Chương 2. Tín hiệu và hệ thống rời rạc

2.2. Hệ thống rời rạc

Nguyễn Hồng Quang
Bộ môn Kỹ thuật máy tính
Viện Công nghệ thông tin và truyền thông
Trường Đại học Bách Khoa Hà Nội

Chương 2. Tín hiệu và hệ thống rời rạc

2.2. Hệ thống rời rạc

2.2.1. Giới thiệu

2.2.2. Khởi tạo relax

2.3. Phân tích hệ LTI

2.3.1. Hệ thống tuyến tính

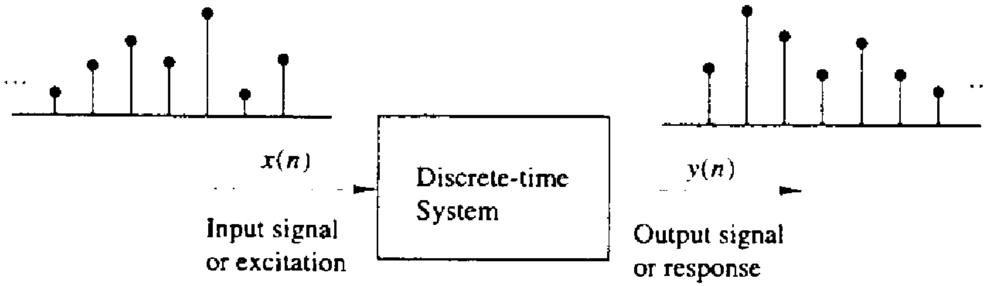
2.3.2. Hệ tuyến tính bất biến

2.3.3. Một số định nghĩa khác

2.3.4. Hệ LTI nhân quả

2.3.5. Hệ LTI ổn định

2.2. Hệ thống rời rạc



$$y(n) \equiv \mathcal{T}[x(n)]$$

$$x(n) \xrightarrow{\mathcal{T}} y(n)$$

- y(n) = y(n-1) + x(n)
- Bài toán:
  - Biết x(n), $\forall n \geq n_0$
  - Xác định y(n), $\forall n \geq n_0$

$$x(n) = \begin{cases} |n|, & -3 \leq n \leq 3 \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$$

(a) $y(n) = x(n)$

(b) $y(n) = x(n-1)$

(c) $y(n) = x(n+1)$

(d) $y(n) = \frac{1}{3}[x(n+1) + x(n) + x(n-1)]$

(e) $y(n) = max\{x(n+1), x(n), x(n-1)\}$

(f) $y(n) = \sum_{k=-\infty}^{n} x(k) = x(n) + x(n-1) + x(n-2) + \cdots$

Khởi tạo relax (Initially relaxed)

$$\boxed{y(n_0\text{-}1) = 0}$$

2.2. Hệ thống tuyến tính – Định nghĩa

$$\mathcal{T}[a_1x_1(n) + a_2x_2(n)] = a_1\mathcal{T}[x_1(n)] + a_2\mathcal{T}[x_2(n)]$$

Ưu điểm của hệ tuyến tính ?

⇒ Tính tỷ lệ, tính tổ hợp

(a) $y(n) = nx(n)$ **(b)** $y(n) = x(n^2)$ **(c)** $y(n) = x^2(n)$

(d) $y(n) = Ax(n) + B$ **(e)** $y(n) = e^{x(n)}$

Phân tích hệ tuyến tính

$$x(n) = \sum_{k=1}^{M-1} a_k x_k(n) \xrightarrow{\mathcal{T}} y(n) = \sum_{k=1}^{M-1} a_k y_k(n) \qquad x(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)\delta(n-k)$$

$$y(n,k) \equiv h(n,k) = \mathcal{T}[\delta(n-k)]$$

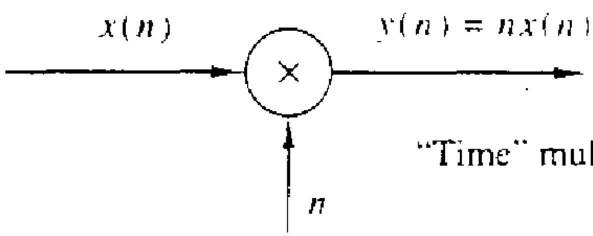
$$y(n) = \mathcal{T}[x(n)] = \mathcal{T}\left[\sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)\delta(n-k)\right] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)h(n,k)$$

Hệ bất biến (theo thời gian)

$$y(n) = 2.x(n) + 3.x(n-1)$$

$$y(n) - a.y(n-1) = x(n)$$

$$x(n) \xrightarrow{T} y(n) \Rightarrow x(n-k) \xrightarrow{T} y(n-k) \quad \forall x(n) \text{ và } \forall k$$

