ĐẠI HỌC ĐÀ NẴNG
TRƯỜNG ĐẠI HỌC CÔNG NGHỆ THÔNG TIN VÀ TRUYỀN THÔNG VIỆT - HÀN
Vietnam - Korea University of Information and Communication Technology
http://vku.udn.vn

Curves and Surfaces

Computer Graphics

CONTENTs

- Đường cong
- Mặt cong

CONTENTs

- Đường cong
- Mặt cong

Đường cong

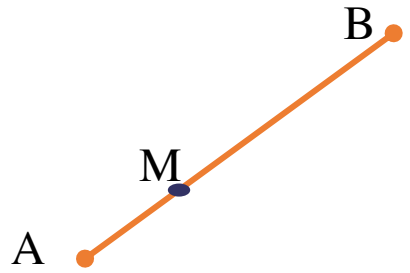
- **Cách biểu diễn**
  - Đường cong bất kỳ có thể biểu diễn bởi ma trận điểm
    - Cần số lượng điểm vô cùng lớn để biểu diễn chính xác hình dạng
  - Sử dụng hàm đa thức để thể hiện hình dạng đường cong
    - Dạng tổng quát của hàm đa thức

$$p(x) = a_n x_n^n + a_{n-1} x_{n-1}^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$$

n – nguyên dương, a_0, a_1, ..., a_n là số thực

  - Đa thức thuận tiện cho tính toán bằng máy tính
  - Trong đồ họa đòi hỏi xác định tiếp tuyến, pháp tuyến cho đường cong. Đa thức dễ dàng tính vi phân.

Phương trình tham số của đường thẳng



Gọi M(x,y) là một điểm thuộc đường thẳng AB,

Ta có: $\overrightarrow{AM} = t.\overrightarrow{AB}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x - x_A = t.(x_B - x_A) \\ y - y_A = t.(y_B - y_A) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = (1-t).x_A + t.x_B = X(t) \\ y = (1-t).y_A + t.y_B = Y(t) \end{cases}$$

Hay M=(1-t).A+t.B

Khi t=0 thì M≡A

t=1 thì M≡B

Nếu 0≤t≤1 thì M thuộc đoạn AB, Phương trình tham số đoạn AB là:

P(t)=(1-t).A+t.B với 0≤t≤1

Hay P(t) = (X(t), Y(t))

Đường cong Bezier

Bài toán: Cho n+1 điểm p_0, p_1, p_2,....,p_n được gọi là các điểm kiểm soát (điểm điều khiển). Xây dựng đường cong trơn đi qua 2 điểm p và pn được giới hạn trong bao lồi do n+1 điểm trên tạo ra.

Thuật toán Casteljau

Để xây dựng đường cong P(t), ta dựa trên một dãy các điểm cho trước rồi tạo ra giá trị P(t) ứng với mỗi giá trị t nào đó.

Phương pháp này tạo ra đường cong dựa trên một dãy các bước nội suy tuyến tính hay ***nội suy khoảng giữa*** (In-Betweening).

Đường cong Bezier

Thuật toán Casteljau

Với 3 điểm P_0 , P_1 , P_2 có thể xây dựng một Parabol nội suy từ 3 điểm này bằng cách chọn một giá trị $t \in [0, 1]$ rồi chia đoạn P_0P_1 theo tỉ lệ t, ta được điểm P_0^1 trên P_0P_1. Tương tự, chia tiếp P_1P_2 cũng theo tỉ lệ t, ta được P_1^1. Nối P_0^1 và P_1^1, lại lấy điểm trên $P_0^1P_1^1$ chia theo tỉ lệ t, được P_0^2. Tập điểm P_0^2 chính là đường cong p(t).

Biểu diễn bằng phương trình:

$$P_0^1(t) = (1-t).P_0 + t.P_1 \qquad (1)$$

$$P_1^1(t) = (1-t).P_1 + t.P_2 \qquad (2)$$

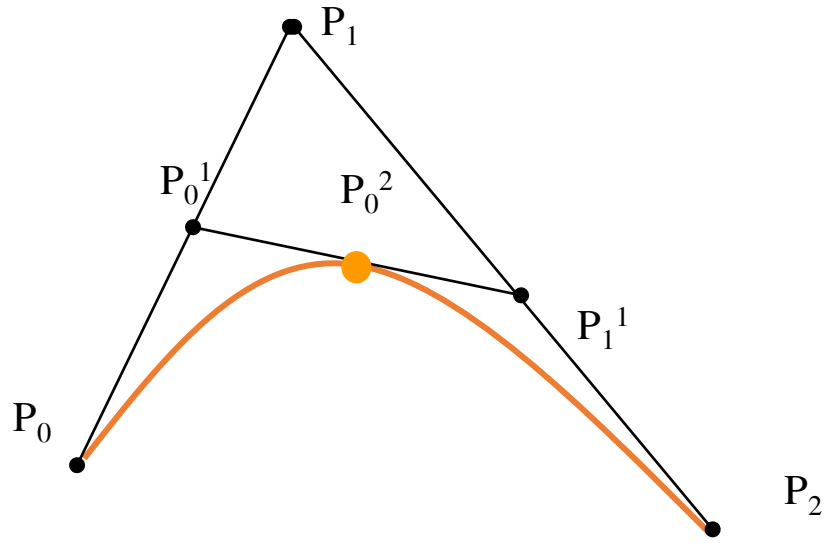
$$P_0^2(t) = (1-t).P_0^1 + t.P_1^1 \qquad (3)$$

