

(d) và (P) không có điểm chung

## 7. Phương trình bậc hai.

Xét phương trình bậc hai  $ax^2 + bx + c = 0$  ( $a \neq 0$ )

Công thức nghiệm	Công thức nghiệm thu gọn
$\Delta = b^2 - 4ac$ Nếu $\Delta > 0$ : Phương trình có hai nghiệm phân biệt: $x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} ; x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$ Nếu $\Delta = 0$ : Phương trình có nghiệm kép : $x_1 = x_2 = \frac{-b}{2a}$ Nếu $\Delta < 0$ : Phương trình vô nghiệm	$\Delta' = b'^2 - ac$ với $b = 2b'$ - Nếu $\Delta' > 0$ : Phương trình có hai nghiệm phân biệt: $x_1 = \frac{-b' + \sqrt{\Delta'}}{a} ; x_2 = \frac{-b' - \sqrt{\Delta'}}{a}$ - Nếu $\Delta' = 0$ : Phương trình có nghiệm kép: $x_1 = x_2 = \frac{-b'}{a}$ - Nếu $\Delta' < 0$ : Phương trình vô nghiệm

## 8. Hệ thức Viet và ứng dụng.

### - Hệ thức Viet:

Nếu  $x_1, x_2$  là nghiệm của phương trình bậc hai  $ax^2 + bx + c = 0$  ( $a \neq 0$ ) thì:

$$\begin{cases} S = x_1 + x_2 = \frac{-b}{a} \\ P = x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a} \end{cases}$$

### - Một số ứng dụng:

+ Tìm hai số  $u$  và  $v$  biết  $u + v = S$ ;  $u \cdot v = P$  ta giải phương trình:

$$x^2 - Sx + P = 0$$

(Điều kiện  $S^2 - 4P \geq 0$ )

+ Nhẩm nghiệm của phương trình bậc hai  $ax^2 + bx + c = 0$  ( $a \neq 0$ )

Nếu  $a + b + c = 0$  thì phương trình có hai nghiệm:

$$x_1 = 1 ; x_2 = \frac{c}{a}$$

Nếu  $a - b + c = 0$  thì phương trình có hai nghiệm:

$$x_1 = -1 ; x_2 = -\frac{c}{a}$$

## 9. Giải bài toán bằng cách lập phương trình, hệ phương trình

**Bước 1:** Lập phương trình hoặc hệ phương trình

**Bước 2:** Giải phương trình hoặc hệ phương trình

**Bước 3:** Kiểm tra các nghiệm của phương trình hoặc hệ phương trình nghiệm nào thích hợp với bài toán và kết luận

## **B. CÁC DẠNG BÀI**

### **Dạng 1: Rút gọn biểu thức**

#### **Bài toán: Rút gọn biểu thức A**

☞ Để rút gọn biểu thức A ta thực hiện các bước sau:

- Quy đồng mẫu thức (nếu có)
- Đưa bớt thừa số ra ngoài căn thức (nếu có)
- Trục căn thức ở mẫu (nếu có)
- Thực hiện các phép tính: lũy thừa, khai căn, nhân chia....
- Cộng trừ các số hạng đồng dạng.

### **Dạng 2: Bài toán tính toán**

#### **Bài toán 1: Tính giá trị của biểu thức A.**

☞ Tính A mà không có điều kiện kèm theo đồng nghĩa với bài toán *Rút gọn biểu thức A*

#### **Bài toán 2: Tính giá trị của biểu thức A(x) biết x = a**

☞ Cách giải:

- Rút gọn biểu thức A(x).
- Thay x = a vào biểu thức rút gọn.

### **Dạng 3: Chứng minh đẳng thức**

#### **Bài toán: Chứng minh đẳng thức A = B**

☞ Một số phương pháp chứng minh:

- *Phương pháp 1:* Dựa vào định nghĩa.

$$A = B \Leftrightarrow A - B = 0$$

- *Phương pháp 2:* Biến đổi trực tiếp.

$$A = A_1 = A_2 = \dots = B$$

- *Phương pháp 3:* Phương pháp so sánh.

$$\left. \begin{array}{l} A = A_1 = A_2 = \dots = C \\ B = B_1 = B_2 = \dots = C \end{array} \right\} \rightarrow A = B$$

- *Phương pháp 4:* Phương pháp tương đương.

$$A = B \Leftrightarrow A' = B' \Leftrightarrow A'' = B'' \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow (*)$$

(\*) đúng do đó A = B

- *Phương pháp 5:* Phương pháp sử dụng giả thiết.

- *Phương pháp 6:* Phương pháp quy nạp.

- *Phương pháp 7:* Phương pháp dùng biểu thức phụ.

### **Dạng 4: Chứng minh bất đẳng thức**

#### **Bài toán: Chứng minh bất đẳng thức A > B**

☞ Một số bất đẳng thức quan trọng:

- **Bất đẳng thức Cosi:**

$$\frac{a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdot \dots \cdot a_n} \quad (\text{với } a_1, a_2, a_3, \dots, a_n \geq 0)$$

Dấu “=” xảy ra khi và chỉ khi:  $a_1 = a_2 = a_3 = \dots = a_n$

- **Bất đẳng thức BunhiaCốpski:**

Với mọi số  $a_1; a_2; a_3; \dots; a_n; b_1; b_2; b_3; \dots b_n$

$$(a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 + \dots + a_n b_n)^2 \leq (a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + \dots + a_n^2)(b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 + \dots + b_n^2)$$

Dấu “=” xảy ra khi và chỉ khi:  $\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \frac{a_3}{b_3} = \dots = \frac{a_n}{b_n}$

☛ **Một số phương pháp chứng minh:**

- *Phương pháp 1:* Dựa vào định nghĩa

$$A > B \Leftrightarrow A - B > 0$$

- *Phương pháp 2:* Biến đổi trực tiếp

$$A = A_1 = A_2 = \dots = B + M^2 > B \text{ nếu } M \neq 0$$

- *Phương pháp 3:* Phương pháp tương đương

$$A > B \Leftrightarrow A' > B' \Leftrightarrow A'' > B'' \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow (*)$$

(\*) đúng do đó  $A > B$

- *Phương pháp 4:* Phương pháp dùng tính chất bắc cầu

$$A > C \text{ và } C > B \rightarrow A > B$$

- *Phương pháp 5:* Phương pháp phản chứng

Để chứng minh  $A > B$  ta giả sử  $B > A$  và dùng các phép biến đổi tương đương để dẫn đến điều vô lý khi đó ta kết luận  $A > B$ .

