TRƯỜNG ĐẠI HỌC CÔNG NGHIỆP TP.HCM

XỬ LÝ SỐ TÍN HIỆU
Digital Signal Processing

Giảng viên: Ths. Đào Thị Thu Thủy

Chương 3:

TÍN HIỆU VÀ HỆ THỐNG TRONG MIỀN Z

Chương 3:TÍN HIỆU VÀ HỆ THỐNG TRONG MIỀN Z

3.1 BIẾN ĐỔI Z

3.2 BIẾN ĐỔI Z NGƯỢC

3.3 PHÂN TÍCH HỆ THỐNG LTI TRONG MIỀN Z

3.1 BIẾN ĐỔI Z

3.1.1 ĐỊNH NGHĨA BIẾN ĐỔI Z

3.1.2 MIỀN HỘI TỤ CỦA BIẾN ĐỔI Z (ROC)

3.1.3 CÁC TÍNH CHẤT BIẾN ĐỔI Z

3.1.4 GIẢN ĐỒ CỰC - KHÔNG

3.1 BIẾN ĐỔI Z

3.1.1 ĐỊNH NGHĨA BIẾN ĐỔI Z:

► **Biến đổi Z của dãy x(n):**

$$\boxed{X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) z^{-n}} \quad (*)$$

Trong đó Z biến số phức

Biểu thức (*) còn gọi là biến đổi Z hai bên

Biến đổi Z một bên dãy x(n):

$$\boxed{X^1(z) = \sum_{n=0}^{\infty} x(n) z^{-n}} \quad (**)$$

► Nếu x(n) nhân quả thì : (*) $\equiv$ (**)

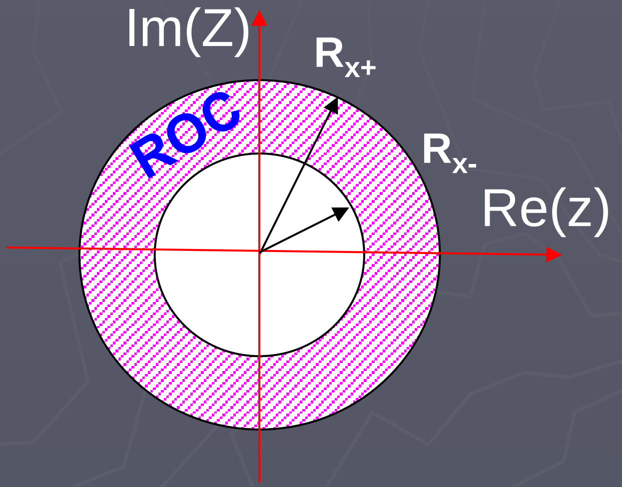
► **Ký hiệu:**

x(n) $\xleftrightarrow{Z}$ **X(z)** **hay** **X(z) = Z{x(n)}**

X(z) $\xleftrightarrow{Z^{-1}}$ **x(n)** **hay** **x(n) = Z-1{X(z)}**

3.1.2 MIỀN HỘI TỤ CỦA BIẾN ĐỔI Z (ROC)

- **Miền hội tụ của biến đổi Z** - ROC (Region Of Convergence) *là tập hợp tất cả các giá trị Z nằm trong mặt phẳng phức sao cho X(z) hội tụ.*



- Để tìm ROC của X(z) ta áp dụng tiêu chuẩn Cauchy

- **Tiêu chuẩn Cauchy:**

Một chuỗi có dạng:

$$\sum_{n=0}^{\infty} x(n) = x(0) + x(1) + x(2) + \cdots$$

hội tụ nếu:

$$\lim_{n\to\infty} |x(n)|^{\frac{1}{n}} < 1$$

Ví dụ 3.1: Tìm biến đổi Z & ROC của các tín hiệu hữu hạn sau:

$$X(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(n)z^{-n}$$

(a) $x_1(n)=\{\underset{\uparrow}{1},2,5,7,0,1\}$

(b) $x_2(n)=\{1,2,\underset{\uparrow}{5},7,0,1\}$

(c) $x_3(n)=\{\underset{\uparrow}{0},0,1,2,5,7,0,1\}$

(d) $x_4(n)=\{2,4,\underset{\uparrow}{5},7,0,1\}$

(e) $x_5(n)=\delta(n)$

(f) $x_6(n)=\delta(n-k),\ k>0$

(g) $x_7(n)=\delta(n+k),\ k>0$

Ví dụ 3.2: Tìm biến đổi Z & ROC của: $x(n) = a^n u(n)$

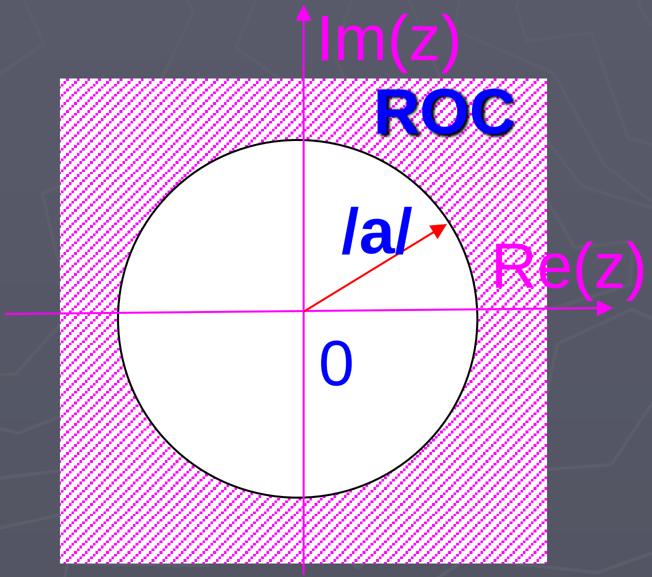
Giải:

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) z^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[a^n u(n)\right] z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} a^n . z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(az^{-1}\right)^n$$

Theo tiêu chuẩn Cauchy,

X(z) sẽ hội tụ:

$$X(z) = \frac{1}{1 - az^{-1}}$$



Nếu: $$\lim_{n\to\infty}\left(\left|az^{-1}\right|^n\right)^{1/n} < 1 \Leftrightarrow |z| > |a|$$

Vậy: $$\boxed{X(z) = \frac{1}{1 - az^{-1}}; \mathrm{ROC}: |Z| > |a|}$$

Bài tập 1

- 1. Tìm biến đổi Z & ROC của:

$$a.\quad x(n) = (2)^{n} u(n)$$

$$b.\quad x(n) = (2)^{-n} u(n)$$

$$c.\quad x(n) = (-2)^{n} u(n)$$

$$d.\quad x(n) = (-2)^{-n} u(n)$$

<u>Ví dụ 3.3</u>: Tìm biến đổi Z & ROC của: $x(n) = -a^n u(-n-1)$

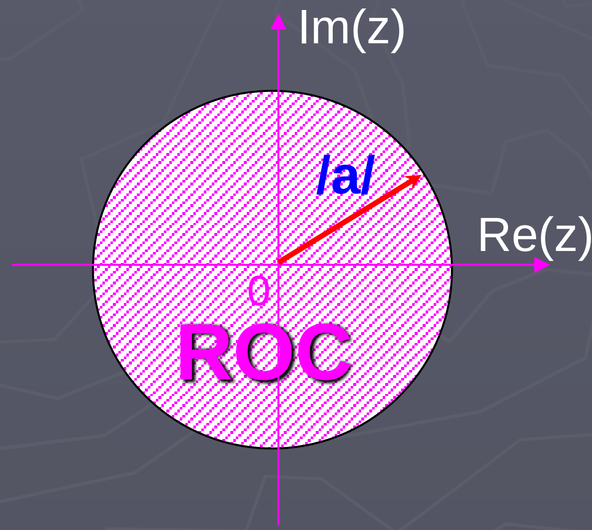
<u>Giải:</u>

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) z^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[-a^n u(-n-1)\right] z^{-n} = -\sum_{n=-\infty}^{-1} a^n . z^{-n}$$

$$= -\sum_{m=1}^{\infty} \left(a^{-1} z\right)^{m} = -\sum_{m=0}^{\infty} \left(a^{-1} z\right)^{m} + 1$$

Theo tiêu chuẩn Cauchy,

X(z) sẽ hội tụ:



$$X(z) = -\sum_{m=0}^{\infty} \left(a^{-1} z\right)^{n} + 1 = \boxed{\frac{1}{1 - a z^{-1}}}$$

Nếu: $\lim_{n\to\infty} \left(\left|a^{-1} z\right|^{n}\right)^{1/n} < 1 \Leftrightarrow \boxed{|z| < |a|}$