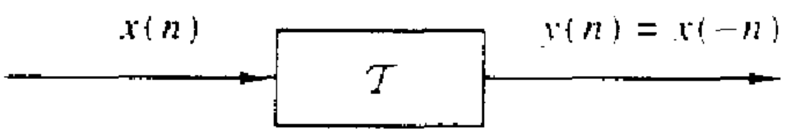


"Time" multiplier

$$h(n) \equiv T[\delta(n)]$$

$$y(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)h(n-k)$$

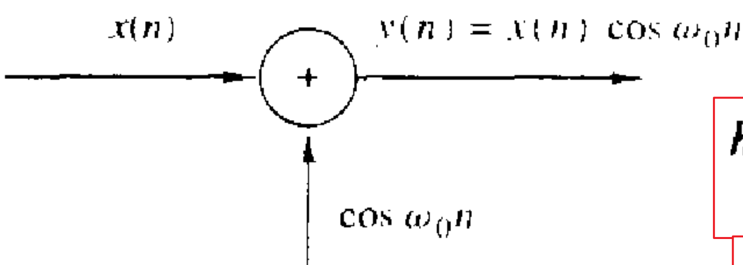
Convolution sum



"Folder"

$$y(n_0) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)h(n_0-k)$$

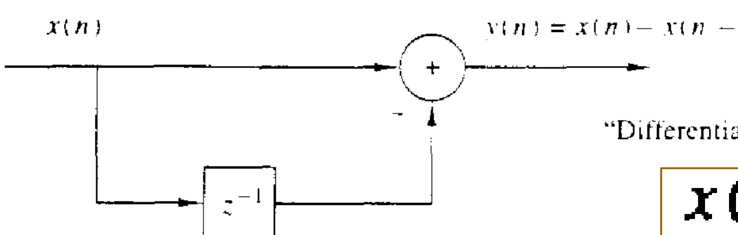
- Giải thuật :
  - 1. Folding: h(k) ➔ h(-k).
  - 2. Shifting: dịch h(-k) n_0 mẫu sang phải (trái) nếu n_0 dương (âm) ➔ $h(n_0 - k)$.
  - 3. Multiplication: $v_{n0}(k) = x(k).h(n0 - k)$.
  - 4. Summation: Tính tổng $v_{n0}(k)$ ➔ $y(n_0)$



Modulator

$$h(n) = \{1, 2, 1, -1\}$$
$$\uparrow$$

$$x(n) = \{1, 2, 3, 1\}$$
$$\uparrow$$



"Differentiator"

$$x(n) = u(n)$$

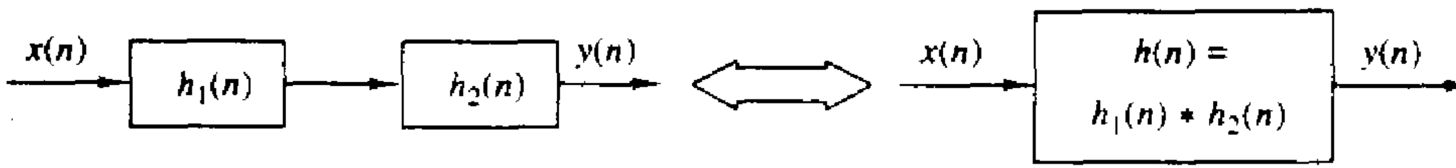
$$h(n) = a^n u(n), |a| < 1$$

Tính chất của tổng chập

$$y(n) = x(n) * h(n) \equiv \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)h(n-k)$$

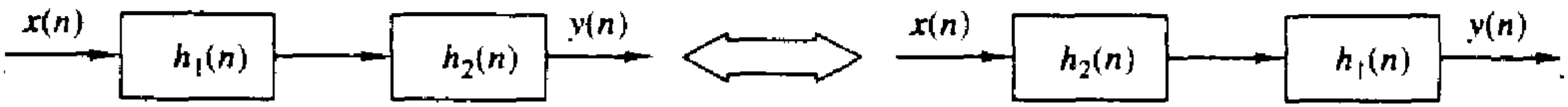
a. Giao hoán (Commutative law) : $x(n) * h(n) = h(n) * x(n)$

