Chương 3. Biến đổi Z và ứng dụng vào phân tích các hệ thống LTI

3.1 Biến đổi Z và 3.2 Các tính chất của biến đổi Z

TS. Nguyễn Hồng Quang
Bộ môn Kỹ thuật máy tính
Viện Công nghệ thông tin và truyền thông
Trường Đại học Bách Khoa Hà Nội

3.1.1 Biến đổi Z trực tiếp

$$x(n) \xleftrightarrow{z} X(z)$$

$$X(z) \equiv Z\{x(n)\}$$

$$X(z) \equiv \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) z^{-n}$$

- X(Z) = … + x(-2).Z^2 + x(-1).Z + x(0) + x(1).Z^{-1} + x(2).Z^{-2} + …
- Miền hội tụ (*region of convergence* - ROC) của *X(z)*
- Bài tập: Tính ZT và miền hội tụ

$$x_1(n) = \{1, 2, 5, 7, 0, 1\}$$

$$x_2(n) = \{1, 2, 5, 7, 0, 1\}$$

$$x_5(n) = \delta(n)$$

$$x_6(n) = \delta(n-k), k > 0$$

$$x_7(n) = \delta(n+k), k > 0$$

- ROC của một tín hiệu có chiều dài hữu hạn (finite-duration signal) ?

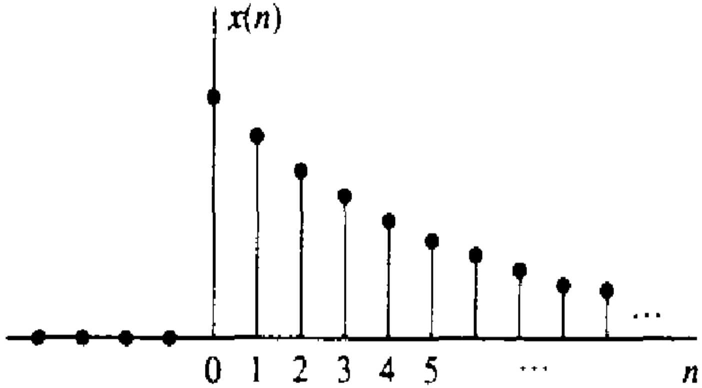
Ví dụ

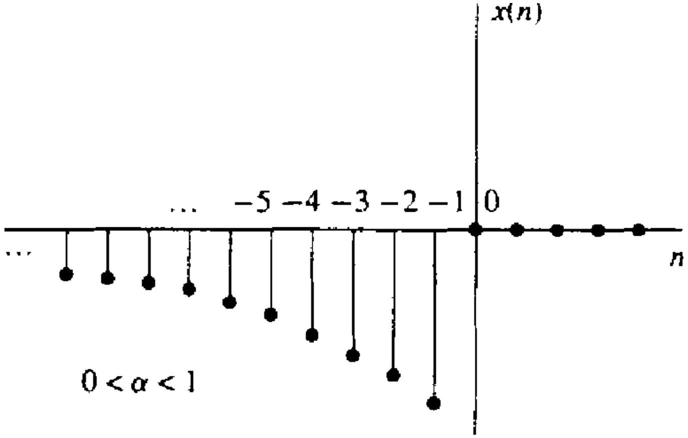
$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) z^{-n}$$

Xác định biến đổi Z và miền hội tụ của tín hiệu :

$x(n) = a^n.u(n)$

$x(n) = -a^n.u(-n-1)$





- biến đổi Z cung cấp một dạng biểu diễn compact cho tín hiệu.

