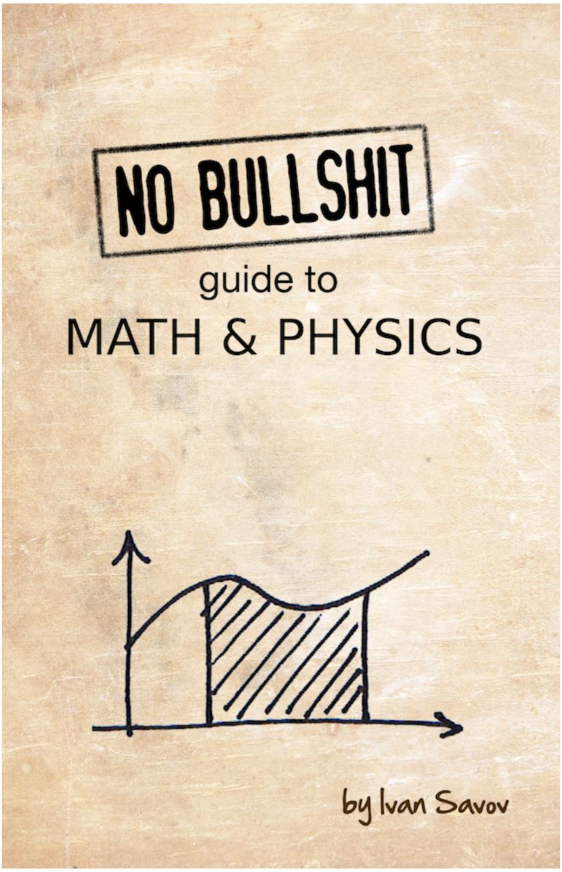
Hướng dẫn toán học và vật lý không nhảm nhí

Xem trước và chương mẫu



Cuốn sách dày 562 trang bao gồm 55 bài tập và 252 bài toán đã giải. Bản xem trước này đã được chọn để giới thiệu một số khía cạnh quan trọng của cuốn sách (phần giới thiệu chương, công thức, giải thích và số liệu). Mua trọn bộ chỉ với giá 29 đô la Mỹ tại https://gum.co/noBSmathphys .

Không có hướng dẫn nhảm nhí nào về toán và vật
lý của Ivan Savov

Xuất bản bởi Minireference Co.
Montréal, Québec, Canada
minireference.com | @minireference | fb.me/noBSguide Nếu có thắc mắc,
hãy liên hệ với tác giả tại ivan@minireference.com

Phân loại môn Toán (2010): 00A09, 70-01, 97I40, 97I50.

Thư viện và Lưu trữ Canada Biên mục xuất bản

Savov, Ivan, 1982-, tác giả
Không có hướng dẫn nhảm nhí nào về toán & vật lý / Ivan Savov. - Phiên bản thứ năm.
ISBN 978-0-9920010-0-1 (pbk.)
1. Sách giáo khoa Toán học. 2. Giải tích–Sách giáo khoa.
3. Cơ học–Sách giáo khoa. I. Tiêu đề. II. Tiêu đề: Không có hướng dẫn nhảm nhí nào về toán và vật lý.
QA39.3.S28 2014 511'.07 C2014-905298-7

Phiên bản thứ
năm v5.4 git commit 1456:20af2fe Các
phiên bản trước: v1.0 2010, v2.0 2011, v3.0 2012, v4.0 2013, v5.0 2014.

ISBN 978-0-9920010-0-1

10 9 8 7 6 5 4 3

nội dung

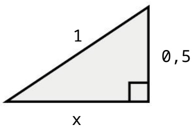
Bài kiểm tra xếp lớp

Các câu trả lời[1] cho kỳ thi xếp lớp này sẽ cho bạn biết nên bắt đầu đọc từ đâu.

Q1. Đạo hàm của sinpxq là gì?

Q2. Đạo hàm bậc hai của A sinpwxq là gì?

Q3. Giá trị của x là bao nhiêu?



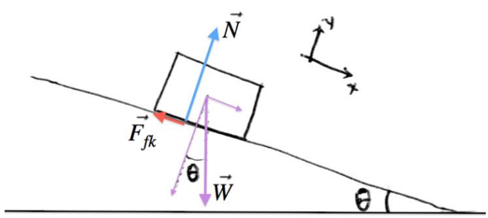
Q4. Độ lớn của lực hấp dẫn giữa hai hành tinh khối lượng M và khối lượng m cách nhau một khoảng r là bao nhiêu?

Q5. Tính limxÑ3´ $\frac{1}{x ´ 3}$.

Q6. Giải t trong phương trình:

7p3 ` 4tq “ 11p6t ´ 4q.

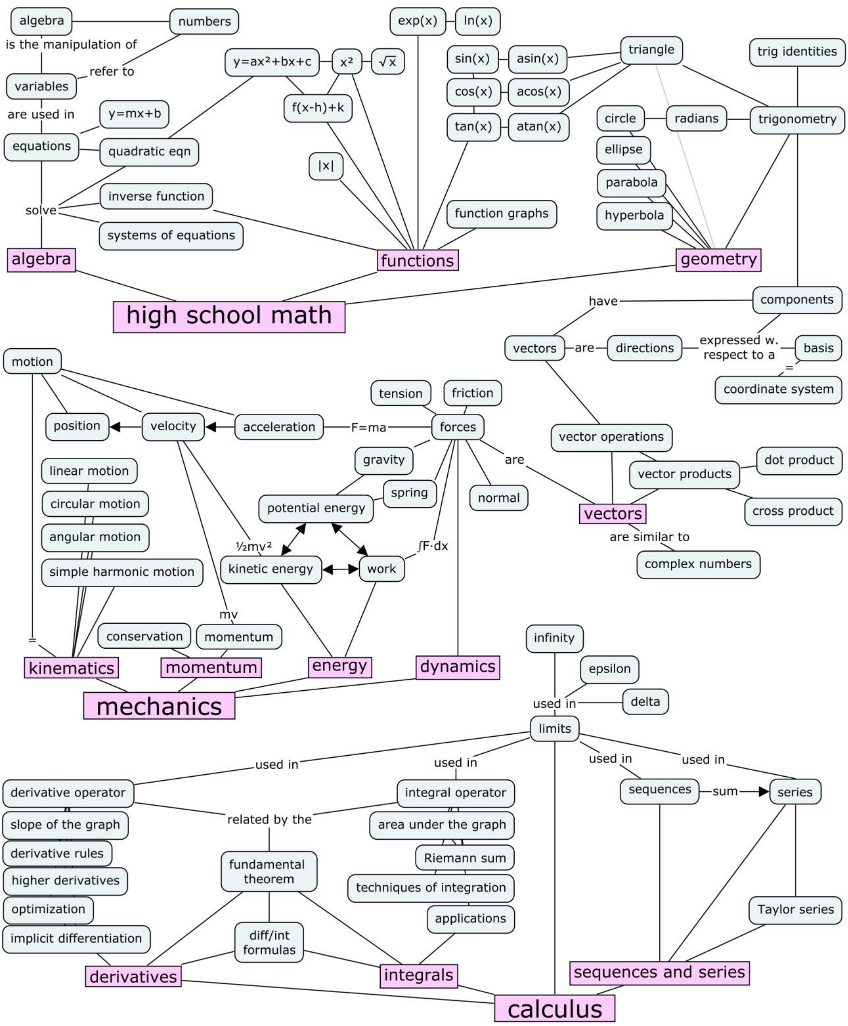
Q7. Thành phần của trọng lượng W~ tác dụng theo phương x là gì?



Q8. Một hệ lò xo khối lượng đang chuyển động điều hòa đơn giản. Hàm định vị của nó là xptq “ A sinpwtq. Gia tốc cực đại của nó là bao nhiêu?

[1] Đáp án: A1. copxq, A2. ´Aw2 sinpwxq, A3. ?3 / 2, A4. }~ Fg} “ GMm / r2, A5. 65 / 38 ´8, A6. , A7. ` mg sin q, A8. aw2. Key: Nếu bạn không hiểu đúng Q3, Q6, bạn nên đọc cuốn sách bắt đầu từ Chương 1. Nếu bạn bối rối với Q1, Q2, Q5, hãy đọc Chương 5. Nếu bạn muốn tìm hiểu cách giải Q4, Q7 và Q8, hãy đọc Chương 4.

bản đồ khái niệm



Hình 1: Sơ đồ này cho thấy các mối liên hệ giữa các khái niệm, chủ đề và chủ đề được đề cập trong cuốn sách. Nhìn thấy mối liên hệ giữa các khái niệm là chìa khóa để hiểu toán học và vật lý. Tham khảo mục lục ở trang 511 để tìm vị trí chính xác trong cuốn sách mà mỗi khái niệm được định nghĩa.

Bạn có thể chú thích bản đồ khái niệm với kiến thức hiện tại của bạn về từng khái niệm để theo dõi tiến trình của bạn thông qua cuốn sách.

- Thêm một dấu chấm (,) bên cạnh tất cả các khái niệm bạn đã nghe nói đến.
- Thêm hai dấu chấm (,,) bên cạnh các khái niệm mà bạn cho rằng mình biết.
- Thêm ba dấu chấm (,,,) bên cạnh các khái niệm bạn đã sử dụng trong các bài tập và bài toán.

Bằng cách thu thập một số dấu chấm mỗi tuần, bạn sẽ có thể lướt qua tài liệu một cách nhanh chóng.

Nếu bạn không muốn đánh dấu sách của mình, bạn có thể tải xuống một bản in được của sơ đồ khái niệm tại đây: bit.ly/mathphyscmap.

lời nói đầu

Cuốn sách này chứa các bài học về các chủ đề trong toán học và vật lý, được viết theo phong cách không dùng thuật ngữ chuyên môn và đi thẳng vào vấn đề. Mỗi bài học bao gồm một khái niệm ở độ sâu cần thiết cho khóa học cấp đại học năm thứ nhất. Trọng tâm chính của cuốn sách này là làm nổi bật các mối liên hệ phức tạp giữa các khái niệm toán học và vật lý. Nhìn thấy những điểm tương đồng và tương đồng giữa các khái niệm là chìa khóa để hiểu.

Tại sao?

Nguồn gốc của cuốn sách này bắt nguồn từ thời sinh viên của tôi khi tôi được yêu cầu mua sách giáo khoa đắt tiền cho các khóa học của mình. Những cuốn sách giáo khoa này không chỉ đắt tiền mà còn rất tẻ nhạt để đọc. Ai có đủ nghị lực để đọc hết hàng ngàn trang giải thích? Tôi bắt đầu tự hỏi: "Những cuốn sách dày cộp này để làm gì vậy?" Sau đó, tôi nhận ra rằng sách giáo khoa chính thống dài bởi vì ngành công nghiệp sách giáo khoa cố gắng kiếm được nhiều lợi nhuận hơn. Bạn không cần phải đọc 1000 trang để học phép tính; vô số hình ảnh màu đầy trang và văn bản lặp đi lặp lại được sử dụng để "đẩy" sách giáo khoa giải tích ở đó để làm cho mức giá 200 đô la có vẻ hợp lý.

Nhìn vào tình huống này, tôi tự nhủ: "Phải làm gì đó thôi," và tôi ngồi viết một cuốn sách giáo khoa hiện đại để giải thích các khái niệm toán học và vật lý một cách rõ ràng, ngắn gọn và hợp túi tiền. Tôi không đời nào để cho các nhà xuất bản chính thống làm hỏng trải nghiệm học tập những môn học tuyệt vời này cho thế hệ học sinh tiếp theo.

Làm sao?

Các phần trong cuốn sách này là các hướng dẫn khép kín. Mỗi phần bao gồm các định nghĩa, công thức và giải thích liên quan đến một chủ đề duy nhất. Do đó, bạn có thể đọc các phần theo bất kỳ thứ tự nào mà bạn thấy hợp lý. Trong quá trình này, bạn sẽ tìm hiểu về mối liên hệ giữa các khái niệm về giải tích và cơ học. Hiểu về cơ học sẽ dễ dàng hơn nhiều nếu bạn biết các ý tưởng về phép tính. Đồng thời, các ý tưởng đằng sau phép tính được minh họa tốt nhất thông qua các ví dụ vật lý cụ thể. Học hai môn cùng một lúc là cách tiếp cận tốt nhất.

Để tất cả độc giả đều có thể tiếp cận nghiên cứu về cơ học và giải tích, chúng tôi sẽ bắt đầu với chương ôn tập về số, đại số, phương trình, hàm số và các khái niệm tiên quyết khác. Nếu bạn cảm thấy hơi cũ về những khái niệm đó, hãy nhớ xem Chương 1.

Mỗi chương kết thúc với một phần các vấn đề thực hành được thiết kế để kiểm tra sự hiểu biết của bạn về các khái niệm được phát triển trong chương đó. Hãy chắc chắn rằng bạn dành nhiều thời gian cho những vấn đề này để thực hành những gì bạn đã học được. Tự mình tìm ra cách sử dụng một phương trình trong quá trình giải một bài toán là một trải nghiệm quý giá hơn nhiều so với việc chỉ ghi nhớ phương trình.

Để đạt hiệu quả học tập tối ưu, tôi khuyên bạn nên dành nhiều thời gian để giải quyết các vấn đề thực hành cũng như thời gian dành cho việc đọc các bài học. Những vấn đề bạn cảm thấy khó giải quyết sẽ cho bạn biết bạn cần xem lại phần nào của chương. Một lợi ích bổ sung của việc kiểm tra kỹ năng của bạn đối với các vấn đề thực hành là bạn sẽ được chuẩn bị sẵn sàng trong trường hợp giáo viên cố gắng kiểm tra bạn.

Xuyên suốt cuốn sách, tôi đã bao gồm các liên kết đến các nguồn tài nguyên trên internet như hoạt hình, minh họa và các trang web có tài liệu đọc thêm. Khi bạn hiểu những điều cơ bản, bạn sẽ có thể hiểu được nhiều tài nguyên internet hơn. Các liên kết được cung cấp là điểm khởi đầu để khám phá thêm.

Cuốn sách này có dành cho bạn không?

Mục đích của tôi là làm cho việc học giải tích và cơ học trở nên dễ tiếp cận hơn. Bất kỳ ai cũng có thể mở cuốn sách này và trở nên thành thạo về giải tích và cơ học, bất kể nền tảng toán học của họ là gì.

Đối tượng độc giả chủ yếu của cuốn sách là sinh viên. Học sinh tham gia lớp cơ khí có thể đọc các chương liên tiếp cho đến Chương 4 và tùy chọn đọc Chương 5 để nhận điểm thưởng. Tham gia một khóa học giải tích?

Chuyển thẳng đến chương giải tích (Chương 5). Học sinh trung học hoặc sinh viên đại học tham gia lớp tiền giải tích sẽ được hưởng lợi từ việc đọc Chương 1, đây là phần ôn tập ngắn gọn nhưng kỹ lưỡng về các khái niệm toán học cơ bản như số, phương trình, hàm số và lượng giác.

MECH CALC PRECALC LỚP HỌC LỚP HỌC		
Ch. 1	Ch. 1: Ch. 1	
Ch. 2	Ch. 2	Ch. 2:
Ch. 3		Ch. 3
Ch. 4		
Ch. 5: Ch.		

5 := cách đọc tùy chọn.

Những người không phải là sinh viên, đừng lo lắng: bạn không cần phải tham gia một lớp học để học toán. Những người học độc lập quan tâm đến việc học tài liệu trình độ đại học sẽ thấy cuốn sách này rất hữu ích. Nhiều sinh viên tốt nghiệp đại học đọc cuốn sách này để ghi nhớ phép tính mà họ đã học hồi còn học đại học.

Nói chung, bất kỳ ai quan tâm đến việc khơi dậy mối quan hệ của họ với toán học nên coi cuốn sách này như một cơ hội để sửa chữa mối liên hệ đã bị phá vỡ. Toán học là thứ tốt; bạn không nên bỏ lỡ nó. Những người nghĩ rằng họ cực kỳ ghét môn toán nên đọc Chương 1 như một liệu pháp.

Giới thiệu về tác giả

Tôi đã dạy kèm môn toán và vật lý được hơn 17 năm.
Thông qua trải nghiệm này, tôi đã học được cách chia nhỏ những ý tưởng phức tạp thành những phần nhỏ hơn, liên kết với nhau dễ hiểu. Tôi nghĩ cách tốt nhất để dạy toán và vật lý là xác định rõ ràng các khái niệm và chỉ ra con đường kết nối chúng. Vấn đề không phải là bạn biết bao nhiêu phương trình, mà là biết cách đi từ phương trình này sang phương trình khác.

Tôi đã hoàn thành chương trình học đại học tại Đại học McGill về kỹ thuật điện, sau đó lấy bằng M.Sc. trong vật lý, và gần đây đã hoàn thành bằng tiến sĩ. trong khoa học máy tính. Trong sự nghiệp nghiên cứu của mình, tôi đã may mắn được học hỏi từ những người thầy truyền cảm hứng, những người có khả năng chắt lọc những ý tưởng cốt yếu và giải thích mọi thứ bằng ngôn ngữ đơn giản. Với bài viết của mình, tôi muốn tạo lại trải nghiệm học tập tương tự cho bạn. Tôi thành lập Công ty Minireference để cách mạng hóa ngành công nghiệp sách giáo khoa. Chúng tôi làm sách giáo khoa không tệ.

Ivan Savov

Montréal, 2020

Giới thiệu

Thế kỷ trước đã được đánh dấu bằng những tiến bộ công nghệ to lớn. Mọi lĩnh vực của nền kinh tế đã được chuyển đổi bởi việc sử dụng máy tính và sự ra đời của internet. Không có nghi ngờ tầm quan trọng của công nghệ sẽ tiếp tục phát triển trong những năm tới.

Phần tốt nhất là bạn không cần biết công nghệ làm việc để sử dụng nó. Bạn không cần phải hiểu làm thế nào các giao thức internet hoạt động để kiểm tra email của bạn và tìm tài liệu cướp biển gốc. Bạn không cần phải là một lập trình viên để sử dụng máy tính để tự động hóa các nhiệm vụ lặp đi lặp lại và tăng năng suất của bạn. Tuy nhiên, khi nói đến xây dựng những thứ mới, hiểu cách thức hoạt động của công nghệ trở thành quan trọng. Một kỹ năng đặc biệt hữu ích là khả năng tạo ra các mô hình toán học của các tình huống trong thế giới thực. Các kỹ thuật cơ học và tính toán là những khối xây dựng mạnh mẽ để hiểu thế giới xung quanh chúng ta. Đây là lý do tại sao các khóa học này được giảng dạy đầu tiên năm học đại học: chúng chứa các chìa khóa mở khóa phần còn lại của khoa học và kĩ thuật.

Giải tích và cơ học có thể là những môn học khó. Hiểu tài liệu tự nó không khó, nhưng cần có sự kiên nhẫn và thực hành để trở nên thoải mái với những ý tưởng mới. Giải tích và cơ học trở nên dễ tiếp thu hơn nhiều khi bạn chia tài liệu thành khối có thể quản lý được. Bản đồ khái niệm trong Hình 1 (trang v) cho thấy tổng quan về tất cả các khái niệm và chủ đề chúng ta sẽ thảo luận trong cuốn sách. Có rất nhiều điều mới để học, nhưng đừng lo lắng—chúng ta sẽ điều hướng tài liệu từng bước một và cuối cùng thì tất cả sẽ có ý nghĩa.

Trước khi chúng ta bắt đầu với các phương trình, rất đáng để xem trước tài liệu được đề cập trong cuốn sách này. Rốt cuộc, bạn nên biết loại nào rắc rối mà bạn đang tự chuốc lấy.

Chương 1 là tổng quan toàn diện về các nguyên tắc toán học cơ bản bao gồm đại số, phương trình, hàm số, hình học và lượng giác. Phần trình bày của mỗi chủ đề ngắn gọn để dễ đọc. Cái này chương rất được khuyến khích cho những độc giả chưa xem toán vừa rồi; nếu bạn cần ôn lại môn toán, thì Chương 1 là dành cho bạn. Việc nắm vững những kiến thức cơ bản là vô cùng quan trọng. sinp0q là gì?

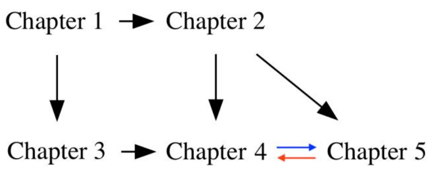
sinpp{4q là gì ? Đồ thị của sinpxq trông như thế nào? Người học trưởng thành có thể sử dụng chương đánh giá này như một liệu pháp để phục hồi sau bất kỳ trải nghiệm học toán đau thương nào mà họ có thể gặp phải ở trường trung học.

Trong Chương 2, chúng ta sẽ xem xét các kỹ thuật toán học phổ thông có thể được sử dụng như thế nào để mô tả và mô hình hóa thế giới. Chúng ta sẽ tìm hiểu về các định luật cơ bản chi phối chuyển động của các vật thể và các phương trình toán học mô tả chuyển động đó. Đến cuối chương này, bạn sẽ hiểu các khái niệm về vận tốc và gia tốc, đồng thời có thể dự đoán thời gian bay của một quả bóng được ném lên không trung.

Trong Chương 3, chúng ta sẽ tìm hiểu về vectơ. Vectơ mô tả các đại lượng có hướng như lực và vận tốc. Chúng ta cần các vectơ để hiểu đúng các định luật vật lý. Vectơ được sử dụng trong nhiều lĩnh vực khoa học và công nghệ, vì vậy việc trở nên thoải mái với các phép tính vectơ sẽ mang lại lợi ích khi học các môn học khác.

Chương 4 là tất cả về cơ học. Chúng ta sẽ nghiên cứu chuyển động của các vật thể, dự đoán quỹ đạo tương lai của chúng và học cách sử dụng các khái niệm trừu tượng như động lượng và năng lượng. Những sinh viên khoa học “ghét” vật lý có thể nghiên cứu chương này để biết cách sử dụng 20 phương trình và định luật vật lý chính. Bạn sẽ thấy vật lý thực sự khá đơn giản.

Chương 5 bao gồm các chủ đề từ phép tính vi phân và phép tính tích phân. Chúng ta sẽ nghiên cứu giới hạn, đạo hàm, tích phân, dãy và chuỗi. Bạn sẽ thấy rằng 130 trang là đủ để bao quát tất cả các khái niệm trong giải tích, bao gồm cả các ứng dụng thực tế.



Hình 2: Cấu trúc điều kiện tiên quyết cho các chương trong cuốn sách này.

Giải tích và cơ học thường được dạy như những môn học riêng biệt. Không nên như vậy! Nếu học giải tích mà không máy móc sẽ rất nhàm chán. Nếu bạn học vật lý mà không tính toán, bạn sẽ không thực sự hiểu. Phần trình bày trong cuốn sách này bao gồm cả hai chủ đề theo cách tích hợp và làm nổi bật mối liên hệ giữa chúng.

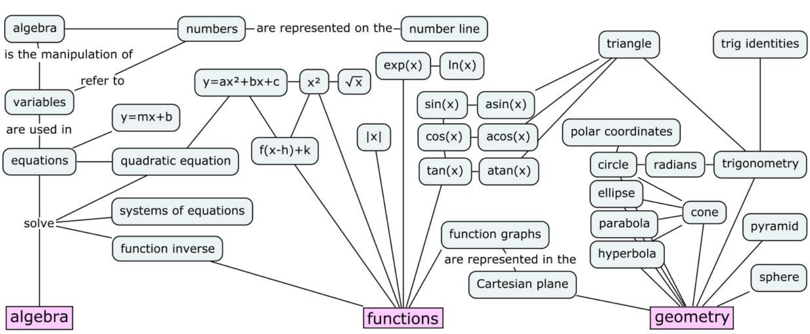
Bạn đã sẵn sàng cho việc này chưa? Nào cùng đào vào bên trong!

Chương 1

Toán cơ bản

Trong chương này, chúng ta sẽ xem lại những ý tưởng cơ bản của toán học, bao gồm các số, phương trình và hàm số. Để hiểu sách giáo khoa trình độ đại học, bạn cần thông thạo các phép tính toán học. Tuy nhiên, nhiều người gặp rắc rối với toán học.
Một số người nói rằng họ ghét toán học, hoặc không bao giờ có thể học được nó. Không có gì lạ khi những đứa trẻ đạt điểm kém trong các kỳ thi toán ở trường sẽ phát triển các phức hợp toán học trong cuộc sống trưởng thành của chúng. Nếu bạn đang mang bất kỳ hành lý cảm xúc nào như vậy, bạn có thể thả nó ngay tại đây và ngay Hiện nay.

KHÔNG lo lắng về toán học! Bạn là người lớn và bạn có thể học toán dễ dàng hơn nhiều so với khi còn nhỏ. Chúng ta sẽ xem lại mọi thứ bạn cần biết về môn toán phổ thông, và đến cuối chương này, bạn sẽ thấy môn toán không có gì phải lo lắng.



Hình 1.1: Bản đồ khái niệm thể hiện các chủ đề toán học mà chúng ta sẽ đề cập trong chương này. Chúng ta sẽ học cách giải các phương trình bằng đại số, cách lập mô hình thế giới bằng các hàm và cách tư duy hình học. Tài liệu trong chương này cần thiết cho sự hiểu biết của bạn về các chủ đề nâng cao hơn trong cuốn sách này.

1.1 Giải phương trình

Hầu hết các kỹ năng toán học đều có khả năng thao tác và giải các phương trình. Giải một phương trình có nghĩa là tìm giá trị của ẩn số trong phương trình.

Kiểm tra cái chết tiệt này:

$$x^2 ´ 4 “ 45.$$

Để giải phương trình trên tức là trả lời câu hỏi “X là gì?”
Chính xác hơn, chúng tôi muốn tìm số có thể thay thế x trong phương trình để đẳng thức giữ nguyên. Nói cách khác, chúng tôi đang hỏi,

“Số nào nhân chính nó trừ bốn bằng 45?”

Đó là một câu cửa miệng, bạn có nghĩ vậy không? Để khắc phục sự dài dòng này, các nhà toán học thường sử dụng các ký hiệu chuyên biệt để mô tả các phép toán. Vấn đề là những ký hiệu chuyên biệt này có thể rất khó hiểu. Đôi khi, ngay cả những khái niệm toán học đơn giản nhất cũng không thể truy cập được nếu bạn không biết ý nghĩa của các ký hiệu.

Cảm xúc của bạn về toán học là gì, độc giả thân mến? Bạn có sợ nó không? Bạn có lo lắng tấn công vì bạn nghĩ rằng nó sẽ quá khó đối với bạn không? Sự ớn lạnh! Thư giãn đi anh chị em. Không có gì để nó. Không ai có thể đoán được nghiệm của một phương trình ngay lập tức. Để tìm giải pháp, bạn phải chia vấn đề thành các bước đơn giản hơn. Chúng ta hãy cùng nhau vượt qua điều này.

Để tìm x, chúng ta có thể thao tác với phương trình ban đầu, biến đổi nó thành một phương trình khác (đúng như phương trình đầu tiên) giống như sau:

$$x “chỉ các số.$$

Đó là ý nghĩa của việc giải một phương trình: phương trình được giải vì ẩn số được cô lập ở một phía, trong khi các hằng số được nhóm lại ở phía bên kia. Bạn có thể nhập các số ở phía bên tay phải vào máy tính bỏ túi và nhận giá trị số của x.

Nhân tiện, trước khi chúng ta tiếp tục thảo luận, hãy lưu ý: ký hiệu đẳng thức (“) có nghĩa là tất cả những gì ở bên trái của “ đều bằng với tất cả những gì ở bên phải của “. Để giữ cho mệnh đề đẳng thức này đúng, đối với mọi thay đổi mà bạn áp dụng cho vế trái của phương trình, bạn phải áp dụng thay đổi tương tự cho vế phải của phương trình.

Để tìm x, chúng ta cần biến phương trình ban đầu thành dạng cuối cùng của nó, đơn giản hóa nó từng bước cho đến khi không thể đơn giản hóa được nữa. Yêu cầu duy nhất là các thao tác mà chúng ta thực hiện biến đổi một phương trình đúng thành một phương trình đúng khác. Trong ví dụ này, bước đơn giản hóa đầu tiên là thêm số bốn vào cả hai vế của phương trình:

$$x^2 ´ 4 ` 4 “ 45 ` 4,$$

mà đơn giản hóa để

$$x2 " 49.$$

Bây giờ biểu thức trông đơn giản hơn, phải không? Làm sao tôi biết để thực hiện thao tác này? Tôi muốn "hoàn tác" các tác động của thao tác ´4.

Chúng tôi hoàn tác một hoạt động bằng cách áp dụng nghịch đảo của nó. Trong trường hợp phép toán là phép trừ của một số tiền, phép toán ngược lại là phép cộng của cùng một số tiền. Chúng ta sẽ tìm hiểu thêm về hàm ngược trong Phần 1.5.

Chúng ta đang tiến gần hơn đến mục tiêu cô lập x ở một vế của phương trình, chỉ để lại các số ở vế kia. Bước tiếp theo là hoàn tác phép toán x2 bình phương . Phép toán nghịch đảo của bình phương một số x2 là lấy căn bậc hai của nó ? , vì vậy đó là những gì chúng ta sẽ làm tiếp theo.

Chúng tôi đạt được

$$\text{một } \overline{x2} " ? \overline{49}.$$

Lưu ý cách chúng ta áp dụng căn bậc hai cho cả hai vế của phương trình? Nếu chúng ta không áp dụng cùng một phép toán cho cả hai bên, chúng ta sẽ phá vỡ sự bình đẳng!

Phương trình? $\overline{x2}$ " ? $\overline{49}$ rút gọn thành

$$|x| " 7.$$

Có chuyện gì xảy ra với các thanh dọc xung quanh x vậy? Kí hiệu |x| là viết tắt của giá trị tuyệt đối của x, giống như x ngoại trừ việc chúng ta bỏ qua dấu hiệu cho biết x dương hay âm. Ví dụ |5| " 5 và | ´ 5| "5 cũng vậy. Phương trình |x| " 7 chỉ ra rằng cả x " 7 và x " ´7 đều thỏa mãn phương trình x2 " 49. Bảy bình phương là 49, 72 " 49, và âm bảy bình phương cũng là 49, p´7q2 " 49, bởi vì hai dấu âm triệt tiêu nhau khác ra.

Các nghiệm cuối cùng của phương trình x2 ´ 4 " 45 là

$$x " 7 \text{ và } x " ´7.$$

Vâng, có hai câu trả lời có thể. Bạn có thể kiểm tra xem cả hai giá trị trên của x có thỏa mãn phương trình ban đầu x2 ´ 4 " 45.

Nếu bạn cảm thấy thoải mái với tất cả các khái niệm về toán phổ thông và bạn cảm thấy mình có thể tự mình giải phương trình x2 ´ 4 " 45, thì bạn có thể đọc lướt qua chương này một cách nhanh chóng. Mặt khác, nếu bạn đang thắc mắc làm thế nào mà tiếng ngoằn ngoèo giết chết sức mạnh hai, thì chương này là dành cho bạn! Trong các phần tiếp theo, chúng tôi sẽ xem xét tất cả các khái niệm cơ bản của môn toán phổ thông mà bạn sẽ cần để củng cố trong phần còn lại của cuốn sách này. Đầu tiên, hãy để tôi nói với bạn về các loại số khác nhau.

1.2 Số

Ban đầu, chúng ta phải xác định những người chơi chính trong thế giới toán học: các con số.

Các định nghĩa

Số là đối tượng cơ bản mà chúng ta sử dụng để đếm, đo lường, định lượng và tính toán mọi thứ. Các nhà toán học muốn phân loại các loại đối tượng giống số khác nhau thành các loại gọi là tập hợp:

• Các số tự nhiên: N “ t0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, . . .