b. Kết hợp $[x(n) * h_1(n)] * h_2(n) = x(n) * [h_1(n) * h_2(n)]$

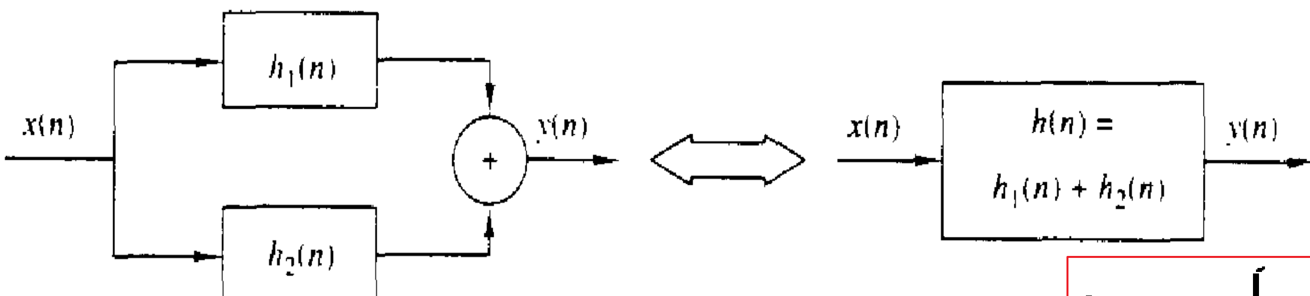


$h_1(n) = \left(\frac{1}{2}\right)^n u(n)$

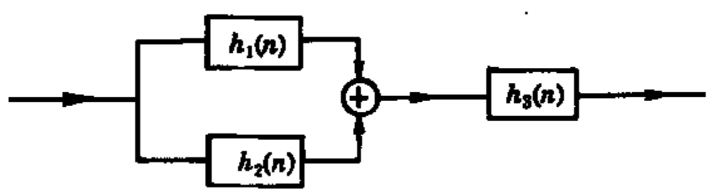
$h_2(n) = \left(\frac{1}{4}\right)^n u(n)$



c. Phân phối $x(n) * [h_1(n) + h_2(n)] = x(n) * h_1(n) + x(n) * h_2(n)$



$h_2(n) = \frac{1}{2}\delta(n-1) + u(n-2) - u(n-4)$



$$h_1(n) = \begin{cases} 1 - \frac{n}{2} & 0 \le n \le 2 \\ 0 & \text{các giá trị còn lại} \end{cases}$$

$h_3(n) = rect_3(n)$

Bài tập

2.16 **(a)** If $y(n) = x(n) * h(n)$, show that $\sum_y = \sum_x \sum_h$, where $\sum_x = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)$.

(b) Compute the convolution $y(n) = x(n) * h(n)$ of the following signals and check the correctness of the results by using the test in (a).

(1) $x(n) = \{1, 2, 4\}$, $h(n) = \{1, 1, 1, 1, 1\}$

(2) $x(n) = \{1, 2, -1\}$, $h(n) = x(n)$

(3) $x(n) = \{0, 1, -2, 3, -4\}$, $h(n) = \{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1, \frac{1}{2}\}$

(4) $x(n) = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $h(n) = \{1\}$

(5) $x(n) = \{\underset{\uparrow}{1}, -2, 3\}$, $h(n) = \{\underset{\uparrow}{0}, 0, 1, 1, 1, 1\}$

(6) $x(n) = \{\underset{\uparrow}{0}, 0, 1, 1, 1, 1\}$, $h(n) = \{1, \underset{\uparrow}{-2}, 3\}$

(7) $x(n) = \{\underset{\uparrow}{0}, 1, 4, -3\}$, $h(n) = \{\underset{\uparrow}{1}, 0, -1, -1\}$

(8) $x(n) = \{\underset{\uparrow}{1}, 1, 2\}$, $h(n) = u(n)$

(9) $x(n) = \{1, 1, \underset{\uparrow}{0}, 1, 1\}$, $h(n) = \{1, -2, -3, \underset{\uparrow}{4}\}$

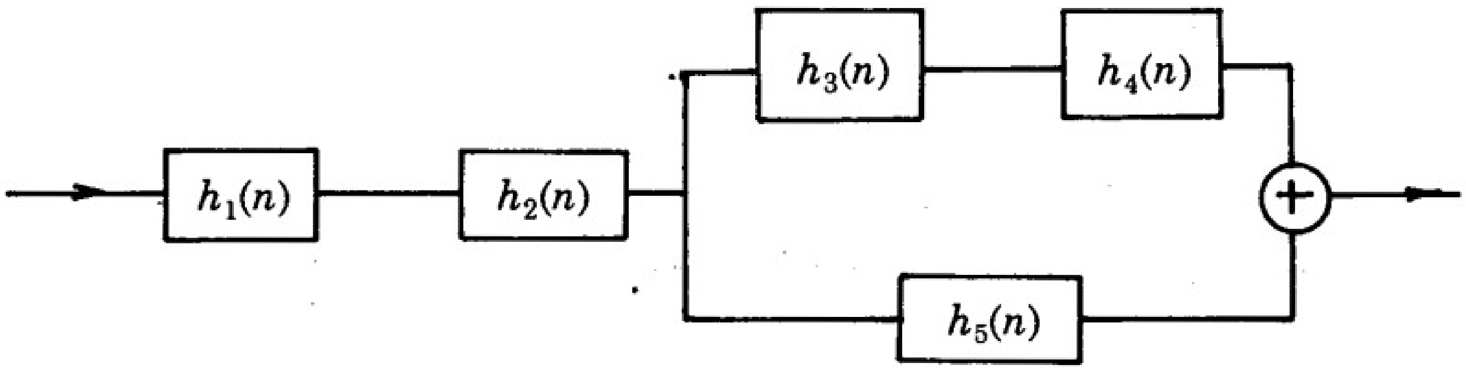
(10) $x(n) = \{1, 2, \underset{\uparrow}{0}, 2, 1\} h(n) = x(n)$

