

TRƯỜNG ĐẠI HỌC CÔNG NGHIỆP TP.HCM

XỬ LÝ SỐ TÍN HIỆU

Digital Signal Processing

Giảng viên: Ths. Đào Thị Thu Thủy

Chương 6:

MẠCH LỌC SỐ

Tài Liệu: Chapter 9 & 10: Digital Signal Processing, John G. Proakis, Dimitris G. Manolakis, Prentice

Chương 6: MẠCH LỌC SỐ

6.1 Khái niệm.

6.2 Thiết kế lọc FIR

6.3 Thiết kế lọc IIR

6.4 Thực hiện mạch lọc

6.1. Khái niệm

Thiết kế bộ lọc: xây dựng hàm truyền thỏa đáp ứng tần số cho trước.

- *Thiết kế bộ lọc FIR:* đầu ra là vector đáp ứng xung
 $h = [h_0, h_1, h_2, \dots, h_N]$
- *Thiết kế bộ lọc IIR:* đầu ra là các vector hệ số tử số và mẫu số của hàm truyền
 $b = [b_0, b_1, \dots, b_N]$ và $a = [1, a_1, a_2, \dots, a_N]$

Thiết kế bộ lọc:

Đáp ứng tần số
mong muốn
 $H(\omega)$

Giải thuật thiết kế

Hàm truyền
 $H(z)$



Đáp ứng xung $h = [h_0, h_1, h_2, \dots, h_M]$

Bộ lọc FIR

Bộ lọc IIR

0 ω_0 $\pi/2$ π

Vector hệ số tử: $b = [b_0, b_1, b_2, \dots, b_N]$

Vector hệ số mẫu: $a = [a_0, a_1, a_2, \dots, a_N]$

Bộ lọc FIR và Bộ lọc IIR

- **Bộ lọc FIR: Lọc phi đệ qui**
 - Tín hiệu ra chỉ phụ thuộc tín hiệu vào
 - Đáp ứng xung hữu hạn
- **Bộ lọc IIR: Lọc đệ qui**
 - Lọc có hồi tiếp, tín hiệu ra phụ thuộc tín hiệu vào và cả tín hiệu ra ở một hay nhiều thời điểm trong quá khứ
 - Đáp ứng xung vô hạn

6.2. Thiết kế bộ lọc FIR

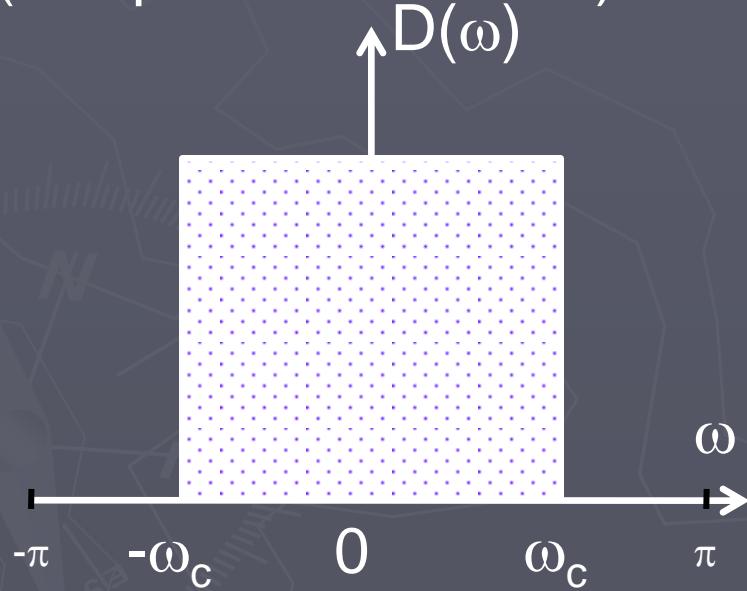
Có nhiều phương pháp thiết kế:

- Fourier
- Cửa sổ (window)
- Lấy mẫu tần số (frequency sampling)
- Đồng dợn sóng (equiripple)

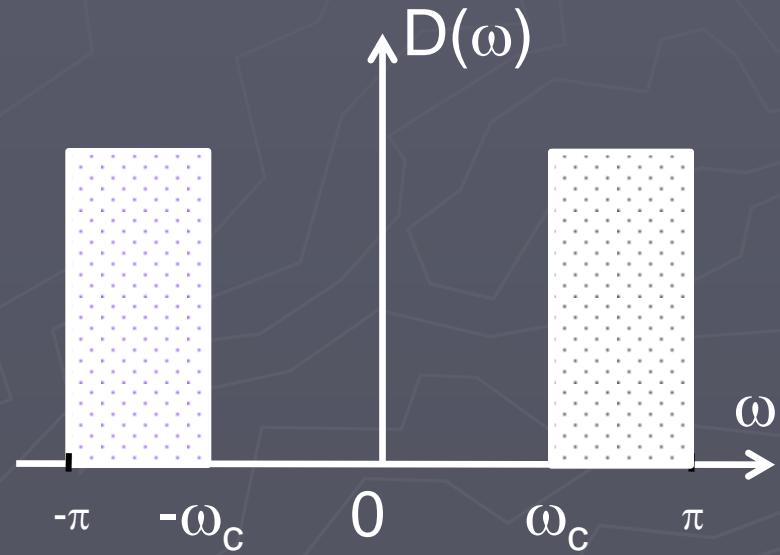
6.2.1 Các lọc lý tưởng

- Đáp ứng tần số lý tưởng của 4 lọc cơ bản:
Lọc thông thấp; lọc thông cao; thông dài; chẵn dài

Thông thấp
(Lowpass filter – LPF)



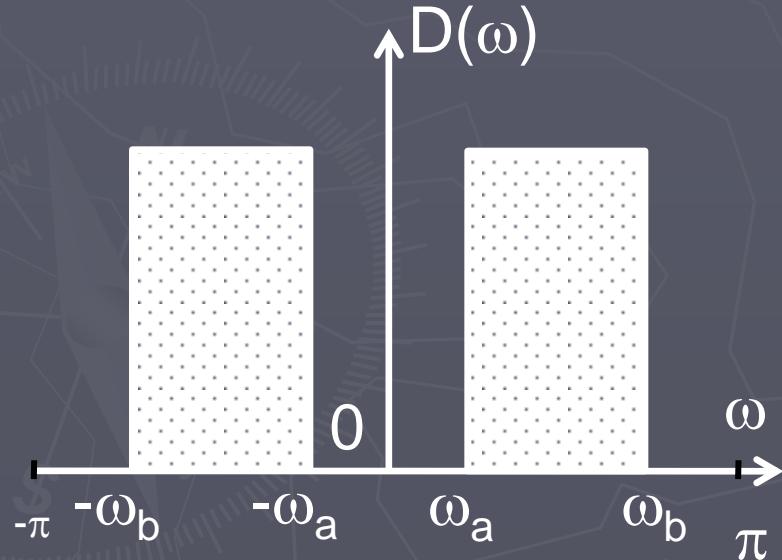
Thông cao
(High pass filter – HPF)



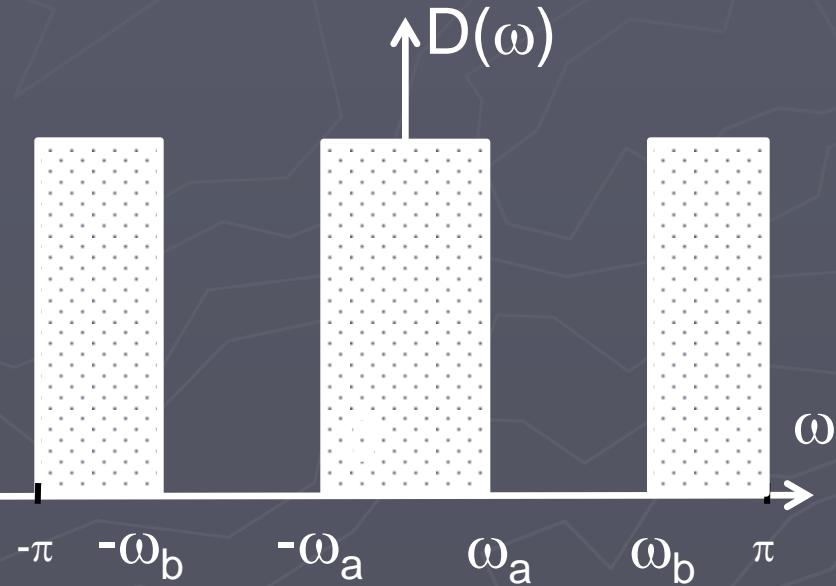
6.2.1 Các lọc lý tưởng

- Đáp ứng tần số lý tưởng của 4 lọc cơ bản:
Lọc thông thấp; lọc thông cao; thông dải; chấn dải

