$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_2 = 24 \\ 3x_2 + x_3 - x_4 + x_5 = 5 \\ 3x_1 + 2x_3 + x_4 \le 34 \\ 3x_1 + 8x_2 + 4x_3 + 2x_4 \le 56 \\ x_j \ge o \quad (j = \overline{1,5}) \end{cases}$$

ĐS: Bài toán có phương án tối ưu $x^* = (0, 0, 4, 20, 21)$

Bài 14: Giải bài toán sau bằng phương pháp đơn hình:

$$f(x) = 2x_1 + x_2 + 4x_3 + 3x_4 + 2x_5 \rightarrow \max$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 + x_5 \le 27 \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 + 3x_4 + 2x_5 \le 25 \\ x_1 - x_3 = 5 \\ x_j \ge 0 \quad (j = \overline{1,5}) \end{cases}$$

ĐS: Bài toán có phương án tối ưu $x^* = (8, 0, 3, 0, 0)$

Bài 15: Cho bài toán $f(x) = 11x_1 + 7x_2 - 4x_3 - 16x_4 \rightarrow \min$

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 + 3x_4 \le -12 \\ -x_1 + 4x_2 - 3x_3 - 8x_4 \ge 20 \\ -2x_1 + x_2 - x_3 - x_4 \le -2 \\ x_j \ge 0,\ j = \overline{1,4} \end{cases}$$

Giải bài toán bằng phương pháp đơn hình.

ĐS: $x^* = (0, 26, 28, 0)$.

BÀI TOÁN VẬN TẢI

I. TÓM TẮT MỘT SỐ LÝ THUYẾT

1. Nội dung kinh tế và dạng toán học

Giả sử tại một thời điểm và trên một khu vực kinh tế nhất định có m nơi sản xuất (kho) một loại hàng hoá thuần nhất và n nơi tiêu thụ loại hàng hoá đó. Ký hiệu các nơi sản xuất là $A_i \ (i = \overline{1,m})$ và gọi chúng là những trạm phát, các nơi tiêu thụ là $B_j \ (j = \overline{1,n})$ và gọi là những trạm thu. Lượng hàng hoá có ở trạm phát A_i là a_i đơn vị và lượng hàng hoá yêu cầu ở trạm thu B_j là b_j đơn vị. Không phân biệt trạm phát và thu, từ đây ta sẽ gọi những số a_i và b_j là những yêu cầu của chúng.

Giả thiết chi phí vận chuyển của một đơn vị hàng hoá từ trạm phát A_i đến trạm thu B_j là $c_{ij} \ (c_{ij} \ge 0)$. Ta hiểu " chi phí " ở đây không hoàn toàn theo nghĩa thông thường mà theo một quy ước nhất định, có thể đó là chi phí thực, cũng có thể là độ dài quãng đường nối A_i và B_j hoặc lượng hao phí nhiên liệu hoặc thời gian cần thiết để vận chuyển .v.v. . . Vấn đề đặt ra là hãy thành lập một phương án vận chuyển hàng hoá sao cho đáp ứng đầy đủ yêu cầu của các trạm thu bằng tất cả các lượng hàng hoá có ở trạm phát với tổng chi phí vận chuyển là nhỏ nhất.

Đặt x_{ij} là lượng hàng hoá vận chuyển từ trạm phát A_i đến trạm thu B_j, hiển nhiên $x_{ij} \geq 0 (\forall i, j)$. Yêu cầu của mọi trạm thu đều thoả mãn đầy đủ nghĩa là: $\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j (j = \overline{1,n})$; hàng hoá ở tất cả các trạm phát đều được sử dụng để thoả mãn yêu cầu của các trạm thu nên $\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i (i = \overline{1,m})$. Như vậy tổng chi phí vận chuyển sẽ là $\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij}$ và phải làm cho nó đạt cực tiểu. Tóm lại ta đi tới bài toán sau:

Tìm hệ thống $\{x_{ij}\} (i = \overline{1,m}; j = \overline{1,n})$ sao cho:

$$f(x) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij} \to \min \qquad (1)$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i (i = \overline{1,m}) \qquad (2)$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j (j = \overline{1,n}) \qquad (3)$$

$$x_{ij} \geq 0 \ (i = \overline{1,m}; j = \overline{1,n}) \qquad (4)$$

Dễ thấy rằng nếu $\sum_{i=1}^{m} a_i \neq \sum_{j=1}^{n} b_j$ tức là tổng lượng hàng hoá có và tổng lượng yêu cầu về hàng hoá ấy không bằng nhau thì bài toán không thể có phương án, vì vậy nó sẽ luôn được khảo sát với giả thiết $\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j$ và khi đó gọi là bài toán vận tải cân bằng thu phát.

