TRƯỜNG ĐẠI HỌC CÔNG NGHIỆP TP.HCM

XỬ LÝ SỐ TÍN HIỆU
Digital Signal Processing

Giảng viên: Ths. Đào Thị Thu Thủy

Chương 4:

TÍN HIỆU VÀ HỆ THỐNG TRONG MIỀN TẦN SỐ LIÊN TỤC

Chương 4:
TÍN HIỆU VÀ HỆ THỐNG TRONG MIỀN TẦN SỐ LIÊN TỤC

4.1 PHÂN TÍCH TẦN SỐ CỦA CÁC TÍN HIỆU LIÊN TỤC THỜI GIAN

4.2 PHÂN TÍCH TẦN SỐ CỦA CÁC TÍN HIỆU RỜI RẠC THỜI GIAN

4.3 CÁC TÍNH CHẤT CỦA BIẾN ĐỔI FOURIER

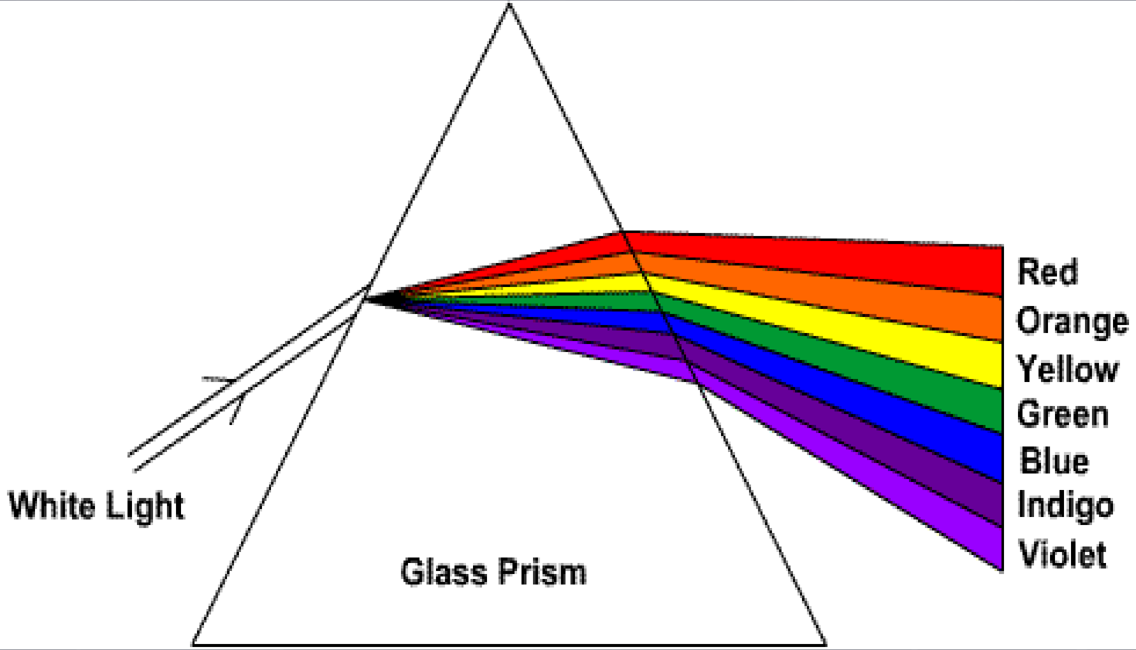
4.4 QUAN HỆ GIỮA BIẾN ĐỔI FOURIER & BIẾN ĐỔI Z

4.5 PHÂN TÍCH HỆ THỐNG LTI RỜI RẠC TRONG MIỀN TẦN SỐ

4.1 PHÂN TÍCH TẦN SỐ CỦA CÁC TÍN HIỆU LIÊN TỤC THỜI GIAN

- Phân tích Fourier của một tín hiệu cho ta thấy cấu trúc tần số (phổ) của tín hiệu.

  Ví dụ: Phổ của ánh sáng trắng :



4.1 PHÂN TÍCH TẦN SỐ CỦA CÁC TÍN HIỆU LIÊN TỤC THỜI GIAN

4.1.1 Khai triển Fourier (chuỗi Fourier)

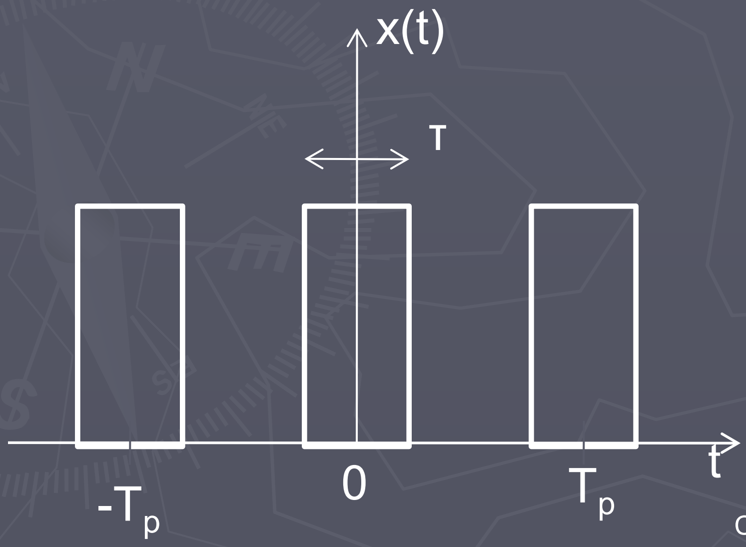
áp dụng cho tín hiệu tuần hoàn

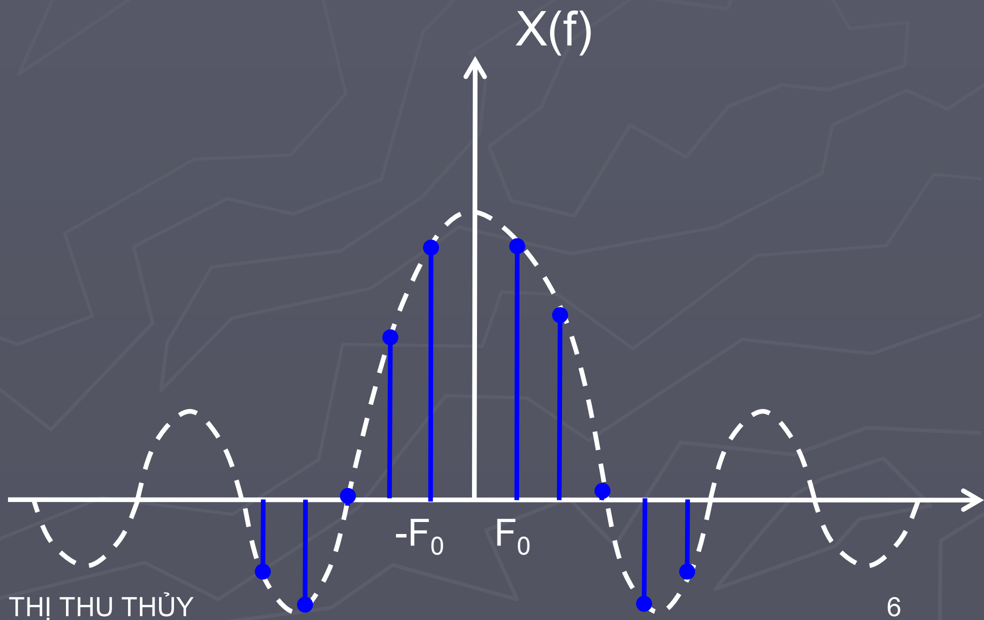
4.1.2 Biến đổi Fourier (tích phân Fourier)

áp dụng cho các tín hiệu không tuần hoàn.

4.1.1 Khai triển Fourier (tín hiệu tuần hoàn)

- Một dạng sóng tuần hoàn có thể phân thành vô hạn các thành phần sin có tần số là bội số nguyên của tần số tuần hoàn của dạng sóng.





4.1.1 Khai triển Fourier

❖ **x(t) tuần hoàn có chu kỳ T_o, tần số góc $\omega_o=2\pi/T_o$ và $f_o = 1/T_o$ có 3 dạng khai triển Fourier:**

- Khai triển lượng giác
- Dạng biên độ và pha
- Dạng mũ phức (sin phức)

a. Khai triển lượng giác

$$x(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos n\omega_0 t + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin n\omega_0 t$$

$$a_0 = \frac{1}{T_0}\int_{-To/2}^{To/2} x(t)dt$$

$$a_n = \frac{2}{T_0}\int_{-To/2}^{To/2} x(t)\cos n\omega_0 t dt$$

$$b_n = \frac{2}{T_0}\int_{-To/2}^{To/2} x(t)\sin n\omega_0 t dt$$

a_o: thành phần trung bình (một chiều).

$a_1\cos\omega_o t + b_1\sin\omega_o t$: thành phần căn bản hay gọi là hài thứ nhất.