- *Phương pháp 6:* Phương pháp sử dụng giả thiết.

- *Phương pháp 7:* Phương pháp quy nạp.

- *Phương pháp 8:* Phương pháp dùng biểu thức phụ.

**Dạng 5: Bài toán liên quan tới phương trình bậc hai**

**Bài toán 1: Giải phương trình bậc hai  $ax^2 + bx + c = 0$  ( $a \neq 0$ )**

☛ **Các phương pháp giải:**

- *Phương pháp 1:* Phân tích đưa về phương trình tích.

- *Phương pháp 2:* Dùng kiến thức về căn bậc hai

$$x^2 = a \rightarrow x = \pm \sqrt{a}$$

- *Phương pháp 3:* Dùng công thức nghiệm

$$\text{Ta có } \Delta = b^2 - 4ac$$

+ Nếu  $\Delta > 0$  : Phương trình có hai nghiệm phân biệt:

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} ; x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$$

+ Nếu  $\Delta = 0$  : Phương trình có nghiệm kép

$$x_1 = x_2 = \frac{-b}{2a}$$

+ Nếu  $\Delta < 0$  : Phương trình vô nghiệm

- *Phương pháp 4:* Dùng công thức nghiệm thu gọn

$$\text{Ta có } \Delta' = b'^2 - ac \text{ với } b = 2b'$$

+ Nếu  $\Delta' > 0$  : Phương trình có hai nghiệm phân biệt:

$$x_1 = \frac{-b' + \sqrt{\Delta'}}{a} ; x_2 = \frac{-b' - \sqrt{\Delta'}}{a}$$

+ Nếu  $\Delta' = 0$  : Phương trình có nghiệm kép

$$x_1 = x_2 = \frac{-b'}{a}$$

+ Nếu  $\Delta' < 0$  : Phương trình vô nghiệm

- *Phương pháp 5:* Nhẩm nghiệm nhờ định lý Vi-et.

Nếu  $x_1, x_2$  là nghiệm của phương trình bậc hai  $ax^2 + bx + c = 0$  ( $a \neq 0$ ) thì:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = \frac{-b}{a} \\ x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a} \end{cases}$$

**Chú ý:** Nếu  $a, c$  trái dấu tức là  $a \cdot c < 0$  thì phương trình luôn có hai nghiệm phân biệt.

**Bài toán 2: Biện luận theo m sự có**

**$ax^2 + bx + c = 0$  ( trong đó  $a, b, c$  phụ thuộc tham số  $m$  ).**

☛ Xét hệ số  $a$ : Có thể có 2 khả năng

a. Trường hợp  $a = 0$  với vài giá trị nào đó của  $m$ .

Giả sử  $a = 0 \Leftrightarrow m = m_0$  ta có:

(\*) trở thành phương trình bậc nhất  $ax + c = 0$  (\*\*)

+ Nếu  $b \neq 0$  với  $m = m_0$ : (\*\*) có một nghiệm  $x = -c/b$

+ Nếu  $b = 0$  và  $c = 0$  với  $m = m_0$ : (\*\*) vô định  $\Leftrightarrow$  (\*) vô định

+ Nếu  $b = 0$  và  $c \neq 0$  với  $m = m_0$ : (\*\*) vô nghiệm  $\Leftrightarrow$  (\*) vô nghiệm

b. Trường hợp  $a \neq 0$ : Tính  $\Delta$  hoặc  $\Delta'$

+ Tính  $\Delta = b^2 - 4ac$

Nếu  $\Delta > 0$ : Phương trình có hai nghiệm phân biệt:

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}; x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$$

Nếu  $\Delta = 0$ : Phương trình có nghiệm kép:  $x_1 = x_2 = \frac{-b}{2a}$

Nếu  $\Delta < 0$ : Phương trình vô nghiệm

+ Tính  $\Delta' = b'^2 - ac$  với  $b = 2b'$

Nếu  $\Delta' > 0$ : Phương trình có hai nghiệm phân biệt:

$$x_1 = \frac{-b' + \sqrt{\Delta'}}{a}; x_2 = \frac{-b' - \sqrt{\Delta'}}{a}$$

Nếu  $\Delta' = 0$ : Phương trình có nghiệm kép:  $x_1 = x_2 = \frac{-b'}{a}$

Nếu  $\Delta' < 0$ : Phương trình vô nghiệm

- Ghi tóm tắt phần biện luận trên.

**Bài toán 3: Tìm điều kiện của tham số  $m$  để phương trình bậc hai**

**$ax^2 + bx + c = 0$  ( trong đó  $a, b, c$  phụ thuộc tham số  $m$  ) có nghiệm.**

☛ Có hai khả năng để phương trình bậc hai  $ax^2 + bx + c = 0$  có nghiệm:

1. Hoặc  $a = 0, b \neq 0$

2. Hoặc  $a \neq 0, \Delta \geq 0$  hoặc  $\Delta' \geq 0$

Tập hợp các giá trị  $m$  là toàn bộ các giá trị  $m$  thỏa mãn điều kiện 1 hoặc điều kiện 2.