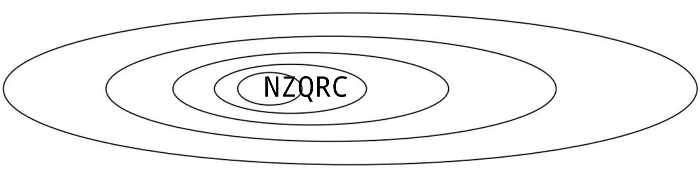
u • Các số nguyên: Z “ t..., ´3, ´2, ´1, 0, 1, 2,

3, . . . u • Các số hữu tỉ: Q “ t $\frac{5}{3}$, $\frac{22}{7}$, 1.5, 0.125, ´7, . . .

u • Các số thực: R “ t´1, 0, 1, ? 2,e, p,4,94 . . . , . . . u

• Các số phức: C “ t´1, 0, 1, i, 1 ` i, 2 ` 3i,... u

Những loại số này sẽ hơi quen thuộc với bạn.
Hãy nghĩ về chúng như những nhãn phân loại gọn gàng cho mọi thứ mà bạn thường gọi là số. Mỗi nhóm trong danh sách trên là một tập hợp.
Một bộ là một tập hợp các mặt hàng cùng loại. Mỗi bộ sưu tập có một tên và một định nghĩa chính xác cho các mục thuộc về bộ sưu tập đó. Cũng lưu ý rằng mỗi tập hợp trong danh sách chứa tất cả các tập hợp ở trên nó, như được minh họa trong Hình 1.2. Hiện tại, chúng ta không cần đi sâu vào chi tiết về các tập hợp và ký hiệu tập hợp, nhưng chúng ta cần biết về các tập hợp số khác nhau.



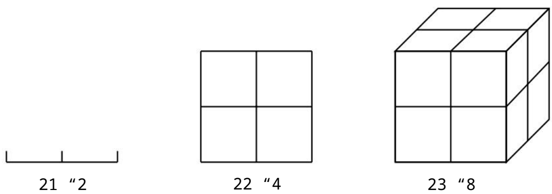
Hình 1.2: Minh họa về cấu trúc ngăn lồng nhau của các bộ số khác nhau. Tập hợp các số tự nhiên chứa trong tập hợp các số nguyên và tập hợp này chứa trong tập hợp các số hữu tỉ. Tập hợp các số hữu tỉ chứa trong tập hợp các số thực, tập hợp này chứa trong tập hợp các số phức.

Tại sao chúng ta cần rất nhiều bộ số khác nhau? Mỗi bộ số được liên kết với các vấn đề toán học ngày càng nâng cao.

Các số đơn giản nhất là các số tự nhiên N, đủ cho mọi nhu cầu toán học của bạn nếu tất cả những gì bạn làm là đếm các thứ.
Có bao nhiêu con dê? Năm con dê ở đây và sáu con dê ở kia nên tổng cộng là

số 2 tương ứng với đoạn thẳng có độ dài bằng 2, là đối tượng hình học trong không gian một chiều. Nếu chúng ta thêm một đoạn thẳng có độ dài hai trong chiều thứ hai, chúng ta sẽ có một hình vuông có diện tích 22 trong không gian hai chiều. Thêm chiều thứ ba, ta được hình lập phương có thể tích 23 trong không gian ba chiều. Thật vậy, việc nâng cơ số a lên số mũ 2 thường được gọi là “bình phương” và nâng a lên lũy thừa 3 được gọi là “lập phương”.

Sự tương tự hình học về đại lượng một chiều là độ dài, đại lượng hai chiều là diện tích và đại lượng ba chiều là thể tích là điều cần ghi nhớ.



Hình 1.5: Diễn giải hình học cho số mũ 1, 2 và 3. Độ dài tăng lên số mũ 2 tương ứng với diện tích hình vuông. Độ dài tương tự được nâng lên số mũ 3 tương ứng với thể tích của một khối lập phương.

Trực giác thị giác của chúng ta hoạt động rất tốt trong không gian ba chiều, nhưng chúng ta có thể sử dụng các phương tiện khác để hình dung các số mũ cao hơn, như minh họa trong Hình 1.6.

Ưu tiên điều hành

Có một quy ước chuẩn về thứ tự thực hiện các phép toán. Các phép toán đại số cơ bản được ưu tiên như sau:

1. Dấu ngoặc đơn

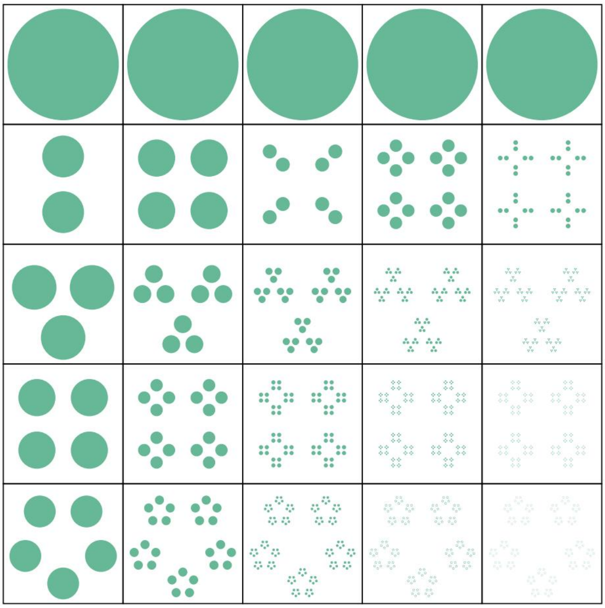
2. Số mũ 3.

Phép nhân và phép chia

4. Phép cộng và phép trừ

Nếu bạn nhìn thấy danh sách này lần đầu tiên, thì từ viết tắt PEMDAS và từ gợi nhớ liên quan “Xin thứ lỗi cho dì Sally thân mến của tôi,” có thể giúp bạn ghi nhớ thứ tự các thao tác.

Chẳng hạn, biểu thức 5 ¨ 32 ` 13 được hiểu là “Đầu tiên, tìm bình phương của 3, sau đó nhân nó với 5, rồi cộng 13.” Cần có dấu ngoặc đơn để thực hiện các thao tác theo một thứ tự khác: nhân 5 lần 3 trước rồi lấy bình phương, phương trình sẽ đọc



Hình 1.6: Trực quan hóa các số được nâng lên các số mũ khác nhau. Mỗi hộp trong lưới này chứa một dấu chấm, trong đó cơ sở thay đổi từ một đến năm, và số mũ n thay đổi từ một đến năm. Ở hàng đầu tiên chúng ta thấy rằng số a “ 1 nâng lên thành bất kỳ số mũ nào cũng bằng chính nó. Thư hai hàng tương ứng với cơ số a “ 2 nên số chấm tăng gấp đôi mỗi lần chúng tôi tăng số mũ lên một. Bắt đầu từ 21 “ 2 trong cột đầu tiên, chúng tôi kết thúc với 25 “ 32 trong cột cuối cùng. Các hàng còn lại chỉ ra cách lũy thừa hoạt động cho các cơ sở khác nhau.

p5 ¨ 3q2 ` 13, trong đó dấu ngoặc đơn cho biết hình vuông tác dụng lên p5 ¨ 3q như một tổng thể và không phải trên 3 một mình.

bài tập

E1.1 Giải tìm x chưa biết trong các phương trình sau:

a) 3x ` 2 ´ 5 “ 4 ` 2

b) $\frac{1}{2}$x ´ 3 “ ? 3 ` 12 ´ ? 3

c) $\frac{7x´4}{2}$ ` 1 “ 8 ´ 2

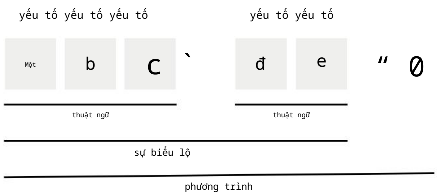
d) 5x ´ 2 ` 3 “ 3x ´ 5

E1.2 Cho biết tất cả các bộ số mà các số sau thuộc về.

a) ´2 b) ?´3 c) 8 ˜ 4 đ) $\frac{5}{3}$ e) $\frac{P}{2}$

E1.3 Tính giá trị của các biểu thức sau:

a) 233 ´ 3 b) 23p3 ´ 3q c) $\frac{4´2}{33}$ p6 ¨ 7 ´ 41q



Hình 1.14: Biểu đồ hiển thị các tên được sử dụng để mô tả các phần khác nhau của phương trình abc ` de “ 0.

Chúng tôi sử dụng thuộc tính phân phối mỗi khi chúng tôi mở rộng dấu ngoặc. Ví dụ: apb `c `dq “ab `ac `ad. Dấu ngoặc đơn, còn được gọi là dấu ngoặc đơn, cho biết biểu thức pb ` c ` dq phải được coi là một tổng thể; như một yếu tố bao gồm ba thuật ngữ. Nhân biểu thức này với a cũng giống như nhân mỗi số hạng với a.

Hoạt động ngược lại của việc mở rộng được gọi là phân tích bao thanh toán, bao gồm việc viết lại biểu thức với các phần chung được lấy ra trước dấu ngoặc: ab ` ac “ apb ` cq. Trong phần này, chúng ta sẽ thảo luận về tất cả các phép toán đại số và minh họa khả năng của chúng.

Ví dụ Giả sử chúng ta được yêu cầu giải t trong phương trình

7p3 ` 4tq “ 11p6t ´ 4q.

Vì t chưa biết xuất hiện ở cả hai vế của phương trình nên không rõ ràng ngay lập tức về cách tiến hành.

Để giải t, ta có thể đưa tất cả các số hạng của t sang một vế và tất cả các hằng số điều khoản cho phía bên kia. Đầu tiên, mở rộng hai dấu ngoặc để có được

21 ` 28t “ 66t ´ 44.

Sau đó, di chuyển mọi thứ xung quanh để di chuyển tất cả ts sang vế phải của phương trình và tất cả các hằng số sang vế trái:

21 ` 44 “ 66t ´ 28t.

Chúng ta thấy t được chứa trong cả hai số hạng ở vế phải, vì vậy chúng ta có thể “xác định nó” bằng cách viết lại phương trình dưới dạng

21 ` 44 “ tp66 ´ 28q.

Câu trả lời nằm trong tầm tay :t“ $\frac{21`44}{66´28}$ “ $\frac{65}{38}$.

mở rộng dấu ngoặc

Để mở rộng một dấu ngoặc là nhân mỗi số hạng bên trong dấu ngoặc với thừa số bên ngoài dấu ngoặc. Điều quan trọng cần nhớ khi mở rộng dấu ngoặc vuông là áp dụng thuộc tính phân phối: apx ` yq “ ax ` ay.

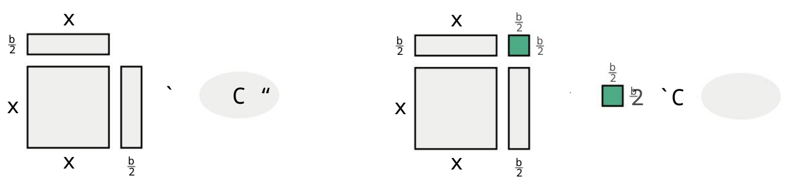
hằng số hiệu chỉnh px `pq2 ` k. Kỹ thuật đại số này đã được mô tả trong một trong những cuốn sách đầu tiên về al-jabr (đại số), được viết bởi Al-Khwarizmi vào khoảng năm 800 CN. Cái tên "hoàn thành hình vuông" xuất phát từ cấu trúc hình học khéo léo được sử dụng bởi thủ tục này. Vâng, chúng ta có thể sử dụng hình học để giải các bài toán đại số!

Chúng ta giả sử điểm bắt đầu của quy trình là một biểu thức bậc hai có hệ số bậc hai là một, 1x2 `Bx `C, và sử dụng chữ in hoa B và C để biểu thị các hệ số tuyến tính và hằng số. Các chữ in hoa là để tránh nhầm lẫn với biểu thức bậc hai ax2 ` bx ` c, mà a ‰ 1. Lưu ý chúng ta luôn có thể viết ax2 ` bx ` c dưới dạng $\frac{b}{\text{Một}}$x ` $\frac{c}{\text{Một}}$q và áp dụng quy trình cho biểu thức với B apx2 ` sion bên trong ngoặc, xác định $\frac{b}{\text{Một}}$ và với C. $\frac{c}{\text{Một}}$

Trước tiên, hãy viết lại biểu thức bậc hai x2 ` Bx ` C bằng cách tách số hạng tuyến tính thành hai phần bằng nhau:

$$x2 \text{ ` } \frac{b}{2}x \text{ ` } \frac{b}{2}x \text{ `}C.$$

Chúng ta có thể diễn giải ba số hạng đầu tiên về mặt hình học như sau: x2 số hạng tương ứng với hình vuông có cạnh dài x, còn hai số $\frac{b}{2}$x hạng tương ứng với hình chữ nhật có cạnh $\frac{b}{2}$ và x. Xem bên trái như Hình 1.15 để minh hoạ.



Hình 1.15: Để hoàn thành bình phương trong biểu thức x2 `Bx `C, ta cần để thêm đại lượng p $\frac{b}{2}$q2, tương ứng với một hình vuông (được hiển thị bằng màu đậm hơn màu) với các cạnh bằng một nửa hệ số của số hạng tuyến tính. Chúng tôi cũng trừ p $\frac{b}{2}$q2 nên giá trị chung của biểu thức không đổi.

Hình vuông có diện tích x2 và hai hình chữ nhật có thể được định vị để tạo thành một hình vuông lớn hơn có độ dài cạnh ` $\frac{b}{x}$ ` 2 ˘ . lưu ý có một nhỏ mảnh của các mặt $\frac{b}{2}$ qua bị $\frac{b}{2}$ thiếu từ góc. Để hoàn thành hình vuông, chúng ta có thể thêm một $\frac{b}{2}$ ˘2 cho biểu thức này. Để giữ gìn sự bình đẳng, chúng tôi cũng trừ ` $\frac{b}{}$ thuật ngữ ` 2 ˘2 từ biểu thức để có được:

$$x2 \text{ ` } \frac{b}{2}x \text{ ` } \frac{b}{2}x \text{ ` } C \text{ " } x2 \text{ ` } \underbrace{\frac{b}{}x \text{ ` } \frac{b}{2}x \text{ ` ` } \frac{b}{2\text{˘}2}}_{2 \text{ loooooooooooomoooooooooon}} \text{ , ` } \frac{b}{2}\text{˘}2 \text{ `}C$$

$$\text{" ` } x \text{ ` } \frac{b}{2\text{˘}2} \text{ ` Vế phải của } \frac{b}{2}\text{˘}2 \text{ `}C.$$

phương trình này mô tả diện tích hình vuông với độ dài cạnh ` x ` $\frac{b}{2}$ ˘ , trừ đi diện tích của hình vuông nhỏ ` $\frac{b}{2\text{˘}2}$, cộng với hằng số C, như minh họa ở phía bên phải của Hình 1.15.

bài tập

E1.7 Nhân tử các biểu thức bậc hai sau:

a) x2 ´ 8x ` 7 b) x2 ` 4x ` 4 c) x2 ´ 9

Gợi ý: Đoán giá trị p và q trong biểu thức px ` pqpx ` qq.

E1.8 Giải các phương trình bằng cách điền vào bình phương.

a) x2 ` 2x ´ 15 “ 0 b) x2 ` 4x ` 1 “ 0

1.7 Giải phương trình bậc hai

Bạn sẽ làm gì nếu được yêu cầu giải tìm x trong phương trình bậc hai 2x2 “ 4x ` 6? Đây được gọi là phương trình bậc hai vì nó chứa biến x bình phương chưa biết. Tên đến từ tiếng Latinh quadratus, có nghĩa là hình vuông. Phương trình bậc hai xuất hiện thường xuyên, vì vậy các nhà toán học đã tạo ra một công thức chung để giải quyết chúng. TRONG phần này, chúng ta sẽ tìm hiểu về công thức này và sử dụng nó để đặt một số phương trình bậc hai ở vị trí của chúng.

Trước khi có thể áp dụng công thức, chúng ta cần viết lại phương trình chúng tôi đang cố gắng giải quyết theo mẫu sau:

ax2 `bx` c “0.

Đây được gọi là dạng chuẩn của phương trình bậc hai. Chúng tôi đạt được biểu mẫu này bằng cách di chuyển tất cả các số và xs sang một bên và để lại chỉ có 0 ở phía bên kia. Ví dụ, để biến đổi phương trình bậc hai phương trình 2x2 “ 4x ` 6 về dạng chuẩn, chúng ta trừ 4x ` 6 từ cả hai vế của phương trình để có được 2x2 ´ 4x ´ 6 “ 0. giá trị của x thỏa mãn phương trình này?

Công thức phương trình bậc hai

Các nghiệm của phương trình ax2 ` bx ` c “ 0 với a ‰ 0 là

x1 “ (´b ` ? b2 ´ 4ac) / 2a Và x2 “ (´b ´ ? b2 ´ 4ac) / 2a .

Công thức bậc hai thường được viết tắt là x “ dấu “˘” (´b˘ ?b2´4ac) / 2a ,Ở đâu là viết tắt của cả “`” và “´.” Kí hiệu “˘” cho phép chúng ta biểu diễn cả hai nghiệm x1 và x2 trong một phương trình, nhưng bạn nên ghi nhớ thực sự có hai giải pháp.

1.9 Logarit

Một số người nghĩ rằng từ “logarit” đề cập đến một con quái vật toán học thần thoại nào đó. Truyền thuyết kể rằng logarit có nhiều đầu, thở ra lửa và cực kỳ khó hiểu. Vô lý!

Logarit rất đơn giản. Bạn sẽ mất tối đa một vài trang để làm quen với việc thao tác với chúng và đó là một điều tốt vì logarit được sử dụng ở khắp mọi nơi.

Độ mạnh của hệ thống âm thanh của bạn được đo bằng đơn vị logarit gọi là decibel. Điều này là do tai của bạn chỉ nhạy cảm với sự khác biệt theo cấp số nhân về cường độ âm thanh. Logarit cho phép chúng ta so sánh các số rất lớn và các số rất nhỏ trên cùng một thang đo. Nếu âm thanh được đo bằng đơn vị tuyến tính thay vì đơn vị micrô logarit, thì điều khiển âm lượng của hệ thống âm thanh của bạn sẽ cần nằm trong khoảng từ 1 đến 1 048 576. Điều đó có lạ không? Đây là lý do tại sao chúng tôi sử dụng thang logarit cho các rãnh âm lượng. Sử dụng thang logarit, chúng ta có thể đi từ mức cường độ âm thanh 1 đến mức cường độ âm thanh 1 048 576 trong 20 bước “tăng dần”. Giả sử mỗi rãnh tăng gấp đôi cường độ âm thanh, thay vì tăng cường độ theo một lượng cố định. Nếu rãnh thứ nhất tương ứng với 2, thì rãnh thứ hai là 4—có thể vẫn ở dạng âm thanh, hãy vặn to lên! Vào thời điểm bạn đạt đến bậc thứ sáu, bạn đang ở cường độ âm thanh 26 “64, là mức âm nhạc có thể nghe được. Vạch thứ mười tương ứng với cường độ âm thanh 210 “ 1024 (âm thanh cường độ trung bình) và cuối cùng đến vạch thứ hai mươi đạt công suất tối đa là 220 “ 1 048 576, lúc đó hàng xóm đến phàn n

Các định nghĩa

Hy vọng bạn đã quen thuộc với các khái niệm sau đây từ phần trước: • bx: cơ số hàm mũ

b • exppxq “ ví dụ: hàm số mũ cơ số

e, số Euler • 2x: cơ số hàm số mũ 2 • f: khái niệm hàm số • f

´1: hàm ngược của f . Hàm ngược

được xác định theo f sao cho

f ´1pfpxqq “ x. Nói cách khác, nếu bạn áp dụng f cho một số x nào đó và nhận được kết quả là y, sau đó bạn chuyển y qua f ´1, kết quả đầu ra sẽ lại là x. Hàm nghịch đảo f hoàn tác các hiệu ứng của hàm f .
´1

Trong phần này, chúng ta sẽ chơi với các khái niệm mới sau:

• logbpxq: logarit của x cơ số b là hàm ngược của bx. • lnpxq: cơ số logarit “tự nhiên” e. Đây là nghịch đảo của ex. • log2pxq: logarit cơ số 2 là nghịch đảo của 2x.

biến (biến thay đổi tự do) và trục y biểu thị biến phụ thuộc fpxq, vì fpxq phụ thuộc vào x.
Để vẽ đồ thị của bất kỳ hàm fpxq nào, hãy sử dụng quy trình sau. Hãy tưởng tượng thực hiện quét qua tất cả các giá trị đầu vào có thể có cho hàm. Đối với mỗi đầu vào x, đặt một điểm tại tọa độ px, yq " px, fpxqq trong mặt phẳng Descartes. Khi sử dụng đồ thị của một hàm, bạn có thể thấy chức năng của hàm theo nghĩa đen: "chiều cao" y của đồ thị tại một tọa độ x cho trước cho bạn biết giá trị của hàm fpxq.

kích thước

Dòng số là một chiều. Mỗi số x có thể được trực quan hóa như một điểm trên trục số. Mặt phẳng Descartes có hai chiều: chiều x và chiều y. Nếu chúng ta cần trực quan hóa các khái niệm toán học ở dạng 3D, chúng ta có thể sử dụng hệ tọa độ ba chiều với các trục x, y và z (xem Hình 3.10 trên trang 196).

1.11 Chức năng

Chúng ta cần có một cuộc nói chuyện về mối quan hệ. Chúng ta cần nói về chức năng. Chúng ta sử dụng các hàm để mô tả mối quan hệ giữa các biến. Cụ thể, các hàm mô tả cách một biến phụ thuộc vào một biến khác.

Ví dụ: doanh thu R từ một buổi biểu diễn ca nhạc phụ thuộc vào số lượng vé bán ra n. Nếu mỗi vé có giá 25 đô la, doanh thu từ buổi hòa nhạc có thể được viết dưới dạng một hàm của n như sau: Rpnq " 25n. Giải n trong phương trình Rpnq " 7000 cho chúng ta biết số lần bán vé cần thiết để tạo ra doanh thu $7000. Đây là một mô hình đơn giản của một chức năng; khi kiến thức của bạn về các hàm được xây dựng, bạn sẽ học cách xây dựng các mô hình thực tế chi tiết hơn. Chẳng hạn, nếu bạn cần bao gồm phí xử lý 5% để phát hành vé, bạn có thể cập nhật mô hình doanh thu thành Rpnq " 0,95 ¨ 25 ¨ n. Nếu chi phí ước tính để tổ chức buổi hòa nhạc là C "$2000, thì lợi nhuận từ buổi hòa nhạc P có thể được mô hình hóa như sau

Ppnq " Rpnq ´ C
" 0,95 ¨ $25 ¨ n ´ $2000

Hàm Ppnq " 23,75n ´2000 mô hình lợi nhuận từ buổi hòa nhạc như một hàm của số lượng vé bán ra. Đây là một mô hình khá tốt và bạn luôn có thể cập nhật nó sau khi tìm hiểu thêm thông tin.

Bạn càng biết nhiều chức năng, bạn càng có nhiều công cụ để biến đổi hiện thực. Để "biết" một chức năng, bạn phải có khả năng hiểu

Machine Translated by Google

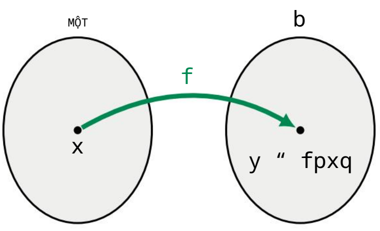
và kết nối một số khía cạnh của nó. Trước tiên, bạn cần biết định nghĩa toán học của hàm , định nghĩa này mô tả chính xác chức năng của hàm. Bắt đầu từ định nghĩa của hàm, bạn có thể sử dụng các kỹ năng toán học hiện có của mình để tìm các thuộc tính của hàm. Bạn cũng phải biết đồ thị của hàm số; hàm trông như thế nào nếu bạn vẽ đồ thị x so với fpxq trong mặt phẳng Descartes. Bạn cũng nên ghi nhớ các giá trị của hàm đối với một số đầu vào quan trọng.
Cuối cùng—và đây là phần cần thời gian—bạn phải tìm hiểu về mối quan hệ của hàm này với các hàm khác.

Các định nghĩa

Một hàm là một đối tượng toán học lấy các số làm đầu vào và tạo ra các số làm đầu ra. Chúng tôi sử dụng ký hiệu

f : A Ñ B

để biểu thị một hàm từ tập đầu vào A đến tập đầu ra B. Trong cuốn sách này, chúng ta chủ yếu nghiên cứu các hàm lấy số thực làm đầu vào và cho số thực làm đầu ra: f : R Ñ R.



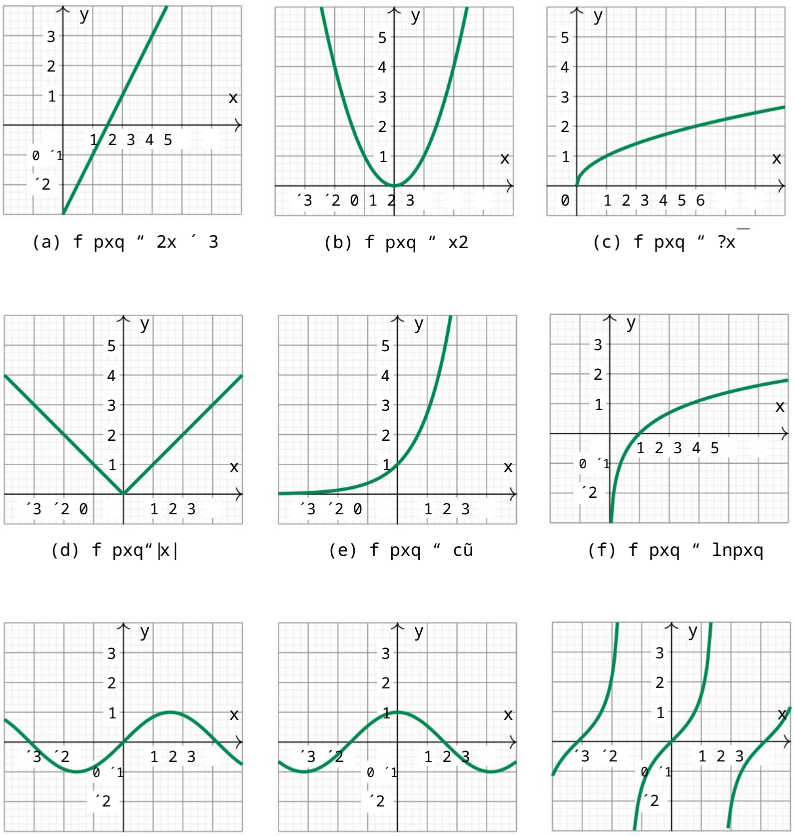
Hình 1.20: Biểu diễn trừu tượng của hàm f từ tập A đến tập B. Hàm f là mũi tên ánh xạ từng đầu vào x trong A tới đầu ra f pxq trong B. Đầu ra của hàm f pxq cũng được ký hiệu y.

Một chức năng không phải là một số; đúng hơn, nó là ánh xạ từ số này sang số khác. Chúng tôi nói “ f ánh xạ x tới fpxq.” Đối với bất kỳ đầu vào x nào, giá trị đầu ra của f cho đầu vào đó được ký hiệu là fpxq, được đọc là “ f của x”.

Bây giờ chúng ta sẽ định nghĩa một số thuật ngữ kỹ thuật ưa thích được sử dụng để mô tả các bộ chức năng đầu vào và đầu ra.

- A: bộ nguồn của hàm mô tả các loại số mà hàm lấy làm đầu vào.
- Dompfq: miền của hàm là tập hợp các đầu vào được phép các giá trị cho hàm.

Để xây dựng trực giác toán học, điều cần thiết là bạn phải hiểu đồ thị của hàm số. Việc ghi nhớ các định nghĩa và thuộc tính của các hàm trở nên dễ dàng hơn rất nhiều với hình ảnh đi kèm. Thật vậy, nhớ lại chức năng “trông như thế nào” là một cách tuyệt vời để rèn luyện bản thân để nhận ra các loại chức năng khác nhau. Hình 1.28 cho thấy đồ thị của một số hàm quan trọng nhất mà chúng ta sẽ sử dụng trong cuốn sách này.



(a) f pxq “ 2x ´ 3 (b) f pxq “ x2 (c) f pxq “ ?x

(d) f pxq“|x| (e) f pxq “ cũ (f) f pxq “ lnpxq

(g) f pxq “ sinpxq (h) f pxq “ cospxq (i) f pxq “tanpxq

Hình 1.28: Chúng ta sẽ thấy nhiều loại đồ thị hàm số trong các trang tiếp theo.

Đường kẻ

Phương trình của một dòng mô tả mối quan hệ đầu vào-đầu ra trong đó sự thay đổi của đầu ra tỷ lệ thuận với sự thay đổi của đầu vào.

Phương trình của một đường thẳng là

fpxq “ mx ` b.

Machine Translated by Google

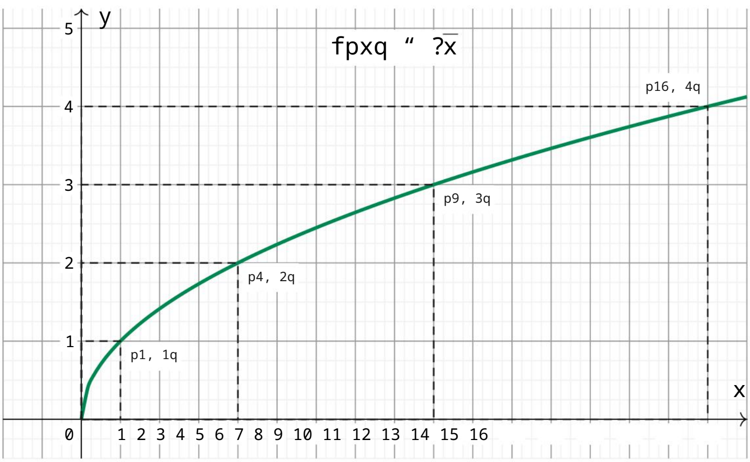
Căn bậc hai

Hàm căn bậc hai được ký hiệu

fpxq “ ?x “ x ¯ 1 2 ·

Căn bậc hai ?x là hàm nghịch đảo của hàm bậc hai x2 khi hai hàm được xác định là f : R` Ñ R`. Kí hiệu ?c là nghiệm dương của x2 “ c. Lưu ý rằng ´?c cũng là một nghiệm của x2 “ c.

đồ thị



Hình 1.31: Đồ thị của hàm f pxq “ ?x. Tập xác định của hàm là R` vì chúng ta không thể lấy căn bậc hai của một số âm.

Của cải

• Tên miền: R` “ tx P R | x • 0u. Hàm fpxq “ ?x chỉ được xác định cho các đầu vào không âm. Không có số thực y sao cho y2 âm, do đó hàm fpxq “ ?x không được xác định cho đầu vào âm x. • Hình

ảnh: R` “ ty P R | y • 0u. Đầu ra của hàm fpxq “ ?x là các số không âm vì ?x • 0.

Ngoài căn bậc hai, còn có căn bậc ba fpxq “ ?3 x “ x là hàm ¯ 1 3, nghịch đảo của hàm bậc ba fpxq “ x3. Ta có ?3 8 “ 2 vì 2 ˆ 2 ˆ 2 “ 8. Tổng quát hơn, ta có thể định nghĩa hàm căn bậc n ? n x là hàm ngược của xn.

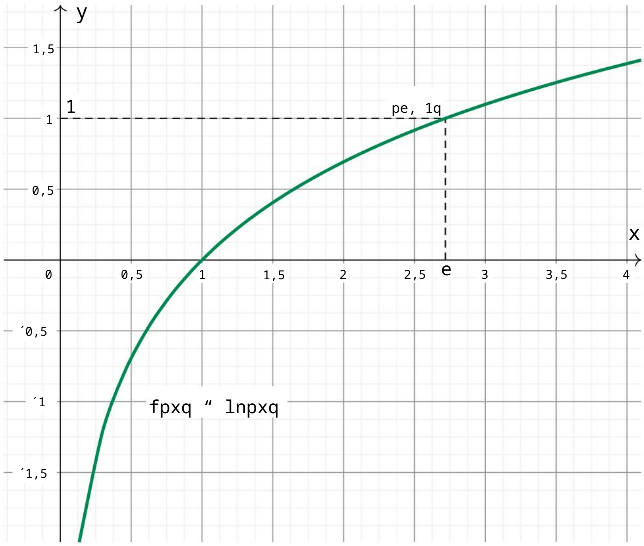
logarit tự nhiên

Hàm logarit tự nhiên được ký hiệu

fpxq “ lnpxq “ logepxq.

Hàm lnpxq là hàm ngược của cấp số nhân ex.

đồ thị



Hình 1.39: Đồ thị hàm số lnpxq đi qua điểm sau
tọa độ: p e2 1/, ´2q, p 1/e, ´1q, p1, 0q, pe, 1q, pe2, 2q, pe3, 3q, pe4, 4q, v.v.

