TRƯỜNG ĐẠI HỌC CÔNG NGHIỆP TP.HCM

# XỬ LÝ SỐ TÍN HIỆU
## Digital Signal Processing

Giảng viên: Ths. Đào Thị Thu Thủy

# Chương 2:

# TÍN HIỆU VÀ HỆ THỐNG RỜI RẠC TRONG MIỀN THỜI GIAN

# Chương 2: TÍN HIỆU & HỆ THỐNG RỜI RẠC

2.1 Tín hiệu rời rạc

2.2 Hệ thống rời rạc

2.3 Hệ thống tuyến tính bất biến LTI

2.4 Phương trình sai phân mô tả hệ thống rời rạc

2.5 Cấu trúc hệ thống rời rạc

2.6 Tương quan giữa các tín hiệu

# 2.1 TÍN HIỆU RỜI RẠC

## 2.1.1 Biểu diễn tín hiệu rời rạc

- **Tín hiệu rời rạc** được biểu diễn bằng một dãy các giá trị với phần tử thứ n được ký hiệu **x(n)**.

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{Tín hiệu liên tục}\\ x_a(t)\end{array}} \xrightarrow[t = nT]{\text{Lấy mẫu}} \boxed{\begin{array}{c}\text{Tín hiệu rời rạc}\\ x_s(nT) \equiv x(n)\end{array}} \quad T=1$$

Với **T:** chu kỳ lấy mẫu

**n** : số nguyên

- **Tín hiệu rời rạc** có thể biểu diễn bằng một trong các dạng: hàm số, dạng bảng, dãy số & đồ thị.

- **Hàm số:**

$$x(n) = \begin{cases} (0.5)^n : & 0 \le n \le 3 \\ 0 : & \text{n còn lại} \end{cases}$$

- **Dãy số:**

$$x(n) = \left\{ 0, \underset{\uparrow}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, 0 \right\}$$

$\uparrow$ - Gốc thời gian n=0

- **Dạng bảng:**

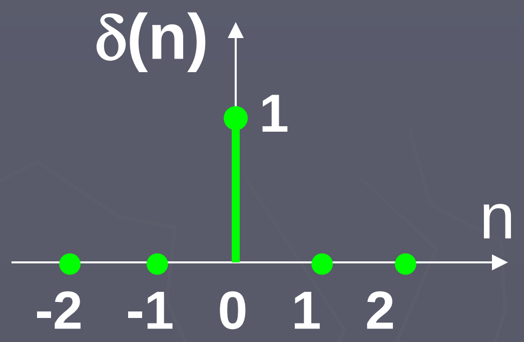
| n | -1 | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| x(n) | 0 | 1 | 0.5 | 0.25 | 0.125 | 0 |

- **Đồ thị:**

# 2.1.2 MỘT SỐ TÍN HIỆU RỜI RẠC CƠ BẢN

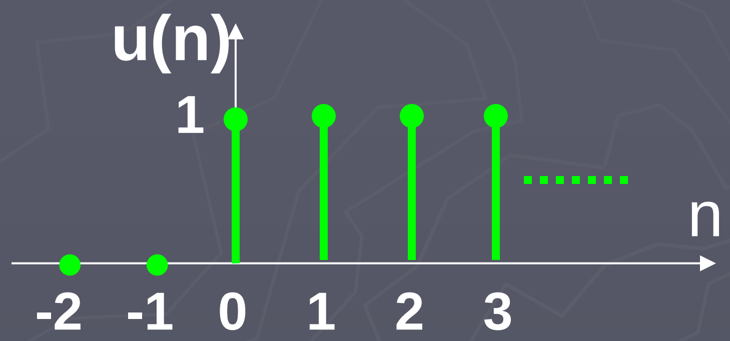
❖ **Dãy xung đơn vị:**

$$\delta(n) = \begin{cases} 1: & n = 0 \\ 0: & \text{n còn lại} \end{cases}$$



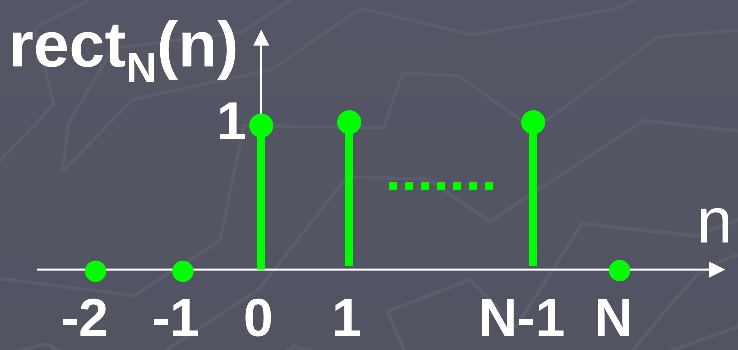

❖ **Dãy nhảy bậc đơn vị:**

$$u(n) = \begin{cases} 1: & n \geq 0 \\ 0: & n < 0 \end{cases}$$



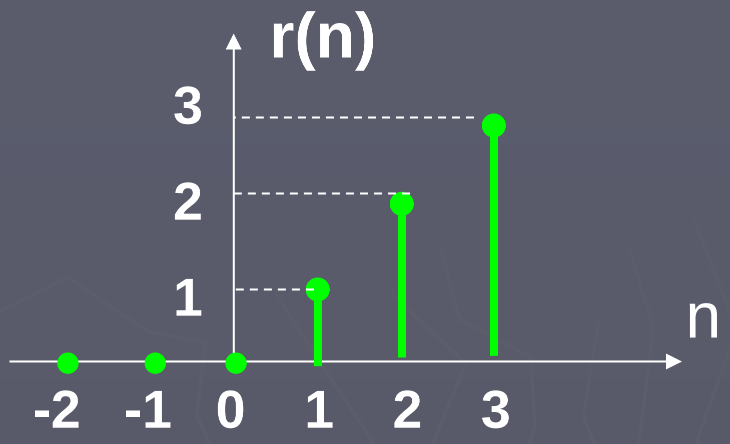

❖ **Dãy chữ nhật:**

$$rect_N(n) = \begin{cases} 1: & \mathrm{N}-1 \geq n \geq 0 \\ 0: & n \ \text{ còn lại} \end{cases}$$



- **Dãy dốc đơn vị:**

$$r(n)=\begin{cases} n: & n\geq 0\\ 0: & n<0\end{cases}$$

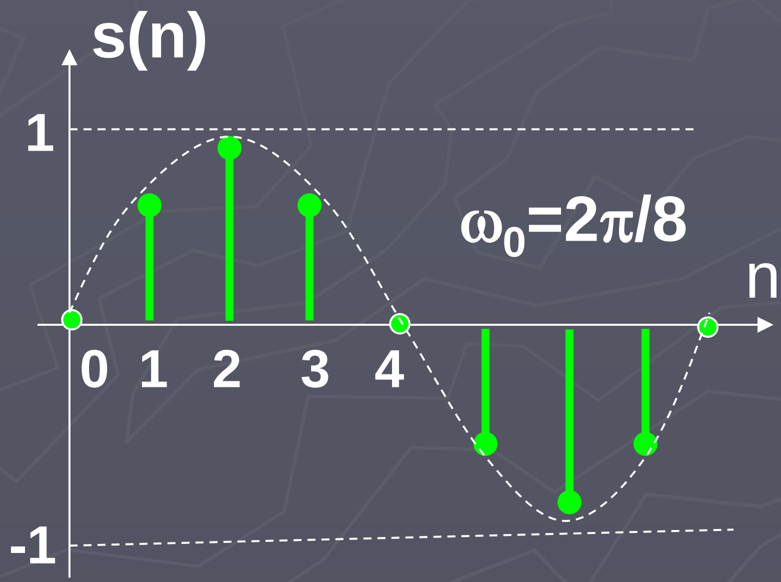



- **Dãy hàm mũ thực:**

$$e(n)=\begin{cases} a^n: & n\geq 0\\ 0: & n<0\end{cases}$$

- **Dãy sin:**

$$s(n)=\sin(\omega_0 n)$$



## 2.1.3 CÁC PHÉP TOÁN TRÊN TÍN HiỆU

Cho 2 dãy: $x_1(n) = \left\{1, \underset{\uparrow}{2}, 3\right\};\ x_2(n) = \left\{2, \underset{\uparrow}{3}, 4\right\}$

### a. Cộng 2 dãy:

Cộng các mẫu 2 dãy với nhau tương ứng với chỉ số n

$$x_1(n) + x_2(n) = \left\{3, \underset{\uparrow}{5}, 7\right\}$$

### b. Nhân 2 dãy:

Nhân các mẫu 2 dãy với nhau tương ứng với chỉ số n

$$x_1(n)x_2(n) = \left\{2, \underset{\uparrow}{6}, 12\right\}$$

# 2.1.3 CÁC PHÉP TOÁN TRÊN TÍN HiỆU

Cho dãy: $\boldsymbol{x(n)} = \left\{1, \underset{\uparrow}{2}, 3\right\}$

## c. <u>Dịch</u>: x(n) ⇒ x(n-n$_o$)

$n_0>0$ : dịch sang phải

$n_0<0$ : dịch sang trái

$$\boldsymbol{x}(\boldsymbol{n}-1) = \left\{\underset{\uparrow}{1}, 2, 3\right\}; \boldsymbol{x}(\boldsymbol{n}+1) = \left\{1, 2, \underset{\uparrow}{3}\right\}$$

## d. <u>Gấp tín hiệu</u>: x(n) ⇒ x(-n)

Lấy đối xứng qua trục tung

$$\boldsymbol{x}(\boldsymbol{n}) = \left\{1, \underset{\uparrow}{2}, 3\right\} \Rightarrow \boldsymbol{x}(-\boldsymbol{n}) = \left\{3, \underset{\uparrow}{2}, 1\right\}$$

# 2.1.3 CÁC PHÉP TOÁN TRÊN TÍN HiỆU

Cho dãy: $\boldsymbol{x(n)} = \{1, \underset{\uparrow}{2}, 3\}$

## e. Nhân hằng số: x(n) $\Rightarrow$ ax(n)

Nhân các mẫu của dãy với hệ số nhân

$$2x(n) = \{2, \underset{\uparrow}{4}, 6\}$$

## f. <u>Co thời gian</u>: x(n) $\Rightarrow$ y(n)=x(2n)

y(0)=x(2.0)=x(0)

y(1)=x(2.1)=x(2)

y(-1)=x(2.-1)=x(-2)

$$x(n) = \{1, \underset{\uparrow}{2}, 3\} \Rightarrow x(2n) = \{0, \underset{\uparrow}{2}, 0\}$$

# 2.1.4 PHÂN LOẠI TÍN HIỆU RỜI RẠC

## a. Tín hiệu năng lượng và tín hiệu công suất

+ Năng lượng dãy x(n):

$$E_x = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x(n)|^2$$

Nếu $\infty > E_x > 0$ thì x(n) gọi là tín hiệu năng lượng

+ Công suất trung bình dãy x(n):

$$P_x = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{(2N+1)} \sum_{n=-N}^{N} |x(n)|^2$$

Nếu $\infty > P_x > 0$ thì x(n) gọi là tín hiệu công suất

**<u>Ví dụ:</u>** Cho $x(n) = rect_{10}(n); y(n) = u(n)$

Các tín hiệu trên tín hiệu nào là công suất, năng lượng?

$$E_x = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x(n)|^2 = \sum_{n=0}^{9} |rect_{10}(n)|^2 = 10$$

x(n)- năng lượng

$$P_x = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{(2N+1)} \sum_{n=0}^{9} |rect_{10}(n)|^2 = \lim_{N\to\infty} \frac{10}{(2N+1)} = 0$$

$$E_y = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |y(n)|^2 = \sum_{n=0}^{\infty} |u(n)|^2 = \infty$$

y(n)- công suất

$$P_y = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{(2N+1)} \sum_{n=0}^{N} |u(n)|^2 = \lim_{N\to\infty} \frac{N+1}{(2N+1)} = \frac{1}{2}$$

## b. Tín hiệu tuần hoàn và tín hiệu không tuần hoàn

- Tín hiệu tuần hoàn là tín hiệu thỏa mãn điều kiện sau:

  x[n+N] = x[n] với mọi n

  Giá trị N nhỏ nhất gọi là chu kỳ cơ bản của tín hiệu.

