

Xử lý tín hiệu số

Chương 2. Tín hiệu và hệ thống rời rạc

2.6. Tương quan của tín hiệu rời rạc

TS. Nguyễn Hồng Quang

Bộ môn Kỹ thuật máy tính
Viện Công nghệ thông tin và Truyền thông
Trường Đại học Bách Khoa Hà Nội

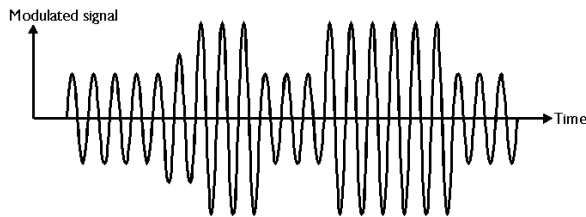
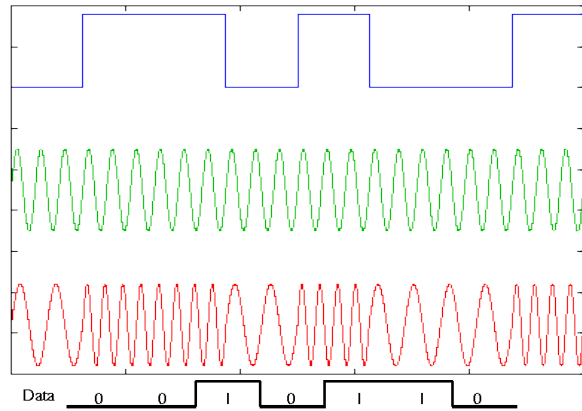


Chương 2. Tín hiệu và hệ thống rời rạc

- **2.6. Tương quan của các tín hiệu rời rạc**
 - 2.6.1. Tương quan chéo và tự tương quan
 - 2.6.2. Tính chất của dãy tương quan chéo và dãy tự tương quan
 - 2.6.3. Tương quan của các tín hiệu tuần hoàn
 - 2.6.4. Tương quan của các tín hiệu vào-ra của hệ thống

2.6.1. Tương quan chéo và tự tương quan

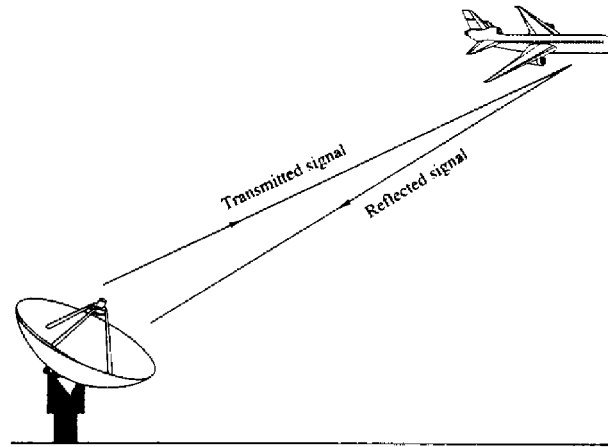
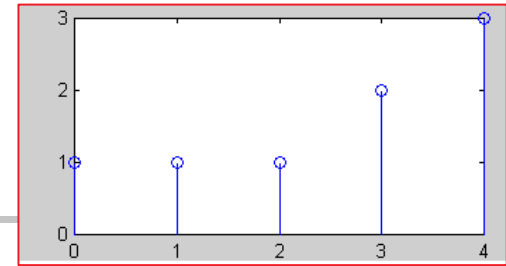
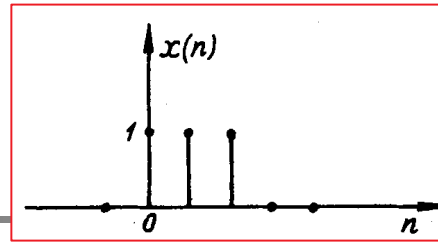
- Độ đo sự giống nhau giữa hai tín hiệu: radar, sonar, Truyền thông số, Địa chất, and other areas in science and engineering.