**Bài toán 4: Tìm điều kiện của tham số  $m$  để phương trình bậc hai**

**$ax^2 + bx + c = 0$  (  $a, b, c$  phụ thuộc tham số  $m$  ) có 2 nghiệm phân biệt.**

☛ Điều kiện có hai nghiệm phân biệt  $\begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta > 0 \end{cases}$  hoặc  $\begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta' > 0 \end{cases}$

**Bài toán 5: Tìm điều kiện của tham số  $m$  để phương trình bậc hai**

**$ax^2 + bx + c = 0$  ( trong đó  $a, b, c$  phụ thuộc tham số  $m$  ) có 1 nghiệm.**

☛ Điều kiện có một nghiệm:

$$\begin{cases} a = 0 \\ b \neq 0 \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta = 0 \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta' = 0 \end{cases}$$

**Bài toán 6: Tìm điều kiện của tham số**

$ax^2 + bx + c = 0$  ( trong đó  $a, b, c$  phụ thuộc tham số  $m$  ) có nghiệm kép.

☞ Điều kiện có nghiệm kép:  $\begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta = 0 \end{cases}$  hoặc  $\begin{cases} a = 0 \\ \Delta' = 0 \end{cases}$

**Bài toán 7: Tìm điều kiện của tham số  $m$  để phương trình bậc hai**

$ax^2 + bx + c = 0$  ( trong đó  $a, b, c$  phụ thuộc tham số  $m$  ) vô nghiệm.

☞ Điều kiện có một nghiệm:  $\begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta < 0 \end{cases}$  hoặc  $\begin{cases} a = 0 \\ \Delta' < 0 \end{cases}$

**Bài toán 8: Tìm điều kiện của tham số  $m$  để phương trình bậc hai**

$ax^2 + bx + c = 0$  ( trong đó  $a, b, c$  phụ thuộc tham số  $m$  ) có 1 nghiệm.

☞ Điều kiện có một nghiệm:  $\begin{cases} a = 0 \\ b \neq 0 \end{cases}$  hoặc  $\begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta = 0 \end{cases}$  hoặc  $\begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta' = 0 \end{cases}$

**Bài toán 9: Tìm điều kiện của tham số  $m$  để phương trình bậc hai**

$ax^2 + bx + c = 0$  (  $a, b, c$  phụ thuộc tham số  $m$  ) có hai nghiệm cùng dấu.

☞ Điều kiện có hai nghiệm cùng dấu:  $\begin{cases} \Delta \geq 0 \\ P = \frac{c}{a} > 0 \end{cases}$  hoặc  $\begin{cases} \Delta' \geq 0 \\ P = \frac{c}{a} > 0 \end{cases}$

**Bài toán 10: Tìm điều kiện của tham số  $m$  để phương trình bậc hai**

$ax^2 + bx + c = 0$  (  $a, b, c$  phụ thuộc tham số  $m$  ) có 2 nghiệm dương.

☞ Điều kiện có hai nghiệm dương:  $\begin{cases} \Delta \geq 0 \\ P = \frac{c}{a} > 0 \\ S = -\frac{b}{a} > 0 \end{cases}$  hoặc  $\begin{cases} \Delta' \geq 0 \\ P = \frac{c}{a} > 0 \\ S = -\frac{b}{a} > 0 \end{cases}$

**Bài toán 11: Tìm điều kiện của tham số  $m$  để phương trình bậc hai**

$ax^2 + bx + c = 0$  ( trong đó  $a, b, c$  phụ thuộc tham số  $m$  ) có 2 nghiệm âm.

☞ Điều kiện có hai nghiệm âm:

$$\begin{cases} \Delta \geq 0 \\ P = \frac{c}{a} > 0 \\ S = -\frac{b}{a} < 0 \end{cases} \quad \text{hoặc} \quad \begin{cases} \Delta' \geq 0 \\ P = \frac{c}{a} > 0 \\ S = -\frac{b}{a} < 0 \end{cases}$$

**Bài toán 12: Tìm điều kiện của tham số  $m$  để phương trình bậc hai**

$ax^2 + bx + c = 0$  (  $a, b, c$  phụ thuộc tham số  $m$  ) có 2 nghiệm trái dấu.

☞ Điều kiện có hai nghiệm trái dấu:

$$P < 0 \text{ hoặc } a \text{ và } c \text{ trái dấu.}$$

**Bài toán 13: Tìm điều kiện của tham số  $m$  để phương trình bậc hai**

$ax^2 + bx + c = 0$  (\*) (  $a, b, c$  phụ thuộc tham số  $m$  ) có một nghiệm  $x = x_1$ .

☞ Cách giải:

- Thay  $x = x_1$  vào phương trình (\*) ta có:  $ax_1^2 + bx_1 + c = 0 \rightarrow m$

- Thay giá trị của  $m$  vào (\*)  $\rightarrow x_1, x_2$

- Hoặc tính  $x_2 = S - x_1$  hoặc  $x_2 = \frac{P}{x_1}$

**Bài toán 14 :** Tìm điều kiện của tham :

$ax^2 + bx + c = 0$  ( $a, b, c$  phụ thuộc tham số  $m$ ) có 2 nghiệm  $x_1, x_2$  thỏa mãn các điều kiện:

- a.  $\alpha x_1 + \beta x_2 = \gamma$                       b.  $x_1^2 + x_2^2 = k$   
 c.  $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = n$                       d.  $x_1^2 + x_2^2 \geq h$                       e.  $x_1^3 + x_2^3 = t$

☛ Điều kiện chung:  $\Delta \geq 0$  hoặc  $\Delta' \geq 0$  (\*)

Theo định lí Viet ta có:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = \frac{-b}{a} = S & (1) \\ x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a} = P & (2) \end{cases}$$