Thông dải
(Bandpass filter – BPF)



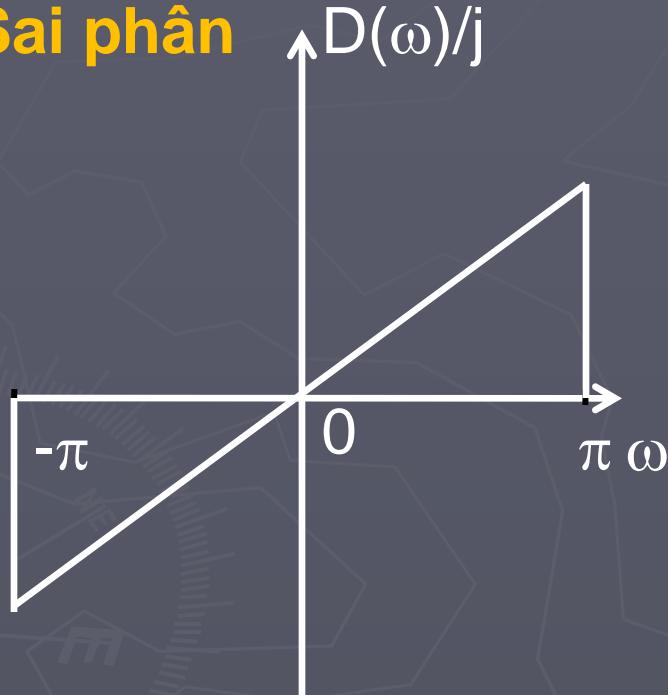
Chấn dải
(Band stop filter – BSF)
(Band rejection filter – BRF)



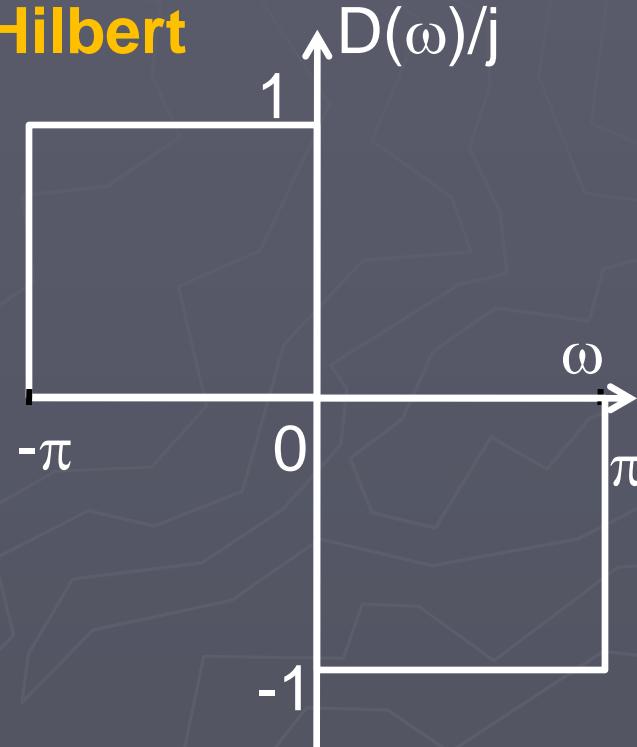
6.2.1 Các lọc lý tưởng

- Ví phân lý tưởng và biến đổi Hilbert

Sai phân



Hilbert



6.2.2. Lọc phi đệ qui và FIR

- Lọc phi đệ qui: Tín hiệu ra chỉ phụ thuộc tín hiệu vào

$$y(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} b_k x(n-k)$$

- Các hệ số của lọc chính là đáp ứng xung của lọc $h(k)=b_k$

$$\Rightarrow y(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k)x(n-k)$$

- Trong thực tế các hệ số xa gốc không đáng kể nên lọc phi đệ qui là lọc FIR

$$\Rightarrow y(n) = \sum_{k=-N}^N b_k x(n-k) = \sum_{k=-N}^N h(k)x(n-k)$$

6.2.2. Lọc phi đệ qui và FIR

- **Thường lọc là nhân quả:**

$$\Rightarrow y(n) = \sum_{k=0}^N b_k x(n-k) = \sum_{k=0}^N h(k)x(n-k)$$

- **Đáp ứng tần số của lọc FIR phi nhân quả và đối xứng:**

$$\Rightarrow H(\omega) = \sum_{k=-N}^N h(k)e^{-jk\omega}$$

- **Như vậy thiết kế lọc phi đệ qui là tìm đáp ứng xung, hay các hệ số, của lọc sao cho đáp ứng tần số thiết kế được càng sát với đáp ứng tần số yêu cầu càng tốt.**

6.2.3 Phương pháp cửa sổ

Các bước thực hiện:

Đáp ứng tần số lý
tưởng $D(\omega)$

DTFT ngược

Đáp ứng xung lý
tưởng $d(n)$

(2 phía,
dài vô hạn)

Chiều dài
bộ lọc
 $N = 2M + 1$

Hàm cửa sổ
 $w(n)$

$d(k)$
 $k = -M, \dots, M$

Làm trễ M mẫu

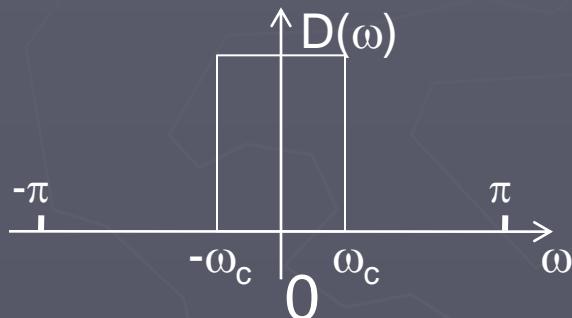
(nhân quả,
chiều dài N)

$h(k) = d(k - M)$

6.2.3 Phương pháp cửa sổ

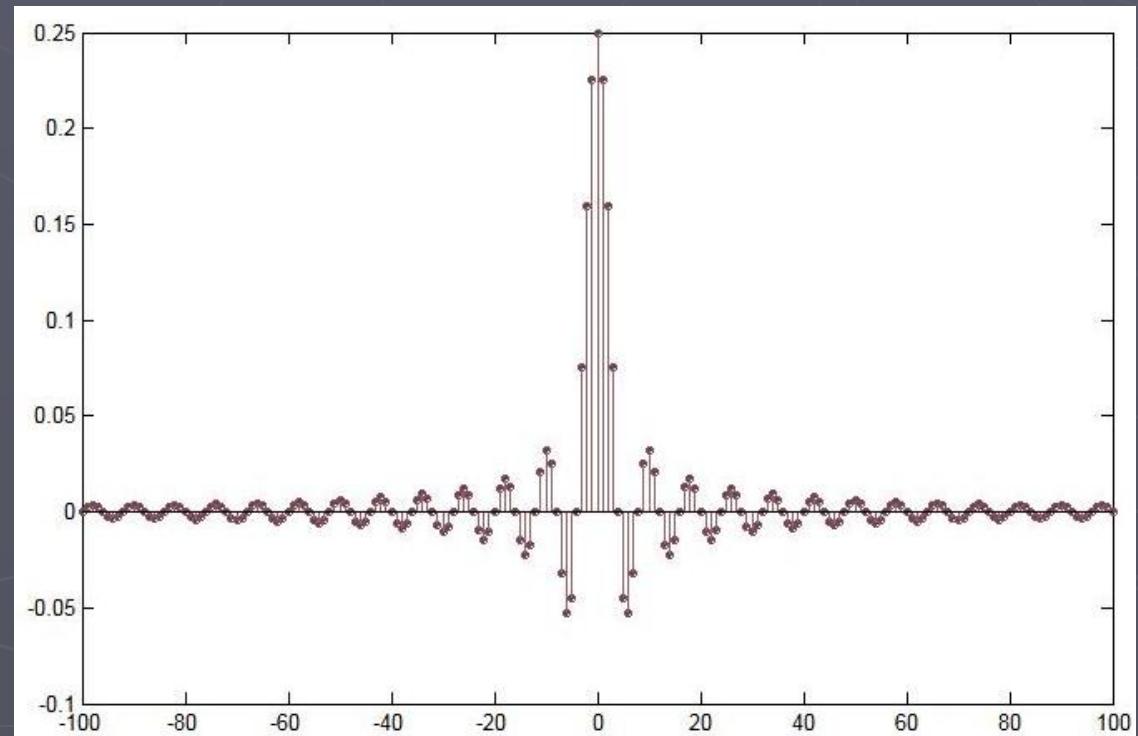
► Các bước thực hiện:

Đáp ứng tần số lý tưởng



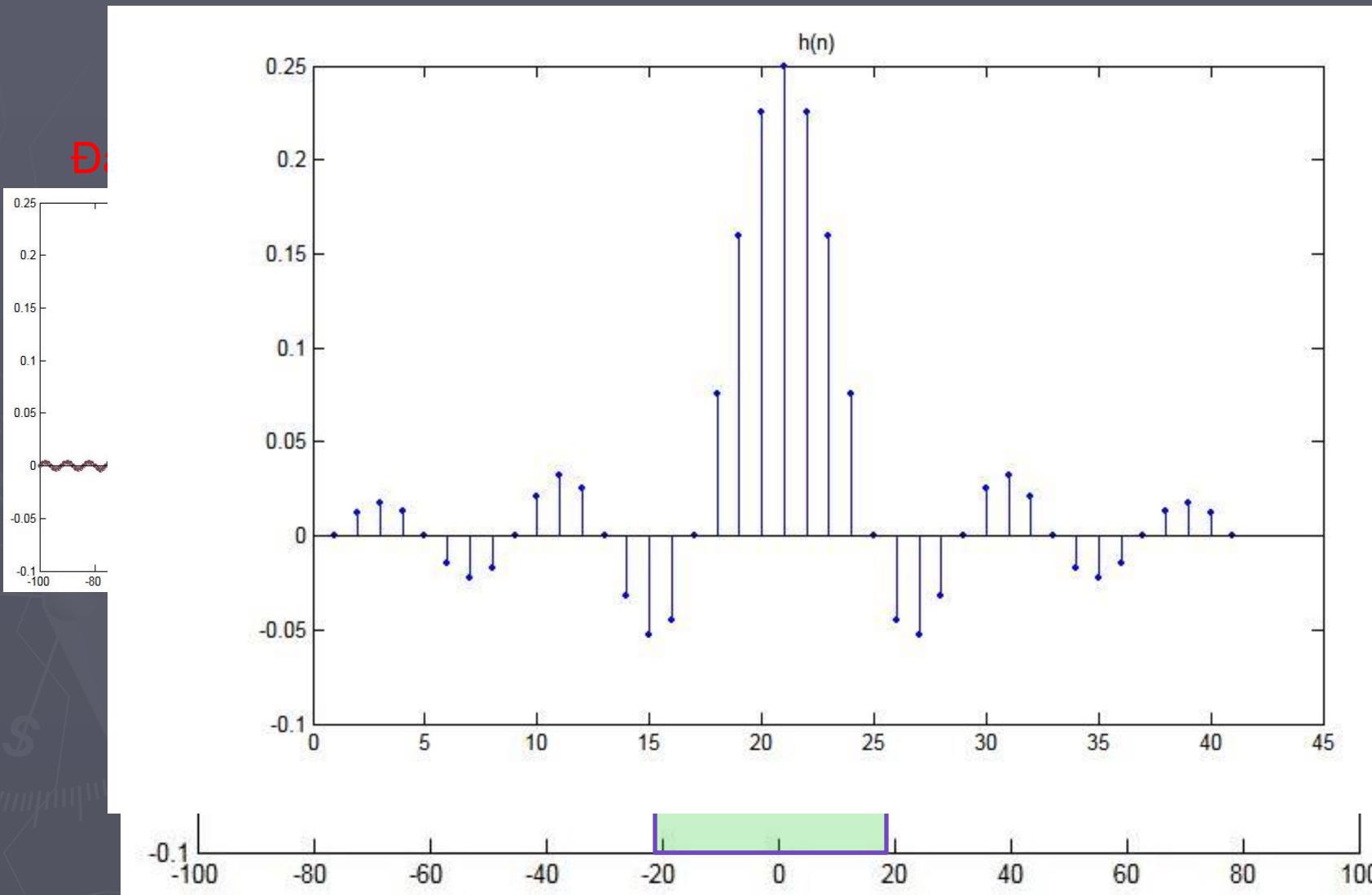
DTFT ngược

Đáp ứng xung lý tưởng



► 6.2.3 Phương pháp cửa sổ

► Các bước thực hiện:



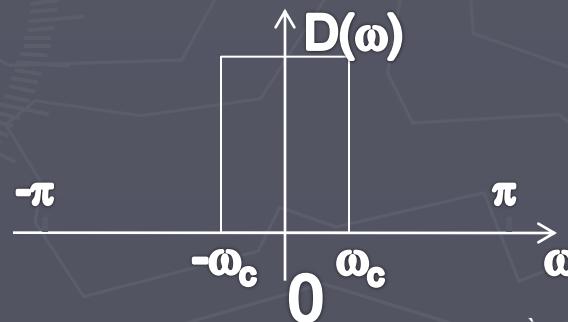
6.2.3 Phương pháp cửa sổ

Biến đổi DTFT ngược:

$$D(\omega) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} d(k)e^{-j\omega k} \Leftrightarrow d(k) = \int_{-\pi}^{\pi} D(\omega)e^{j\omega k} \frac{d\omega}{2\pi}$$

Ví dụ: Bộ lọc thông thấp, tần số cắt ω_c

$$D(\omega) = \begin{cases} 1, & -\omega_c \leq \omega \leq \omega_c \\ 0, & -\pi \leq \omega \leq -\omega_c \vee \omega_c \leq \omega \leq \pi \end{cases}$$



6.2.3 Phương pháp cửa sổ

Biến đổi DTFT ngược của $D(\omega)$:

$$d(k) = \int_{-\pi}^{\pi} D(\omega) e^{j\omega k} \frac{d\omega}{2\pi} = \int_{-\omega_C}^{\omega_C} 1 \cdot e^{j\omega k} \frac{d\omega}{2\pi}$$

$$d(k) = \left[\frac{e^{j\omega k}}{2\pi jk} \right]_{-\omega_C}^{\omega_C} = \frac{e^{j\omega_C k} - e^{-j\omega_C k}}{2\pi jk}$$

$$d(k) = \frac{\sin(\omega_C k)}{\pi k} \quad d(0) = \frac{\omega_c}{\pi}$$

6.2.3 Phương pháp cửa sổ

Mạch lọc thông cao:

$$d(k) = \delta(k) - \frac{\sin(\omega_c k)}{\pi k}$$

Mạch lọc thông dài:

$$d(k) = \frac{\sin(\omega_b k) - \sin(\omega_a k)}{\pi k}$$

Mạch lọc chấn dài:

$$d(k) = \delta(k) - \frac{\sin(\omega_b k) - \sin(\omega_a k)}{\pi k}$$

Nhận xét: với các mạch lọc trên:

- Đáp ứng xung là hàm chấn theo k, thực (đối xứng)
- Đáp ứng tần số thực và chấn theo ω

6.2.3 Phương pháp cửa sổ

Mạch lọc sai phân lý tưởng

$$d(k) = \frac{\cos(\pi k)}{k} - \frac{\sin(\pi k)}{\pi k^2}$$

Mạch lọc Hilbert:

$$d(k) = \frac{1 - \cos(\pi k)}{\pi k}$$

Nhận xét: với các mạch lọc trên:

- Đáp ứng xung là hàm lẻ theo k và thực (phản đối xứng)
- Đáp ứng tần số ảo và lẻ theo ω

a. Cửa sổ chữ nhật

Chọn chiều dài $N = 2M + 1 \rightarrow M = (N - 1)/2$

Tính N hệ số $d(k)$

Làm trễ để tạo nhân quả

Ví dụ: Xác định đáp ứng xung cửa sổ chữ nhật, chiều dài 11, xấp xỉ bộ lọc thông thấp lý tưởng tần số cắt $\omega_C = \pi/4$

Giải

- $N = 11 \rightarrow M = 5$
- Bộ lọc thông thấp:

$$d(k) = \frac{\sin(\omega_C k)}{\pi k} = \frac{\sin\left(\frac{\pi}{4}k\right)}{\pi k}, \quad -5 \leq k \leq 5$$

$$d = \left[\frac{-\sqrt{2}}{10\pi}, 0, \frac{\sqrt{2}}{6\pi}, \frac{1}{2\pi}, \frac{\sqrt{2}}{2\pi}, \frac{1}{4}, \frac{\sqrt{2}}{2\pi}, \frac{1}{2\pi}, \frac{\sqrt{2}}{6\pi}, 0, \frac{-\sqrt{2}}{10\pi} \right]$$

a. Cửa sổ chữ nhật

Làm trê tạo nhân quả:

$$h(k) = d(k - 5) = \left[\frac{-\sqrt{2}}{10\pi}, 0, \frac{\sqrt{2}}{6\pi}, \frac{1}{2\pi}, \frac{\sqrt{2}}{2\pi}, \frac{1}{4}, \frac{\sqrt{2}}{2\pi}, \frac{1}{2\pi}, \frac{\sqrt{2}}{6\pi}, 0, \frac{-\sqrt{2}}{10\pi} \right]$$

Đáp ứng tần số

Hàm truyền của bộ lọc vừa thiết kế:

Ta có:

$$d(k) = [d_{-M}, \dots, d_0, \dots, d_M] \xrightarrow{z} \hat{D}(z) = \sum_{k=-M}^M d(k)z^{-k}$$

Mà:

$$h(k) = d(k-M)$$

$$\Rightarrow H(z) = z^{-M} \hat{D}(z) = z^{-M} \sum_{k=-M}^M d(k)z^{-k}$$

Đáp ứng tần số của bộ lọc được thiết kế:

$$H(\omega) = H(z) \Big|_{z=e^{j\omega}} = e^{-jM\omega} \sum_{k=-M}^M d(k)e^{-j\omega k}$$

Đặc tính pha tuyển tính

Trường hợp d(k) thực & đối xứng:

=> $\hat{D}(\omega)$ là thực & chẵn theo ω

Đặt :

$$\hat{D}(\omega) = sign(\hat{D}(\omega)) |\hat{D}(\omega)|$$

$$\beta(\omega) = \frac{1 - sign(\hat{D}(\omega))}{2} = \begin{cases} 0 & , \hat{D}(\omega) \geq 0 \\ 1 & , \hat{D}(\omega) < 0 \end{cases}$$

Thật vậy: $\Rightarrow \hat{D}(\omega) = e^{j\pi\beta(\omega)} |\hat{D}(\omega)|$

$$\hat{D}(\omega) = \begin{cases} e^{j\pi 0} |\hat{D}(\omega)| = |\hat{D}(\omega)| & , \hat{D}(\omega) \geq 0 \\ e^{j\pi} |\hat{D}(\omega)| = -|\hat{D}(\omega)| & , \hat{D}(\omega) < 0 \end{cases}$$

Đặc tính pha tuyễn tính

Trường hợp d(k) thực & đối xứng:

Đáp ứng biên độ:

$$\Rightarrow H(\omega) = e^{-j\omega M + j\pi\beta(\omega)} | \hat{D}(\omega) |$$

Đáp ứng pha:

$$|H(\omega)| = |\hat{D}(\omega)|$$

- Pha tuyễn tính theo ω theo từng đoạn
- Khi $\hat{D}(\omega)$ đổi dấu \Rightarrow pha thay đổi π

$$\angle H(\omega) = -\omega M + \pi\beta(\omega)$$

Đặc tính pha tuyển tính

Trường hợp $d(k)$ thực & phản đối xứng:

$\Rightarrow \hat{D}(\omega)$ là thuần ảo

Đặt :

$$\hat{D}(\omega) = jA(\omega) = e^{j\pi/2} A(\omega)$$

$$\alpha(\omega) = \frac{1 - sign(A(\omega))}{2} = \begin{cases} 0 & , A(\omega) \geq 0 \\ 1 & , A(\omega) < 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow A(\omega) = e^{j\pi\alpha(\omega)} |A(\omega)|$$

$$\Rightarrow H(\omega) = e^{-jM\omega} e^{j\pi/2} e^{j\pi\alpha(\omega)} |A(\omega)|$$

Đặc tính pha tuyễn tính

Trường hợp d(k) thực & đối xứng:

- Đáp ứng biên độ:

$$\Rightarrow H(\omega) = e^{-j\omega M + j\pi/2 + j\pi\alpha(\omega)} |A(\omega)|$$

- Đáp ứng pha:

$$|H(\omega)| = |A(\omega)|$$

- Pha tuyễn tính theo ω theo từng đoạn
- Khi $A(\omega)$ đổi dấu \Rightarrow pha thay đổi π

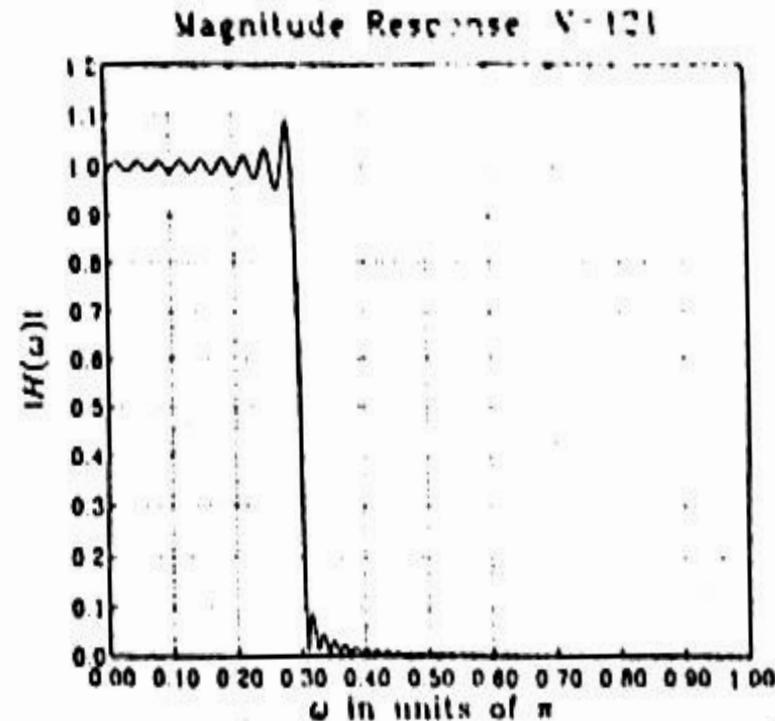
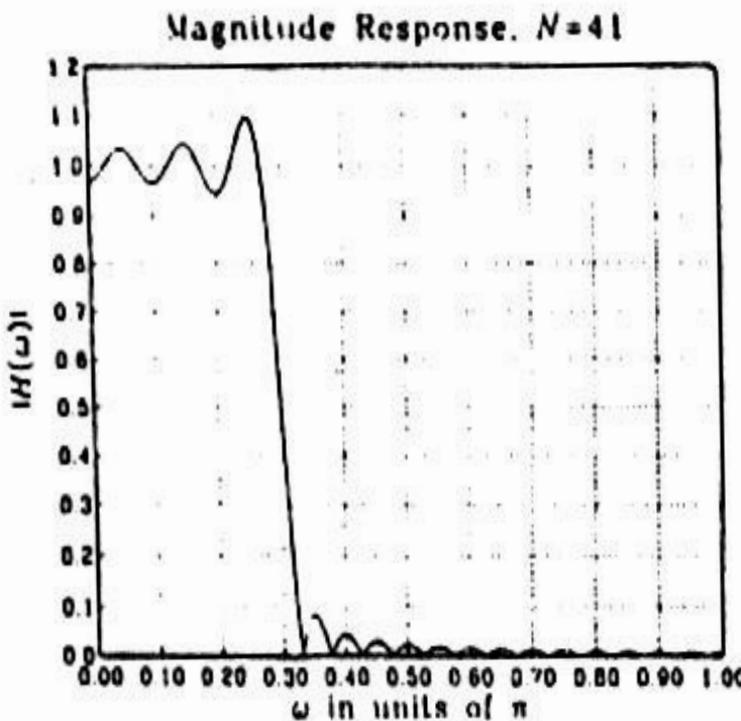
$$\angle H(\omega) = -\omega M + \frac{\pi}{2} + \pi\alpha(\omega)$$