$a_2\cos 2\omega_o t + b_2\sin 2\omega_o t$: hài thứ hai

$a_3\cos 3\omega_o t + b_3\sin 3\omega_o t$: hài thứ ba v.v..

b. Dạng biên độ và pha (phổ 1 bên)

$$x(t) = c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n \cos(n\omega_0 t + \varphi_n)$$

$$c_o = a_o$$

$$c_n = \sqrt{a_n^{\ 2} + b_n^{\ 2}} \quad n = 1,2,3...$$

$$\varphi_n = \mathrm{arc}tg\frac{-b_n}{a_n}$$

c_o: thành phần trung bình

$c_1\cos(\omega_0 t + \varphi_1)$

: thành phần căn bản

$c_2\cos(2\omega_0 t + \varphi_2)$

: hài thứ 2

- **Phổ biên độ** là biến thiên của các hệ số gốc c_o, c_n theo tần số
- **Phổ pha** là biến thiên của pha ban đầu φ_n theo tần số

Phổ chỉ hiện hữu ở những tần số rời rạc $n\omega_o$ nên là **phổ rời rạc** hay **phổ vạch**

c. Dạng mũ phức (sin phức) (phổ 2 bên)

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} X_n e^{jn\omega_o t}$$

$$X_0 = a_0 = c_0$$

$$X_n = \frac{a_n - jb_n}{2} = \frac{c_n}{2} e^{j\varphi_n}$$

✓ **Các hệ số của khai triển mũ phức là:**

$$X_n = \frac{1}{T_0} \int_{-To/2}^{To/2} x(t) e^{-jn\omega_0 t} dt$$

✓Công suất của tín hiệu tuần hoàn

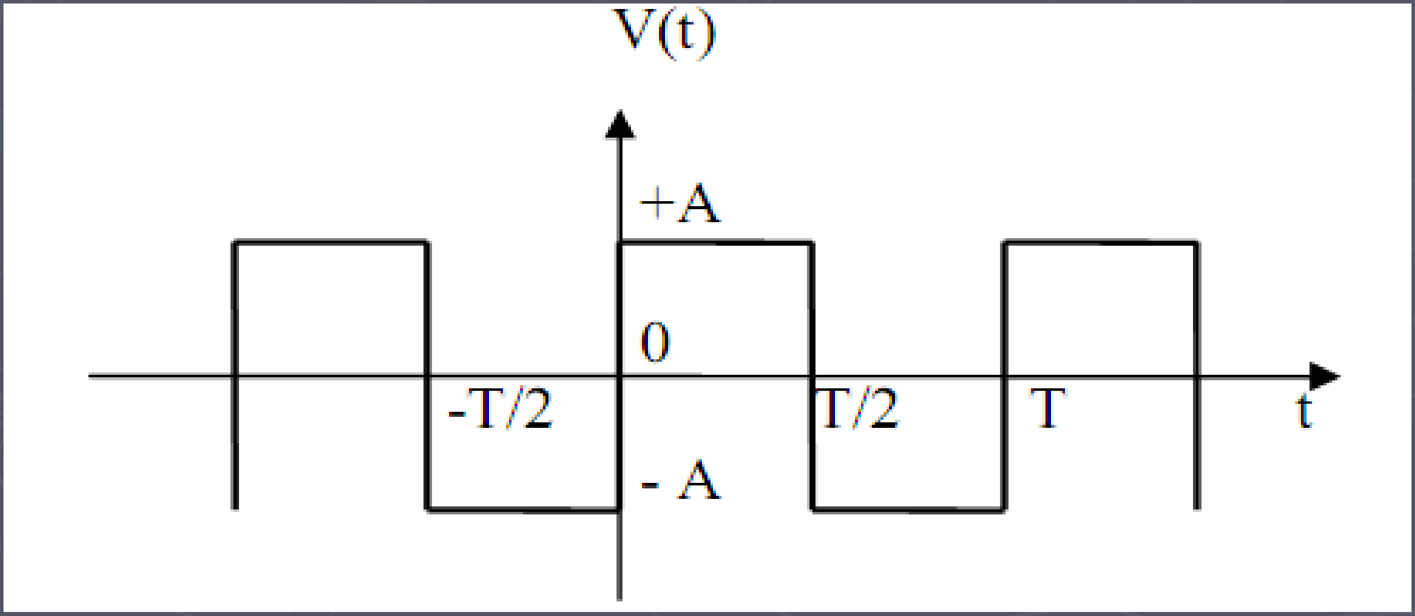
$$\boxed{P = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |X_n|^2}$$

1. Tìm khai triển Fourier của dạng sóng vuông đối xứng. Vẽ phổ biên độ và phổ pha

a. Khai triển lượng giác

b. Khai triển Fourier dạng biên độ và pha

c. Dạng mũ phức



a. Các hài chẵn bằng không, các hài lẻ có biên độ giảm tương đối nhanh nhưng chỉ bằng không ở tần số lớn vô hạn

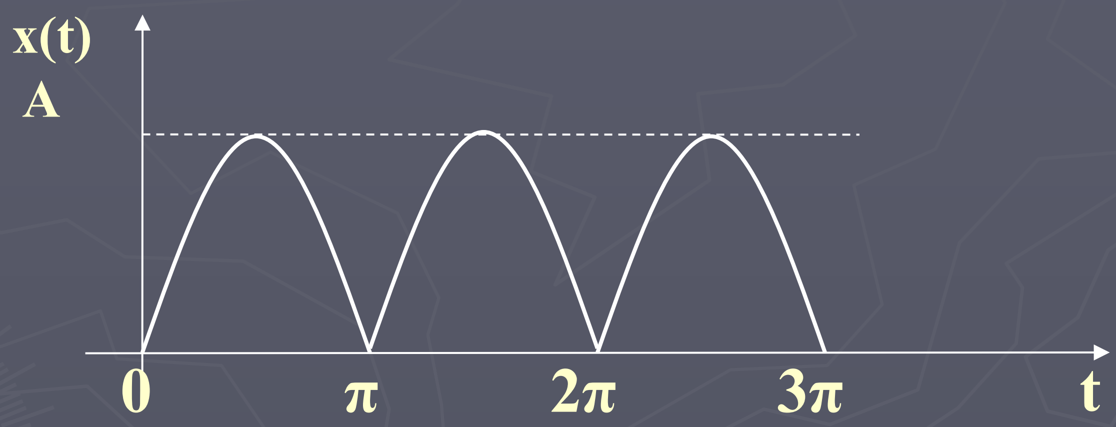
$$x(t) = \frac{4A}{\pi}\left(\sin \omega_o t + \frac{1}{3}\sin 3\omega_o t + \frac{1}{5}\sin 5\omega_o t + ... \right)$$

b. Phổ biên độ và pha:

$$x(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4A}{\pi} \frac{1}{(2n-1)} \cos\left[(2n-1)\omega_o t - 90^o \right]$$

2. Tìm khai triển Fourier của dạng sóng sin chỉnh lưu toàn kỳ biên độ đỉnh A. Vẽ phổ biên độ và phổ pha.

$$x(t)=A|\sin t|$$



$$a_0 = \frac{1}{T_0}\int_{-To/2}^{To/2} x(t)dt = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} A\sin t dt = \frac{A}{\pi}\left[-\cos t\right]\Big|_0^{\pi} = \frac{2A}{\pi}$$

$$a_n = \frac{2}{T_0}\int_{-To/2}^{To/2} x(t)\cos n\omega_0 t dt = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} A\sin t \cos n\omega_0 t dt$$

$$a_n = \frac{A}{\pi}\int_0^{\pi}\left[\sin(2n+1)t - \sin(2n-1)t\right]dt$$

$$a_n = \frac{A}{\pi}\left[-\frac{\cos(2n+1)t}{2n+1}\Big|_0^{\pi} + \frac{\cos(2n-1)t}{2n-1}\Big|_0^{\pi}\right]$$

$$a_n = \frac{A}{\pi}\left[\frac{2}{2n+1} - \frac{2}{2n-1}\right] = -\frac{4A}{\pi}\frac{1}{4n^2-1}$$

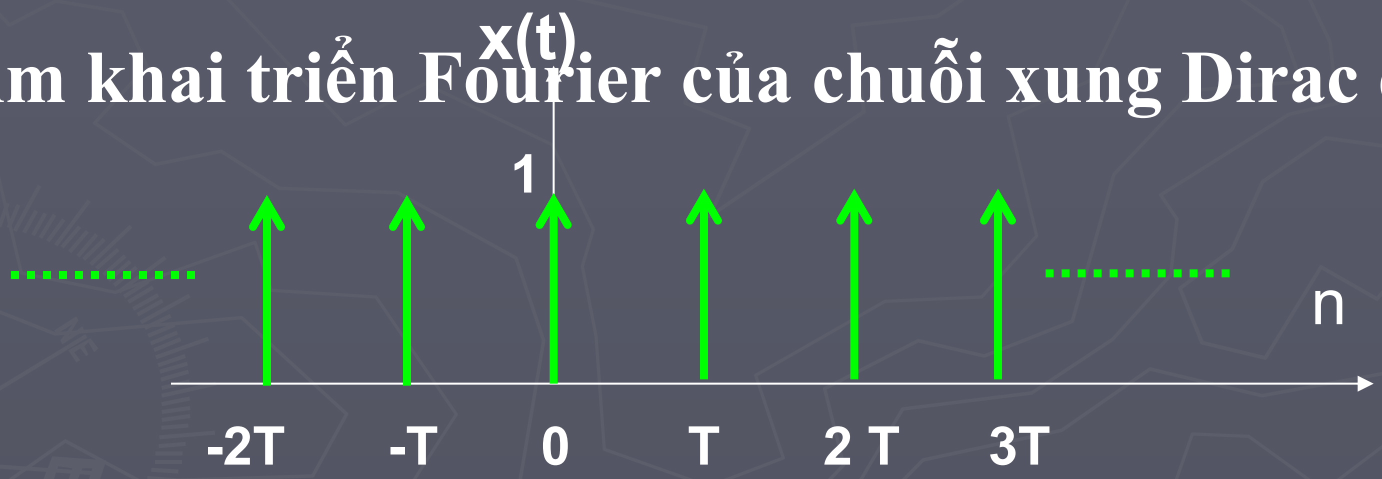
$$x(t)=\frac{2A}{\pi}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4A}{\pi}\frac{1}{4n^2-1}\cos 2nt$$

$$x(t)=\frac{2A}{\pi}-\frac{4A}{\pi}\left(\frac{1}{3}\cos 2t+\frac{1}{15}\cos 4t+\frac{1}{35}\cos 6t+\ldots\ldots\right)$$