- a. Trường hợp:  $\alpha x_1 + \beta x_2 = \gamma$

$$\text{Giải hệ } \begin{cases} x_1 + x_2 = \frac{-b}{a} \\ \alpha x_1 + \beta x_2 = \gamma \end{cases} \longrightarrow x_1, x_2$$

Thay  $x_1, x_2$  vào (2)  $\rightarrow m$

Chọn các giá trị của  $m$  thỏa mãn (\*)

- b. Trường hợp:  $x_1^2 + x_2^2 = k \Leftrightarrow (x_1 + x_2)^2 - 2x_1 x_2 = k$

Thay  $x_1 + x_2 = S = \frac{-b}{a}$  và  $x_1 \cdot x_2 = P = \frac{c}{a}$  vào ta có:

$$S^2 - 2P = k \rightarrow \text{Tìm được giá trị của } m \text{ thỏa mãn (*)}$$

- c. Trường hợp:  $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = n \Leftrightarrow x_1 + x_2 = nx_1 x_2 \Leftrightarrow -b = nc$

Giải phương trình  $-b = nc$  tìm được  $m$  thỏa mãn (\*)

- d. Trường hợp:  $x_1^2 + x_2^2 \geq h \Leftrightarrow S^2 - 2P - h \geq 0$

Giải bất phương trình  $S^2 - 2P - h \geq 0$  chọn  $m$  thỏa mãn (\*)

- e. Trường hợp:  $x_1^3 + x_2^3 = t \Leftrightarrow S^3 - 3PS = t$

Giải phương trình  $S^3 - 3PS = t$  chọn  $m$  thỏa mãn (\*)

**Bài toán 15:** Tìm hai số  $u$  và  $v$  biết tổng  $u + v = S$  và tích  $u \cdot v = P$  của chúng

☛ Ta có  $u$  và  $v$  là nghiệm của phương trình:

$$x^2 - Sx + P = 0 \quad (*)$$

(Điều kiện  $S^2 - 4P \geq 0$ )

Giải phương trình (\*) ta tìm được hai số  $u$  và  $v$  cần tìm.

**Nội dung 6.****Giải phương trình bằng phương pháp đặt ẩn số phụ****Bài toán 1:** Giải phương trình trùng phương  $ax^4 + bx^2 + c = 0$ ☛ Đặt  $t = x^2$  ( $t \geq 0$ ) ta có phương trình  $at^2 + bt + c = 0$ Giải phương trình bậc hai ẩn  $t$  sau đó thay vào tìm ẩn  $x$ **Bảng tóm tắt**

$at^2 + bt + c = 0$	$ax^4 + bx^2 + c = 0$
vô nghiệm	vô nghiệm
2 nghiệm âm	vô nghiệm
nghiệm kép âm	vô nghiệm
1 nghiệm dương	2 nghiệm đối nhau
2 nghiệm dương	4 nghiệm 2 cặp nghiệm đối nhau

**Bài toán 2:** Giải phương trình  $A(x^2 + \frac{1}{x^2}) + B(x + \frac{1}{x}) + C = 0$ ☛ Đặt  $x + \frac{1}{x} = t \Leftrightarrow x^2 - tx + 1 = 0$ Suy ra  $t^2 = (x + \frac{1}{x})^2 = x^2 + \frac{1}{x^2} + 2 \Leftrightarrow x^2 + \frac{1}{x^2} = t^2 - 2$ 

Thay vào phương trình ta có:

$$A(t^2 - 2) + Bt + C = 0 \Leftrightarrow At^2 + Bt + C - 2A = 0$$

Giải phương trình ẩn  $t$  sau đó thế vào  $x + \frac{1}{x} = t$  giải tìm  $x$ .**Bài toán 3:** Giải phương trình  $A(x^2 + \frac{1}{x^2}) + B(x - \frac{1}{x}) + C = 0$ ☛ Đặt  $x - \frac{1}{x} = t \Leftrightarrow x^2 - tx - 1 = 0$ Suy ra  $t^2 = (x - \frac{1}{x})^2 = x^2 + \frac{1}{x^2} - 2 \Leftrightarrow x^2 + \frac{1}{x^2} = t^2 + 2$ 

Thay vào phương trình ta có:

$$A(t^2 + 2) + Bt + C = 0 \Leftrightarrow At^2 + Bt + C + 2A = 0$$

Giải phương trình ẩn  $t$  sau đó thế vào  $x - \frac{1}{x} = t$  giải tìm  $x$ .**Bài toán 4:** Giải phương trình bậc cao

☛ Dùng các phép biến đổi đưa phương trình bậc cao về dạng:

- + Phương trình tích
- + Phương trình bậc hai.



**Nội dung 7:**

**Giải hệ phương trình**

**Bài toán:** Giải hệ phương trình 
$$\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$$

☛ **Các phương pháp giải:**

- + Phương pháp đồ thị
- + Phương pháp cộng
- + Phương pháp thế
- + Phương pháp đặt ẩn phụ

**Nội dung 7:**

**Giải phương trình vô tỉ**

**Bài toán 1:** Giải phương trình dạng  $\sqrt{f(x)} = g(x)$  (1)

☛ Ta có  $\sqrt{f(x)} = g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} g(x) \geq 0 \\ f(x) = [g(x)]^2 \end{cases} \quad \begin{matrix} (2) \\ (3) \end{matrix}$

Giải (3) đối chiếu điều kiện (2) chọn nghiệm thích hợp  $\rightarrow$  nghiệm của (1)

**Bài toán 2:** Giải phương trình dạng  $\sqrt{f(x)} + \sqrt{h(x)} = g(x)$

☛ Điều kiện có nghĩa của phương trình

$$\begin{cases} f(x) \geq 0 \\ h(x) \geq 0 \\ g(x) \geq 0 \end{cases}$$

Với điều kiện trên thỏa mãn ta bình phương hai vế để giải tìm x.

