tích của các số nguyên tố. Dễ dàng chứng minh rằng cách biểu diễn là duy nhất. Ví dụ:

- $8 = 2^3$.
- $11 = 11$.
- $36 = 2^2 \cdot 3^2$.
- $935 = 5 \cdot 11 \cdot 17$.
- $5136 = 2^4 \cdot 3 \cdot 107$.

Từ cách phân tích một số ra thừa số nguyên tố, ta tính được phi hàm Euler của số đó.

```
1  int phi(int n) {
2      int res = n;
3      for (int i = 2; i * i <= n; ++i) {
4          if (n % i == 0) {
5              while (n % i == 0) {
6                  n /= i;
7              }
8              res -= res / i;
9          }
10     }
11     if (n != 1) {
12         res -= res / n;
13     }
14     return res;
15 }
```

Độ phức tạp của thuật toán: $O(\sqrt{N})$.

Công thức

Một công thức thường gặp để tính phi:

$$\phi(N) = n \prod_{p|n} (1 - 1/p)$$

(p là các ước nguyên tố của n).

Ví dụ:

$$\phi(6) = 6 \cdot (1 - 1/2) \cdot (1 - 1/3) = 2$$

Cài đặt:

```

1  int eulerPhi(int n) { // = n (1-1/p1) ... (1-1/pn)
2      if (n == 0) return 0;
3      int ans = n;
4      for (int x = 2; x*x <= n; ++x) {
5          if (n % x == 0) {
6              ans -= ans / x;
7              while (n % x == 0) n /= x;
8          }
9      }
10     if (n > 1) ans -= ans / n;
11     return ans;
12 }
```

Trong trường hợp đặc biệt, $N = p^k$, $\phi(N) = p^{k-1} \cdot (p - 1)$.

Hàm Nhân tính

Để tính Phi hàm Euler nhanh hơn, các bạn cần biết về [Hàm Nhân Tính](#).

Bài tập áp dụng:

- [VNOJ - VOSPOW](#) 
- [VNOJ - GCDSUM](#) 