Chất lượng của bộ lọc

Mong muốn: $\hat{D}(\omega) \longrightarrow D(\omega)$

Thực tế:

- N tăng: $\hat{D}(\omega) \longrightarrow D(\omega)$ tại vùng liên tục của $D(\omega)$
- Tại vùng chuyển tiếp: Hiện tượng Gibbs: không thể giảm độ gợn

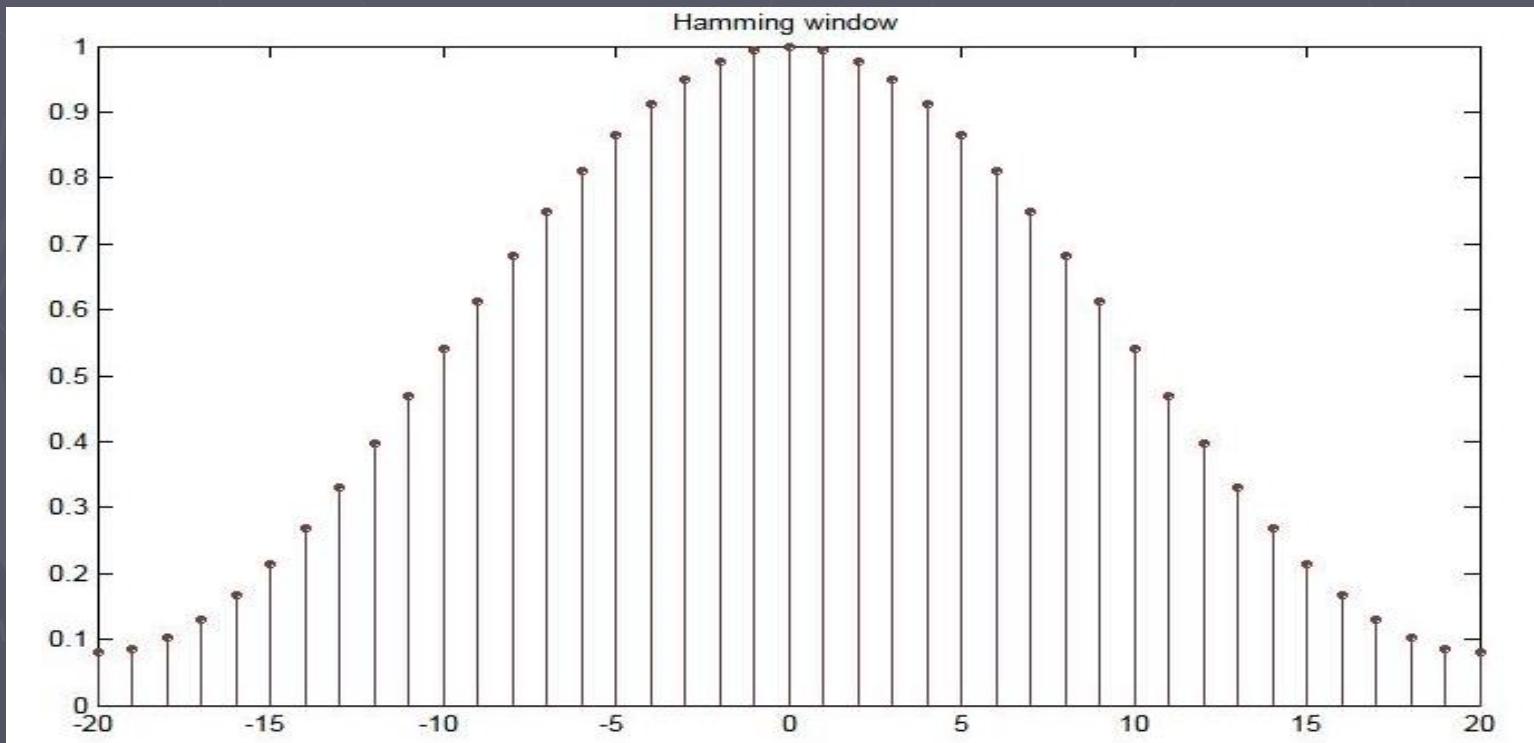


b. Cửa sổ Hamming

Để giảm độ gợn do hiện tượng Gibbs

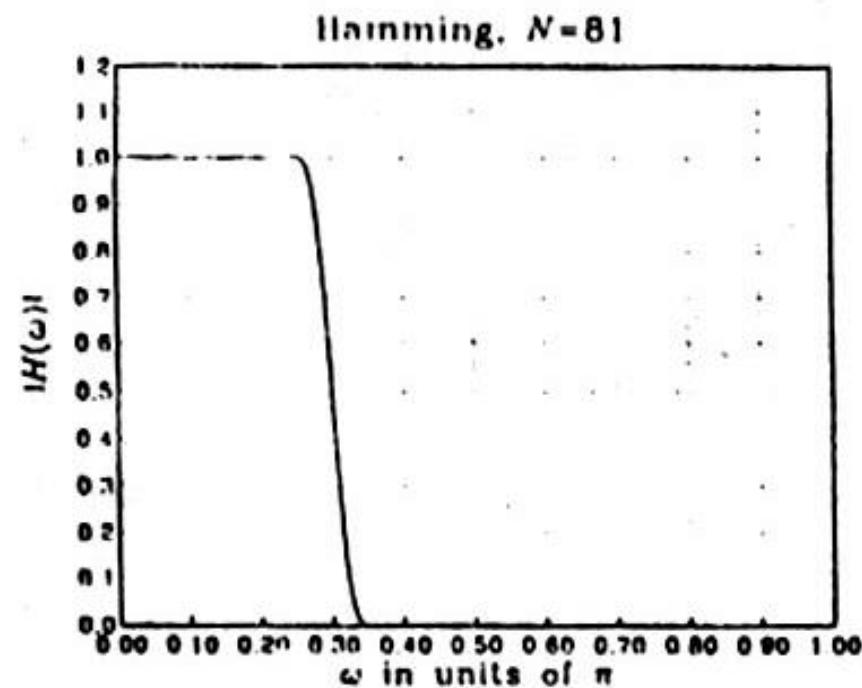
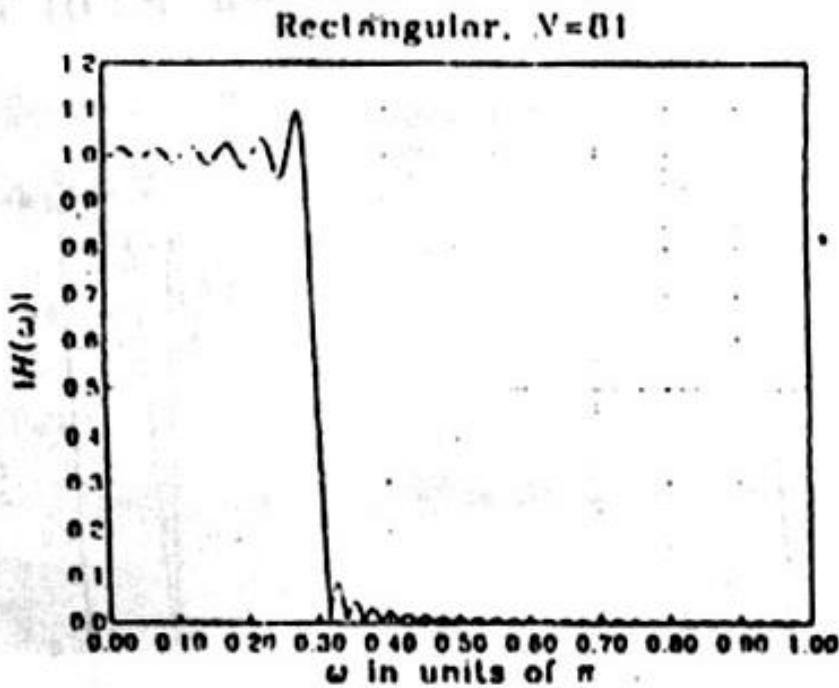
Cửa sổ Hamming **chiều dài N:**

$$w(n) = 0.54 - 0.46 \cos\left(\frac{2\pi n}{N-1}\right) , n = 0, 1, \dots, N-1$$