Bài tập 2

- 1. Tìm biến đổi Z & ROC của:

$$a.\quad x(n) = -(3)^{n} u(-n-1)$$

$$b.\quad x(n) = -(3)^{-n} u(-n-1)$$

$$c.\quad x(n) = -(-3)^{n} u(-n-1)$$

$$d.\quad x(n) = -(-3)^{-n} u(-n-1)$$

3.1.3 CÁC TÍNH CHẤT BIẾN ĐỔI Z

a) Tuyến tính

- Nếu: $\begin{cases} x_1(n) \xleftrightarrow{Z} X_1(z) \quad : \mathrm{ROC} = \mathrm{R}_1 \\ x_2(n) \xleftrightarrow{Z} X_2(z) \quad : \mathrm{ROC} = \mathrm{R}_2 \end{cases}$
- Thì: $a_1 x_1(n) + a_2 x_2(n) \xleftrightarrow{Z} a_1 X_1(z) + a_2 X_2(z)$

ROC chứa $\mathbf{R_1 \cap R_2}$

Ví dụ 3.4: Tìm biến đổi Z & ROC của:

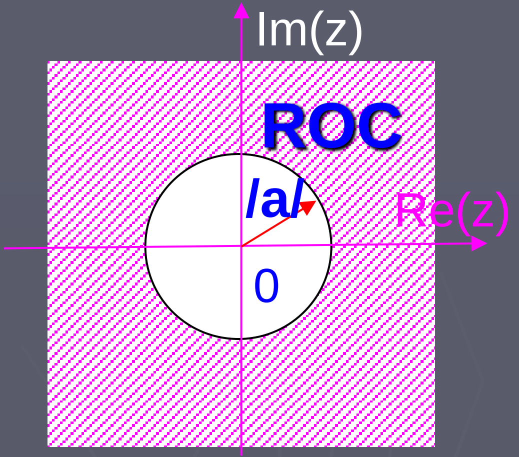
$$x(n) = a^n u(n) - b^n u(-n-1)$$ với $|a| < |b|$

Giải:

Theo ví dụ 3.2 và 3.3, ta có:

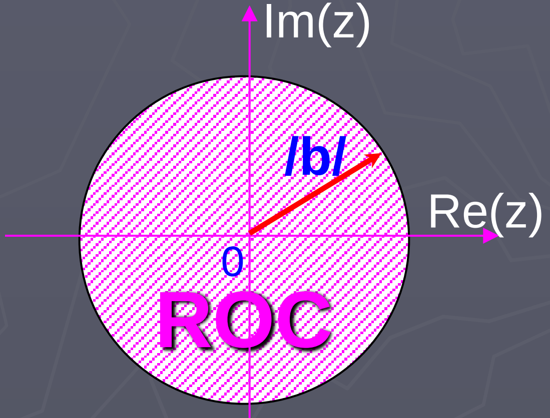
$$a^n u(n) \xleftrightarrow{Z} \frac{1}{1-az^{-1}}$$

$$R_1 : |z| > |a|$$



$$-b^n u(-n-1) \xleftrightarrow{Z} \frac{1}{1-bz^{-1}}$$

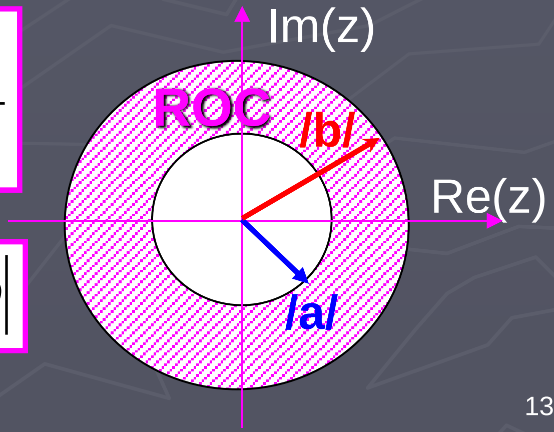
$$R_2 : |z| < |b|$$



Áp dụng tính chất tuyến tính, ta được:

$$a^n u(n) - b^n u(-n-1) \xleftrightarrow{Z} \boxed{\frac{1}{1-az^{-1}} + \frac{1}{1-bz^{-1}}}$$

$$\boxed{R = R_1 \cap R_2 : |a| < |z| < |b|}$$



Bài tập 3

- 1. Tìm biến đổi Z & ROC của:

$$a.\quad x(n) = 3(2^n)u(n) - 4(3^n)u(-n-1)$$

$$b.\quad x(n) = 3(2^n)u(n) + 4(3^n)u(-n-1)$$

$$c.\quad x(n) = 3(5^n)u(n) + 4(3^n)u(-n-1)$$

$$d.\quad x(n) = [3(2^n) - 4(3^n)]u(n)$$

$$e.\quad x(n) = [3(2^n) - 4(3^n)]u(-n-1)$$

$$f.\quad x(n) = \delta(n) - 4(3^n)u(-n-1)$$

$$g.\quad x(n) = 5\delta(n-1) - 4(3^n)u(n)$$

$$h.\quad x(n) = 3\delta(n+2) + 5\delta(n-1) - 4(3^n)u(n)$$

b) Dịch theo thời gian

Nếu: $x(n) \xleftrightarrow{Z} X(z) \quad : \mathrm{ROC} = \mathrm{R}$

Thì: $x(n-n_0) \xleftrightarrow{Z} Z^{-n_0} X(z) \quad : \mathrm{ROC} = \mathrm{R'}$

Với: $\mathrm{R'} = \begin{cases} \mathrm{R} \text{ trừ giá trị } z=0, \text{ khi } n_0>0 \\ \mathrm{R} \text{ trừ giá trị } z=\infty, \text{ khi } n_0<0 \end{cases}$

Ví dụ 3.5: Tìm biến đổi Z & ROC của: $x(n) = a^n u(n-1)$

Giải:

Theo ví dụ 3.2: $a^n u(n) \xleftrightarrow{Z} \dfrac{1}{1-az^{-1}}; \mathrm{ROC}: |z| > |a|$

Vậy: $x(n) = a^n u(n-1) = a.a^{n-1} u(n-1)$ $\xleftrightarrow{Z} \dfrac{az^{-1}}{1-az^{-1}} : |z| > |a|$

Bài tập 4

- 1. Tìm biến đổi Z & ROC của:

$$a. \qquad x(n) = 3(2)^n u(n+2)$$

c) Nhân với hàm mũ aⁿ

Nếu: $x(n) \xleftrightarrow{Z} X(z) \quad : \mathrm{ROC} = \mathrm{R}$

Thì: $a^n x(n) \xleftrightarrow{Z} X(a^{-1}z) \quad : \mathrm{ROC} = |a|\mathrm{R}$

Ví dụ 3.6: Xét biến đổi Z & ROC của:

$x_1(n) = a^n u(n)$ và $x_2(n) = u(n)$

Giải:

$$\boldsymbol{x(n) = u(n) \xleftrightarrow{Z} X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} u(n) z^{-n} = \frac{1}{1 - z^{-1}}; R: |z| > 1}$$

$$\boldsymbol{a^n x(n) = a^n u(n) \xleftrightarrow{Z} X(a^{-1}z) = \frac{1}{1 - az^{-1}}; R': |z| > |a|}$$

d) Đạo hàm X(z) theo z

Nếu: $x(n) \xleftrightarrow{Z} X(z) \quad : \mathrm{ROC} = \mathrm{R}$

Thì: $nx(n) \xleftrightarrow{Z} -z\dfrac{dX(z)}{dz} \quad : \mathrm{ROC} = \mathrm{R}$

Ví dụ 3.7: Tìm biến đổi Z & ROC của: $g(n) = na^n u(n)$

Giải:

Theo ví dụ

$$x(n) = a^n u(n) \xleftrightarrow{Z} X(z) = \frac{1}{1-az^{-1}}; \mathrm{ROC}: |z| > |a|$$

$$\Rightarrow g(n) = nx(n) \xleftrightarrow{Z} G(z) = -z\frac{dX(z)}{dz} = \frac{az^{-1}}{(1-az^{-1})^2} : |z| > |a|$$

e) Đảo biến số

Nếu: $x(n) \xleftrightarrow{Z} X(z) \quad : \mathrm{ROC} = \mathrm{R}$

Thì: $x(-n) \xleftrightarrow{Z} X(z^{-1}) \quad : \mathrm{ROC} = 1/R$

- **Ví dụ 3.8**: Tìm biến đổi Z & ROC của: $y(n) = (1/a)^n u(-n)$
- **Giải:** Theo ví dụ 3.2:

$$x(n) = a^n u(n) \xleftrightarrow{Z} X(z) = \frac{1}{1 - az^{-1}}; \mathrm{ROC}: |z| > |a|$$

$$\Rightarrow y(n) = (1/a)^n u(-n) = a^{-n} u(-n) = x(-n)$$

Áp dụng tính chất đảo biến số:

$$\mathrm{Y(z) = X(z^{-1}) = \frac{1}{1 - a\left(z^{-1}\right)^{-1}} = \boxed{\frac{1}{1 - az}; ROC: |z| < 1/|a|}}$$

f) Liên hiệp phức

Nếu: $x(n) \xleftrightarrow{Z} X(z) \quad : \mathrm{ROC} = \mathrm{R}$

Thì: $x^*(n) \xleftrightarrow{Z} X^*(z^*) \quad : \mathrm{ROC} = R$

g) Tích 2 dãy

Nếu: $\begin{cases} x_1(n) \xleftrightarrow{Z} X_1(z) \quad : \mathrm{ROC} = \mathrm{R}_1 \\ x_2(n) \xleftrightarrow{Z} X_2(z) \quad : \mathrm{ROC} = \mathrm{R}_2 \end{cases}$