$$y(n) = x_i(n) + w(n)$$

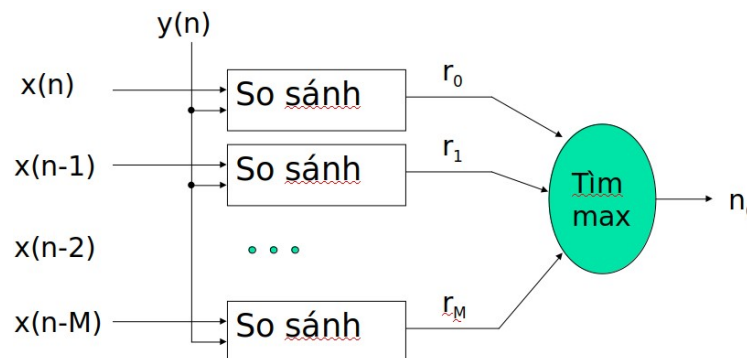
$$i = 0, 1$$

$$0 \leq n \leq L - 1$$



Radar target detection.

$$y(n) = \alpha x(n - D) + w(n)$$



Tương quan chéo

$$r_{xy}(l) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)y(n-l)$$

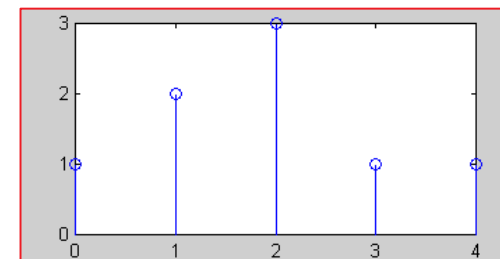
$$r_{xy}(l) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n+l)y(n)$$

$$l = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

$$r_{xy}(l) = r_{yx}(-l)$$

$$r_{xx}(l) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)x(n-l)$$

$$r_{xx}(l) = r_{xx}(-l)$$



2.6.2. Tính chất của dãy tương quan chéo và dãy tự tương quan: *Tìm giới hạn trên của $r_{xy}(l)$, $r_{xx}(l)$*

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} [ax(n) + by(n-l)]^2 = a^2 r_{xx}(0) + b^2 r_{yy}(0) + 2abr_{xy}(l) \geq 0$$

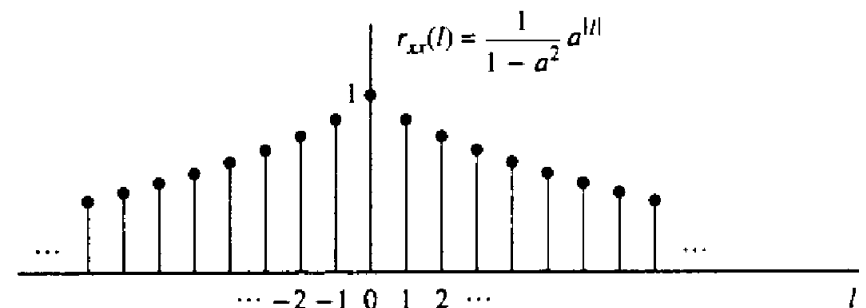
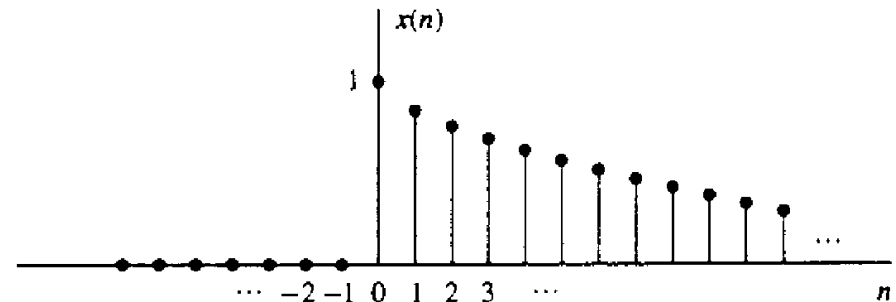
$$|r_{xx}(l)| \leq r_{xx}(0) = E_x \quad r_{xx}(0) \left(\frac{a}{b}\right)^2 + 2r_{xy}(l) \left(\frac{a}{b}\right) + r_{yy}(0) \geq 0$$