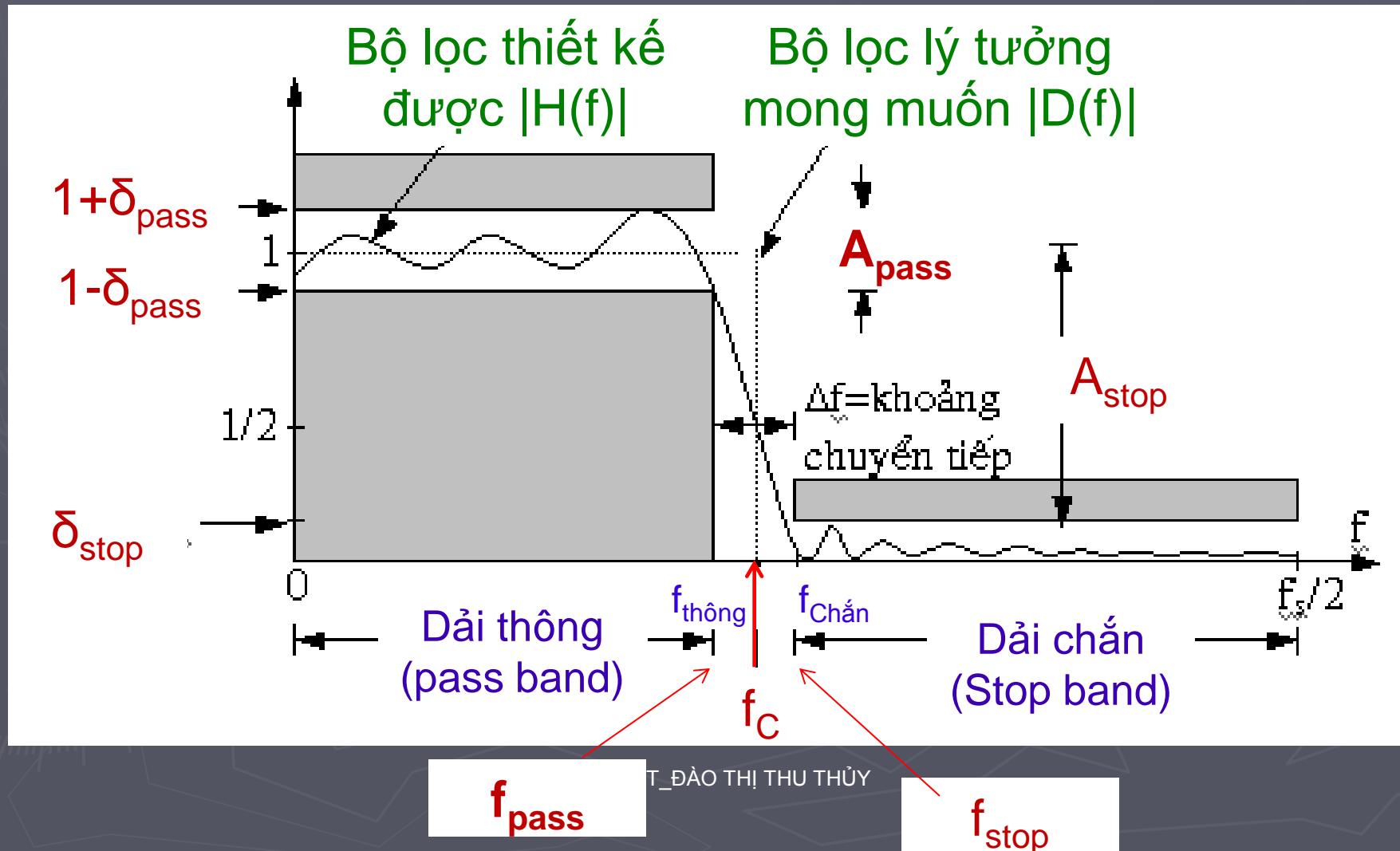
b. Cửa sổ Hamming

So sánh với cửa sổ chữ nhật ($N=81$):



c. Cửa sổ Kaiser

Đáp ứng tần số thực tế:



c. Cửa sổ Kaiser

$$w(n) = \frac{I_0\left(\alpha \frac{\sqrt{n(2n-M)}}{M}\right)}{I_0(\alpha)}, n = 0, 1, \dots, N-1$$

$I_0(x)$: hàm Bessel sửa đổi loại 1, bậc 0.

α : hệ số hình dạng

$N = 2M + 1$: chiều dài cửa sổ

c. Cửa sổ Kaiser

Các bước thiết kế mạch lọc thông thấp, biết $\{f_{stop}, f_{pass}, A_{stop}, A_{pass}\}$

1. Tính f_c và Δf

$$f_c = \frac{1}{2} (f_{pass} + f_{stop})$$

$$\Delta f = f_{stop} - f_{pass}$$

Tính ω_c :

$$\omega_c = 2\pi \frac{f_c}{f_s}$$

Cửa sổ Kaiser

2. Tính δ_{pass} và δ_{stop} :

$$\delta_{pass} = \frac{10^{A_{pass}/20} - 1}{10^{A_{pass}/20} + 1}$$

$$\delta_{stop} = 10^{-A_{stop}/20}$$

3. Tính $\delta = \min(\delta_{pass}, \delta_{stop})$

Suy ra:

$$A = -20 \log \delta \text{ (dB)}$$

c. Cửa sổ Kaiser

4. Tính **a** và **N**:

$$\alpha = \begin{cases} 0.1102(A - 8.7) & , A \geq 50 \\ 0.5842(A - 21)^{0.4} + 0.07886(A - 21) & , 21 < A < 50 \\ 0 & , A \leq 21 \end{cases}$$

với

$$N = 1 + D \frac{f_s}{\Delta f}$$

$$D = \begin{cases} \frac{A - 7.95}{14.36} & , A > 21 \\ 0.922 & , A \leq 21 \end{cases}$$

Làm tròn N lên **số nguyên lẻ gần nhất**

c. Cửa sổ Kaiser

5. $M = (N - 1)/2$

Tính hàm cửa sổ $w(n)$, $n = 0, 1, \dots, N - 1$

$$w(n) = \frac{I_0\left(\alpha \frac{\sqrt{n(2n-M)}}{M}\right)}{I_0(\alpha)}, n = 0, 1, \dots, N - 1$$

6. Tính các hệ số đáp ứng xung:

$$h(n) = w(n)d(n - M)$$

6.3. Thiết kế bộ lọc đệ qui và IIR

- Lọc đệ qui: Tín hiệu ra phụ thuộc tín hiệu vào và cả tín hiệu ra ở 1 hay nhiều thời điểm trong quá khứ.

$$y(n) = \sum_{k=1}^M a_k y(n-k) + \sum_{k=-N}^N b_k x(n-k)$$

- Trong đó a_k, b_k là hệ số của lọc. M,N trên lý thuyết có thể là vô hạn.
- Lọc đệ qui thường là lọc IIR