3. **Cho khai triển ở dạng lượng giác như sau. Tìm khai triển ở hai dạng kia. Vẽ phổ tín hiệu và tìm công suất của tín hiệu**

$$x(t) = 10 + 8\cos\omega_o t + 6\sin\omega_o t$$

4. **Tìm khai triển Fourier của chuỗi xung Dirac đều**



Giải bài 4

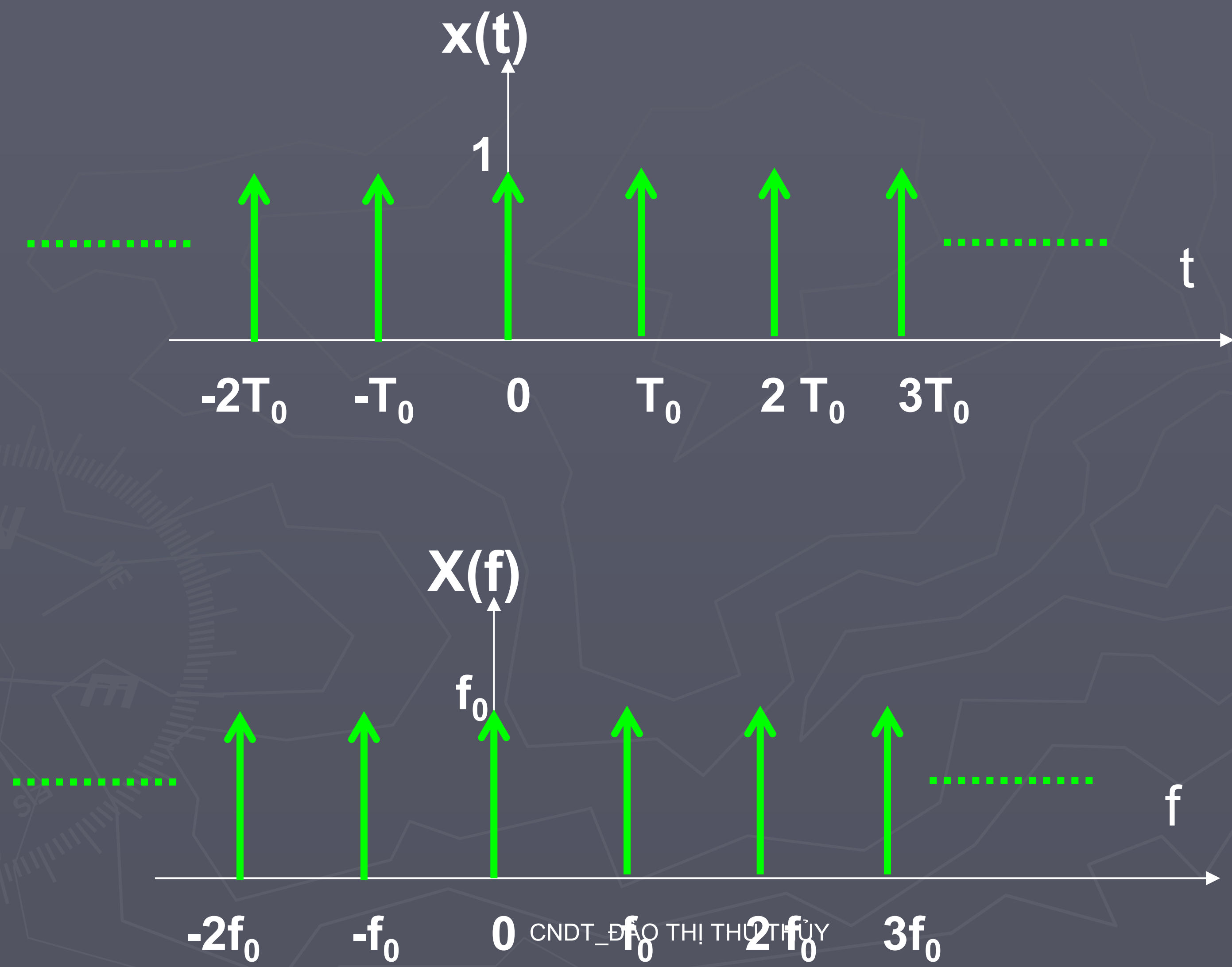
- x(t) là chuỗi xung Dirac đều chu kỳ T_0 hay tần số $f_0=1/T_0$
- Vì x(t) tuần hoàn nên ta có khai triển Fourier của x(t):

$$x(t)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta(t-kT_0)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}X_n e^{jn\omega_o t}=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}X_n e^{j2\pi nf_0 t}$$

$$X_n=\frac{1}{T_0}\int_{-To/2}^{To/2}\delta(t)e^{-j2\pi nf_0 t}dt=\frac{1}{T_0}=f_0$$

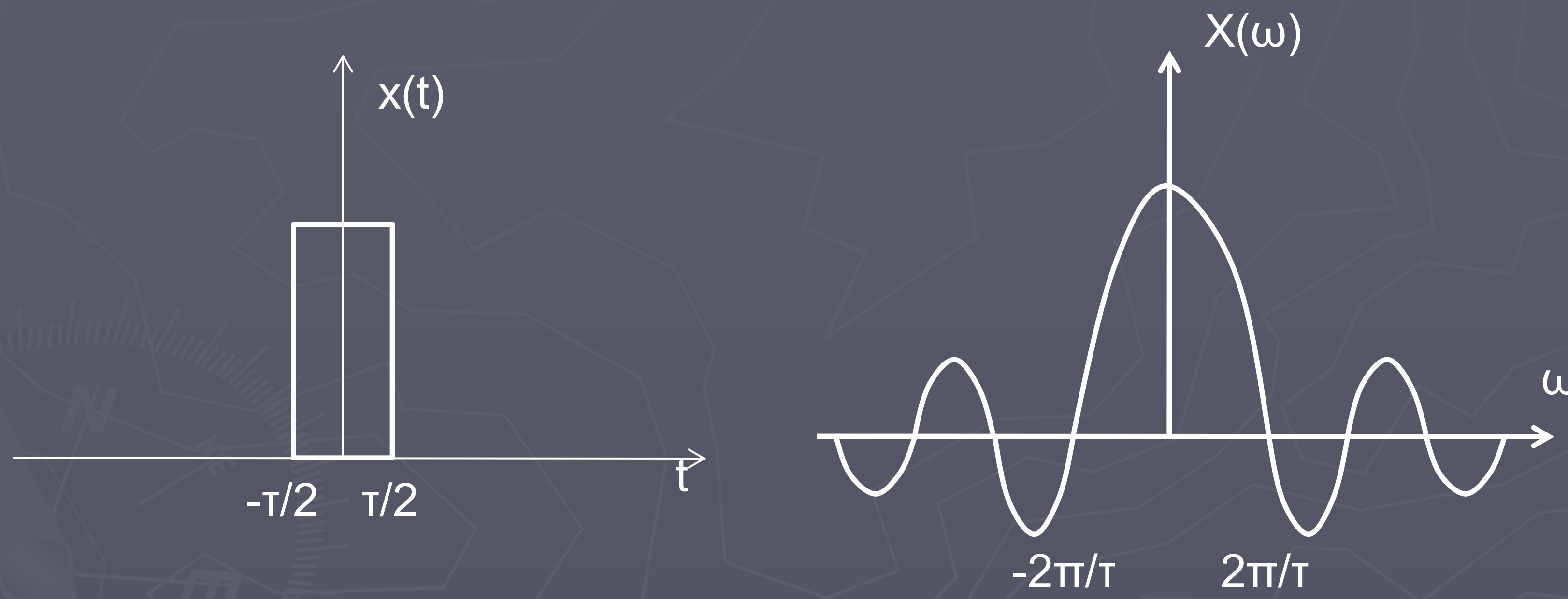
$$x(t)=\frac{1}{T_0}\sum_{k=-\infty}^{+\infty}e^{j2\pi nf_0 t}\Rightarrow X(f)=\frac{1}{T_0}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(f-nf_0)$$

Vậy một chuỗi xung dirac trong miền thời gian cho một chuỗi xung dirac trong miền tần số



4.1.2 Biến đổi Fourier

(tín hiệu không tuần hoàn)



a. Cặp biến đổi Fourier x(t) $\leftrightarrow$ X(f):

$$X(f) = F[x(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j2\pi ft}dt$$

$$x(t) = F^{-1}[X(f)] = \int_{-\infty}^{\infty} X(f)e^{j2\pi ft}df$$

b. Phổ biên độ và phổ pha

$$X(f) = |X(f)|e^{j\varphi(f)}$$

- Biến thiên của |X(f)| theo f là phổ biên độ (độ lớn)
- Biến thiên của φ(f) theo f là phổ pha (còn được viết argX(f) hay $\angle$X(f))

❖Khi x(t) thực

$$X(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j2\pi ft}dt = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\left[\cos 2\pi ft - j\sin 2\pi ft\right]dt$$