Trong đó $t \in [0, 1]$

Thay (1), (2) vào (3) ta được:

$$\mathbf{P(t) = P_0^2(t) = (1-t)^2.P_0 + 2t.(1-t).P_1 + t^2.P_2}$$

Đây là một đường cong bậc 2 theo t nên nó là một Parabol.



Đường cong Bezier

Thuật toán Casteljau cho (n+1) điểm kiểm soát:

Giả sử ta có tập điểm: $P_0, P_1, P_2, ..., P_n$

Với mỗi giá trị t cho trước, tạo điểm $P_i^r(t)$ ở thế hệ thứ r, từ thế hệ thứ (r - 1) trước đó:

$$P_i^r(t) = (1-t).P_i^{r-1}(t) + t.P_{i+1}^{r-1}(t) \quad (r=0,1,...,n \text{ và } i=0,...,n-r)$$

Thế hệ cuối cùng:

$$P_0^n(t) = \sum_{i=0}^{n} P_i.(1-t)^{n-i}.t^i.C_n^i$$

là **đường cong Bezier** của các điểm $P_0, P_1, P_2, ..., P_n$

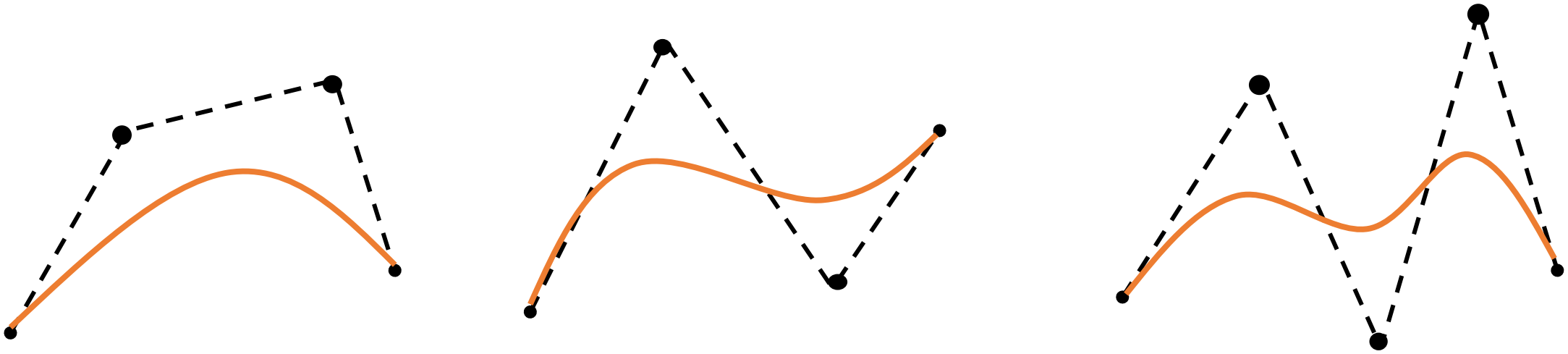
Các điểm P_i, i=0,1,...,n gọi là các **điểm kiểm soát** (điểm Bezier).

Đa giác tạo bởi các điểm kiểm soát gọi là **đa giác kiểm soát (**đa giác Bezier).

Đường cong Bezier

Thuật toán Casteljau cho (n+1) điểm kiểm soát:

Thế hệ cuối cùng: $$P_0^n(t) = \sum_{i=0}^{n} P_i.(1-t)^{n-i}.t^i.C_n^i$$



Đường cong Bezier

Đường cong Bezier dựa trên (n+1) điểm kiểm soát P_0 ,P_1 , ...,P_n được cho bởi công thức:

$$P_0^n(t) = P(t) = \sum_{k=0}^{n} P_k . B_k^n(t)$$

Trong đó: P(t) là một điểm trong mặt phẳng hoặc trong không gian.

$B_k^n(t)$ gọi là đa thức Bernstein, được cho bởi công thức:

$$B_k^n(t) = C_n^k .(1-t)^{n-k} .t^k = \frac{n!}{k!.(n-k)!} .(1-t)^{n-k} .t^k$$

với $n \geq k$

Mỗi đa thức Bernstein có bậc là n. Thông thường ta còn gọi các $B_k^n(t)$ là các **hàm trộn** (blending function).