Của cải

- Tên miền: tx P R | x ° 0u
- Ảnh: R

bài tập

E1.17 Tìm tập xác định, ảnh và nghiệm của fpxq “ 2 cospxq.

E1.18 Bậc của các đa thức sau là gì? Có phải họ
chẵn, lẻ hay không?

a) ppxq “ x2 ´ 5x4 ` b) qpxq “ x ´ x3 ` x5 ´ x7

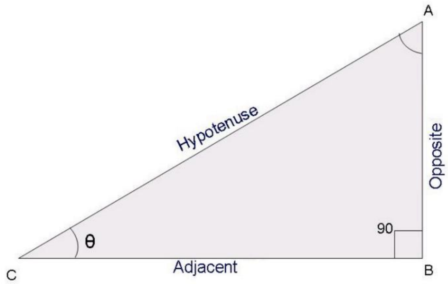
1 E1.19 Giải tìm x trong các phương trình đa thức sau.

a) 3x ` x2 “ x ´ 15 ` 2x2 b) 3x2 ´ 4x ´ 4 ` x3 “ x3 ` 2x ` 2

1.15 Lượng giác

Nếu một trong các góc của một tam giác bằng 90˝ thì ta gọi tam giác này là tam giác vuông. Trong phần này, chúng ta sẽ thảo luận rất chi tiết về ba góc vuông và tìm hiểu các tính chất của chúng. chúng ta sẽ học một số thuật ngữ mới ưa thích như cạnh huyền, đối diện và liền kề, mà được dùng để chỉ các cạnh khác nhau của một tam giác. Chúng tôi cũng sẽ sử dụng các hàm sin, cosin và tiếp tuyến để tính tỷ lệ độ dài trong các tam giác vuông.

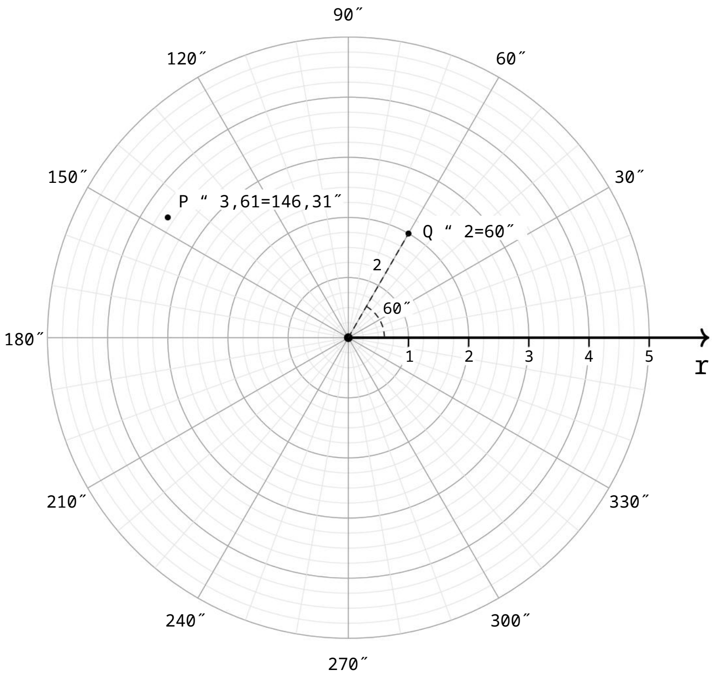
Hiểu các tam giác và các hàm lượng giác liên quan của chúng có tầm quan trọng cơ bản: bạn sẽ cần kiến thức này cho sự hiểu biết trong tương lai của bạn về các khái niệm toán học như vectơ và số phức.



Hình 1.54: Một tam giác vuông. Góc ở đáy được kí hiệu là q và tên của các cạnh của tam giác được chỉ định.

Các khái niệm

- A, B, C: ba đỉnh của tam giác
- q: góc tại đỉnh C. Góc có thể đo bằng độ hoặc radian.
- opp “ AB: độ dài cạnh đối diện với q
- adj “ BC: độ dài cạnh kề với q
- hyp “ AC: cạnh huyền. Đây là cạnh dài nhất của tam giác.
- h: “chiều cao” của tam giác (trong trường hợp này là h “ opp “ AB)
- sin q “ $\frac{\text{chống đối}}{\text{hyp}}$: sin theta là tỷ số giữa chiều dài của cạnh đối diện và độ dài của cạnh huyền
- cos q “ $\frac{\text{tính từ}}{\text{thổi phồng}}$: cosin của theta là tỷ lệ của độ dài liền kề và độ dài cạnh huyền
- tân q “ $\frac{\text{sin q cos}}{\text{q}}$ “ $\frac{\text{chống đối}}{\text{adj}}$: tiếp tuyến là tỷ lệ của đối diện chiều dài chia cho chiều dài liền kề



Hình 1.61: Ta có thể sử dụng hệ tọa độ cực để mô tả các điểm trong mặt phẳng hai chiều. Các tọa độ cực r=q mô tả điểm nằm cách gốc tọa độ một khoảng r theo hướng q.

Điểm Q “ 2=60˝ được mô tả bằng tọa độ cực 2= ´ 300˝, vì quay theo chiều kim đồng hồ 300˝ bằng với quay ngược chiều kim đồng hồ 60˝. Chúng ta cũng có thể mô tả cùng một điểm Q bằng cách sử dụng các tọa độ cực ´2=240˝ và ´2= ´ 120˝, cho chúng ta biết quay theo hướng ngược lại với 60˝ và đo khoảng cách âm r “ ´2. Trong khi tất cả các tọa độ cực này cho Q là tương đương, cách ưa thích để chỉ định tọa độ cực là với các giá trị r dương và góc |q| § 180˝.

Chuyển đổi giữa tọa độ Descartes và cực

Hình 1.62 thể hiện một điểm có vị trí được mô tả cả về của tọa độ Descartes px, yq và tọa độ cực r=q. Tam giác tạo bởi các tọa độ p0, 0q, px, 0q và px, yq là một góc vuông Tam giác. Điều này có nghĩa là chúng ta có thể áp dụng kiến thức của mình về các hàm số liệu lượng giác sin, cos và tan để có được các công thức chuyển đổi giữa tọa độ Descartes px, yq và tọa độ cực r=q.

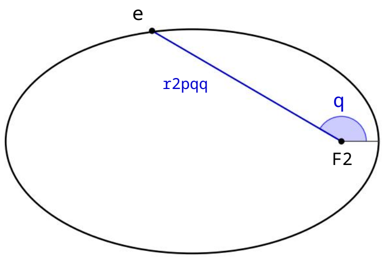
Để chuyển từ tọa độ cực r=q sang tọa độ px, yq, ta

Machine Translated by Google

một vòng tròn. Khi # “ 0 thì elip là đường tròn có bán kính a và cả hai tiêu điểm đều nằm ở tâm. Khi độ lệch tâm # tăng lên, hình elip trở nên dài hơn và các tiêu điểm trải ra xa nhau hơn.

tọa độ cực

Xét một hệ tọa độ cực có tâm đặt tại tiêu điểm F2. Chúng ta có thể mô tả hình elip bằng cách xác định hàm r2pqq, hàm này mô tả khoảng cách từ tiêu điểm F2 đến điểm E trên hình elip như một hàm của góc q (xem Hình 1.67). Nhớ lại rằng đối với các hàm trong tọa độ cực, góc q là biến độc lập có thể thay đổi từ 0 đến 2p (360˝) và biến phụ thuộc là khoảng cách r2pqq.



Hình 1.67: Hàm r2pqq trong tọa độ cực xác định khoảng cách giữa điểm E trên elip và tiêu điểm F2 đối với mọi góc.

Hàm mô tả hình elip trong tọa độ cực là ap1 ´ #2q r2pqq “ 1

$$\text{cospqq} \quad \frac{\text{` \#}}{} \; ,$$

trong đó góc q được đo đối với bán trục chính.
Khoảng cách nhỏ nhất khi q “ 0 với r2p0q “ a ´ c “ ap1 ´ #q và lớn nhất khi q “ p với r2ppq “ a ` c “ ap1 ` #q.

Tính toán quỹ đạo của Trái đất

Chuyển động của Trái Đất quanh Mặt Trời là một hình elip với Mặt Trời đặt tại tiêu điểm F2. Do đó, chúng ta có thể sử dụng công thức tọa độ cực r2pqq để mô tả khoảng cách từ Trái đất đến Mặt trời. Độ lệch tâm của quỹ đạo Trái đất quanh Mặt trời là # “ 0,01671123 và nửa chiều dài của trục chính là “ 149 598 261 km. Chúng ta thay thế các giá trị này vào công thức chung cho r2pqq và thu được phương trình sau:

$$\text{r2pqq} \; \frac{149\,556\,484}{\text{“ 1 ` 0,01671123 cospqq}} \; \text{km.}$$

Điểm mà Trái đất gần Mặt trời nhất được gọi là điểm cận nhật.
Nó xảy ra khi q “0, xảy ra vào khoảng ngày 3 tháng Giêng. Các thời điểm mà Trái đất ở xa Mặt trời nhất được gọi là

điểm viễn nhật và tương ứng với góc q “ p. Điểm viễn nhật của Trái đất xảy ra khoảng ngày 3 tháng 7.

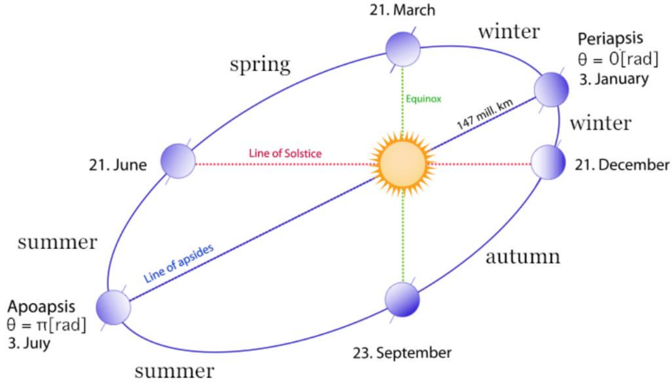
Hãy sử dụng công thức cho r2pqq để dự đoán điểm cận nhật và điểm viễn nhật khoảng cách của quỹ đạo Trái đất:

$$r_{2,peri} “ r_2p0q “ \frac{149556483}{1 ` 0,01671123 \cos p0q} “ 147\ 098\ 290 \text{ km},$$

$$r_{2,aphe} “ r_2ppq “ \frac{149556483}{1 ` 0,01671123 \cos ppq} “ 152\ 098\ 232 \text{ km}.$$

Google “điểm cận nhật” và “điểm viễn nhật” để xác minh rằng các dự đoán trên là chính xác. Thật tuyệt khi một công thức toán học có thể

mô tả chuyển động của hành tinh chúng ta, bạn có nghĩ vậy không?



Hình 1.68: Quỹ đạo của Trái đất quanh Mặt trời. Các điểm chính của quỹ đạo được dán nhãn. Các mùa ở Bắc bán cầu cũng được chỉ định.

Góc q của Trái đất so với Mặt trời có thể được mô tả như là một hàm của thời gian qptq. Công thức chính xác của hàm qptq mô tả góc là một hàm theo thời gian khá phức tạp, vì vậy chúng ta sẽ không đi vào chi tiết. Hãy xem xét các giá trị của qptq với t đo bằng ngày nêu trong bảng 1.3. Chúng tôi sẽ bắt đầu vào ngày 3 tháng 1.

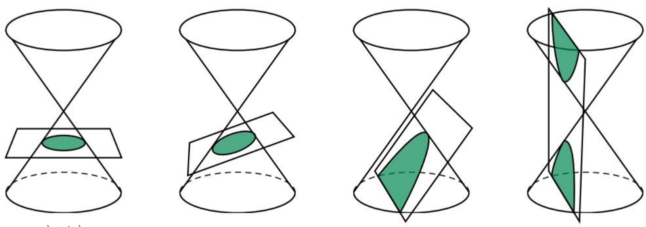
Cái nhìn sâu sắc của Newton

Trái ngược với niềm tin thông thường, Newton đã không khám phá ra lý thuyết của ông về lực hấp dẫn vì một quả táo rơi vào đầu khi ngồi dưới một cây. Điều thực sự xảy ra là anh ta bắt đầu từ các định luật của Kepler

Đừng lo lắng về cosh μ và sinh μ quá nhiều. Trig hyperbol
các chức năng được sử dụng ít thường xuyên hơn nhiều so với lượng giác tròn
các hàm cos q và sin q. Điều chính cần nhớ là chung
mẫu: hàm cosin được sử dụng để biểu thị tọa độ ngang
và các hàm sin được sử dụng để biểu thị tọa độ dọc.

các phần hình nón

Có một mối liên hệ sâu sắc giữa các hình dạng hình học của hình tròn, hình elip, parabol và hyperbol. Những điều này dường như về mặt hình học, có thể thu được các hình dạng khác nhau từ một đối tượng duy nhất: hình nón. Chúng ta có thể có được bốn đường cong bằng cách cắt hình nón ở các góc độ khác nhau, như minh họa trong Hình 1.75.



Hình 1.75: Thực hiện các lát cắt qua một hình nón ở các góc khác nhau sẽ tạo ra các hình dạng hình học khác nhau: hình tròn, hình elip, hình parabol hoặc hình hyperbol.

Mặt cắt hình nón trong tọa độ cực

Tất cả bốn phần cônic có thể được mô tả bởi cùng một chức năng trong cực tọa độ:

$$\text{rpqq “ } \frac{\text{qp1 ` \#q}}{\text{1 ` \# cospqq}} ,$$

trong đó q là khoảng cách gần nhất của đường cong đến tiêu điểm và # là độ lệch tâm của đường cong. Đối với hình tròn, q “ R (bán kính) và tham số độ lệch tâm là # “ 0. Đối với hình elip, q “ ap1 ´ #q và độ lệch tâm tham số khác nhau giữa 0 và 1 (0 § # † 1). Lưu ý rằng chúng tôi bao gồm case # “ 0 vì hình tròn là trường hợp đặc biệt của hình elip. Đối với một parabol, q “ f (tiêu cự) và độ lệch tâm là # “ 1. Đối với một hypebol, q “ ap# ´ 1q và độ lệch tâm là # ° 1.

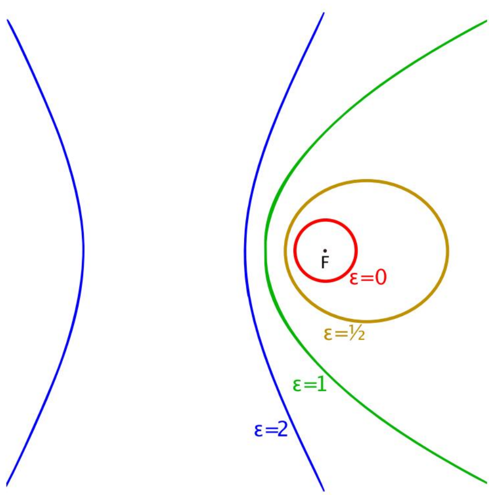
Chúng ta có thể sử dụng tham số lệch tâm # để phân loại cả bốn đường cong. Tùy thuộc vào giá trị của #, phương trình rpqq xác định một đường tròn, một hình elip, một parabola hoặc một hyperbola. Bảng 1.5 tóm tắt tất cả các quan sát liên quan đến các phần hình nón.

Chuyển động của các hành tinh được giải thích bằng định luật vạn vật hấp dẫn của Newton. Lực tương tác hấp dẫn giữa hai vật luôn

Phần cônic	Phương trình x2	chức năng cực	Độ lệch tâm
Vòng tròn	` y2 “ R2 y2	rpqq “R	# “ 0
hình elip	$\frac{x2}{a2}$ ` $\frac{}{b2}$ “ 1	rpqq “ $\frac{ap1´\#2q}{1`\#\ cospqq\ 2}$	#“ b 1´ $\frac{b2}{a2}$, 0§#†1
hình parabol	y2 “ 4 fx	rpqq “ $\frac{f}{1`cospqq}$	# “ 1
đường hypebol	$\frac{x2}{a2}$ · $\frac{y2}{b2}$ “ 1	rpqq “ $\frac{ap\#2´1q}{1`\#\ cospqq}$	#“ b 1` $\frac{b2}{a2}$, 1†#†8

Bảng 1.5: Bốn tiết diện conic và các thông số về độ lệch tâm của chúng.

dẫn một trong hai vật thể đi theo một quỹ đạo được mô tả bởi một của các phần hình nón mà cơ thể khác là tâm điểm. Hình 1.76 minh họa bốn quỹ đạo khác nhau của một vệ tinh gần hành tinh F. Hình tròn (# “ 0) và hình elip (0 § # † 1) mô tả các bit hoặc bit khép kín, trong đó vệ tinh bị bắt trong trường hấp dẫn của hành tinh F và ở trong quỹ đạo mãi mãi. Parabol (# “ 1) và hyperbola (# ° 1) mô tả các quỹ đạo mở, trong đó vệ tinh dao động bởi hành tinh F và sau đó tiếp tục.



Hình 1.76: Bốn quỹ đạo khác nhau của một vệ tinh di chuyển gần một hành tinh.

liên kết

[Đồ thị tương tác của một hyperbola]
https://www.desmos.com/calculator/2mnsk5o8vn

Cuộc thảo luận

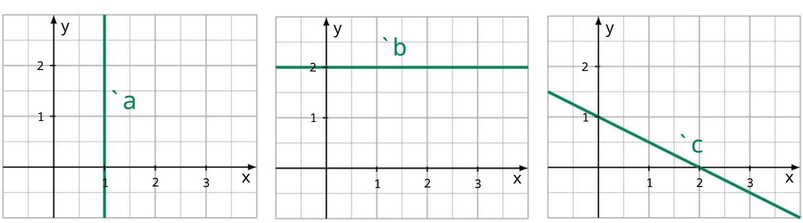
Việc sử dụng lặp đi lặp lại ba kỹ thuật đại số được trình bày trong phần này phần này sẽ cho phép bạn giải bất kỳ hệ n phương trình tuyến tính nào trong n không biết. Mỗi lần bạn loại bỏ một biến bằng cách thay thế, trừ hoặc loại bỏ bằng cách đánh đồng, bạn đang đơn giản hóa bài toán tìm ẩn số pn ´ 1q trong một hệ của phương trình pn ´ 1q. Có cả một khóa học toán gọi là tuyến tính đại số, trong đó bạn sẽ phát triển một cách tiếp cận có hệ thống để giải hệ phương trình tuyến tính.

giải pháp hình học

Việc giải một hệ hai phương trình tuyến tính với hai ẩn số có thể được hiểu về mặt hình học là tìm giao điểm giữa hai đường thẳng trong mặt phẳng Descartes. Trong phần này, chúng ta sẽ khám phá sự tương ứng này giữa đại số và hình học để phát triển thêm một cách giải hệ phương trình tuyến tính.

Phương trình đại số ax ` by “ c chứa ẩn số x và y có thể được hiểu là một phương trình ràng buộc trên tập hợp có thể giá trị của các biến x và y. Chúng ta có thể hình dung ràng buộc này về mặt hình học bằng cách xét các cặp tọa độ px, yq nằm trong mặt phẳng Descartes. Nhớ lại rằng mọi điểm trong mặt phẳng Descartes có thể được biểu diễn dưới dạng cặp tọa độ px, yq, trong đó x và y là tọa độ của điểm.

Hình 1.77 cho thấy biểu diễn hình học của ba phương trình. Đường thẳng `a tương ứng với tập hợp các điểm px, yq thỏa mãn phương trình x “ 1, đường thẳng `b là tập hợp các điểm px, yq thỏa mãn phương trình y “ 2 và đường thẳng `c tương ứng với tập hợp các điểm thỏa mãn x ` 2y “ 2.



(a) x “ 1 (b) y “ 2 (c) x ` 2y “ 2

Hình 1.77: Biểu diễn đồ thị của ba phương trình tuyến tính.

Bạn có thể tự thuyết phục mình rằng các đường hình học trong Hình 1.77 tương đương với các phương trình đại số bằng cách xét các điểm chia cắt px, yq trong mặt phẳng. Ví dụ, các điểm p1, 0q,

bài tập

E1.39 Studious Jack đã vay 40 000 đô la để hoàn thành việc học đại học của mình và không trả khoản thanh toán nào kể từ khi tốt nghiệp. Tính xem anh ta nợ bao nhiêu tiền sau 10 năm trong mỗi tình huống.

a) Lãi suất danh nghĩa hàng năm là 3% ghép lãi hàng tháng b)

Lãi suất thực tế hàng năm là 4%

c) Lãi suất danh nghĩa hàng năm là 5% với lãi kép vô hạn

E1.40 Doanh nhân Kate đã vay 20 000 đô la để bắt đầu kinh doanh. Ban đầu, khoản vay của cô có lãi suất hàng năm là 6%, nhưng sau 5 năm, cô đã thương lượng với ngân hàng để có lãi suất thấp hơn là 4%.
Cô ấy nợ bao nhiêu tiền sau 10 năm?

1.23 Đặt ký hiệu

Tập hợp là khái niệm chính xác về mặt toán học để mô tả một nhóm đối tượng. Bạn không cần biết về tập hợp để thực hiện phép toán đơn giản; nhưng các chủ đề nâng cao hơn yêu cầu sự hiểu biết về tập hợp là gì và cách biểu thị tư cách thành viên tập hợp, thao tác tập hợp và quan hệ chứa tập hợp. Phần này giới thiệu tất cả các khái niệm có liên quan.

Các định nghĩa

• set: một tập hợp các đối tượng toán học
• S, T: tên biến thông thường của các tập
hợp • s PS: câu lệnh này được đọc là “s là một phần tử của S” hoặc

“s nằm trong S” • N, Z , Q , R : một số bộ số quan trọng: số tự nhiên, số nguyên, số hữu tỉ và số thực tương ứng.

• H: tập hợp rỗng là tập hợp không chứa phần tử nào

• t..... u: dấu ngoặc nhọn dùng để định nghĩa tập hợp, biểu thức bên trong ngoặc nhọn mô tả nội dung tập hợp.

Đặt hoạt động:

• SYT: hợp của hai tập hợp. Hợp của S và T tương ứng với các phần tử trong S hoặc T.

• SXT: giao của hai tập hợp. Giao điểm của S và T tương ứng với

các phần tử nằm trong cả S và T. • SzT: đặt chênh lệch

hoặc đặt trừ. Hiệu số tập hợp SzT tương ứng với các phần tử của S không có trong T.

Đặt quan hệ:

• Ä: là tập con nghiêm ngặt của

• Ñ: là tập con của hoặc bằng

Dưới đây là danh sách các ký hiệu tốc ký toán học đặc biệt và ý nghĩa tương ứng của chúng:

• P: phần tử của

• R: không phải phần tử
của • @: với mọi

• D: có tồn tại •

E: không tồn tại • | : như

vậy mà

Các ký hiệu này được sử dụng trong chứng minh toán học vì chúng cho phép chúng ta diễn đạt các lập luận toán học phức tạp một cách ngắn gọn và chính xác.

Một khoảng là một tập hợp con của dòng thực. Chúng tôi biểu thị một khoảng bằng cách chỉ định các điểm cuối của nó và bao quanh chúng bằng dấu ngoặc vuông "r" hoặc dấu ngoặc tròn "p" để cho biết liệu điểm cuối phản hồi tương ứng có được bao gồm trong khoảng hay không.

• ra, bs: khoảng đóng từ a đến b. Điều này tương ứng với tập hợp các số giữa a và b trên đường thẳng thực, bao gồm các điểm cuối a và b. ra, bs"tx P R | a § x § bu. • pa, bq: khoảng mở từ a đến b. Điều này

tương ứng với tập hợp các số giữa a và b trên đường thẳng thực, không bao gồm các điểm cuối a và b. pa, bq"tx P R | a†x†bu. • ra, bq: khoảng nửa mở bao gồm điểm cuối bên trái a nhưng không bao gồm điểm

cuối bên phải b. ra, bq"tx P R | a § x † bu.

Đôi khi chúng ta gặp những quãng gồm hai phần rời rạc. Chúng tôi sử dụng ký hiệu ra, bsYrc, ds để biểu thị hợp của hai khoảng, là tập hợp các số giữa a và b (bao gồm) hoặc giữa c và d (bao gồm).

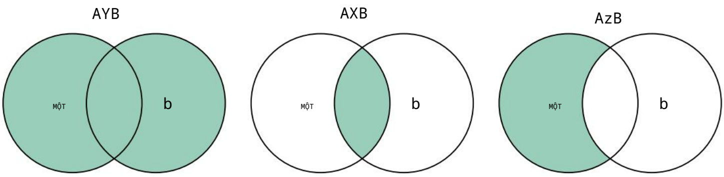
bộ

Phần lớn sức mạnh của toán học đến từ tính trừu tượng: khả năng nhìn thấy bức tranh toàn cảnh hơn và suy nghĩ về các mối quan hệ chung giữa các đối tượng toán học. Chúng ta có thể nghĩ về các số riêng lẻ như 3, ´5 và p hoặc chúng ta có thể nói về tập hợp tất cả các số.

Việc giới hạn sự chú ý của chúng ta vào một tập hợp con cụ thể của các số như trong các ví dụ sau thường hữu ích.

luôn nằm trong tập cha, vì vậy chúng ta cũng biết EYO Ñ Z.

Kết hợp những sự thật này, chúng ta có thể thiết lập đẳng thức EYO “ Z, phát biểu sự thật, “Tổ hợp của tất cả các số chẵn và lẻ cũng giống như tất cả các số nguyên.”



Hình 1.84: Biểu đồ Venn hiển thị các tập hợp con khác nhau thu được bằng cách sử dụng các phép toán tập hợp: tập hợp AYB, tập hợp giao điểm AXB và tập hợp chênh lệch AzB.

Giao điểm của tập hợp AXB và tập hợp chênh lệch AzB cũng được minh họa trên Hình 1.84. Giao của hai tập hợp chứa các phần tử thuộc cả hai tập hợp. Tập khác biệt AzB chứa tất cả các phần tử thuộc A nhưng không thuộc B.

Lưu ý nghĩa của liên từ “hoặc” trong tiếng Anh rất mơ hồ. Cụm từ “trong A hoặc B” có thể được hiểu là “bao gồm hoặc,” nghĩa là “trong A hoặc B, hoặc trong cả hai”—hoặc là “loại trừ hoặc,” nghĩa là “trong A hoặc B, nhưng không phải cả hai. ” Các nhà toán học luôn sử dụng “hoặc” theo nghĩa bao gồm, vì vậy AYB biểu thị các phần tử nằm trong A hoặc B hoặc trong cả hai tập hợp. Chúng ta có thể thu được một biểu thức tương ứng với “loại trừ hoặc” của hai tập hợp bằng cách lấy hợp của các tập hợp và trừ đi phần giao của chúng: pA Y BqzpA X Bq.

Ví dụ 3: Đặt hoạt động

Xét ba tập hợp A “ ta, b, cu, B “ tb, c, du, và C “ tc, d,eu.

Sử dụng các thao tác tập hợp, chúng ta có thể định nghĩa các tập hợp mới, chẳng hạn như

AYB “ ta, b, c, du, AXB “ tb, cu, và AzB “ tau,

tương ứng với các phần tử trong A hoặc B, tập hợp các phần tử trong A và B, và tập hợp các phần tử trong A nhưng không thuộc B, tương ứng.

Chúng ta cũng có thể xây dựng các biểu thức liên quan đến ba tập hợp:

AYBYC “ ta, b, c, d, eu, AXBXC “tcu.

Và chúng ta có thể viết các biểu thức tập hợp phức tạp hơn, như

pA Y BqzC “ ta, bu,

là tập hợp các phần tử thuộc A hoặc B nhưng không thuộc C.

Một ví dụ khác về biểu thức tập hợp phức tạp là

pA X BqYpB X Cq“tb, c, du,

Đặt làm nghiệm cho phương trình

Một ngữ cảnh khác mà các tập hợp xuất hiện là khi mô tả nghiệm của các phương trình và bất phương trình. Trong Phần 1.1, chúng ta đã học cách giải tìm x chưa biết trong phương trình. Để giải phương trình fpxq “ c là tìm tất cả các giá trị của x thỏa mãn phương trình này. Đối với các phương trình đơn giản như x ´ 3 “ 6, nghiệm là một số duy nhất x “ 9, nhưng các phương trình phức tạp hơn có thể có nhiều nghiệm. Ví dụ: nghiệm của phương trình x2 “ 4 là tập hợp t´2, 2u, vì cả x “ ´2 và x “ 2 đều thỏa mãn phương trình.

Vui lòng cập nhật định nghĩa của bạn về động từ toán học “giải” (một phương trình) để bao gồm khái niệm mới về tập nghiệm—tập hợp các giá trị thỏa mãn phương trình. Tập nghiệm là cách chính xác về mặt toán học để mô tả nghiệm của một phương trình:

• Tập nghiệm của phương trình x ´ 3 “ 6 là tập t9u. • Tập nghiệm của phương trình x2 “ 4 là tập t´2, 2u. • Tập nghiệm của sinpxq “ 0 là tập tx | x “ pn, @n P Zu. • Tập nghiệm của phương trình sinpxq “ 2 là H (tập rỗng), vì không tồn tại số x thỏa mãn phương trình.

Hàm SymPy giải trả về các nghiệm của phương trình dưới dạng danh sách. Để giải phương trình fpxq “ c bằng SymPy, trước tiên chúng ta viết lại nó dưới dạng biểu thức bằng 0 fpxq ´ c “ 0, sau đó gọi hàm giải:

```
>>> giải(x-3 -6, x) [9]              # cách sử dụng: giải quyết(expr, var)

>>> giải(x**2 -4, x) [-2,
2]

>>> giải(sin(x), x) [0,
pi]                                  # chỉ tìm thấy lời giải trong [0,2*pi)

>>> giải(sin(x) -2, x) []
                                     # danh sách trống = bộ trống
```

Trong phần tiếp theo chúng ta sẽ tìm hiểu cách sử dụng khái niệm tập nghiệm để mô tả nghiệm của các hệ phương trình.

Tập nghiệm cho hệ phương trình

Hãy xem lại những gì chúng ta đã học trong Phần 1.21 về nghiệm của các hệ phương trình tuyến tính và xác định các tập nghiệm của chúng một cách chính xác hơn. Tập nghiệm của hệ phương trình

a1x ` b1y “ c1,

a2x ` b2y “ c2,

Machine Translated by Google

tương ứng với giao của hai tập hợp:

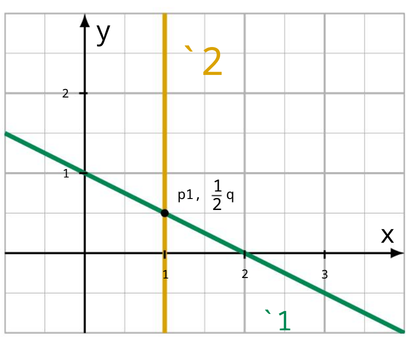
$$\underbrace{tpx, yq P R2 \mid a1x ` b1y “ c1u}_{`1} \quad X \quad \underbrace{tpx, yq P R2 \mid a2x ` b2y “ c2u}_{`2} .$$

Nhớ lại rằng các dòng `1 và `2 là cách diễn giải hình học của các bộ. Mỗi đường thẳng tương ứng với một tập hợp các cặp tọa độ px, yq thỏa mãn phương trình của đường thẳng đó. Giải hệ phương trình là tập hợp các điểm tại giao điểm của hai đường thẳng `1 X `2. Ghi chú giao điểm từ được sử dụng trong hai ngữ cảnh toán học khác nhau: giải pháp là tập giao điểm của hai tập hợp, và cũng là hình học giao điểm của hai đường thẳng.

Hãy tận dụng sự tương ứng này giữa các giao điểm tập hợp và các giao điểm đường hình học để hiểu các giải pháp cho hệ phương trình chi tiết hơn một chút. Trong ba phần tiếp theo, chúng ta sẽ xem xét ba trường hợp có thể xảy ra khi thử để giải một hệ hai phương trình tuyến tính với hai ẩn số. Cho đến nay chúng ta chỉ thảo luận về Trường hợp A, xảy ra khi hai đường thẳng cắt nhau tại một điểm, như trong ví dụ minh họa trong Hình 1.85. Để hoàn toàn hiểu các giải pháp có thể cho một hệ phương trình, chúng ta cần để suy nghĩ về tất cả các trường hợp khác; như Trường hợp B khi `1 X `2 “ H như trong Hình 1.86, và Trường hợp C khi `1 X `2 “ `1 “ `2 như Hình 1.87.