❖Thành phần thực ảo là:

$$X_R(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\cos 2\pi ftdt$$

$$X_I(f) = -\int_{-\infty}^{\infty} x(t)\sin 2\pi ftdt$$

❖Biên độ và pha của X(f) là:

$$\left|X(f)\right| = \sqrt{X_R^2(f) + X_I^2(f)}$$

$$\varphi(f) = arctg\frac{X_I(f)}{X_R(f)}$$

Năng lượng của tín hiệu không tuần hoàn

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} |X(f)|^2 df$$

CÁC TÍNH CHẤT BIẾN ĐỔI FOURIER

1. **Tuyến tính**: là tính tỉ lệ và chồng chất

nếu: $x_1(t) \leftrightarrow X_1(f)$ và $x_2(t) \leftrightarrow X_2(f)$

thì: $a_1x_1(t) + a_2x_2(t) \leftrightarrow a_1X_1(f) + a_2 X_2(f)$

a_1, a_2 là các hằng số

CÁC TÍNH CHẤT BIẾN ĐỔI FOURIER

2. Đối xứng:

nếu: $x(t) \leftrightarrow X(f)$

thì: $x(-t) \leftrightarrow X(-f)$

3. Dịch chuyển thời gian

nếu: $x(t) \leftrightarrow X(f)$

thì: $x(t-t_o) \leftrightarrow X(f)e^{-j2\pi f t_o}$

CÁC TÍNH CHẤT BIẾN ĐỔI FOURIER

4. Thay đổi thang thời gian

nếu: $x(t) \leftrightarrow X(f)$

thì: $x(at) \leftrightarrow \frac{1}{|a|} X(\frac{f}{a})$

5. Dịch chuyển tần số (định lý điều biến)

nếu: $x(t) \leftrightarrow X(f)$

thì: $x(t)e^{j2\pi f_o t} \leftrightarrow X(f - f_o)$

CÁC TÍNH CHẤT BIẾN ĐỔI FOURIER

6. Vi phân thời gian

nếu: $x(t) \leftrightarrow X(f)$

thì: $\frac{d^n}{dt^n}[x(t)] \leftrightarrow (j2\pi f)^n X(f)$

7. Tích phân thời gian

nếu: $x(t) \leftrightarrow X(f)$

thì: $\int_{-\infty}^{t} x(t')dt' \leftrightarrow \frac{1}{2}X(0)\delta(f) + \frac{1}{j2\pi f}X(f)$

CÁC TÍNH CHẤT BIẾN ĐỔI FOURIER

8. Định lý nhân chập

nếu: $x_1(t) \leftrightarrow X_1(f)$ và $x_2(t) \leftrightarrow X_2(f)$

thì: $x_1(t)*x_2(t) \leftrightarrow X_1(f)\,X_2(f)$

MỘT SỐ BIẾN ĐỔI FOURIER CƠ BẢN

1. Xung thời gian vô cùng hẹp: là xung dt tại gốc t=0, có biên độ 1 và độ rộng tiến về 0

$$dt \leftrightarrow dt$$

2. Xung dirac $\delta(t)$ (xung lực)

$$\delta(t) \leftrightarrow 1$$

$$A\delta(t) \leftrightarrow A$$

3. Hằng số

$$A \leftrightarrow A\delta(-f) = A\delta(f)$$

4. Hàm mũ một bên

$$e^{-at}u(t) \leftrightarrow \frac{1}{a + j2\pi f}$$

5. Hàm dấu

$$\mathrm{sgn}(t) \leftrightarrow \frac{1}{j\pi f}$$

với $\mathrm{sgn}(t) = \begin{cases} 1 & \text{khi } t \geq 0 \\ -1 & \text{khi } t < 0 \end{cases}$

MỘT SỐ BIẾN ĐỔI FOURIER CƠ BẢN

7. Hàm cosin và sin

Ta có: $$A\cos 2\pi f_o t = \frac{A}{2}e^{j2\pi f_o t} + \frac{A}{2}e^{-j2\pi f_o t}$$

$$A\sin 2\pi f_o t = \frac{A}{2j}e^{j2\pi f_o t} - \frac{A}{2j}e^{-j2\pi f_o t}$$

$$A\cos 2\pi f_o t \;\leftrightarrow\; \frac{A}{2}\delta(f - f_o) + \frac{A}{2}\delta(f + f_o)$$

$$A\cos\omega_o t \;\leftrightarrow\; A\pi\delta(\omega - \omega_o) + A\pi\delta(\omega + \omega_o)$$

$$A\sin 2\pi f_o t \;\leftrightarrow\; \frac{A}{2j}\delta(f - f_o) - \frac{A}{2j}\delta(f + f_o)$$

$$A\sin\omega_o t \;\leftrightarrow\; \frac{A\pi}{j}\delta(\omega - \omega_o) - \frac{A\pi}{j}\delta(\omega + \omega_o)$$

MỘT SỐ BIẾN ĐỔI FOURIER CƠ BẢN

8. Chuỗi xung dirac δ(t)

Chuỗi xung dirac δ(t) ở chu kỳ T_o (hay tần số $f_o=1/T_o$) là:

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT_o)$$

Biến đổi Fourier của chuỗi xung dirac:

$$X(f) = \frac{1}{T_o} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(f - nf_o)$$

Vậy 1 chuỗi xung dirac đều trong miền thời gian cho một chuỗi xung dirac đều trong miền tần số

Chương 4:
TÍN HIỆU VÀ HỆ THỐNG TRONG MIỀN TẦN SỐ LIÊN TỤC

4.1 PHÂN TÍCH TẦN SỐ CỦA CÁC TÍN HIỆU LIÊN TỤC THỜI GIAN

4.2 PHÂN TÍCH TẦN SỐ CỦA CÁC TÍN HIỆU RỜI RẠC THỜI GIAN

4.3 CÁC TÍNH CHẤT CỦA BIẾN ĐỔI FOURIER

4.4 QUAN HỆ GIỮA BIẾN ĐỔI FOURIER & BIẾN ĐỔI Z

4.5 PHÂN TÍCH HỆ THỐNG LTI RỜI RẠC TRONG MIỀN TẦN SỐ

4.2 PHÂN TÍCH TẦN SỐ CỦA CÁC TÍN HIỆU RỜI RẠC THỜI GIAN

4.2.1 KHAI TRIỂN FOURIER RỜI RẠC THỜI GIAN

(tín hiệu rời rạc tuần hoàn)

4.2.2 BIẾN ĐỔI FOURIER RỜI RẠC THỜI GIAN

(tín hiệu rời rạc ko tuần hoàn)

4.2.3 ĐIỀU KIỆN TỒN TẠI BIẾN ĐỔI FOURIER

4.2.1 KHAI TRIỂN FOURIER RỜI RẠC THỜI GIAN DFS (tín hiệu rời rạc tuần hoàn)

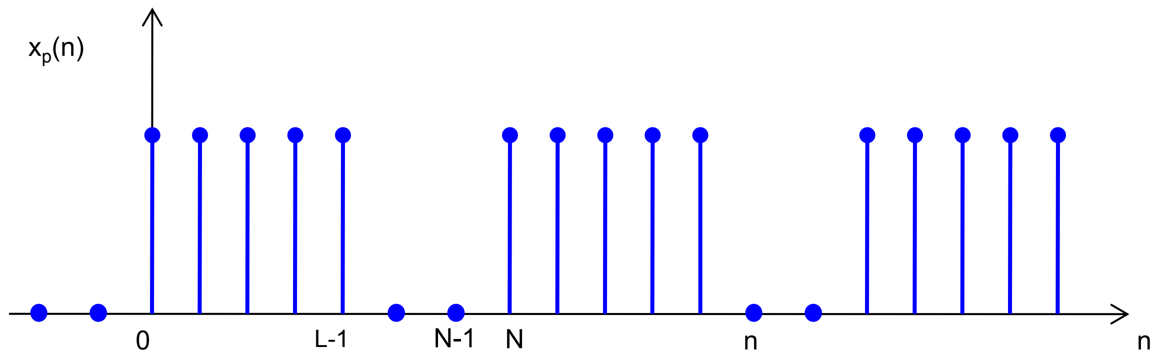
- Tín hiệu x(n) rời rạc, tuần hoàn với chu kỳ N mẫu.

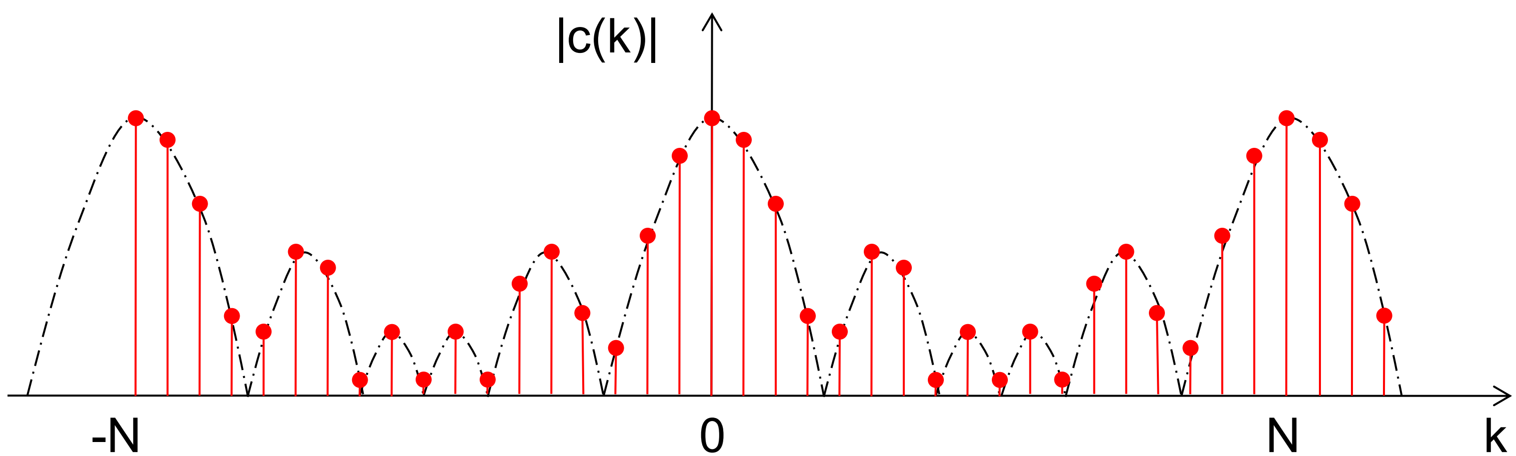
$$x(n) = \sum_{k=0}^{N-1} c_k e^{j2\pi kn/N}$$

$$c_k = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-j2\pi kn/N}$$

- Tín hiệu x(n) rời rạc tuần hoàn với chu kỳ N mẫu thì phổ c_k của nó cũng tuần hoàn với chu kỳ N