Thì: $x_1(n)x_2(n) \xleftrightarrow{Z} \dfrac{1}{2\pi} \oint_c X_1(v) X_1\left(\dfrac{z}{v}\right) v^{-1}\, \mathrm{d}v : \mathrm{ROC} = \mathrm{R}_1 \cap \mathrm{R}_2$

h) Định lý giá trị đầu

Nếu x(n) nhân quả thì: $x(0) = \lim_{Z \to \infty} \mathrm{X(z)}$

- **Ví dụ 3.9**: Tìm **x(0)**, biết $\mathbf{X(z)=e^{1/z}}$ và x(n) nhân quả
- **Giải:**

Theo định lý giá trị đầu:

$$x(0) = \lim_{Z\to\infty} X(z) = \lim_{Z\to\infty} e^{1/z} = 1$$

i) Tổng chập 2 dãy

Nếu:

$$\begin{cases} x_1(n) \xleftrightarrow{Z} X_1(z) & : ROC = R_1 \\ x_2(n) \xleftrightarrow{Z} X_2(z) & : ROC = R_2 \end{cases}$$

Thì: $x_1(n) * x_2(n) \xleftrightarrow{Z} X_1(z)X_2(z)$;ROC có chứa $R_1 \cap R_2$

► **Ví dụ 3.10** : Tìm y(n) = x(n)*h(n), biết:

$$x(n) = (0.5)^n u(n) \qquad h(n) = -2^n u(-n-1)$$

► **Giải** :

$$x(n) = (0.5)^n u(n) \xleftrightarrow{Z} X(z) = \frac{1}{1-0.5z^{-1}}; ROC: |z| > 0.5$$

$$h(n) = -2^n u(-n-1) \xleftrightarrow{Z} H(z) = \frac{1}{1-2z^{-1}}; ROC: |z| < 2$$

$$Y(z) = X(z)H(z) = \frac{1}{(1-0.5z^{-1})} \cdot \frac{1}{(1-2z^{-1})}; ROC: 0,5 < |z| < 2$$

Z^{-1} $\updownarrow$

$$= -\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{(1-0.5z^{-1})} + \frac{4}{3} \cdot \frac{1}{(1-2z^{-1})}; ROC: 0,5 < |z| < 2$$

$$\boxed{y(n) = x(n) * h(n) = -\frac{1}{3}(0.5)^n u(n) - \frac{4}{3} 2^n u(-n-1)}$$

TỔNG KẾT CÁC TÍNH CHẤT BIẾN ĐỔI Z

$x(n)$	$X(z)$	R
$a_1x_1(n)+a_2x_2(n)$	$a_1X_1(z)+a_2X_2(z)$	Chứa $\mathbf{R_1} \cap \mathbf{R_2}$
$x(n-n_0)$	$Z^{-n0}\, X(z)$	R’
$a^n\, x(n)$	$X(a^{-1}z)$	R
$nx(n)$	$-z\, dX(z)/dz$	R
$x(-n)$	$X(z^{-1})$	1/R
$x^*(n)$	$X^*(z^*)$	R
$x_1(n)x_2(n)$	$\frac{1}{2\pi j}\oint_C X_1(v)X_2\left(\frac{z}{v}\right)v^{-1}dv$	$R_1 \cap R_2$
$x(n)$ nhân quả	$x(0)=\lim X(z \to \infty)$	
$x_1(n)*x_2(n)$	$X_1(z)X_2(z)$	Chứa $\mathbf{R_1} \cap \mathbf{R_2}$

BIẾN ĐỔI Z MỘT SỐ DÃY THÔNG DỤNG

x(n)	X(z)	ROC
$\delta(n)$	1	$\forall z$
$u(n)$	$\dfrac{1}{1-z^{-1}}$	$\|z\| > 1$
$-u(-n-1)$		$\|z\| < 1$
$a^n u(n)$	$\dfrac{1}{1-az^{-1}}$	$\|z\| > \|a\|$
$-a^n u(-n-1)$		$\|z\| < \|a\|$
$na^n u(n)$	$\dfrac{az^{-1}}{(1-az^{-1})^2}$	$\|z\| > \|a\|$
$-na^n u(-n-1)$		$\|z\| < \|a\|$
$\cos(\omega_o n)u(n)$	$(1-z^{-1}\cos\omega_o)/(1-2z^{-1}\cos\omega_o+z^{-2})$	$\|z\| > 1$
$\sin(\omega_o n)u(n)$	$(z^{-1}\sin\omega_o)/(1-2z^{-1}\cos\omega_o+z^{-2})$	$\|z\| > 1$

3.1.4 GIẢN ĐỒ CỰC - KHÔNG

- **Điểm cực** của X(z) là các giá trị z tại đó X(z) = ∞,
- **Điểm không** của X(z) là các giá trị z tại đó X(z) = 0.

$$X(z) = \frac{D(z)}{B(z)} = \frac{G(z-z_1)(z-z_2)(z-z_3)...(z-z_L)}{(z-p_1)(z-p_2)(z-p_3)...(z-p_M)} = G\frac{\prod_{k=1}^{L}(z-z_k)}{\prod_{k=1}^{M}(z-p_k)}$$

•G là độ lợi
•z1, z2, z3,… được gọi là các điểm không (zero)
•p1, p2, p3,… là các điểm cực (pole)

•L là bậc của đa thức tử số;
•M là bậc của đa thức mẫu.
• X(z) là hàm hữu tỉ đúng khi L≤ M

3.1.4 GIẢN ĐỒ CỰC - KHÔNG

- Khi các tín hiệu x(n) hay đáp ứng xung h(n) là thực (có trị số thực), các không và các cực là thực hoặc là các đôi liên hiệp phức.
- Để biểu diễn trên đồ thị, điểm cực được đánh dấu bằng x và điểm không được đánh dấu bằng o.

Ví dụ 3.11: Xác định điểm cực và điểm không của tín hiệu

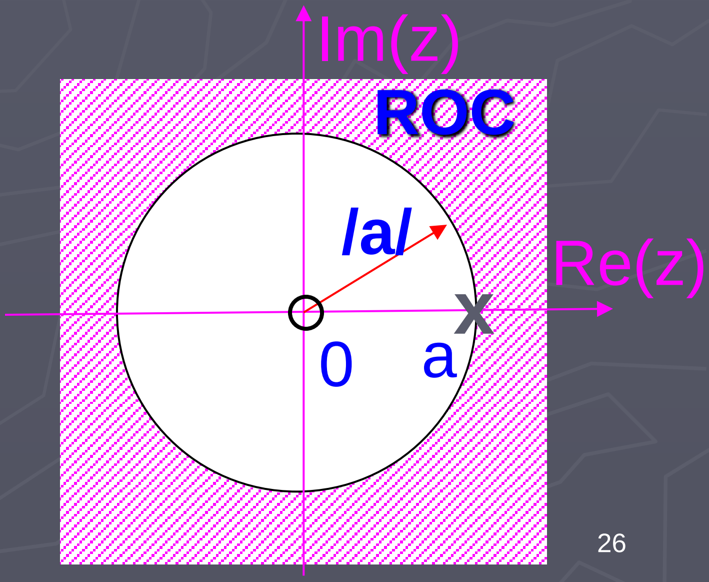
$x(n) = a^n u(n),\ a > 0$

$$X(z) = \frac{1}{1 - az^{-1}} = \frac{z}{z - a}$$

ROC : |z| > a

$\Rightarrow$ X(z) có một điểm cực $p_1 = a$

$\Rightarrow$ và một điểm không $z_1 = 0$



Chương 3: BIẾN ĐỔI Z VÀ ỨNG DỤNG VÀO HỆ THỐNG LTI RỜI RẠC

3.1 BIẾN ĐỔI Z

3.2 BIẾN ĐỔI Z NGƯỢC

3.3 PHÂN TÍCH HỆ THỐNG LTI TRONG MIỀN Z

3.2 BIẾN ĐỔI Z NGƯỢC

3.2.1 ĐỊNH NGHĨA BIẾN ĐỔI Z NGƯỢC

3.2.2 PHƯƠNG PHÁP THẶNG DƯ

3.2.3 PHƯƠNG PHÁP KHAI TRIỂN THÀNH CHUỖI LUỸ THỪA

3.2.4 PHƯƠNG PHÁP KHAI TRIỂN PHÂN SỐ TỪNG PHẦN

3.2 BIẾN ĐỔI Z NGƯỢC

3.2.1 ĐỊNH NGHĨA BIẾN ĐỔI Z NGƯỢC

$$x(n) = \frac{1}{2\pi j}\oint_C X(z)z^{n-1}dz \quad (*)$$

Với **C** - đường cong khép kín bao quanh gốc tọa độ trong mặt phẳng phức, nằm trong miền hội tụ của X(z), theo chiều (+) ngược chiều kim đồng hồ

