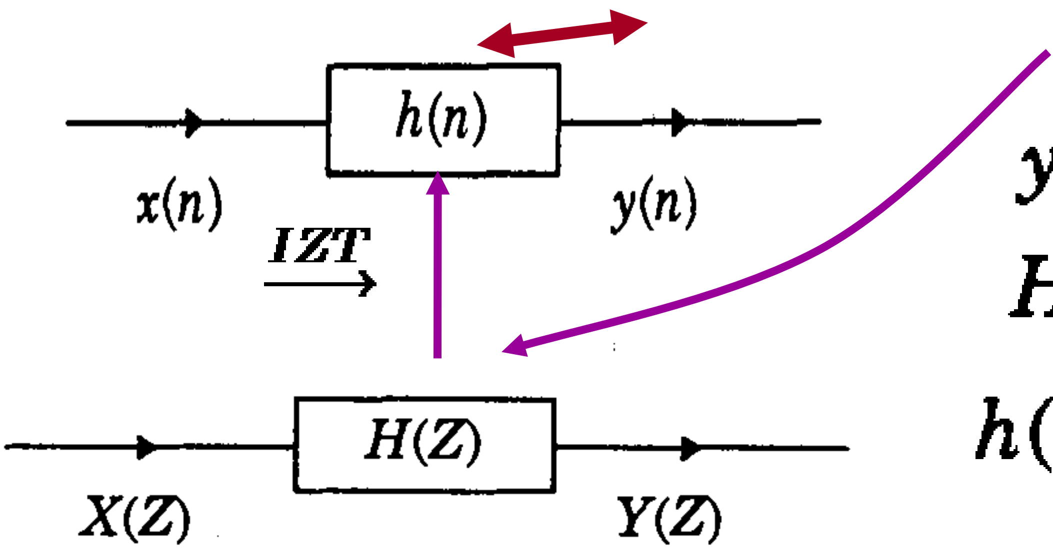
Chương 3. Biến đổi Z và ứng dụng vào phân tích các hệ thống LTI

3. Phân tích hệ LTI trên miền Z

TS. Nguyễn Hồng Quang

Chuyển đổi từ PTSP → h(n)

$$y(n) - 3.y(n-1) + 2.y(n-2) = 4.x(n) + 5.x(n-1)$$



$$y(n) = x(n) * h(n)$$

$$H(Z) = ZT[h(n)]$$

$$h(n) = IZT[H(Z)]$$

$$Y(Z) = X(Z) \cdot H(Z) \quad \Leftrightarrow \quad H(Z) = \frac{Y(Z)}{X(Z)}$$

H(Z) : hàm truyền đạt của hệ thống

h(n) → PTSP

Một hệ thống có $h(n) = 2.3^n.u(n) + 5.4^n.u(n)$. Tìm phương trình sai phân

Tính đáp ứng y(n). hệ thống được khởi tạo relax:

Các điều kiện đầu bằng 0: y(-1) = y(-2) = ... = y(-N) = 0

$$X(z) = \frac{N(z)}{Q(z)} \quad Y(z) = H(z)X(z) = \frac{B(z)N(z)}{A(z)Q(z)}$$

- Giả sử hàm hệ thống H(Z) chỉ chứa các điểm cực
  - p1, p2,..., pN
- Biến đổi Z của tín hiệu vào chứa các điểm cực
  - q1, q2, ..., qL

$$Y(z) = \sum_{k=1}^{N} \frac{A_k}{1 - p_k z^{-1}} + \sum_{k=1}^{L} \frac{Q_k}{1 - q_k z^{-1}}$$

$$y(n) = \sum_{k=1}^{N} A_k (p_k)^n u(n) + \sum_{k=1}^{L} Q_k (q_k)^n u(n)$$

đáp ứng tự nhiên của hệ (natural response).

đáp ứng cưỡng bức của hệ (forced response).

3

Định nghĩa: one-sided or unilateral Z-transform

$$X^+(z) \equiv \sum_{n=0}^{\infty} x(n) z^{-n}$$

$$x_1(n) = \{1, 2, 5, 7, 0, 1\}$$
$$\uparrow$$

$$x_2(n) = \{1, 2, 5, 7, 0, 1\}$$
$$\uparrow$$

$$x_4(n) = \{2, 4, 5, 7, 0, 1\}$$
$$\uparrow$$

Với một tín hiệu không nhân quả, biến đổi Z một phía không tương ứng duy nhất. Ví dụ: $X^+_2(z) = X^+_4(z)$ nhưng $x_2(n) \neq x_4(n)$

Trễ trên miền thời gian

$$x(n) \overset{z^+}{\longleftrightarrow} X^+(z) \quad k > 0$$

$$x(n-k) \overset{z^+}{\longleftrightarrow} z^{-k}\left[X^+(z) + \sum^{k} x(-n) z^n\right]$$

$$= [x(-k) + x(-k+1)z^{-1} + \cdots + x(-1)z^{-k+1}]$$

$$+ z^{-k} X^+(z)$$

(a) $x(n) = a^n u(n)$

(b) $x_1(n) = x(n-2)$ where $x(n) = a^n$

Biến đổi Z 1 phía giải PTSP

- Dãy số Fibonacci: 1, 1, 2, 3, 5, 8, ...
- Xác định biểu thức (closed-form expression) cho phần tử thứ n của dãy Fibonacci