Trường hợp A: Một giải pháp. Khi các đường thẳng `1 và `2 không song song, chúng sẽ cắt nhau tại một điểm như hình 1.85. Trong trường hợp này, các nghiệm của hệ phương trình chứa một điểm duy nhất:

$$tpx, yq P R2 \mid x ` 2y “ 2u X tpx, yq P R2 \mid x “ 1u ” tp1, \frac{1}{2}q.$$



Hình 1.85: Trường hợp A: Giao điểm của các đường thẳng có phương trình x ` 2y “ 2 và x “ 1 là điểm p1, $\frac{1}{2}$qP R2.

1.24 Các bài toán

Bây giờ chúng ta đã đến phần đầu tiên của các vấn đề trong cuốn sách này. Các mục đích của những vấn đề này là cung cấp cho bạn một cách toàn diện thực hành các nguyên tắc toán học cơ bản của bạn. Biết cách giải các bài toán là một kỹ năng rất hữu ích để phát triển. Đôi khi, mài giũa toán học của bạn sườn có vẻ như là công việc trí óc khó khăn, nhưng vào cuối mỗi vấn đề, bạn sẽ đạt được chỗ đứng vững chắc hơn về tất cả các chủ đề mà bạn đã tham gia học về. Bạn cũng sẽ nhận được một buzz nhỏ về thành tích sau khi mỗi vấn đề bạn chinh phục.

Hãy ngồi xuống và giải quyết các vấn đề thực hành này ngay hôm nay, hoặc một thời điểm khác khi bạn đã bổ sung caffein đúng cách. Nếu bạn dành thời gian cho một số thực hành toán học, bạn sẽ phát triển khả năng hiểu lâu dài và sự trôi chảy toán học thực sự.

Nếu không giải quyết bất kỳ vấn đề nào, bạn có thể quên hầu hết những gì bạn đã học được trong vài tháng tới. Bạn vẫn có thể nhớ những ý tưởng lớn, nhưng các chi tiết sẽ mờ nhạt và mờ nhạt. Qua giải một số bài toán thực hành, bạn sẽ nhớ nhiều hơn chất liệu. Đừng phá vỡ tốc độ ngay bây giờ: với toán học, nó được sử dụng rất nhiều hoặc mất nó!

Hãy chắc chắn rằng bạn cất điện thoại của bạn đi trong khi bạn đang làm việc trên các vấn đề. Bạn không cần công nghệ cao cấp để làm toán; lấy một cây bút và một số giấy từ máy in và bạn sẽ ổn thôi. Các nhà toán học vĩ đại như Descartes, Hilbert, Leibniz và Noether đã làm hầu hết công việc của họ với bút và giấy và họ đã làm tốt. Dành thời gian với toán học theo cách họ đã làm.

P1.1 Giải x trong phương trình x2 ´ 9 “ 7.

P1.2 Giải tìm x trong phương trình cos´1 ` $\overline{x}$ Một ˘ ´ f “ wt.

P1.3 Giải tìm x trong phương trình $\frac{1}{x}$ “ $\frac{1}{\text{Một}}$ ` $\frac{1}{b}$.

P1.4 Dùng máy tính bỏ túi tìm giá trị của các biểu thức sau:

a) ?4 $\overline{33}$ b) 210 c) $7^{\frac{1}{4}}$ ´ 10 d) $2^{\frac{1}{}}$ lnpe22q

P1.5 Tính các biểu thức liên quan đến phân số sau:

Một) $\frac{1}{2}$ ` $\frac{1}{4}$ b) $\frac{4}{7}$ ´ $\frac{23}{5}$ c) 1$\frac{3}{4}$ ` 1 $\frac{31}{32}$

P1.6 Sử dụng các quy tắc cơ bản của đại số để rút gọn các biểu thức sau:

a) a $\frac{1}{a}$ b2cb´3 (a a) b) $\frac{abc}{bca}$ c) $\frac{27a2}{?\ 9abba}$

d) $\frac{apb\ `cq\ ´\ ca}{b}$ đ) $\frac{\text{Một}}{a2\ c\ ?3\ b}$ $b^{\frac{4}{3}}$ f)px ` aqpx ` bq´ xpa ` bq

chương 2

Giới thiệu về vật lý

2.1 Giới thiệu

Một trong những điều thú vị nhất khi hiểu toán học là bạn cũng sẽ tự động bắt đầu hiểu các định luật vật lý. Thật vậy, hầu hết các định luật vật lý đều được biểu diễn dưới dạng các phương trình toán học. Nếu bạn biết cách vận dụng các phương trình và bạn biết cách giải những ẩn số trong đó, thì bạn đã biết một nửa môn vật lý rồi.

Kể từ khi Newton tìm ra toàn bộ thứ F Ma, con người đã sử dụng cơ học để đạt được những thành tựu công nghệ vĩ đại, chẳng hạn như hạ cánh tàu vũ trụ trên Mặt trăng. Bạn cũng có thể là một phần của khoa học này. Học vật lý sẽ cung cấp cho bạn những siêu năng lực sau:

1. Khả năng dự đoán chuyển động trong tương lai của các đối tượng bằng cách sử dụng các phương trình. Đối với hầu hết các loại chuyển động, có thể tìm được một phương trình mô tả vị trí của một vật thể dưới dạng một hàm xptq thời gian. Bạn có thể sử dụng phương trình này để dự đoán vị trí của đối tượng tại mọi thời điểm t, bao gồm cả tương lai. “Ê G! Hạt sẽ ở đâu tại t “1,3 giây?” bạn được đề nghị. “Nó sẽ ở mức xp1,3q mét.” Đơn giản như thế. Phương trình xptq mô tả vị trí của vật trong mọi thời điểm t trong suốt quá trình chuyển động. Biết được điều này, bạn có thể cắm t “1,3 giây vào xptq để tìm vị trí của đối tượng tại thời điểm đó.

2. Tầm nhìn vật lý đặc biệt để nhìn thế giới. Sau khi học vật lý, bạn sẽ bắt đầu suy nghĩ về các khái niệm như lực, gia tốc và vận tốc. Bạn có thể sử dụng các khái niệm này để mô tả chính xác tất cả các khía cạnh chuyển động của các đối tượng. Nếu không có tầm nhìn vật lý, khi bạn ném một quả bóng lên không trung, bạn sẽ thấy nó bay lên, chạm tới đỉnh, rồi rơi xuống. Không phải là rất thú vị ing. Bây giờ với tầm nhìn vật lý, bạn sẽ thấy rằng tại t “ 0[s],

cùng một quả bóng được ném theo hướng y dương với một ban đầu vận tốc của vi " 12[m/s]. Bóng đạt độ cao cực đại của ymax " " $\frac{12^2}{2\cdot 9{,}81}$ 7.3[m] tại t " 12{9,81 " 1,22[s], sau đó chạm vào mặt đất sau tổng thời gian bay là tf " 2 b2ˆ7.3 9.81 " 2,44[s].

Các đơn vị đo lường của các đại lượng vật lý xuyên suốt cuốn sách này được biểu thị trong dấu ngoặc vuông, như trong ví dụ trên. Tìm hiểu về các đơn vị đo lường khác nhau là một khía cạnh quan trọng của tầm nhìn vật lý.

Tại sao học vật lý?

Lý do chính tại sao bạn nên học vật lý là vì kiến thức buzz. Bạn sẽ học cách tính toán chuyển động của vật thể, dự đoán kết quả của các vụ va chạm, mô tả dao động và nhiều thứ hữu ích khác. Khi bạn phát triển các kỹ năng vật lý của mình, bạn sẽ có thể sử dụng phương trình vật lý để suy ra một đại lượng vật lý từ một đại lượng vật lý khác. Vì ví dụ, chúng ta có thể dự đoán độ cao tối đa mà một quả bóng đạt được, nếu ta biết vận tốc ban đầu của nó khi ném. Các phương trình vật lý rất giống các khối LEGO ; công việc của bạn là tìm ra những cách khác nhau để kết nối chúng lại với nhau.

Bằng cách học cách giải các bài toán vật lý phức tạp, bạn sẽ phát triển kỹ năng phân tích của bạn. Sau này, bạn có thể áp dụng những kỹ năng này vào các lĩnh vực khác của cuộc sống. Ngay cả khi bạn không tiếp tục nghiên cứu khoa học, kiến thức chuyên môn mà bạn phát triển trong việc giải các bài toán vật lý sẽ giúp bạn giải quyết vấn đề phức tạp nói chung. Để chứng minh cho tuyên bố này, hãy xem xét thực tế là các công ty thích thuê các nhà vật lý ngay cả cho các vị trí không liên quan đến vật lý: họ cảm thấy tự tin rằng những ứng viên hiểu rõ về vật lý sẽ có thể tìm ra tất cả các nội dung kinh doanh một cách dễ dàng.

Giới thiệu về khoa học

Có lẽ lý do quan trọng nhất mà bạn nên học vật lý là vì nó đại diện cho tiêu chuẩn vàng cho phương pháp khoa học.
Trước hết, vật lý chỉ giải quyết những thứ cụ thể có thể đo lường được. Không có cảm giác hay tính chủ quan trong vật lý. Những nhà vật lý phải rút ra các mô hình toán học mô tả và dự đoán chính xác kết quả của các thí nghiệm. Trên hết, chúng ta có thể kiểm tra tính hợp lệ của các mô hình vật lý bằng cách chạy thử nghiệm và so sánh dự đoán kết quả với những gì thực sự xảy ra trong phòng thí nghiệm.

Thành phần quan trọng trong tư duy khoa học là sự hoài nghi. Các nhà khoa học phải thuyết phục các đồng nghiệp của họ rằng các phương trình của họ là đúng mà không cần nghi ngờ. Các đồng nghiệp không cần phải tin tưởng nhà khoa học; thay vào đó, họ có thể thực hiện các thử nghiệm của riêng mình để xem liệu phương trình có dự đoán chính xác những gì xảy ra trong thế giới thực hay không. Ví dụ: giả sử tôi yêu cầu độ cao của quả bóng được ném lên không trung với vận tốc 12[m/s]

2 được mô tả bởi phương trình ycptq "` 12t ` 0. $\frac{1}{2}$p 9,81qt Để kiểm tra

Nếu phương trình này đúng, bạn có thể thực hiện thí nghiệm ném bóng trong không trung và ghi lại chuyển động của quả bóng dưới dạng video.

Sau đó, bạn có thể so sánh các thông số chuyển động quan sát được trong video với những giá trị được dự đoán bởi phương trình ycptq đã khẳng định.

- Đã đạt chiều cao tối đa Một điều bạn có thể kiểm tra là liệu phương trình ycptq có dự đoán độ cao tối đa của quả bóng hay không ymax. Phương trình đã khẳng định dự đoán quả bóng sẽ đạt độ cao tối đa tối đa tại t " 1,22[s]. Chiều cao tối đa được dự đoán là maxttycptqu " ycp1.22q " 7.3[m]. Bạn có thể so sánh giá trị này với chiều cao cực đại ymax mà bạn quan sát được trong video.

- Tổng thời gian bay Bạn cũng có thể kiểm tra xem phương trình ycptq dự đoán chính xác thời điểm quả bóng sẽ rơi trở lại mặt đất. Sử dụng video, giả sử bạn đo thời gian nó khiến quả bóng rơi trở lại mặt đất thành cú ngã " 2,44[s]. Nếu như phương trình ycptq là chính xác, nó sẽ dự đoán chiều cao bằng 0 mét cho thời gian tfall.

Nếu cả hai dự đoán của phương trình ycptq khớp với quan sát của bạn từ video, bạn có thể bắt đầu tin rằng phương trình chuyển động ycptq đã khẳng định thực sự là một mô hình chính xác cho thế giới thực.

Phương pháp khoa học phụ thuộc vào sự tương tác giữa thực nghiệm và lý thuyết. Các nhà lý thuyết chứng minh các định lý và rút ra các phương trình, trong khi các nhà thực nghiệm kiểm tra tính đúng đắn của các phương trình. Các phương trình dự đoán chính xác các quy luật tự nhiên được giữ nguyên trong khi các mô hình không chính xác bị loại bỏ. Đồng thời, các nhà thực nghiệm liên tục đo lường dữ liệu mới và thách thức các nhà lý thuyết đưa ra với các phương trình mô tả chính xác các phép đo mới.

phương trình vật lý

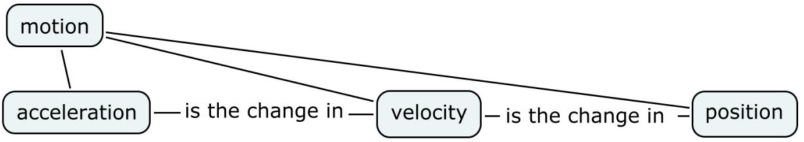
Những phương trình vật lý hay nhất được sưu tầm trong sách giáo khoa. Sách giáo khoa vật lý chỉ chứa các phương trình đã được thử nghiệm rộng rãi và được cho là đúng. Sách giáo khoa vật lý tốt cũng giải thích làm thế nào các phương trình được bắt nguồn từ các nguyên tắc đầu tiên. Điều này rất quan trọng, bởi vì việc hiểu một vài nguyên tắc cơ bản của vật lý, thay vì ghi nhớ một danh sách dài các công thức. Hiểu ing trumps ghi nhớ bất kỳ ngày nào trong tuần.

Phần tiếp theo sẽ hướng dẫn bạn về ba phương trình đầy đủ mô tả chuyển động của một vật bất kỳ: xptq, vptq, và aptq. Sử dụng những phương trình và các kỹ thuật giải phương trình từ Chương 1, chúng ta có thể dự đoán khá nhiều thứ chúng ta muốn về vị trí và vận tốc của các vật thể đang trải qua gia tốc không đổi.

Thay vì yêu cầu bạn ghi nhớ những phương trình này, tôi sẽ chỉ cho bạn một thủ thuật hay để lấy một phương trình chuyển động từ một phương trình khác. Ba phương trình này mô tả các khía cạnh khác nhau của cùng một chuyển động, vì vậy không có gì ngạc nhiên khi các phương trình có liên quan với nhau. Mặc dù bạn không bắt buộc phải biết cách rút ra các phương trình vật lý, nhưng bạn cần biết cách sử dụng tất cả các phương trình này. Học một chút lý thuyết cũng tốt: chỉ vài trang lý thuyết "khó nhằn" (tích phân) sẽ giúp bạn hiểu sâu về mối quan hệ giữa aptq, vptq và xptq. Bằng cách này, bạn có thể dựa vào kiến thức toán học mới được mở rộng của mình, thay vì nhớ ba công thức riêng biệt!

2.2 Động học

Động học (từ tiếng Hy Lạp kinema cho chuyển động) là nghiên cứu về quỹ đạo của các vật thể chuyển động. Các phương trình động học có thể được sử dụng để tính thời gian một quả bóng được ném lên cao sẽ ở trong không khí hoặc để tính gia tốc cần thiết để tăng tốc từ 0 lên 100[km/h] trong 5 giây. Để thực hiện các tính toán này, chúng ta cần chọn đúng phương trình chuyển động và tìm ra giá trị của các điều kiện ban đầu (vị trí ban đầu xi và vận tốc ban đầu vi). Sau đó, chúng ta thế các giá trị đã biết vào phương trình chuyển động thích hợp và giải tìm ẩn số bằng một hoặc hai bước đại số đơn giản. Toàn bộ phần này rút gọn thành ba phương trình và kỹ năng thế số vào phương trình.



Hình 2.1: Chuyển động của một vật thể được mô tả bởi các hàm tọa độ, vận tốc và gia tốc của nó.

Phần này hướng dẫn bạn cách sử dụng các phương trình chuyển động và giúp bạn hiểu các khái niệm về vận tốc và gia tốc.
Bạn cũng sẽ học cách nhận biết nên sử dụng phương trình nào khi giải các loại bài toán vật lý khác nhau.

Các khái niệm

Các khái niệm chính để mô tả chuyển động của các đối tượng là:

• t: thời gian. Thời gian được tính bằng giây [s]. •

xptq: vị trí của vật thể là một hàm của thời gian—còn được gọi là phương trình chuyển động. Vị trí được đo bằng mét [m] và phụ thuộc vào thời gian t.

• vptq: vận tốc của vật thể là một hàm của thời gian. vận tốc là mea được đảm bảo tính bằng mét trên giây [m/s].

• aptq: gia tốc của vật thể là một hàm của thời gian. Gia tốc được đo bằng mét trên giây bình phương [m/s2]. • xi " xp0q, vi " vp0q:

vị trí và vận tốc ban đầu của vật thể, được đo tại t " 0. Cùng với xi và vi được gọi là điều kiện ban đầu.

Vị trí, vận tốc và gia tốc

Chuyển động của một vật được đặc trưng bởi ba hàm: hàm tọa độ xptq, hàm vận tốc vptq và hàm gia tốc aptq. Các hàm xptq, vptq và aptq được kết nối với nhau— chúng đều mô tả các khía cạnh khác nhau của cùng một chuyển động.

Bạn đã quen thuộc với những khái niệm này từ kinh nghiệm lái xe ô tô của mình. Phương trình chuyển động xptq mô tả vị trí của ô tô là một hàm của thời gian. Vận tốc mô tả sự thay đổi vị trí của ô tô, hay về mặt toán học,

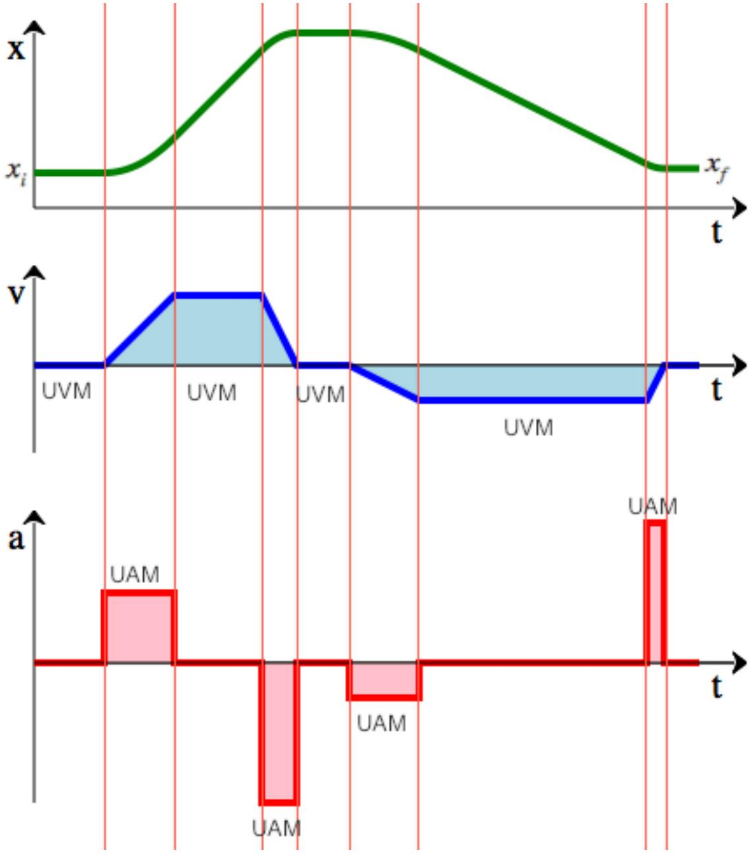
vptq " tỷ lệ thay đổi trong xptq.

Nếu chúng ta đo x bằng mét [m] và thời gian t bằng giây [s], thì đơn vị của vptq sẽ là mét trên giây [m/s]. Ví dụ: một vật thể đang chuyển động với vận tốc không đổi `30[m/s] sẽ tăng vị trí của nó thêm 30[m] mỗi giây. Lưu ý rằng vận tốc vptq có thể dương hoặc âm. Tốc độ của một vật thể được định nghĩa là giá trị tuyệt đối của vận tốc |vptq| của nó. Tốc độ luôn là một đại lượng không âm, trong khi vận tốc dương hoặc âm tùy thuộc vào hướng chuyển động.

Độ biến thiên vận tốc của vật gọi là gia tốc:

aptq " tỷ lệ thay đổi trong vptq.

Gia tốc được đo bằng mét trên giây bình phương [m/s2]. Gia tốc dương không đổi có nghĩa là vận tốc của chuyển động tăng đều, tương tự như nhấn bàn đạp ga. Gia tốc âm không đổi có nghĩa là vận tốc đang giảm dần, tương tự như khi nhấn bàn đạp phanh.



Hình 2.2: Hình minh họa biểu diễn đồng thời các đồ thị tọa độ, vận tốc và gia tốc của một ô tô trong một khoảng thời gian nào đó. Xe xuất phát từ vị trí ban đầu xi và đứng yên một thời gian. Sau đó, người lái nhấn bàn đạp để tạo ra gia tốc tối đa trong một khoảng thời gian và chiếc xe tăng tốc. Sau đó, người lái xe giảm bớt chân ga, nhấn đủ để duy trì tốc độ không đổi. Đột nhiên người lái xe nhìn thấy một chiếc xe cảnh sát ở đằng xa và đạp phanh (gia tốc âm) và ngay sau đó đưa chiếc xe dừng lại. Người lái xe đợi vài giây để chắc chắn rằng cảnh sát đã đi qua. Tiếp theo, người lái chuyển sang số lùi và đổ xăng. Xe tăng tốc về phía sau một chút, sau đó chính duy trì tốc độ lùi không đổi trong một khoảng thời gian dài. Lưu ý cách "chuyển động lùi" tương ứng với vận tốc âm. Cuối cùng, tài xế đạp phanh và dừng xe. Lưu ý rằng phanh tương ứng với gia tốc dương khi chuyển động theo hướng âm. Vị trí cuối cùng của chiếc xe là xf .

Machine Translated by Google

Trong một vài đoạn văn, chúng ta sẽ thảo luận về các phương trình toán học chính xác cho xptq, vptq và aptq, nhưng trước khi chúng ta đi sâu vào toán học, chúng ta hãy xem ở ví dụ về chuyển động của ô tô minh họa trên hình 2.2. Chúng ta có thể quan sát hai loại chuyển động riêng biệt. Trong một số thời điểm, xe trải qua chuyển động với vận tốc không đổi (chuyển động đều vận tốc, UVM). Trong những thời gian khác, chiếc xe trải qua chuyển động không đổi gia tốc (chuyển động có gia tốc đều, UAM). tồn tại nhiều các loại chuyển động khác, nhưng với mục đích của phần này, chúng ta sẽ tập trung về hai loại chuyển động này.

- UVM: Trong thời gian không tăng tốc, xe duy trì một vận tốc không đổi và do đó vptq là một hằng số chức năng. Đối với chuyển động với vận tốc không đổi, hàm tọa độ là một đường có hệ số góc không đổi vì theo định nghĩa, vptq “ hệ số góc của xptq.
- UAM: Trong thời gian ô tô chịu gia tốc không đổi aptq “ a, vận tốc của cơ năng thay đổi với tốc độ a tỷ lệ không đổi. Tốc độ thay đổi của vận tốc là không đổi một “ hệ số góc của vptq, vì vậy hàm vận tốc trông giống như một đường thẳng có độ dốc a. Hàm vị trí xptq có dạng cong (bậc hai) trong thời điểm gia tốc không đổi.

công thức

Về cơ bản có bốn phương trình bạn cần biết cho toàn bộ bài học này phần. Cùng với nhau, bốn phương trình này mô tả đầy đủ tất cả các khía cạnh của chuyển động với gia tốc không đổi.

Chuyển động có gia tốc đều (UAM)

Nếu đối tượng trải qua một gia tốc không đổi aptq “ a—giống như một chiếc ô tô khi bạn đặt chân ga—khi đó chuyển động của nó có thể được mô tả bằng các phương trình sau:

$$\text{aptq “ a}, \tag{2.1}$$

$$\text{vptq “ tại ` vi}, \tag{2.2}$$

$$\text{xptq“ } \frac{1}{2}\text{at2 ` vit ` xi}, \tag{2.3}$$

trong đó vi là vận tốc ban đầu của vật và xi là vị trí ban đầu của nó.

Đây là một phương trình hữu ích khác cần nhớ:

$$\text{rvptqs2 “ v2 ` 2arxptq ´ xis},$$

mà thường được viết

$$\text{v2 “ v2 ` 2aDx, f} \tag{2.4}$$

trong đó vf biểu thị vận tốc cuối cùng (tại t “ tf) và Dx biểu thị sự thay đổi tọa độ x giữa t “ 0 và t “ tf . Điều tam giác D là chữ cái Hy Lạp viết hoa delta, thường được sử dụng để biểu thị sự thay đổi về số lượng. Sử dụng ký hiệu D, chúng ta có thể viết lại phương trình (2.2) như sau: Dv “ aDt, trong đó Dv “ vf ´ vi và Dt “ tf ´ ti.

Đó là nó! Ghi nhớ bốn phương trình này, điền vào các số phù hợp và bạn có thể giải bất kỳ bài toán động học nào mà con người có thể tưởng tượng được.

Chuyển động vận tốc đều (UVM)

Trường hợp đặc biệt khi không có gia tốc (a “0), được gọi là chuyển động vận tốc đơn dạng hoặc UVM. Vận tốc không đổi (không đổi) vì không có gia tốc. Ba phương trình sau mô tả chuyển động của một vật có vận tốc không đổi:

aptq “ 0,

vptq “ vi,

xptq “ vit ` xi.

Như bạn có thể thấy, đây thực sự là những phương trình giống như trong trường hợp UAM ở trên, nhưng vì “ 0 nên một số số hạng bị thiếu.

Rơi tự do

Ta nói một vật rơi tự do nếu lực duy nhất tác dụng lên nó là trọng lực. Trên bề mặt Trái Đất, trọng lực sinh ra một gia tốc không đổi ay “ ´9,81[m/s2]. Dấu âm ở đó vì gia tốc trọng trường hướng xuống dưới và chúng ta giả sử trục y hướng lên trên. Vì gia tốc trọng trường không đổi nên ta có thể sử dụng các phương trình UAM để tìm độ cao yptq và vận tốc vptq của vật rơi tự do.

ví dụ

Bây giờ chúng ta sẽ minh họa cách sử dụng các phương trình động học.

Ví dụ về Ma-rốc Giả sử bạn của bạn muốn gửi cho bạn một quả bóng bọc trong lá nhôm bằng cách thả nó từ ban công của anh ấy, nằm ở độ cao yi “ 44,145[m]. Sẽ mất bao lâu để quả bóng chạm đất?

Chúng tôi nhận ra đây là vấn đề với khả năng tăng tốc, vì vậy chúng tôi bắt đầu bằng viết các phương trình UAM tổng quát:

$$y(t) = \frac{1}{2}at^2 + v_i t + y_i,$$

$$v(t) = at + v_i.$$

Để tìm câu trả lời, hãy thay thế các giá trị đã biết sau đây vào phương trình $y(t)$: $y(0) = y_i = 44.145$[m]; $a = -9,81$ (vì quả bóng nằm trong rơi tự do); và $v_i = 0$[m/s] (kể từ khi quả bóng được thả ra khỏi trạng thái nghỉ). Chúng tôi muốn tìm thời điểm khi chiều cao của quả bóng bằng không:

$$0 = y(t_{fall}),$$

$$0 = \frac{1}{2}(-9.81)(t_{fall})^2 + 0(t_{fall}) + 44.145.$$

Giải t_{fall} ta tìm được đáp án $t_{fall} = \sqrt{\frac{44.145 \times 2}{9.81}} = 3$[s].

Là một biến thể khác của loại câu hỏi động học này, giả sử bạn được cho thời gian để quả bóng rơi xuống $= 3$[s], và bạn yêu cầu tìm chiều cao của ban công. Bạn đã biết $y(3) = 0$, và đang tìm chiều cao ban đầu y_i. Bạn có thể giải quyết cho y_i trong phương trình $0 = \frac{1}{2}(-9.81)3^2 + y_i$. Câu trả lời cho $y_i = 44.145$[m].

0 đến 100 trong 5 giây Giả sử bạn đang ngồi trên ghế lái của ô tô và bạn muốn tăng tốc từ 0 lên 100[km/h] trong 5 giây. Bao nhiêu động cơ của ô tô phải tạo ra gia tốc, giả sử nó tạo ra một gia tốc không đổi?

Chúng ta có thể tính a cần thiết bằng cách cắm các giá trị cần thiết vào phương trình vận tốc cho UAM:

$$v(t) = at + v_i.$$

Trước khi giải quyết vấn đề đó, chúng ta cần chuyển đổi vận tốc tính bằng [km/h] thành vận tốc tính bằng [m/s]: 100[km/h] $= 27,8$ [m/s]. $\frac{100 \text{ vòng/phút}}{} \cdot \frac{1000 \text{ vòng/phút}}{1[ks]} \cdot \frac{1[hs]}{3600[s]} =$

$1[hs]$ Chúng tôi thay thế các giá trị mong muốn $v_f = 27,8$[m/s], $v_i = 0$, và $t = 5$[s] vào phương trình $v(t)$ và giải a:

$$27.8 = v(5) = a5 + 0.$$

Sau khi giải a, ta thấy động cơ ô tô phải tạo ra một hằng số gia tốc của một $= \frac{27,8}{5} = 5,56$[m/s2] hoặc lớn hơn.

Ví dụ Ma-rốc II Một thời gian sau, bạn của bạn muốn gửi bạn một quả bóng nhôm khác từ căn hộ của anh ấy nằm trên đường 14 tầng (cao 44,145[m]). Để giảm thời gian bay, anh ta ném quả cầu rơi thẳng xuống với vận tốc ban đầu 10[m/s]. Bao lâu quả bóng có chạm đất không?

Hãy tưởng tượng tòa nhà chung cư là một trục y đo khoảng cách đi lên bắt đầu từ tầng trệt. Chúng tôi biết ban công nằm ở độ cao yi “ 44.145[m], và tại t “ 0[s] quả bóng bắt đầu bằng vi “ ´10[m/s]. Vận tốc ban đầu âm vì nó điểm ngược hướng với trục y. Chúng tôi cũng biết có gia tốc trọng trường ay “ ´9,81[m/s2].

Chúng tôi bắt đầu bằng cách viết phương trình UAM tổng quát:

$$yptq “ \frac{1}{2} giờ^2 ` vit ` yi.$$

Để tìm thời điểm quả bóng chạm đất, ta có thể giải t trong phương trình yptq “ 0, sau đó thế các giá trị vào phương trình UAM,

$$yptq “ 0 “ \frac{1}{2}p´9,81qt^2 ´ 10t ` 44.145,$$

và giải t bằng công thức bậc hai. Đầu tiên, viết lại phương trình bậc hai ở dạng chuẩn: $0 “ `10.0 \underbrace{4.905}_{\text{khung cửi}} t^2 \underbrace{}_{\text{khung cửi}} t ´looomooon \underbrace{44.145}_{c}$.

Một b c

Sau đó giải bằng phương trình bậc hai:

$$\text{té ngã} “ \frac{´b ˘ \sqrt{b2 ´ 4ac}}{2a} „ \frac{´10 ˘ \sqrt{100 ` 866.12}}{9,81} “ 2,15 \quad [S].$$

Chúng tôi bỏ qua giải pháp thời gian âm vì nó tương ứng với một thời gian trong quá khứ. So với ví dụ Ma-rốc đầu tiên, chúng ta thấy ném quả bóng xuống dưới làm cho nó rơi xuống đất ít hơn thời gian.

Cuộc thảo luận

Hầu hết các bài toán động học bạn sẽ giải theo cùng một khuôn mẫu như các ví dụ trên. Với một số giá trị ban đầu, bạn sẽ được yêu cầu giải một số chưa biết.

Điều quan trọng là phải ghi nhớ các dấu hiệu của các số bạn cắm vào các phương trình. Bạn nên luôn luôn vẽ hệ tọa độ và chỉ ra rõ ràng (cho chính bạn) trục x đo độ dịch chuyển của vật thể. Một đại lượng vận tốc hoặc gia tốc chỉ vào cùng hướng với trục x là một số dương, còn các đại lượng chỉ theo hướng ngược lại là số âm.