- ✓ Trên thực tế, biểu thức (*) ít được sử dụng do tính chất phức tạp của phép lấy tích phân vòng

- *Các phương pháp biến đổi Z ngược:*
  - ***Thặng dư***
  - ***Khai triển thành chuỗi luỹ thừa***
  - ***Phân tích thành tổng các phân thức tối giản***

3.2.2 PHƯƠNG PHÁP THẶNG DƯ

a) Khái niệm thặng dư của 1 hàm tại điểm cực:

- Thặng dư tại điểm cực p_i bội **r** của **F(z)** được định nghĩa:

$$\operatorname{Res}\left[F(z)\right]_{Z=p_i} = \frac{1}{(r-1)!}\frac{d^{(r-1)}}{dz^{(r-1)}}\left[F(z)(z-p_i)^r\right]_{Z=p_i}$$

- Thặng dư tại điểm cực đơn p_i của **F(z)** được định nghĩa:

$$\operatorname{Res}\left[F(z)\right]_{Z=p_i} = \left[F(z)(z-p_i)\right]_{Z=p_i}$$

b) Phương pháp:

- Theo lý thuyết thặng dư, biểu thức biến đổi Z ngược theo tích phân vòng (*) được xác định bằng tổng các thặng dư tại tất cả các điểm cực của hàm $\mathbf{X(z)z^{n-1}}$:

$$x(n) = \frac{1}{2\pi j}\oint_C X(z)z^{n-1}dz = \sum_i \mathrm{Res}\left[X(z)z^{n-1}\right]_{Z=p_i} \quad (*)$$

Trong đó:

- p_i – các điểm cực của $X(z)z^{n-1}$ nằm trong đường cong C
- $\mathbf{Res[X(z)z^{n-1}]_{z=pi}}$ - thặng dư của $X(z)z^{n-1}$ tại điểm cực z_{ci}
- ***Tổng cộng các thặng dư tại tất cả các điểm cực, ta được*** **x(n)**

Ví dụ 3.12 Tìm biến đổi Z ngược của:

$$X(z) = \frac{z}{(z-2)}$$

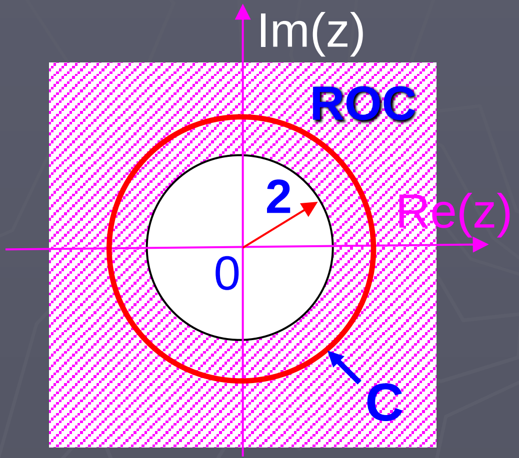
Giải:

Thay X(z) vào (*), ta được

$$x(n) = \frac{1}{2\pi j}\oint_C X(z)z^{n-1}dz = \frac{1}{2\pi j}\oint_C \frac{z}{(z-2)} z^{n-1}dz = \sum \mathrm{Res}\left[\frac{z^n}{(z-2)}\right]$$

- **Chọn C là đường cong khép kín nằm bên ngoài vòng tròn có bán kính là 2**

- **n≥0** $X(z)z^{n-1} = \dfrac{z^n}{(z-2)}$ có 1 điểm cực đơn $p_1=2$



Thặng dư tại $p_1=2$:

$$\text{Res}\left[\frac{z^n}{(z-2)}\right]_{Z=2} = \left[\frac{z^n}{(z-2)}(z-2)\right]_{Z=2} = 2^n$$

- **n<0:** $X(z)z^{n-1} = \dfrac{1}{(z-2)z^{-n}} = \dfrac{1}{(z-2)z^m}$ $p_1=2$ đơn, $p_2=0$ bội m

Với: $p_1=2$ $\text{Res}\left[\dfrac{1}{(z-2)z^m}\right]_{Z=2} = \left[\dfrac{1}{(z-2)z^m}(z-2)\right]_{Z=2} = \dfrac{1}{2^m}$

Với: $p_2=0$ bội m:

$$\mathrm{Res}\left[\frac{1}{(z-2)z^m}\right]_{Z=0} = \frac{1}{(m-1)!}\frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}}\left[\frac{1}{(z-2)z^m}z^m\right]_{Z=0}$$

$$=\frac{1}{(m-1)!}\left[\frac{(m-1)!(-1)^{m-1}}{(-2)^m}\right] = -\frac{1}{2^m}$$

Vậy, với **n<0:** $$\sum \mathrm{Res}\left[\frac{z^n}{(z-2)}\right] = \frac{1}{2^m} - \frac{1}{2^m} = 0$$

suy ra $\boxed{x(n) = 2^n : n \geq 0}$ hay $\boxed{x(n) = 2^n u(n)}$

3.2.3 PHƯƠNG PHÁP KHAI TRIỂN THÀNH CHUỖI LUỸ THỪA

Giả thiết **X(z)** có thể khai triển: $$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n z^{-n} \qquad (*)$$

Theo định nghĩa biến đổi Z $$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) z^{-n} \qquad (**)$$

Đồng nhất (*) & (**), rút ra: $$x(n) = a_n$$

Ví dụ3.13: : Tìm x(n) biết: $$X(z) = (z^2 + 1)(1 - 2z^{-1} + 3z^{-2})$$

Giải:

$$ROC : 0 < |z| < \infty$$

Khai triển X(z) ta được:

$$X(z) = z^2 - 2z + 4 - 2z^{-1} + 3z^{-2} = \sum_{n=-2}^{2} x(n) z^{-n}$$

Suy ra: $$x(n) = \{1, -2, \underset{\uparrow}{4}, -2, 3\}$$

Ví dụ 3.14: Tìm x(n) biết:

$$X(z) = \frac{1}{1-2z^{-1}} : |z| > 2$$

Giải:

Do ROC của X(z) là **/z/>2**, nên **x(n)** sẽ là dãy nhân quả và sẽ được khai triển thành chuỗi có dạng:

$$X(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^{-n} = a_0 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} + \cdots \quad (*)$$

Để có dạng (*), thực hiện phép chia đa thức dưới đây:

$$\begin{array}{l|l} 1 & 1-2z^{-1} \\ \cline{2-2} -\ 1-2z^{-1} & 1+2z^{-1}+2^2z^{-2}+\cdots \\ \cline{1-1} \quad 2z^{-1} & \\ \quad -\ 2z^{-1}-2^2z^{-2} & \\ \cline{1-1} \qquad 2^2z^{-2} & \\ \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots & \end{array}$$

$$\Rightarrow X(z) = \sum_{n=0}^{\infty} 2^n z^{-n}$$

$$\Rightarrow x(n) = 2^n : n \geq 0 \equiv 2^n u(n)$$

Ví dụ 3.15: Tìm x(n) biết:

$$X(z)=\frac{1}{1-2z^{-1}}:|z|<2$$

Giải:

Do ROC của X(z) là **/z/<2**, nên **x(n)** sẽ là dãy phản nhân quả và sẽ được khai triển thành chuỗi có dạng:

$$X(z)=\sum_{n=-1}^{-\infty}a_n z^{-n}=a_{-1}z^1+a_{-2}z^2+a_{-3}z^3+\cdots \quad (**)$$

Để có dạng (**), thực hiện phép chia đa thức dưới đây:

$$1 \;\Big|\; -2^1z^{-1}+1$$

$$-\;\left(1-2^{-1}z^1\right) \qquad\qquad -2^{-1}z^1-2^{-2}z^2-2^{-3}z^3+\cdots$$

$$2^{-1}z^1$$

$$-\;\left(2^{-1}z^1-2^{-2}z^2\right)$$

$$2^{-2}z^2$$

....

$$\Rightarrow X(z)=\sum_{n=-1}^{-\infty}-2^n z^{-n}$$

$$\Rightarrow x(n)=-2^n:n<0\equiv -2^n u(-n-1)$$

3.2.4 PHƯƠNG PHÁP KHAI TRIỂN PHÂN SỐ TỪNG PHẦN

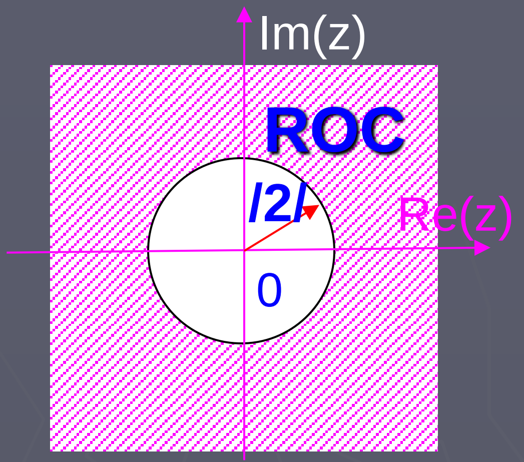
- Khai triển X(z) thành các phân thức đơn giản và áp dụng các cặp biến đổi Z thông dụng để tìm x(n)
- Áp dụng các tính chất của biến đổi Z:
  - Tuyến tính
  - Trễ ở miền thời gian
  - ...