Đường cong Bezier

Đường cong Bezier dựa trên (n+1) điểm kiểm soát P_0 ,P_1 , ...,P_n được cho bởi công thức:

$$P_0^n(t) = P(t) = \sum_{k=0}^{n} P_k . B_k^n(t)$$

Tương tự, đối với **mặt Bezier** ta có phương trình sau:

$$P(u,v) = \sum_{i=0}^{m} \sum_{k=0}^{n} P_{i,k} . B_i^m(u) B_k^n(v)$$

Trong trường hợp này, khối đa diện kiểm soát sẽ có (m+1).(n+1) đỉnh.

Đường cong Bezier

Để tạo ra một đường cong Bezier từ một dãy các điểm kiểm soát ta áp dụng phương pháp lấy mẫu hàm p(t) ở các giá trị cách đều nhau của tham số t, ví dụ có thể lấy $t_i = i/m$, $i=0,1,...,m$.

Khi đó ta sẽ được các điểm $P(t_i)$ từ công thức Bezier. Nối các điểm này bằng các đoạn thẳng ta sẽ được đường cong Bezier gần đúng.

Đường cong Bezier

vẽ đường cong Bezier trong mặt phẳng:

```
typedef  struct {
            int x;       int y ;
}CPoint;
int      fact int n){
            if (n == 0)  return 1;
            else       return n*fact(n - 1);
}
float   power(float a, int n){
            if (n==0)  return 1;
            else       return   a*power(a,n-1);
}
```

Đường cong Bezier

```
float BernStein(float t,int n, int k){
        float ckn,kq;
        ckn = fact(n)/(fac(k)*fac(n - k));
        kq = ckn*power(1 - t,n - k)*power(t,k);
        return kq;
}
CPoint TPt(CPoint P[ ],float t, int n){
        CPoint Pt;      float B;        int k;
        Pt.x=0;         Pt.y=0;
        for (k = 0; k<=n; k++){
                B = BernStein(t,n,k);
                Pt.x = Pt.x + P[k].x*B;    Pt.y = Pt.y + P[k].y*B;
        }
        return Pt;
}
```

Đường cong Bezier

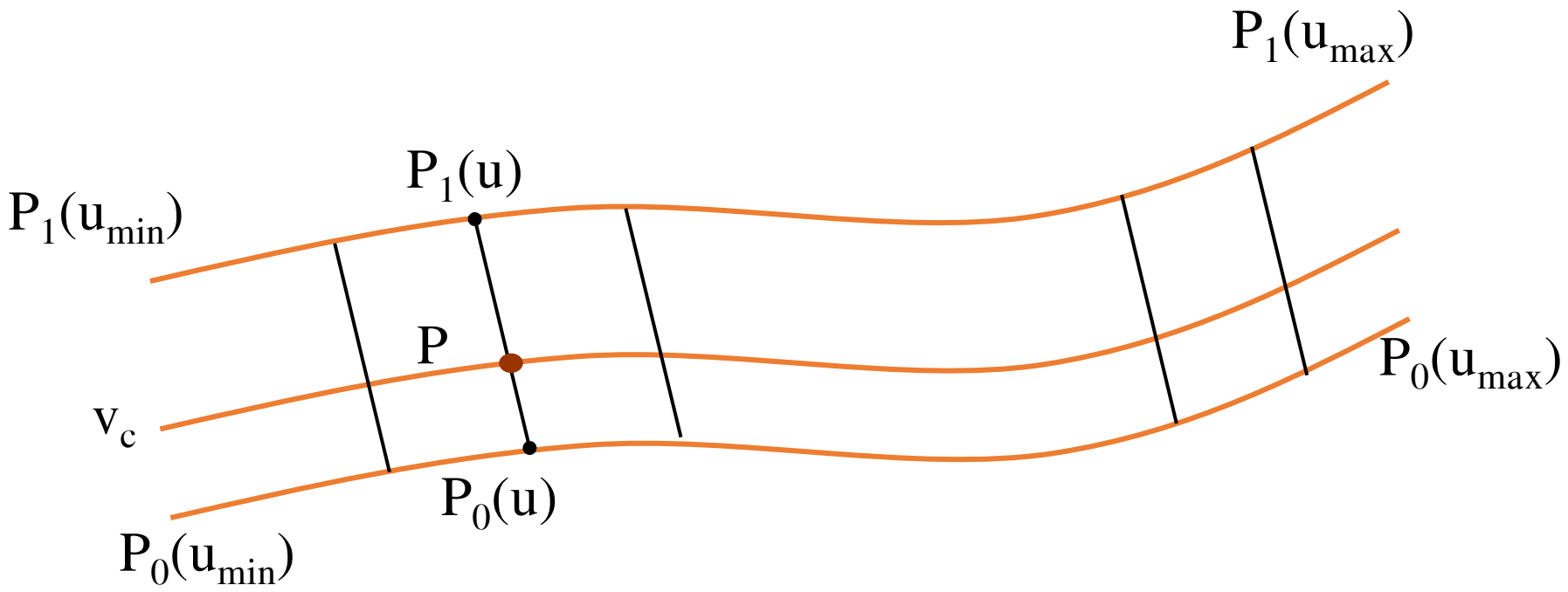
```
void DrawBezier( int n, CPoint P[ ]) {
        CPoint Pt;      float dt,t,m;      int i;
        t=0;      m=100; dt=1/m;
        moveto(P[0].x,P[0].y);
        for(i = 1; i<= m ; i++){
                Pt=TPt(P,t,n);
                lineto(Pt.x,Pt.y);
                t = t + dt;
        }
        lineto(P[n].x,P[n].y);
}
```

CONTENTs

- Đường cong
- **Mặt cong**

Mặt có quy tắc

Mặt được tạo bằng cách quét một đường thẳng trong không gian theo cách nào đó.