  $y(n) = y(n-1) + y(n-2)$
- Xác định các điều kiện đầu :

$$y(0) = y(-1) + y(-2) = 1 \qquad y(-1) = 0$$

$$y(1) = y(0) + y(-1) = 1 \qquad y(-2) = 1$$

- Xác định đáp ứng của hệ thống sau với tác động u(n) :

  $y(n) = a.y(n-1) + x(n) \; ; -1 < a < 1$
- Điều kiện đầu : $y(-1) = 1$

Tín hiệu x(n) nhân quả, các điều kiện đầu : y(-1), y(-2), y(-N). Xác định tín hiệu ra y(n), n ≥ 0

$$Y^+(z) = -\sum_{k=1}^{N} a_k z^{-k}\left[Y^+(z) + \sum_{n=1}^{k} y(-n)z^{n}\right] + \sum_{k=0}^{M} b_k z^{-k} X^+(z)$$

$$Y^+(z) = \frac{\sum_{k=0}^{M} b_k z^{-k}}{1+\sum_{k=1}^{N} a_k z^{-k}} X(z) - \frac{\sum_{k=1}^{N} a_k z^{-k} \sum_{n=1}^{k} y(-n) z^{n}}{1+\sum_{k=1}^{N} a_k z^{-k}}$$

$$\boxed{Y^+(z) = H(z)X(z) + \frac{N_0(z)}{A(z)}} \qquad N_0(z) = -\sum_{k=1}^{N} a_k z^{-k} \sum_{n=1}^{k} y(-n) z^{n}$$

$$y(n) = \sum_{k=1}^{N} A_k (p_k)^n u(n) + \sum_{k=1}^{L} Q_k (q_k)^n u(n) \qquad y_{zi}(n) = \sum_{k=1}^{N} D_k (p_k)^n u(n)$$

Sinh ra do tác động của x(n) (giống h(n))

Do tác động của x(n) (giống x(n))

Do tác động của điều kiện đầu của y(n)

6

Đáp ứng y(n)

$$y(n) = 0.9y(n-1) - 0.81y(n-2) + x(n)$$

$x(n) = u(n)$ (a) $y(-1) = y(-2) = 0$ (b) $y(-1) = y(-2) = 1$

$$y(n) = \sum_{k=1}^{N} A_k (p_k)^n u(n) + \sum_{k=1}^{L} Q_k (q_k)^n u(n) \quad y_{zi}(n) = \sum_{k=1}^{N} D_k (p_k)^n u(n)$$

$$y(n) = y_{zs}(n) + y_{zi}(n) \qquad A'_k = A_k + D_k$$

$$\boxed{y(n) = \sum_{k=1}^{N} A'_k (p_k)^n u(n) + \sum_{k=1}^{L} Q_k (q_k)^n u(n)}$$

- $y_{zs}(n)$ ($y_1(n) + y_2(n)$): zero-state response – không phụ thuộc vào điều kiện đầu của y(n)
- $y_{zi}(n)$ ($y_3(n)$): zero-input response – chỉ tạo ra do điều kiện đầu của y(n), không phụ thuộc vào x(n)
- natural response ($y_1(n) + y_3(n)$) : phụ thuộc vào các điểm cực của hệ thống : p_k^n,
- forced response ($y_2(n)$): chỉ phụ thuộc vào x(n) – chỉ bao gồm q_k^n, q_k là các điểm cực của x(n)

Đáp ứng tắt dần (Transient Response) và đáp ứng bền (Steady-State Response) của hệ

$$y_{fr}(n) = \sum_{k=1}^{L} Q_k (q_k)^n u(n)$$

- Khi tín hiệu nhân quả là hình sin, các điểm cực sẽ nằm trên vòng tròn đơn vị
- Do vậy đáp ứng cưỡng bức cũng là hàm hình sin và tồn tại với n > 0.
- Được gọi là đáp ứng trạng thái bền của hệ

Đáp ứng tự nhiên (đáp ứng tắt dần) - Natural or transient response

If $|p_k| < 1$ for all k, then, $y_{nr}(n)$ decays to zero as n approaches infinity