$$|r_{xy}(l)| \leq \sqrt{r_{xx}(0)r_{yy}(0)} = \sqrt{E_x E_y}$$

$$x(n) = a^n u(n), \quad 0 < a < 1$$

$$\rho_{xx}(l) = \frac{r_{xx}(l)}{r_{xx}(0)} \quad |\rho_{xx}(l)| \leq 1$$

$$\rho_{xy}(l) = \frac{r_{xy}(l)}{\sqrt{r_{xx}(0)r_{yy}(0)}} \quad |\rho_{xy}(l)| \leq 1$$



2.60 What is the normalized autocorrelation sequence of the signal $x(n)$ given by

$$x(n) = \begin{cases} 1, & -N \leq n \leq N \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$$



2.6.3. Tương quan của các tín hiệu tuần hoàn (với chu kỳ N)

$$r_{xy}(l) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x(n)y(n-l) \quad r_{xx}(l) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x(n)x(n-l)$$

Xác định chu kỳ tuần hoàn của tín hiệu tuần hoàn, thu được trong môi trường bị nhiễu tác động.

$$\mathbf{y(n) = x(n) + w(n)}$$

M mẫu $y(n)$, $0 < n < M-1$

với $M \gg N$

$$r_{yy}(l) = \frac{1}{M} \sum_{n=0}^{M-1} y(n)y(n-l) = r_{xx}(l) + r_{xw}(l) + r_{wx}(l) + r_{ww}(l)$$

- $r_{xx}(l)$: biểu diễn cùng chu kỳ tuần hoàn, chứa các đỉnh lớn tại $l = 0, N, 2N, \dots$. Tuy nhiên khi $l \rightarrow M$, các đỉnh sẽ giảm biên độ ???
- $r_{xw}(l)$ và $r_{wx}(l)$: nhỏ ???
- $r_{ww}(l)$: có một đỉnh tại $l = 0$, giảm về 0.
- $r_{yy}(l)$: có giá trị lớn tại $l = 0$, có các đỉnh tại $l = N, 2N, \dots$ nhưng suy giảm dần



Ví dụ

- Cho tín hiệu $x(n) = \sin(\pi/5)n$
 - Với $0 < n < 99$
 - Bị tác động bởi nhiễu cộng ngẫu nhiên $w(n)$,
 - $w(n)$ tuân theo phân bố đều (uniform distribution) trong khoảng $(-\Delta/2, \Delta/2)$, Δ là tham số của phân bố.
- Tín hiệu quan sát được: $y(n) = x(n) + w(n)$.
- Xác định dãy tự tương quan $r_{yy}(n)$
- Xác định chu kỳ của tín hiệu $x(n)$.