Tuy nhiên trong thực tế hầu như thường xuyên ta gặp các bài toán không cân bằng thu phát. Trong trường hợp $\sum_{i=1}^{m} a_i > \sum_{j=1}^{n} b_j$ thì để thoả mãn yêu cầu của các trạm thu không nhất thiết phải sử dụng toàn bộ hàng hoá có ở các trạm phát nên trong mô hình bài toán phải thay hệ ràng buộc (2) bằng hệ ràng buộc bất đẳng thức:

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} \leq a_i (i = \overline{1,m}) \qquad (2')$$

Trong trường hợp trái lại $\sum_{i=1}^{m} a_i < \sum_{j=1}^{n} b_j$, phải thay hệ (3) bằng hệ:

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} \leq b_j (j = \overline{1,n}) \qquad (3')$$

Một trong hai dạng bài toán này là bài toán không chính tắc, nhưng như đã biết, dùng thủ thuật biến phụ luôn luôn quy được về bài toán dạng chính tắc, nghĩa là về bài toán cân bằng thu phát. Vì vậy từ đây ta chỉ xét bài toán cân bằng thu phát.

2. Mô tả bài toán vận tải dưới dạng bảng

Ngoài cách thể hiện bài toán dưới dạng mô hình toán học như trên, người ta còn mô tả bài toán dưới dạng bảng, mang tính chất trực giác cao với một số quy ước nhất định, rất thuận tiện cho việc tìm lời giải của bài toán. Trước hết ta xây dựng một bảng gồm m hàng và n cột theo mẫu dưới đây. Mỗi hàng đặc trưng cho một trạm phát, còn mỗi cột đặc trưng cho một trạm thu, trên hàng hay cột ghi yêu cầu của trạm tương ứng.

	b_1	b_2	....	b_n
a_1	c_{11}	c_{12}	....	c_{1n}
a_2	c_{21}	c_{22}	....	c_{2n}
......	......	......	....	......
a_m	c_{m1}	c_{m2}	....	c_{mn}

Trên bảng giao của hàng i và cột j là ô (i,j). Ô (i,j) đặc trưng cho đoạn đường nối trạm phát A_i và trạm thu B_j nên ở ô này ghi c_{ij} ở góc trên bên trái. Mỗi ô (i,j) còn tương ứng với một biến số x_{ij}, cũng tức là với một véc tơ A_{ij}. Như vậy mọi dữ liệu cho trước của bài toán vận tải đều được thể hiện trên bảng.

Cần phải nghiên cứu một số đặc điểm của bảng tương ứng với bài toán vận tải. Trước hết ta sẽ định nghĩa một khái niệm quan trọng trên bảng: *Vòng là một tập hợp ô trên bảng mà trong đó mỗi ô đều nằm cùng hàng (cùng cột) chỉ với một ô đứng trước nó, đồng thời nằm cùng cột(cùng hàng) chỉ với một ô đứng sau nó.*

Từ định nghĩa ta thấy một hàng hoặc một cột mà vòng đi qua thì phải và chỉ qua hai ô, do đó tổng số ô trên vòng là một số chẵn và ít nhất là 4 ô. Có thể mô tả vòng dưới dạng hình thức hoá như sau: $(i_1, j_1)(i_1, j_2)(i_2, j_2).....(i_k, j_k)(i_k, j_1)$.

Định lý 1: *Một hệ véc tơ điều kiện* $\{A_{ij} : (i, j) \in K\}$ *của bài toán vận tải là độc lập tuyến tính khi và chỉ khi tập hợp các ô thuộc K không tạo thành vòng.*

Giả sử x là phương án cực biên, ta gọi tập hợp m+n-1 ô không tạo vòng bao hàm tập ô tương ứng với các thành phần dương của $x\ (x_j > 0)$ là tập ô cơ sở của phương án cực biên ấy, ký hiệu S. Như vậy khi nói x là phương án cực biên với tập ô cơ sở S, ta phải hiểu S có các nội dung sau:

+ $|S| = m + n - 1$

+ S không tạo vòng, $\{(i, j) : x_{ij} > 0\} \subset S$.