**Nội dung 8:**

**Giải phương trình chứa giá trị tuyệt đối**

**Bài toán:** Giải phương trình dạng  $|f(x)| = g(x)$

☛ **Phương pháp 1:**  $|f(x)| = g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} g(x) \geq 0 \\ [f(x)]^2 = [g(x)]^2 \end{cases}$

☛ **Phương pháp 2:** Xét  $f(x) \geq 0 \rightarrow f(x) = g(x)$   
Xét  $f(x) < 0 \rightarrow -f(x) = g(x)$

☛ **Phương pháp 3:** Với  $g(x) \geq 0$  ta có  $f(x) = \pm g(x)$

**Nội dung 9:**

**Giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức**

**Bài toán:** Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số  $y = f(x)$

☛ **Phương pháp 1:** Dựa vào lũy thừa bậc chẵn.

- Biến đổi hàm số  $y = f(x)$  sao cho:

$$y = M - [g(x)]^{2n}, n \in \mathbb{Z} \rightarrow y \leq M$$

Do đó  $y_{\max} = M$  khi  $g(x) = 0$

- Biến đổi hàm số  $y = f(x)$  sao cho:

$$y = m + [h(x)]^{2k}, k \in \mathbb{Z} \rightarrow y \geq m$$

Do đó  $y_{\min} = m$  khi  $h(x) = 0$

☛ **Phương pháp 2:** Dựa vào tập giá trị hàm.

☛ **Phương pháp 3:** Dựa vào đẳng thức.

**Nội dung 10:****Các bài toán liên quan đến hàm số****\* Điểm thuộc đường - đường đi qua một điểm****Bài toán:** Cho (C) là đồ thị của hàm số  $y = f(x)$  và một điểm  $A(x_A; y_A)$ .**Hỏi (C) có đi qua A không?**☛ Đồ thị (C) đi qua  $A(x_A; y_A)$  khi và chỉ khi tọa độ của A nghiệm đúng phương trình của (C)  $A \in (C) \Leftrightarrow y_A = f(x_A)$ Đó đó tính  $f(x_A)$ Nếu  $f(x_A) = y_A$  thì (C) đi qua A.Nếu  $f(x_A) \neq y_A$  thì (C) không đi qua A.**\* Sự tương giao của hai đồ thị****Bài toán :** Cho (C) và (L) theo thứ tự là đồ thị hàm số

$$y = f(x) \text{ và } y = g(x)$$

**Hãy khảo sát sự tương giao của hai đồ thị**☛ Tọa độ điểm chung của (C) và (L) là nghiệm của phương trình hoành độ giao điểm:  $f(x) = g(x) (*)$ 

- Nếu (\*) vô nghiệm thì (C) và (L) không có điểm chung.

- Nếu (\*) có nghiệm kép thì (C) và (L) tiếp xúc nhau.

- Nếu (\*) có 1 nghiệm thì (C) và (L) có 1 điểm chung.

- Nếu (\*) có 2 nghiệm thì (C) và (L) có 2 điểm chung.

**\* Lập phương trình đường thẳng****Bài toán 1:** Lập phương trình của đường thẳng (D) đi qua điểm  $A(x_A; y_A)$  và có hệ số góc bằng k.☛ Phương trình tổng quát của đường thẳng (D) là :  $y = ax + b (*)$ - Xác định a: ta có  $a = k$ - Xác định b: (D) đi qua  $A(x_A; y_A)$  nên ta có  $y_A = kx_A + b \rightarrow b = y_A - kx_A$ - Thay  $a = k$ ;  $b = y_A - kx_A$  vào (\*) ta có phương trình của (D)**Bài toán 2:** Lập phương trình của đường thẳng (D) đi qua hai điểm  $A(x_A; y_A)$ ;  $B(x_B; y_B)$ ☛ Phương trình tổng quát của đường thẳng (D) là :  $y = ax + b$ 

$$(D) \text{ đi qua } A \text{ và } B \text{ nên ta có: } \begin{cases} y_A = ax_A + b \\ y_B = ax_B + b \end{cases}$$

Giải hệ ta tìm được a và b suy ra phương trình của (D)

**Bài toán 3:** Lập phương trình của đường thẳng (D) có hệ số góc k và tiếp xúc với đường cong (C):  $y = f(x)$ ☛ Phương trình tổng quát của đường thẳng (D) là :  $y = kx + b$ Phương trình hoành độ điểm chung của (D) và (P) là:  $f(x) = kx + b (*)$ 

Vì (D) tiếp xúc với (P) nên (\*) có nghiệm kép.

Từ điều kiện này ta tìm được b và suy ra phương trình của (D)

**Bài toán 3:** Lập phương trình của đường thẳng (D) đi qua điểm  $A(x_A; y_A)$  và tiếp xúc với đường cong (C):  $y = f(x)$ ☛ Phương trình tổng quát của đường thẳng (D) là :  $y = kx + b$ Phương trình hoành độ giao điểm của (D) và (P) là:  $f(x) = kx + b (*)$ 

Vì (D) tiếp xúc với (P) nên (\*) có nghiệm kép.

Từ điều kiện này ta tìm được hệ thức liên hệ giữa a và b (\*\*)

Mặt khác: (D) qua  $A(x_A; y_A)$  do đó ta có  $y_A = ax_A + b (***)$ Từ (\*\*) và (\*\*\*)  $\rightarrow a$  và  $b \rightarrow$  Phương trình đường thẳng (D).