$$P_w = \Delta^2/12$$

$$P_x = \frac{1}{2}$$

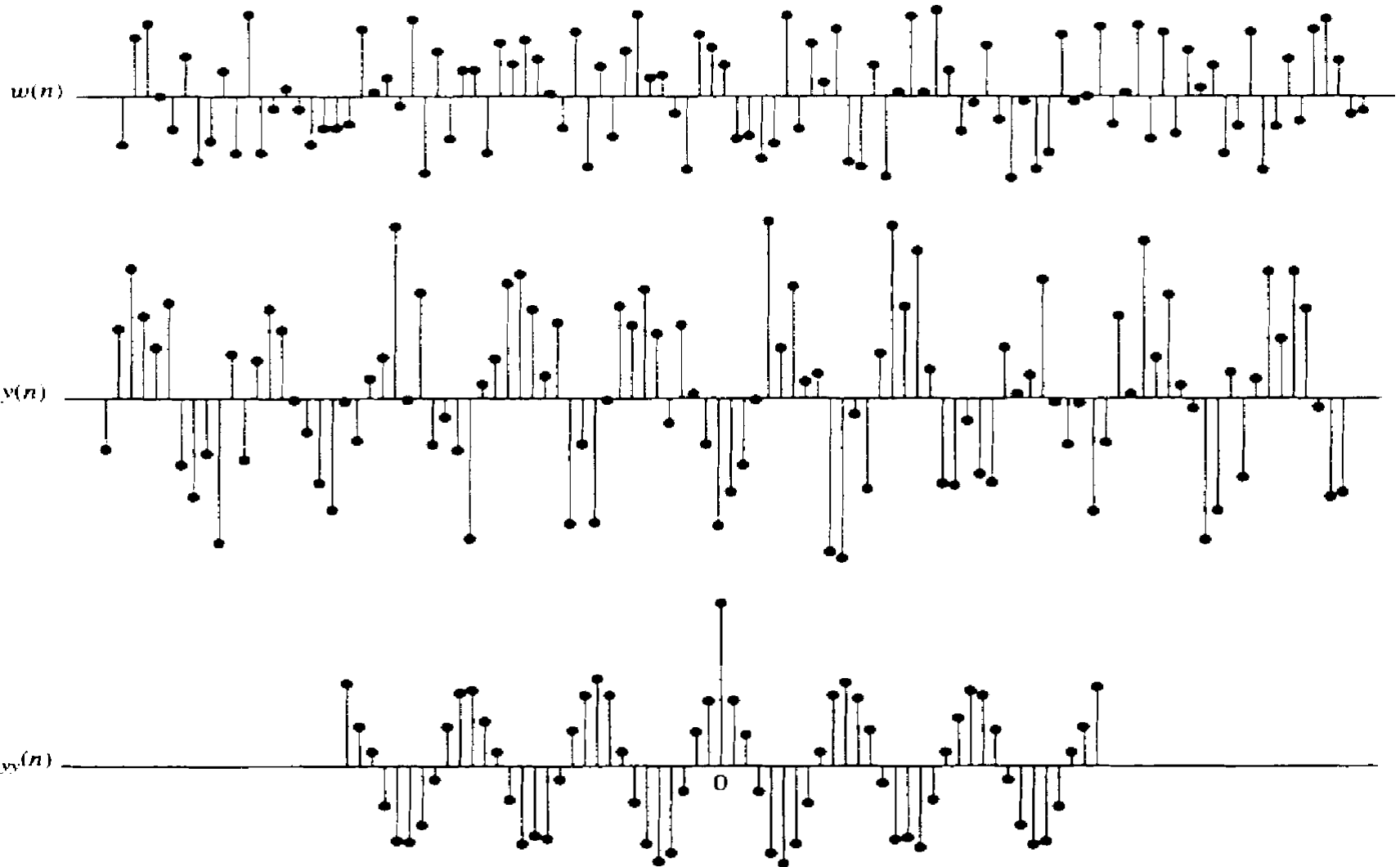
$$\text{SNR} = \frac{P_x}{P_w} = \frac{\frac{1}{2}}{\Delta^2/12} = \frac{6}{\Delta^2}$$