- Tín hiệu tuần hoàn có công suất bằng công suất trong 1 chu kỳ cơ bản N và có giá trị hữu hạn

$$P = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}|x(n)|^2$$

- Tín hiệu tuần hoàn là tín hiệu công suất

# c. Tín hiệu chẵn & tín hiệu lẻ

- *Tín hiệu chẵn*: $x(-n)=x(n)$
- *Tín hiệu lẻ*: $x(-n)=-x(n)$

Ta có:

$x_e(n) = [x(n) + x(-n)]/2$ là tín hiệu chẵn và:

$x_o(n) = [x(n) - x(-n)]/2$ là tín hiệu lẻ

Cộng 2 vế ta được:

$$x_e(n) + x_o(n) = x(n)$$

Như vậy, bất kỳ tín hiệu nào cũng có thể biểu diễn ở dạng tổng của 2 tín hiệu khác: một tín hiệu chẵn và một tín hiệu lẻ.

# d. Tín hiệu hữu hạn và tín hiệu vô hạn

- **Dãy x(n) hữu hạn** là dãy có số mẫu $N < \infty$. Dãy x(n) hữu hạn có N mẫu được ký hiệu là x(n).
- **Dãy x(n) vô hạn** là dãy có vô hạn mẫu. Khoảng xác định của dãy vô hạn có thể là $n \in (-\infty, \infty)$; $n \in (0, \infty)$; hoặc $n \in (-\infty, 0)$.

*Ví dụ:*

tín hiệu vô hạn

$$x(n) = \left\{ \ldots, 2, \underset{\uparrow}{4}, 6, \ldots \right\}$$

tín hiệu hữu hạn

$$x(n) = \left\{ 0, 2, \underset{\uparrow}{4}, 6, 0 \right\}$$

# e. Tín hiệu nhân quả, phi nhân quả, phản nhân quả

*Tín hiệu nhân quả*: x(n)=0 : n<0

$$x(n)=\left\{0,\underset{\uparrow}{4},6,0\right\}$$

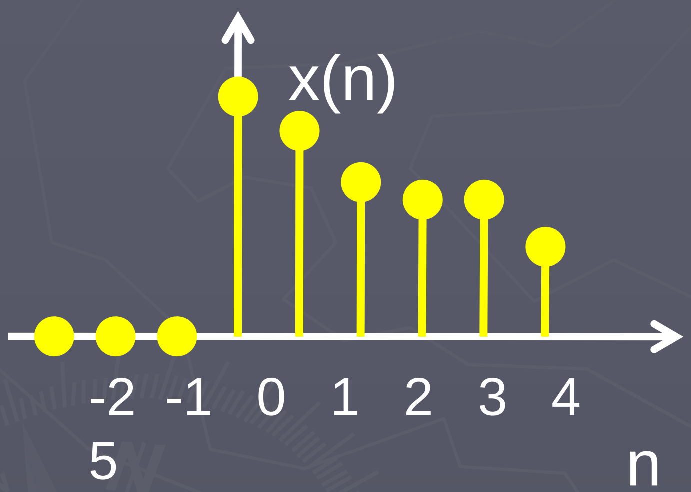
*Tín hiệu phi nhân quả*: không thoả tính chất trên

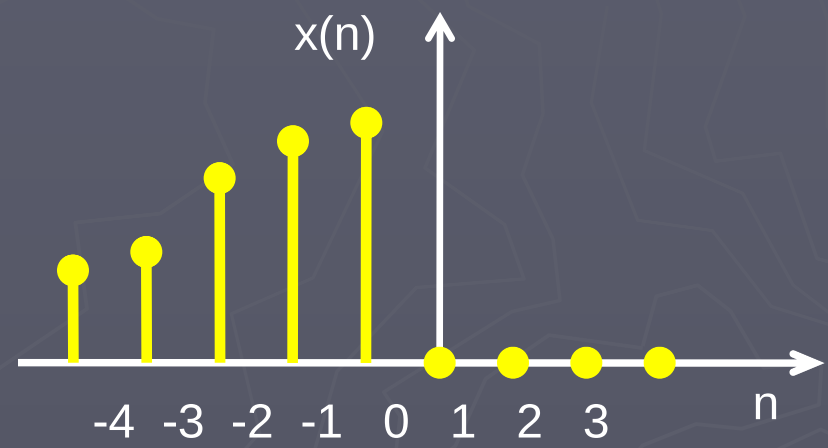
$$x(n)=\left\{0,2,\underset{\uparrow}{4},6,0\right\}$$

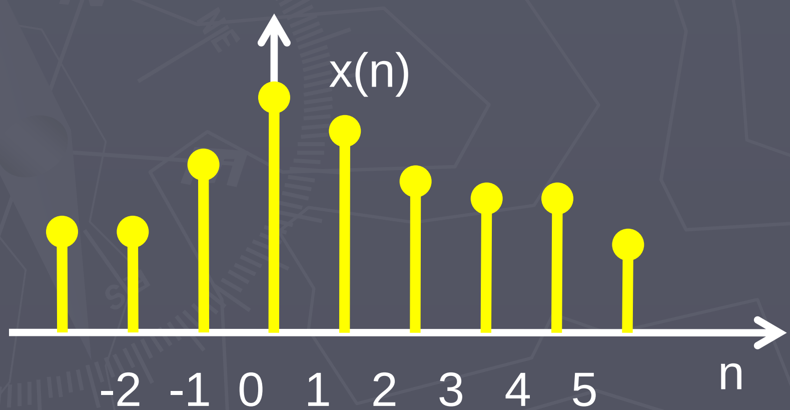
*Tín hiệu phản nhân quả*: x(n)=0 : n≥0

$$x(n)=\left\{0,4,2,\underset{\uparrow}{0},0\right\}$$

# Ví dụ: Phân loại các tín hiệu sau



# BÀI TẬP

2.1 Biểu diễn các tín hiệu sau ở dạng dãy số và đồ thị

a. $\delta(n+2)$, $\delta(n-2)$, $u(n+3)$, $u(n-3)$,

b. $r(n+1)$, $r(n-1)$, $rect_5(n)$, $rect_5(n-3)$,

2.2 Biểu diễn tín hiệu sau ở các dạng còn lại

$$a.\quad x_1(n) = \begin{cases} 3-|n|: & -3 \le n \le 3 \\ 0: & \text{n còn lại} \end{cases}$$

$$b.\quad x_2(n) = \left\{ 0, \underset{\uparrow}{1}, 2, 3, 0 \right\}$$

2.3 Với $x_1(n)$ và $x_2(n)$ ở câu 2.2. Tìm

a. $x_1(n) + x_2(n)$ b. $x_1(n) \,.\, x_2(n)$ c. $2x_1(n) - x_2(-n)$

# Chương 2: TÍN HIỆU & HỆ THỐNG RỜI RẠC

2.1 Tín hiệu rời rạc

2.2 Hệ thống rời rạc

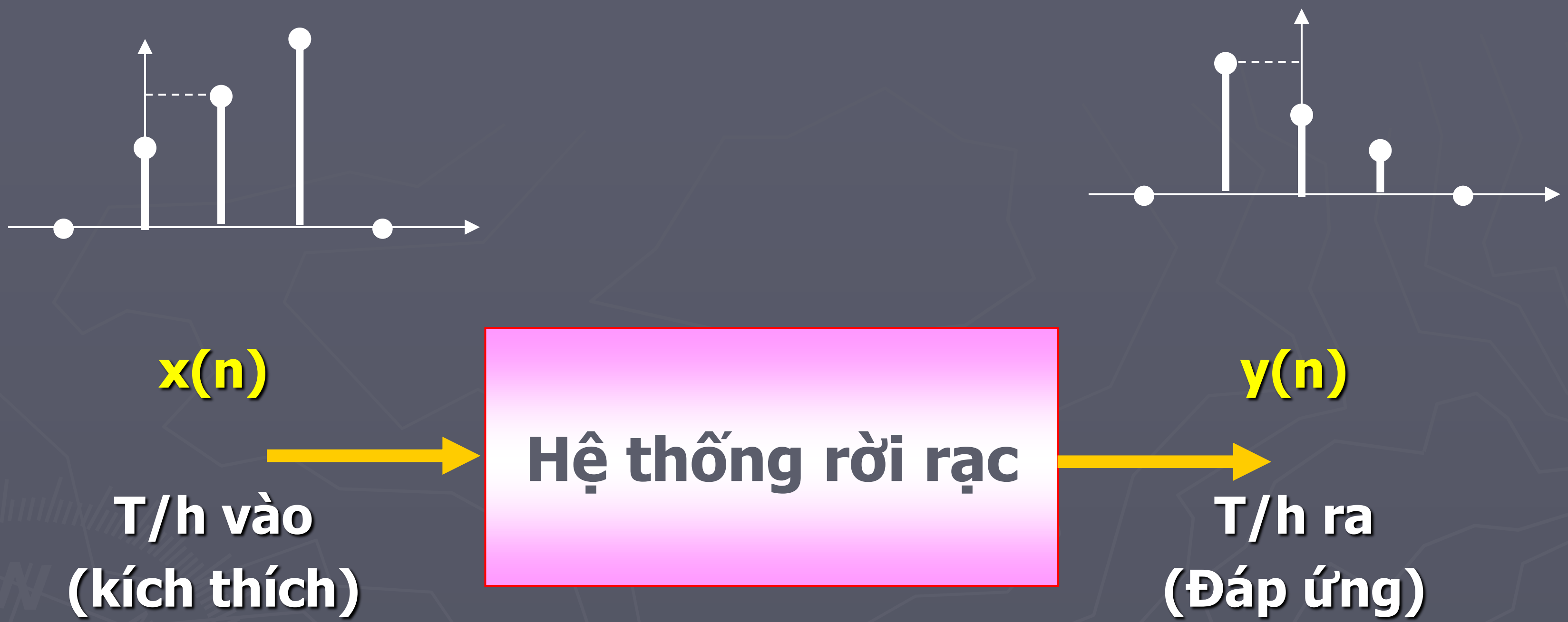
2.3 Hệ thống tuyến tính bất biến LTI

2.4 Phương trình sai phân mô tả hệ thống rời rạc

2.5 Cấu trúc hệ thống rời rạc

2.6 Tương quan giữa các tín hiệu

# 2.2 HỆ THỐNG RỜI RẠC




Dạng khối của hệ thống rời rạc

# 2.2.1 PHƯƠNG TRÌNH VÀO RA MÔ TẢ HỆ THỐNG

$$x(n) \xrightarrow{\;\;T\;\;} y(n)$$

$$y(n) = T[x(n)]$$

- ✓ Trong cách biểu diễn này, ta không quan tâm đến cấu trúc bên trong của hệ thống.
- ✓ Quan hệ vào-ra giữa x(n) và y(n) được mô tả bằng một phương trình toán.
- ✓ Đặt vào đầu vào một tín hiệu x(n) cụ thể, căn cứ vào phương trình ta sẽ tìm được đầu ra y(n) tương ứng.