(11) $x(n) = (\frac{1}{2})^n u(n)$, $h(n) = (\frac{1}{4})^n u(n)$

Bài tập

Bài tập 1 - 27

Hãy tìm đáp ứng xung $h(n)$ của hệ thống tuyến tính bất biến có sơ đồ trên hình BT 1 - 27 dưới đây



Hình BT 1 - 27.

$$h_1(n) = \delta(n - 4)$$
$$h_2(n) = rect_4(n + 4)$$
$$h_3(n) = \delta(n + 2)$$

$$h_4(n) = \frac{1}{2} rect_3(n - 3)$$
$$h_5(n) = \frac{1}{2} rect_3(n - 1)$$

Các tính chất khác

$$y(n) = ax(n)$$

$$y(n) = nx(n) + bx^3(n)$$

Hệ thống tĩnh, không nhớ $y(n) = \mathcal{T}[x(n), n]$

Hệ thống động, có nhớ (Dynamic systems)

$$y(n) = x(n) + 3x(n-1)$$

$$y(n) = \sum_{k=0}^{n} x(n-k)$$

$$y(n) = \sum_{k=0}^{\infty} x(n-k)$$

Hệ nhân quả y(n) = F[x(n), x(n-1), x(n-2),...]

(a) $y(n) = x(n) - x(n-1)$ **(b)** $y(n) = \sum_{k=-\infty}^{n} x(k)$ **(c)** $y(n) = ax(n)$

(d) $y(n) = x(n) + 3x(n+4)$ **(e)** $y(n) = x(n^2)$ **(f)** $y(n) = x(2n)$

(g) $y(n) = x(-n)$

Đáp ứng xung của hệ LTI nhân quả

$$y(n_0) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k)x(n_0 - k) \Rightarrow h(n) = ???$$

Tín hiệu nhân quả : y(n) = ???

$$h(n) = a^n u(n) \qquad |a| < 1$$

$$x(n) = u(n)$$

$$y(n) + a_1.y(n-1) + a_2.y(n-2) = x(n)$$

Hệ thống ổn định

$$|x(n)| \le M_x < \infty$$

$$|y(n)| < M_y < \infty$$

Hệ ổn định: h(n)???

$$y(n) - a.\, y(n-1) = x(n)$$

$$h(n) = \begin{cases} a^n, & n \ge 0 \\ b^n, & n < 0 \end{cases}$$

Exercises

- Problems 2.6 → 2.24

2.7 A discrete-time system can be

(1) Static or dynamic
(2) Linear or nonlinear
(3) Time invariant or time varying
(4) Causal or noncausal
(5) Stable or unstable

Examine the following systems with respect to the properties above.

(a) $y(n) = \cos[x(n)]$

(b) $y(n) = \sum_{k=-\infty}^{n+1} x(k)$

(c) $y(n) = x(n)\cos(\omega_0 n)$

(d) $y(n) = x(-n+2)$

(e) $y(n) = \text{Trun}[x(n)]$, where $\text{Trun}[x(n)]$ denotes the integer part of $x(n)$, obtained by truncation

(f) $y(n) = \text{Round}[x(n)]$, where $\text{Round}[x(n)]$ denotes the integer part of $x(n)$ obtained by rounding

Remark: The systems in parts (e) and (f) are quantizers that perform truncation and rounding, respectively.

(g) $y(n) = |x(n)|$

(h) $y(n) = x(n)u(n)$

(i) $y(n) = x(n) + nx(n+1)$

(j) $y(n) = x(2n)$

(k) $y(n) = \begin{cases} x(n), & \text{if } x(n) \geq 0 \\ 0, & \text{if } x(n) < 0 \end{cases}$

(l) $y(n) = x(-n)$

(m) $y(n) = \text{sign}[x(n)]$

(n) The ideal sampling system with input $x_a(t)$ and output $x(n) = x_a(nT)$, $-\infty < n < \infty$