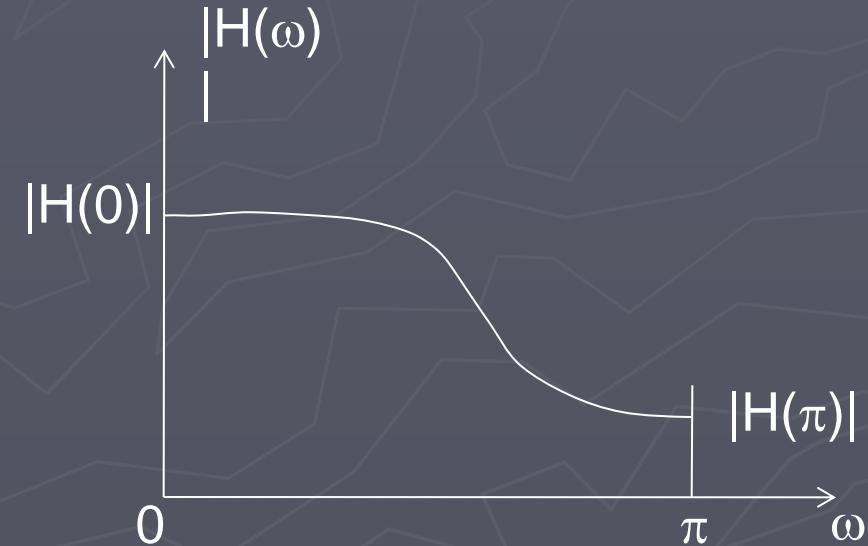
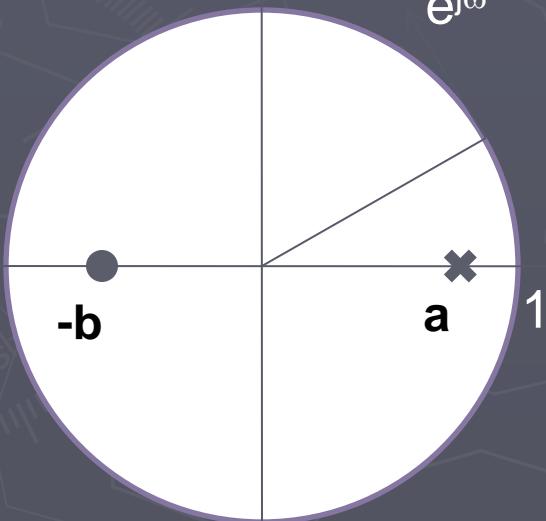
6.3. Thiết kế bộ lọc IIR

6.3.1. Các bộ lọc bậc nhất

Ví dụ: Thiết kế bộ lọc bậc 1 có hàm truyền dạng

$$H(z) = \frac{G(1 + bz^{-1})}{1 - az^{-1}}$$

với $0 < a, b < 1$



$$H(z) = \frac{G(1+bz^{-1})}{1-az^{-1}}$$

$$H(\omega=0) = H(z=1) = \frac{G(1+b)}{1-a}$$

$$H(\omega=\pi) = H(z=-1) = \frac{G(1-b)}{1+a}$$

$$\Rightarrow \frac{H(\pi)}{H(0)} = \frac{(1-b)(1-a)}{(1+a)(1+b)}$$

Cần 2 phương trình thiết kế để xác định a và b.



Ví dụ : thiết kế bộ lọc có $H(\pi)/H(0) = 1/21$ và $n_{\text{eff}} = 20$ mẫu
để đạt $\varepsilon = 1\%$

$$a = \varepsilon^{1/n_{\text{eff}}} = (0.01)^{1/20} = 0.8$$

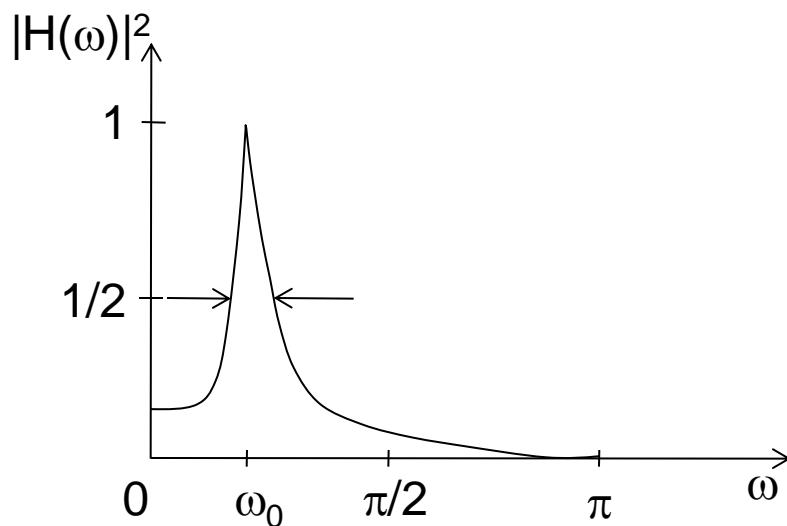
$$\frac{(1-b)(1-0.8)}{(1+b)(1+0.8)} = \frac{1}{21} \Rightarrow b = 0.4$$

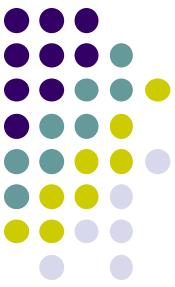
$$H(z) = G \frac{1 + 0.4z^{-1}}{1 - 0.8z^{-1}}$$



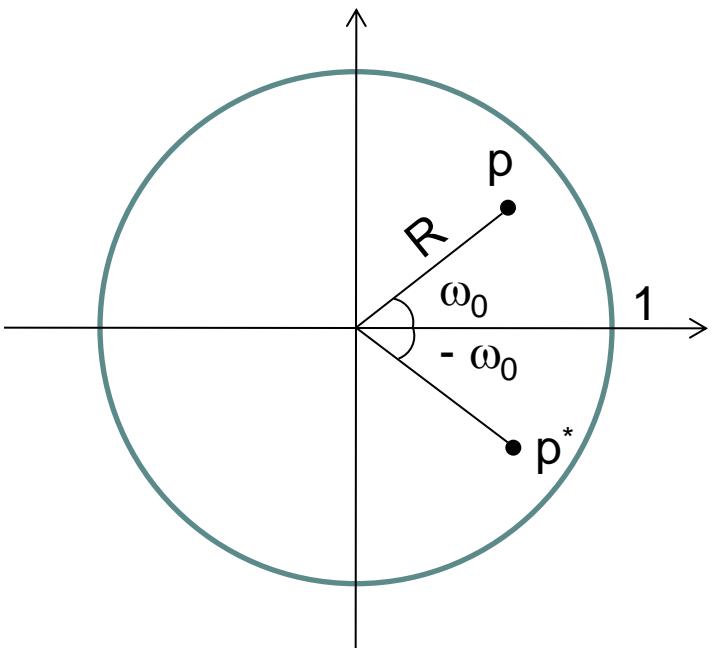
2. Các bộ lọc cộng hưởng

Thiết kế một bộ lọc cộng hưởng bậc hai đơn giản, đáp ứng có một đỉnh đơn hép tại tần số ω_0





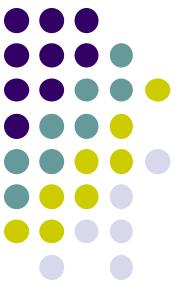
- Để tạo 1 đỉnh tại $\omega = \omega_0$, đặt 1 cực $p = R.e^{j\omega_0}$, $0 < R < 1$
và cực liên hợp $p^* = R.e^{-j\omega_0}$



$$H(z) = \frac{G}{(1 - R.e^{j\omega_0} z^{-1})(1 - R.e^{-j\omega_0} z^{-1})}$$

$$= \frac{G}{1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2}}$$

$$a_1 = -2R \cos \omega_0, \quad a_2 = R^2$$



- Đáp ứng tần số:

$$H(\omega) = \frac{G}{(1 - R \cdot e^{j\omega_0} e^{-j\omega})(1 - R \cdot e^{-j\omega_0} e^{-j\omega})}$$

- Chuẩn hóa bộ lọc: $|H(\omega_0)| = 1$

$$|H(\omega_0)| = \frac{G}{|(1 - R \cdot e^{j\omega_0} e^{-j\omega_0})(1 - R \cdot e^{j\omega_0} e^{j\omega_0})|} = 1$$

$$\Rightarrow G = (1 - R) \sqrt{1 - 2R \cos(2\omega_0) + R^2}$$



- Độ rộng 3-dB fullwidth: độ rộng tại $\frac{1}{2}$ cực đại của đáp ứng biên độ bình phương

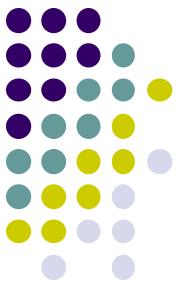
$$|H(\omega)|^2 = \frac{1}{2} |H(\omega_0)|^2 = \frac{1}{2}$$

- Tính theo dB: $20 \log_{10} \left| \frac{H(\omega)}{H(\omega_0)} \right| = 10 \log_{10} \left(\frac{1}{2} \right) = -3dB$
- Giải ra 2 nghiệm ω_1 và $\omega_2 \Rightarrow \Delta\omega = \omega_2 - \omega_1$



- Chứng minh được: $\Delta\omega \approx 2(1 - R)$ khi p nằm gần đường tròn (xem sách)
→ dùng xác định giá trị R dựa trên băng thông $\Delta\omega$ cho trước.