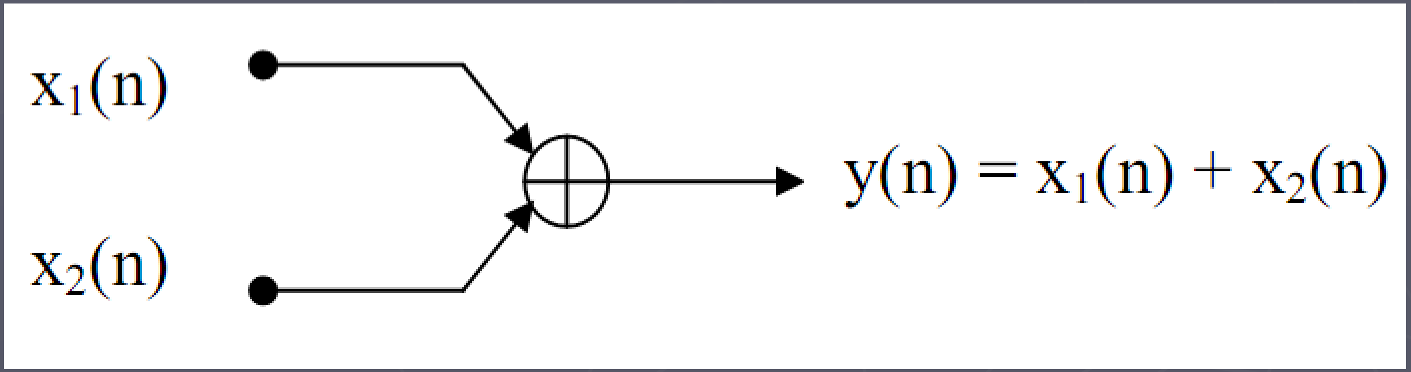
Ví dụ: Xác định đáp ứng của các hệ thống sau biết tín hiệu vào :

$$x(n) = \begin{cases} |n| : & -3 \le n \le 3 \\ 0 & \text{n còn lại} \end{cases}$$

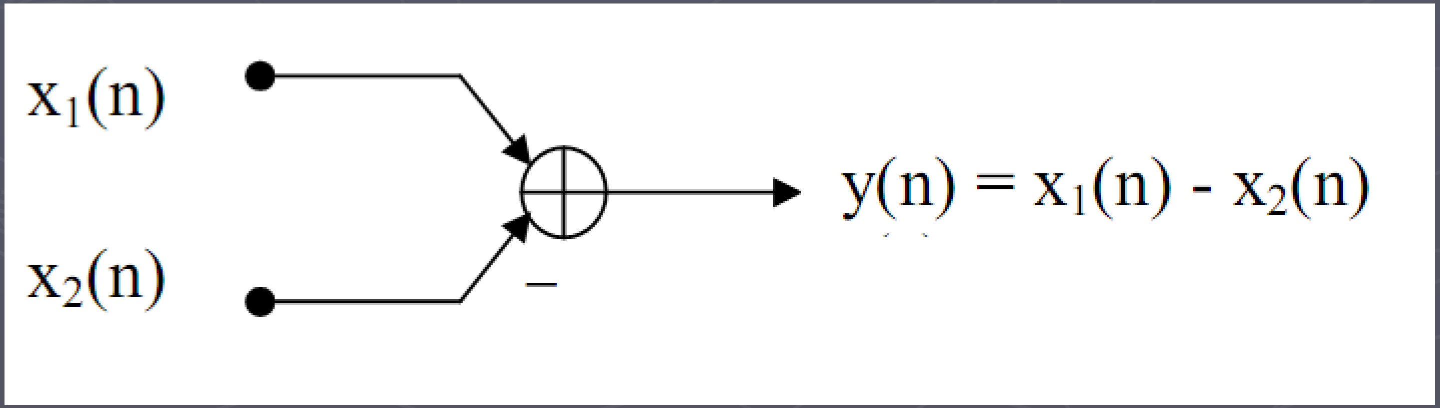
a. y(n)=x(n)
b. y(n) = x(n – 1) trễ đơn vị
c. y(n) = x(n + 1) sớm đơn vị
d. y(n) = [x(n – 1) + x(n) + x(n + 1)]/3 lọc trung bình
e. y(n) = median[x(n – 1), x(n),x(n + 1)] lọc trung vị
f. y(n) = max[ x(n – 1), x(n), x(n + 1)] lấy giá trị lớn nhất
g. y(n) = 2x(n) khuếch đại biên độ
h. y(n) = x(2n) co thời gian (giảm mẫu)

## 2.2.2 SƠ ĐỒ KHỐI MÔ TẢ HỆ THỐNG RỜI RẠC

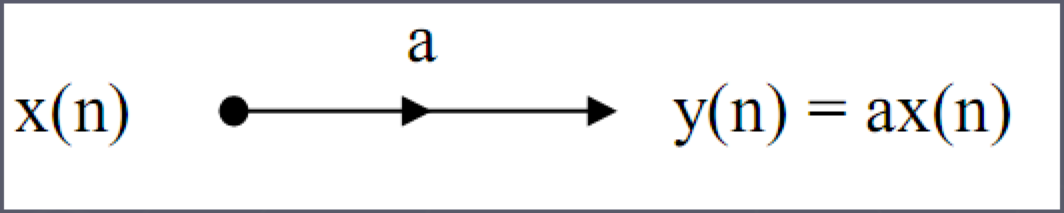
a. Mạch cộng tín hiệu:



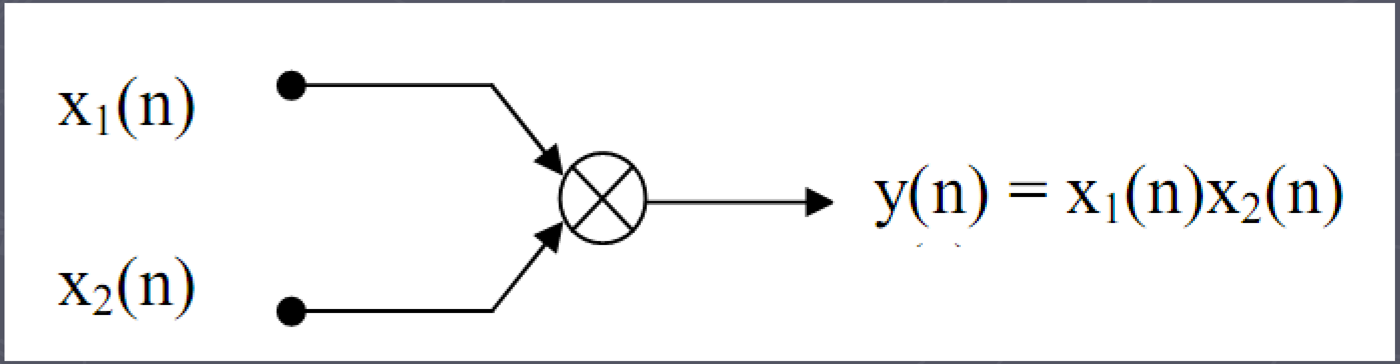

b. Mạch trừ tín hiệu:



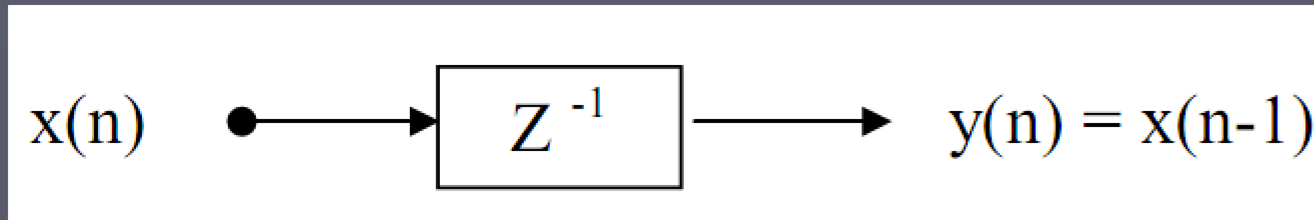
## c. Mạch nhân tín hiệu với hằng số:



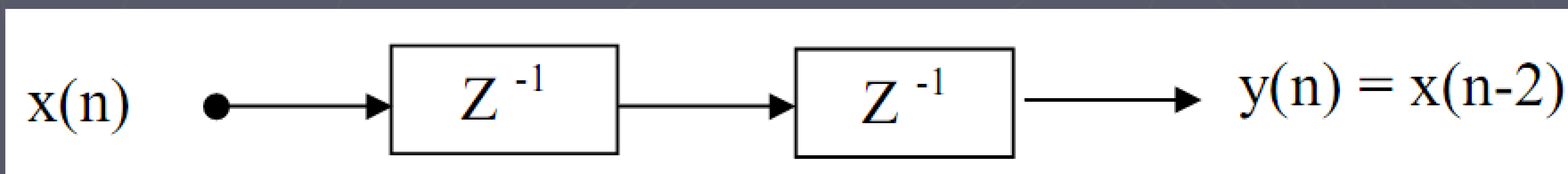

## d. Mạch nhân tín hiệu:



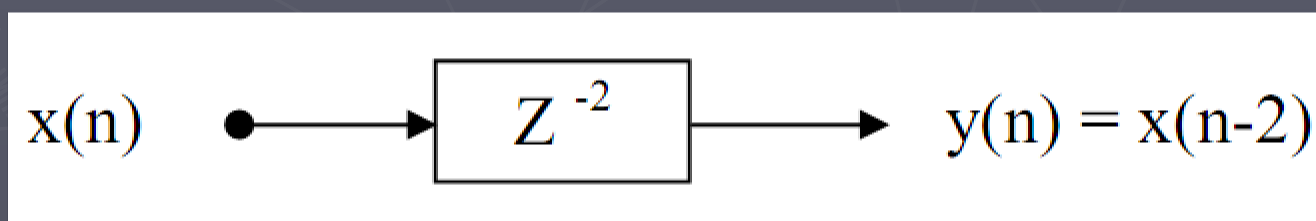
# e. Mạch trễ đơn vị thời gian:



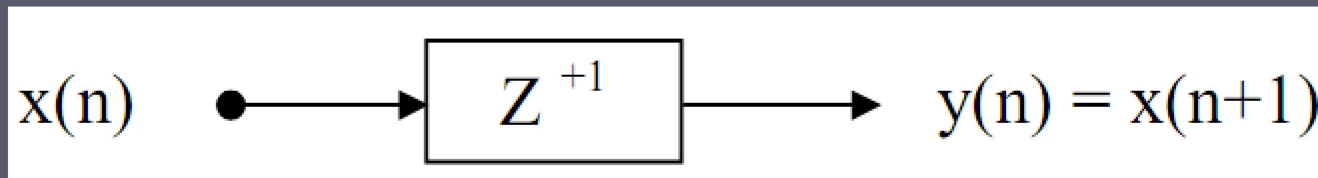

ghép nối tiếp nhiều bộ trễ đơn vị




$\Leftrightarrow$



# f. Mạch sớm đơn vị thời gian:




Tương tự bộ trễ  để tạo sớm nhiều hơn 1 có thể thực hiện bằng cách ghép nối tiếp nhiều bộ sớm đơn vị với nhau.