Mặt có quy tắc

Phương trình tổng quát:

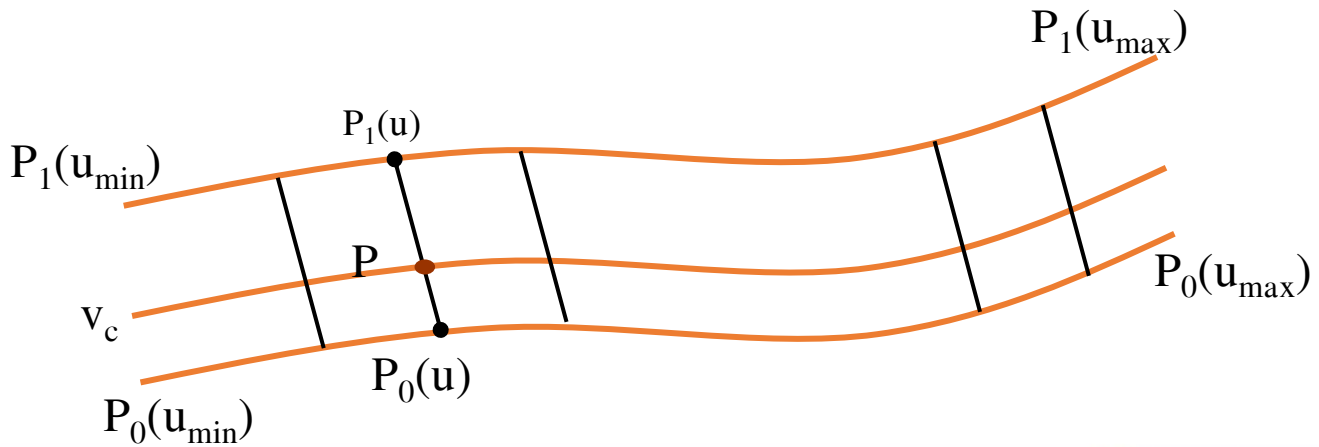
Gọi P_0P_1 là đoạn thẳng sinh ra mặt có quy tắc, và $P \in P_0P_1$

Ta có: $P(v)=(1-v)P_0+v.P_1$ với $v\in[0,1]$

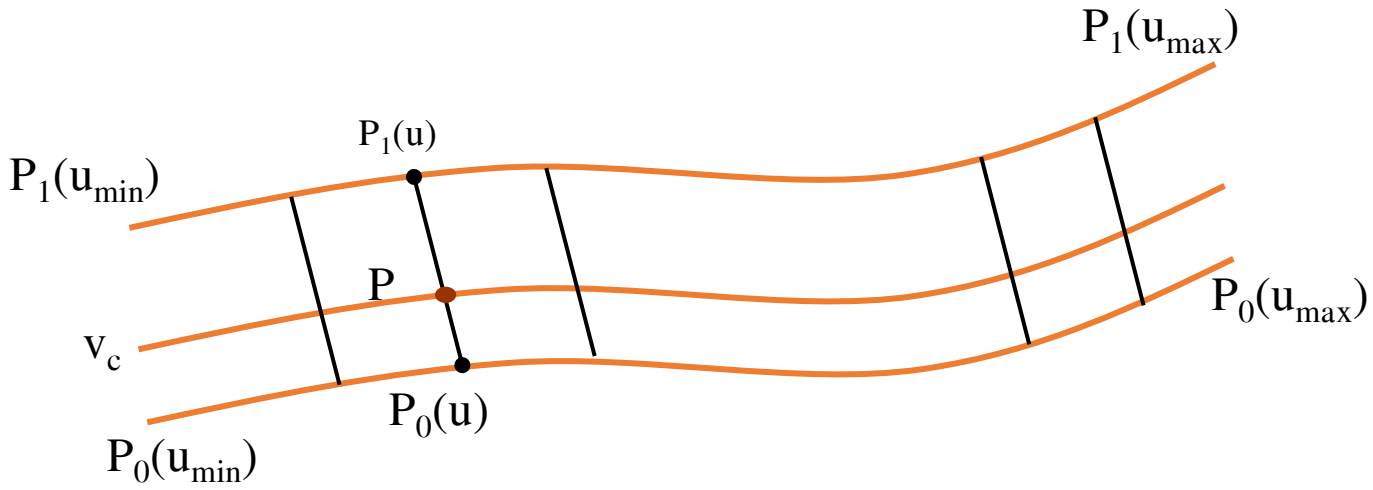
P_0 di chuyển trên đường $p_0(u)$, P_1 di chuyển trên đường $p_1(u)$

Nên P thuộc mặt có quy tắc: $\mathbf{P(u,v)=(1-v).p_0(u)+v.P_1(u)}$

Với $u_{min}\le u\le u_{max}$ và $0\le v\le 1$



Mặt có quy tắc



Đặc biệt:

Nếu v=0 và u thay đổi thì P di chuyển trên đường $p_0(u)$

Nếu v=1 và u thay đổi thì P di chuyển trên đường $p_1(u)$

Nếu $v=v_c$ và u thay đổi thì P di chuyển trên cung song song với $p_0(u_{min})$ $p_0(u_{max})$ gọi là đường đồng mức theo v.