- $x(n)$ tuần hoàn chu kỳ N ➔ Tính DFS của $x(n) \rightarrow c(k)$





Ví dụ: Tìm khai triển Fourier rời rạc của tín hiệu x(n)=cosnΩ_0 khi

a. $\Omega_0 = \sqrt{2}\pi$ b. $\Omega_0 = \pi/3$

Giải a. Khi $\Omega_0 = \sqrt{2}\pi$ thì $\frac{\Omega_0}{2\pi} = \frac{\sqrt{2}\pi}{2\pi} = \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}}$

Vì $\Omega_0 /2\pi$ không phải số hữu tỉ nên x(n) không tuần hoàn

$\Rightarrow$ không có khai triển Fourier

b. Khi $\Omega_0=\pi/3$ thì chu kỳ tuần hoàn của tín hiệu cosn$\pi/3$ là:

$$N = \frac{2\pi}{\pi/3} = 6$$

$\Rightarrow$ Các thành phần phổ là:

$$c_k = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{5} x(n)e^{-j2\pi kn/6}$$

Hoặc ta phát biểu x(n) theo mũ phức

$$x(n) = \cos\frac{2\pi n}{6} = \frac{1}{2}e^{j2\pi n/6} + \frac{1}{2}e^{-j2\pi n/6} = \frac{1}{2}e^{j2\pi n/6} + \frac{1}{2}e^{j2\pi 5n/6}$$

$\Rightarrow$ Các thành phần phổ là: $c_0=0$, $c_1=1/2$, $c_2=c_3=c_4=0$, $c_5=1/2$

Chu kỳ phổ này được lặp lại liên tục

4.2.2 BIẾN ĐỔI FOURIER RỜI RẠC THỜI GIAN

(tín hiệu rời rạc ko tuần hoàn)

Biến đổi Fourier rời rạc thời gian của x(n):

$$X(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) e^{-j\omega n}$$

Trong đó: ω - tần số của tín hiệu rời rạc, $\omega = \Omega T_s$

Ω - tần số của tín hiệu liên tục

T_s - chu kỳ lấy mẫu

- **Ký hiệu:**

$x(n) \xleftrightarrow{F} X(\omega)$ hay $X(\omega) = F\{x(n)\}$

$X(\omega) \xleftrightarrow{F^{-1}} x(n)$ hay $x(n) = F^{-1}\{X(\omega)\}$

b. X(ω) biểu diễn dưới dạng modun & argument:

$$X(\omega) = |X(\omega)| e^{j\varphi(\omega)}$$

Trong đó:

- $|X(\omega)|$ - phổ biên độ của x(n)
- $\varphi(\omega) = \arg[X(\omega)]$ - phổ pha của x(n)

► Nhận thấy X(ω) tuần hoàn với chu kỳ 2π, thật vậy:

$$X(\omega + 2\pi) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) e^{-j(\omega+2\pi)n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) e^{-j\omega n} = X(\omega)$$

Áp dụng kết quả:

$$\int_{-\pi}^{\pi} e^{jk} dk = \begin{cases} 2\pi : k = 0 \\ 0 : \quad k \neq 0 \end{cases}$$

Biểu thức biến đổi F ngược:

$$x(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(\omega) e^{j\omega n} d\omega$$

Ví dụ 4.1 : Tìm biến đổi F của các dãy:

$$x_1(n) = a^n u(n) : |a| < 1 \qquad x_2(n) = -a^n u(-n-1) : |a| > 1$$

Giải:

$$X_1(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a^n u(n) e^{-j\omega n} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(a e^{-j\omega}\right)^n = \boxed{\frac{1}{1 - a e^{-j\omega}}}$$

$$X_2(\omega) = -\sum_{n=-\infty}^{\infty} a^n u(-n-1) e^{-j\omega n} = -\sum_{n=-1}^{-\infty} \left(a^{-1} e^{j\omega}\right)^{-n}$$

$$= -\sum_{m=1}^{\infty} \left(a^{-1} e^{j\omega}\right)^m = -\sum_{m=0}^{\infty} \left(a^{-1} e^{j\omega}\right)^m + 1$$

$$= 1 - \frac{1}{1 - a^{-1} e^{j\omega}} \boxed{= \frac{1}{1 - a e^{-j\omega}}}$$

4.2.3 ĐIỀU KIỆN TỒN TẠI BIẾN ĐỔI FOURIER

$$\left|X(\omega)\right| = \left|\sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)e^{-j\omega n}\right| \le \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left|x(n)\right|\left|e^{-j\omega n}\right| = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left|x(n)\right|$$

Vậy, để **X(ω)** hội tụ thì điều kiện cần là: $\boxed{\sum_{n=-\infty}^{\infty} \left|x(n)\right| < \infty}$

- Các tín hiệu thỏa điều kiện hội tụ là **tín hiệu năng lượng,** thậy vậy**:**

$$E_x = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left|x(n)\right|^2 \le \left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} \left|x(n)\right|\right]^2$$

Nếu: $\sum_{n=-\infty}^{\infty} \left|x(n)\right| < \infty \Rightarrow E_x = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left|x(n)\right|^2 < \infty$

Ví dụ 4.2 : Xét sự tồn tại biến đổi F của các dãy:

$$x_1(n) = (0.5)^n u(n) \quad x_2(n) = 2^n u(n)$$

$$x_3(n) = u(n) \quad x_4(n) = rect_N(n)$$

Giải:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x_1(n)| = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left|(0.5)^n u(n)\right| = \sum_{n=0}^{\infty} (0.5)^n = \frac{1}{1-0.5} = 2$$

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x_2(n)| = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left|2^n u(n)\right| = \sum_{n=0}^{\infty} 2^n = \infty$$

➡ $X_2(\omega)$ không tồn tại

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x_3(n)| = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |u(n)| = \sum_{n=0}^{\infty} |u(n)| = \infty$$

➡ $X_3(\omega)$ không tồn tại

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x_4(n)| = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |rect_N(n)| = \sum_{n=0}^{N-1} |rect_N(n)| = N$$

Chương 4:
TÍN HIỆU VÀ HỆ THỐNG TRONG MIỀN TẦN SỐ LIÊN TỤC

4.1 PHÂN TÍCH TẦN SỐ CỦA CÁC TÍN HIỆU LIÊN TỤC THỜI GIAN

4.2 PHÂN TÍCH TẦN SỐ CỦA CÁC TÍN HIỆU RỜI RẠC THỜI GIAN

4.3 CÁC TÍNH CHẤT CỦA BIẾN ĐỔI FOURIER

4.4 QUAN HỆ GIỮA BIẾN ĐỔI FOURIER & BIẾN ĐỔI Z

4.5 PHÂN TÍCH HỆ THỐNG LTI RỜI RẠC TRONG MIỀN TẦN SỐ

4.3 CÁC TÍNH CHẤT BIẾN ĐỔI FOURIER RỜI RẠC THỜI GIAN

a. Tuyến tính

b. Dịch theo thời gian

c. Liên hiệp phức

d. Đảo biến số

e. Vi phân trong miền tần số

f. Dịch theo tần số

g. Tích 2 dãy

h. Tổng chập 2 dãy

k. Quan hệ Parseval

4.3 CÁC TÍNH CHẤT BIẾN ĐỔI FOURIER

a) Tuyến tính

Nếu: $x_1(n) \xleftrightarrow{F} X_1(\omega)$ $x_2(n) \xleftrightarrow{F} X_2(\omega)$

Thì: $a_1 x_1(n) + a_2 x_2(n) \xleftrightarrow{F} a_1 X_1(\omega) + a_2 X_2(\omega)$

b) Dịch theo thời gian

Nếu: $x(n) \xleftrightarrow{F} X(\omega)$

Thì: $x(n - n_0) \xleftrightarrow{F} e^{-j\omega n_0} X(\omega)$

Ví dụ 4.3: Tìm biến đổi F của dãy: $\delta(n); \delta(n-2)$

Giải:

$$x(n) = \delta(n) \xleftrightarrow{F} X(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(n) e^{-j\omega n} = 1$$

Áp dụng tính chất dịch theo thời gian:

$$\delta(n-2) = x(n-2) \xleftrightarrow{F} e^{-j2\omega} X(\omega) = 1e^{-j2\omega}$$

c) Liên hiệp phức

Nếu: $x(n) \xleftrightarrow{F} X(\omega)$

Thì: $x^*(n) \xleftrightarrow{F} X^*(-\omega)$

d) Đảo biến số

Nếu: $x(n) \xleftrightarrow{F} X(\omega)$

Thì: $x(-n) \xleftrightarrow{F} X(-\omega)$

Ví dụ 4.4: Tìm biến đổi F của dãy: $y(n) = 2^n u(-n)$

Giải:

Theo ví dụ trước, có kết quả:

$$x(n) = \left(\frac{1}{2}\right)^n u(n) \xleftrightarrow{F} X(\omega) = \frac{1}{1-(1/2)e^{-j\omega}}$$

suy ra:

$$y(n) = x(-n) = (2)^n u(-n) \xleftrightarrow{F} X(-\omega) = \boxed{\frac{1}{1-(1/2)e^{j\omega}}}$$

e) Vi phân trong miền tần số

Nếu: $x(n) \xleftrightarrow{F} X(\omega)$

Thì: $nx(n) \xleftrightarrow{F} j\dfrac{dX(\omega)}{d\omega}$

Ví dụ 4.5: Tìm biến đổi F của: $g(n) = na^n u(n); |a| < 1$

Giải:

Theo ví dụ trước:

$$x(n) = a^n u(n) \xleftrightarrow{F} X(\omega) = \frac{1}{1 - ae^{-j\omega}}; |a| < 1$$