Một tín hiệu rời rạc x(n) chỉ được xác định duy nhất bởi hai thành phần :

+ *X(z)*

+ *miền hội tụ X(z)*

- ROC của một tín hiệu nhân quả?
- ROC của một tín hiệu phản nhân quả?

$$R_{x-} < Z < R_{x+}$$

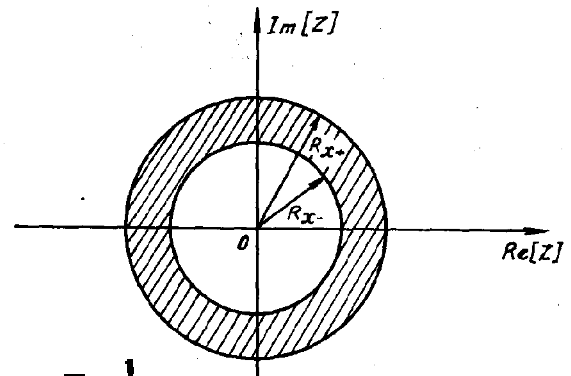
Tìm ROC của X(Z): *|X(z)| < ∞*

- Tiêu chuẩn Caushy :
  - Một chuỗi có dạng :
  - hội tụ nếu điều kiện sau thỏa mãn :

$$\sum_{n=0}^{\infty} x_n = x_0 + x_1 + x_2 + \dots$$

$$\lim_{n\to\infty} |x_n|^{1/n} < 1$$

$$X(Z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)Z^{-n} = X_1(Z) + X_2(Z)$$