$$y(n) = 0.5y(n-1) + x(n)$$

$x(n) = 10.\cos(\pi n/4).u(n)$

Hệ thống được khởi tạo relax

$$y_{nr}(n) = 6.3(0.5)^n u(n)$$

$$y_{fr}(n) = 13.56\cos\left(\frac{\pi}{4}n - 28.7^\circ\right) u(n)$$

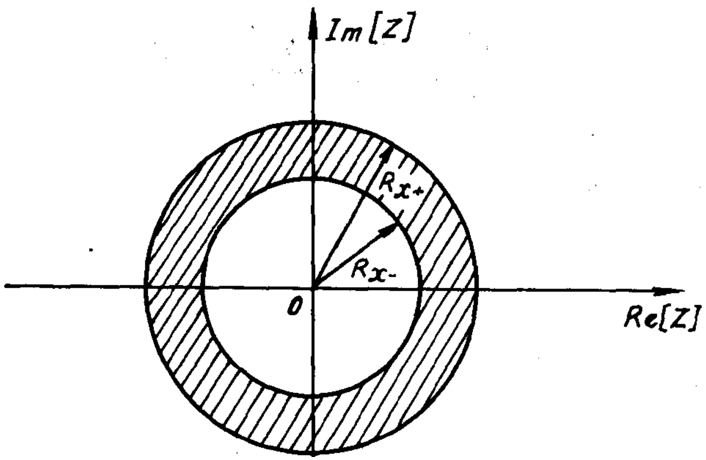
8

Tính nhân quả và tính ổn định

Hệ thống nhân quả và ổn định ⇔ các điểm cực của H(Z) nằm trong vòng tròn đơn vị

$$h(n) \xrightarrow{ZT} H(Z)$$

$$H(Z) = \sum^{\infty} h(n) Z^{-n}$$

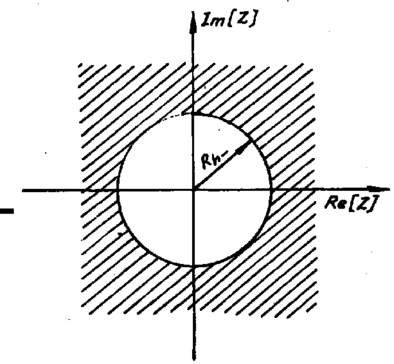


$$R_{h-} < |Z| < R_{h+}$$

$$R_{x-} = \lim_{n \to \infty} | x(n) |^{1/n}$$

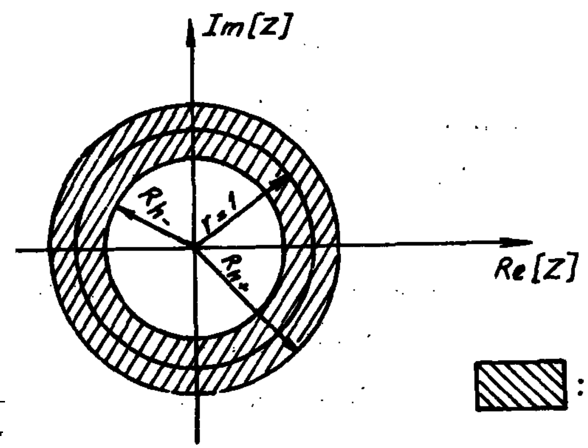
$$R_{x+} = \frac{1}{\lim_{n \to \infty} | x(-n) |^{1/n}}$$

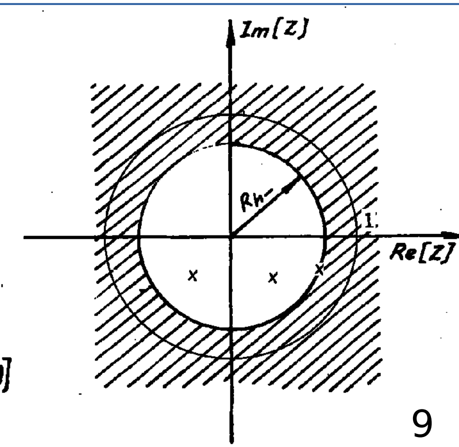
- $h(n) = 0, \ \forall n < 0$
- ➔ $R_{h+} = +\infty$
- Hệ nhân quả ⇔ MHT của H(Z) nằm ngoài vòng tròn R_{h-}



$$S = \sum_{n=-\infty}^{\infty} | h(n) | < \infty$$

Các điểm Z : |Z| = 1 phải nằm trong MHT của H(Z)





Khảo sát tính ổn định của hệ LTI nhân quả bởi các điểm cực

- $y(n) + a_1.y(n-1) + ... + a_N.y(n-N) = x(n)$
- Bước 1. Tìm hàm truyền đạt H(Z)

  $H(Z) = 1/(1 + a_1.Z^{-1} + ... + a_N.Z^{-N})$

  $= Z^N / (Z^N + a_1.Z^{N-1} + ... + a_N)$

- Bước 2. Tìm các điểm cực Zpk

  Giải phương trình : $Z^N + a_1.Z^{N-1} + ... + a_N = 0$

Bước 3. So sánh các điểm cực với vòng tròn đơn vị

+ Nếu tất cả các điểm cực đều nằm trong vòng tròn đơn vị ➔ hệ ổn định

+ Nếu có 1 điểm cực nằm trên hoặc nằm ngoài ➔ hệ không ổn định

$y(n) – 3.y(n-1) + 2.y(n-2) = 4.x(n) + 5.x(n-1)$

$y(n) – 3.y(n-1) + 2.y(n-2) = x(n)$

$y(n) – 5/8.\ y(n-1) + 1/8.\ y(n-2) = x(n)$

$y(n) – 4.y(n-1) + 5.y(n-2) = x(n)$

Tiêu chuẩn ổn định Schur-Cohn

$$H(z) = \frac{1}{1 - \frac{7}{4}z^{-1} - \frac{1}{2}z^{-2}}$$

$$A(z) = 1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} + \cdots + a_N z^{-N}$$