Suy ra:

$$g(n) = nx(n) \xleftrightarrow{F} G(\omega) = j\frac{dX(\omega)}{d\omega} = \boxed{\frac{ae^{-j\omega}}{\left(1 - ae^{-j\omega}\right)^2}}; |a| < 1$$

f) Dịch theo tần số

Nếu: $x(n) \xleftrightarrow{F} X(\omega)$

Thì: $e^{j\omega_0 n} x(n) \xleftrightarrow{F} X(\omega - \omega_0)$

Ví dụ 4.6: Tìm biến đổi F của: $y(n) = a^n \cos(\omega_0 n) u(n); |a| < 1$

Giải:

Theo ví dụ trước:

$$x(n) = a^n u(n) \xleftrightarrow{F} X(\omega) = \frac{1}{1 - ae^{-j\omega}}; |\mathrm{a}| < 1$$

$$y(n) = a^n u(n) \cos(\omega_0 n) = a^n u(n) \frac{1}{2}\left[e^{j\omega_0 n} + e^{-j\omega_0 n}\right]$$

$$= \frac{1}{2} x(n)\left[e^{j\omega_0 n} + e^{-j\omega_0 n}\right]$$

$$\xleftrightarrow{F} \quad Y(\omega) = \frac{1}{2}\left[X(\omega-\omega_0) + X(\omega+\omega_0)\right]$$

$$\boxed{Y(\omega) = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{(1-ae^{-j(\omega-\omega_0)})} + \frac{1}{(1-ae^{-j(\omega+\omega_0)})}\right]}$$

g) Tích 2 dãy

Nếu: $x_1(n) \xleftrightarrow{F} X_1(\omega)$ $\quad x_2(n) \xleftrightarrow{F} X_2(\omega)$

Thì: $x_1(n).x_2(n) \xleftrightarrow{F} \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} X_1(\omega')X_2(\omega-\omega')d\omega'$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} X_2(\omega')X_1(\omega-\omega')d\omega'$$

h) Tổng chập 2 dãy

Nếu: $x_1(n) \xleftrightarrow{F} X_1(\omega)$ $x_2(n) \xleftrightarrow{F} X_2(\omega)$

Thì: $x_1(n) * x_2(n) \xleftrightarrow{F} X_1(\omega)X_2(\omega)$

Ví dụ 4.7: Tìm y(n)=x(n)*h(n), biết: **x(n)=h(n)=δ(n+2)+δ(n-2)**

Giải:

Theo ví dụ trước, có kết quả:

$$X(\omega) = H(\omega) = e^{j2\omega} + e^{-j2\omega}$$

$$\Rightarrow Y(\omega) = X(\omega)H(\omega) = (e^{j2\omega} + e^{-j2\omega})^2 = e^{j4\omega} + 2 + e^{-j4\omega}$$

$$\Rightarrow y(n) = x(n) * h(n) = F^{-1}[Y(\omega)]$$

$$\boxed{y(n) = \delta(n+4) + 2\delta(n) + \delta(n-4)}$$

k) Quan hệ Parseval

Nếu: $x_1(n) \xleftrightarrow{F} X_1(\omega)$ $x_2(n) \xleftrightarrow{F} X_2(\omega)$

Thì: $$\sum_{n=-\infty}^{\infty} x_1(n)x_2^*(n) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} X_1(\omega)X_2^*(\omega)d\omega \quad (*)$$

Biểu thức (*) còn gọi là **quan hệ Parseval**

Nhận xét:

Nếu: $x_1(n) = x_2(n) = x(n)$

Theo quan hệ Parseval, ta có:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x(n)|^2 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |X(\omega)|^2 d\omega$$

Với: $S_{xx}(\omega) = |X(\omega)|^2$ **- gọi là phổ mật độ năng lượng**

TỔNG KẾT CÁC TÍNH CHẤT BIẾN ĐỔI F

x(n)	X(ω)
$a_1x_1(n)+a_2x_2(n)$	$a_1X_1(\omega)+a_2X_2(\omega)$
$x(n-n_0)$	$e^{-j\omega n_0}X(\omega)$
$e^{j\omega_0 n}x(n)$	$X(\omega-\omega_0)$
$nx(n)$	$jdX(\omega)/d\omega$
$x(-n)$	$X(-\omega)$
$x^*(n)$	$X^*(-\omega)$
$x_1(n)x_2(n)$	$\frac{1}{2\pi j}\oint_C X_1(\omega')X_2(\omega-\omega')d\omega'$
	$\sum_{n=-\infty}^{\infty} x_1(n)x_2^*(n) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} X_1(\omega)X_2^*(\omega)d\omega$
$x_1(n)*x_2(n)$	$X_1(\omega)X_2(\omega)$

Chương 4:
TÍN HIỆU TRONG MIỀN TẦN SỐ LIÊN TỤC

4.1 PHÂN TÍCH TẦN SỐ CỦA CÁC TÍN HIỆU LIÊN TỤC THỜI GIAN

4.2 PHÂN TÍCH TẦN SỐ CỦA CÁC TÍN HIỆU RỜI RẠC THỜI GIAN

4.3 CÁC TÍNH CHẤT CỦA BIẾN ĐỔI FOURIER

4.4 QUAN HỆ GIỮA BIẾN ĐỔI FOURIER & BIẾN ĐỔI Z

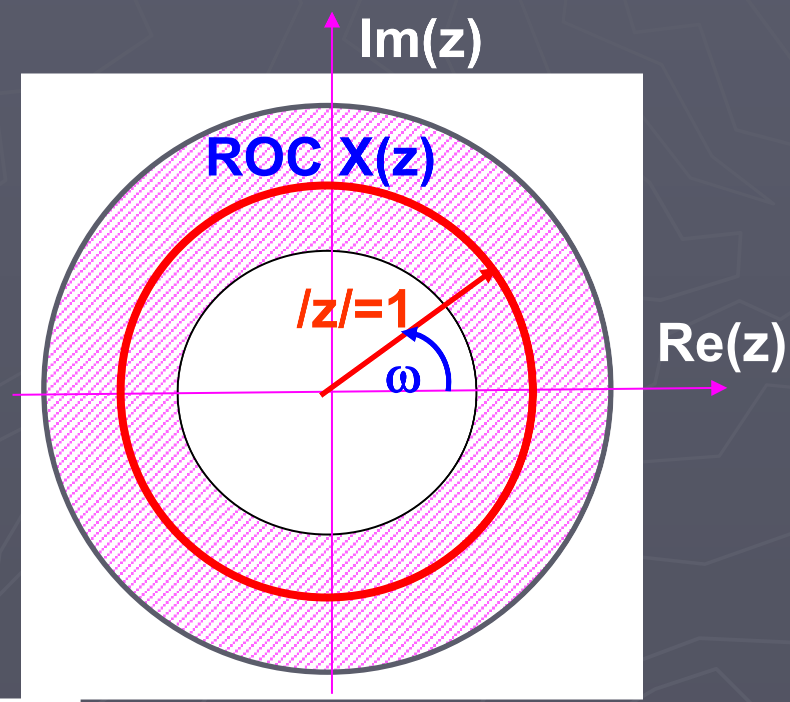
4.5

4.4 QUAN HỆ GIỮA BIẾN ĐỔI FOURIER & Z

$$x(n) \xleftrightarrow{Z} X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) z^{-n}$$

$$x(n) \xleftrightarrow{F} X(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) e^{-j\omega n}$$

$$X(\omega) = X(z)\Big|_{z=e^{j\omega}}$$



Hay biến đổi Fourier chính là biến đổi Z được lấy trên vòng tròn đơn vị theo biến số ω

- **Nếu ROC[X(z)] có chứa |z|=1 $\Rightarrow X(\omega)=X(z)$ với $z=e^{j\omega}$**

- **Nếu ROC[X(z)] không chứa |z|=1 $\Rightarrow X(\omega)$ không hội tụ**

Ví dụ 4.8: Tìm biến đổi Z & F của các dãy:

$$x_1(n) = (0.5)^n u(n) \qquad x_2(n) = 2^n u(n)$$

Giải:

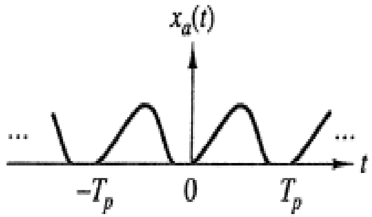
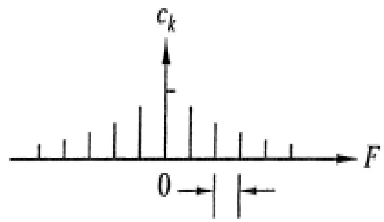
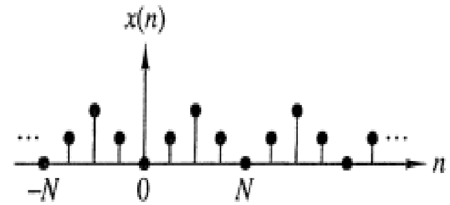
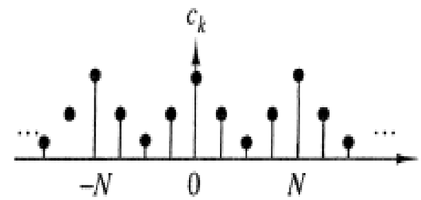
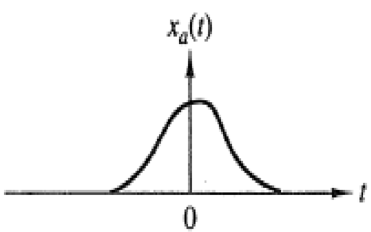
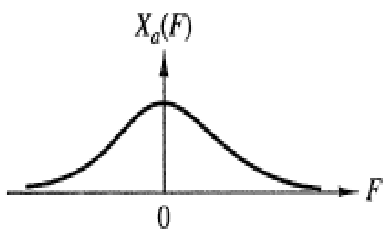
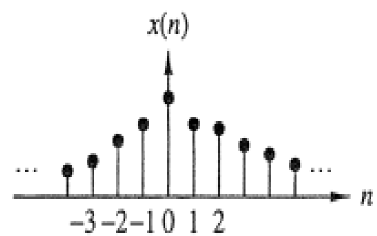
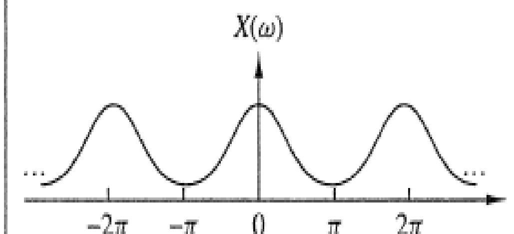
- $$X_1(z) = \frac{1}{1-0.5z^{-1}}; |z| > 0.5$$