$$10 \log_{10} (P_x / P_w)$$



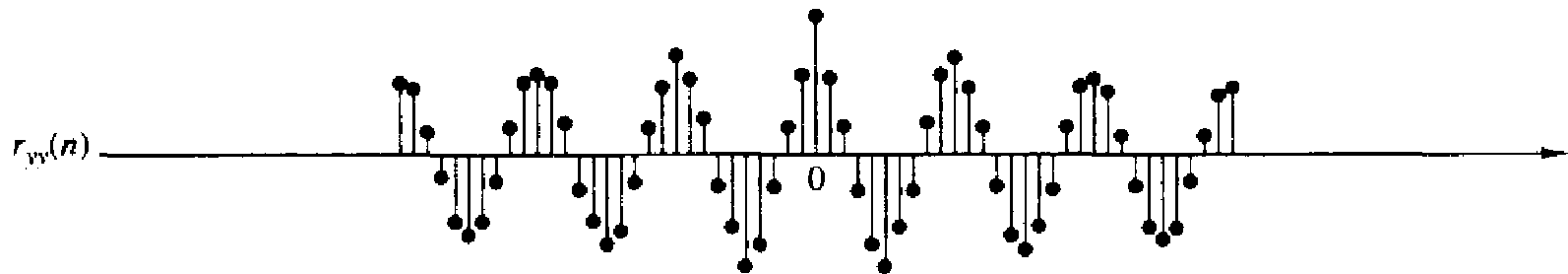
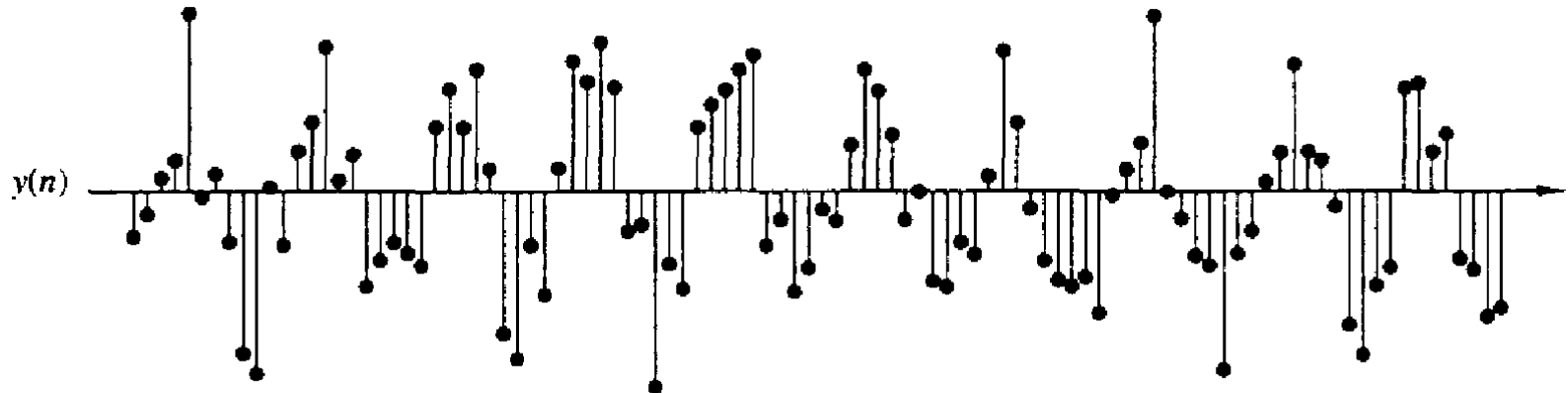
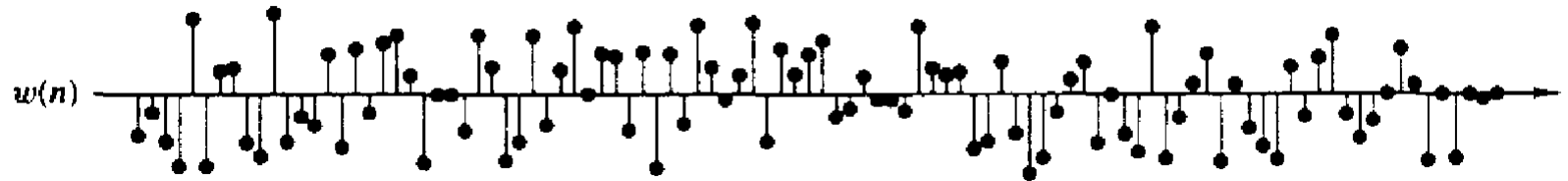
SNR = 1 dB

Nhận xét





SNR = 5dB





Dãy tương quan vào-ra của hệ

$$\begin{aligned}y(n) &= h(n) * x(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k)x(n-k) & r_{yx}(l) &= y(l) * x(-l) \\ & & &= h(l) * [x(l) * x(-l)] \\ r_{yx}(l) &= h(l) * r_{xx}(l) \\ r_{xy}(l) &= h(-l) * r_{xx}(l) \\ r_{yy}(l) &= y(l) * y(-l) \\ r_{yy}(l) &= r_{hh}(l) * r_{xx}(l) & r_{yy}(0) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} r_{hh}(k)r_{xx}(k)\end{aligned}$$

2.61 An audio signal $s(t)$ generated by a loudspeaker is reflected at two different walls with reflection coefficients r_1 and r_2 . The signal $x(t)$ recorded by a microphone close to the loudspeaker, after sampling, is

$$x(n) = s(n) + r_1 s(n - k_1) + r_2 s(n - k_2)$$

where k_1 and k_2 are the delays of the two echoes.