Ví dụ: Vẽ sơ đồ khối của hệ thống có pt tín hiệu vào ra như sau:

a. $y(n) = 2x(n) + x(n-1) + x^2(n-2)$

b. $y(n) = 2x(n) + 3x(n-1) + 4x(n-3)$

c. $y(n) = 0.5\, y(n-1) + 4\, x(n+1) - 3\, x(n-2)$

# 2.2.3. PHÂN LOẠI CÁC HỆ THỐNG XỬ LÝ TÍN HIỆU RỜI RẠC

- **Hệ thống tĩnh & động**

  - *Hệ thống tĩnh:* tín hiệu vào sẽ ra trực tiếp, không trì hoãn, không tới sớm, không cần bộ nhớ

    Ví dụ: $y(n) = 2x(n)$

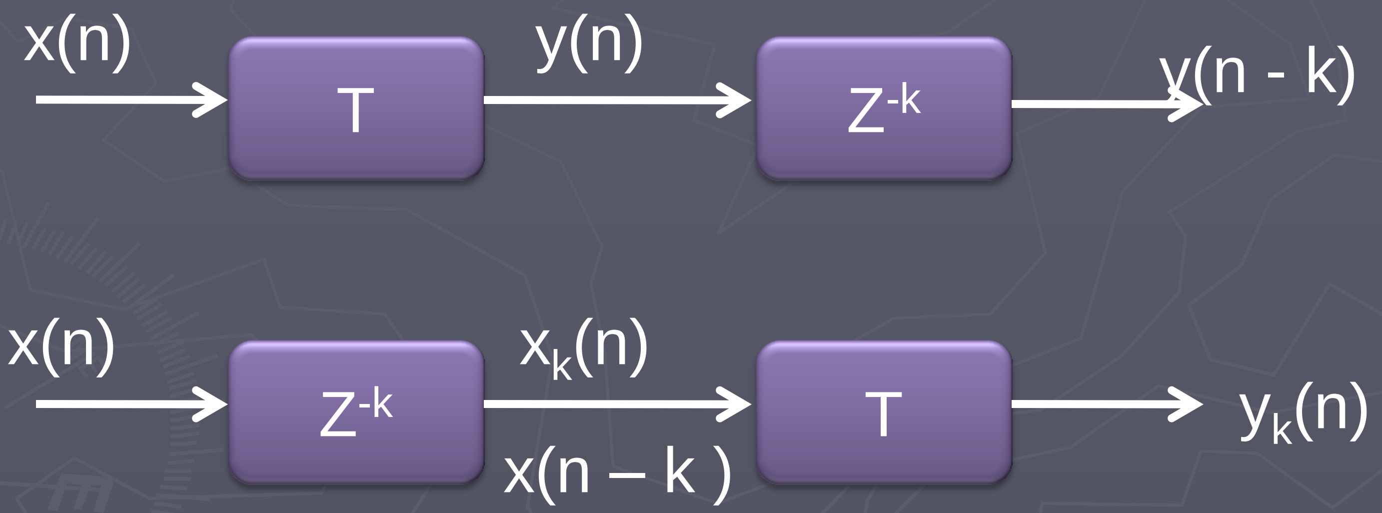
  - *Hệ thống động*: không thoả tính chất trên

    Ví dụ: $y(n) = 2x(n-1) + x(n) - x(n+2)$

## ❖ Hệ thống bất biến & biến thiên theo thời gian

- *__Hệ bất biến theo thời guan:__* nếu tín hiệu vào dịch đi **k** đơn vị **x(n-k)** thì tín hiệu ra cũng dịch đi **k** đơn vị **y(n-k)**

$$y(n-k)=y_k(n)$$



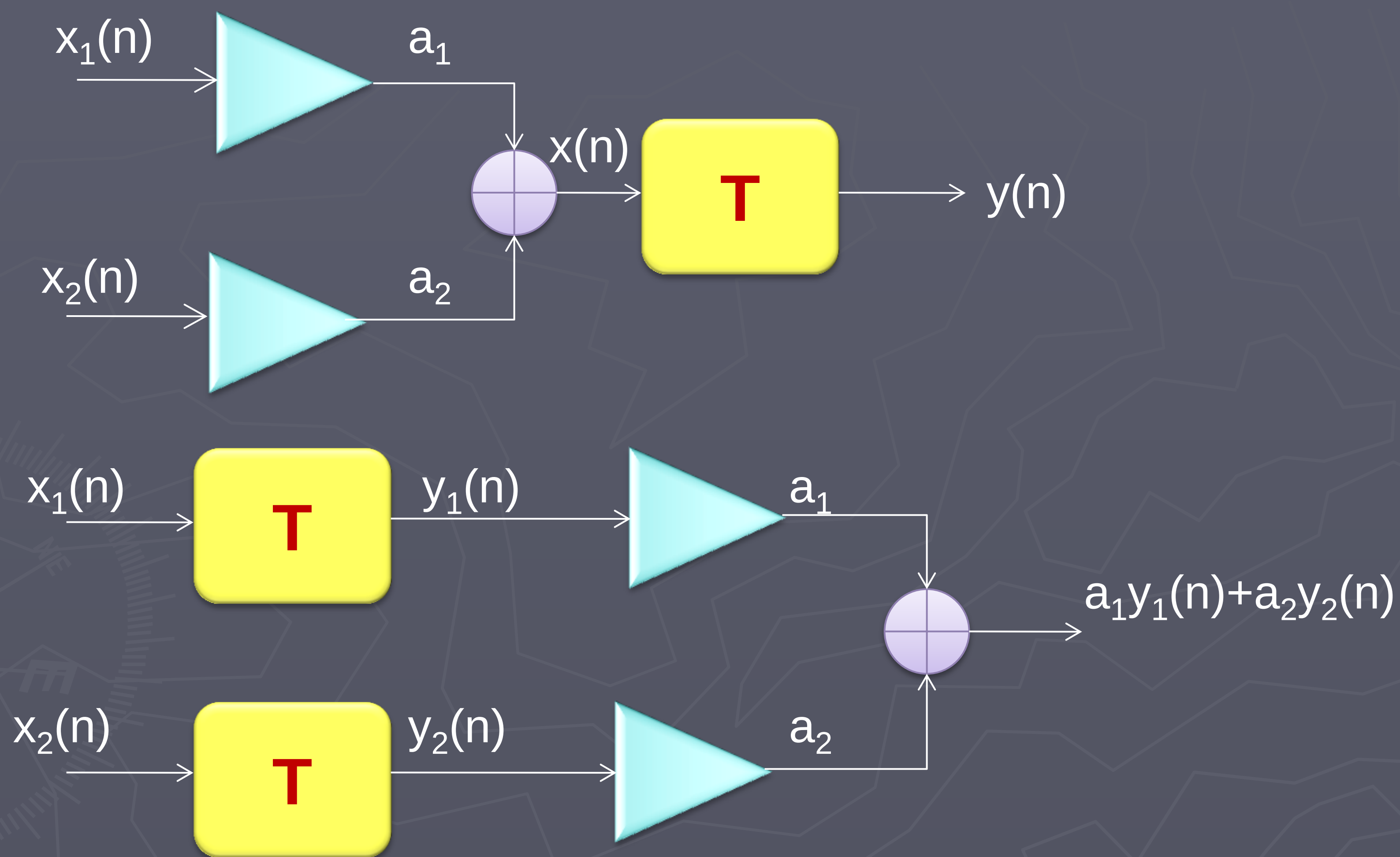

- *__Hệ biến thiên theo thời gian__*: không thoả tính chất trên

*Ví dụ: Xét tính bất biến của các hệ thống*

a. $y(n) = 2x(n)$
b. $y(n) = n\,x(n)$
c. $y(n) = 2x(n) - 4x(n-1)$

## ❖ Hệ thống tuyến tính & phi tuyến

➢ ***Hệ tuyến tính***: $T[a_1x_1(n)+a_2x_2(n)]=a_1T[x_1(n)]+a_2T[x_2(n)]$




➢ ***Hệ phi tuyến***: không thoả tính chất trên

*Ví dụ:* Kiểm tra tính tuyến tính của hệ thống sau

a. $y(n) = ax(n) + b$

b. $y(n) = nx(n)$

c. $y(n) = x^2(n)$

## ❖ Hệ thống nhân quả & không nhân quả

- *Hệ nhân quả:* Tín hiệu ra chỉ phụ thuộc tín hiệu vào ở thời điểm quá khứ và hiện tại

  $y(n) = 2x(n) + 3x(n-2)$
- *Hệ không nhân quả*: không thoả tính chất trên

  $y(n) = 2x(n+1) - 3x(n-2)$

## ❖ Hệ thống ổn định & không ổn định

- *Hệ thống ổn định BIBO:* nếu tín hiệu vào bị chặn

  $|x(n)| < \infty$ thì tín hiệu ra cũng bị chặn $|y(n)| < \infty$
- *Hệ thống không ổn định*: không thoả tính chất trên

Cho $x(n) = \{ 0,1,\underline{2},3,4,0 \}$. Tìm

a. $y(n) = x(-n) + \delta(-n)$

b. $y(n)=x(n) + rect_3(-n)$

c. $y(n) = x(n).u(n)$

d. $y(n)=3x(n) + 2x(n -1)$

e. $y(n) = x(2n) . rect_3 (n-2)$

# Chương 2: TÍN HIỆU & HỆ THỐNG RỜI RẠC

2.1 Tín hiệu rời rạc

2.2 Hệ thống rời rạc

2.3 Hệ thống tuyến tính bất biến LTI

2.4 Phương trình sai phân mô tả hệ thống rời rạc

2.5 Cấu trúc hệ thống rời rạc

2.6 Tương quan giữa các tín hiệu

# 2.3 HỆ THỐNG TUYẾN TÍNH BẤT BiẾN

## 2.3.1 ĐÁP ỨNG XUNG CỦA HỆ THỐNG

### a. Biểu diễn tín hiệu theo các xung đơn vị

**Ví dụ:** Biểu diễn dãy $x(n)=\{1,2,\underset{\uparrow}{3},4,5\}$ theo các xung đơn vị

$$x(n)=1\delta(n+2)+2\delta(n+1)+3\delta(n)+4\delta(n-1)+5\delta(n-2)$$

$$x(n)=x(-2)\delta(n+2)+x(-1)\delta(n+1)+x(0)\delta(n)+x(1)\delta(n-1)+x(2)\delta(n-2)$$

**Tổng quát:**

$$\boxed{x(n)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}x(k)\delta(n-k)}$$

## b. Đáp ứng xung của hệ thống tuyến tính bất biến


- ***Đáp ứng xung*** của hệ thống là đáp ứng khi tín hiệu vào là dãy xung đơn vị, ký hiệu **h(n)**