Do ROC[$X_1(z)$] có chứa |z|=1, nên:

$$X_1(\omega) = X_1(z)\Big|_{z=e^{j\omega}} = \frac{1}{1-0.5e^{-j\omega}}$$

- $$X_2(z) = \frac{1}{1-2z^{-1}}; |z| > 2$$

Do ROC[$X_2(z)$] không chứa |z|=1, nên $X_2(\omega)$ không tồn tại

	Continuous-time signals		Discrete-time signals	
	Time-domain	Frequency-domain	Time-domain	Frequency-domain
Periodic signals, Fourier series				
	$c_k = \frac{1}{T_p}\int_{T_p} x_a(t)e^{-j2\pi kF_0 t}\,dt \Longrightarrow$	$F_0 = \frac{1}{T_p}$	$c_k = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} x(n)e^{-j(2\pi/N)kn} \Longrightarrow$	
	$\Longleftarrow$	$x_a(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{j2\pi kF_0 t}$	$\Longleftarrow$	$x(n) = \sum_{k=0}^{N-1} c_k e^{j(2\pi/N)kn}$
	Continuous and periodic	Discrete and aperiodic	Discrete and periodic	Discrete and periodic
Aperiodic signals, Fourier transforms				
	$X_a(F) = \int_{-\infty}^{\infty} x_a(t)e^{-j2\pi Ft}\,dt \Longrightarrow$		$X(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)e^{-j\omega n} \Longrightarrow$	
	$\Longleftarrow$	$x_a(t) = \int_{-\infty}^{\infty} X_a(F)e^{j2\pi Ft}\,dF$	$\Longleftarrow$	$x(n) = \frac{1}{2\pi}\int_{2\pi} X(\omega)e^{j\omega n}\,d\omega$
	Continuous and aperiodic	Continuous and aperiodic	Discrete and aperiodic	Continuous and periodic

Ví dụ Tìm biến đổi F của các dãy:

$$x_1(n) = 2(0.5)^n u(n) + 3(0.8)^n u(n)$$

$$x_2(n) = 3(0.5)^n u(n-1)$$

$$x_3(n) = 2(0.5)^n u(n) + 3(0.8)^n u(-n-1)$$

Chương 4:
TÍN HIỆU VÀ HỆ THỐNG TRONG MIỀN TẦN SỐ LIÊN TỤC

- 4.1 PHÂN TÍCH TẦN SỐ CỦA CÁC TÍN HIỆU LIÊN TỤC THỜI GIAN
- 4.2 PHÂN TÍCH TẦN SỐ CỦA CÁC TÍN HIỆU RỜI RẠC THỜI GIAN
- 4.3 CÁC TÍNH CHẤT CỦA BIẾN ĐỔI FOURIER
- 4.4 QUAN HỆ GIỮA BIẾN ĐỔI FOURIER & BIẾN ĐỔI Z
- 4.5 PHÂN TÍCH HỆ THỐNG LTI RỜI RẠC TRONG MIỀN TẦN SỐ

4.5 PHÂN TÍCH HỆ THỐNG LTI RỜI RẠC TRONG MIỀN TẦN SỐ

4.5.1 Đáp ứng tần số của hệ thống LTI

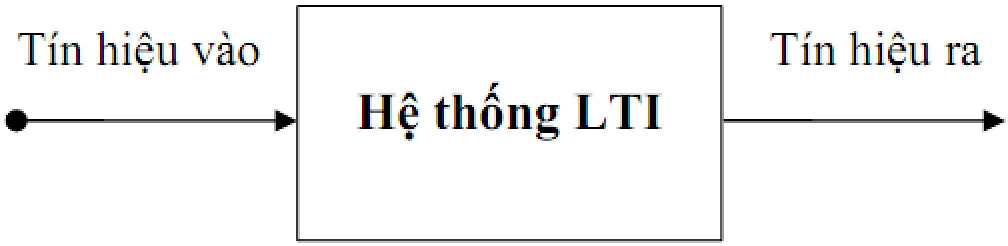
4.5.2 Đáp ứng tần số của hệ thông ghép nối

4.5.3 Đáp ứng ra của hệ thống đối với tín hiệu hàm mũ

4.5.4 Đáp ứng ra của hệ thống đối với tín hiệu hàm sin, cos

4.5.5 Đáp ứng tần số phát biểu theo các hệ số lọc

4.5.1 Đáp ứng tần số của hệ thống LTI



Miền thời gian: $x(n) \rightarrow h(n) \rightarrow y(n) = x(n) * h(n)$

$\updownarrow F \qquad \updownarrow F \qquad \updownarrow F \qquad \updownarrow$ (Định lý nhân chập)

Miền tần số: $X(\omega) \rightarrow H(\omega) \rightarrow Y(\omega) = X(\omega)H(\omega)$

h(n) $\xleftrightarrow{F}$ ***H(ω): gọi là đáp ứng tần số của hệ thống LTI***

$$\boxed{H(\omega) = \frac{Y(\omega)}{X(\omega)}}$$

$$H(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h(n).e^{-j\omega.n}$$

$$X(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n).e^{-j\omega.n}$$

$$Y(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} y(n).e^{-j\omega.n}$$

- H(ω) thường là số phức nên ta viết:

$$H(\omega) = H_R(\omega) + jH_I(\omega)$$

- Nếu **H(ω)** biểu diễn dạng môdun và pha:

$$\mathrm{H}(\omega) = |\mathrm{H}(\omega)| e^{j\phi(\omega)}$$

$|H(\omega)|$ - Đáp ứng biên độ

$\phi(\omega)$ - Đáp ứng pha

$$|H(\omega)| = \sqrt{H_R^2(\omega) + H_I^2(\omega)}$$

$$\phi_H(\omega) = \mathrm{arc}tg \frac{H_I(\omega)}{H_R(\omega)}$$

- Đáp ứng tần số $H(\omega)$ tồn tại nếu hệ thống là ổn định BIBO

$$\Leftrightarrow \quad \sum_{n=-\infty}^{\infty} |h(n)| < \infty$$

- Khi đáp ứng xung h(n) là thực thì :

  - đáp ứng biên độ $|H(\omega)|$ là hàm chẵn

  - đáp ứng pha $\phi_H(\omega)$ là hàm lẻ.

- Đáp ứng biên độ phát biểu theo decibel (dB)

$$|H(\omega)|_{dB} = 20\log_{10}|H(\omega)|$$

Ví dụ 4.9: Tìm H(ω), vẽ đáp ứng biên độ & pha, biết:

h(n)=rect$_3$(n)

Giải:

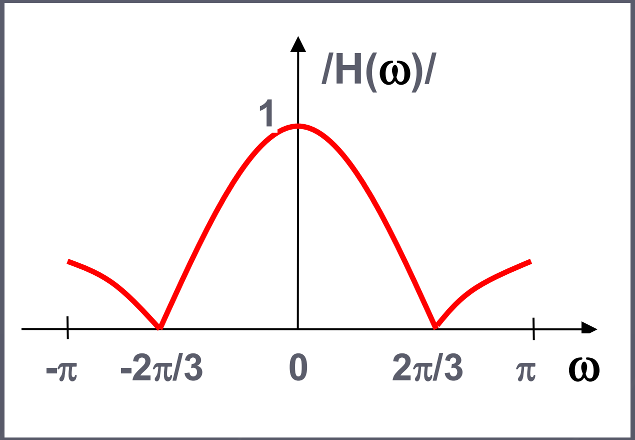
Biến đổi Fourier của **h(n)**:

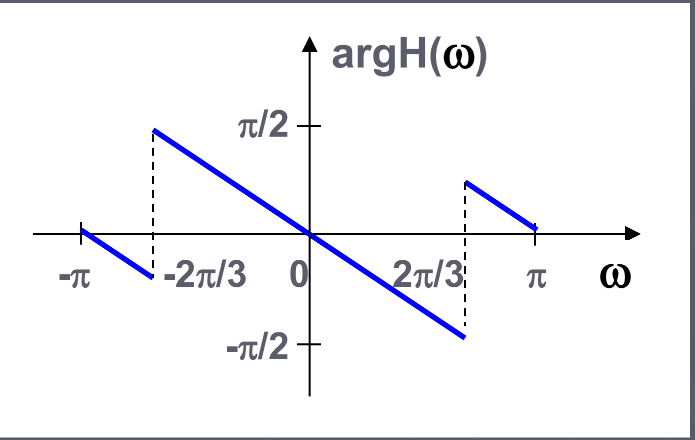
$$H(\omega)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} rect_3(n)e^{-j\omega n}=\sum_{n=0}^{2} e^{-j\omega n}=\frac{1-e^{-j3\omega}}{1-e^{-j\omega}}$$

$$=\frac{e^{-j3\omega/2}(e^{j3\omega/2}-e^{-j3\omega/2})}{e^{-j\omega/2}(e^{j\omega/2}-e^{-j\omega/2})}=\frac{\sin(3\omega/2)}{\sin(\omega/2)}e^{-j\omega}$$

$$\begin{cases} |H(\omega)|=\left|\dfrac{\sin(3\omega/2)}{\sin(\omega/2)}\right| \\ \phi(\omega)=\begin{cases} -\omega : A(\omega)>0 \\ -\omega+\pi : A(\omega)<0 \end{cases} \end{cases}$$