Ví dụ: thiết kế bộ lọc công hưởng 2 cực, đỉnh $f_0 = 500\text{Hz}$ và độ rộng $\Delta\omega = 32\text{kHz}$, tốc độ lấy mẫu $fs = 10\text{kHz}$

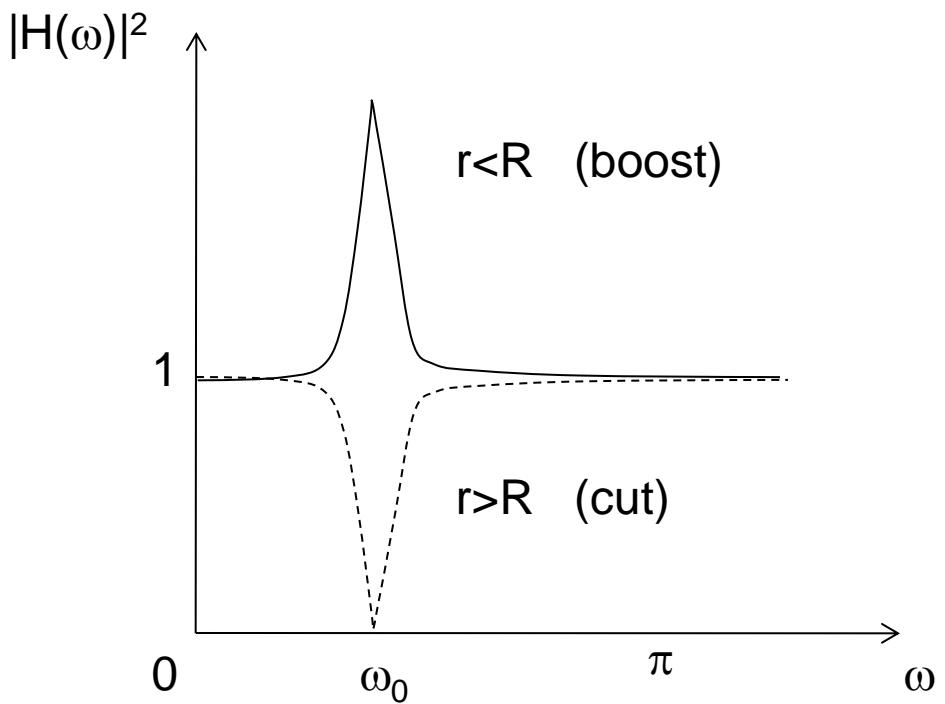
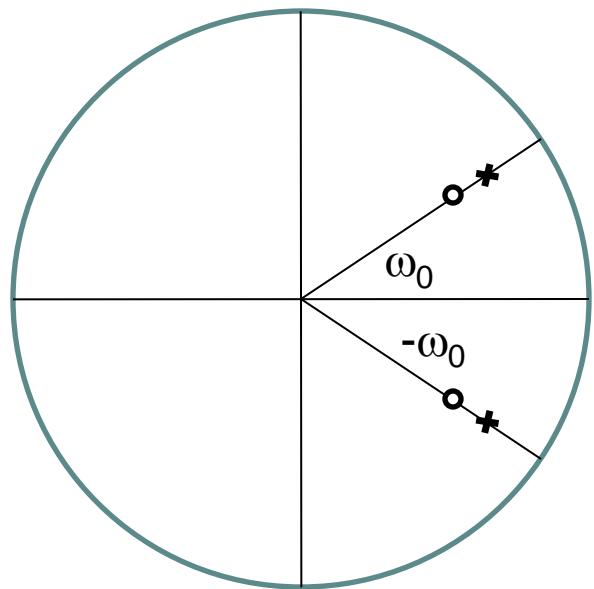
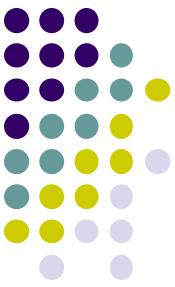


- Phương pháp chung: đặt 1 cặp zero gần các cực theo cùng hướng các cực, tại $a_1 = r.e^{j\omega_0}$ và $a_1^* = r.e^{-j\omega_0}$ với $0 \leq r \leq 1$
- Hàm truyền:

$$H(z) = \frac{(1 - r.e^{j\omega_0}z^{-1})(1 - r.e^{-j\omega_0}z^{-1})}{(1 - R.e^{j\omega_0}z^{-1})(1 - R.e^{-j\omega_0}z^{-1})} = \frac{1 + b_1z^{-1} + b_2z^{-2}}{1 + a_1z^{-1} + a_2z^{-2}}$$

với $a_1 = -2R \cos \omega_0$, $a_2 = R^2$

$$b_1 = -2r \cos \omega_0, \quad b_2 = r^2$$



Bộ lọc FIR và Bộ lọc IIR

FIR

Ưu điểm:

- Pha tuyến tính
- Ổn định (không có các cực)

Nhược điểm:

- Để có đáp ứng tần số tốt
→ chiều dài bộ lọc N lớn
→ tăng chi phí tính toán

IIR

Ưu điểm:

- Chi phí tính toán thấp
- Thực hiện hiệu quả theo kiểu cascade

Nhược điểm:

- Có sự bất ổn định do quá trình lượng tử hóa các hệ số có thể đẩy các cực ra ngoài vòng tròn đơn vị
- Không thể đạt pha tuyến tính trên toàn khoảng Nyquist

6.4 Thực hiện mạch lọc

6.4.1 Thực hiện lọc FIR

6.4.2 Thực hiện lọc IIR

6.4.1 Thực hiện lọc FIR

6.4.2 Thực hiện lọc IIR

- a. Thực hiện dạng trực tiếp I (direct-form I)
- b. Thực hiện dạng trực tiếp II (direct-form II)
- c. Thực hiện dạng nối tiếp (cascade-form)
- d. Thực hiện dạng song song (parallel-form)

a. Thực hiện dạng trực tiếp I (direct-form I)

- Lọc số có phương trình sai phân mô tả tín hiệu:**

$$y(n) = \sum_{r=0}^M b_r x(n-r) - \sum_{k=1}^N a_k y(n-k); \quad a_0 = 1$$

$$\Rightarrow y(n) = -a_1 y(n-1) - a_2 y(n-2) - \dots - a_N y(n-N) + b_0 x(n) + b_1 x(n-1) + \dots + b_M x(n-M)$$

- Hàm truyền của lọc là:**

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2} + \dots + b_M z^{-M}}{1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} + \dots + a_N z^{-N}}$$

$$= \frac{\sum_{r=0}^M b_r x(n-r)}{1 + \sum_{k=1}^N a_k y(n-k)}$$

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{\sum_{r=0}^M b_r x(n-r)}{1 + \sum_{k=1}^N a_k y(n-k)} = H_1(z)H_2(z)$$

$$H_1(z) = \sum_{r=0}^M b_r z^{-r}$$

$$H_2(z) = \frac{1}{1 + \sum_{k=1}^N a_k z^{-k}}$$

- **Thực hiện dạng trực tiếp I:**