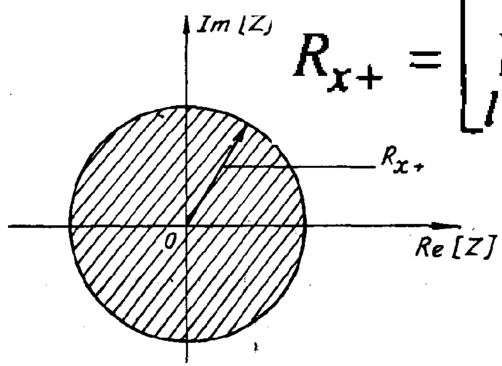


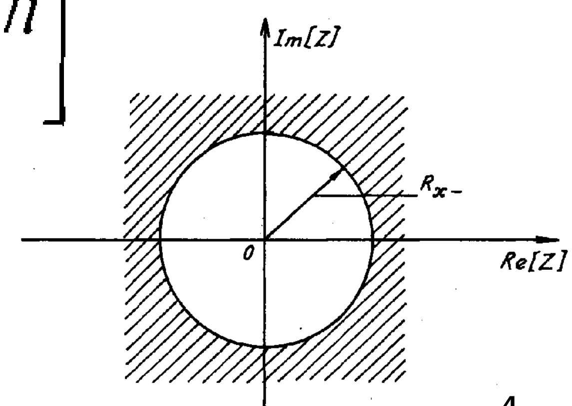
$$X_2(Z) = \sum^{-1} x(n)Z^{-n}$$

$$X_1(Z) = \sum_{n=0}^{\infty} x(n)Z^{-n}$$

$$R_{x+} = \left[\lim_{l\leftarrow\infty} |x(-l)|^{1/l}\right]^{-1}$$

$$R_{x-} = \lim |x(n)|^{1/n}$$





$$|Z| > R_{x-}$$

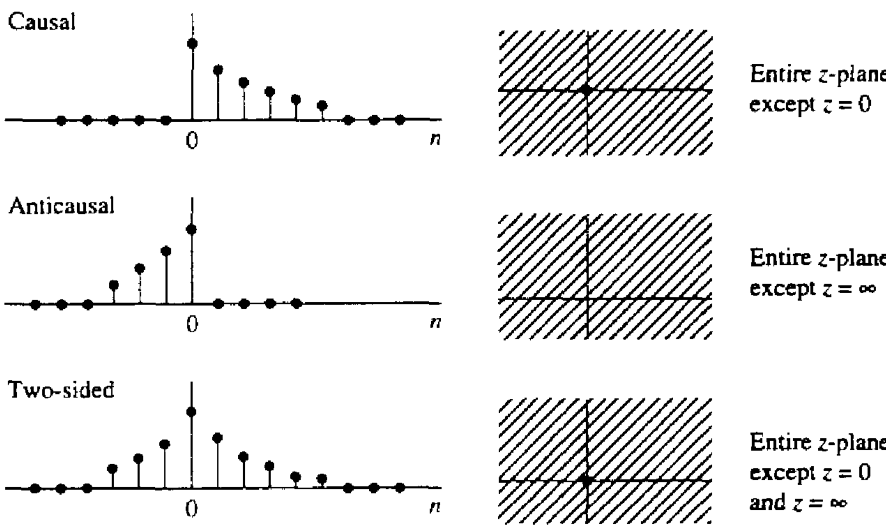
$$|Z| < R_{x+}$$

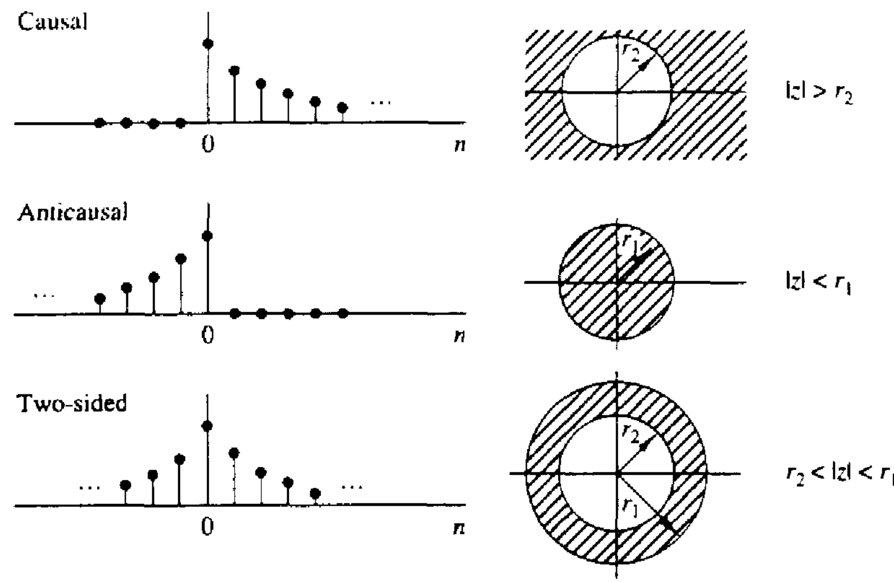
$$x(n) = \alpha^n u(n) + b^n u(-n-1)$$

Tổng kết

right-sided, left-sided, and finite-duration two-sided signals

Tín hiệu có chiều dài hữu hạn   Tín hiệu có chiều dài vô hạn

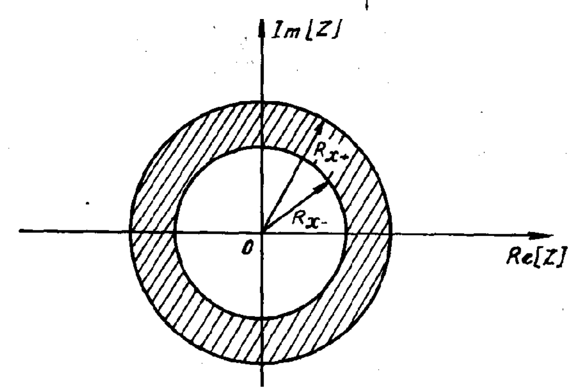




$$R_{x_-} = \lim |x(n)|^{1/n}$$

$$R_{x+} = \left[\lim_{l \leftarrow \infty} |x(-l)|^{1/l}\right]^{-1}$$

$$R_{x-} < Z < R_{x+}$$



Các tính chất của biến đổi Z

a. Tuyến tính

IZT?

$$x_1(n) \xleftrightarrow{z} X_1(z)$$

$\forall\ a_1$ và a_2

$$x_2(n) \xleftrightarrow{z} X_2(z)$$

- a. X(Z) = (Z^2 + 2Z) / (Z^2 – 3Z + 2)
- b. X(Z) = (4Z^2 + 8Z) / (4Z^2 – 5Z + 1)
- c. X(Z) = (Z + 2) / (Z^2 – 3Z + 2)
- d. X(Z) = Z / (Z^2 – sqrt(2).Z + 1)
- e. X(Z) = Z / (Z^2 – sqrt(3).Z + 1)

$$\boxed{x(n) = a_1x_1(n) + a_2x_2(n) \xleftrightarrow{z} X(z) = a_1X_1(z) + a_2X_2(z)}$$