+ Các ô $(i, j) \in S$ gọi là các ô cơ sở tương ứng với x_{ij} là các thành phần cơ sở của phương án cực biên, các ô $(i, j) \notin S$ gọi là các ô phi cơ sở, ứng với x_{ij} là thành phần phi cơ sở, tất nhiên $x_{ij} = 0$.

3.Các phương pháp xây dựng phương án cực biên

Sử dụng nguyên tắc phân phối tối đa, tuỳ thuộc vào cách ưu tiên phân phối ta có những phương pháp khác nhau để xây dựng phương án cực biên.

a) Phương pháp góc Tây-Bắc: *Luôn ưu tiên phân phối cho ô nằm ở góc tây-bắc của bảng.* Phương pháp này không quan tâm tới chi phí mà thực hiện máy móc theo sự bố trí các trạm trên bảng. Rõ ràng về mặt ý nghĩa kinh tế thì phương án thu được rất bất hợp lý, tuy nhiên

3.Các phương pháp xây dựng phương án cực biên

Sử dụng nguyên tắc phân phối tối đa, tuỳ thuộc vào cách ưu tiên phân phối ta có những phương pháp khác nhau để xây dựng phương án cực biên.

a) Phương pháp góc Tây-Bắc: *Luôn ưu tiên phân phối cho ô nằm ở góc tây-bắc của bảng.* Phương pháp này không quan tâm tới chi phí mà thực hiện máy móc theo sự bố trí các trạm trên bảng. Rõ ràng về mặt ý nghĩa kinh tế thì phương án thu được rất bất hợp lý, tuy nhiên nhờ tính chất máy móc nó lại rất thuận tiện khi giải bài toán trên máy tính điện tử.

b) Phương pháp chi phí nhỏ nhất (đường gần): *Luôn ưu tiên phân phối cho ô có c_{ij} nhỏ nhất trong bảng đang xét.* Phương pháp này tỏ ra hợp lý hơn vì đã tính đến mức chi phí khi vận chuyển, nơi nào chi phí thấp sẽ vận chuyển trước, như vậy phương án cực biên thu được có nhiều khả năng gần với phương án tối ưu.

c) Phương pháp Fogels: *Luôn ưu tiên phân phối cho ô có c_{ij} nhỏ nhất nằm trên hàng hay cột có hiệu số giữa chi phí nhỏ nhì và chi phí nhỏ nhất là lớn nhất.* Trong phương pháp này ngoài mức chi phí nhỏ nhất còn quan tâm đến chênh lệch giữa nó và mức chi phí kế cận nên sẽ hạn chế được số lượng hàng phải chịu mức tăng chi phí lớn, do đó phương án tìm được nói chung sẽ tốt hơn và kinh nghiệm cho thấy nó rất gần với phương án tối ưu.

4.**Phương pháp thế vị giải bài toán vận tải**

Tiêu chuẩn tối ưu

Viết lại bài toán vận tải: $f(x)=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}c_{ij}x_{ij}\to \min$ (1)

$$\sum_{j=1}^{n}x_{ij}=a_i(i=\overline{1,m}) \quad (2)$$

$$\sum_{i=1}^{m}x_{ij}=b_j(j=\overline{1,n}) \quad (3)$$

$$x_{ij}\ge 0 \ (i=\overline{1,m};\ j=\overline{1,n}) \quad (4)$$

Định lý 2: *Điều kiện cần và đủ để phương án $x=\{x_{ij}\}$ của bài toán vận tải tối ưu là tồn tại hệ thống số $\{u_i,v_j\}$ thoả mãn:*

a) $v_j-u_i\le c_{ij}\ (\forall i,j)$

b) $v_j-u_i=c_{ij}$ *nếu* $x_{ij}>0$

5. Thuật toán của phương pháp thế vị

Dựa trên tiêu chuẩn tối ưu ta xây dựng thuật toán giải bài toán vận tải, thực hiện một cách đơn giản ngay trên bảng mô tả bài toán giống như trong phương pháp đơn hình, ở đây cũng xuất phát từ một phương án cực biên đánh giá nó và tìm cách chuyển sang một phương

án cực biên khác tốt hơn. Quá trình được lặp lại và vì bài toán vận tải luôn giải được nên sau một số hữu hạn bước sẽ đi tới phương án cực biên tối ưu với giả thiết bài toán không suy biến.