3.2.4 PHƯƠNG PHÁP KHAI TRIỂN PHÂN SỐ TỪNG PHẦN

x(n)	X(z)	ROC
$\delta(n)$	1	$\forall z$
$u(n)$	$\dfrac{1}{1-z^{-1}}$	$\|z\| > 1$
$-u(-n-1)$		$\|z\| < 1$
$a^n u(n)$	$\dfrac{1}{1-az^{-1}}$	$\|z\| > \|a\|$
$-a^n u(-n-1)$		$\|z\| < \|a\|$
$na^n u(n)$	$\dfrac{az^{-1}}{(1-az^{-1})^2}$	$\|z\| > \|a\|$
$-na^n u(-n-1)$		$\|z\| < \|a\|$
$\cos(\omega_o n)u(n)$	$(1-z^{-1}\cos\omega_o)/(1-2z^{-1}\cos\omega_o+z^{-2})$	$\|z\| > 1$
$\sin(\omega_o n)u(n)$	$(z^{-1}\sin\omega_o)/(1-2z^{-1}\cos\omega_o+z^{-2})$	$\|z\| > 1$

Bài tập: Tìm biến đổi Z của tín hiệu sau:

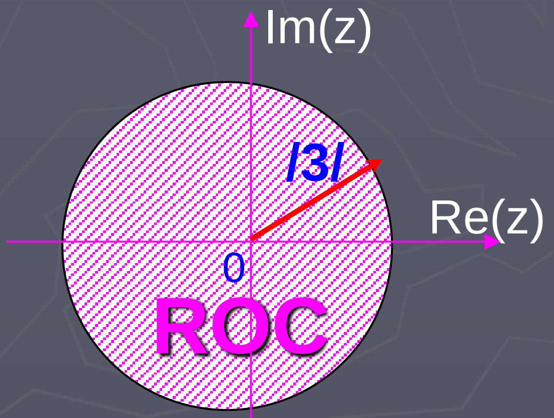
$$\boldsymbol{x(n) = (2^n)u(n) - (3^n)u(-n-1)}$$



Giải:

$$2^n u(n) \xleftrightarrow{Z} \frac{1}{1-2z^{-1}}$$

$$R_1 : |z| > |2|$$

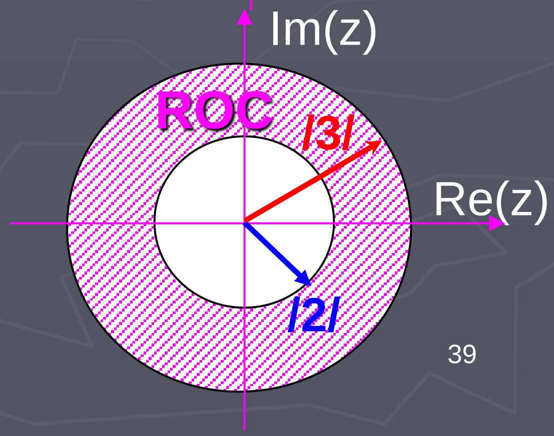


$$-3^n u(-n-1) \xleftrightarrow{Z} \frac{1}{1-3z^{-1}}$$

$$R_2 : |z| < |3|$$

Áp dụng tính chất tuyến tính, ta được:

$$2^n u(n) - 3^n u(-n-1) \xleftrightarrow{Z} \boxed{\frac{1}{1-2z^{-1}} + \frac{1}{1-3z^{-1}}}$$



$$\boxed{R = R_1 \cap R_2 : |2| < |z| < |3|}$$

$$X(z)=\frac{1}{1-2z^{-1}}+\frac{1}{1-3z^{-1}}$$

$$ROC: |2|<|z|<|3|$$

$$\xleftrightarrow{IZT} x(n)=2^n u(n)-3^n u(-n-1)$$

Bài tập: Tìm biến đổi Z ngược của biểu thức sau:

$$a. \quad X(z)=3+\frac{4}{1-2z^{-1}}+\frac{5}{1-3z^{-1}}$$

$$ROC: |z|>|3|$$

$$\Rightarrow x(n)=3\delta(n)+4.2^n u(n)+5.3^n u(n)$$

$$b. \quad X(z)=\frac{2z^2-5z}{z^2-5z+6}$$

3.2.4 PHƯƠNG PHÁP KHAI TRIỂN PHÂN SỐ TỪNG PHẦN

Xét **X(z)** là phân thức hữu tỉ có dạng:

$$X(z)=\frac{D(z)}{B(z)}=\frac{d_K z^K+d_{K-1}z^{K-1}+\ldots+d_1 z+d_0}{b_N z^N+b_{N-1}z^{N-1}+\ldots+b_1 z+b_0}$$

với: $K, N > 0$

- Nếu **K>N**, thực hiện phép chia đa thức, ta được:

$$X(z)=\frac{D(z)}{B(z)}=C(z)+\frac{A(z)}{B(z)}=C(z)+\frac{a_M z^M+a_{M-1}z^{M-1}\ldots+a_1 z+a_0}{b_N z^N+b_{N-1}z^{N-1}+\ldots+b_1 z+b_0}$$

Ta được C(z) là đa thức và phân thức A(z)/B(z) có bậc **M≤N**

- Nếu **K≤N**, thì X(z) có dạng giống phân thức A(z)/B(z)

Việc lấy biến đổi Z ngược đa thức C(z) là đơn giản, vấn đề phức tạp là tìm biến đổi Z ngược A(z)/B(z) có bậc M≤N

Xét **X(z)/z** là phân thức hữu tỉ có bậc **M≤N** :

$$\frac{X(z)}{z}=\frac{A(z)}{B(z)}=\frac{a_M z^M+a_{M-1}z^{M-1}...+a_1 z+a_0}{b_N z^N+b_{N-1}z^{N-1}+...+b_1 z+b_0}$$

Xét đến các điểm cực của **X(z)/z**, hay nghiệm của B(z) là ***đơn, bội và phức liên hiệp***

a) Xét X(z)/z có các điểm cực đơn: p_1, p_2, p_3,…. p_N,

$$\frac{X(z)}{z}=\frac{A(z)}{B(z)}=\frac{A(z)}{b_N(z-p_1)(z-p_2)\cdots(z-p_N)}$$

Theo lý thuyết hàm hữu tỉ, **X(z)/z** phân tích thành:

$$\frac{X(z)}{z}=\frac{A(z)}{B(z)}=\frac{K_1}{(z-p_1)}+\frac{K_2}{(z-p_2)}+\cdots+\frac{K_N}{(z-p_N)}=\sum_{i=1}^{N}\frac{K_i}{(z-p_i)}$$

Với hệ số **K_i** xác định bởi:

$$K_i=\frac{X(z)}{z}(z-p_i)\Big|_{Z=p_i}$$

hay

$$K_i=\frac{A(z)}{B'(z)}\Big|_{Z=p_i}$$

Suy ra **X(z)** có biểu thức:

$$X(z) = \frac{K_1}{(1-p_1z^{-1})} + \frac{K_2}{(1-p_2z^{-1})} + \cdots + \frac{K_N}{(1-p_Nz^{-1})} = \sum_{i=1}^{N} \frac{K_i}{(1-p_iz^{-1})}$$

Xét: $$X_i(z) = \frac{K_i}{(1-p_iz^{-1})}$$

- Nếu ROC: **/z/ > /p$_i$/** $\Rightarrow x_i(n) = K_i(p_i)^n u(n)$
- Nếu ROC: **/z/ < /p$_i$/** $\Rightarrow x_i(n) = -K_i(p_i)^n u(-n-1)$
- **Vậy:** $$x(n) = \sum_{i=1}^{N} x_i(n)$$

Ví dụ 3.16: Tìm x(n) biết: $$X(z)=\frac{2z^2-5z}{z^2-5z+6}$$

với các miền hội tụ: **a) /z/>3, b) /z/<2, c) 2</z/<3**

Giải:

$$\frac{X(z)}{z}=\frac{2z-5}{z^2-5z+6}=\frac{2z-5}{(z-2)(z-3)}=\frac{K_1}{(z-2)}+\frac{K_2}{(z-3)}$$

Với các hệ số được tính bởi:

$$K_1=\left.\frac{X(z)}{z}(z-2)\right|_{Z=2}=\left.\frac{2z-5}{(z-3)}\right|_{Z=2}=1$$

$$K_2=\left.\frac{X(z)}{z}(z-3)\right|_{Z=3}=\left.\frac{2z-5}{(z-2)}\right|_{Z=3}=1$$