Với $$x(n)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}x(k)\delta(n-k)$$ , suy ra:

$$y(n)=T\left[x(n)\right]=T\left[\sum_{k=-\infty}^{\infty}x(k)\delta(n-k)\right]=\sum_{k=-\infty}^{\infty}x(k)T\left[\delta(n-k)\right]$$

$$\boxed{y(n)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}x(k)h(n-k)=x(n)*h(n)}$$

Phép tổng chập 2 dãy x(n) và h(n)

$$x(n) \longrightarrow \boxed{h(n)} \longrightarrow y(n) = x(n) * h(n)$$

- ***h(n) đặc trưng hoàn toàn cho hệ thống trong miền n***

## c. Cách tìm tổng chập

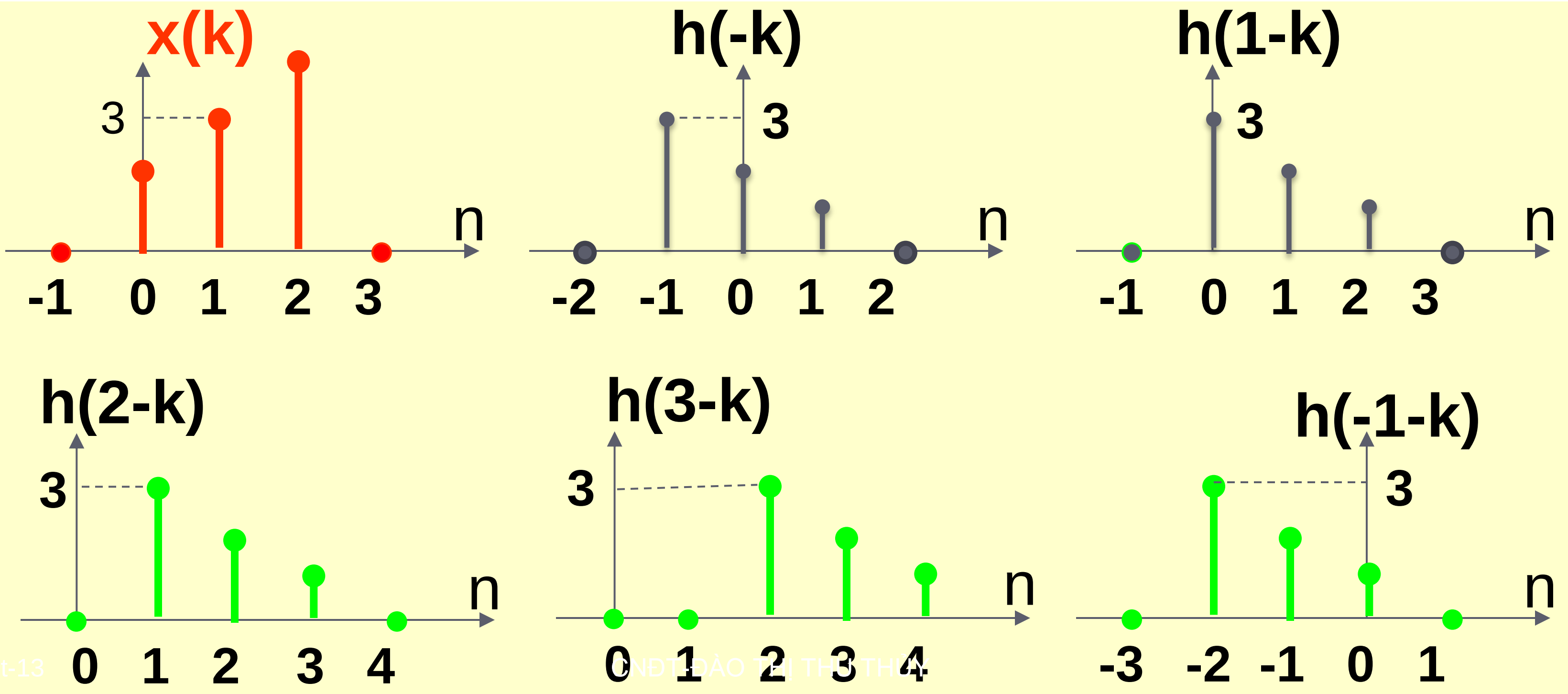
$$y(n) = x(n) * h(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)h(n-k)$$

- Đổi biến số n ->k: **x(k) & h(k)**
- Gấp h(k) qua trục tung, được **h(-k)**
- Dịch h(-k) đi n đơn vị: sang phải nếu **n>0**, sang trái nếu **n<0** được **h(n-k)**
- Nhân các mẫu 2 dãy x(k) và h(n-k) và cộng lại

**<u>Ví dụ</u>** Cho 2 dãy $x(n) = \{\underset{\uparrow}{2},3,4\}$ và $h(n) = \{1,\underset{\uparrow}{2},3\}$

Hãy tìm y(n) = x(n)*h(n)

- Đổi biến số n->k: $x(k) = \{\underset{\uparrow}{2},3,4\}$ và $h(k) = \{1,\underset{\uparrow}{2},3\}$
- Gập h(k) qua trục tung: $h(-k) = \{3,\underset{\uparrow}{2},1\}$
- Xác định h(n-k):



$$h(1-k)=\{\underset{\uparrow}{3},2,1\}$$
$$h(2-k)=\{\underset{\uparrow}{0},3,2,1\}$$
$$h(3-k)=\{\underset{\uparrow}{0},0,3,2,1\}$$
$$\ldots\ldots$$

**n>0** dịch sang phải

$$h(-1-k)=\{3,2,\underset{\uparrow}{1}\}$$
$$h(-2-k)=\{3,2,1,\underset{\uparrow}{0}\}$$
$$\ldots\ldots$$

**n<0** dịch sang trái

- Nhân các mẫu 2 dãy **x(k)** & **h(n-k)** và cộng lại được **y(n)**

$$y(0)=\sum_k x(k)h(0-k)=7$$
$$y(1)=\sum_k x(k)h(1-k)=16$$
$$y(2)=\sum_k x(k)h(2-k)=17$$
$$y(3)=\sum_k x(k)h(3-k)=12$$

$$\ldots\ldots$$
$$y(-1)=\sum_k x(k)h(-1-k)=2$$
$$y(-2)=\sum_k x(k)h(-1-k)=0$$
$$\ldots\ldots$$

$$\boxed{y(n)=\{2,\underset{\uparrow}{7},16,17,12\}}$$

## c. Cách tìm tổng chập (dạng bảng)

$$y(n) = \sum_{\substack{i,j \\ i+j=n}} h(i)x(j)$$

| | x(0) | x(1) | x(2) | x(3) | x(4) |
|---|---|---|---|---|---|
| h(0) | h(0) x(0) | h(0) x(1) | h(0) x(2) | h(0) x(3) | h(0) x(4) |
| h(1) | h(1)x(0) | h(1) x(1) | h(1) x(2) | h(1) x(3) | h(1) x(4) |
| h(2) | h(2)x(0) | h(2)x(1) | h(2) x(2) | h(2) x(3) | h(2) x(4) |
| h(3) | h(3)x(0) | h(3)x(1) | h(3) x(2) | h(3) x(3) | h(3) x(4) |

**Ví dụ** Cho 2 dãy $x(n) = \{\underset{\uparrow}{2}, 3, 4\}$ và $h(n) = \{1, \underset{\uparrow}{2}, 3\}$

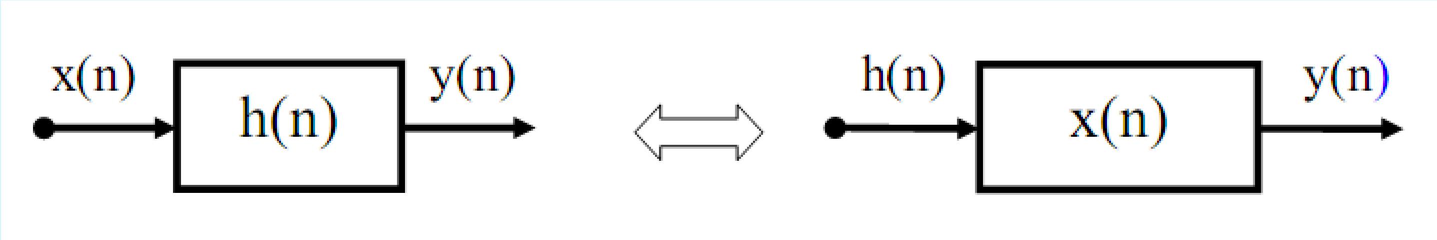
Hãy tìm y(n) = x(n)*h(n)

## d. Cách tìm tổng chập nhanh

## e. Dùng hàm trong Matlab conv(x,h)

## d. Các tính chất của tổng chập

- **Giao hoán:** **y(n) = x(n)*h(n)=h (n)*x(n)**



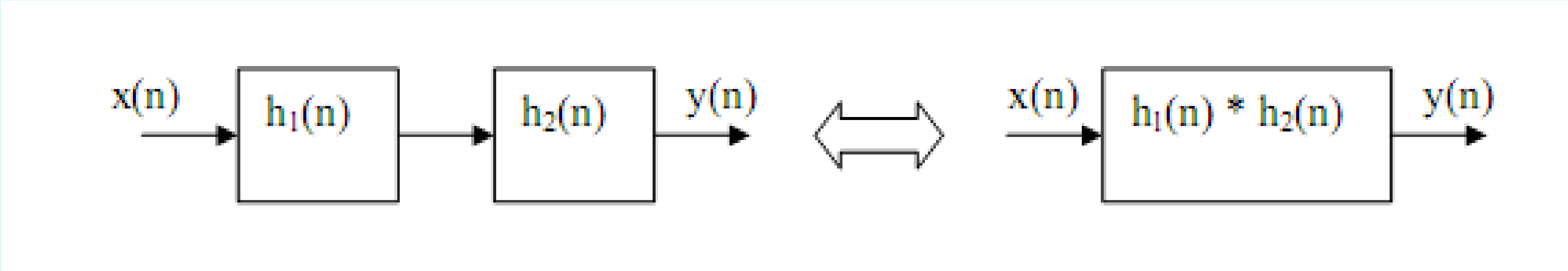

***Ví dụ:*** Cho 2 dãy: $x(n)=\{\underset{\uparrow}{2},3,4\}$ *và* $h(n)=\{1,\underset{\uparrow}{2},3\}$

Tìm
a. x(n)*h(n)
b. h(n)*x(n)