$$A_m(z) = \sum_{k=0}^{m} a_m(k) z^{-k} \qquad a_m(0) = 1$$

$$B_m(z) = z^{-m} A_m(z^{-1}) = \sum_{k=0}^{m} a_m(m-k) z^{-k}$$

Các hệ số của $B_m(z)$ giống với các hệ số của $A_m(z)$, nhưng được viết theo thứ tự ngược lại

- Bước 1 : $A_N(z) = A(z) \quad K_N = a_N(N)$
- Bước 2 (Bước lặp) :
  - Tính đa thức bậc thấp hơn $A_m(z)$, m = N, N-1, N-2, ..., 1:

$$A_{m-1}(z) = \frac{A_m(z) - K_m B_m(z)}{1 - K_m^2} \qquad K_m = a_m(m)$$

- Bước 3 :
  - Đa thức A(Z) có các điểm cực nằm trong vòng tròn đơn vị nếu và chỉ nếu ...
  - Các hệ số K_m thỏa mãn điều kiện $|K_m| < 1$ $\forall$ m = 1, 2, ..., N.

Giải thuật - lập trình

$$a_N(k) = a_k \qquad k = 1, 2, \ldots, N$$

$$K_N = a_N(N)$$

- Vì vậy với *m* = *N*, *N* - 1 , ... , 1, tính :

$$K_m = a_m(m) \qquad a_{m-1}(0) = 1$$

$$a_{m-1}(k) = \frac{a_m(k) - K_m b_m(k)}{1 - K_m^2} \qquad k = 1, 2, \ldots, m-1$$

$$b_m(k) = a_m(m-k) \qquad k = 0, 1, \ldots, m$$

$$H(z) = \frac{1}{1 - \frac{7}{4}z^{-1} - \frac{1}{2}z^{-2}}$$

Khảo sát tính ổn định của hệ IIR bậc 2

$y(n) + a_1.y(n-2) + a_2.y(n-2) = x(n)$

$$H(Z) = \frac{Y(Z)}{X(Z)} = \frac{1}{1 + a_1 Z^{-1} + a_2 Z^{-2}} = \frac{Z^2}{Z^2 + a_1 Z + a_2}$$

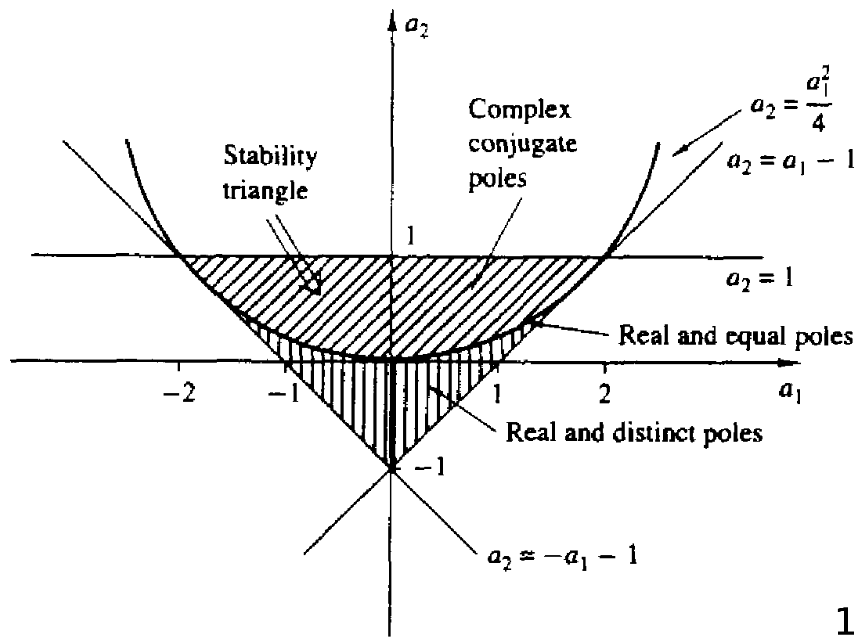
$\Delta = a_1^2 - 4a_2 \geq 0$ $\quad Z_{1,2} = -a_1/2 \pm \text{sqrt}(\Delta)/\ 2$

$\Delta = a_1^2 - 4a_2 < 0$ $\quad Z_{1,2} = -a_1/2 \pm j\ .\ \text{sqrt}(-\Delta)/\ 2$