Matlab
```
b=[2 -5];
a=[1 -5 6];
[k,p] = residue(b,a)
```

$$\frac{X(z)}{z}=\frac{1}{(z-2)}+\frac{1}{(z-3)}$$ $$\Rightarrow X(z)=\frac{1}{(1-2z^{-1})}+\frac{1}{(1-3z^{-1})}$$

$$X(z) = \frac{1}{(1-2z^{-1})} + \frac{1}{(1-3z^{-1})}$$

Với các miền hội tụ:

a) /z/ > 3 :

$$x(n) = 2^n u(n) + 3^n u(n)$$

b) /z/ < 2 :

$$x(n) = -2^n u(-n-1) - 3^n u(-n-1)$$

c) 2</z/<3 :

$$x(n) = 2^n u(n) - 3^n u(-n-1)$$

Bài tập 1: Tìm biến đổi Z ngược của biểu thức sau:

$$X(z) = \frac{2z^2 + 0,5z}{z^2 - z - 0.75}$$

Với điều kiện sau:

a. x(n) là tín hiệu nhân quả
b. x(n) là tín hiệu phản nhân quả
c. x(n) là tín hiệu phi nhân quả

$$\frac{X(z)}{z} = \frac{2z - 0.5}{z^2 - z - 0.75}$$

```
b=[2 0.5];
a=[1 -1 -0.75];
[k,p] = residue(b,a)
```

Bài tập 2: Tìm biến đổi Z ngược của biểu thức sau:

$$X(z) = \frac{2z^3 - 5z^2 + 4z}{(z-2)^2(z-1)}$$

b) Xét X(z)/z có điểm cực p_1 bội r và các điểm cực đơn: $p_{(r+1)},\dots,p_N,$

$$\frac{X(z)}{z}=\frac{A(z)}{B(z)}=\frac{A(z)}{b_N(z-p_1)^r(z-p_{(r+1)})\cdots(z-p_N)}$$

Theo lý thuyết hàm hữu tỉ, **X(z)/z** phân tích thành:

$$\frac{X(z)}{z}=\frac{K_1}{(z-p_1)}+\frac{K_2}{(z-p_1)^2}+\cdots+\frac{K_r}{(z-p_1)^r}+$$

$$+\frac{K_{r+1}}{(z-p_{(r+1)})}+\cdots+\frac{K_N}{(z-p_N)}=\sum_{i=1}^{r}\frac{K_i}{(z-p_1)^i}+\sum_{j=r+1}^{N}\frac{K_j}{(z-p_j)}$$

Với hệ số K_i xác định bởi:

$$K_i=\frac{1}{(r-i)!}\frac{d^{(r-i)}}{dz^{(r-i)}}\left[\frac{X(z)}{z}(z-p_1)^r\right]\Bigg|_{Z=p_1}$$

$$K_j=\frac{X(z)}{z}(z-p_j)\Bigg|_{Z=p_j}$$

Với giả thiết ROC của X(z): **|z| > max{ |p_i| }: i=1÷N,** biến đổi Z ngược của thành phần **$K_i/(z-p_1)^i$** sẽ là:

$$\frac{z}{(z-a)^i} \xleftrightarrow{Z^{-1}} \frac{n(n-1)...(n-i+2)a^{n-i+1}}{(i-1)!}u(n)$$

Vậy ta có biểu thức biến đổi Z ngược là:

$$\boxed{x(n) = \sum_{i=1}^{r} K_i \frac{n(n-1)...(n-i+2)a^{n-i+1}}{(i-1)!}u(n) + \sum_{j=r+1}^{N} K_j (p_j)^n u(n)}$$

Ví dụ 3.17: Tìm x(n) biết: $X(z) = \frac{2z^3 - 5z^2 + 4z}{(z-2)^2(z-1)}$ $ROC: |z| > 2$

Giải:

$$\frac{X(z)}{z} = \frac{2z^2 - 5z + 4}{(z-2)^2(z-1)} = \frac{K_1}{(z-2)} + \frac{K_2}{(z-2)^2} + \frac{K_3}{(z-1)}$$

Với các hệ số được tính bởi:

$$K_1 = \frac{1}{(2-1)!}\frac{d^{(2-1)}}{dz^{(2-1)}}\left[\frac{X(z)}{z}(z-2)^2\right]\Bigg|_{Z=2} = \frac{d}{dz}\left[\frac{2z^2-5z+4}{(z-1)}\right]\Bigg|_{Z=2} = 1$$

$$K_2 = \frac{1}{(2-2)!}\frac{d^{(2-2)}}{dz^{(2-2)}}\left[\frac{X(z)}{z}(z-2)^2\right]\Bigg|_{Z=2} = \frac{2z^2-5z+4}{(z-1)}\Bigg|_{Z=2} = 2$$

$$K_3 = \frac{X(z)}{z}(z-1)\Bigg|_{Z=1} = \frac{2z^2-5z+4}{(z-2)^2}\Bigg|_{Z=1} = 1$$

Vậy **X(z)/z** có biểu thức

$$\frac{X(z)}{z} = \frac{1}{(z-2)} + \frac{2}{(z-2)^2} + \frac{1}{(z-1)}$$

$$\Rightarrow X(z) = \frac{1}{(1-2z^{-1})} + \frac{2z^{-1}}{(1-2z^{-1})^2} + \frac{1}{(1-z^{-1})}$$

$$ROC: |z| > 2$$

$$\boxed{\Rightarrow x(n) = 2^n u(n) + n2^n u(n) + u(n)}$$

Bài tập 1: Tìm biến đổi Z ngược của biểu thức sau:

$$X(z) = \frac{z^3}{(z+1)(z-1)^2}$$

a. x(n) là tín hiệu nhân quả

b. x(n) là phản nhân quả

Bài tập 2: Tìm biến đổi Z ngược của biểu thức sau:

$$X(z) = \frac{z^9 - 1}{(z-1)z^8}$$

$$\boxed{ROC: |z| > |1|}$$

c) Xét X(z)/z có cặp điểm cực p_1 và p^*_1 phức liên hiệp, các điểm cực còn lại đơn: $p_3,\ldots,p_N$,

$$\frac{X(z)}{z}=\frac{A(z)}{B(z)}$$ $$=\frac{A(z)}{b_N(z-p_1)(z-p_1^*)(z-p_3)\cdots(z-p_N)}$$

X(z)/z được phân tích thành:

$$\frac{X(z)}{z}=\frac{K_1}{(z-p_1)}+\frac{K_2}{(z-p_1^*)}+\frac{K_3}{(z-p_3)}+\cdots+\frac{K_N}{(z-p_N)}$$

$$\frac{X(z)}{z}=\frac{K_1}{(z-p_1)}+\frac{K_2}{(z-p_1^*)}+\sum_{i=3}^{N}\frac{K_i}{(z-p_i)}$$

Với các hệ số K_1, K_i được tính giống điểm cực đơn:

$$K_i=\frac{X(z)}{z}(z-p_i)\bigg|_{Z=p_i} \quad : i=1\div N$$

Do các hệ số **A(z), B(z)** là thực, nên **$K_2=K_1^*$**

Xét : $$\frac{X_1(z)}{z}=\frac{K_1}{(z-p_1)}+\frac{K_1^*}{(z-p_1^*)}$$

$$\Rightarrow X_1(z)=\frac{K_1}{(1-p_1z^{-1})}+\frac{K_1^*}{(1-p_1^*z^{-1})}$$

Nếu gọi: $$\begin{cases} K_1=|K_1|e^{j\beta} \\ p_1=|p_1|e^{j\alpha} \end{cases}$$

Và giả thiết ROC: **$|z|>\max\{|p_i|\}$**:

$$\Rightarrow x_1(n)=\left[K_1(p_1)^n+K_1^*\left(p_1^*\right)^n\right]u(n)$$

$$=2|K_1||p_1|^n\cos(n\alpha+\beta)u(n)$$

Vậy:

$$x(n)=\left\{2|K_1||p_1|^n\cos(n\alpha+\beta)+\sum_{i=3}^{N}K_i(p_i)^n\right\}u(n)$$

Ví dụ 3.18: Tìm x(n) biết: $X(z)=\dfrac{-z}{(z^2-2z+2)(z-1)}:|z|>\sqrt{2}$

Giải:

$$\frac{X(z)}{z}=\frac{-1}{(z^2-2z+2)(z-1)}=\frac{-1}{[z-(1+j)][z-(1-j)](z-1)}$$

$$=\frac{K_1}{[z-(1+j)]}+\frac{K_1^*}{[z-(1-j)]}+\frac{K_3}{(z-1)}$$

$$K_1=\left.\frac{-1}{[z-(1-j)](z-1)}\right|_{Z=1+j}=\frac{1}{2}$$

$$K_3=\left.\frac{-1}{(z^2-2z+2)}\right|_{Z=1}=-1$$

$$\Rightarrow X(z)=\frac{1/2}{[1-(1+j)z^{-1}]}+\frac{1/2}{[1-(1-j)z^{-1}]}+\frac{-1}{(1-z^{-1})}$$