Nếu $u=u_c$ và v thay đổi thì P di chuyển trên đoạn thẳng $p_0(u_c)$ $p_1(u_c)$ gọi là đường đồng mức theo u.

Mặt có quy tắc

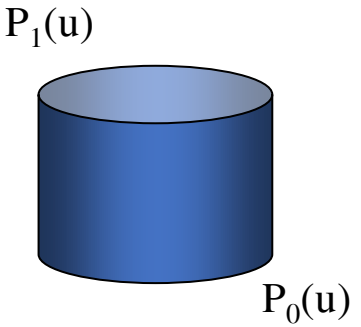
$P(u,v)=(1-v).p_0(u)+v.P_1(u)$

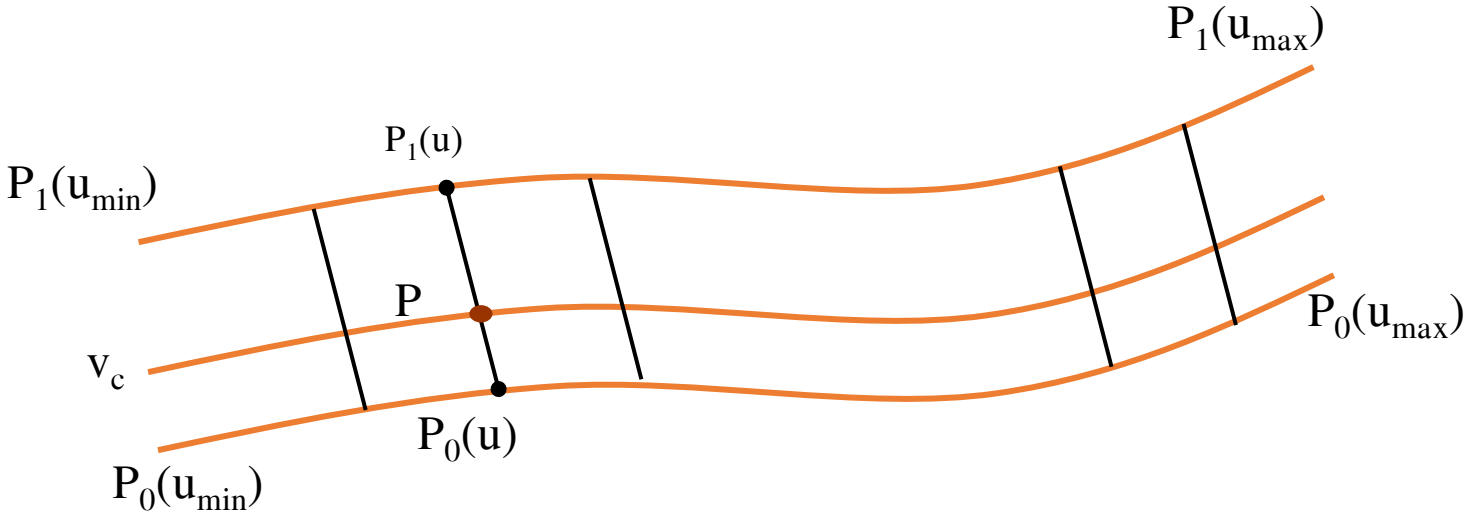
Ví dụ: Mặt trụ: $p_0(u)$ là đáy dưới

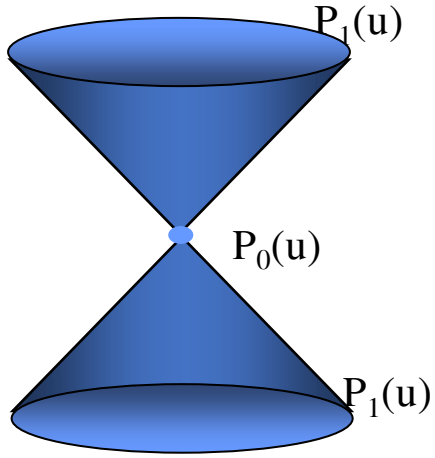
$P_1(u)$ là đáy trên

Mặt nón: $p_0(u)$ là 1 điểm

$P_1(u)$ là đường tròn







Mặt có quy tắc

Mặt trụ (Cylinder)

Mặt trụ là mặt được tạo ra khi một đường thẳng (đường sinh) được quét dọc theo một đường cong $p_0(u)$ (đường chuẩn). Đường cong $p_0(u)$ nằm trên một mặt phẳng nào đó.