## PHẦN II: HÌNH HỌC

### A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

#### 1. Hệ thức lượng trong tam giác vuông.

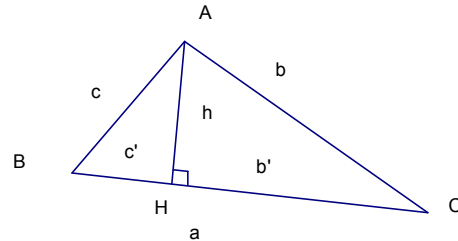
$$b^2 = ab' \quad c^2 = ac'$$

$$h^2 = b'c'$$

$$ah = bc$$

$$a^2 = b^2 + c^2$$

$$\frac{1}{h^2} = \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}$$



#### 2. Tỷ số lượng giác của góc nhọn.

$$0 < \sin \alpha < 1 \quad 0 < \cos \alpha < 1$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$$

$$\cot g \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}$$

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$$

$$\operatorname{tg} \alpha \cdot \cot g \alpha = 1 \quad 1 + \operatorname{tg}^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha}$$

$$1 + \cot^2 \alpha = \frac{1}{\sin^2 \alpha}$$

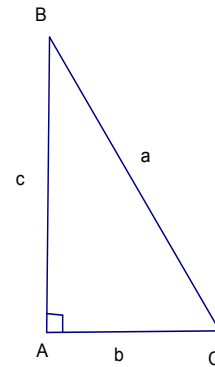
#### 3. Hệ thức về cạnh và góc trong tam giác vuông.

$$b = a \sin B = a \cos C$$

$$b = c \operatorname{tg} B = c \cot g C$$

$$c = a \sin C = a \cos B$$

$$c = b \operatorname{tg} C = b \cot g B$$



#### 4. Đường tròn.

- **Cách xác định:** Qua ba điểm không thẳng hàng ta vẽ được một và chỉ một đường tròn.

- **Tâm đối xứng, trục đối xứng:** Đường tròn có một tâm đối xứng; có vô số trục đối xứng.

- **Quan hệ vuông góc giữa đường kính và dây.**

Trong một đường tròn

+ Đường kính vuông góc với một dây thì đi qua trung điểm của dây ấy

+ Đường kính đi qua trung điểm của một dây không đi qua tâm thì vuông góc với dây ấy.

**- Liên hệ giữa dây và khoảng cách từ**

Trong một đường tròn:

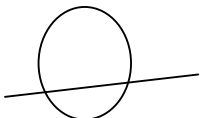
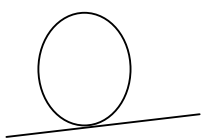
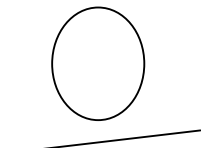
- + Hai dây bằng nhau thì cách đều tâm
- + Hai dây cách đều tâm thì bằng nhau
- + Dây nào lớn hơn thì dây đó gần tâm hơn
- + Dây nào gần tâm hơn thì dây đó lớn hơn

**- Liên hệ giữa cung và dây:**

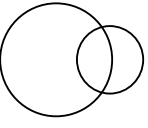
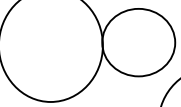
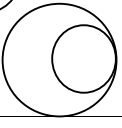
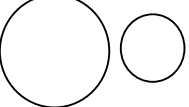
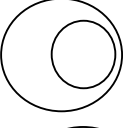
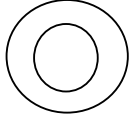
Trong một đường tròn hay trong hai đường tròn bằng nhau:

- + Hai cung bằng nhau căng hai dây bằng nhau
- + Hai dây bằng nhau căng hai cung bằng nhau
- + Cung lớn hơn căng dây lớn hơn
- + Dây lớn hơn căng cung lớn hơn.

**- Vị trí tương đối của đường thẳng và đường tròn:**

Vị trí tương đối	Số điểm chung	Hệ thức liên hệ giữa $d$ và $R$
- Đường thẳng và đường tròn cắt nhau 	2	$d < R$
- Đường thẳng và đường tròn tiếp xúc nhau 	1	$d = R$
- Đường thẳng và đường tròn không giao nhau 	0	$d > R$

- Vị trí tương đối của đường thẳng

Vị trí tương đối	Số điểm chung	Hệ thức liên hệ giữa d và R
- Hai đường tròn cắt nhau 	2	$R - r < OO' < R + r$
- Hai đường tròn tiếp xúc nhau + Tiếp xúc ngoài  + Tiếp xúc trong 	1	$OO' = R + r$ $OO' = R - r$
- Hai đường tròn không giao nhau + (O) và (O') ở ngoài nhau  + (O) đựng (O')  + (O) và (O') đồng tâm 	0	$OO' > R + r$ $OO' < R - r$ $OO' = 0$

5. Tiếp tuyến của đường tròn

- **Tính chất của tiếp tuyến:** Tiếp tuyến vuông góc với bán kính đi qua tiếp điểm.

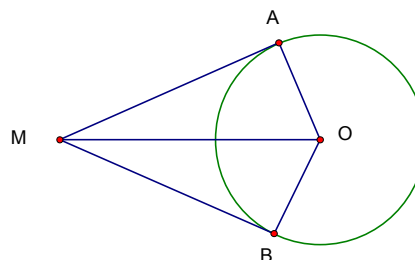
- **Dấu hiệu nhận biết tiếp tuyến:**

- + Đường thẳng và đường tròn chỉ có một điểm chung
- + Khoảng cách từ tâm của đường tròn đến đường thẳng bằng bán kính
- + Đường thẳng đi qua một điểm của đường tròn và vuông góc với bán kính đi qua điểm đó.