Nhân tiện, tất cả điều này nói về vptq là “tỷ lệ thay đổi của xptq” đang bắt đầu làm tôi lo lắng. Biểu thức “tốc độ thay đổi của” là một cách gián tiếp để nói đạo hàm của phép tính. theo thứ tự sử dụng thuật ngữ chính xác hơn này trong suốt phần còn lại của cuốn sách, bây giờ chúng ta sẽ có một chuyến du ngoạn ngắn vào vùng đất của giải tích định nghĩa hai khái niệm cơ bản: đạo hàm và tích phân.

Machine Translated by Google

bài tập

E2.1 Tính thời gian cần thiết để phóng tên lửa với ban đầu

vận tốc vi[m/s] và gia tốc không đổi a[m/s2] để đạt đến vận tốc 100[m/s]. Tổng quãng đường đã đi là bao nhiêu?

a) vi “ 20[m/s], a “ 5[m/s2] b) vi “ 30[m/s], a “ 10[m/s2]

2.3 Nhập môn giải tích

Giải tích là nghiên cứu về các chức năng và tính chất của chúng. Hai phép toán trong nghiên cứu giải tích là đạo hàm—mô tả cách đại lượng thay đổi theo thời gian—và tích phân, được sử dụng để tính tổng lượng của một đại lượng được tích lũy trong một khoảng thời gian.

Các dẫn xuất

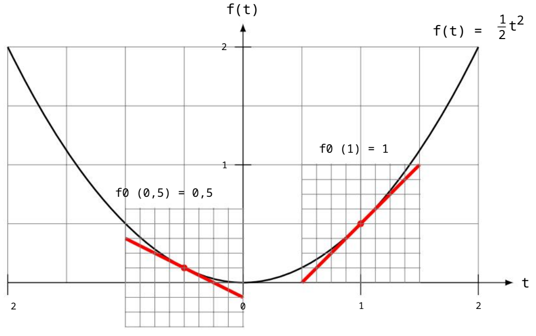
Hàm đạo hàm f theo thời [1]ptq mô tả chức năng fptq thay đổi như thế nào gian. Đạo hàm mã hóa thông tin về tốc độ thay đổi tức thời của hàm

fptq, giống như hàm

hệ số góc của đồ thị hàm số tại điểm đó:

$$f^{1}ptq \text{ “slopefptq ”} \frac{\text{thay doi fptq}}{\text{thay đổi trong t}} \text{ “ } \frac{fpt ` Dtq ´ fptq}{dt}.$$

Nếu đạo hàm f fptq [1]ptq bằng 5 đơn vị mỗi giây, điều này có nghĩa là thay đổi 5 đơn vị mỗi giây. Đạo hàm của hằng số chức năng bằng 0 bởi vì nó không có sự gia tăng vượt mức ở mọi nơi. Các đạo hàm của hàm fptq “ mt ` b (một dòng) là hàm hằng f khác nhau đối với [1]ptq “m. Tổng quát hơn, độ dốc tức thời của một hàm các giá trị khác nhau của t, như minh họa trong Hình 2.3.



Hình 2.3: Đạo hàm của hàm tại t “ a được ký hiệu là f ký [1]paq và de hiệu hàm hệ số góc tại điểm đó.

Machine Translated by Google

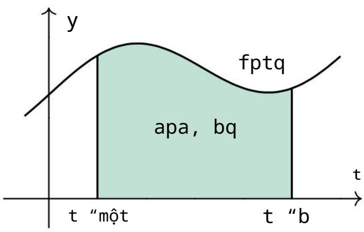
Phép toán đạo hàm được biểu thị bằng một số ký hiệu: D fptq “ [1]ptq “ $\frac{df}{dt}$ “ $\frac{đ}{dt}$t fptqu “ f . Tất cả các biểu tượng này mang cùng một ptq có nghĩa f ing. Hãy nghĩ [1] không phải là một thực thể riêng biệt với fptq, mà là một thuộc tính về f của hàm fptq. Tốt nhất là coi đạo hàm như một toán tử $\frac{đ}{đt}$ mà bạn áp dụng cho các hàm để có được thông tin độ dốc của chúng.

tích phân

Một tích phân tương ứng với phép tính diện tích bao quanh giữa đường cong fptq và trục t trong một khoảng nào đó:

$$\text{Apa, bq “ }^{a}\int_{t“a}^{t“b} \text{fptq dt.}$$

Ký hiệu ≥ là viết tắt của tổng. Thật vậy, diện tích dưới đường cong tương ứng với tổng các giá trị của hàm fptq giữa t “ a và t “ b. Tích phân là tổng của f giữa a và b.



Hình 2.4: Tích phân của hàm f ptq giữa t “ a và t “ b.

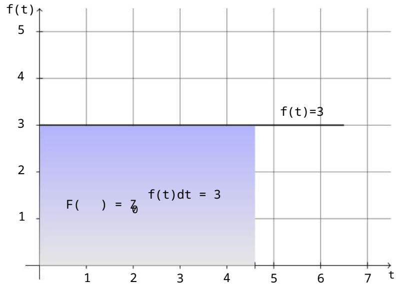
ví dụ 1

Ta có thể dễ dàng tìm được diện tích dưới đồ thị của hàm hằng fptq “ 3 giữa hai điểm bất kỳ vì vùng dưới đường cong là hình chữ nhật. Chọn t “ 0 làm điểm xuất phát, ta thu được hàm tích phân Fptq, tương ứng với diện tích dưới fptq giữa t “ 0 và t “ t:

$$\text{Fptq “ Ap0, tq “}^{a}\int_{0}^{t} \text{fptq dt “ 3t.}$$

Diện tích bằng chiều cao của hình chữ nhật nhân với chiều rộng của nó như minh họa trong Hình 2.5.

Machine Translated by Google



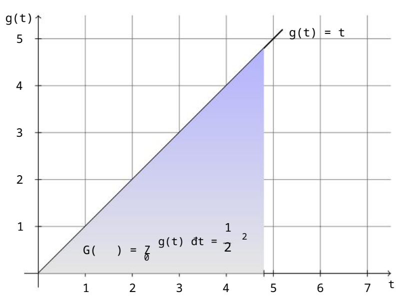
Hình 2.5: Diện tích hình chữ nhật có chiều cao bằng 3 và chiều rộng t bằng 3t.

ví dụ 2

Bây giờ xét diện tích dưới đồ thị của đường gptq “ t, bắt đầu từ từ t “ 0. Vì vùng dưới đường cong là hình tam giác nên chúng ta có thể tính diện tích của nó. Nhớ lại diện tích của một tam giác được cho bởi độ dài của cơ sở của nó nhân chiều cao của nó chia cho 2.

Công thức chung tính diện tích theo gptq từ t “ 0 đến t “ t được mô tả bằng phép tính tích phân sau:

$$G(t) = A(0, t) = \int_0^t g(t)\, dt = \frac{t \cdot t}{2} = \frac{1}{2}t^2.$$



Hình 2.6: Diện tích tam giác có đáy t và chiều cao t bằng $\frac{1}{2}t^2$.

Chúng ta có thể tính các tích phân trên nhờ vào các phép đo hình học đơn giản của diện tích bên dưới đồ thị. Ở phần sau của cuốn sách này (Chương 5), chúng ta sẽ phát triển các kỹ thuật tìm tích phân (các lĩnh vực thuộc đường cong) của các hàm phức tạp hơn. Trên thực tế, có một khóa học được gọi là tích phân, được dành riêng cho nhiệm vụ tìm tích phân.

Nhưng đừng lo, bạn không cần phải biết mọi thứ về số nguyên để học vật lý. Điều quan trọng bây giờ là bạn hiểu khái niệm tích hợp. Tích phân của một hàm là diện tích bên dưới đồ thị của hàm số, theo một nghĩa nào đó là tổng lượng hàm được tích lũy trong một khoảng thời gian nào đó. Đối với hầu hết các phần của vật lý năm thứ nhất, các công thức tích phân duy nhất bạn sẽ cần phải biết là

$$\int_0^t a\,dt = at \quad \text{và} \quad \int_0^t at\,dt = \frac{1}{2}at^2.$$

Tích phân đầu tiên mô tả phép tính chung của diện tích dưới một hàm hằng số, như trong Ví dụ 1. Công thức thứ hai là sự tổng quát hóa của công thức mà chúng ta đã rút ra trong Ví dụ 2. Sử dụng kết hợp các công thức này cho công thức, bạn có thể tính tích phân của một hàm bất kỳ dòng $h(t) = mt + b$ như sau:

$$H(t) = \int_0^t h(t)\,dt = \int_0^t (mt + b)\,dt = \int_0^t mt\,dt + \int_0^t b\,dt = \frac{1}{2}mt^2 + bt.$$

tập hợp lại

Tại thời điểm này, bạn có thể đang băn khoăn về các khái niệm giải tích mới. Một mặt, tính toán độ dốc (đạo hàm) và diện tích dưới đường cong (tích phân) có vẻ giống như các nhiệm vụ tầm thường. Mặt khác, thấy năm ký hiệu khác nhau cho đạo hàm và dấu tích phân kỳ lạ có lẽ đã đặt một số sợ hãi trong bạn. Bạn có thể tự hỏi liệu bạn thực sự cần học về đạo hàm và tích phân. Bao lâu bạn có phải tính diện tích bên dưới đồ thị của một hàm trong thế giới thực? Hóa ra "tính diện tích dưới một đường cong" là rất hữu ích vì nó là “thao tác hoàn tác” cho đạo hàm.

Phép toán nghịch đảo

Tích phân là phép toán nghịch đảo của đạo hàm. Nhiều phương trình trong toán học và vật lý liên quan đến đạo hàm của một số ẩn số chức năng. Hiểu mối quan hệ nghịch đảo giữa các tích phân và đạo hàm sẽ cho phép bạn giải hàm chưa biết trong các phương trình này.

Chắc hẳn bạn đã quen thuộc với mối quan hệ nghịch đảo giữa các hàm. Khi giải phương trình, chúng ta sử dụng các hàm nghịch đảo để hoàn tác các chức năng cản trở chúng ta khi chúng ta cố gắng cô lập x chưa biết. Tương tự, chúng tôi sử dụng phép toán tích phân để hoàn tác các hiệu ứng của phép toán đạo hàm khi chúng ta cố gắng giải một số ẩn số

Machine Translated by Google

chức năng fptq. Ví dụ: giả sử gptq là một hàm đã biết và chúng tôi đang cố gắng giải fptq trong phương trình

$$\frac{đ}{đt} t fptqu “ gptq.$$

Lấy tích phân ở vế trái của phương trình sẽ hoàn tác phép toán đạo hàm. Để giữ đẳng thức đúng, chúng ta phải áp dụng phép toán “tích phân theo t” trên cả hai vế của phương trình. Chúng tôi đạt được

$$ª \frac{đ}{đt} t fptqu dt “ ª gptq$$

$$dt, fptq “ ª gptq dt.$$

Thông báo rút ra là mỗi khi bạn muốn hoàn tác một đạo hàm, bạn có thể áp dụng phép toán tích phân, tuy nhiên, có một chi tiết kỹ thuật nhỏ mà chúng ta phải làm rõ để tuyên bố này được chính xác.

Tích phân không chính xác là nghịch đảo của đạo hàm—có một thừa số hằng số phức tạp hơn xuất hiện khi chúng ta lấy tích phân. Hãy phân tích chi tiết hơn điều gì sẽ xảy ra khi chúng ta thực hiện tổ hợp phép toán đạo hàm, sau đó là phép toán tích phân trên một số hàm fptq. Giả sử chúng ta được cho hàm đạo hàm f ptq và được yêu cầu tích phân nó giữa t “ 0 và t “ t. Theo trực giác, tích phân này tương ứng với việc tính tổng các thay đổi của fptq trong khoảng thời gian đó. Nhớ lại ký hiệu cho “sự thay đổi trong f ” Df “ fptq ´ fp0q mà chúng ta đã sử dụng trước đây. Ký hiệu này giúp bạn dễ dàng nhận thấy tích phân trên f ptq tương ứng với độ biến thiên toàn phần của fptq giữa t “ 0 và t “ t:

$$ª_0^t f^1ptq dt “ Df “ fptq ´ fp0q.$$

Tính tổng các độ biến thiên tức thời của f trong khoảng thời gian r0, ts cũng giống như tính độ biến thiên của fptq giữa các điểm cuối của khoảng. Nếu chúng ta viết lại phương trình trên để cô lập fptq, chúng ta thu được

$$fptq “ fp0q ` ª_0^t f^1ptq dt.$$

Lưu ý rằng biểu thức của fptq phụ thuộc vào giá trị của fptq tại t “ 0, mà chúng ta gọi là giá trị ban đầu của hàm. Trong các bài toán vật lý, giá trị ban đầu của phương trình chuyển động xp0q và vi vp0q xi được gọi là điều kiện ban đầu.

Ví dụ về ngân hàng Để minh họa cách các phép toán phái sinh và tích phân áp dụng vào thế giới thực, tôi sẽ rút ra một phép loại suy từ một tình huống mà học sinh nào cũng quen thuộc. Xét hàm baptq, đại diện cho số dư tài khoản ngân hàng của bạn tại thời điểm t. Cũng xem xét hàm trptq, tương ứng với các giao dịch (tiền gửi và rút tiền) trên tài khoản của bạn.

Hàm trptq là đạo hàm của hàm baptq. nếu bạn hỏi, "Số dư của tôi thay đổi như thế nào theo thời gian?" câu trả lời là hàm trptq. Sử dụng các ký hiệu toán học, chúng ta có thể biểu diễn điều này mối quan hệ như

$$trptq “ \frac{đ}{dt} baptqu .$$

Nếu công cụ phái sinh dương, số dư tài khoản của bạn đang tăng lên. Nếu phái sinh âm, số dư tài khoản của bạn đang cạn kiệt.

Giả sử bạn có bản ghi tất cả các giao dịch trên tài khoản của mình trptq, và bạn muốn tính số dư tài khoản cuối cùng vào cuối tháng. Vì trptq là đạo hàm của baptq, nên bạn có thể sử dụng một tích phân (phép toán nghịch đảo của đạo hàm) để thu được baptq. Biết số dư tài khoản đầu tháng, bạn có thể dự đoán số dư vào cuối tháng bằng cách sử dụng phép tính tích phân sau:

$$bap30q “ bap0q ` ª_{0}^{30} trptq dt.$$

Tính toán này có ý nghĩa vì trptq biểu thị tức thời thay đổi trong baptq. Nếu bạn muốn tìm sự thay đổi tổng thể trong tài khoản số dư từ ngày 0 cho đến ngày 30, bạn có thể tính tổng của tất cả giao dịch trên tài khoản.

Chúng ta sử dụng tích phân mỗi khi cần tính tổng của một số lượng trong một khoảng thời gian. Trong phần tiếp theo, chúng ta sẽ xem làm thế nào những kỹ thuật tích hợp có thể được áp dụng cho chủ đề động học, và làm thế nào các phương trình chuyển động cho UAM được bắt nguồn từ đầu tiên Nguyên tắc.

2.4 Động học với giải tích

Để thực hiện tính toán động học, tất cả những gì chúng ta cần làm là cắm điều kiện ban đầu (xi và vi) thành phương trình chuyển động đúng. Nhưng làm thế nào mà Newton đã đưa ra các phương trình chuyển động đầu tiên địa điểm? Bây giờ bạn đã biết các kỹ thuật toán học của Newton (cal tích), bạn có thể tự mình tìm ra các phương trình chuyển động.

Machine Translated by Google

Các khái niệm

Nhắc lại các khái niệm động học liên quan đến chuyển động của vật:

• t: thời gian

• xptq: vị trí theo thời gian • vptq: vận tốc theo thời gian • aptq: gia tốc theo thời gian “ xp0q, vi

định • xi chắc chắn “ vp0q: điều kiện ban đầu

Xem lại vị trí, vận tốc và gia tốc Các phương trình động học

được sử dụng để dự đoán chuyển động của các vật thể.

Giả sử biết gia tốc của vật aptq tại mọi thời điểm t.

Bạn có thể tìm thấy xptq bắt đầu từ aptq không?

Các phương trình chuyển động xptq, vptq, aptq liên hệ với nhau:

$$\text{aptq} \xrightarrow{\text{đ}} \text{dt vptq} \xrightarrow{\text{đ}} \text{dt xptq.}$$

Hàm vận tốc là đạo hàm của hàm vị trí và hàm gia tốc là đạo hàm của hàm vận tốc.

Quy trình chung Nếu bạn

biết gia tốc của một vật là một hàm của thời gian aptq, và bạn biết vận tốc ban đầu của nó vi “ vp0q, bạn có thể tìm hàm vận tốc của nó vptq cho tất cả các thời điểm sau đó bằng cách sử dụng tích phân. Điều này là do hàm gia tốc aptq mô tả sự thay đổi vận tốc của đối tượng.

Hãy xem làm thế nào điều này hoạt động. Vật bắt đầu với vận tốc ban đầu là vi “ vp0q tại t “ 0. Vận tốc ở thời điểm sau t “ t bằng vi cộng với gia tốc toàn phần của vật trong khoảng thời gian từ t “ 0 đến t “ t:

$$\text{vptq “ vi ` ª}_{0}^{t} \text{ aptq đt.}$$

Nếu bạn biết vị trí ban đầu xi và hàm vận tốc vptq, bạn có thể tìm hàm vị trí xptq bằng cách sử dụng tích phân. Chúng ta tìm vị trí tại thời điểm t “ t bằng cách cộng tất cả các vận tốc (sự thay đổi vị trí của vật thể) xảy ra giữa t “ 0 và t “ t:

$$\text{xptq “ xi ` ª}_{0}^{t} \text{ vptq đt.}$$

Machine Translated by Google

Quy trình tìm xptq bắt đầu từ aptq có thể được tóm tắt như sau:

$$\text{aptq} \xrightarrow{\text{vi`≥ dt} \,›\, \tilde{N}} \xrightarrow{\text{xi`≥ dt} \,›\, \tilde{N}} \text{xptq}.$$

vptq Tiếp theo, tôi sẽ minh họa cách bạn có thể áp dụng quy trình này cho trường hợp đặc biệt quan trọng của một vật chuyển động nhanh dần đều.

Dẫn xuất của các phương trình chuyển động UAM

Xét một vật chuyển động có gia tốc đều (UAM) với hàm gia tốc aptq “ a. Giả sử chúng ta biết ban đầu vận tốc của vi, và chúng ta muốn tìm vận tốc tại thời điểm sau t “ t. Chúng tôi tính vptq bằng cách sử dụng tích phân sau:

$$\text{vptq “ vi ` } \int_0^t \text{aptq dt “ vi ` } \int_0^t \text{một dt “ vi ` tại.}$$

Vận tốc là một hàm của thời gian được cho bởi vận tốc ban đầu vi được thêm vào thành tích phân của gia tốc. Sự tích hợp có thể được hình dung như phép tính diện tích hình chữ nhật, tương tự như phép tính chúng ta đã thấy trong Ví dụ 1 ở trang 166.

Bạn cũng có thể sử dụng tích phân để tìm hàm vị trí xptq nếu bạn biết vị trí ban đầu xi và hàm vận tốc vptq. Các công thức là

$$\text{xptq “ xi ` } \int_0^t \text{vptq dt “ xi ` } \int_0^t \text{pvi ` atq dt “ xi ` vit ` } \frac{1}{2}\text{at2.}$$

Bước tích hợp có thể được hình dung như tính toán diện tích của một hình tam giác có độ dốc a xếp chồng lên nhau trên một hình chữ nhật có chiều cao vi.

Lưu ý rằng các tính toán trên yêu cầu biết các điều kiện ban đầu xi và vi. Các giá trị ban đầu này là bắt buộc vì các tính toán tích phân mà chúng tôi thực hiện chỉ cho chúng tôi biết sự thay đổi của các đại lượng so với các giá trị ban đầu của chúng.

phương trình thứ tư

Chúng ta có thể rút ra phương trình thứ tư của chuyển động,

$$\text{v}2_{\text{f}} \text{ “ v2 ` 2apxf ´ xiq,}$$

bằng cách kết hợp phương trình chuyển động vptq và xptq. Hãy xem làm thế nào. Bắt đầu bằng cách bình phương cả hai vế của phương trình vận tốc vf “ vi ` at thành đạt được

$$\text{v}2_{\text{f}} \text{ “ pvi ` atq}^2 \text{ “ v2 `2avit ` a2t 2 “ v2 ` 2arvit` } \frac{1}{2}\text{at2s.}$$

Số hạng trong ngoặc vuông bằng Dx “ xptq ´ xi “ xf ´ xi.

Machine Translated by Google

Các ứng dụng của đạo hàm

Nhớ lại rằng các hàm vận tốc và gia tốc thu được bằng cách lấy đạo hàm của hàm vị trí:

$$x(t) \xrightarrow{\frac{d}{dt}} v(t) \xrightarrow{\frac{d}{dt}} a(t).$$

Chúng ta vừa xem cách sử dụng tích hợp để tuân theo chuỗi hoạt động này ngược lại để thu được $x(t)$ trong trường hợp đặc biệt của gia tốc không đổi:

$$a(t) = a,$$

$$v(t) = v_i + \int_0^t a(t)\,dt = v_i + at,$$

$$x(t) = x_i + \int_0^t v(t)\,dt = x_i + v_it + \frac{1}{2}at^2.$$

Lưu ý rằng, ngoài các phép tính tích phân, các công thức cho $v(t)$ và $x(t)$ yêu cầu một số thông tin bổ sung—giá trị ban đầu của chức năng.

Trước đó chúng ta đã định nghĩa toán tử đạo hàm $\frac{d}{dt}$ tính toán đạo hàm hàm f Có $f'(t)$, cho chúng ta biết hệ số góc của hàm $f(t)$. một số công thức đạo hàm mà bạn cần học để trở thành giỏi tính toán. Chúng ta sẽ đề cập đến chúng trong Chương 5. Hiện tại, công thức đạo hàm duy nhất bạn cần là quy tắc lũy thừa cho đạo hàm:

$$\text{nếu } f(t) = At^n \text{ thì } f'(t) = nAt^{n-1}.$$

Sử dụng công thức này cho từng số hạng trong hàm $f(t) = A + Bt + Ct^2$ chúng tôi tìm thấy đạo hàm của nó là $\frac{df}{dt} = f'(t) = 0 + B + 2Ct$.

Bây giờ chúng ta hãy sử dụng đạo hàm để xác minh rằng các phương trình chuyển động ta thu được ở trên thỏa mãn $v'(t) = a(t)$ và $x'(t) = v(t)$. Áp dụng các phép toán đạo hàm cho cả hai vế của phương trình ta thu được

$$a'(t) = 0,$$

$$v'(t) = \frac{d}{dt}\{v_i + at\} = \frac{d}{dt}\{v_i\} + \frac{d}{dt}\{at\} = 0 + a = a(t),$$

$$x'(t) = \frac{d}{dt}\{x_i\} + \frac{d}{dt}\{v_it\} + \frac{d}{dt}\{\tfrac{1}{2}at^2\} = 0 + v_i + at = v(t).$$

Lưu ý rằng việc tính toán đạo hàm của một hàm sẽ loại bỏ thông tin về giá trị ban đầu của nó; đạo hàm chỉ chứa thông tin về những thay đổi của $f(t)$.

Hãy tóm tắt những gì chúng ta đã học được cho đến nay về các công cụ phái sinh và tích phân. Tích phân rất hữu ích vì chúng cho phép chúng ta tính $v(t)$ từ $a(t)$ và $x(t)$ từ $v(t)$. Hoạt động phái sinh là hữu ích bởi vì nó cho phép chúng tôi có được vptq nếu chúng tôi biết xptq và/hoặc có được aptq nếu chúng tôi biết vptq. Nhớ lại rằng xptq, vptq và aptq tương ứng với ba khía cạnh khác nhau của cùng một chuyển động, như trong Hình 2.2 trên trang 160. Các phép tính của phép tính cho phép chúng ta di chuyển tự do giữa các mô tả khác nhau của chuyển động.

Cuộc thảo luận

Theo định luật chuyển động thứ hai của Newton, lực là nguyên nhân gây ra gia tốc và công thức chi phối mối quan hệ này là

Fnet “mẹ ơi,

trong đó Fnet là độ lớn của hợp lực tác dụng lên vật.

Trong Chương 4, chúng ta sẽ tìm hiểu về động lực học, nghiên cứu về các loại lực khác nhau có thể tác dụng lên vật thể: lực hấp dẫn Fg, lực lò xo Fs, lực ma sát Ff và các lực khác. Để tìm gia tốc của một vật, chúng ta phải cộng tất cả các lực tác dụng lên vật và chia cho khối lượng của vật:

ÿ Fi “ Fnet ñ a “ $\frac{1}{\text{tôi}}$ fnet.

Quy trình vật lý để dự đoán chuyển động của một vật khi biết các lực tác dụng lên nó có thể được tóm tắt như sau:

$\frac{1}{m}$ ´ÿ~ F“ ~ Fnet¯ “ aptq vi`≥ dt › Ñ vptq xi`≥ dt › Ñ xptq·
loooooomoooooooon loooooooooooooooooomooooooooooooooooooon
động lực học động học

Rơi tự do xem lại

Lực hấp dẫn tác dụng lên một vật có khối lượng m trên bề mặt Fg “ ´mgyˆ, trong đó g “ 9,81[m/s2] là của Trái đất được cung cấp bởi gia tốc trọng trường trên bề mặt Trái đất. Trước đây chúng ta đã thảo luận rằng một vật rơi tự do khi lực duy nhất tác dụng lên nó là trọng lực. Trong trường hợp này, định luật thứ hai của Newton cho chúng ta biết

Fnet “ m~a

´mgyˆ “ m~a.

Chia cả hai vế cho khối lượng, ta thấy gia tốc rơi tự do của một vật là~a “ ´9,81yˆ.

Thật thú vị khi lưu ý rằng khối lượng của một vật thể không ảnh hưởng đến gia tốc của nó khi rơi tự do. Lực hấp dẫn tỉ lệ thuận với khối lượng của vật nhưng gia tốc tỉ lệ nghịch với khối lượng của vật thể; về tổng thể, nó cho rằng ay “ ´g đối với các vật rơi tự do, bất kể khối lượng của chúng. Quan sát này lần đầu tiên được thực hiện bởi Galileo trong thí nghiệm Tháp nghiêng Pisa nổi tiếng của ông. Galileo đã đánh rơi một quả bóng gỗ và một quả bóng kim loại (cùng hình dạng, khác khối lượng) từ Tháp nghiêng Pisa, và quan sát thấy rằng họ rơi xuống đất lúc cùng lúc. Tìm kiếm “Apollo 15 Feather and Hammer Drop” trên YouTube để xem thí nghiệm này được thực hiện trên Mặt trăng.

Tiếp theo là gì?

Bạn có thể nhận thấy rằng trong vài đoạn văn cuối cùng, chúng tôi bắt đầu đặt những mũi tên nhỏ lên trên những số lượng nhất định. Các mũi tên ở đó để nhắc nhở bạn rằng lực, vận tốc và gia tốc là số lượng vector. Trong chương tiếp theo, chúng ta sẽ thực hiện một bài toán ngắn lạc đề để giới thiệu tất cả các khái niệm vectơ cần thiết để hiểu vật lý học.

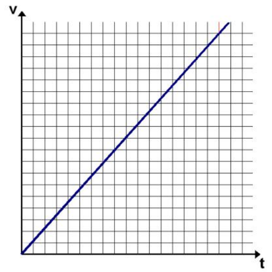
Trước khi chúng ta tiến hành các bài học về vectơ và nâng cao hơn chủ đề vật lý, bạn nên thực hành sử dụng các phương trình vật lý mà bạn vừa học. Dành thời gian để giải quyết một số bài tập các vấn đề trong phần tiếp theo.

2.5 Bài toán động học

Chúng ta đã dành cả một chương để học về các phương trình vị trí, vận tốc và gia tốc được sử dụng để mô tả chuyển động của các vật thể. Tuyệt rơi thời gian để thực hành sử dụng các phương trình này để giải quyết vấn đề.

Dưới đây là một số mẹo chung để giải các bài toán động học. Đầu tiên, cố gắng xác định phương trình nào bạn sẽ cần để giải quyết vấn đề. Chỉ có bốn trong số chúng: xptq “ xi ` vit ` và v2 $\frac{1}{2}$at2, vptq “ vi ` at, aptq “ a “ $\frac{fnet}{tôi}$ fi không thể tìm ra, “ v2 ` 2aDx, vì vậy nó không khó như vậy. nếu bạn kiểm tra gợi ý sau đó thử giải quyết vấn đề. Luôn luôn vẽ sơ đồ ghi nhãn tất cả các biến xuất hiện trong phương trình. Bằng cách này, bạn sẽ luôn có một bức tranh về những gì đang diễn ra. Kiểm tra câu trả lời của bạn với câu trả lời được cung cấp ở trang 460. Nếu bạn không nhận được câu trả lời đúng, hãy kiểm tra công việc của bạn và thử lại. Đừng nhìn vào giải pháp chưa. Cố gắng tìm ra vấn đề bằng cách xem lại các giả định bạn đã thực hiện, các phương trình bạn đã viết và các bước bạn đã theo dõi. Chỉ nhìn vào giải pháp nếu bạn không thể tìm ra giải pháp vấn đề sau 10 phút và bạn cạn kiệt ý tưởng.

P2.1 Dưới đây là đồ thị vận tốc theo thời gian của một hạt đang chuyển động. Hạt tăng hay giảm tốc độ? Đồ thị có mô tả chuyển động có gia tốc đều (UAM) hay không?



Gợi ý: Gia tốc là hệ số góc của đồ thị vận tốc.

P2.2 Bạn đang chạy khỏi điểm A. Tại t “ 2[s] bạn cách A 3[m], tại t “ 4[s] bạn cách A 8[m] và tại t “ 6[s] bạn cách A 14[m]. Bạn có đang chạy với vận tốc không đổi (UVM) không?
Gợi ý: Tính vận tốc trong mỗi khoảng thời gian.

P2.3 Một ô tô đang chuyển động trên một đoạn đường thẳng. Cho biết vận tốc của ô tô tăng hay giảm trong các trường hợp sau: 1. Vận

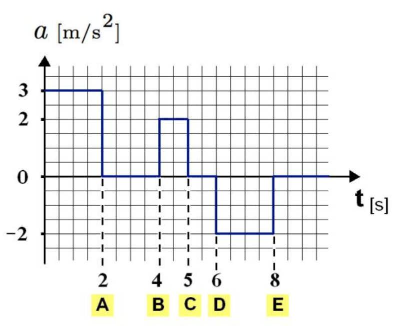
tốc âm, gia tốc dương.

2. Vận tốc âm, gia tốc âm.

Gợi ý: Chú ý đến chiều tương đối của gia tốc với vận tốc.

P2.4 Một vật được đẩy bởi một lực không đổi F, và tại thời điểm t “ t0 thì lực bằng không. Xác định thời điểm hạt chuyển động có gia tốc đều (UAM) và thời điểm hạt chuyển động có vận tốc đều (UVM).
Gợi ý: Ghi nhớ định luật 2 Newton về chuyển động.

P2.5 Một ô tô có đồ thị gia tốc theo thời gian như sau. Xe bắt đầu nghỉ tại t “ 0[s]. Tìm vận tốc của ô tô tại các thời điểm A, B, C, D, E.



Gợi ý: Độ thay đổi vận tốc là diện tích nằm dưới đồ thị gia tốc.

P2.6 Vị trí của tên lửa dưới dạng hàm của thời gian được mô tả bởi phương trình 2 xptq “ ^{3} 3t ´ 3t ` 5. Tìm vận tốc và gia tốc của tên lửa ` 5t dưới dạng hàm của thời gian.

Gợi ý: Đạo hàm đối với t.

P2.7 Bạn đang thực hiện một sứ mệnh tới Sao Mộc, nơi bạn thiết kế một thí nghiệm để đo gia tốc trọng trường của hành tinh. Trong thí nghiệm, bạn thả một quả bóng từ độ cao 4[m] và quan sát nó rơi xuống đất. Khi quả bóng chạm đất, vận tốc của nó là 14 [m/s].

1. Gia tốc trọng trường trên Sao Mộc là gì?
2. Tìm vị trí của quả bóng theo thời gian.

Gợi ý: Sử dụng phương trình chuyển động thứ tư.

P2.8 Bạn đang kéo một chiếc xe 5[kg] trên đường thẳng. Vị trí của xe hàng theo thời gian là xptq “ 6t ^{2} ` 2t ` 1[m].