Gọi d là đường sinh, d=const.

$p_0(u)$ là đáy dưới

$P_1(u)$ là đáy trên

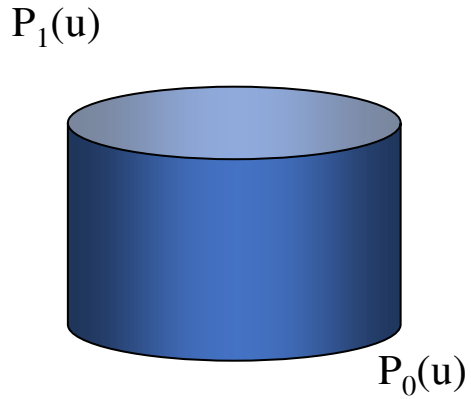
Suy ra: $d = P_1(u) - P_0(u)$

Ta có: $p(u,v) = (1-v).P_0(u)+v.P_1(u)$

$= P_0(u)+(P_1(u)-P_0(u)).v$

$= P_0(u)+d.v$

Vậy $p(u,v) = P_0(u)+d.v$



Mặt có quy tắc

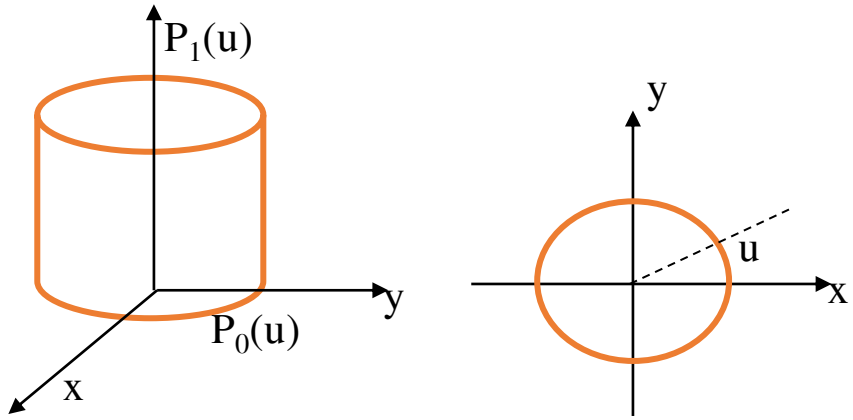
Mặt trụ (Cylinder)

Pt mặt trụ: $p(u,v) = P_0(u)+d.v$

Dạng quen thuộc của mặt trụ là mặt trụ tròn: Trong mặt phẳng xOy, lấy $P_0(u)$ là đường tròn tâm O bán kính r .

Ta có: $d=(0,0,h)$

$P_0(u)=(r.\cos(u), r.\sin(u), 0)$



vậy:
$$\begin{cases} X(u,v) = r.\cos(u) \\ Y(u,v) = r.\sin(u) \\ Z(u,v) = h.v \end{cases} \quad \text{với} \quad \begin{cases} 0 \le v \le 1 \\ 0 \le u \le 2\pi \end{cases}$$

Mặt có quy tắc

```
void   DrawCylinder(float R, float h){
       Point3D P;          Point2D P1;
       double   Delta_U,Delta_V,u,v;
       Delta_U = 0.06;  Delta_V = 0.03;
       for (u=0; u<2*M_PI; u+=Delta_U){
              for (v=0; v<1; v+=Delta_V){
                     P.x = R*cos(u) ;      P.y = R*sin(u) ;
                     P.z = v*h;            P1 = Chieu(KieuChieu,P);
                     putpixel(xc+P1.x,yc+P1.y,WHITE);
              }
       }
}
```

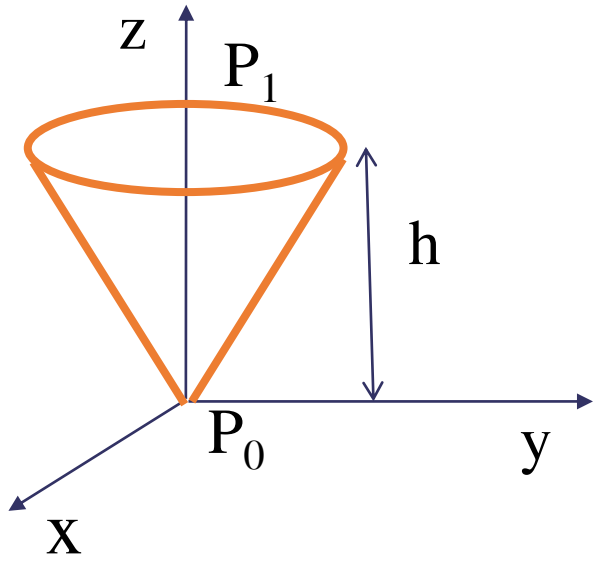
Mặt nón(Cone)

Mặt nón là mặt được tạo ra khi một đường thẳng di chuyển dọc theo một đường cong phẳng cho trước. Các đường thẳng luôn đi qua một điểm cố định gọi là đỉnh của mặt nón

$p_0(u)$ trùng với gốc toạ độ O

$P_1(u)$ là đường tròn tâm (0,0,h) bán kinh r.