Với $A(\omega)=\dfrac{\sin(3\omega/2)}{\sin(\omega/2)}$


/H(ω)/
1
-π
-2π/3
0
2π/3
π
ω


argH(ω)
π/2
-π
-2π/3
0
2π/3
π
ω
-π/2

4.5.2 Đáp ứng tần số của các hệ thống ghép nối

a. Ghép nối tiếp

- Miền n:

$$\begin{cases} x(n) \longrightarrow \boxed{h_1(n)} \longrightarrow \boxed{h_2(n)} \longrightarrow y(n) \\ \equiv \\ x(n) \longrightarrow \boxed{h(n)=h_1(n)*h_2(n)} \longrightarrow y(n) \end{cases}$$

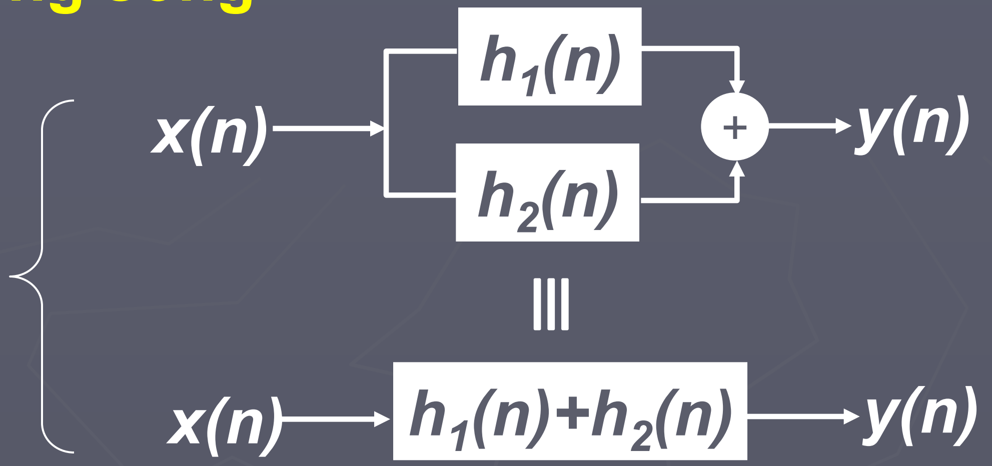
Theo tính chất tổng chập: $\boxed{h_1(n)*h_2(n) \xleftrightarrow{F} H_1(\omega)H_2(\omega)}$

- Miền ω :

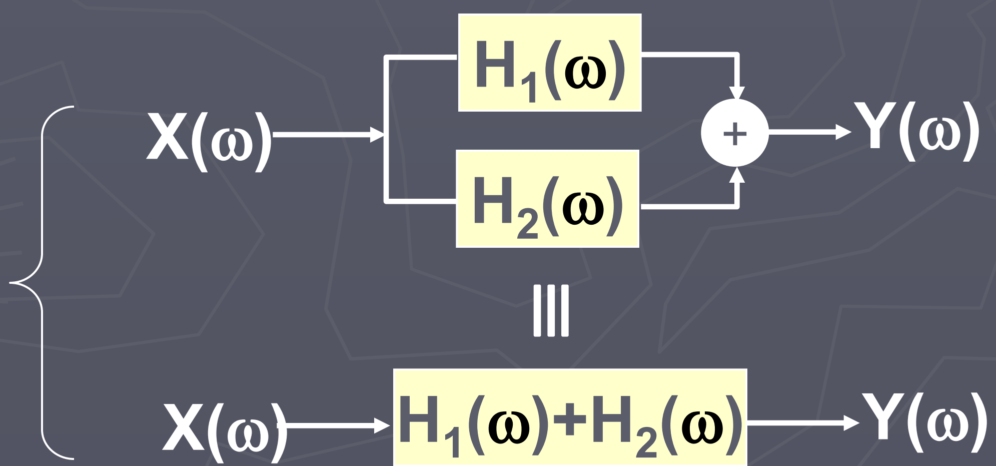
$$\begin{cases} X(\omega) \longrightarrow \boxed{H_1(\omega)} \longrightarrow \boxed{H_2(\omega)} \longrightarrow Y(\omega) \\ \equiv \\ X(\omega) \longrightarrow \boxed{H(\omega)=H_1(\omega)H_2(\omega)} \longrightarrow Y(\omega) \end{cases}$$

b. Ghép song song

- Miền n:



- Miền ω:



4.5.3 Đáp ứng ra hệ thống với tín hiệu vào hàm mũ phức

Xét tín hiệu vào có dạng mũ phức: **$x(n)=Ae^{j\omega n}$**

$$y(n) = x(n) * h(n) = h(n) * x(n) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} h(m)x(n-m)$$

$$y(n) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} h(m)Ae^{j\omega(n-m)} \boxed{= Ae^{j\omega n}\sum_{m=-\infty}^{\infty} h(m)e^{-j\omega m} = x(n)H(\omega)}$$

•Hàm riêng và trị riêng

Tín hiệu x(n) vào sao cho : y(n) = βx(n)

x(n): hàm riêng

β : trị riêng.

⇒ Đối với các mạch lọc số:

$e^{j\omega n}$: hàm riêng

H(ω): trị riêng

Ví dụ 4.10: Tìm y(n) biết:

$$x(n) = 2e^{j\frac{\pi}{3}n}$$

$$h(n) = \left(\frac{1}{2}\right)^{n} u(n)$$

$$y(n) = x(n)H(\omega) = 2e^{j\frac{\pi}{3}n}\left.\left(\frac{1}{1-\frac{1}{2}e^{-j\omega}}\right)\right|_{\omega=\frac{\pi}{3}} = 2\frac{e^{j\frac{\pi}{3}n}}{1-\frac{1}{2}e^{-j\frac{\pi}{3}}}$$

4.5.4 Đáp ứng ra hệ thống với tín hiệu vào hàm cos, sin

Xét tín hiệu vào có dạng hàm cos:

$$x(n) = A\cos(\omega_0 n) = \frac{A}{2}\left(e^{j\omega_0 n} + e^{-j\omega_0 n}\right)$$

Biểu diễn đáp ứng tần số dưới dạng môđun & pha:

$$H(\omega) = |H(\omega)| e^{j\phi(\omega)}$$

$$y(n) = x(n)H(\omega_0) = \frac{A}{2}\left[H(\omega_0)e^{j\omega_0 n} + H(-\omega_0)e^{-j\omega_0 n}\right]$$

$$y(n) = \frac{A}{2}\left[H(\omega_0)e^{j\omega_0 n} + H^*(\omega_0)e^{-j\omega_0 n}\right] = A.\mathrm{Re}\left\{H(\omega_0)e^{j\omega_0 n}\right\}$$

$$y(n) = A.\mathrm{Re}\left\{H(\omega_0)e^{j\omega_0 n}\right\} = A\left|H(\omega_0)\right|\cos\left[\omega_0 n + \phi(\omega_0)\right]$$

Tương tự với tín hiệu vào có dạng hàm sin:

$$x(n) = A\sin(\omega_0 n) = \frac{A}{2j}\left(e^{j\omega_0 n} - e^{-j\omega_0 n}\right)$$

Ta cũng được kết quả:

$$y(n) = A.\mathrm{Im}\left\{H(\omega_0)e^{j\omega_0 n}\right\} = A\left|H(\omega_0)\right|\sin\left[\omega_0 n + \phi(\omega_0)\right]$$

4.5.4 Đáp ứng tần số phát biểu theo các hệ số lọc

- Đối với lọc lọc phi đệ quy (FIR) có phương trình hiệu số là

$$\boldsymbol{y(n) = \sum_{r=0}^{M} b_r x(n-r)}$$

Trong đó b_k là hệ số của lọc. Với $x(n)= e^{j\omega n}$

$$y(n) = \sum_{r=0}^{M} b_r e^{j\omega(n-r)} = \left[\sum_{r=0}^{M} b_r e^{-j\omega r}\right] e^{j\omega n}$$

$$\boxed{\Rightarrow \qquad H(\omega) = \sum_{r=0}^{M} b_r e^{-j\omega r}}$$

- Đối với lọc đệ quy (lọc IIR), gọi H(ω) là đáp ứng tần số của lọc thì:

$$\boldsymbol{y(n)} = \sum_{\boldsymbol{r}=0}^{\boldsymbol{M}} \boldsymbol{b_r x(n-r)} - \sum_{\boldsymbol{k}=1}^{\boldsymbol{N}} \boldsymbol{a_k y(n-k)} : \quad a_0 = 1$$

$$y(n) = H(\omega)e^{j\omega n}$$

$$H(\omega)e^{j\omega n} = \sum_{r=0}^{M} b_r e^{j\omega(n-r)} - \sum_{k=1}^{N} a_k H(\omega) e^{j\omega(n-k)}$$

$$\boxed{\Rightarrow \quad H(\omega) = \frac{\sum_{r=0}^{M} b_r e^{-j\omega r}}{1 + \sum_{k=1}^{N} a_k e^{-j\omega k}}}$$

Bài tập

1. Hệ thống có đáp ứng xung: $h(n) = 0.8^n u(n)$

Xác định và vẽ $H_R(\omega)$, $H_I(\omega)$, $|H(\omega)|$, $\phi_H(\omega)$.

2. Cho bộ lọc có đáp ứng xung:

$h(n) = (0.5)^n u(n)$

Tìm tín hiệu ra khi biết tín hiệu vào:

a. $x(n) = 2.5e^{jn\pi/2}$

b. $x(n) = 10 - 5\sin(n\pi/2) + 20\cos(n\pi)$