1. Tìm vận tốc và gia tốc của xe theo thời gian.
2. Tính lực bạn dùng để kéo xe.

Gợi ý: Lấy đạo hàm của vị trí theo thời gian. Sử dụng định luật 2 Newton F “ma.

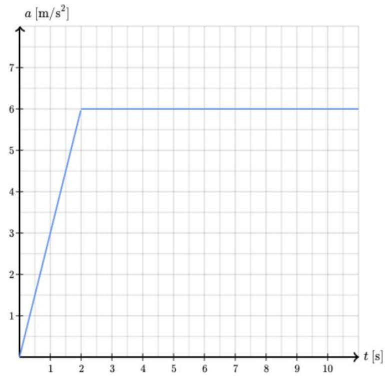
P2.9 Một ô tô điều khiển từ xa có khối lượng 0,5[kg]. Động cơ điện đẩy ô tô với lực 1,0[N] bắt đầu từ trạng thái nghỉ tại điểm A.

1. Tìm gia tốc, vận tốc và vị trí của ô tô dưới dạng các hàm theo thời gian, giả sử x “ 0 tại điểm A.
2. Tính vận tốc của ô tô lúc t “ 4[s].
3. Vận tốc của ô tô khi cách điểm A 9[m] là bao nhiêu?

Gợi ý: Sử dụng định luật 2 Newton và tích phân.

P2.10 Dưới đây là đồ thị gia tốc theo thời gian của một hạt. Tại t “ 0[s], hạt bắt đầu chuyển động từ trạng thái nghỉ tại x “ 0[m]. Gia tốc của hạt từ t “ 0[s] đến t “ 2[s] được cho bởi aptq “ 3t[m/s2]. Sau t “ 2[s] gia tốc không đổi a “ 6[m/s2].

1. Tìm vận tốc vp2q và vị trí xp2q của hạt tại t “ 2[s].
2. Xây dựng các hàm thời gian mô tả gia tốc, vận tốc và vị trí của hạt sau thời gian t “ 2[s].
3. Cần bao nhiêu thời gian để hạt đi được x “ 49[m]?
4. Vận tốc của hạt sẽ cách gốc toạ độ bao xa? 12[m/s]?

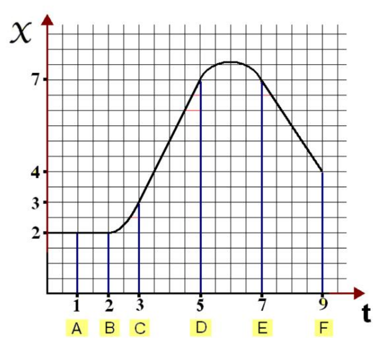


Gợi ý: Sử dụng tích phân để tìm vận tốc và vị trí. tích phân của f ptq “ t ^{2} là Fptq $\frac{1}{3}$t 3. Đảm bảo rằng khi t “ 2[s] thì hàm vptq và “xptq trong Phần 2 khớp với câu trả lời của bạn từ Phần 1.

P2.11 Biểu đồ bên dưới hiển thị đồ thị vị trí theo thời gian của một con sóc đang chạy trong một cánh đồng trong đó x tính bằng mét và t tính bằng giây.

1. Tính vận tốc của con sóc trong các khoảng thời gian từ A đến B, C đến D, và E đến F.

2. Cho biết con sóc đang đứng yên chuyển động tịnh tiến (trong chiều x dương) hoặc di chuyển ngược lại trong các khoảng thời gian sau: 0[s] đến 2[s], 2[s] đến 6[s] và 6[s] đến 9[s].



Gợi ý: Vận tốc là Dx chia cho Dt.

P2.12 Một ô tô đi qua điểm A với vận tốc vi[m/s] tại t “ 0[s], với gia tốc ´2[m/s2]. Xe dừng lại cách điểm A 9[m].

1. Vi là gì?

2. Vị trí của ô tô là một hàm số theo thời gian?

Gợi ý: Sử dụng phương trình chuyển động thứ tư.

P2.13 Hai con chó đang đuổi theo một quả bóng quần vợt. Tại thời điểm t “0[s] con chó thứ nhất bắt đầu chạy từ trạng thái nghỉ với gia tốc 3[m/s2]. Con chó kia chạy trước con chó thứ nhất 4[m] tại t “ 0[s], chạy với vận tốc 3[m/s] và gia tốc 1[m/s2].

1. Xây dựng vị trí của hai con chó dưới dạng hàm của thời gian.
2. Mấy giờ mấy con chó gặp nhau?

Gợi ý: Đánh đồng vị trí của cả hai con chó.

P2.14 Một ô tô có hàm định vị xptq “ 2t 2 ` 5t ` 7[m].

1. Vị trí và vận tốc của ô tô tại t “ 0[s] là bao nhiêu?
2. Tìm vận tốc và gia tốc của ô tô theo thời gian.
3. Tìm vị trí và vận tốc của ô tô lúc t “ 5[s]?

Gợi ý: Sử dụng vi phân để tìm các hàm vận tốc và gia tốc.

P2.15 Một ô tô đang chuyển động với vận tốc ban đầu vi thì hãm phanh. Sau 2[m] vận tốc của ô tô là 4[m/s], và sau 4[m] sau khi hãm phanh ô tô dừng lại. vi là gì và cần bao nhiêu thời gian để xe dừng lại?
Giả sử gia tốc (giảm tốc) của ô tô không đổi bắt đầu từ thời điểm đạp phanh cho đến khi dừng lại.

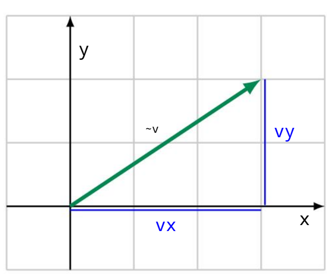
Gợi ý: Sử dụng phương trình chuyển động thứ tư. Tìm chức năng vị trí.

Chương 3

vectơ

Trong chương này, chúng ta sẽ học cách thao tác với các đối tượng đa chiều được gọi là vectơ. Vectơ là cách chính xác để mô tả các hướng trong không gian. Chúng ta cần các vectơ để mô tả các đại lượng vật lý như lực, vận tốc và gia tốc.

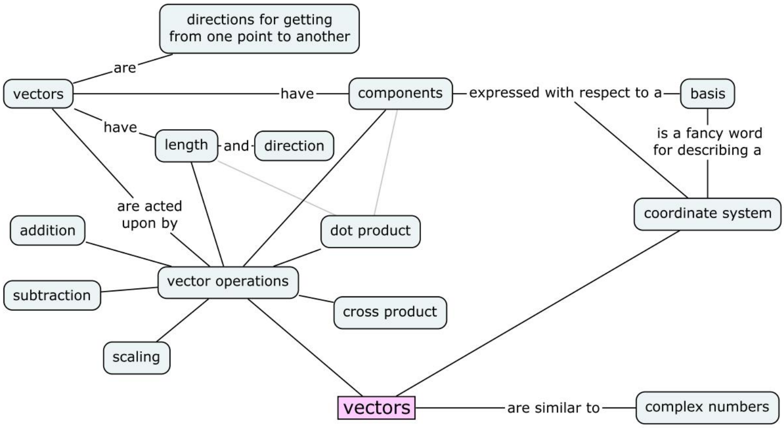
Các vectơ được xây dựng từ các số thông thường, tạo thành các thành phần của vectơ. Bạn có thể coi vectơ là một danh sách các số và đại số vectơ là các phép toán được thực hiện trên các số trong danh sách.
Các vectơ cũng có thể được thao tác dưới dạng các đối tượng hình học, được biểu thị bằng các mũi tên trong không gian. Chẳng hạn, mũi tên tương ứng với vec tor ~v “ pvx, vyq bắt đầu tại gốc tọa độ p0, 0q và kết thúc tại điểm pvx, vyq.
Từ vector xuất phát từ tiếng Latin vehere, có nghĩa là mang theo.
Thật vậy, vectơ ~v lấy điểm p0, 0q và mang nó đến điểm pvx, vyq.



Hình 3.1: Vectơ ~v “ p3, 2q là một mũi tên trong mặt phẳng Descartes. Thành phần ngang của ~v là vx “ 3 và thành phần dọc là vy “ 2.

Chương này sẽ giới thiệu cho bạn về vectơ, đại số vectơ và các phép toán vectơ, rất hữu ích để giải các bài toán vật lý.
Những gì bạn sẽ học ở đây áp dụng rộng rãi hơn cho các vấn đề hiện tại về đồ họa máy tính, lý thuyết xác suất, học máy và các vấn đề khác.

lĩnh vực khoa học và toán học. Ngày nay, tất cả đều là về vectơ, vì vậy tốt nhất bạn nên tìm hiểu về chúng.



Hình 3.2: Hình này minh họa các khái niệm mới liên quan đến vectơ. Như bạn có thể thấy, có khá nhiều từ vựng mới để học, nhưng đừng bối rối—tất cả những thuật ngữ này chỉ là những cách nói hoa mỹ về mũi tên.

3.1 Hoạt động ngoài trời tuyệt vời

Vectơ là hướng để đi từ điểm A đến điểm B. Chỉ đường có thể được đưa ra dưới dạng tên đường phố và mốc trực quan hoặc đối với một hệ tọa độ.

Trong khi đi nghỉ ở British Columbia, bạn muốn đến thăm một địa điểm ngoài trời nào đó mà bạn của bạn đã nói với bạn. Bạn của bạn không thể tự mình đưa bạn đến đó, nhưng anh ấy đã gửi cho bạn hướng dẫn cách đi đến địa điểm từ trạm xe buýt:

> Sup G. Đến trạm xe buýt số 345. Mang theo la bàn.
> Đi bộ 2 km về phía bắc rồi 3 km về phía đông. Bạn sẽ tìm thấy X ở đó.

Tin nhắn văn bản này chứa tất cả thông tin bạn cần để tìm X.

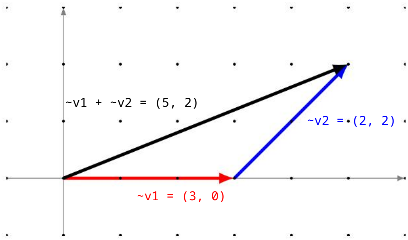
Hành động 1: Làm theo hướng dẫn

Bạn đến trạm xe buýt nằm trên đỉnh một ngọn đồi. Từ độ cao này, bạn có thể nhìn thấy toàn bộ thung lũng, và dọc theo sườn đồi thấp trải rộng một cánh đồng hoa màu cao tuyệt đẹp. Các loại cây trồng cao đến mức khiến bất kỳ ai đứng trong đó cũng không thể nhìn thấy quá xa; điều tốt là bạn có một la bàn. Bạn căn kim la bàn sao cho hàng mũi tên màu đỏ chỉ hướng bắc. Bạn đi bộ 2 km về phía bắc, sau đó rẽ phải 90˝

Vector dạng mũi tên

Cho đến giờ, chúng ta đã mô tả cách thực hiện các phép toán đại số trên vectơ theo các thành phần của chúng. Các phép toán vectơ cũng có thể được diễn giải bằng hình học, như các phép toán trên các mũi tên trong mặt phẳng Descartes.

Phép cộng vectơ Tổng của hai vectơ tương ứng với phép dời hình kết hợp của hai vectơ đó. Hình 3.4 minh họa phép cộng của hai vectơ, ~v1 " p3, 0q và ~v2 " p2, 2q. Tổng của hai vectơ là vectơ ~v1 `~v2 " p3, 0q`p2, 2q"p5, 2q.

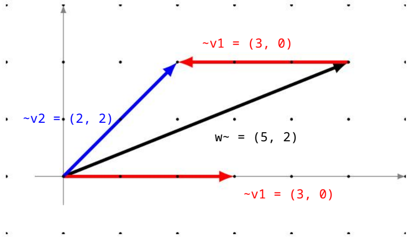


Hình 3.4: Phép cộng các vectơ ~v1 và ~v2 tạo ra vectơ p5, 2q.

Phép trừ véc tơ Trước khi chúng ta mô tả phép trừ véc tơ, hãy lưu ý rằng nhân một véc tơ với hệ số tỷ lệ a " ´1 sẽ cho một véc tơ có cùng độ dài với véc tơ ban đầu, nhưng chỉ theo hướng ngược lại.

Thực tế này rất hữu ích nếu bạn muốn trừ hai vectơ bằng phương pháp đồ thị. Trừ một vectơ cũng giống như cộng số âm của vectơ:

w~ ´~v1 " w~ ` p´~v1q " ~v2.



Hình 3.5: Phép trừ vectơ w~ ´~v1 tương đương với phép cộng vectơ w~ ` p´~v1q, trong đó p´~v1q giống ~v1 nhưng chỉ theo hướng ngược lại.

Hình 3.5 minh họa quy trình đồ họa để trừ véc tơ ~v1 " p3, 0q khỏi véc tơ w~ " p5, 2q. Phép trừ của ~v1 " p3, 0q cũng giống như phép cộng của ´~v1 " p ´3, 0q.

học tập, chúng tôi thường biểu diễn "dữ liệu phong phú" như hình ảnh, video và văn bản dưới dạng vectơ có hàng nghìn kích thước.

Một ví dụ về vectơ n chiều là

~v " pv1, v2,..., vnq P Rn.

Các phép toán đại số vectơ mà bạn đã học trong phần này cũng áp dụng cho các vectơ cấp cao này.

Vectơ và tọa độ vectơ

Một điểm cuối cùng chúng ta cần làm rõ là sự khác biệt giữa các đại lượng vectơ trong thế giới thực như vận tốc của quả bóng tennis ~v và biểu diễn toán học của nó dưới dạng vectơ tọa độ pvx, vy, vzq. Nếu bạn biết tọa độ vector pvx, vy, vzq thì bạn biết vận tốc trong thế giới thực là bao nhiêu, phải không? Không hẳn.

Giả sử bạn đang thực hiện một dự án nghiên cứu vật lý về các cú giao bóng quần vợt. Bạn xác định một hệ tọa độ xyz cho sân quần vợt, cho phép bạn biểu diễn vận tốc của quả bóng ~v dưới dạng bộ ba thành phần pvx, vy, vzq được hiểu là: "Quả bóng đang chuyển động với vận tốc vx đơn vị theo hướng x , đơn vị vy theo hướng y và đơn vị vz theo hướng z.

Giả sử bạn muốn mô tả véc tơ vận tốc ~v cho một nhà vật lý đồng nghiệp qua tin nhắn văn bản. Tham khảo bảng tính toán của bạn, bạn tìm thấy các giá trị ~v " p60, 3, ´2q, mà bạn biết được đo bằng mét trên giây. Bạn gửi tin nhắn này:

> Vận tốc là (60,3,-2) được đo bằng mét trên giây.

Vài phút sau, câu trả lời sau đây quay lại:

> Đợi cái gì? Bạn đang sử dụng hệ tọa độ nào?

Quả thực thông tin bạn gửi chưa đầy đủ. Các thành phần vectơ phụ thuộc vào hệ tọa độ trong đó các vectơ được gửi lại. Bộ ba số p60, 3, ´2q chỉ có ý nghĩa khi bạn biết hướng của các trục trong hệ tọa độ xyz. Nhận ra sai lầm của mình, bạn gửi một tin nhắn với tất cả các thông tin cần thiết:

> Sử dụng hệ tọa độ có tâm ở cột phía nam của lưới, với trục x hướng về phía đông dọc theo sân, trục y hướng về phía bắc dọc theo lưới và trục z hướng lên trên, vận tốc là (60,3, -2) tính bằng mét trên giây.

Vài giây sau, bạn nhận được câu trả lời:

> OK có nó ngay bây giờ. Cám ơn!

Tình huống giả định này minh họa tầm quan trọng của các hệ tọa độ để mô tả các vectơ. Nếu bạn không biết hệ tọa độ là gì, biết tọa độ pvx, vy, vzq không cho biết bạn nhiều. Chỉ khi bạn biết hướng của các vectơ đơn vị ı^, ˆ k. ,ˆ` vz k bạn có thể giải thích các hướng dẫn không ~v " vxıˆ` vy ,ˆ, và Hóa ra, sử dụng hệ tọa độ xyz với ba vectơ tıˆ, ,ˆ, ku chỉ là một trong nhiều cách khả thi mà chúng ta có thể đại diện cho vecto. Chúng ta có thể biểu diễn một vectơ ~v dưới dạng tọa độ pv1, v2, v3q với bất kỳ cơ sở nào teˆ1,eˆ2,eˆ3u bằng cách sử dụng biểu thức ~v " v1eˆ1 ` v2eˆ2 ` v3eˆ3, tương ứng với hướng dẫn: "Di chuyển v1 đơn vị theo hướng eˆ1, di chuyển v2 đơn vị theo hướng eˆ2 và di chuyển v3 đơn vị theo hướng của eˆ3."

cơ sở là gì, bạn yêu cầu? Tôi rất vui vì bạn đã hỏi, bởi vì đây là chủ đề của phần tiếp theo.

3.3 Cơ sở

Một trong những khái niệm quan trọng nhất trong nghiên cứu về vectơ là khái niệm cơ sở. Xét không gian vectơ ba chiều R3. Cơ sở của R3 là một tập hợp các vectơ teˆ1,eˆ2,eˆ3u có thể được sử dụng làm hệ tọa độ cho R3. Nếu tập hợp các vectơ teˆ1,eˆ2,eˆ3u là một cơ sở thì bạn có thể biểu diễn bất kỳ vectơ nào ~v P R3 dưới dạng tọa độ pv1, v2, v3q với tôn trọng cơ sở đó:

~v " v1eˆ1 ` v2eˆ2 ` v3eˆ3.

Vectơ ~v thu được bằng cách đo khoảng cách v1 trong eˆ1 hướng, khoảng cách v2 theo hướng eˆ2 và khoảng cách v3 theo hướng eˆ3 phương hướng.

Bạn đã quen thuộc với cơ sở chuẩn tıˆ, ,ˆ, ku, đó là liên quan đến hệ trục tọa độ xyz. Bạn biết rằng bất kỳ vectơ nào ~v P R3 có thể được biểu diễn dưới dạng bộ ba pvx, vy, vzq đối với cơ sở tıˆ, ku thông qua công thức ~v " vxıˆ` vy ,ˆ ` vz k. toàn bộ quan điểm của ,ˆ, phần này là để cho bạn biết rằng các cơ sở khác (hệ tọa độ) tồn tại, và để giúp bạn có thói quen hỏi, "Đối với những gì hệ tọa độ?" mỗi khi bạn nhìn thấy một vectơ tọa độ pa, b, cq.

một sự tương tự

Hãy bắt đầu với một ví dụ đơn giản về cơ sở. Nếu bạn nhìn vào HTML mã nguồn đằng sau bất kỳ trang web nào, bạn chắc chắn sẽ tìm thấy ít nhất một đề cập đến chỉ thị biểu định kiểu màu, chẳng hạn như color:#336699;. Các số nên được hiểu là bộ ba giá trị p33, 66, 99q, mỗi giá trị mô tả lượng màu đỏ, lục và lam cần thiết để

Công thức của De Moivre có ý nghĩa nếu bạn nghĩ về số phức z " eiq " cos q ` i sin q, nâng lên lũy thừa n:

pcos q ` i sin qq N " zn " pe iqq n hỏi "e câu " cos nq ` i sin nq.

Đặt n " 2 vào công thức de Moivre, ta suy được góc kép công thức (trang 98) dưới dạng phần thực và phần ảo của các công thức sau phương trình:

pcos2 q ´ sin2 qq`p2 sin q cos qqi " cosp2qq ` sinp2qqi.

liên kết

[Chứng minh trực quan định lý cơ bản của đại số]
https://www.youtube.com/watch?v=shEk8sz1oOw

3.6 Bài toán vectơ

Bạn đã học một loạt các công thức vectơ và bạn đã thấy một số di agram vectơ, nhưng bạn đã thực sự học cách giải các bài toán với vectơ chưa? Chỉ có một cách để tìm hiểu: tự kiểm tra bằng cách giải các bài toán.

Tôi đã nói rồi và tôi không muốn nhắc lại nhiều nữa, nhưng điều đáng nói lại là: bạn càng giải quyết được nhiều vấn đề, bạn càng hiểu tài liệu tốt hơn. Bây giờ là lúc để bạn thử theo dõi các vấn đề về véc tơ để đảm bảo rằng bạn đang ở trên cùng của mọi thứ.

P3.1 Biểu diễn các vectơ sau dưới dạng ký hiệu độ dài và hướng:

a) ~u1 " p0, 5q b) ~u2 "p1, 2q c) ~u3 " p´1, ´2q

P3.2 Biểu diễn các vectơ sau dưới dạng các thành phần:

a) ~v1 " 20=30˝ b) ~v2 " 10=´90˝ c) ~v3 " 5=150˝

P3.3 Biểu diễn các vectơ sau dưới dạng các vectơ đơn vị ı^, ,^, và b) w~ " p3, ´2, k^:

a) v~ " 10=25˝ 1 3q " 7=´90˝ 2 c) v~3

P3.4 Cho các vectơ ~v1 " p1, 1q, ~v2 " p2, 3q, và ~v3 " 5=30˝, hãy tính các biểu thức sau:

a) ~v1 `~v2 b) ~v2 ´ 2~v1 c) ~v1 `~v2 `~v3

P3.5 Xuất phát từ điểm P "p2, 6q, ba vectơ chuyển vị Hình 3.15 được áp dụng để thu được điểm Q. Tọa độ của điểm Q là gì?

P3.6 Cho các vectơ ~u " p1, 1, 1q, ~v " p2, 3, 1q, và w~ " p´1, ´1, 2q, tính các sản phẩm sau:

a) ~u ¨~v b) ~u ¨ w~ c) ~v ¨ w~

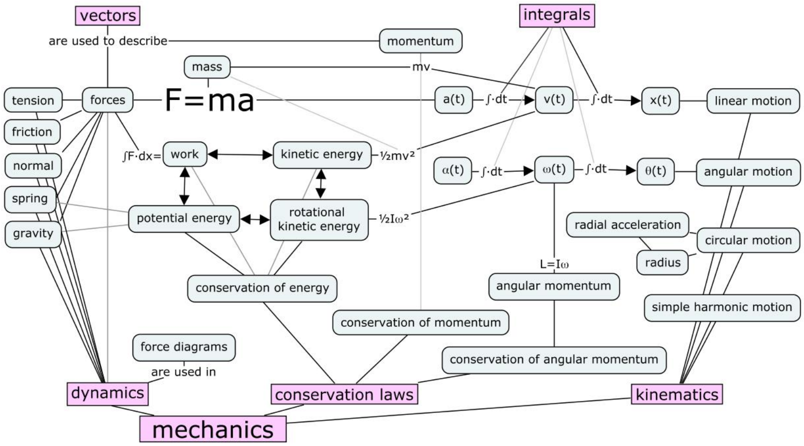
d) ~u ˆ~v e) ~u ˆ w~ f) ~v ˆ w~

Chương 4

cơ khí

4.1 Giới thiệu

Cơ học là nghiên cứu chính xác về chuyển động của các vật thể, các lực tác dụng lên chúng và các khái niệm trừu tượng hơn như động lượng và năng lượng. Bạn có thể đã có một sự hiểu biết trực quan về những khái niệm này rồi. Trong chương này, chúng ta sẽ học cách sử dụng các phương trình toán học chính xác để hỗ trợ trực giác của bạn.



Hình 4.1: Các khái niệm về cơ học. Lực là nguyên nhân của chuyển động. Chúng ta cũng có thể phân tích chuyển động của các vật thể theo các khái niệm về năng lượng và động lượng. Nếu bạn hiểu mối liên hệ giữa tất cả các khái niệm trên, bạn hiểu cơ học.

các định luật Newton

Cơ học là phần vật lý dễ hiểu nhất. Bắt đầu từ ba nguyên tắc chung được gọi là định luật Newton, chúng ta có thể tìm ra hầu hết mọi thứ về chuyển động của các vật thể.

Ba định luật chuyển động của Newton:

1. Khi không có ngoại lực thì vật vẫn giữ nguyên trạng thái vận tốc và hướng chuyển động của chúng.

2. Lực tác dụng lên vật gây ra gia tốc ngược pha tỉ lệ thuận với khối lượng của vật: $\vec{F} = m\vec{a}$.

3. Đối với mỗi lực $\vec{F}_{12}$ do Đối tượng 1 tác dụng lên Đối tượng 2, có một bằng và ngược chiều lực $\vec{F}_{21}$ mà Vật 2 tác dụng lên Vật 1.

Phần thú vị của việc học vật lý là nó dạy chúng ta suy nghĩ về các quy luật tự nhiên dưới dạng các nguyên tắc đơn giản. Các hiện tượng phức tạp có thể được chia nhỏ và hiểu theo các lý thuyết cơ bản. Các định luật vật lý có thể được diễn đạt dưới dạng toán học phương trình. Có khoảng 20 phương trình như vậy (xem trang 510 trong mặt sau của cuốn sách). Trong chương này bạn sẽ học cách sử dụng các phương trình để giải quyết tất cả các loại vấn đề vật lý.

Động học là nghiên cứu về chuyển động

Để giải một bài toán vật lý là thu được phương trình chuyển động xptq, trong đó mô tả vị trí của đối tượng như là một chức năng của thời gian. Một lần bạn biết xptq, bạn có thể trả lời bất kỳ câu hỏi nào liên quan đến chuyển động của đối tượng. Để tìm vị trí ban đầu xi của vật ta cắm t “ 0 vào phương trình chuyển động xi “ xp0q. Để tìm (các) thời điểm khi đối tượng đi đến một khoảng cách nhất định, giả sử 20[m] từ gốc tọa độ, giải cho t trong xptq “ 20[m]. Nhiều vấn đề về cơ học cuối cùng đề thi sẽ thuộc dạng này nên nếu bạn biết cách tìm xptq thì sẽ trong tình trạng tốt để vượt qua kỳ thi.

Trong chương 2, chúng ta đã học về động năng của vật chuyển động trong một chiều. Cụ thể hơn, chúng tôi đã sử dụng tích hợp để có được hàm vận tốc của một vật thể bắt đầu từ kiến thức về nó sự tăng tốc. Tích phân hàm vận tốc, chúng ta có được vị trí của nó chức năng:

$$a(t) \quad \xrightarrow{v_i + \int dt} \quad v(t) \quad \xrightarrow{x_i + \int dt} \quad x(t).$$

Được rồi, nhưng làm thế nào để chúng ta có được gia tốc?

Machine Translated by Google

Động lực học nghiên cứu các lực Bước

đầu tiên để tìm ra xptq là tính toán tất cả các lực tác dụng lên vật. Lực là nguyên nhân gây ra gia tốc của vật.
Định luật II Newton F“ma phát biểu rằng một lực tác dụng lên một vật sinh ra một gia tốc tỉ lệ nghịch với khối lượng của vật. Có nhiều loại lực: trọng lượng của một vật W~ là một loại lực, lực ma sát Ff là một loại lực khác, lực

sức căng của sợi dây T là một loại lực khác, v.v. Lưu ý mũi tên nhỏ phía trên mỗi lực, mũi tên này ở đó để nhắc bạn rằng lực là đại lượng vectơ. Để tìm tổng lực tác dụng lên vật, Fnet “ ∞~ F. tính tổng tất tác dụng lên vật Sau khi biết tổng lực, bạn có thể sử cả các lực

dụng công thức ~aptq “

$\frac{\tilde{f}net}{m}$ để tìm gia tốc của vật. Khi bạn biết gia tốc aptq, bạn có thể tính xptq bằng cách sử dụng các bước tính toán mà chúng ta đã học trong Chương 2. Toàn bộ quy trình dự đoán chuyển động của các vật thể có thể được tóm tắt như sau

$$\underbrace{\frac{1}{m}\ ´ÿ\sim F“}_{\text{động lực học}}\ Fnet^{-}\ “\ \underbrace{aptq \xrightarrow{vi`\geq}_{dt} \tilde{N}\ vptq \xrightarrow{xi`\geq}_{dt} \tilde{N}\ xptq}_{\text{động học}}\ .$$

Nếu bạn hiểu phương trình trên, thì bạn hiểu cơ học. Mục tiêu của chương này là giới thiệu cho bạn tất cả các khái niệm xuất hiện trong phương trình này và khám phá mối quan hệ giữa chúng.

Những thứ khác

Ngoài động lực học và động học, chương này bao gồm một số chủ đề vật lý khác.

Định luật thứ hai của Newton cũng có thể được áp dụng để nghiên cứu các vật thể quay. Chuyển động góc được mô tả bằng góc quay qptq, vận tốc góc wptq và gia tốc góc aptq. Gia tốc góc được gây ra bởi lực góc, mà chúng ta gọi là mô-men xoắn T . Các nguyên tắc đằng sau chuyển động tròn gần giống hệt như các nguyên tắc của chuyển động thẳng; điểm khác biệt duy nhất là chúng ta sử dụng các đại lượng góc để mô tả chuyển động tròn—thay vì mô tả chuyển động theo [m], [m/s] và [m/s2], chúng ta mô tả chuyển động góc theo [radian] , [radian/s] và [radian/s2].

Trong quá trình va chạm giữa hai vật thể, sự tăng vọt đột ngột của lực tiếp xúc giữa chúng có thể khó đo lường và định lượng.
Do đó, không thể sử dụng định luật F ma của Newton để tìm gia tốc của các vật thể xảy ra trong quá trình va chạm và dự đoán chuyển động của các vật thể bằng cách sử dụng phương pháp động học được mô tả ở trên.

Để dự đoán chuyển động của các vật sau va chạm, chúng ta có thể sử dụng phép tính động lượng. Một vật có khối lượng m chuyển động với vận tốc ~v có động lượng ~p “ m~v. Nguyên lý bảo toàn động lượng phát biểu rằng tổng động lượng trong một hệ trước và sau va chạm được bảo toàn. Như vậy, nếu hai vật có momen ban đầu ~pi1 và ~pi2 va chạm với nhau thì tổng động lượng trước va chạm phải bằng tổng động lượng sau va chạm:

ÿ~pi “ ÿ~pf ñ ~pi1 `~pi2 “ ~pf 1 `~pf 2.

Chúng ta sử dụng phương trình này để tính động lượng cuối cùng ~pf 1, ~pf 2 của các vật sau va chạm.

Có một cách khác để giải các bài toán vật lý bằng cách áp dụng khái niệm năng lượng. Thay vì cố gắng mô tả toàn bộ chuyển động của vật thể, chúng ta chỉ có thể tập trung vào các thông số ban đầu và các thông số cuối cùng của chuyển động của một vật thể. Định luật bảo toàn năng lượng phát biểu rằng năng lượng toàn phần của hệ được bảo toàn:

ÿ Ei “ ÿ Ef .

Bằng cách biết tổng năng lượng ban đầu của một hệ thống, chúng ta có thể tìm thấy năng lượng cuối cùng trong hệ thống và từ năng lượng cuối cùng, chúng ta có thể tính toán các tham số chuyển động cuối cùng.

Các đơn vị

Trong môn toán, chúng ta làm việc với các con số—chúng ta giải các câu hỏi trong đó phần an là các số không có thứ nguyên như 3, 5 hoặc 12,34. Sức mạnh vạn năng của toán học xuất phát chính xác từ sự trừu tượng hóa mọi thứ thành những con số. Chúng tôi có thể giải quyết số lượng cừu trong chuồng, diện tích bề mặt của hình cầu hoặc doanh thu hàng năm của công ty khởi nghiệp của bạn; chúng ta có thể áp dụng các kỹ thuật toán học giống nhau cho từng ví dụ, mặc dù các số chúng ta sử dụng sẽ biểu thị các loại đại lượng rất khác nhau.

Vì vật lý liên quan đến các khái niệm và đại lượng trong thế giới thực nên mỗi con số trong vật lý luôn đi kèm với một đơn vị đo lường. Chúng ta phải chú ý đến các đơn vị của đại lượng vật lý và—quan trọng nhất—phân biệt giữa các chiều khác nhau của đại lượng số. Một câu trả lời trong vật lý là một con số biểu thị độ dài, thời gian, vận tốc, gia tốc hoặc một số đại lượng vật lý khác. Thật vô nghĩa khi thêm thời gian và khối lượng, bởi vì hai con số đo các loại đại lượng khác nhau.