$P_1(u)=(r.\cos(u), r.\sin(u), h)$



Ta có: $\mathbf{p(u,v)= (1-v).P_0(u)+v.\ P_1(u)= v.P_1(u)}$

Vậy $\mathbf{p(u,v) = v.P_1(u)}$

Hay:
$$\begin{cases} X(u,v) = v.r.\cos(u) \\ Y(u,v) = v.r.\sin(u) \\ Z(u,v) = v.h \end{cases} \quad \text{với} \quad \begin{cases} 0 \le v \le 1 \\ 0 \le u \le 2\pi \end{cases}$$

Mặt nón(Cone)

```
void DrawCone(float R, float h){
        Point3D P;        Point2D P1;   double Delta_U,Delta_V,u,v;
        Delta_U = 0.03;  Delta_V = 0.1;
        for (u=0; u<2*M_PI ;u+=Delta_U){
            for (v=0; v<1; v+=Delta_V){
                P.x = v*R*cos(u);   P.y = v*R*sin(u);
                P.z = v*h;              P1 = Chieu(KieuChieu,P);
                putpixel(xc+P1.x,yc+P1.y,WHITE);
             }
        }
}
```

Mặt tròn xoay

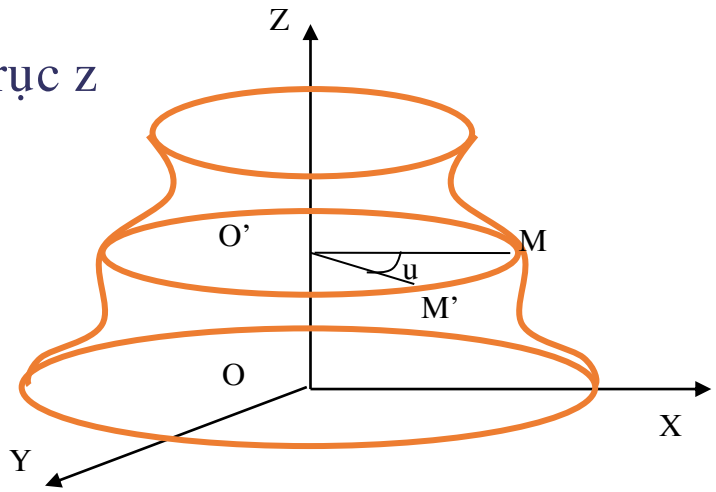
Tạo bằng cách quay đường cong C quanh một trục nào đó.

Giả sử: Đường cong C thuộc mặt phẳng xOz, trục quay là trục z

Gọi M(x, y, z) là một điểm thuộc C.

Ta có M(X(v),0,Z(v))

Cho M quay quanh trục z một góc u ⇨M thuộc mặt phẳng z=Z(v)



Gọi ảnh của M qua phép quay là M'(x, y, z)

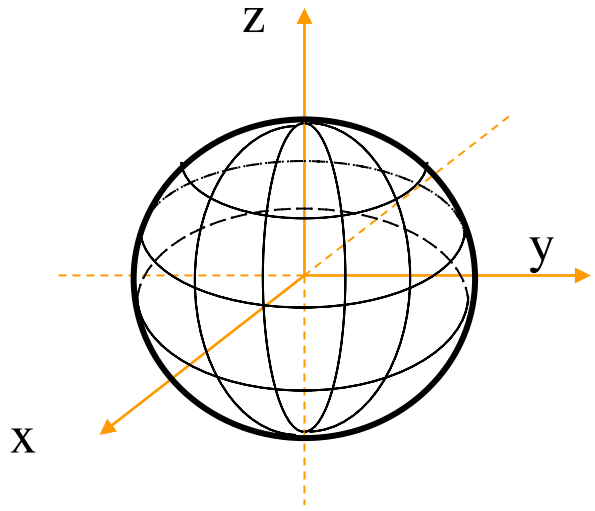
⇨ Tính M'(x,y,z) qua X(v), Z(v) và u.

Ta có: O'M=O'M'=X(v)

Hay:
$$\begin{cases} x = X(v).\cos(u) \\ y = X(v).\sin(u) \\ z = Z(v) \end{cases}$$
với
$$\begin{cases} v_{min} \le v \le v_{max} \\ 0 \le u \le 2\pi \end{cases}$$

Mặt tròn xoay

Mặt cầu: Với mặt cầu tâm O bán kính r thì C là ½ đường tròn trong mặt phẳng xOz.