$K_1 = \dfrac{a_1}{1 + a_2}$ $\quad K_2 = a_2$

$$\boxed{-1 < a_2 < 1}$$

$$\boxed{\begin{aligned} a_1 &< 1 + a_2 \\ a_1 &> -1 - a_2 \end{aligned}}$$

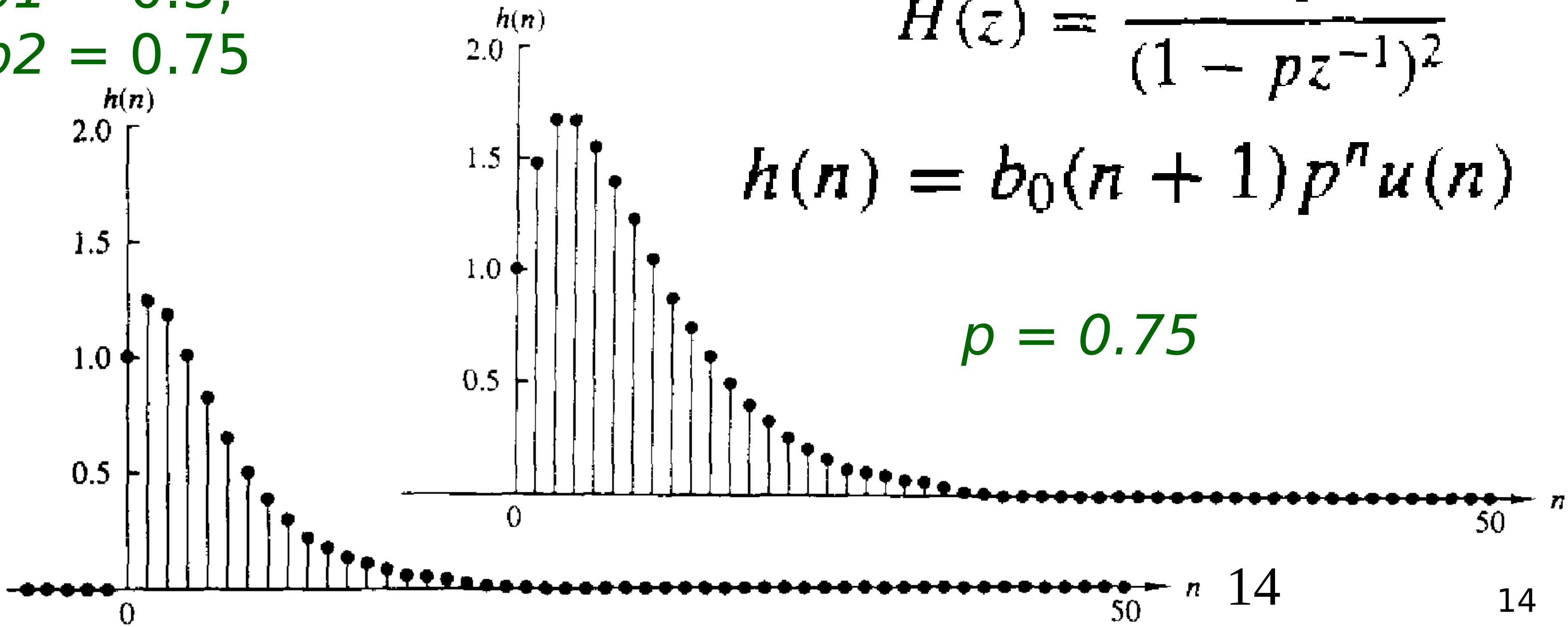


Các điểm cực thực phân biệt / trùng nhau

$$H(z) = \frac{A_1}{1 - p_1 z^{-1}} + \frac{A_2}{1 - p_2 z^{-1}} \quad A_1 = \frac{b_0 p_1}{p_1 - p_2} \qquad A_2 = \frac{-b_0 p_2}{p_1 - p_2}$$

$$h(n) = \frac{b_0}{p_1 - p_2}\left(p_1^{n+1} - p_2^{n+1}\right)u(n) \quad p_1 = p_2 = p = -a_1/2$$