- **Tính chất của 2 tiếp tuyến cắt nhau**

MA, MB là hai tiếp tuyến cắt nhau thì:

- +  $MA = MB$
- + MO là phân giác của góc AMB
- + OM là phân giác của góc AOB



- Tiếp tuyến chung của hai đường tròn.  
đường tròn đó:

Tiếp tuyến chung ngoài	Tiếp tuyến chung trong

## 6. Góc với đường tròn

Loại góc	Hình vẽ	Công thức tính số đo
1. Góc ở tâm		$\widehat{AOB} = sd \widehat{AB}$
2. Góc nội tiếp		$\widehat{AMB} = \frac{1}{2} sd \widehat{AB}$
3. Góc tạo bởi tia tiếp tuyến và dây cung.		$\widehat{xBA} = \frac{1}{2} sd \widehat{AB}$
4. Góc có đỉnh ở bên trong đường tròn		$\widehat{AMB} = \frac{1}{2} (sd \widehat{AB} + sd \widehat{CD})$
5. Góc có đỉnh ở bên ngoài đường tròn		$\widehat{AMB} = \frac{1}{2} (sd \widehat{AB} - sd \widehat{CD})$

☛ **Chú ý:** Trong một đường tròn

- Các góc nội tiếp bằng nhau chắn các cung bằng nhau
- Các góc nội tiếp cùng chắn một cung thì bằng nhau
- Các góc nội tiếp chắn các cung bằng nhau thì bằng nhau
- Góc nội tiếp nhỏ hơn hoặc bằng  $90^\circ$  có số đo bằng nửa số đo của góc ở tâm cùng chắn một cung.
- Góc nội tiếp chắn nửa đường tròn là góc vuông và ngược lại góc vuông nội tiếp thì chắn nửa đường tròn.
- Góc tạo bởi tia tiếp tuyến và dây cung và góc nội tiếp cùng chắn một cung thì bằng nhau.



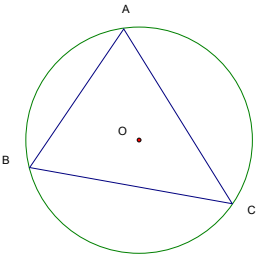
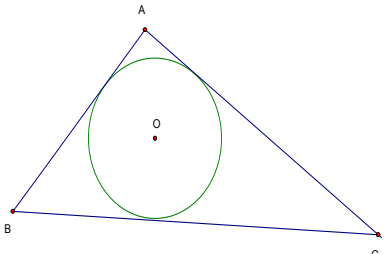
**7. Độ dài đường tròn - Độ dài cung tròn.**

- Độ dài đường tròn bán kính R:  $C = 2\pi R = \pi d$
- Độ dài cung tròn  $n^\circ$  bán kính R:  $l = \frac{\pi R n}{180}$

**8. Diện tích hình tròn - Diện tích hình quạt tròn**

- Diện tích hình tròn:  $S = \pi R^2$
- Diện tích hình quạt tròn bán kính R, cong  $n^\circ$ :  $S = \frac{\pi R^2 n}{360} = \frac{lR}{2}$

**9. Các loại đường tròn**

Đường tròn ngoại tiếp tam giác	Đường tròn nội tiếp tam giác	Đường tròn bàng tiếp tam giác
 <p>Tâm đường tròn là giao của ba đường trung trực của tam giác</p>	 <p>Tâm đường tròn là giao của ba đường phân giác trong của tam giác</p>	<p>Tâm của đường tròn bàng tiếp trong góc A là giao điểm của hai đường phân giác các góc ngoài tại B hoặc C hoặc là giao điểm của đường phân giác góc A và đường phân giác ngoài tại B (hoặc C)</p>

**10. Các loại hình không gian.**

**a. Hình trụ.**

- Diện tích xung quanh:  $S_{xq} = 2\pi rh$
- Diện tích toàn phần:  $S_{tp} = 2\pi rh + \pi r^2$
- Thể tích hình trụ:  $V = Sh = \pi r^2 h$

Trong đó  $\left\{ \begin{array}{l} r: \text{bán kính} \\ h: \text{chiều cao} \end{array} \right.$

**b. Hình nón:**

- Diện tích xung quanh:  $S_{xq} = 2\pi rl$
- Diện tích toàn phần:  $S_{tp} = 2\pi rl + \pi r^2$
- Thể tích hình trụ:  $V = \frac{1}{3} \pi r^2 h$

Trong đó  $\left\{ \begin{array}{l} r: \text{bán kính} \\ l: \text{đường sinh} \\ h: \text{chiều cao} \end{array} \right.$

**c. Hình nón cụt:**



- Diện tích xung quanh:  $S_{xq} = \pi(r_1 + r_2)l$

- Thể tích:  $V = \frac{1}{3}\pi h(r_1^2 + r_2^2 + r_1 r_2)$

Trong đó:  $\begin{cases} r_1: \text{bán kính đáy lớn} \\ r_2: \text{bán kính đáy nhỏ} \\ l: \text{đường sinh} \end{cases}$

**d. Hình cầu.**

- Diện tích mặt cầu:  $S = 4\pi R^2 = \pi d$

- Thể tích hình cầu:  $V = \frac{4}{3}\pi R^3$

Trong đó:  $\begin{cases} R: \text{bán kính} \\ d: \text{đường kính} \end{cases}$

**11. Tứ giác nội tiếp:**

☛ Dấu hiệu nhận biết tứ giác nội tiếp:

- Tứ giác có tổng hai góc đối bằng  $180^\circ$
- Tứ giác có góc ngoài tại một đỉnh bằng góc trong của đỉnh đối diện
- Tứ giác có 4 đỉnh cách đều một điểm.
- Tứ giác có hai đỉnh kề nhau cùng nhìn cạnh chứa hai đỉnh còn lại dưới một góc  $\alpha$ .