- (a) Determine the autocorrelation $r_{xx}(l)$ of the signal $x(n)$.
- (b) Can we obtain r_1 , r_2 , k_1 , and k_2 by observing $r_{xx}(l)$?
- (c) What happens if $r_2 = 0$?

2.62* *Time-delay estimation in radar* Let $x_a(t)$ be the transmitted signal and $y_a(t)$ be the received signal in a radar system, where

$$y_a(t) = ax_a(t - t_d) + v_a(t)$$

and $v_a(t)$ is additive random noise. The signals $x_a(t)$ and $y_a(t)$ are sampled in the receiver, according to the sampling theorem, and are processed digitally to determine the time delay and hence the distance of the object. The resulting discrete-time signals are

$$x(n) = x_a(nT)$$

$$y(n) = y_a(nT) = ax_a(nT - DT) + v_a(nT)$$

$$\triangleq ax(n - D) + v(n)$$

- (a) Explain how we can measure the delay D by computing the crosscorrelation $r_{xy}(l)$.
 (b) Let $x(n)$ be the 13-point *Barker sequence*

$$x(n) = \{+1, +1, +1, +1, +1, -1, -1, +1, +1, -1, +1, -1, +1\}$$

and $v(n)$ be a Gaussian random sequence with zero mean and variance $\sigma^2 = 0.01$. Write a program that generates the sequence $y(n)$, $0 \leq n \leq 199$ for $a = 0.9$ and $D = 20$. Plot the signals $x(n)$, $y(n)$, $0 \leq n \leq 199$.

- (c) Compute and plot the crosscorrelation $r_{xy}(l)$, $0 \leq l \leq 59$. Use the plot to estimate the value of the delay D .
 (d) Repeat parts (b) and (c) for $\sigma^2 = 0.1$ and $\sigma^2 = 1$.
 (e) Repeat parts (b) and (c) for the signal sequence

$$x(n) = \{-1, -1, -1, +1, +1, +1, +1, -1, +1, -1, +1, +1, -1, -1, +1\}$$

which is obtained from the four-stage feedback shift register shown in Fig. P2.62.

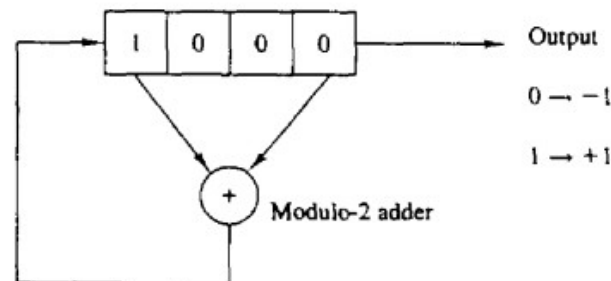


Figure P2.61 Linear feedback shift register.

Note that $x(n)$ is just one period of the periodic sequence obtained from the feedback shift register.

- (f) Repeat parts (b) and (c) for a sequence of period $N = 2^7 - 1$, which is obtained from a seven-stage feedback shift register. Table 2.3 gives the stages connected to the modulo-2 adder for (maximal-length) shift-register sequences of length $N = 2^m - 1$.

TABLE 2.3 SHIFT-REGISTER
CONNECTIONS FOR GENERATING
MAXIMAL-LENGTH SEQUENCES

m	Stages Connected to Modulo-2 Adder
1	1
2	1, 2
3	1, 3
4	1, 4
5	1, 4
6	1, 6
7	1, 7
8	1, 5, 6, 7
9	1, 6
10	1, 8
11	1, 10
12	1, 7, 9, 12
13	1, 10, 11, 13
14	1, 5, 9, 14
15	1, 15
16	1, 5, 14, 16
17	1, 15