$p1 = 0.5$,
$p2 = 0.75$



$$H(z) = \frac{b_0}{(1 - pz^{-1})^2}$$

$$h(n) = b_0(n+1)p^n u(n)$$

$p = 0.75$

14

Các điểm cực liên hiệp phức $(a_1^2 < 4a_2)$

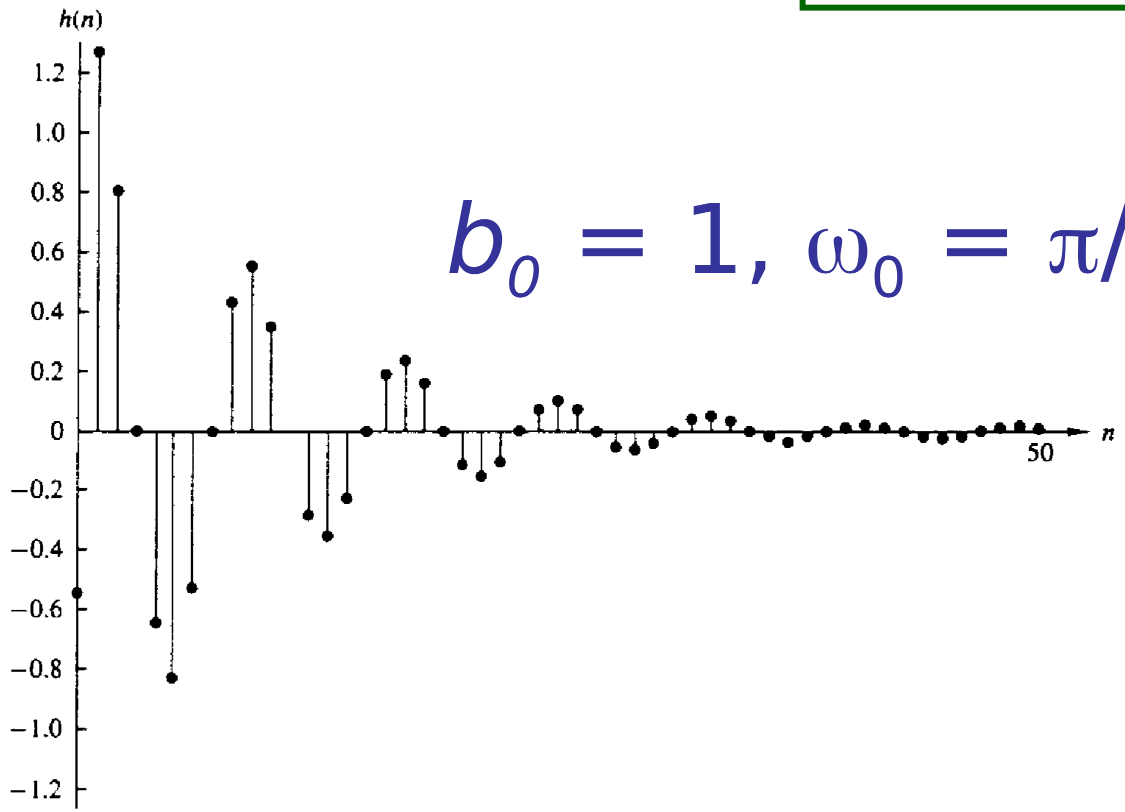
$$H(z) = \frac{A}{1 - pz^{-1}} + \frac{A^*}{1 - p^*z^{-1}}$$

$$= \frac{A}{1 - re^{j\omega_0}z^{-1}} + \frac{A^*}{1 - re^{-j\omega_0}z^{-1}}$$

$$a_1 = -2r\cos\omega_0$$

$$a_2 = r^2$$

$$\boxed{h(n) = \frac{b_0 r^n}{\sin\omega_0}\sin(n+1)\omega_0 u(n)}$$



$b_0 = 1$, $\omega_0 = \pi/4$, $r = 0.9$

Bài tập

3.38 Compute the zero-state response for the following pairs of systems and input signals.

(a) $h(n) = (\frac{1}{3})^n u(n)$, $x(n) = (\frac{1}{2})^n \left(\cos \frac{\pi}{3} n\right) u(n)$

(b) $h(n) = (\frac{1}{2})^n u(n)$, $x(n) = (\frac{1}{3})^n u(n) + (\frac{1}{2})^{-n} u(-n-1)$

(c) $y(n) = -0.1y(n-1) + 0.2y(n-2) + x(n) + x(n-1)$

$x(n) = (\frac{1}{3})^n u(n)$

(d) $y(n) = \frac{1}{2}x(n) - \frac{1}{2}x(n-1)$

$x(n) = 10\left(\cos \frac{\pi}{2} n\right) u(n)$

(e) $y(n) = -y(n-2) + 10x(n)$

$x(n) = 10\left(\cos \frac{\pi}{2} n\right) u(n)$

(f) $h(n) = (\frac{2}{5})^n u(n)$, $x(n) = u(n) - u(n-7)$

(g) $h(n) = (\frac{1}{2})^n u(n)$, $x(n) = (-1)^n$, $-\infty < n < \infty$

(h) $h(n) = (\frac{1}{2})^n u(n)$, $x(n) = (n+1)(\frac{1}{4})^n u(n)$

Biến đổi Z 1 phía

3.34 Use the one-sided z-transform to determine $y(n)$, $n \geq 0$ in the following cases.

(a) $y(n) + \frac{1}{2}y(n-1) - \frac{1}{4}y(n-2) = 0; \quad y(-1) = y(-2) = 1$

(b) $y(n) - 1.5y(n-1) + 0.5y(n-2) = 0; \quad y(-1) = 1, y(-2) = 0$

(c) $y(n) = \frac{1}{2}y(n-1) + x(n)$

$x(n) = (\frac{1}{3})^n u(n), \quad y(-1) = 1$

(d) $y(n) = \frac{1}{4}y(n-2) + x(n)$

$x(n) = u(n)$

$y(-1) = 0; \quad y(-2) = 1$

Khảo sát tính ổn định

3.39 Consider the system

$$H(z) = \frac{1 - 2z^{-1} + 2z^{-2} - z^{-3}}{(1 - z^{-1})(1 - 0.5z^{-1})(1 - 0.2z^{-1})} \qquad \text{ROC: } 0.5 < |z| < 1$$

(a) Sketch the pole–zero pattern. Is the system stable?
(b) Determine the impulse response of the system.