- Tìm biến đổi Z và miền hội tụ của tín hiệu:

$$x(n) = [3(2^n) - 4(3^n)]u(n)$$

(a) $x(n) = (\cos \omega_0 n)u(n)$

(b) $x(n) = (\sin \omega_0 n)u(n)$

- (c) x(n) = (3^{n+1} – 1) .u(n)
- (d) x(n) = 2^{-n}.u(n) + 3^{n+1}.u(n)

$$\xleftrightarrow{z} \frac{z^{-1}\sin\omega_0}{1 - 2z^{-1}\cos\omega_0 + z^{-2}} \qquad \frac{1 - z^{-1}\cos\omega_0}{1 - 2z^{-1}\cos\omega_0 + z^{-2}} \quad \text{ROC: } |z| > 1$$

b. Trễ

$$x(n-k) \overset{z}{\longleftrightarrow} z^{-k}X(z)$$

- Tìm biến đổi Z của tín hiệu: $x(n) = \begin{cases} 1, & 0 \le n \le N-1 \\ 0, & \text{elsewhere} \end{cases}$

c. Scaling trên miền Z

$$a^n x(n) \overset{z}{\longleftrightarrow} X(a^{-1}z) \qquad \text{ROC: } |a|r_1 < |z| < |a|r_2$$

- Tìm biến đổi Z và ROC của các tín hiệu sau. Sau đó nhận xét về sự thay đổi của ROC.
- $x(n) = 2^n.u(n)$
- $y_1(n) = 3^n.x(n)$
- $y_2(n) = (1/3)^n.x(n)$
- $y_3(n) = e^{j\pi n/2}.x(n)$

(a) $x(n) = a^n(\cos\omega_0 n)u(n)$

(b) $x(n) = a^n(\sin\omega_0 n)u(n)$

$$a = r_0 e^{j\omega_0}$$

$$z = re^{j\omega}$$

$$\Rightarrow \quad w = a^{-1}z = \left(\frac{1}{r_0}r\right)e^{j(\omega-\omega_0)}$$

d. Đảo trục

$$x(n) \xleftrightarrow{z} X(z) \qquad \text{ROC: } r_1 < |z| < r_2$$

$$x(-n) \xleftrightarrow{z} X(z^{-1}) \qquad \text{ROC: } \frac{1}{r_2} < |z| < \frac{1}{r_1}$$

- Tìm biến đổi Z của tín hiệu: x(n) = u(-n)

e. Vi phân trên miền Z

$$nx(n) \xleftrightarrow{z} -z\frac{dX(z)}{dz}$$

$x(n) = n.a^n u(n)$

- Tính biến đổi Z của dãy dốc đơn vị r(n)
- Tìm tín hiệu x(n) có biến đổi Z như sau :

$$X(Z) = \frac{1}{Z-a}$$

$$X(Z) = \frac{1}{(Z-a)^M}$$

$$X(Z) = \frac{1}{(Z-a)^2}$$

$$X(z) = \log(1 + az^{-1}) \qquad |z| > |a|$$

f. Dãy liên hợp phức

a. $x(n) = e^{j\frac{\pi}{2}n}.u(n)$

b. $y(n) = x^*(n)$

$$y(n) = x^*(n) \xrightarrow{ZT} Y(Z) = X^*(Z^*)$$

- Ví dụ. Tìm biến đổi Z của các tín hiệu sau :

g. Tổng chập của hai tín hiệu

$$x(n) = x_1(n) * x_2(n) \stackrel{z}{\longleftrightarrow} X(z) = X_1(z)X_2(z)$$

- $x_1(n) = 2^n.u(n)$
- $x_2(n) = 3^n.u(n)$

$$x_1(n) = \{1, -2, 1\}$$

$$x_2(n) = \begin{cases} 1, & 0 \le n \le 5 \\ 0, & \text{elsewhere} \end{cases}$$

h. Tương quan của hai tín hiệu

$$r_{x_1x_2}(l) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_1(n)x_2(n-l)$$

$$\stackrel{z}{\longleftrightarrow} R_{x_1x_2}(z) = X_1(z)X_2(z^{-1})$$

- Tìm dãy tự tương quan của tín hiệu:

  $x(n) = a^n.u(n)$, $-1<a<1$

i. Định lý giá trị đầu

- Cho tín hiệu nhân quả x(n),
  - cần tìm thời điểm xuất hiện n_0
  - giá trị đầu A_0

$$x(0) = \lim_{z \to \infty} X(z)$$

Định lý. Nếu x(n) nhân quả [i.e.. *x(n)* = 0 for n < 0], thì :

- Một tín hiệu nhân quả có biến đổi Z thỏa mãn điều kiện sau:

$$\lim_{Z \to \infty} Z^{-n_0}.X(Z) = A < \infty$$

- Khi đó tín hiệu sẽ có thời điểm xuất hiện tại n_0 và giá trị đầu bằng A

- Xác định thời điểm xuất hiện và giá trị đầu:

$$X(Z) = \frac{Z}{Z-1}$$

$$X_1(Z) = \frac{1}{Z-1}$$

$$X(Z) = \frac{2Z^{-3}}{Z-1}$$

Bài tập

3.2 Determine the z-transforms of the following signals and sketch the corresponding pole–zero patterns.

(a) $x(n) = (1 + n)u(n)$

(b) $x(n) = (a^n + a^{-n})u(n)$, a real

(c) $x(n) = (-1)^n 2^{-n} u(n)$

(d) $x(n) = (na^n \sin \omega_0 n)u(n)$

(e) $x(n) = (na^n \cos \omega_0 n)u(n)$

(f) $x(n) = Ar^n \cos(\omega_0 n + \phi)u(n)$, $0 < r < 1$

(g) $x(n) = \frac{1}{2}(n^2 + n)(\frac{1}{3})^{n-1} u(n - 1)$

(h) $x(n) = (\frac{1}{2})^n [u(n) - u(n - 10)]$

3.4 Determine the z-transform of the following signals.

(a) $x(n) = n(-1)^n u(n)$

(b) $x(n) = n^2 u(n)$

(c) $x(n) = -na^n u(-n - 1)$

(d) $x(n) = (-1)^n \left(\cos \frac{\pi}{3} n\right) u(n)$

(e) $x(n) = (-1)^n u(n)$

(f) $x(n) = \{1, 0, -1, 0, 1, -1, \ldots\}$

Bài tập: tính tổng chập sử dụng ZT

3.7 Compute the convolution of the following signals by means of the z-transform.

$$x_1(n) = \begin{cases} (\frac{1}{3})^n, & n \geq 0 \\ (\frac{1}{2})^{-n}, & n < 0 \end{cases}$$

$$x_2(n) = (\tfrac{1}{2})^n u(n)$$

3.16

(a) $x_1(n) = (\frac{1}{4})^n u(n-1)$, $\quad x_2(n) = [1 + (\frac{1}{2})^n]u(n)$

(b) $x_1(n) = u(n)$, $\quad x_2(n) = \delta(n) + (\frac{1}{2})^n u(n)$

(c) $x_1(n) = (\frac{1}{2})^n u(n)$, $\quad x_2(n) = \cos \pi n u(n)$

(d) $x_1(n) = nu(n)$, $\quad x_2(n) = 2^n u(n-1)$

3.20 **(a)** Draw the pole–zero pattern for the signal

$$x_1(n) = (r^n \sin \omega_0 n)u(n) \qquad 0 < r < 1$$

(b) Compute the z-transform $X_2(z)$, which corresponds to the pole–zero pattern in part (a).

(c) Compare $X_1(z)$ with $X_2(z)$. Are they indentical? If not, indicate a method to derive $X_1(z)$ from the pole–zero pattern.