Giả sử đã biết một phương án cực biên x với tập ô cơ sở S. Toàn bộ quá trình tính toán được thực hiện theo trình tự sau.

Bước 1: Xây dựng hệ thống thế vị $\{u_i,v_j\}$

án cực biên khác tốt hơn. Quá trình được lặp lại và vì bài toán vận tải luôn giải được nên sau một số hữu hạn bước sẽ đi tới phương án cực biên tối ưu với giả thiết bài toán không suy biến.

Giả sử đã biết một phương án cực biên x với tập ô cơ sở S. Toàn bộ quá trình tính toán được thực hiện theo trình tự sau.

Bước 1: Xây dựng hệ thống thế vị $\{u_i, v_j\}$

Xét hệ thống phương trình: $v_j - u_i = c_{ij},\ \ (i,j) \in S$ .Hệ này có m+n-1 phương trình độc lập tuyến tính và m+n ẩn, nó là hệ vô định, hơn nữa có thể chọn bất kỳ ẩn nào làm ẩn tự do. Do đó để tìm nghiệm của hệ ta có thể cho một ẩn bất kỳ một trị số tuỳ ý. Nhờ tính không tạo vòng của S dễ dàng xác định được trị số của các ẩn còn lại. Chú ý rằng từ cấu trúc đặc biệt của hệ phương trình suy ra các nghiệm của hệ đều sai kém một hằng số cộng, nghĩa là nếu $\{u_i, v_j\}$ là nghiệm thì $\{u_i + \alpha, v_j + \alpha\}$ cũng là nghiệm với mọi α . Để thuận tiện từ đây ta cũng sẽ gọi một nghiệm bất kỳ của hệ phương trình trên là một hệ thống thế vị hàng và cột.

Quá trình xây dựng hệ thống thế vị được thực hiện như sau: lấy 1 hàng i bất kỳ, cho nó một thế vị u_i tuỳ ý(tức là chọn u_i làm ẩn tự do). Các thế vị hàng và cột còn lại xác định theo công thức:

$$v_j = u_i + c_{ij},\ \ u_i \text{ đã biết và } (i,j) \in S \qquad (5)$$

$$u_i = v_j - c_{ij},\ \ v_j \text{ đã biết và } (i,j) \in S \qquad (6)$$

Vì S gồm m+n-1 ô không tạo vòng nên nhờ hai công thức trên sẽ tính được m+n-1 thế vị khác nhau, cùng với thế vị u_i cho trước ta được toàn bộ thế vị hàng và cột. Sau đó chuyển sang bước 2

Bước 2: Kiểm tra tiêu chuẩn tối ưu

Theo cách xây dựng hệ thống thế vị $\{u_i, v_j\}$ thoả mãn điều kiện b) đối với các ô cơ sở $(i,j) \in S$ do đó chỉ cần kiểm tra điều kiện a) đối với các ô phi cơ sở $(i,j) \notin S$. Nếu $(i,j) \notin S$ mà $v_j - u_i > c_{ij}$, nghĩa là không thoả mãn tiêu chuẩn tối ưu thì hiển nhiên phương án x chưa tối ưu. Ta sẽ gọi những ô này là ô vi phạm. Tính đại lượng $\Delta_{ij} = v_j - u_i - c_{ij}$ đối với các ô vi phạm, rõ ràng $\Delta_{ij} > 0$. Chuyển sang bước 3

Bước 3: Điều chỉnh phương án

Giả sử $\max\limits_{\Delta_{ij} > 0} \Delta_{ij} = \Delta_{rk}$

Ô (r,k) được lấy làm ô điều chỉnh, tất nhiên ô $(r,k) \notin S$. Vì S là số ô tối đa không tạo vòng nên ô (r,k) sẽ tạo thành vòng duy nhất với một số ô thuộc S. Tìm vòng này và ký hiệu là V, trên vòng đánh dấu lẻ chẵn bắt đầu từ ô (r,k) là ô lẻ. Thực hiện phép biến đổi biến số trên vòng V theo công thức sau:

$$x'_{ij} = \begin{cases} x_{ij}, & (i,j) \notin V \\ x_{ij} + q, & (i,j) \in V_l \\ x_{ij} - q, & (i,j) \in V_c \end{cases} \qquad (7)$$

trong đó tham số biến đổi $q \geq 0$; V_l, V_c là tập hợp ô lẻ, chẵn trên V. Do tính chất của vòng, phép biến đổi trên không làm thay đổi tổng các trị số của các x_{ij} trên hàng và trên cột, nghĩa là: $\sum_{j=1}^{n} x'_{ij} = a_i\ \ (i = \overline{1,m})$ và $\sum_{i=1}^{m} x'_{ij} = b_j\ \ (j = \overline{1,n})$.

6. Các ví dụ

trong đó tham số biến đổi $q \geq 0$; V_l, V_c là tập hợp ô lẻ, chẵn trên V. Do tính chất của vòng, phép biến đổi trên không làm thay đổi tổng các trị số của các x_{ij} trên hàng và trên cột, nghĩa là: $\sum_{j=1}^{n} x'_{ij} = a_i \ (i = \overline{1,m})$ và $\sum_{i=1}^{m} x'_{ij} = b_j \ (j = \overline{1,n})$.

6. Các ví dụ

TRƯỜNG HỢP 1: BÀI TOÁN CÂN BẰNG THU PHÁT

Ví dụ 1. Giải bài toán vận tải sau:

	20	40	60	80
35	1	3	5	9
50	2	4	7	8
70	4	9	3	6
45	0	0	0	0

Ta sẽ giải bài toán bằng phương pháp thế vị. Tuy nhiên ta tìm phương án cực biên theo hai phương pháp: cực tiểu cước phí và phương pháp Fogel để so sánh được hai phương pháp tìm cực biên đó:

Giải:

***Cách 1**. (Phương án cực biên xuất phát tìm được từ phương pháp min cước)*

Bước 1. (Tìm phương án cực biên) Bằng phương pháp cực tiểu cước phí ta tìm được phương án cực biên cho ở bảng sau

Bảng 1.1

	20	**40**	**60**	**80**
35	1 $\boxed{20}$	3 $\boxed{15}$	5 x	9 X
50	2 x	4 $\boxed{25}$	7 x	8 $\boxed{25}$
70	4 x	9 x	3 $\boxed{15}$	6 $\boxed{55}$
45	0 x	0 x	0 $\boxed{45}$	0 X

Bước 2. (Tính hệ thống thế vị)

Cho $u_4 = 0$, tại ô (4,3) ta có $v_3 - u_4 = c_{43} \Leftrightarrow v_3 - 0 = 0 \Leftrightarrow v_3 = 0$.

Tại ô (3,3) ta có $v_3 - u_3 = c_{33} \Leftrightarrow 0 - u_3 = 3 \Leftrightarrow u_3 = -3$.

Tại ô ((3,4) ta có $v_4 - u_3 = c_{34} \Leftrightarrow v_4 - (-3) = 6 \Leftrightarrow v_4 = 3$.

Tại ô (2,4) ta có $v_4 - u_2 = c_{24} \Leftrightarrow 3 - (\mathrm{u}_2) = 8 \Leftrightarrow u_2 = -5$.

Tại ô (2,2) ta có $v_2 - u_2 = c_{22} \Leftrightarrow v_2 - (-5) = 4 \Leftrightarrow v_2 = -1$.

Tại ô (1,2) ta có $v_2 - u_1 = c_{12} \Leftrightarrow -1 - (\mathrm{u}_1) = 3 \Leftrightarrow u_1 = -4$.

Tại ô (1,1) ta có $v_1 - u_1 = c_{11} \Leftrightarrow u_1 - (-4) = 1 \Leftrightarrow u_1 = -3$.

Tại ô (1,2) ta có $v_2 - u_1 = c_{12} \Leftrightarrow -1-(u_1) = 3 \Leftrightarrow u_1 = -4$.

Tại ô (1,1) ta có $v_1 - u_1 = c_{11} \Leftrightarrow u_1 - (-4) = 1 \Leftrightarrow u_1 = -3$.