Machine Translated by Google

Dưới đây là danh sách một số loại đại lượng được thảo luận trong chương này:

Kích thước Đơn vị SI Đơn vị khác rss đo bằng

rms rhs,rmins thời gian cái đồng hồ

chiều rcms,rmms,rfts,rins mét băng

tốc độ dài rm{ss rkm{hs,rmi{hs vận tốc đồng hồ

gia tốc rm{s2s gia tốc kế

khối quy mô rkgs rgs,rlbs

Phụ lục C (xem trang 478 ở cuối sách) cung cấp thêm danh sách chi tiết của Hệ đơn vị quốc tế (viết tắt là SI cho hệ thống quốc tế).

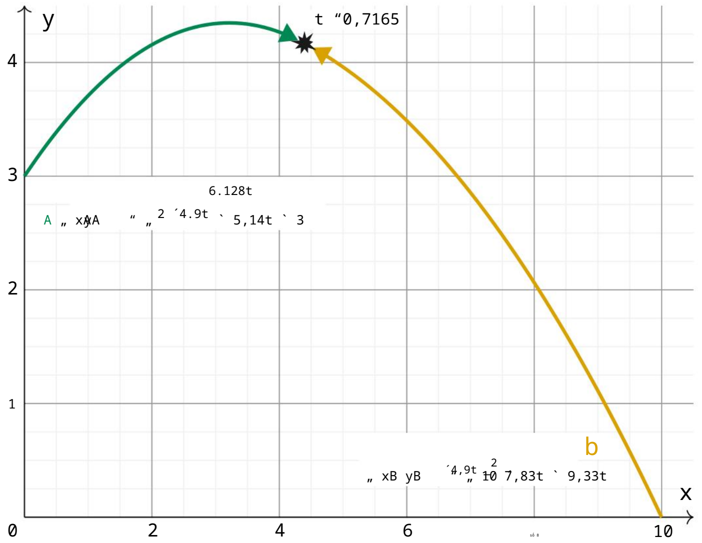
Các đơn vị của đại lượng vật lý được chỉ định trong ngoặc vuông xuyên suốt các bài học của chương này. Trong phương trình của bạn, bạn nên luôn cố gắng ghi nhớ đơn vị của các đại lượng vật lý khác nhau. Đôi khi bạn sẽ có thể thấy mình mắc lỗi vì các đơn vị sẽ không đi ra ngay. Nếu tôi yêu cầu bạn tính chiều cao tối đa tối đa mà một quả bóng sẽ đạt được, tôi mong câu trả lời của bạn là chiều dài được đo bằng [m] chứ không phải một số loại đại lượng khác như vận tốc rm{ss hoặc gia tốc rm{s2s hoặc diện tích rm2s. Một câu trả lời trong rfts cũng sẽ được chấp nhận vì đây cũng là một độ dài và nó có thể được chuyển đổi thành mét sử dụng 1rfts “ 0,3048rms (xem trang 479 để biết hệ số chuyển đổi). Học cách coi chừng các đơn vị và kích thước về các đại lượng vật lý, và bạn sẽ có một khoảng thời gian dễ dàng trong môn vật lý. Họ là một cơ chế kiểm tra lỗi tuyệt vời.

Chúng ta sẽ bắt đầu cuộc hành trình vật lý của mình bằng chủ đề quen thuộc về động học mà chúng ta đã học trong Chương 2. Giờ thì bạn biết về vectơ, chúng ta có thể nghiên cứu các bài toán động học hai chiều, chẳng hạn như chuyển động của một viên đạn.

4.2 Chuyển động của viên đạn

Kể từ khi phát minh ra bột súng, thế hệ này qua thế hệ khác của những người đàn ông đã nghĩ ra vô số cách khác nhau để làm vỡ mảnh đạn vào nhau. Thật vậy, nhân loại đã bị mắc kẹt với ý tưởng về chuyển động của vật thể bay hai chiều giống như ruồi trên bãi cứt. miễn là có tiền kiếm được từ việc bán vũ khí, và miễn là các phương tiện truyền thông tiếp tục biện minh cho tính hợp pháp của việc sử dụng những vũ khí này, thì có khả năng xu hướng sẽ tiếp tục.

Do đó, điều bắt buộc đối với bất kỳ ai quan tâm đến việc đảo ngược điều này xu hướng tìm hiểu về vật lý của chuyển động đạn. Bạn cần phải biết các kỹ thuật của kẻ thù (tổ hợp quân sự công nghiệp) trước khi bạn có thể chiến đấu với chúng. Chúng ta sẽ thấy rằng chuyển động của đường đạn chẳng là gì cả



Hình 4.3: Quả bóng đến (A) bị chặn bởi quả bóng (B) đến từ bên phải. Va chạm xảy ra tại t " 0,7165[s].

Chúng tôi thể hiện các điều kiện này thông qua hai phương trình sau:

8 cosp40qt ` 0 " ´w cosp50qt ` 10,

´4,9t 2 ` 8 sinp40qt ` 3 "´4,9t 2 ` w sinp50qt ` 0,

mà chúng ta phải giải quyết đồng thời.

Để giải quyết, chúng tôi hủy ´4,9t 2 ở cả hai vế của phương trình đáy:

8 cosp40qt " ´w cosp50qt ` 10, 8

sinp40qt ` 3 " w sinp50qt.

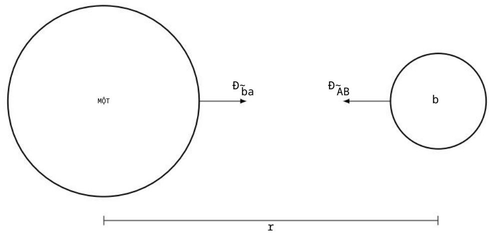
Đây là một tập hợp gồm hai phương trình với hai ẩn số, và chúng ta có thể giải nó. Điều đó sẽ không dễ dàng, vì chúng ta không thể tách biệt hoàn toàn t hoặc w bằng các kỹ thuật thay thế tiêu chuẩn. Tuy nhiên, có một mẹo! Chúng ta có thể chia hai phương trình. Nếu A " B và C " D ‰ 0 thì A{C " B{D, và đây là những gì chúng ta sẽ sử dụng. Để chuẩn bị cho bước này, hãy sắp xếp lại các phương trình một chút để tất cả các số hạng chứa w đứng một mình ở vế phải:

10 ´ 8 cosp40qt " w cosp50qt,

8 sinp40qt ` 3 " w sinp50qt.

Bây giờ chúng ta sẽ chia phương trình dưới cùng cho phương trình trên cùng để có được

8 sinp40qt ` 3 / 10 ´ 8 cosp40qt „ w sinp50qt / cosp50qt "tanp50q. w



Hình 4.4: Lực hấp dẫn giữa hai hành tinh có tác dụng kéo chúng lại gần nhau. Giả sử Hành tinh A có khối lượng mA và Hành tinh B có khối lượng mB. lực lượng vector $\tilde{F}AB$ mô tả "Hành tinh A kéo Hành tinh B." véc tơ lực $\tilde{F}BA$ mô tả "Hành tinh B kéo hành tinh A." Độ lớn của lực hấp dẫn kéo là Fg " $\frac{GmAmB}{r2}$ " }~ FAB}"}~ FBA}.

khối lượng m được cho bởi

$$fg \text{ “ } \frac{GMm}{r2} \text{ “ } \underbrace{\frac{GM}{r2}}_{\substack{\text{khung cửi} \\ g}} m \text{ “ } 9{,}81m \text{ “ } W.$$

Chúng tôi gọi lực này là trọng lượng của vật thể, và để chính xác, chúng tôi viết W~ " ´mg,ˆ để chỉ ra rằng trọng lượng tác động xuống dưới, theo chiều âm hướng y. Sử dụng máy tính xác minh rằng " $\frac{GM}{r2}$ 9,81 " g.

lực của lò xo

Lò xo là một miếng kim loại được xoắn thành một cuộn dây có chiều dài tự nhiên nhất định. Lò xo sẽ chống lại mọi nỗ lực kéo dài hoặc nén Nó. Lực do lò xo tác dụng được cho bởi

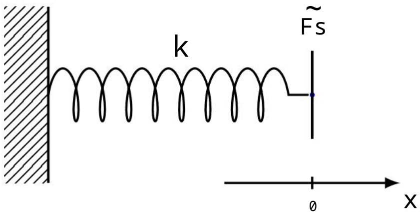
$$\tilde{F}s \text{ “ } ´kx,$$

trong đó x là độ dịch chuyển của lò xo so với chiều dài tự nhiên của nó và hằng số k[N/m] là số đo độ dài của lò xo sức mạnh. Lưu ý dấu âm chứng tỏ lò xo luôn tác dụng để chống lại sự dịch chuyển.

Nếu bạn cố kéo lò xo ra, dịch chuyển nó theo chiều dương x thì lực của lò xo sẽ tác dụng lên bạn (lực lò xo sẽ kéo theo hướng x âm). Tương tự, nếu bạn cố gắng nén lò xo (một sự dịch chuyển theo hướng x âm), mùa xuân sẽ đẩy ngược lại bạn, theo hướng x dương.

Lực bình thường

Lực pháp tuyến là lực giữa hai bề mặt tiếp xúc. trong này ngữ cảnh, từ bình thường có nghĩa là "vuông góc với bề mặt của."



Hình 4.5: Lực do lò xo tác dụng tỉ lệ với độ dời của nó từ chiều dài tự nhiên của nó, ký hiệu là x. Khi x°0 thì lò xo dãn. Khi x † 0 thì lò xo bị nén. Khi một đầu của lò xo được cố định, lực do lò xo tác dụng vào đầu kia là Fs “ ´kx.

Lý do cốc cà phê của tôi không rơi xuống sàn ngay bây giờ là cái bàn tác dụng một lực bình thường N~ lên cốc, giữ nó ở đúng vị trí.

lực ma sát

Ngoài lực bình thường giữa các bề mặt, còn có lực lực ma sát Ff , có tác dụng cản trở mọi chuyển động trượt giữa các bề mặt. Có hai loại lực ma sát, và cả hai đều tỷ lệ thuận với lượng lực bình thường giữa các bề mặt:

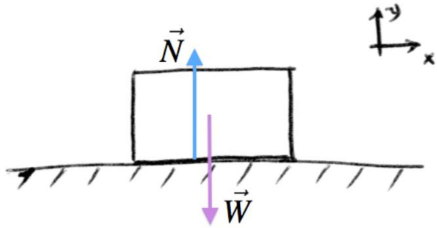
maxt~ Ff su “ μs}N~ } (tĩnh), và Ff k “ μk}N~ } (động năng),

trong đó μs và μk là hệ số ma sát tĩnh và động. Nó làm cảm giác rằng lực ma sát phải tỷ lệ thuận với độ lớn của lực bình thường }N~ }, vì hai bề mặt càng cứng xô đẩy nhau thì càng khó tạo ra chúng cầu trượt. Các phương trình trên mang lại độ chính xác toán học cho logic trực quan này.

Lực ma sát tĩnh tác dụng lên vật không chuyển động. Nó mô tả lượng ma sát tối đa có thể tồn tại giữa hai các đối tượng. Nếu một lực nằm ngang lớn hơn Ff s “ μsN tác dụng lên đối tượng, sau đó nó sẽ bắt đầu trượt. Động năng của lực ma sát tác dụng khi hai vật trượt tương đối với nhau. Nó luôn hoạt động trong hướng ngược với chuyển động.

Căng thẳng

Một lực cũng có thể được tác dụng lên một vật thể từ xa bằng cách gắn một sợi dây đến đối tượng, và kéo dây. Lực tác dụng lên vật sẽ bằng lực căng T của sợi dây. Chú ý lực căng dây luôn kéo tránh xa một vật thể: bạn có thể kéo nhưng bạn không thể đẩy một con chó bằng dây xích.



Hình 4.6: Một khối ngồi trên bàn. Trọng lượng của khối W~ bị phản tác dụng bởi lực bình thường N~ .

Bước 3: Tiếp theo, viết mẫu phương trình biểu đồ lực rỗng:

ÿ Fx “ “ tối đa,

ÿ Fy “ “ có thể.

Bước 4: Không có lực nào tác dụng theo phương x, và khối không chuyển động, nên ax “ 0. Theo phương y, ta có trọng lực và pháp tuyến do cái bàn tác dụng:

ÿ Fx “ 0 “ 0,

ÿ Fy “ N ´ mg “ 0.

Chúng tôi đặt ay “ 0, vì chúng tôi có thể thấy rằng khối chỉ nằm đó trên bàn mà không di chuyển. Thuật ngữ kỹ thuật cho các trường hợp ax “ 0, ay “ 0 được gọi là trạng thái cân bằng tĩnh. Các giản đồ lực có trạng thái cân bằng tĩnh rất dễ giải vì toàn bộ vế phải bằng 0, nghĩa là các lực tác dụng lên vật phải cân bằng nhau.

Bước 5: Giả sử bây giờ giáo viên hỏi, "Độ lớn của lực bình thường là bao nhiêu?" Bằng cách nhìn vào phương trình thứ hai, bạn có thể trả lời, "N " mg anh bạn!"

Di chuyển tủ lạnh

Bạn đang cố đẩy chiếc tủ lạnh của mình qua sàn nhà bếp. Nó nặng khá nhiều và "bám" chặt vào sàn khi bạn cố đẩy nó. Hệ số ma sát tĩnh giữa đáy tủ lạnh của bạn và gạch trên sàn là μs. Bao nhiêu lực khiến tủ lạnh bắt đầu di chuyển? F~ext nó sẽ mất để

Bước 5: Ta biết lực do lò xo tác dụng tỉ lệ thuận với chuyển vị của nó theo

$$F_s " ´ky_B,$$

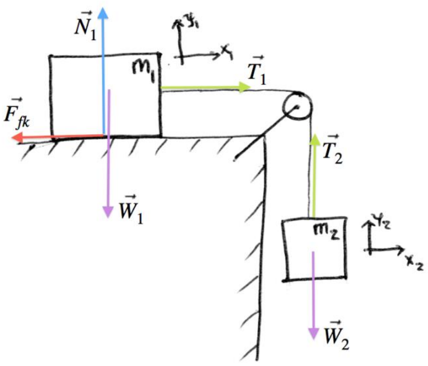
để chúng ta có thể tìm thấy y_B " ´ $\frac{mg}{k}$. Do đó, chiều dài nén là

$$|Đê| " \frac{mg}{k}.$$

hai khối

Bây giờ bạn đã sẵn sàng cho một ví dụ liên quan hơn với hai khối. Một khối đang ngồi trên một bề mặt và khối kia đang rơi thẳng xuống. Hai khối được nối với nhau bằng một sợi dây thừng. Gia tốc của toàn bộ hệ thống là gì?

Bước 1 và 2: Ta có hai vật nên cần vẽ hai lực sơ đồ.



Hình 4.11: Một vật khối lượng m1 được kéo theo phương ngang trong một giây khối lượng m2 rơi thẳng đứng. gia tốc của là gì hệ thống?

Bước 3: Chúng ta cần hai bộ phương trình; một bộ cho khối trên bề mặt nằm ngang và một bộ cho khối rơi:

ÿ F_{1x} " " m_1a_{x1} ÿ F_{2x} " " m_2a_{x2}

ÿ F_{1y} " " m_1a_{y1} ÿ F_{2y} " " m_2a_{y2}

Bước 4: Chúng tôi điền vào các phương trình với tất cả các lực được vẽ trong biểu đồ:

ÿ F_{1x} " ´$F_{f\,k}$ \` T_1 " m_1a_{x1} ÿ F_{2x} " 0 " 0

ÿ F_{1y} " N_1 ´ W_1 " 0 ÿ F_{2y} " ´W_2 \` T_2 " m_2a_{y2}

Chúng ta có thể tóm tắt toàn bộ quy trình dự đoán vị trí của một đối tượng xptq từ các nguyên tắc đầu tiên trong phương trình sau:

$$\underbrace{\frac{1}{\text{tôi}} \; \acute{}\ddot{y}\sim F" \quad \sim F_{net}}_{\text{động lực học}} \; "\sim aptq \; \underbrace{\overset{\sim vi`\geq}{dt} \rightarrow \tilde{N} \sim vptq \quad \overset{\sim ri`\geq}{dt} \rightarrow \tilde{N} \sim rptq}_{\text{động học}} \cdot$$

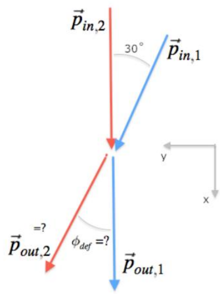
Vế trái tính tổng lực tác dụng lên một vật là nguyên nhân của gia tốc. Vế bên phải chỉ ra cách chúng ta có thể tính toán vectơ vị trí ~rptq bắt đầu từ gia tốc và các điều kiện ban đầu. Nếu biết các lực tác dụng lên một vật (đá, đạn, ô tô, ngôi sao, hành tinh, v.v.) thì bạn có thể dự đoán chuyển động của đối tượng bằng cách sử dụng phương trình này, điều này khá thú vị.

Cho đến giờ chúng ta đã thảo luận về một phương pháp để phân tích chuyển động của các đối tượng. Tính toán các lực và gia tốc của các vật thể, sau đó sử dụng tích phân để tìm hàm tọa độ~rptq là một phương pháp ứng dụng rất hữu ích để giải các bài toán vật lý. Có một số cách khác để nhìn vào chuyển động của các đối tượng hữu ích như nhau và cung cấp chúng tôi với những hiểu biết khác nhau. Trong hai phần tiếp theo, chúng ta sẽ thảo luận về cách để mô hình hóa các tình huống vật lý về động lượng và năng lượng.

4.5 Động lượng

Một vụ va chạm giữa hai vật thể tạo ra một đột biến đột ngột trong tiếp xúc lực giữa chúng, có thể khó đo lường và định lượng. Không thể sử dụng định luật F ma của Newton để dự đoán các gia tốc xảy ra trong quá trình va chạm. Dự đoán chuyển động của vật sau va chạm, chúng ta cần tính động lượng. Theo định luật bảo toàn động lượng, tổng khối lượng của động lượng trước và sau va chạm là như nhau. Một khi chúng ta biết động lượng của các vật trước va chạm, có thể tính động lượng của chúng sau va chạm và từ đó xác định chuyển động tiếp theo của chúng.

Để minh họa tầm quan trọng của động lượng, hãy xem xét tình huống sau. Giả sử bạn có một quả bóng giấy 1[g] và một ô tô nặng 1000[kg] đang chuyển động với cùng tốc độ 100[km/h]. Đối tượng nào trong hai đối tượng sẽ bạn thà bị đánh bởi? Động lượng, ký hiệu là ~p, là khái niệm vật lý chính xác đo lượng chuyển động. Một vật có khối lượng m chuyển động với vận tốc ~v có động lượng là ~p " m~v. Momen tum đóng một vai trò quan trọng trong va chạm. cảm giác ruột của bạn về mảnh của giấy và xe là chính xác. Xe nặng 1000 ˆ 1000 " 106 gấp tờ giấy nên ô tô gấp 106 lần động lượng khi chuyển động cùng tốc độ. Va chạm với ô tô



Hình 4.12: Biểu đồ động lượng của vụ va chạm giữa hai người đi xe đạp.

Giả sử trọng lượng của người hipster đang băng qua đường ở góc 30 độ kết hợp với trọng lượng của chiếc xe đạp của anh ấy tổng cộng là 90[kg]. Và giả sử trọng lượng của vận động viên hipster đang di chuyển trên đường thẳng kết hợp với trọng lượng của chiếc xe đạp của anh ta là 100[kg].

Câu chuyện sẽ tiếp tục trong giây lát, nhưng trước tiên chúng ta hãy xem lại thông tin tôi đã cung cấp cho bạn cho đến nay:

~pin,1 “ 90 ˆ 50=30 “

90p50 cos 30, 50 sin 30q,

~pin,2 “ 100 ˆ 50=0 “

100p50, 0q,

trong đó tọa độ x hướng xuống phố và tọa độ y vuông góc với đường phố.

Đáng ngạc nhiên là không ai bị thương trong vụ va chạm này. Những người đi xe đạp kề vai sát cánh và lao vào nhau. Người sành điệu đang cố băng qua đường được chuyển hướng xuống phố, trong khi người sành điệu đang đi xuống phố bị lệch sang một bên và chuyển hướng sang đường dành cho xe đạp. Tôi biết bạn đang nghĩ gì: họ không thể bị thương ít nhất một chút sao? Được rồi, giả sử cú va chạm mạnh từ vai kề vai khiến đầu của những người hipster bay về phía nhau và làm vỡ kính của họ. Ở đó bạn có nó.

Giả sử vận tốc của hipster đầu tiên sau va chạm là 60 [km/h]. Vận tốc và hướng lệch của hipster thứ hai là gì? Như đã nêu ở trên, động lượng hướng ngoại của hipster đầu tiên là ~bĩu môi,1 “ 90p60, 0q, và chúng tôi đang tìm kiếm ~bĩu môi,2.

Chúng ta có thể giải bài toán này bằng công thức bảo toàn động lượng, công thức này cho chúng ta biết rằng

~pin,1 ` ~pin,2 “ ~pout,1 ` ~pout,2.

lại. Dù các lực này có thể phức tạp đến đâu, chúng ta biết rằng trong quá trình toàn bộ va chạm chúng tuân theo định luật III Newton. Giả sử không có lực khác tác dụng lên vật ta có

$$\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21} \text{ sử dụng cách trên } \Rightarrow \frac{d\vec{p}_1}{dt} = -\frac{d\vec{p}_2}{dt}.$$

Nếu chúng ta chuyển số hạng âm sang vế trái của phương trình, chúng ta đạt được

$$\frac{d\vec{p}_1}{dt} + \frac{d\vec{p}_2}{dt} = 0 = \frac{d}{dt}(\vec{p}_1 + \vec{p}_2).$$

Phần thứ hai của phương trình ngụ ý rằng đại lượng $(\vec{p}_1 + \vec{p}_2)$ là không đổi theo thời gian, và do đó $\vec{p}_{in,1} + \vec{p}_{in,2} = \vec{p}_{out,1} + \vec{p}_{out,2}$.

Trong phần này, chúng ta đã thấy cách sử dụng phép tính động lượng để dự đoán chuyển động của các phân tử sau va chạm. Trong phần tiếp theo chúng ta sẽ tìm hiểu về năng lượng, đây là một khái niệm hữu ích khác để hiểu trạng thái đứng và dự đoán chuyển động của các vật thể.

liên kết

[Ảnh động về va chạm đơn giản giữa các đối tượng]
http://en.wikipedia.org/wiki/Conservation_of_linear_momentum

Bài tập

E4.1 Một quả bóng dính có khối lượng 3[g] và vận tốc 20[m/s] va chạm với một quả cầu đứng yên có khối lượng 5[g]. Các quả bóng dính vào nhau. họ là gì vận tốc sau va chạm?
Gợi ý: Sử dụng bảo toàn động lượng $\vec{p}_{1,in} + \vec{p}_{2,in} = \vec{p}_{out}$.

4.6 Năng lượng

Thay vì suy nghĩ về vận tốc $v(t)$ và quỹ đạo chuyển động $x(t)$, chúng ta có thể giải các bài toán vật lý bằng cách sử dụng các phép tính năng lượng. TRONG phần này, chúng ta sẽ định nghĩa chính xác các loại năng lượng khác nhau, và chúng ta sẽ tìm hiểu các quy tắc chuyển đổi năng lượng này thành năng lượng khác. Chìa khóa ý tưởng cần ghi nhớ là nguyên tắc bảo toàn năng lượng toàn phần, trong đó nói rằng trong bất kỳ quá trình vật lý nào, tổng năng lượng ban đầu là bằng tổng các năng lượng cuối cùng.

Mặt tiêu cực của công việc được thực hiện chống lại một lực lượng bảo thủ là gọi là thế năng. Với bất kỳ lực bảo toàn F?, ta có thể xác định thế năng liên kết U? thông qua công thức

đ ~

U?pdq“´Wdone “ ´ ª 0 F? ¨ d~x.

Chúng ta sẽ thảo luận hai ví dụ cụ thể của công thức tổng quát này dưới đây: thế năng trọng trường và thế năng lò xo. Một vật thể ở trên cao có khả năng rơi xuống rất cao; tương tự, nén một lò xo một khoảng nhất định sẽ cho nó khả năng đàn hồi trở lại vị trí bình thường. Hãy xem xét các công thức chính xác cho hai trường hợp này.

thế năng hấp dẫn

Lực hấp dẫn được cho bởi Fg “ ´mg,ˆ. Hướng của lực hấp dẫn hướng xuống dưới, hướng vào tâm Trái đất.

Thế năng hấp dẫn của việc nâng một vật từ độ cao y “ 0 lên độ cao y “ h được cho bởi

h ~ h

Ugphq“´Wdone “ ´ª 0 Fg ¨ d~y “ ´0 p´mg,ˆq ¨ ,ˆ dy

h y“h ˇ

“ mgª 0 1 ngày ˇ ˇ ˇ y“0

“mghrJs.

năng lượng tiềm năng mùa xuân

Lực của lò xo khi bị ~x[m] dịch chuyển khỏi vị trí tự nhiên của nó được cho bởi Fsp~xq“´k~x. Thế năng tích trữ trong lò xo khi nó bị kéo dãn từ y “ 0 đến y “ x[m] được cho bởi

x ~

Uspxq“´Wdone “ ´ª 0 Fspyq ¨ d~y

x x y“x ˇ

“ ´ ª 0 p´kyq dy “ k ª 0 1 y dy “ k 1/2 y2 ˇ ˇ ˇ y“0

“ 1/2 kx2 rJs.

Lưu ý công thức áp dụng khi x ° 0 (lò xo bị kéo dãn theo chiều dài |x|) và khi x † 0 (lò xo bị nén theo chiều dài |x|).

4.8 Chuyển động góc

Bây giờ chúng ta sẽ nghiên cứu tính chất vật lý của các vật thể quay. chuyển động quay được minh họa bằng cách quay đĩa, quay bánh xe đạp, quay bóng đá, và con quay trượt băng nghệ thuật, trong số những thứ con quay khác.

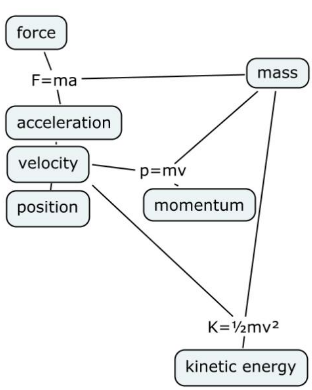
Như bạn sẽ thấy ngay sau đây, các khái niệm cơ bản mà chúng ta sẽ sử dụng để mô tả chuyển động góc tương tự trực tiếp với các khái niệm về chuyển động thẳng: vị trí, vận tốc, gia tốc, lực, động lượng và năng lượng.

Ôn tập về chuyển động thẳng đều

Sẽ rất hữu ích nếu bắt đầu bằng việc xem xét nhanh các khái niệm và công thức dùng để mô tả chuyển động thẳng của vật.

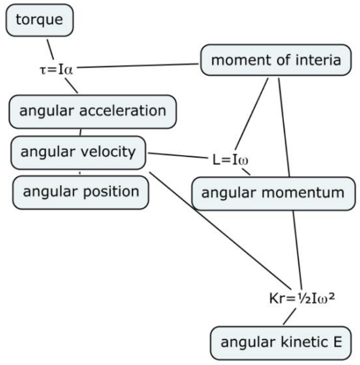
Chuyển động thẳng của một vật thể được mô tả bởi vị trí của nó xptq, vận tốc vptq và gia tốc aptq là các hàm của thời gian. Vị trí chức năng cho bạn biết vị trí của vật thể, vận tốc cho bạn biết nhanh như thế nào nó đang chuyển động, và gia tốc đo sự thay đổi trong chuyển động của vật thể vận tốc.

Chuyển động của vật bị chi phối bởi định luật I và II Newton pháp luật. Trong trường hợp không có ngoại lực, các vật thể sẽ duy trì vận tốc dạng đơn vị (UVM), tương ứng với các phương trình chuyển động xptq “ xi ` vit và vptq “ vi. Nếu lực F tác dụng lên vật thì lực sẽ làm cho vật tăng tốc. Chúng tôi thu được độ lớn của gia tốc này với công thức F “ ma. Một lực không đổi tác dụng lên một vật sẽ tạo ra một gia tốc không đổi (UAM), mà tương ứng với các phương trình chuyển động xptq “ xi ` vit ` vptq “ $\frac{1}{2}$at2 và vi ` at.



Hình 4.18: Các khái niệm chính dùng để mô tả chuyển động thẳng.

Chúng tôi cũng đã học cách định lượng động lượng ~p “ m~v và

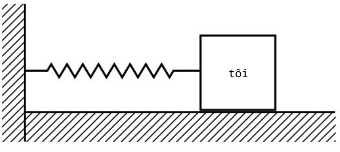


Hình 4.21: Các khái niệm chính dùng để mô tả chuyển động góc.

quán tính cũng xuất hiện trong các công thức tìm momen động lượng và động năng quay của một vật đang quay.

4.9 Chuyển động điều hòa đơn giản

Rung động, dao động và sóng ở khắp mọi nơi xung quanh chúng ta. Ví dụ, thứ xuất hiện trước mắt chúng ta dưới dạng ánh sáng trắng thực ra được tạo thành từ nhiều dao động khác nhau của trường điện từ. Những dao động os này rung động ở một dải tần số tương ứng với màu sắc mà chúng ta cảm nhận được. Âm thanh cũng được tạo ra từ các rung động kết hợp của không khí với nhiều tần số và cường độ khác nhau. Trong phần này, chúng ta sẽ tìm hiểu về chuyển động điều hòa đơn giản, mô tả dao động của một hệ cơ học ở một tần số cố định và với độ khuếch đại không đổi. Như tên gọi của nó, chuyển động điều hòa đơn giản là dạng chuyển động dao động đơn giản nhất. Bằng cách nghiên cứu các dao động ở dạng đơn giản nhất của chúng, bạn sẽ thu thập được trực giác quan trọng áp dụng cho tất cả các loại dao động và hiện tượng sóng.



Hình 4.22: Một vật khối lượng m gắn vào một lò xo.

Ví dụ điển hình của chuyển động điều hòa đơn giản là chuyển động của hệ lò xo khối lượng, như minh họa trong Hình 4.22. Vật đó trượt tự do trên mặt phẳng nằm ngang không ma sát. Nếu hệ thống là

Machine Translated by Google

Mục tiêu của chúng tôi là tìm xptq cho mọi thời điểm t. Tuy nhiên, không ai trong số phương trình vật lý cho chúng ta xptq trực tiếp. Thay vào đó, chúng ta có Newton định luật thứ hai F " ma, cho chúng ta biết rằng gia tốc của vật aptq bằng tổng lực tác dụng lên vật chia cho trọng lượng của vật khối. Để tìm xptq bắt đầu từ aptq, chúng tôi sử dụng tích hợp hai lần:

$$\frac{1}{\text{tôi}} ´ÿ\sim F" \quad \sim Fnet^{-} " aptq \quad vi`\geq dt \; xi`\geq dt › Ñ \; vptq › Ñ xptq.$$

Chúng tôi đã nghiên cứu động học trong một số bối cảnh khác nhau. ban đầu chúng tôi xem xét các vấn đề động học trong một chiều, và rút ra phương trình UAM và UVM. Chúng tôi cũng đã nghiên cứu vấn đề về chuyển động của gạch dự án bằng cách giải cấu trúc nó thành hai vấn đề con động học riêng biệt: một theo hướng x (UVM) và một theo hướng y (UAM). Sau này nghiên cứu chuyển động tròn đều của vật và nêu phương trình ar $\frac{v_t^2}{r}$,trong đó mô tả một mối quan hệ quan trọng giữa "gia tốc hướng tâm, vận tốc tiếp tuyến và bán kính của vòng quay. Chúng tôi cũng đã nghiên cứu chuyển động quay bằng góc các đại lượng động học qptq, wptq và aptq. Chúng tôi đã định nghĩa khái niệm về mô-men xoắn và thấy vai trò của nó trong góc tương đương với định luật thứ hai của Newton T " Ia. Chúng tôi đã nghiên cứu phương trình mô tả chuyển động điều hòa đơn giản, xptq " A cospwt ` fq, và chỉ ra cho mula w " b k $\overline{}$, m cung cấp tần số góc của lò xo khối lượng hệ thống.