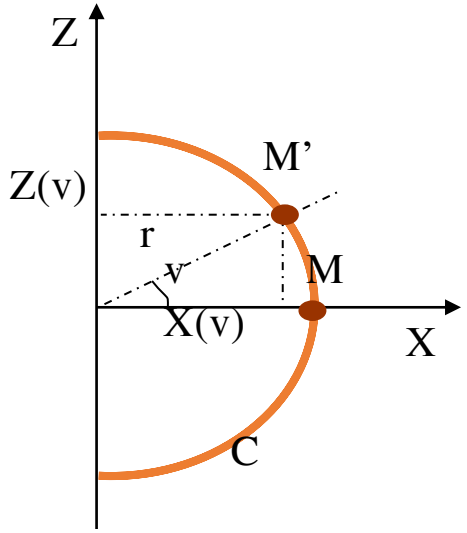


Ta có: $X(v)=r.\cos(v);$

$Z(v)=r.\sin(v)$

$$\begin{cases} X(u,v) = r.\cos(u).\cos(v) \\ Y(u,v) = r.\sin(u).\cos(v) \\ Z(u,v) = r.\sin(v) \end{cases}$$

với $$\begin{cases} -\pi/2 \le v \le \pi/2 \\ 0 \le u \le 2\pi \end{cases}$$



Mặt tròn xoay

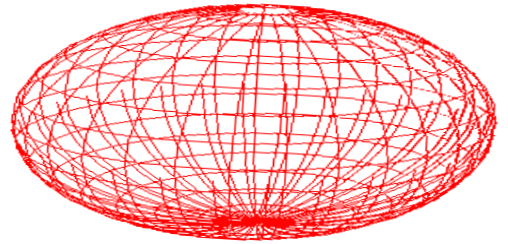
Mặt cầu:

```
void DrawSphere(float R){
        Point3D P;   Point2D P1;  double Delta_U,Delta_V,u,v,Pi_2;
        Pi_2 = M_PI/2;    Delta_U = 0.1;    Delta_V = 0.1;
        for (v=-Pi_2; v<Pi_2 ;v+=Delta_V){
            for (u=0; u<2*M_PI; u+=Delta_U){
                P.x = R*cos(u)*cos(v);  P.y = R*sin(u)*cos(v);
                P.z = R*sin(v);          P1 = Chieu(KieuChieu,P);
                putpixel(xc+P1.x,yc+P1.y,GREEN);
            }
        }
}
```

Mặt tròn xoay

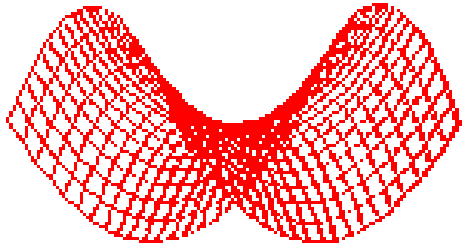
Mặt Ellipsoid:

$$\begin{cases} X(u,v) = R_x.\cos(u).\cos(v) \\ Y(u,v) = R_y.\sin(u).\cos(v) \\ Z(u,v) = R_z.\sin(v) \end{cases} \text{ với } \begin{cases} -\pi/2 \le v \le \pi/2 \\ 0 \le u \le 2\pi \end{cases}$$



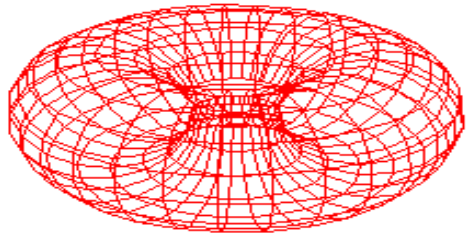
Mặt Hypeboloid:

$$\begin{cases} X(u,v) = u \\ Y(u,v) = v \\ Z(u,v) = u^2 - v^2 \\ -1 \le u, v \le 1 \end{cases}$$



Mặt xuyến toroid:

$$\begin{cases} X(u,v) = (R + a.\cos(v)).\cos(u) \\ Y(u,v) = (R + a.\cos(v)).\sin(u) \\ Z(u,v) = a.\sin(v) \\ 0 \le u \le 2\pi\ ; \quad -\pi/2 \le v \le \pi/2 \end{cases}$$



Mặt tròn xoay

Phương pháp chính ở đây là vẽ các đường đồng mức theo u và v.

Để vẽ một đường đồng mức u tại giá trị u' khi v chạy từ V_{Min} đến V_{Max} ta làm như sau:

-Tạo một tập hợp các giá trị v[i] $\in$ [V_{Min} ,V_{Max}], xác định vị trí P[i] = (X(u',v[i]), Y(u',v[i]), Z(u',v[i])).

-Chiếu từng điểm P[i] lên mặt phẳng.

-Vẽ các đường gấp khúc dựa trên các điểm 2D P'[i].

TÓM LẠI: vẽ một mặt cong, ta thực hiện các bước sau

-Nhập các hệ số của phương trình mặt:
a, b, c, d, U_{min}, U_{max}, V_{min}, V_{max}.

-Tính các hàm 2 biến: X(u,v), Y(u,v), Z(u,v).

-Khởi tạo phép chiếu: Song song/Phối cảnh.

-Vẽ họ đường cong u.

-Vẽ họ đường cong v.

Curves and Surfaces

Computer Graphics

Thank You…!