3.40 Compute the response of the system

$$y(n) = 0.7y(n-1) - 0.12y(n-2) + x(n-1) + x(n-2)$$

to the input $x(n) = nu(n)$. Is the system stable?

3.41 Determine the impulse response and the step response of the following causal systems. Plot the pole–zero patterns and determine which of the systems are stable.

(a) $y(n) = \frac{3}{4}y(n-1) - \frac{1}{8}y(n-2) + x(n)$

(b) $y(n) = y(n-1) - 0.5y(n-2) + x(n) + x(n-1)$

(c) $H(z) = \dfrac{z^{-1}(1 + z^{-1})}{(1 - z^{-1})^3}$

(d) $y(n) = 0.6y(n-1) - 0.08y(n-2) + x(n)$

(e) $y(n) = 0.7y(n-1) - 0.1y(n-2) + 2x(n) - x(n-2)$

Bài tập

3.43 We want to design a causal discrete-time LTI system with the property that if the input is

$$x(n) = (\tfrac{1}{2})^n u(n) - \tfrac{1}{4}(\tfrac{1}{2})^{n-1} u(n-1)$$

then the output is

$$y(n) = (\tfrac{1}{3})^n u(n)$$

(a) Determine the impulse response $h(n)$ and the system function $H(z)$ of a system that satisfies the foregoing conditions.

(b) Find the difference equation that characterizes this system.

(c) Determine a realization of the system that requires the minimum possible amount of memory.

(d) Determine if the system is stable.

3.45 Consider the system

$$H(z) = \frac{z^{-1} + \frac{1}{2}z^{-2}}{1 - \frac{3}{5}z^{-1} + \frac{2}{25}z^{-2}}$$

Determine:

(a) The impulse response

(b) The zero-state step response

(c) The step response if $y(-1) = 1$ and $y(-2) = 2$

Bài tập

3.46 Determine the system function, impulse response, and zero-state step response of the system shown in Fig P3.46.

3.47 Consider the causal system

$$y(n) = -a_1 y(n-1) + b_0 x(n) + b_1 x(n-1)$$

Determine:

(a) The impulse response

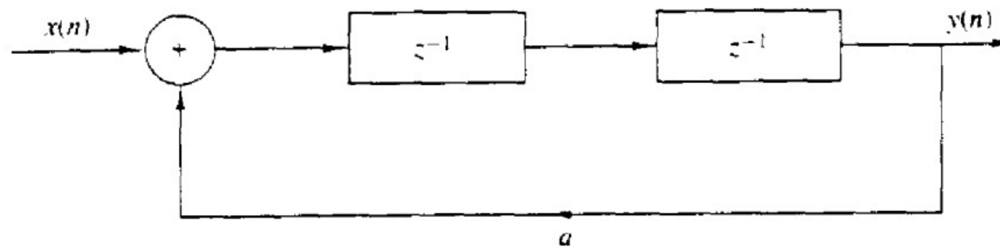


Figure P3.46

(b) The zero-state step response

(c) The step response if $y(-1) = A \neq 0$

(d) The response to the input

$$x(n) = \cos \omega_0 n \qquad 0 \le n < \infty$$

3.48 Determine the zero-state response of the system

$$y(n) = \tfrac{1}{2} y(n-1) + 4x(n) + 3x(n-1)$$

to the input

$$x(n) = e^{j\omega_0 n} u(n)$$

What is the steady-state response of the system?

3.49 Consider the causal system defined by the pole–zero pattern shown in Fig. P3.49.

(a) Determine the system function and the impulse response of the system given that $H(z)|_{z=1} = 1$.

(b) Is the system stable?

(c) Sketch a possible implementation of the system and determine the corresponding difference equations.

