Chương 2. Tín hiệu và hệ thống rời rạc

2.4. Biểu diễn hệ thống rời rạc bằng phương trình sai phân

TS. Nguyễn Hồng Quang
Bộ môn Kỹ thuật máy tính
Viện Công nghệ thông tin và truyền thông
Trường Đại học Bách Khoa Hà Nội

Chương 2. Tín hiệu và hệ thống rời rạc

- 2.4. Biểu diễn hệ thống rời rạc bằng phương trình sai phân
  - 2.4.1. Hệ LTI biểu diễn bằng phương trình sai phân tuyến tính hệ số hằng
  - 2.4.2. Đáp ứng trạng thái không (Zero-State Response) và đáp ứng đầu vào không (Zero-Input Response)
  - 2.4.3. Giải phương trình sai phân tuyến tính hệ số hằng
  - 2.4.4. Đáp ứng xung của hệ LTI

Phương trình sai phân tuyến tính hệ số hằng

$$\sum_{k=0}^{N} a_k . y(n-k) = \sum_{r=0}^{M} b_r . x(n-r) \qquad \text{với giả thiết} \quad a_0 = 1$$

$$y(n) + a_1.y(n-1) + \ldots + a_N.y(n-N) =$$

$$b_0.x(n) + b_1.x(n-1) + \ldots + b_M.x(n-M)$$

- hệ FIR luôn nhân quả, ổn định, đáp ứng xung có chiều dài hữu hạn ;
- hệ FIR đòi hỏi bậc M phải lớn (400-500)
- hệ IIR nhân quả có đáp ứng xung chiều dài vô hạn, tính ổn định không phải luôn được đảm bảo.
- hệ IIR chỉ cần bậc N nhỏ (< 15, 20)

Tập trung nghiên cứu hệ IIR

2. Đáp ứng trạng thái không và đáp ứng đầu vào không

$$y(n) - a.y(n-1) = x(n)$$

- Bài toán: x(n), ∀n ≥ 0, y(-1) → **tính y(n), ∀n ≥ 0**

Khởi tạo relax: y(-1) = 0

$$y(n) = a^{n+1}y(-1) + \sum_{k=0}^{n} a^k x(n-k) \qquad n \geq 0$$

$y_{zi}(n)$: *zero-state response* or *forced response* → $y(n)=y_{zi}(n)+y_{zs}(n)$

x(n) = 0, $y_{zs}(n)$: *zero-input response* or *natural response*

Giải phương trình sai phân tuyến tính hệ số hằng

$$y(n) = -\sum_{k=1}^{N} a_k y(n-k) + \sum_{k=0}^{M} b_k x(n-k)$$

Biết *x(n), n* ≥ 0, **tính y(n), n ≥ 0** và các điều kiện đầu

$$y(n) = y_h(n) + y_p(n)$$

$y_h(n)$: nghiệm thuần nhất

$y_p(n)$: nghiệm riêng

$$\sum_{k=0}^{N} a_k y(n-k) = 0$$

- Tìm $y_h(n)$: $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_N$
  - Phương trình thuần nhất
  - Thành phần cơ bản : $\lambda^n.u(n)$
  - Đa thức đặc trưng của hệ

$$\lambda^N + a_1\lambda^{N-1} + a_2\lambda^{N-2} + \cdots + a_{N-1}\lambda + a_N = 0$$

$$\boxed{y_h(n) = C_1\lambda_1^n + C_2 n\lambda_1^n + C_3 n^2\lambda_1^n + \cdots + C_m n^{m-1}\lambda_1^n + C_{m+1}\lambda_{m+1}^n + \cdots + C_N\lambda_n}$$

$$\boxed{y_h(n) = C_1\lambda_1^n + C_2\lambda_2^n + \cdots + C_N\lambda_N^n}$$

$y_h(n)$, $y_{zi}(n)$?

$$y(n) + a_1 y(n-1) = x(n)$$

$$y(n) - 3y(n-1) - 4y(n-2) = 0$$

Tìm nghiệm riêng

$$\sum_{k=0}^{N} a_k y_p(n-k) = \sum_{k=0}^{M} b_k x(n-k) \qquad a_0 = 1$$

- chọn dạng giống với tín hiệu x(n)

$\boxed{x(n) = u(n)}$

$$\boxed{y(n) + a_1 y(n-1) = x(n). \qquad |a_1| < 1}$$

$\boxed{x(n) = 2^n,}$

$$\boxed{y(n) = \tfrac{5}{6} y(n-1) - \tfrac{1}{6} y(n-2) + x(n)}$$

Input Signal, $x(n)$	Particular Solution, $y_p(n)$
A (constant)	K
AM^n	KM^n
An^M	$K_0 n^M + K_1 n^{M-1} + \cdots + K_M$
$A^n n^M$	$A^n(K_0 n^M + K_1 n^{M-1} + \cdots + K_M)$
$\left\{ \begin{array}{l} A\cos\omega_0 n \\ A\sin\omega_0 n \end{array} \right\}$	$K_1 \cos\omega_0 n + K_2 \sin\omega_0 n$

Nghiệm tổng quát

$$y(n) = y_h(n) + y_p(n)$$

- y(n) chứa $\{C_i\}$ trong $y_h(n)$
- Tìm C_i qua các điều kiện đầu

steady-state response

Đáp ứng trạng thái bền và đáp ứng tắt dần $y_p(n) = \lim_{n\to\infty} y_{zs}(n)$

Transient response của hệ thống : tắt dần khi n→∞

$$\boxed{y(n) - 3y(n-1) - 4y(n-2) = x(n) + 2x(n-1)} \quad \boxed{x(n) = 4^n u(n)}$$

Đáp ứng xung đáp ứng trạng thái không, khởi tạo relax

Bài tập

- Một hệ thống nhân quả biểu diễn bằng phương trình sai phân sau:
- Tác động vào hệ tín hiệu ($x(n) = 2^n$) $x(n) = (1/2)^n$.
- Biết điều kiện đầu y(-1) = 1, y(-2) = 2.

$$y(n) = \frac{5}{6}y(n-1) - \frac{1}{6}y(n-2) + x(n)$$

- Tính y(n)
- Tính $y_h(n)$, $y_p(n)$, $y_{zi}(n)$, $y_{zs}(n)$, đáp ứng trạng thái bền, đáp ứng trạng thái tắt dần của hệ

- Tính đáp ứng xung: 2.55, 2.54, 2.52
- Cho sơ đồ, tính đáp ứng xung: 2.47, 2.48, 2.50, 2.49
- Tính đáp ứng: 2.45, 2.42, 2.37, 2.38, 2.36

Tiếp theo: 2.5. Thực hiện hệ thống rời rạc