$|z|>\sqrt{2}$

$$\Rightarrow x(n)=(\sqrt{2})^n\cos\left(n\frac{\pi}{4}\right)u(n)-u(n)$$

Chương 3: BIẾN ĐỔI Z VÀ ỨNG DỤNG VÀO HỆ THỐNG LTI RỜI RẠC

3.1 BIẾN ĐỔI Z

3.2 BIẾN ĐỔI Z NGƯỢC

3.3 PHÂN TÍCH HỆ THỐNG LTI TRONG MIỀN Z

3.3 PHÂN TÍCH HỆ THỐNG LTI TRONG MIỀN Z

3.3.1 Hàm truyền đạt

Miền n: $x(n) \longrightarrow \boxed{h(n)} \longrightarrow y(n)=x(n)*h(n)$

$\updownarrow Z$

Miền Z: $X(z) \longrightarrow \boxed{H(z)} \longrightarrow Y(z)=X(z)H(z)$

$h(n) \xleftrightarrow{Z}$ $H(z)$: gọi là hàm truyền đạt $\quad H(z)=Y(z)/X(z)$

3.3.2 Hàm truyền đạt được biểu diễn theo các hệ số PTSP

$$\sum_{k=0}^{N} a_k y(n-k) = \sum_{r=0}^{M} b_r x(n-r) \xleftrightarrow{Z} Y(z)\sum_{k=0}^{N} a_k z^{-k} = X(z)\sum_{r=0}^{M} b_r z^{-r}$$

$$\boxed{\Rightarrow H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \sum_{r=0}^{M} b_r z^{-r} \Big/ \sum_{k=0}^{N} a_k z^{-k}}$$

Từ hàm truyền H(z) có thể suy ra:

- Đáp ứng xung h(n).
- Phương trình hiệu số của đáp ứng xung.
- Phương trình hiệu số tín hiệu vào ra.
- Sơ đồ khối của hệ thống.
- Giản đồ cực không.
- Đáp ứng tần số.

Và ngược lại ta có thể tính H(z) và các dạng còn lại khi biết 1 dạng bất kỳ ở trên.

Ví dụ 3.19: Tìm H(z) và h(n) của hệ thống nhân quả cho bởi:

Giải: $y(n) - 5y(n-1) + 6y(n-2) = 2x(n) - 5x(n-1)$

Lấy biến đổi Z hai vế PTSP và áp dụng tính chất dịch theo t/g:

$$Y(z)\left[1-5z^{-1}+6z^{-2}\right]=X(z)\left[2-5z^{-1}\right]$$

$$\Rightarrow H(z)=\frac{Y(z)}{X(z)}=\frac{2-5z^{-1}}{1-5z^{-1}+6z^{-2}}=\frac{2z^2-5z}{z^2-5z+6}$$

$$\frac{H(z)}{z}=\frac{2z-5}{(z-2)(z-3)}=\frac{K_1}{(z-2)}+\frac{K_2}{(z-3)}$$

$$K_1=\left.\frac{2z-5}{(z-3)}\right|_{z=2}=1 \qquad K_2=\left.\frac{2z-5}{(z-2)}\right|_{z=3}=1$$

$$\Rightarrow H(z)=\frac{1}{(1-2z^{-1})}+\frac{1}{(1-3z^{-1})}$$

Do hệ thống nhân quả nên: $\boxed{h(n) = (2^n + 3^n)\, u(n)}$

3.3.3 Hàm truyền đạt của các hệ thống ghép nối

a. Ghép nối tiếp

- Miền n:

$$\begin{cases} x(n) \longrightarrow \boxed{h_1(n)} \longrightarrow \boxed{h_2(n)} \longrightarrow y(n) \\ \equiv \\ x(n) \longrightarrow \boxed{h(n)=h_1(n)*h_2(n)} \longrightarrow y(n) \end{cases}$$

Theo tính chất tổng chập: $h_1(n)*h_2(n) \xleftrightarrow{Z} H_1(z)H_2(z)$

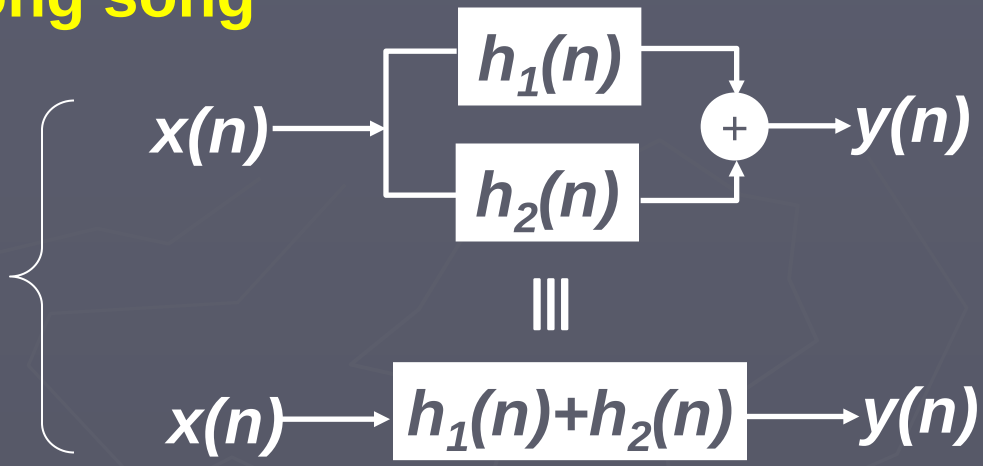
- Miền Z:

$$\begin{cases} X(z) \longrightarrow \boxed{H_1(z)} \longrightarrow \boxed{H_2(z)} \longrightarrow Y(z) \\ \equiv \\ X(z) \longrightarrow \boxed{H(z)=H_1(z)H_2(z)} \longrightarrow Y(z) \end{cases}$$

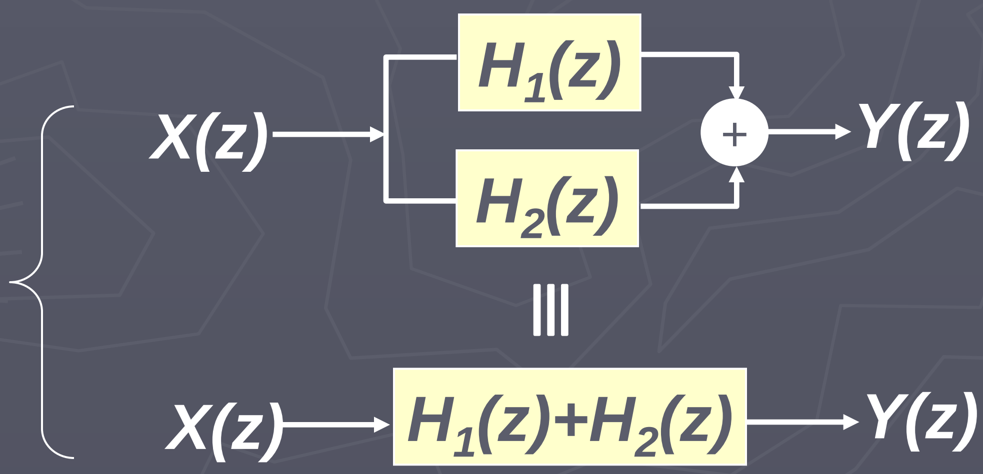
3.3.3 Hàm truyền đạt của các hệ thống ghép nối (tt)

b. Ghép song song

- Miền n:



- Miền Z:



3.3.4 Tính nhân quả và ổn định của hệ LTI rời rạc

a. Tính nhân quả

- Miền n: **Hệ thống LTI là nhân quả ⇔ h(n) = 0 : n<0**
- Miền Z:

$$H(z)=\frac{A(z)}{b_N(z-p_1)(z-p_2)\cdots(z-p_N)}$$

Do **h(n)** là tín hiệu nhân quả, nên miền hội tụ **H(z)** sẽ là:

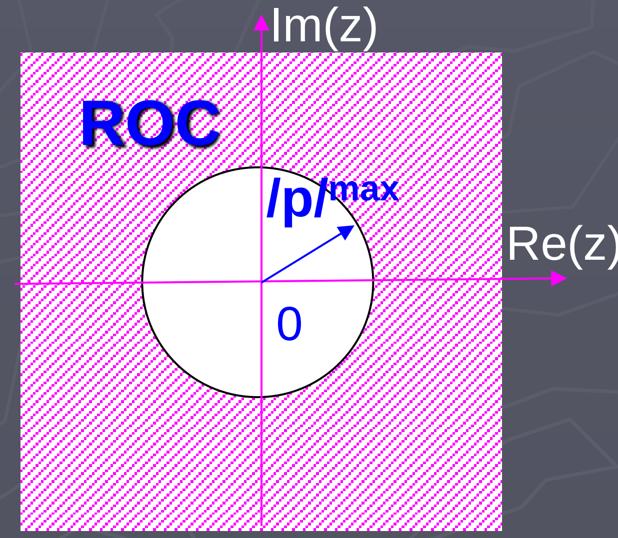
$$|z|>|p|^{\max}=\max\{|p_1|,|p_2|,\cdots,|p_N|\}$$