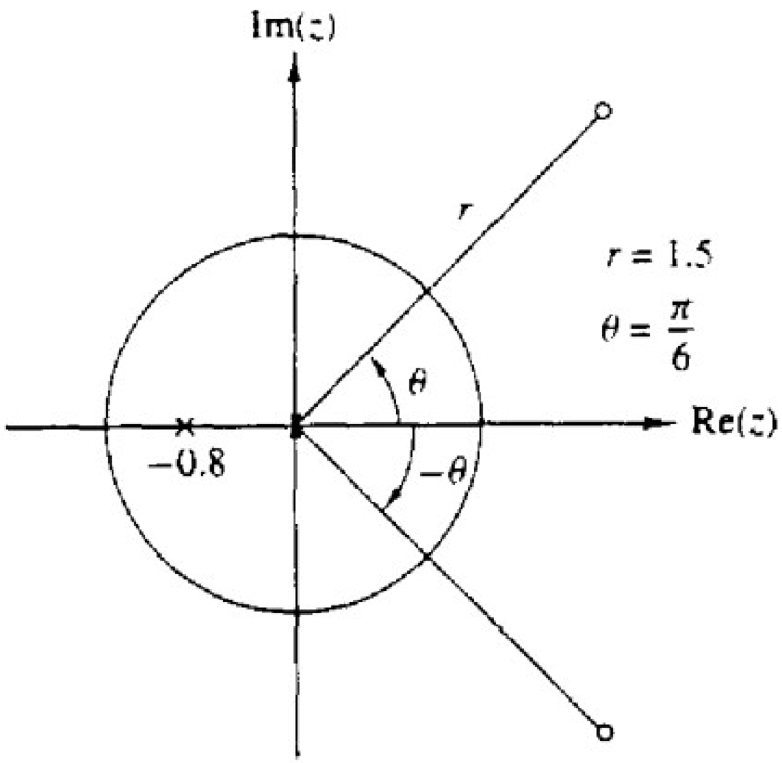


Figure P3.49

3.50 An FIR LTI system has an impulse response $h(n)$, which is real valued, even, and has finite duration of $2N + 1$. Show that if $z_1 = re^{j\omega_0}$ is a zero of the system, then $z_1 = (1/r)e^{j\omega_0}$ is also a zero.

Bài tập

3.51 Consider an LTI discrete-time system whose pole–zero pattern is shown in Fig. P3.51.

(a) Determine the ROC of the system function $H(z)$ if the system is known to be stable.

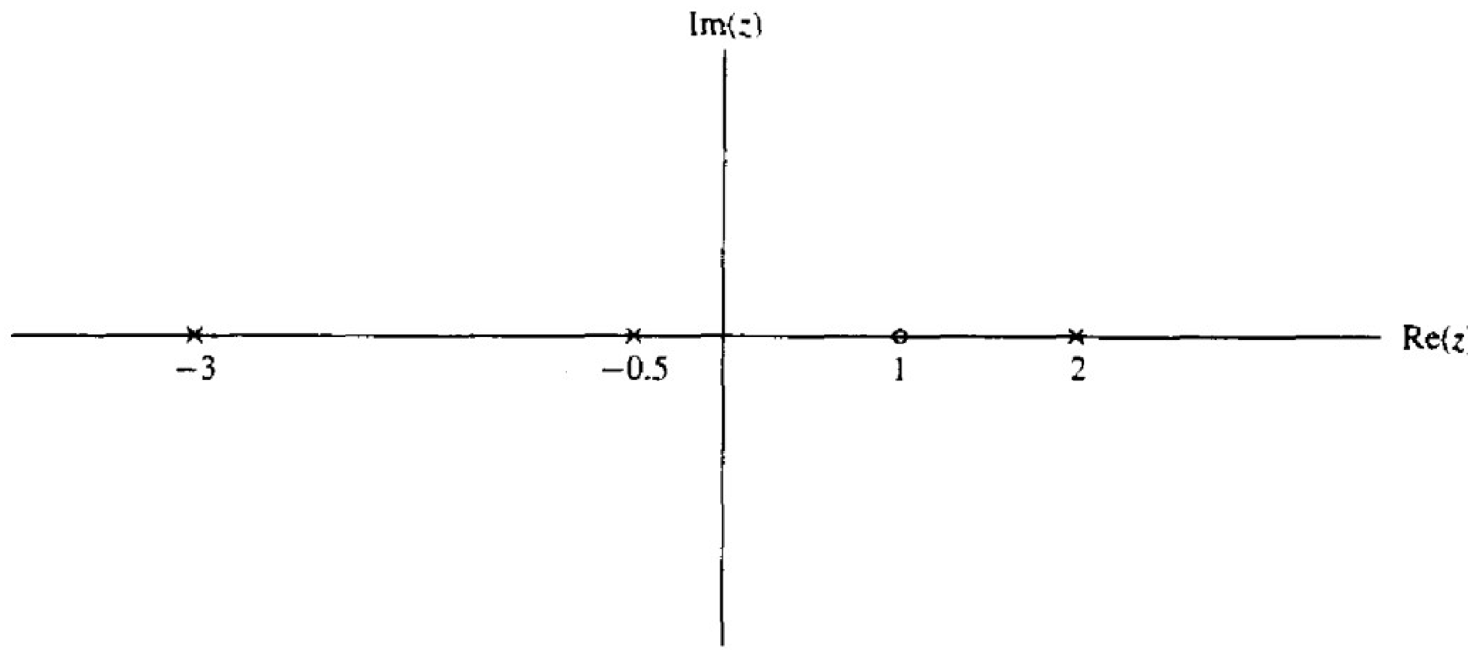


Figure P3.51

(b) It is possible for the given pole–zero plot to correspond to a causal and stable system? If so, what is the appropriate ROC?

(c) How many possible systems can be associated with this pole–zero pattern?

Bài tập

3.55 The step response of an LTI system is

$$s(n) = \left(\tfrac{1}{3}\right)^{n-2} u(n+2)$$

(a) Find the system function $H(z)$ and sketch the pole–zero plot.
(b) Determine the impulse response $h(n)$.
(c) Check if the system is causal and stable.