## **B. CÁC DẠNG BÀI**

### **Dạng 1: Chứng minh hai góc bằng nhau.**

#### **☛ Cách chứng minh:**

- Chứng minh hai góc cùng bằng góc thứ ba
- Chứng minh hai góc bằng với hai góc bằng nhau khác
- Hai góc bằng tổng hoặc hiệu của hai góc theo thứ tự đôi một bằng nhau
- Hai góc cùng phụ (hoặc cùng bù) với góc thứ ba
- Hai góc cùng nhọn hoặc cùng tù có các cạnh đối một song song hoặc v.góc
- Hai góc ó le trong, so le ngoài hoặc đồng vị
- Hai góc ở vị trí đối đỉnh
- Hai góc của cùng một tam giác cân hoặc đều
- Hai góc tương ứng của hai tam giác bằng nhau hoặc đồng dạng
- Hai góc nội tiếp cùng chắn một cung hoặc chắn hai cung bằng nhau.

### **Dạng 2: Chứng minh hai đoạn thẳng bằng nhau**

#### **☛ Cách chứng minh:**

- Chứng minh hai đoạn thẳng cùng bằng đoạn thứ ba
- Hai cạnh của một tam giác cân hoặc tam giác đều
- Hai cạnh tương ứng của hai tam giác bằng nhau
- Hai cạnh đối của hình bình hành (chữ nhật, hình thoi, hình vuông)
- Hai cạnh bên của hình thang cân
- Hai dây trương hai cung bằng nhau trong một đường tròn hoặc hai đường bằng nhau.

### **Dạng 3: Chứng minh hai đường thẳng song song**

#### **☛ Cách chứng minh:**

- Chứng minh hai đường thẳng cùng song song với đường thẳng thứ ba
- Chứng minh hai đường thẳng cùng vuông góc với đường thẳng thứ ba
- Chứng minh chúng cùng tạo với một cát tuyến hai góc bằng nhau:
  - + ở vị trí so le trong
  - + ở vị trí so le ngoài
  - + ở vị trí đồng vị.
- Là hai dây chắn giữa chúng hai cung bằng nhau trong một đường tròn
- Chúng là hai cạnh đối của một hình bình hành

### **Dạng 4: Chứng minh hai đường thẳng vuông góc**

#### **☛ Cách chứng minh:**

- Chúng song song song song với hai đường thẳng vuông góc khác.
- Chứng minh chúng là chân đường cao trong một tam giác.
- Đường kính đi qua trung điểm dây và dây.
- Chúng là phân giác của hai góc kề bù nhau.

### Dạng 5: Chứng minh ba đường thẳng

#### ☞ Cách chứng minh:

- Chứng minh chúng là ba đường cao, ba trung tuyến, ba trung trực, ba phân giác trong (hoặc một phân giác trong và phân giác ngoài của hai góc kia)
- Vận dụng định lý đảo của định lý Talet.

### Dạng 6: Chứng minh hai tam giác bằng nhau

#### ☞ Cách chứng minh:

##### \* Hai tam giác thường:

- Trường hợp góc - cạnh - góc (g-c-g)
- Trường hợp cạnh - góc - cạnh (c-g-c)
- Trường hợp cạnh - cạnh - cạnh (c-c-c)

##### \* Hai tam giác vuông:

- Có cạnh huyền và một góc nhọn bằng nhau
- Có cạnh huyền bằng nhau và một cạnh góc vuông bằng nhau
- Cạnh góc vuông đôi một bằng nhau

### Dạng 7: Chứng minh hai tam giác đồng dạng

#### ☞ Cách chứng minh:

##### \* Hai tam giác thường:

- Có hai góc bằng nhau đôi một
- Có một góc bằng nhau xen giữa hai cạnh tương ứng tỷ lệ
- Có ba cạnh tương ứng tỷ lệ

##### \* Hai tam giác vuông:

- Có một góc nhọn bằng nhau
- Có hai cạnh góc vuông tương ứng tỷ lệ

### Dạng 8: Chứng minh đẳng thức hình học

#### ☞ Cách chứng minh:

Giả sử phải chứng minh đẳng thức:  $MA.MB = MC.MD$  (\*)

- Chứng minh:  $\triangle MAC \sim \triangle MDB$  hoặc  $\triangle MAD \sim \triangle MCB$
- Nếu 5 điểm M, A, B, C, D cùng nằm trên một đường thẳng thì phải chứng minh các tích trên cùng bằng tích thứ ba:

$$MA.MB = ME.MF$$

$$MC.MD = ME.MF$$

Tức là ta chứng minh:  $\triangle MAE \sim \triangle MFB$

$$\triangle MCE \sim \triangle MFD$$

$$\rightarrow MA.MB = MC.MD$$

\* Trường hợp đặc biệt:  $MT^2 = MA.MB$  ta chứng minh  $\triangle MTA \sim \triangle MBT$

**Dạng 9: Chứng minh tứ giác nội tiếp**

☛ **Cách chứng minh:**

Dấu hiệu nhận biết tứ giác nội tiếp:

- Tứ giác có tổng hai góc đối bằng  $180^0$
- Tứ giác có góc ngoài tại một đỉnh bằng góc trong của đỉnh đối diện
- Tứ giác có 4 đỉnh cách đều một điểm.
- Tứ giác có hai đỉnh kề nhau cùng nhìn cạnh chứa hai đỉnh còn lại dưới một

góc  $\alpha$ .

**Dạng 10: Chứng minh MT là tiếp tuyến của đường tròn (O;R)**

☛ **Cách chứng minh:**

- Chứng minh  $OT \perp MT$  tại  $T \in (O;R)$
- Chứng minh khoảng cách từ tâm O đến đường thẳng MT bằng bán kính
- Dùng góc nội tiếp.

**Dạng 10: Các bài toán tính toán độ dài cạnh, độ lớn góc**

☛ **Cách tính:**

- Dựa vào hệ thức lượng trong tam giác vuông.
- Dựa vào tỷ số lượng giác
- Dựa vào hệ thức giữa cạnh và góc trong tam giác vuông
- Dựa vào công thức tính độ dài, diện tích, thể tích...