Như vậy ta được hệ thống thế vị cho ở bảng 1.2 sau:

		-3	-2	0	3
		20	**40**	**60**	**80**
-4	**35**	1 / 20	3 / 15	5 / X	9 / x
-5	**50**	2 / x	4 / 25	7 / x	8 / 25
-3	**70**	4 / x	9 / x	3 / 15	6 / 55
0	**45**	0 / x	0 / x	0 / 45	0 / x

Bước 3. (Kiểm tra điều kiện tối ưu)

Điều kiện tối ưu là $v_j - u_i \le c_{ij}$ còn nếu ô nào có $v_j - u_i > c_{ij}$ thì ô đó vi phạm. Với ô vi phạm ta tính lượng vi phạm $\Delta_{ij} = v_j - u_i - c_{ij}$.

Tính toán ta thấy có duy nhất một ô vi phạm là ô (4,4) vì tại ô này có $v_4 - u_4 = 3 - 0 = 3 > 0 = c_{44}$, với lượng vi phạm là $\Delta_{44} = v_j - u_i - c_{ij} = v_4 - u_4 - c_{44} = 3$.

Vì ô vi phạm là duy nhất nên ta không cần tìm ô có lượng vi phạm lớn nhất mà ta lấy luôn ô (4,4) làm ô điều chỉnh.

(Nếu có nhiều ô vi phạm thì ta chọn ô có lượng vi phạm lớn nhất làm ô điều chỉnh).

Từ ô điều chỉnh (4,4) ta kẻ một vòng với một số ô cơ sở. Ta có vòng ở bảng sau

Bảng 1.3.

	20	**40**	**60**	**80**
35	1 / 20	3 / 15	5	9
50	2	4 / 25	7	8 / 25
70	4	9	3 / + 15	6 - / 55
45	0	0	0 / - 45	0 / +

Đánh dấu (-), (+) xen kẽ cho các ô thuộc vòng. Bắt đầu từ ô điều chỉnh ta đánh dấu (+).

Tính lượng điều chỉnh : $q = \min\{55, 45\} = 45$.

Bước 4. Điều chỉnh bảng

Ta điều chỉnh bảng 1.3 với lượng điều chỉnh q đã xác định ở trên.

Những ô mang dấu (-) ta bớt đi lượng hàng q. Ô mang dấu (+) ta thêm lượng hàng q. Vậy ta có bảng đã điều chỉnh như sau:

Bước 4. Điều chỉnh bảng

Ta điều chỉnh bảng 1.3 với lượng điều chỉnh q đã xác định ở trên.

Những ô mang dấu (-) ta bớt đi lượng hàng q. Ô mang dấu (+) ta thêm lượng hàng q. Vậy ta có bảng đã điều chỉnh như sau:

Bảng 1.4.

		-6	-4	-3	0
		20	**40**	**60**	**80**
-7	**35**	1 20	3 15	5 X	9 X
-8	**50**	2 x	4 25	7 X	8 25
-6	**70**	4 x	9 x	3 60	6 10
0	**45**	0 x	0 x	0	0 45

Lặp lại quá trình tính hệ thống thế vị ta được hệ thống thế vị viết trên bảng 1.4.

Kiểm tra điều kiện tối ưu ta thấy $v_j - u_i \le c_{ij}, \forall ij$. Hay phương án trên bảng 1.4 là phương án tối ưu.

Vậy phương án tối ưu cần tìm là $x^* = \begin{pmatrix} 20 & 15 & 0 & 0 \\ 0 & 25 & 0 & 25 \\ 0 & 0 & 60 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 45 \end{pmatrix}$ với tổng chi phí vận chuyển là

$f(x^*) = 20.1 + 15.3 + 25.4 + 25.8 + 60.3 + 10.6 + 45.0 = 605$.

***Cách 2**. Phương án cực biên tìm được theo phương pháp Fogel.*

Bằng phương pháp Fogel ta tìm được phương án cực biên như sau:

Bảng 1.1.b

		-6	-4	-3	0
		20	**40**	**60**	**80**
-7	**35**	1 20	3 15	5 X	9 X
-8	**50**	2 x	4 25	7 X	8 25
-6	**70**	4 x	9 x	3 60	6 10
0	**45**	0 x	0 x	0	0 45

Cho $u_4 = 0$ ta tính được hệ thống thế vị như bảng 1.1.b.

Kiểm tra điều kiện tối ưu ta thấy $v_j - u_i \le c_{ij}, \forall ij$. Hay phương án trên bảng 1.1.b là phương án tối ưu.