Hệ thống LTI là nhân quả

⇕

ROC của H(z) là:

$$|z|>|p|^{\max}=\max\{|p_1|,|p_2|,\cdots,|p_N|\}$$



b. Tính ổn định

- Miền n: **Hệ thống TTBB là ổn định** $\Leftrightarrow$ $\sum_{n=-\infty}^{\infty} |h(n)| < \infty \quad (*)$
- Miền Z:

$$|H(z)| = \left|\sum_{n=-\infty}^{\infty} h(n) z^{-n}\right| \le \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left|h(n) z^{-n}\right| = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |h(n)||z^{-n}|$$

$$\Rightarrow \quad |H(z)| \le \sum_{n=-\infty}^{\infty} |h(n)|$$

: khi $|z| = 1$

Theo đ/k ổn định (*), nhận thấy **H(z)** cũng sẽ hội tụ với **|z|=1**

Hệ thống TTBB là ổn định $\Leftrightarrow$ **ROC của H(z) có chứa |z|=1**

c. Tính nhân quả và ổn định

Hệ thống TTBB là nhân quả ⟺ ROC của H(z) là:

$$|z| > |p|^{\max} = \max\{|p_1|, |p_2|, \cdots, |p_N|\}$$

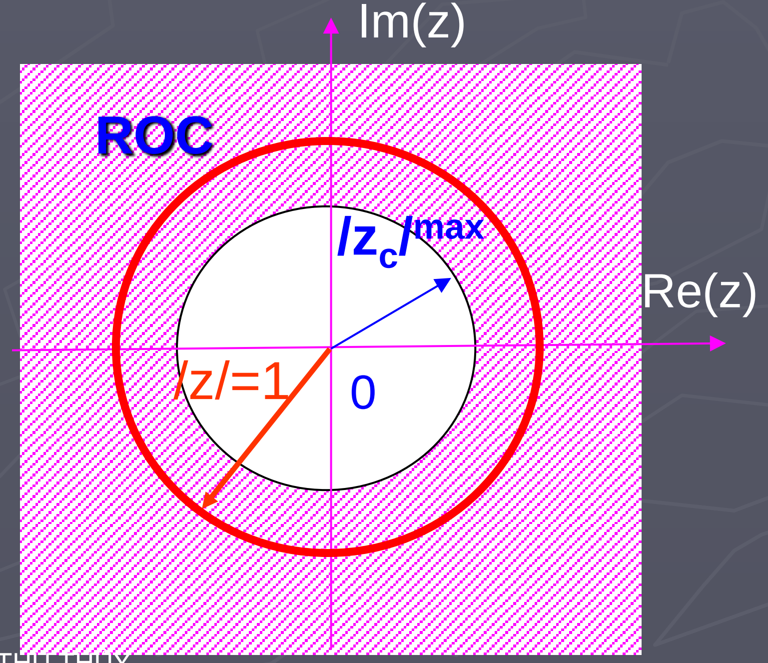
Hệ thống TTBB là ổn định ⟺ ROC của H(z) có chứa /z/=1

Hệ thống TTBB là nhân quả và ổn định

⟺

ROC của H(z) là:

$$|z| > |p|^{\max} \text{ và } |p|^{\max} < 1$$



Ví dụ 3.20: Tìm h(n) của hệ thống, biết:

$$H(z)=\frac{4z^2-5z}{2z^2-5z+2}$$

a. Để hệ thống là nhân quả

b. Để hệ thống là ổn định

c. Để hệ thống là nhân quả và ổn định

Giải:

$$\frac{H(z)}{z}=\frac{4z-5}{2(z-1/2)(z-2)}=\frac{K_1}{(z-1/2)}+\frac{K_2}{(z-2)}=\frac{1}{(z-1/2)}+\frac{1}{(z-2)}$$

$$\Rightarrow H(z)=\frac{1}{[1-(1/2)z^{-1}]}+\frac{1}{(1-2z^{-1})}$$

a. Hệ thống nhân quả (/z/>2): **h(n)=[(1/2)^n + 2^n] u(n)**

b. Hệ thống ổn định (1/2</z/<2): **h(n)=(1/2)^n u(n) - 2^n u(-n-1)**

c. Hệ thống nhân quả và ổn định:
ROC: /z/>2 không thể chứa /z/=1 $\Rightarrow$ không tồn tại h(n)

3.3.5 GIẢI PTSP DÙNG BIẾN ĐỔI Z 1 PHÍA

$$y(n-1) \xleftrightarrow[\text{1 phía}]{Z} \sum_{n=0}^{\infty} y(n-1)z^{-n} = y(-1) + y(0)z^{-1} + y(1)z^{-2} + \cdots$$

$$= y(-1) + z^{-1}\left[y(0) + y(1)z^{-1} + \cdots\right]$$

$$\boxed{= y(-1) + z^{-1}Y(z)}$$

$$y(n-2) \xleftrightarrow[\text{1 phía}]{Z} \sum_{n=0}^{\infty} y(n-2)z^{-n} = y(-2) + y(-1)z^{-1} + y(0)z^{-2} + \cdots$$

$$= y(-2) + y(-1)z^{-1} + z^{-2}\left[y(0) + y(1)z^{-1} + \cdots\right]$$

$$\boxed{= y(-2) + y(-1)z^{-1} + z^{-2}Y(z)}$$

Tổng quát, biến đổi Z 1 phía của y(n-k):

$$y(n-k) \xleftrightarrow[\text{1 phía}]{Z} z^{-k}Y(z) + \sum_{r=1}^{k} y(-r)z^{r-k}$$

Ví dụ 3.3.1: Hãy giải PTSP dùng biến đổi Z 1 phía

$y(n) - 3y(n-1) + 2y(n-2) = x(n) : n \geq 0$

biết: $x(n) = 3^{n-2}u(n)$ và $y(-1) = -1/3$; $y(-2) = -4/9$

Giải:

Lấy biến đổi Z 1 phía hai vế PTSP:

$$Y(z) - 3[y(-1) + z^{-1}Y(z)] + 2[y(-2) + y(-1)z^{-1} + z^{-2}Y(z)] = X(z)$$

(*)

Thay $y(-1) = -1/3$; $y(-2) = -4/9$ và $X(z) = 3^{-2}/(1-3z^{-1})$ vào (*), rút

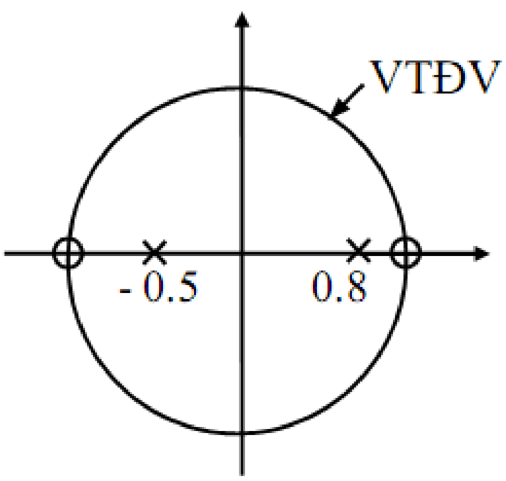
$$\frac{Y(z)}{z} = \frac{1}{(z-1)(z-3)} = -\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{(z-1)} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{(z-3)}$$

$$\Rightarrow Y(z) = -\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{(1-z^{-1})} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{(1-3z^{-1})}$$

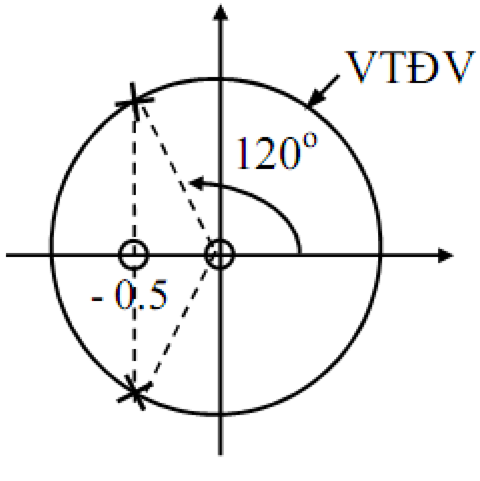
$$\Rightarrow y(n) = \frac{1}{2}\left[3^n - 1\right]u(n)$$

Cho hệ thống nhân quả có giản đồ cực - không như hình a và hình b.

a. Tìm biểu thức H(z), đáp ứng xung
b. Phương trình sai phân mô tả hệ thống
c. Vẽ sơ đồ khối của hệ thống.
d. Hệ thống nào ổn định.



Hình a



Hình b

a. $x(n) = [0,\underline{\mathbf{1}},2,5,7,0,1,0]$

b. $x(n) = [0,1,2,\underline{\mathbf{5}},7,0,1,0]$

c. $x(n) = \delta(n)$

d. $x(n) = \delta(n - k), k > 0$

e. $x(n) = \delta(n + k), k > 0$