# d. Các tính chất của tổng chập

- **Kết hợp:** $y(n) = x(n)*[h_1(n)*h_2(n)]$

$$= [x(n)*h_1(n)]*h_2(n)$$




***Ví dụ*** Cho

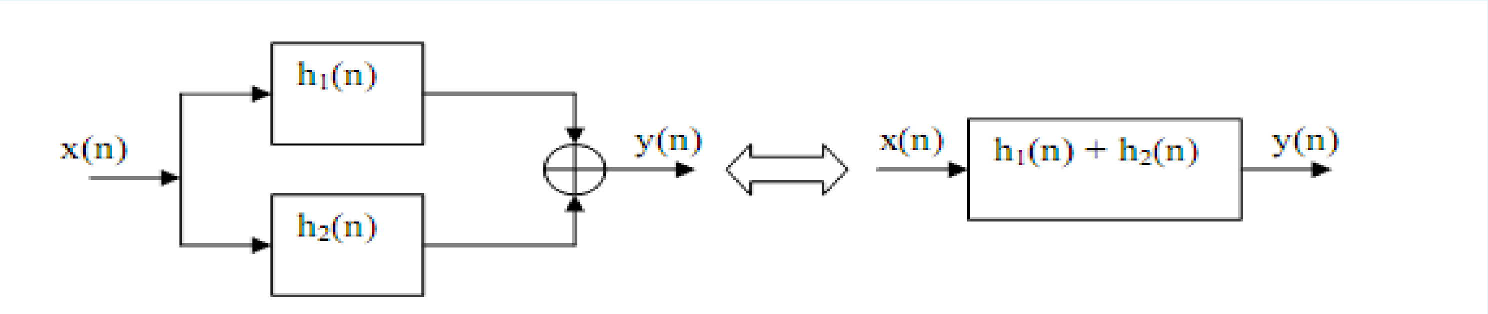
$$x(n)=\{\underset{\uparrow}{2},3,4\} \quad h_1(n)=\{1,\underset{\uparrow}{2},3\} \quad h_2(n)=\{0,\underset{\uparrow}{2},1\}$$

Tìm a. $x(n)*[h_1(n)*h_2(n)]$

b. $[x(n)*h_1(n)]*h_2(n)$

# d. Các tính chất của tổng chập

- **Phân phối:** $y(n) = x(n)*[h_1(n) + h_2(n)]$
  $= x(n)*h_1(n) + x(n)*h_2(n)$




***Ví dụ*** Cho

$$x(n) = \{\underset{\uparrow}{2}, 3, 4\} \quad h_1(n) = \{1, \underset{\uparrow}{2}, 3\} \quad h_2(n) = \{0, \underset{\uparrow}{2}, 1\}$$

Tìm a. **$x(n)*[h_1(n) + h_2(n)]$**

b. **$x(n)*h_1(n) + x(n)*h_2(n)$**

# 2.3.2 TÍNH NHÂN QUẢ & ỔN ĐỊNH CỦA HỆ TTBB

**Định lý 1:** Hệ thống TTBB là nhân quả $\Leftrightarrow$ **h(n)=0: n<0**

**Ví dụ:** Xét tính nhân quả các hệ thống cho bởi:

a) $y(n)=x(n-1)+2x(n-2)$ b) $y(n)=x(n+1)+x(n)+3x(n-1)$

Thay $\mathbf{x(n)=\delta(n)}$, ta được biểu thức **h(n)** các hệ:

a) $\mathbf{h(n)= \delta(n-1)+2\delta(n-2)}$

Do $h(n)=0$: $n<0$ -> *hệ nhân quả*

b) $\mathbf{h(n)=\delta(n+1)+ \delta(n)+3\delta(n-1)}$:

Do $h(-1)=1$ -> *hệ không nhân quả*

# 2.3.2 TÍNH NHÂN QUẢ & ỔN ĐỊNH CỦA HỆ TTBB

**Định lý 2:** Hệ thống TTBB là ổn định $\Leftrightarrow$ $\sum_{n=-\infty}^{\infty} |h(n)| < \infty$

**Ví dụ 1.3.4:** Xét tính ổn định của hệ thống: **h(n)=a$^n$u(n)**

$$S = \sum_{n-\infty}^{\infty} |h(n)| = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |a^n u(n)| = \sum_{n=0}^{\infty} |a|^n$$

- **|a|< 1 -> S=1/(1-|a|) :** hệ ổn định
- **|a|≥ 1 -> S=∞:** hệ không ổn định

# Bài tập

**1. Hệ thống cho bởi phương trình:**

$$y(n) = x(n) - 2x(n-1) + 3x(n-3)$$

**a. Hãy vẽ sơ đồ thực hiện hệ thống**

**b. Kiểm tra tính chất tuyến tính, bất biến của hệ thống**

**c. Từ phương trình tín hiệu vào ra tìm y(n) biết $x(n)= 2\delta(n)+ \delta(n-1) +4\delta(n-2)$**

**d. Tìm đáp ứng xung h(n) của hệ thống. Hệ thống có nhân quả, ổn định không?**

**e. Tìm $y(n)=x(n)*h(n)$ theo dạng bảng**

# Bài tập

**2. Hệ thống LTI nhân quả cho bởi phương trình:**

$$y(n) = 0.5y(n-1) + 2x(n)$$

**a. Hãy vẽ sơ đồ thực hiện hệ thống.**

**b. Tìm đáp ứng xung h(n) của hệ thống.**

**c. Hệ thống có ổn định không?**

# Chương 2: TÍN HIỆU & HỆ THỐNG RỜI RẠC

2.1 Tín hiệu rời rạc

2.2 Hệ thống rời rạc

2.3 Hệ thống tuyến tính bất biến LTI

2.4 Phương trình sai phân mô tả hệ thống rời rạc

2.5 Cấu trúc hệ thống rời rạc

2.6 Tương quan giữa các tín hiệu

# 2.4 PHƯƠNG TRÌNH SAI PHÂN MÔ TẢ HỆ THỐNG RỜI RẠC NHÂN QUẢ

## 2.4.1 PHƯƠNG TRÌNH SAI PHÂN TUYẾN TÍNH

$$\sum_{k=0}^{N} a_k(n)y(n-k) = \sum_{r=0}^{M} b_r(n)x(n-r)$$

Với: **N** – gọi là bậc của phương trình sai phân: N,M>0

**$a_k(n)$, $b_r(n)$** – các hệ số của phương trình sai phân

## 2.4.2 PHƯƠNG TRÌNH SAI PHÂN TUYẾN TÍNH HSH

$$\sum_{k=0}^{N} a_k y(n-k) = \sum_{r=0}^{M} b_r x(n-r)$$

Với: **$a_k$ , $b_r$** – không phụ thuộc vào biến số n

# 2.4.3 GiẢI PHƯƠNG TRÌNH SAI PHÂN TUYẾN TÍNH HSH

- Tìm nghiệm của PTSP thuần nhất: **$y_h(n)$**
- Tìm nghiệm riêng của PTSP: **$y_p(n)$**
- Nghiệm tổng quát của PTSP: **$y(n) = y_h(n) + y_p(n)$**

**a. Nghiệm của PTSP thuần nhất: $y_h(n)$**

Giả thiết $\alpha^n$ là nghiệm của PTSP thuần nhất:

$$\sum_{k=0}^{N} a_k y(n-k) = 0$$

Phương trình đặc trưng có dạng:

$$a_0\alpha^N + a_1\alpha^{N-1} + \cdots + a_{N-1}\alpha^1 + a_N = 0$$

## a. Nghiệm của PTSP thuần nhất (tt)

- Phương trình đặc trưng có nghiệm đơn $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_N$

$$y_h(n) = A_1\alpha_1^n + A_2\alpha_2^n + \cdots + A_N\alpha_N^n$$

- Phương trình đặc trưng có nghiệm $\alpha_1$ bội r

$$y_h(n) = (A_{10} + A_{11}n + \cdots + A_{1(r-1)}n^{r-1})\alpha_1^n + A_2\alpha_2^n + \cdots + A_N\alpha_N^n$$

## b. Nghiệm riêng của PTSP: $y_p(n)$

- Thường chọn $y_p(n)$ có dạng giống với **x(n)**

**<u>Ví dụ:</u>** Giải PTSP: $\mathbf{y(n)- 3y(n-1) + 2y(n-2) = x(n)}$ **(*)**
với $\mathbf{n \geq 0}$, biết $y(n)=0$: $n<0$ và $\mathbf{x(n)=3^n}$

- <u>Tìm nghiệm của PTSP thuần nhất</u> $\mathbf{y_h(n)}$

  $\mathbf{y_h(n)}$ là nghiệm của phương trình:

  $\mathbf{y(n) - 3y(n-1) + 2y(n-2) = 0}$

  Phương trình đặc tính: $\alpha^2 - 3\alpha + 2 = 0 \Rightarrow \alpha_1=1; \alpha_2=2$

$\Rightarrow \mathbf{y_h(n) = (A_1 1^n + A_2 2^n)}$

- <u>Tìm nghiệm riêng của PTSP</u> $\mathbf{y_p(n)}$

  Chọn $\mathbf{y_p(n)}$ có dạng $\mathbf{y_p(n)=B3^n}$ , thay vào PTSP **(*)** :

  $\mathbf{B3^n - 3B3^{n-1} + 2B3^{n-2} = 3^n \Rightarrow B = 9/2}$

- Nghiệm tổng quát của PTSP:

  $\mathbf{y(n) = y_h(n) + y_p(n) = (A_1 1^n + A_2 2^n) + 4.5\, 3^n}$

- Nghiệm tổng quát của PTSP:

  $\mathbf{y(n) = (A_1 1^n + A_2 2^n) + 4,5\ .3^n}$

  Dựa vào điều kiện đầu: y(n)=0: n<0:

  Từ: $\mathbf{y(n) = 3y(n-1) - 2y(n-2) + x(n)}$ với $\mathbf{x(n) = 3^n}$

  $$\left.\begin{array}{l} \Rightarrow \mathbf{y(0)=3y(-1)-2y(-2)+3^0=1=A_1+A_2+4,5} \\ \Rightarrow \mathbf{y(1)=3y(0)-2y(-1)+3^1=6=A_1+2A_2+4,5.3^1} \end{array}\right\} \begin{array}{l} \mathbf{A_1=0,5} \\ \mathbf{A_2=-4} \end{array}$$

  Vậy: $\boxed{\mathbf{y(n) = 0,5\ .1^n - 4.\ 2^n + 4,5\ .3^n}}$ $\mathbf{: n \geq 0}$

# Chương 2: TÍN HIỆU & HỆ THỐNG RỜI RẠC

# 2.5 CẤU TRÚC HỆ THỐNG RỜI RẠC

## 2.5.1 HỆ THỐNG ĐỆ QUI & KHÔNG ĐỆ QUI

### a. Hệ thống không đệ qui (FIR)

- ***Hệ thống không đệ qui*** là hệ thống đặc trưng bởi PTSP TTHSH bậc **N=0**

$$y(n) = \sum_{r=0}^{M} b_r x(n-r): \quad a_0 = 1$$

$$h(r) = b_r \Rightarrow y(n) = \sum_{r=0}^{M} h(r)x(n-r)$$

$$L[h(r)] = M + 1$$

- Hệ thống không đệ qui còn gọi là hệ thống có **đáp ứng xung độ dài hữu hạn – FIR** (Finite Impulse Response)

- Hệ thống không đệ qui luôn luôn ổn định do:

$$S = \sum_{r=0}^{\infty} \left| h(r) \right| = \sum_{r=0}^{M} \left| b_r \right| < \infty$$

## b. Hệ thống đệ qui (IIR)

- ***Hệ thống đệ qui*** là hệ thống đặc trưng bởi PTSP TTHSH bậc **N>0**

$$\sum_{k=0}^{N} a_k y(n-k) = \sum_{r=0}^{M} b_r x(n-r)$$

- Hệ thống đệ qui còn gọi là hệ thống có **đáp ứng xung độ dài vô hạn – IIR** (Infinite Impulse Response)
- Hệ thống đệ qui có thể **ổn định** hoặc **không ổn định**