3.12 Determine the causal signal $x(n)$ having the z-transform

Biến đổi Z ngược

$$X(z) = \frac{1}{(1-2z^{-1})(1-z^{-1})^2}$$

3.14 Determine the causal signal $x(n)$ if its z-transform $X(z)$ is given by:

(a) $X(z) = \dfrac{1+3z^{-1}}{1+3z^{-1}+2z^{-2}}$

(b) $X(z) = \dfrac{1}{1-z^{-1}+\frac{1}{2}z^{-2}}$

(c) $X(z) = \dfrac{z^{-6}+z^{-7}}{1-z^{-1}}$

(d) $X(z) = \dfrac{1+2z^{-2}}{1+z^{-2}}$

(e) $X(z) = \dfrac{1}{4}\dfrac{1+6z^{-1}+z^{-2}}{(1-2z^{-1}+2z^{-2})(1-0.5z^{-1})}$

(f) $X(z) = \dfrac{2-1.5z^{-1}}{1-1.5z^{-1}+0.5z^{-2}}$

(g) $X(z) = \dfrac{1+2z^{-1}+z^{-2}}{1+4z^{-1}+4z^{-2}}$

(h) $X(z)$ is specified by a pole–zero pattern in Fig. P3.14. The constant $G = \frac{1}{4}$.

(i) $X(z) = \dfrac{1-\frac{1}{2}z^{-1}}{1+\frac{1}{2}z^{-1}}$

(j) $X(z) = \dfrac{1-az^{-1}}{z^{-1}-a}$

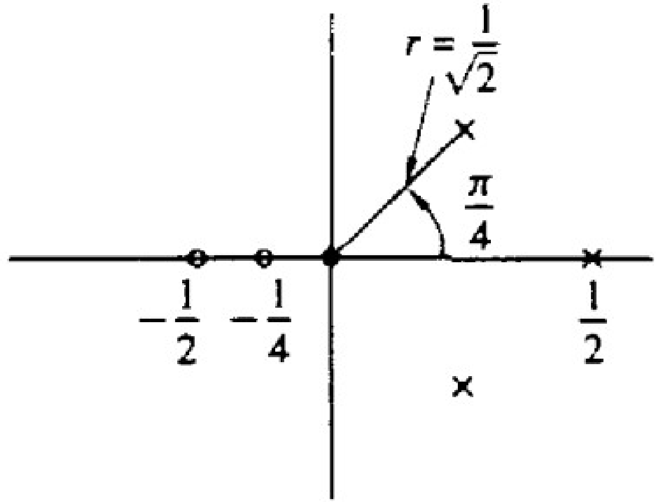


Figure P3.14

3.15 Determine all possible signals $x(n)$ associated with the z-transform

$$X(z) = \frac{5z^{-1}}{(1-2z^{-1})(3-z^{-1})}$$

Bài tập

3.18 If $X(z)$ is the z-transform of $x(n)$, show that:

(a) $Z\{x^*(n)\} = X^*(z^*)$

(b) $Z\{\mathrm{Re}[x(n)]\} = \frac{1}{2}[X(z) + X^*(z^*)]$

(c) $Z\{\mathrm{Im}[x(n)]\} = \frac{1}{2}[X(z) - X^*(z^*)]$

(d) If

$$x_k(n) = \begin{cases} x\left(\frac{n}{k}\right), & \text{if } n/k \text{ integer} \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$$

then

$$X_k(z) = X(z^k)$$

(e) $Z\{e^{j\omega_0 n}x(n)\} = X(ze^{-j\omega_0})$

3.19 By first differentiating $X(z)$ and then using appropriate properties of the z-transform, determine $x(n)$ for the following transforms.

(a) $X(z) = \log(1 - 2z), \quad |z| < \frac{1}{2}$

(b) $X(z) = \log(1 - z^{-1}), \quad |z| > \frac{1}{2}$

3.23 Determine the signal $x(n)$ with z-transform

$$X(z) = e^z + e^{1/z} \qquad |z| \neq 0$$

Tiếp theo: 3. Phân tích hệ LTI trên miền Z