**<u>Ví dụ</u>**: Xét tính ổn định của hệ thống cho bởi:

**y(n) - ay(n-1) = x(n)** biết y(n)=0:n<0

$$h(n) = y(n)\big|_{x(n)=\delta(n)} \Rightarrow h(n) = y(n) = \delta(n) + ah(n-1)$$

- **n=0 -> h(0) =δ(0) + ah(-1) = 1**
- **n=1 -> h(1)= δ(1) + ah(0) = a**
- **n=2 -> h(2)= δ(2) + ah(1) = a$^2$**
- **n=3 -> h(3)= δ(3) + ah(2) = a$^3$**

.............

$$\boxed{h(n) = a^n : n \geq 0}$$

$$S = \sum_{n=0}^{\infty} |h(n)| = \sum_{n=0}^{\infty} |a|^n :$$

- **/a/< 1 -> S=1/(1-/a/):** hệ ổn định
- **/a/≥ 1 ->S=∞:** hệ không ổn định

# 2.5.2 SƠ ĐỒ THỰC HIỆN HỆ THỐNG

## a. Các phần tử thực hiện hệ thống

- **Bộ trễ:** $x(n) \longrightarrow \boxed{Z^{-1}} \longrightarrow y(n)=x(n-1)$

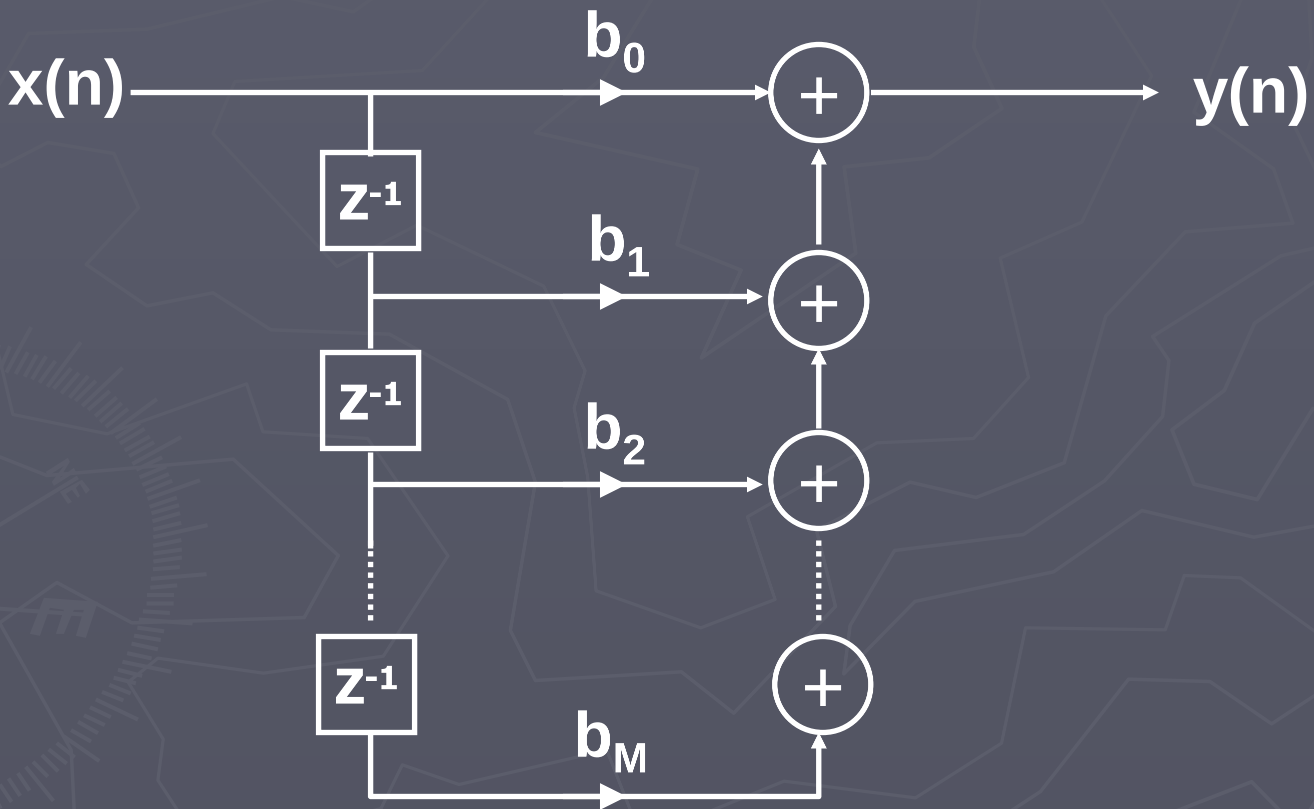
- **Bộ cộng:**

$$
\begin{matrix} x_1(n) \\ x_2(n) \\ \cdots\cdots \\ x_M(n) \end{matrix} \longrightarrow \boxed{+} \longrightarrow y(n) = \sum_{i=1}^{M} x_i(n)
$$

- **Bộ nhân:** $x(n) \xrightarrow{\ \alpha\ } y(n) = \alpha x(n)$

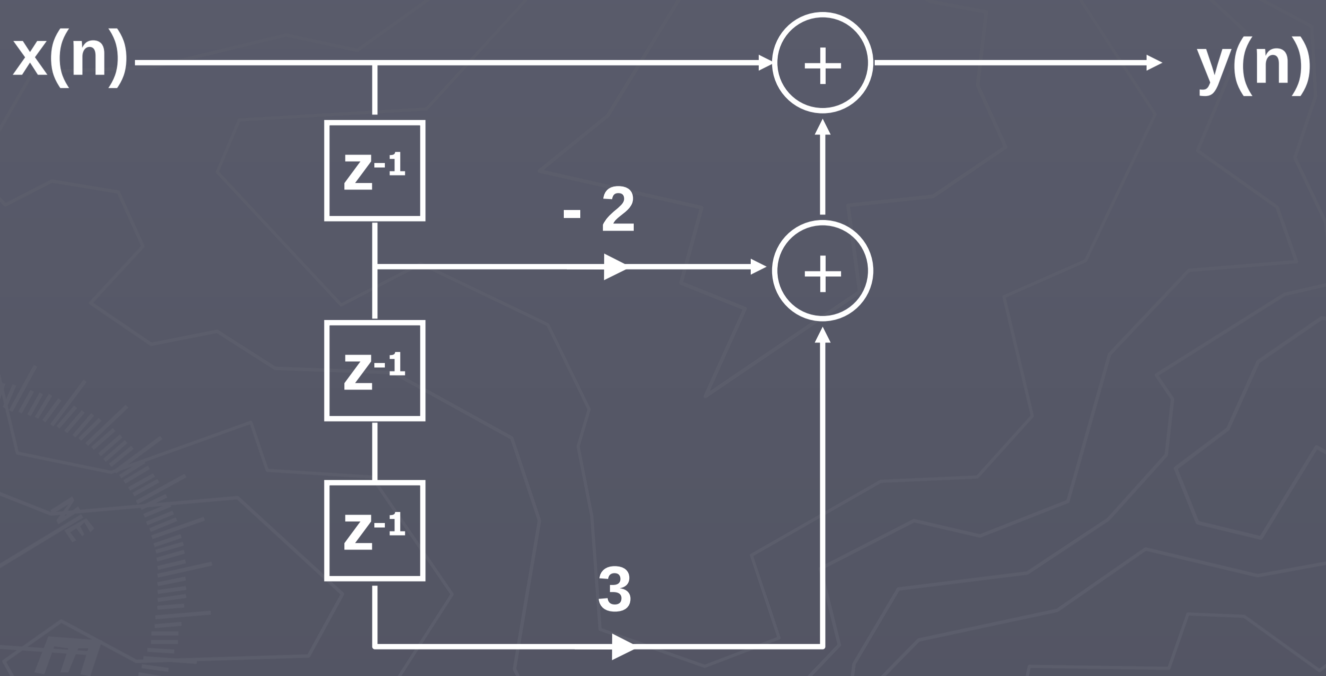
## b. Sơ đồ thực hiện hệ thống không đệ qui

$$y(n)=\sum_{r=0}^{M} b_r x(n-r) = b_0 x(n) + b_1 x(n-1) + \cdots + b_M x(n-M)$$



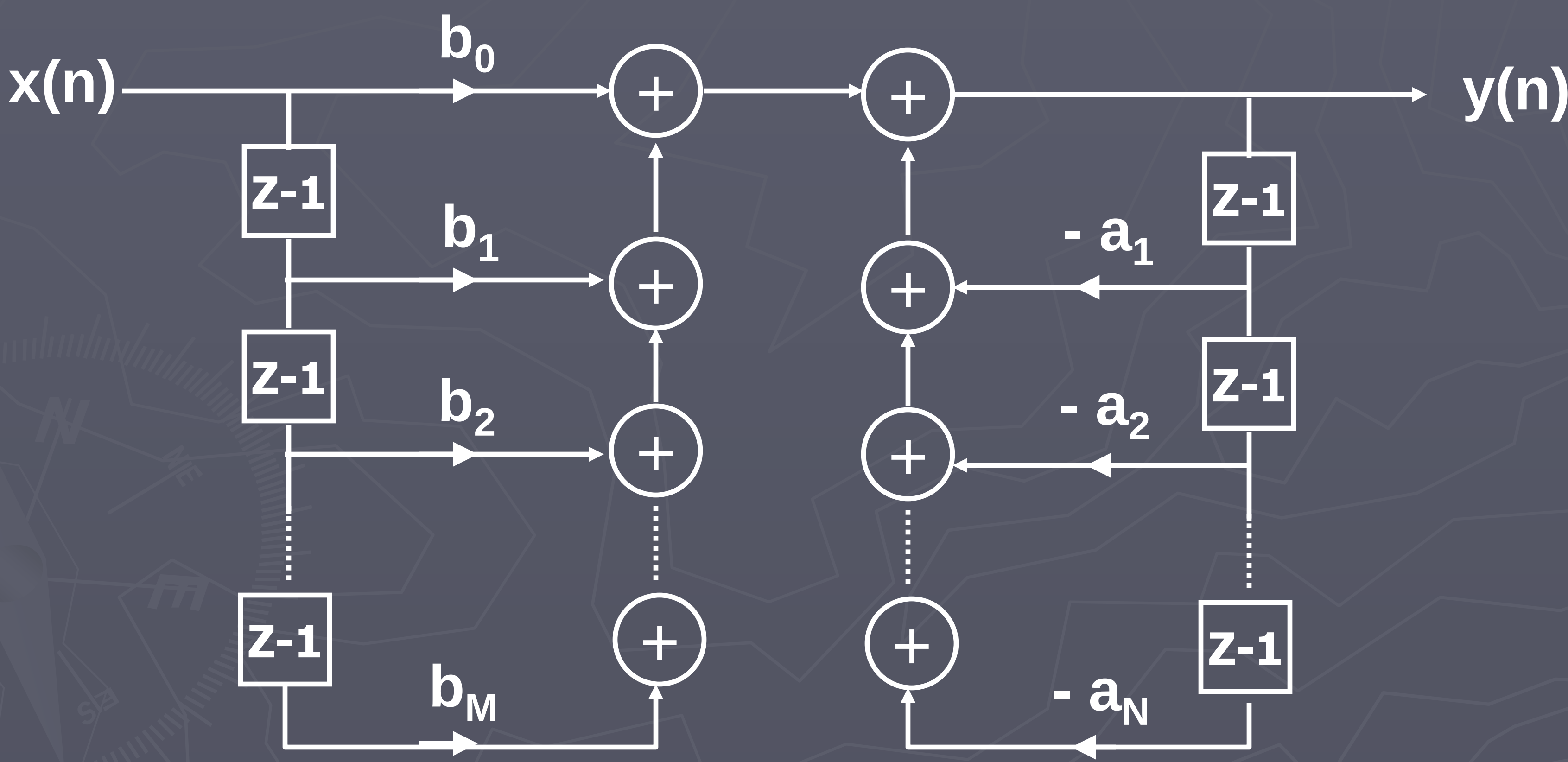
**<u>Ví dụ:</u>** Hãy vẽ sơ đồ thực hiện hệ thống cho bởi:

$$y(n) = x(n) - 2x(n-1) + 3x(n-3)$$



# c. Sơ đồ thực hiện hệ thống đệ qui

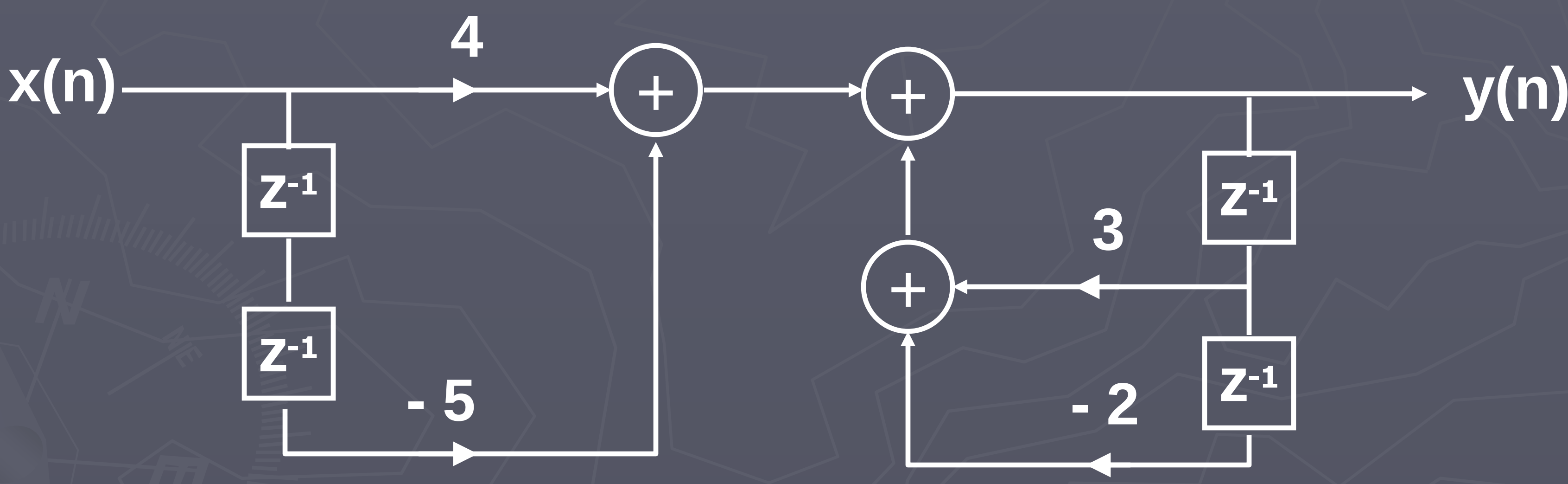
$$y(n) = \sum_{r=0}^{M} b_r x(n-r) - \sum_{k=1}^{N} a_k y(n-k) : \quad a_0 = 1$$



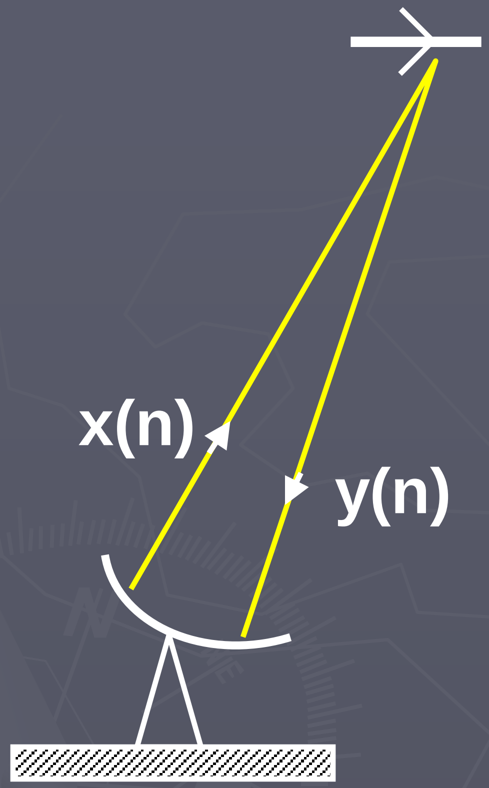
**Ví dụ:** Hãy vẽ sơ đồ thực hiện hệ thống cho bởi:

$$y(n) - 3y(n-1) + 2y(n-2) = 4x(n) - 5x(n-2)$$

$$y(n) = 4x(n) - 5x(n-2) + 3y(n-1) - 2y(n-2)$$



# 2.6 TƯƠNG QUAN CÁC TÍN HIỆU




- ✓ Nếu có mục tiêu:

  $y(n) = A\,x(n-n_0) + \gamma(n)$

- ✓ Nếu không có mục tiêu:

  $y(n) = \gamma(n)$

Với: A - hệ số suy hao

$\gamma(n)$ - nhiễu cộng

- ❖ Tương quan các tín hiệu dùng để so sánh các tín hiệu với nhau

# 2.6.1 TƯƠNG QUAN CHÉO 2 TÍN HIỆU

- Tương quan chéo 2 dãy năng lượng x(n) & y(n) định nghĩa:

$$R_{xy}(m) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)y(n-m)$$

*hay*

$$R_{xy}(m) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(m+n)y(n)$$

$$R_{yx}(m) = R_{xy}(-m)$$

Ví dụ: Tìm tương quan Rxy(m) biết:

x(n) = {0, <u>**0**</u>, 1, 2, 3,0} ;y(n) = {0, <u>**2**</u>, 4, 6, 0}

## 2.6.2 TỰ TƯƠNG QUAN TÍN HIỆU

- Tự tương quan của dãy x(n) được định nghĩa:

$$R_{xx}(m) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)x(n-m)$$

✓ Tự tương quan của dãy x(n) nhận giá trị lớn nhất tại n=0

Ví dụ: Tìm tự tương quan của các tín hiệu sau:

a. $x(n) = \{0, \underline{\mathbf{0}}, 1, 2, 3, 0\}$

b. $y(n) = \{0, \underline{\mathbf{2}}, 4, 6, 0\}$

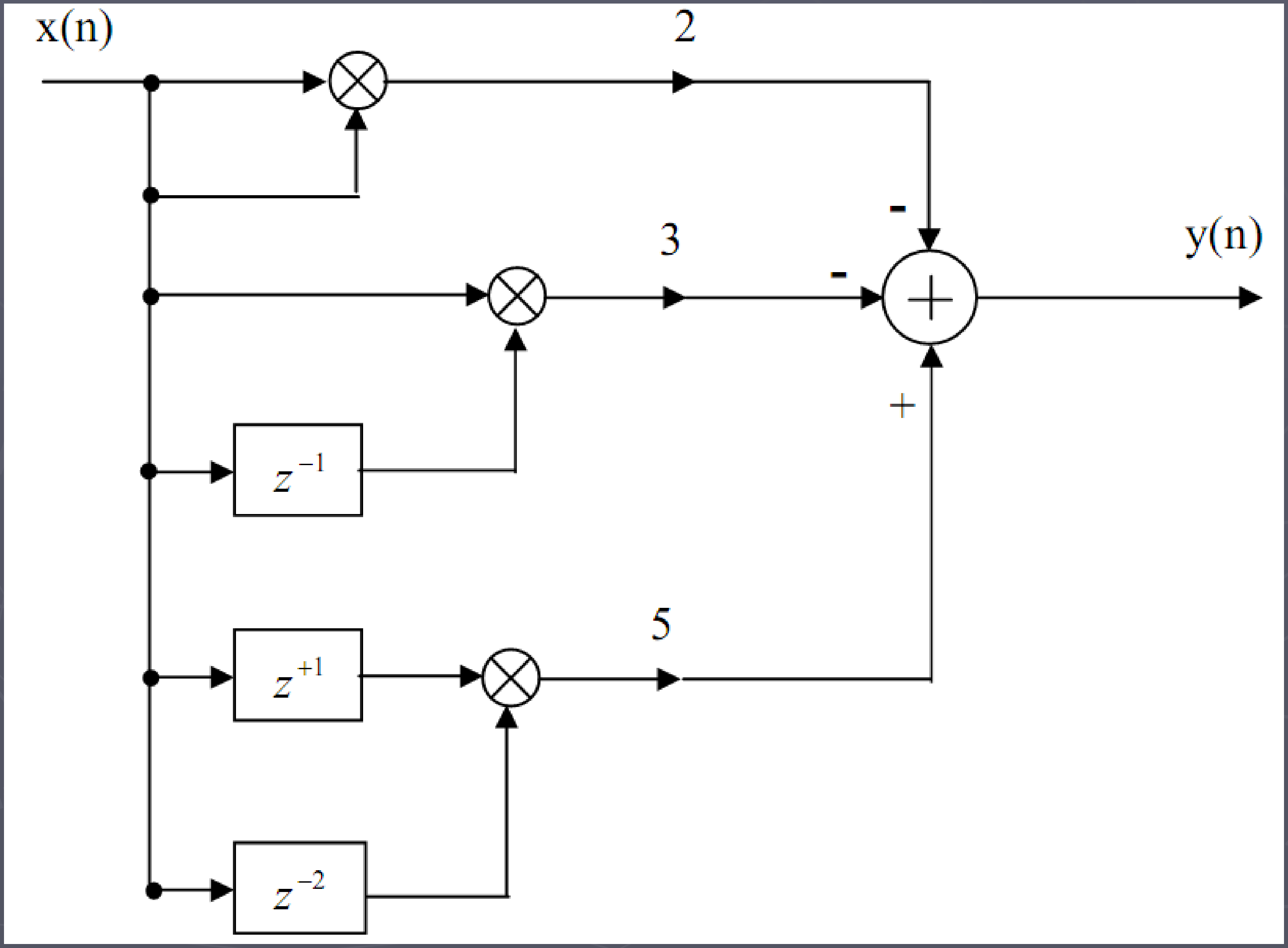
Bài tập: Vẽ sơ đồ khối của hệ thống mô tả bởi phương trình tín hiệu vào ra:

a. $y(n) = -2x^2(n) - 3x(n)x(n-1) + 5x(n+1)x(n-2)$

b. $y(n) = 1,23y(n-1) - 0,54y(n-2) + 2x(n) - 1,34x(n-1) - 5x(n-2)$

# Giải:

a. $y(n) = -2x^2(n) - 3x(n)x(n-1) + 5x(n+1)x(n-2)$



b. y(n) = 1,23y(n-1) – 0,54y(n-2) + 2x(n) – 1,34x(n-1) – 5x(n-2)