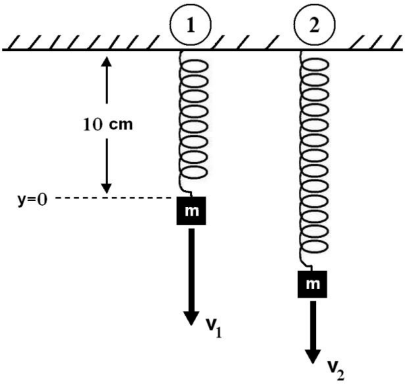
Chúng ta cũng đã thảo luận về ba định luật bảo toàn: sự bảo toàn của định luật động lượng tuyến tính ∞~pi " ∞~pf , định luật bảo toàn động lượng góc Li " Lf , và định luật bảo toàn năng lượng ∞ Ei " ∞ Ef . Mỗi đại lượng trong ba đại lượng cơ bản này được bảo toàn trên tất cả và không thể được tạo ra cũng như không bị phá hủy. Tính toán động lượng được sử dụng để phân tích va chạm, trong khi các công thức năng lượng như đẳng thức 2mv2, Ug " mgh, và Us " kx2 có thể tions K $\frac{1}{}$ được sử dụng để phân tích $\frac{1}{2}$ "chuyển động của các vật thể về các nguyên tắc năng lượng.

Bây giờ bạn có thể thấy 20 phương trình thực sự đủ để thành thạo như thế nào tất cả các cơ học. Công việc tốt đẹp! Bước tiếp theo của bạn là thực hành giải quyết một số vấn đề để củng cố sự hiểu biết của bạn.

4.11 Sự cố cơ học

Bây giờ là lúc để bạn kiểm chứng bằng thực nghiệm xem bạn đã hiểu tài liệu từ chương này đến mức nào. Hãy thử giải vật lý các vấn đề được trình bày trong phần này. Hãy tiếp tục, đào sâu vào! Và đừng nản lòng nếu bạn thấy một số vấn đề khó—chúng có nghĩa là thử thách để buộc bạn phải suy nghĩ kỹ và củng cố mối liên hệ giữa các khái niệm trong đầu bạn.

Machine Translated by Google

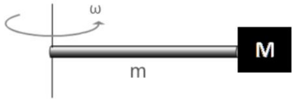


P4.6 Bạn ném một quả bóng từ mặt đất theo phương thẳng đứng với tốc độ v và đo tốc độ của nó khi nó rơi trở lại mặt đất. Đầu tiên bạn thực hiện thí nghiệm này trên Trái đất, sau đó lặp lại nó trên Mặt trăng. Liệu quả bóng có tốc độ lớn hơn khi nó chạm đất trên Trái đất hay trên Mặt trăng?
Gợi ý: Sử dụng bảo toàn năng lượng.

P4.7 Trong bài toán trước, giả sử có một cái hố cho phép quả bóng rơi xuống 10[m] dưới mức mà nó được ném ra. Quả bóng sẽ có tốc độ lớn hơn trên Trái đất hay trên Mặt trăng khi nó chạm đáy hố sâu 10[m]?

Gợi ý: Sử dụng bảo toàn năng lượng.

P4.8 Một thanh khối lượng m đang quay ngang quanh một đầu của nó. Một vật khối lượng M bổ sung được gắn vào đầu kia. Giả sử hệ quay với vận tốc góc không đổi w. Momen xoắn của vật M là bao nhiêu? Nếu người ta tách khối lượng M ra khỏi thanh mà không có sự tác động của ngoại lực thì vận tốc góc mới của thanh sẽ là bao nhiêu?



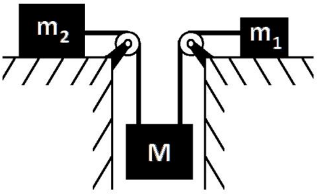
Gợi ý: Sử dụng T “ Ia. Sử dụng bảo toàn động lượng góc.

P4.9 Một chiếc ô tô đang chạy bên trong một vòng lặp hình tròn thẳng đứng. Giả sử ô tô đi qua đỉnh và đáy của vòng lặp với cùng tốc độ. Lực pháp tuyến do vòng dây tác dụng lên ô tô sẽ lớn hơn ở phía trên hay ở phía dưới?
Gợi ý: Ô tô cần một lực hướng tâm để duy trì quỹ đạo tròn của nó.

P4.10 Hai quả cầu khối lượng m được ném từ đỉnh một tòa nhà với vận tốc bằng nhau ~v như hình vẽ. Hỏi quả bóng nào có vận tốc lớn nhất tại thời điểm nó chạm đất (bỏ qua sức cản của không khí)?

1. Tìm hệ số ma sát µs theo m1, m2 và M.
2. Tính hệ số ma sát µs nếu m1 " 3,50[kg], m2 " 6,00[kg], và M " 4,00[kg].

3. Nếu không có ma sát (µs " 0, µk " 0) thì gia tốc sẽ bằng bao nhiêu khối lượng của M là, theo m1, m2, M, và g?



Hình 4.30: Hệ thống ba khối được phân tích trong P4.25.

Gợi ý: Vẽ biểu đồ lực cho mỗi khối. Các khối có cùng a.

P4.26 Một quả bóng được bắn với v1i " 10[m/s] theo một góc q " 30˝ so với phương ngang. Bạn cần bắn quả bóng thứ hai theo phương thẳng đứng từ cùng độ cao sao cho nó chạm vào quả bóng thứ nhất khi nó đạt đến độ cao tối đa.

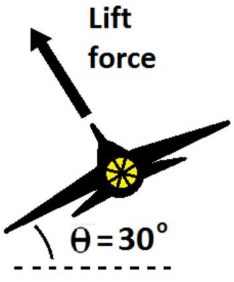
1. Tìm khoảng cách d theo phương ngang từ vị trí bắn của quả bóng thứ nhất, từ nơi bạn nên bắn quả bóng thứ hai.
2. Tìm vận tốc ban đầu cần thiết cho quả bóng thứ hai.

Gợi ý: Tìm độ cao cực đại và nửa tầm bay của quả bóng thứ nhất.

P4.27 Máy bay chiến đấu F-16 nặng 14 000[kg] đang không chiến. Phi công cần rẽ với bán kính 5[km] trong khi vẫn duy trì tốc độ 605,5[km/h]. Mặt phẳng quay nghiêng một góc q " 30˝ và đi theo một đường tròn nằm ngang.

1. Phi công cần nâng bao nhiêu để thực hiện thao tác này? Lực nâng vuông góc với cánh và thân máy bay.
2. Độ cao của máy bay chiến đấu có thay đổi trong quá trình điều động này không?

Gợi ý: Tìm lực nâng cần thiết để tạo ra gia tốc hướng tâm.



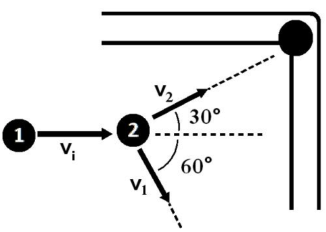
Machine Translated by Google

P4.28 Bạn đang ở trong một toa tàu điện ngầm đang chuyển động với vận tốc v “ 12,5[m/s] thì bạn làm rơi một chai nước xuống sàn. Cái chai dừng lại so với toa tàu điện ngầm. Tàu điện ngầm sau đó bắt đầu phanh và dừng lại. Cái chai bắt đầu lăn về phía trước mà không trượt trên sàn toa tàu điện ngầm. Tìm vận tốc tuyến tính của cái chai khi nó lăn về phía trước. Momen quán tính của chai là 2mr2 và khối lượng của nó là m. của 1 là I “ Gợi ý: Động năng bình được bảo toàn.

P4.29 Bạn đang chơi với hai quả bóng khúc côn cầu trên bàn bi-a như trong Hình 4.31. Hệ số ma sát giữa quả bóng và mặt bàn là μk. Viên bi 2 đứng yên trước va chạm và cách viên bi ở góc một khoảng d. Viên bi 1 va vào viên bi 2 (m1 “ m2) với vận tốc vi. Sau va chạm, quả cầu 1 có vận tốc v1 và quả cầu 2 có vận tốc v2.

1. Vi tối thiểu là gì về các biến được cung cấp sao cho Puck 2 vào túi?
2. Tính vi, v1 và v2 nếu μk “ 0,273 và d “ 0,70[m].
3. Viên bi 1 di chuyển được bao xa sau va chạm nếu vi được chọn như ở phần 2 của câu hỏi?
4. Va chạm có đàn hồi không?

Gợi ý: Sử dụng bảo toàn động lượng và Ki “ Kf ` Wlost.



Hình 4.31: Sự va chạm của hai quả bóng được phân tích trong P4.29.

P4.30 Một ô tô tăng tốc với vận tốc “ 4[m/s2]. Mỗi lốp có bán kính r “ 30[cm] và mô men quán tính I “ 0,27[kg m2]. Xe không trượt.

1. Mô-men xoắn tác dụng lên mỗi lốp xe là bao nhiêu?
2. Nếu qi “ 0 và wi “ 3[rad/s], lốp xe đã quay được bao nhiêu vòng từ t “ 0[s] đến t “ 4[s]?

Gợi ý: Sử dụng quan hệ từ a và a.

P4.31 Một hình trụ đặc và một hình trụ rỗng có khối lượng giống hệt nhau được đặt cạnh nhau trên một mặt phẳng nghiêng. Nếu cả hai hình trụ đều được thả ra khỏi trạng thái nghỉ và bắt đầu lăn thì hình trụ nào sẽ chạm đến chân dốc trước?
Gợi ý: Hãy nghĩ về T “ Ia.

P4.32 Một quả bóng được ném từ mặt đất với vận tốc ban đầu 20[m/s]. Quả bóng sẽ ở trên không bao lâu trước khi nó trở lại mặt đất?

Chương 5

giải tích

Calculus là toán học hữu ích. Chúng tôi sử dụng phép tính để giải quyết các vấn đề trong vật lý, hóa học, máy tính, sinh học và nhiều lĩnh vực khoa học khác. Bạn cần tính toán để thực hiện phân tích định lượng về cách các hàm thay đổi theo thời gian (đạo hàm) và để tính tổng lượng của một đại lượng tích lũy trong một khoảng thời gian (tích phân).

Ngôn ngữ của giải tích sẽ cho phép bạn nói chính xác về các thuộc tính của hàm và hiểu rõ hơn hành vi của chúng.
Bạn sẽ học cách tính hệ số góc của hàm số, cách tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của chúng, cách tính nguyên hàm của chúng và các nhiệm vụ quan trọng khác trong thực tế.

5.1 Giới thiệu

Trong Chương 2, chúng ta đã phát triển sự hiểu biết trực quan về tích phân.
Bắt đầu với kiến thức về hàm gia tốc của một đối tượng theo thời gian, chúng ta đã sử dụng phép toán tích phân để tính hàm vận tốc và hàm vị trí của đối tượng. Bây giờ chúng ta sẽ xem xét kỹ hơn các kỹ thuật tính toán bằng cách sử dụng các mệnh đề toán học chính xác và nghiên cứu cách các kỹ thuật này áp dụng cho các vấn đề khác trong khoa học.

Kiến thức vững chắc về các hàm là điều cần thiết để bạn hiểu các khái niệm giải tích mới. Tôi khuyên bạn nên xem lại Mục 1.12 (trang 63) để tự nhắc mình về các chức năng được giới thiệu trong đó. Tôi nhấn mạnh vào điều này. Đi! Nghiêm túc mà nói, chẳng ích gì khi biết rằng đạo hàm của hàm sinpxq là hàm cospxq nếu bạn không biết sinpxq và cospxq là gì.

Trước khi chúng tôi giới thiệu bất kỳ định nghĩa và công thức chính thức nào, hãy chứng minh cách tính toán được sử dụng trong một ví dụ thực tế.

Tải xuống ví dụ

Giả sử bạn đang tải một tệp lớn xuống máy tính của mình. Tại t “0 bạn nhấp vào “lưu dưới dạng” trong trình duyệt của mình và quá trình tải xuống bắt đầu. Hãy để fptq đại diện cho kích thước của dữ liệu được tải xuống. Tại bất kỳ thời điểm t nào, chức năng fptq sẽ cho bạn biết dung lượng ổ đĩa được chiếm bởi tệp được tải xuống một phần. Bạn đang tải xuống một tệp có dung lượng 720[MB], vì vậy quá trình tải xuống tại thời điểm t tương ứng với phân số $\frac{f\,ptq}{720[MB]}$.

tỷ lệ tải xuống

Đạo hàm f hàm fptq thay đổi ^{1}ptq, phát âm là “f prime,” mô tả cách theo thời gian. Trong ví dụ của chúng tôi về tốc độ tải xuống. ^{1}ptq là Nếu tốc độ tải xuống của bạn là f thì kích thước tệp ^{1}ptq “ 100[kB/s], fptq phải tăng thêm 100[kB] mỗi giây. nếu bạn duy trì tốc độ tải xuống này, kích thước tệp sẽ tăng không đổi tốc độ: fp0q “ 0[kB], fp1q “ 100[kB], fp2q “ 200[kB], . . ., fp100q “ 10[MB].

Để tính toán "thời gian còn lại ước tính" cho đến khi tải xuống hoàn tất, chúng tôi chia lượng dữ liệu còn lại để tải xuống theo tốc độ tải xuống hiện tại:

$$\text{thời gian còn lại “ f } \frac{720 \text{ ´ fptq}}{1 \text{ ptq}} \text{ rss.}$$

Đạo hàm càng lớn, quá trình tải xuống sẽ kết thúc càng nhanh. Nếu là của bạn kết nối internet nhanh hơn 10 lần, quá trình tải xuống sẽ hoàn tất nhanh gấp 10 lần.

bài toán ngược

Hãy xem xét tình huống này từ quan điểm của modem kết nối máy tính của bạn với internet. Mọi dữ liệu bạn tải xuống đi qua modem. Modem biết tốc độ tải xuống f ^{1}ptq[kB/s] mọi lúc trong quá trình tải xuống.

Tuy nhiên, vì modem tách biệt với máy tính của bạn nên không biết kích thước tệp fptq khi quá trình tải xuống diễn ra. Tuy nhiên, modem có thể suy ra kích thước tệp tại thời điểm t từ việc biết tốc độ truyền f ptq. ^{1}Tích phân của tốc độ tải xuống giữa t “ 0 và t “ t tương ứng với tổng dung lượng dữ liệu đã tải xuống được lưu trữ trên máy tính của bạn. Trong khoảng thời gian tải xuống này, sự thay đổi trong kích thước tệp được mô tả bởi tích phân

$$\text{Df “ fptq ´ fp0q “ } \int_0^t f^1\text{ptq dt .}$$

Machine Translated by Google

Giả sử kích thước tệp bắt đầu từ 0 fp0q " 0[kB] tại t " 0, modem có thể sử dụng quy trình tích hợp để tìm fptq, kích thước tệp trên máy tính của bạn tại t " t:

$$fptq " ª \int_0^t f^1 ptqdt .$$

Tốc độ tải xuống f dài ^{1}ptq được đo bằng [kB/s] và mỗi lần bước dt 1[s], vì vậy dữ liệu được tải xuống trong một giây là f Kích thước ^{1}ptqdt[kB]. tệp tại thời điểm t " t bằng tổng dữ liệu được tải xuống trong mỗi giây từ t " 0 đến t " t.

Tích phân ≥b $_{\text{Một}}$ qptq dt là phép tính tổng của một số quan tity qptq tích lũy trong khoảng thời gian từ t " a đến t " b. Tích phân là cần thiết bất cứ khi nào bạn muốn tính tổng của một lượng thay đổi theo thời gian.

Như đã trình bày ở trên, phép tính không chỉ là hoạt động lý thuyết dành riêng cho các chuyên gia toán học. Giải tích liên quan đến các khái niệm hàng ngày mà bạn đã quen thuộc. Thật vậy, chúng tôi thực hiện các phép toán giống như phép tính trong đầu chúng ta hàng ngày—chúng ta không nhất thiết phải sử dụng thuật ngữ phép tính khi làm như vậy.

Học ngôn ngữ của giải tích sẽ giúp bạn suy nghĩ nhiều hơn rõ ràng về một số loại vấn đề. Hiểu ngôn ngữ của giải tích là điều cần thiết để học khoa học vì nhiều định luật của tự nhiên được mô tả tốt nhất dưới dạng đạo hàm và tích phân.

Thông thường, phép tính vi phân và phép tính tích phân được dạy như hai chủ thể riêng biệt. Có lẽ các thầy cô và ban giám hiệu lo lắng những cái đầu nhỏ của sinh viên sẽ nổ tung từ tiếp xúc đột ngột với tất cả các tính toán. Tuy nhiên, sự tách biệt này thực sự làm cho phép tính khó hơn và ngăn học sinh phát hiện ra mối liên hệ giữa phép tính vi phân và tích phân. Chúng ta sẽ không có sự phân chia như vậy trong cuốn sách này, bởi vì tôi tin rằng bạn có thể xử lý tài liệu trong một lượt. Hiểu phép tính bao gồm tính toán ra các khái niệm toán học mới như vô cực, giới hạn và tổng, nhưng những ý tưởng này không quá phức tạp. Bằng cách tiến xa đến mức này, bạn đã đã chứng minh rằng bạn đã sẵn sàng để học lý thuyết, kỹ thuật và ứng dụng của đạo hàm, tích phân, dãy và chuỗi.

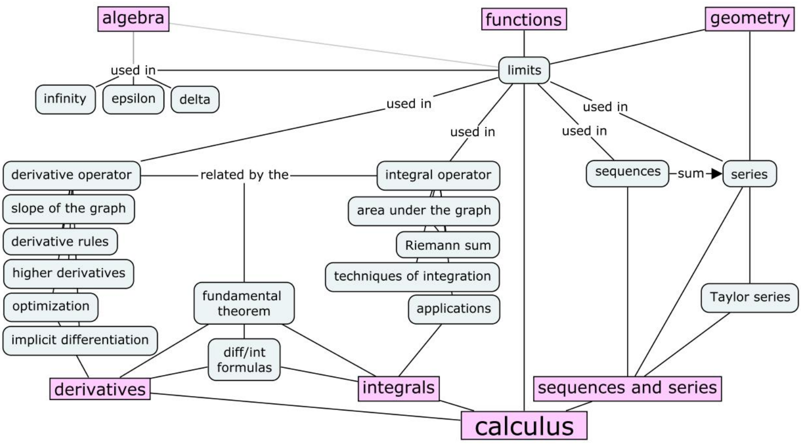
Hãy bắt đầu với một cái nhìn tổng quan về tài liệu.

5.2 Tổng quan

Phần này trình bày một cái nhìn toàn cảnh về các khái niệm cốt lõi của phép tính toán. Chúng ta sẽ định nghĩa chính xác hơn các hoạt động của sự khác biệt hóa và tích hợp, đã được giới thiệu trong Chương 2 (xem trang 165).

Machine Translated by Google

Chúng ta cũng sẽ thảo luận về các phần khác của giải tích: giới hạn, dãy số và loạt. Chúng tôi sẽ đề cập ngắn gọn về một số ứng dụng cho từng ứng dụng này các khái niệm; Rốt cuộc, bạn nên biết tại sao bạn muốn học tất cả những điều này chất liệu.



Hình 5.1: Các chủ đề chính trong giải tích là giới hạn, đạo hàm, tích phân, dãy và chuỗi. Hiểu những khái niệm này và cách chúng liên quan sẽ trang bị cho bạn nhiều kỹ năng giải quyết vấn đề thực tế.

Giải tích đòi hỏi mức độ trừu tượng cao hơn toán học chủ đề đã thảo luận trong Chương 1. Chúng tôi bắt đầu cuộc hành trình của mình thông qua "Math Land" với nghiên cứu về các con số. Sau đó, chúng tôi đã học về chức năng, đó là các phép biến đổi lấy số thực làm đầu vào và tạo ra số thực làm đầu ra, f : R Ñ R. Trong giải tích, đạo hàm và toán tử tích phân là các thủ tục lấy hàm làm đầu vào và tạo ra các chức năng như đầu ra. Gọi tR Ñ Ru là tập hợp tất cả các hàm lấy số thực làm đầu vào và tạo ra số thực làm đầu ra. Toán tử đạo hàm lấy các hàm làm đầu vào và tạo ra các chức năng như đầu ra:

$$\frac{đ}{dx} : \text{tR Ñ RuÑtR Ñ Ru.}$$

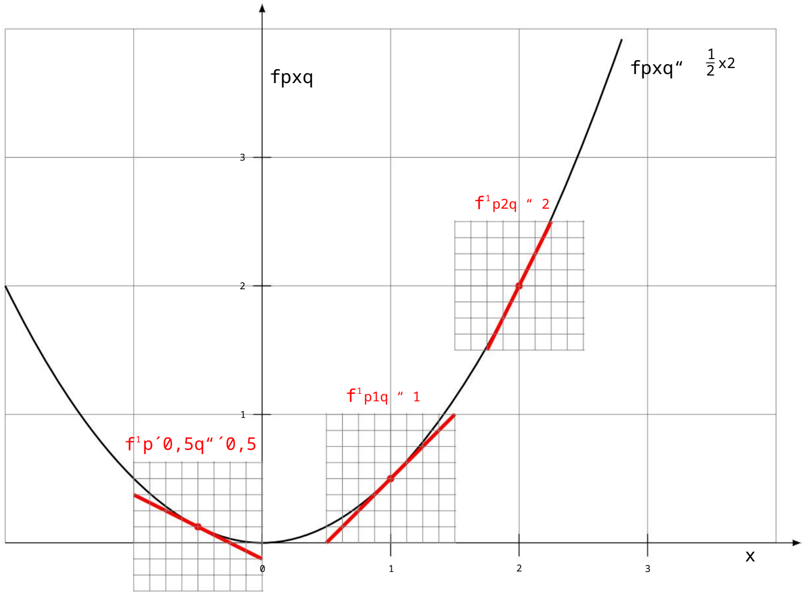
Cụ thể hơn, toán tử đạo hàm để tạo ra hàm đạo $\frac{đ}{dx}$ hoạt động trên một chức năng fpxq hàm của nó: $\frac{đ}{dx}$ rfpxqs " f ^{1}pxq.

phép tính vi phân

Xét hàm fpxq, hàm này lấy các số thực làm đầu vào và tạo ra các số thực dưới dạng đầu ra, f : R Ñ R. Biến đầu vào đối với hàm f thường được ký hiệu là x, nhưng đôi khi chúng ta cũng sử dụng các biến u, t và t để biểu thị các đầu vào. Đầu ra của hàm được ký hiệu là fpxq và thường được xác định bằng tọa độ y trong đồ thị.

Hàm đạo hàm, ký hiệu là f ^{1}pxq, $\frac{đ}{dx}$ fpxq hoặc $\frac{df}{dx}$, $\frac{đê}{dx}$, mô tả tốc độ thay đổi của hàm fpxq. Ví dụ, hàm hằng fpxq " c có đạo hàm f không thay đổi chút nào.^{1}pxq " 0 vì hàm fpxq không

Hàm đạo hàm mô tả hệ số góc của đồ thị của chức năng fpxq. Đạo hàm của một đường thẳng fpxq " mx ` b ^{1}pxq " m là f vì hệ số góc của đường thẳng này bằng m. Nói chung, độ dốc của một Hàm số khác nhau tại các giá trị khác nhau của x. Đối với một sự lựa chọn nhất định của đầu vào x " x0, giá trị của hàm đạo hàm f hệ số góc của ^{1}px0q bằng fpxq khi nó đi qua điểm px0, fpx0qq.



Hình 5.2: Biểu đồ minh họa cách tính đạo hàm của hàm f pxq " Để $\frac{1}{2}$x2 tại ba điểm phân biệt trên đồ thị của hàm số. tính đạo hàm của f pxq tại x " 1, chúng ta có thể "phóng to" gần điểm p1, q$\frac{1}{2}$và vẽ một đường thẳng có cùng hệ số góc với hàm số. Chúng ta có thể sau đó tính toán độ dốc của đường bằng phép tính tăng dần, được hỗ trợ bởi hệ tọa độ nhỏ được cung cấp. Các phép tính đạo hàm cho x " ´1 và x " 2 cũng được hiển thị. Lưu ý rằng hệ số góc của hàm là 2 khác nhau với mỗi giá trị của x. Giá trị của đạo hàm tại x " 0 là bao nhiêu? Là có một mẫu chung mô tả hệ số góc của đồ thị cho mọi x không?

Hàm đạo hàm f ^{1}pxq mô tả độ dốc của đồ thị của

hàm fpxq với mọi đầu vào x P R. Hàm đạo hàm là một hàm có dạng f : R Ñ R.
Trong nghiên cứu về cơ học, chúng ta đã học về hàm vị trí xptq và hàm vận tốc vptq, mô tả chuyển động của một vật thể theo thời gian. Vận tốc là đạo hàm của vị trí của vật theo thời gian vptq “ $\frac{dx}{dt}$ “ x1 ptq.

Hàm đạo hàm f 1pxq là thuộc tính của hàm ban đầu fpxq. Thật vậy, đây là lý do cái tên đạo hàm xuất phát: f không phải 1pxq là là một hàm độc lập—nó được suy ra từ hàm ban đầu fpxq. Trong cơ học, hàm xptq mô tả vị trí của một đối tượng là một hàm theo thời gian, và hàm vận tốc vptq mô tả một thuộc tính của hàm vị trí, cụ thể là vị trí của vật thể nhanh như thế nào thay đổi. Tương tự, hàm gia tốc aptq mô tả tốc độ of change of the function vptq.

Toán tử đạo hàm, ký hiệu là $\frac{đ}{dx}$ hoặc đơn giản là D, lấy làm đầu vào a hàm fpxq và tạo đầu ra hàm đạo hàm f 1pxq. Ký hiệu toán tử đạo hàm rất hữu ích vì nó làm rõ sự khác biệt đó là một hoạt động bạn có thể áp dụng cho bất kỳ chức năng nào để thu được đạo hàm của nó:

$$f^{1}pxq \text{ “}\frac{đ}{dx} fpxq.$$

Toán tử đạo hàm duc hàm $\frac{đ}{dx}$ hoạt động trên chức năng ban đầu fpxq thành đạo hàm f của f với mọi x. Áp 1pro pxq, mô tả tốc độ thay đổi dụng toán tử đạo hàm cho một hàm cũng là được gọi là “lấy đạo hàm” của một hàm.

Ví dụ, đạo hàm của hàm fpxq “ pxq “ x. Chúng ta có thể $\frac{1}{2}$x2 là chức năng định nghĩa 1mô tả mối quan hệ này là p $\frac{1}{2}$x2q1 “ x hoặc như $\frac{đ}{dx}$ P$\frac{1}{2}$x2q “x. Bạn nên lật lại Hình 5.2 và sử dụng biểu đồ để chứng minh với bản thân rằng hệ số góc của fpxq “ $\frac{1}{2}$x2 được mô tả bởi f 1pxq “ x ở mọi nơi trên biểu đồ.

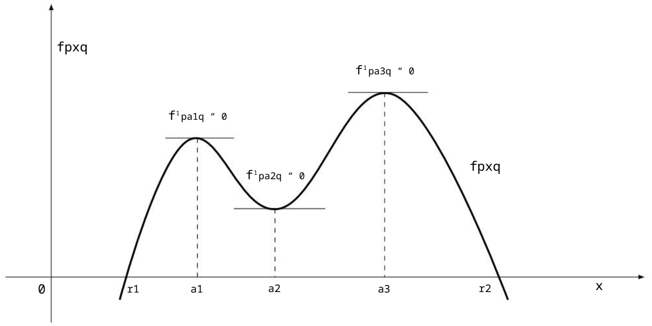
kỹ thuật khác biệt hóa

Chúng ta sẽ chính thức định nghĩa phép toán đạo hàm trong Phần 5.6. Sau đó, chúng tôi sẽ phát triển các kỹ thuật khác nhau để tính toán các công cụ phái sinh. Tính toán các công cụ phái sinh không phải là một nhiệm vụ phức tạp khi bạn học cách để sử dụng các công thức đạo hàm. Nếu bạn lật tới Phần 5.7 (trang 336), bạn sẽ tìm thấy một bảng công thức tính đạo hàm của các hàm thông thường. Trong Phần 5.8, chúng ta sẽ tìm hiểu các quy tắc chung để tính đạo hàm của tổng, tích và hợp của các hàm.

Các ứng dụng của đạo hàm

Khi bạn phát triển khả năng tìm kiếm các công cụ phái sinh, bạn sẽ có thể sử dụng kỹ năng này để thực hiện một số nhiệm vụ hữu ích.

Tối ưu hóa Ứng dụng nổi bật nhất của phép tính vi phân là tối ưu hóa: quá trình tìm cực đại của một hàm
và các giá trị tối thiểu. Khi một hàm đạt đến giá trị tối đa của nó,
đạo hàm của nó trong giây lát trở thành số không. Chức năng tăng chỉ trước khi đạt cực đại và hàm giảm ngay sau đó
tối đa của nó. Tại giá trị cực đại của nó, hàm số nằm ngang và
f^1pxq “ 0 tại thời điểm này.



Hình 5.3: Các điểm tới hạn của hàm xảy ra khi đạo hàm của hàm bằng không. Các điểm tới hạn của hàm số f pxq được minh họa là x “ a1,
x “ a2, và x “ a3. Bạn có thể sử dụng các điểm tới hạn để tìm vị trí của một cực đại và cực tiểu của hàm số. Điểm pa1, f pa1qq được gọi là cực đại địa phương mum của hàm số, điểm tại x “ a2 là cực tiểu địa phương, còn điểm tại x “ a3 là cực đại toàn cục của hàm.

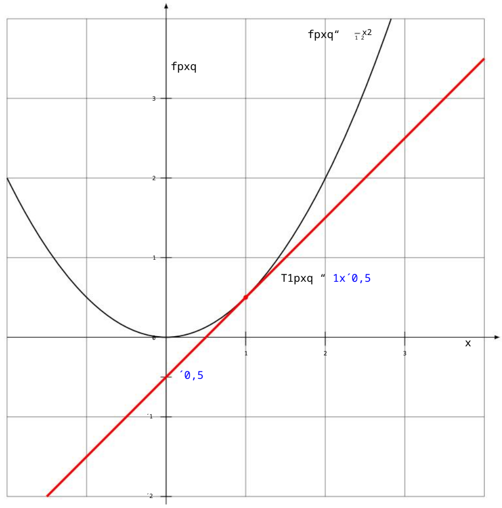
Các giá trị của x mà f hàm ^{1}pxq “ 0 được gọi là các điểm tới hạn của fpxq. Để tìm giá trị cực đại của một hàm, chúng ta bắt đầu bằng cách lập một danh sách các điểm tới hạn của nó, sau đó duyệt qua danh sách để tìm điểm mà hàm số nhận giá trị lớn nhất. chúng ta sẽ thảo luận
chi tiết của thuật toán tối ưu hóa này trong Phần 5.10.

Các đường tiếp tuyến Tiếp tuyến của hàm số fpxq tại x “ x0 tương ứng với đường thẳng đi qua điểm px0, fpx0qq và có
cùng độ dốc với hàm số tại điểm đó. Từ tiếp tuyến đến
từ tiếng Latin tangere, có nghĩa là “chạm”.

Tiếp tuyến của hàm số fpxq tại điểm x “ x0 là de
được viết bởi phương trình

$$T1pxq “ \underbrace{f^1 px0q}_{\text{khung cửi tôi}} x \underbrace{`pfpx0q ´ f^1 px0qx0q}_{b} “ fpx0q `f^1 px0qpx ´ x0q.$$

Tiếp tuyến T1pxq gần đúng với hàm fpxq gần
tọa độ x “ x0. Xấp xỉ T1pxq bằng hàm fpxq tại x “ x0 vì tiếp tuyến đi qua điểm



Hình 5.4: Hình minh họa tiếp tuyến của hàm số f pxq “ $\frac{1}{2}x^2$ tại điểm x0 “ 1. Phương trình của tiếp tuyến là T1pxq “ 1x ´ 0,5.

px0, fpx0qq. Đối với các tọa độ gần x “ x0, phép tính gần đúng cũng chính xác vì T1pxq có cùng hệ số góc với hàm fpxq. Khi giá trị đầu vào x di chuyển ra xa x0, tiếp tuyến trở nên ít chính xác hơn khi xấp xỉ hàm fpxq.

Tính tích phân

Tích phân của fpxq tương ứng với tính diện tích dưới đồ thị của fpxq. Diện tích dưới fpxq giữa các điểm x “ a và x “ b được ký hiệu như sau:

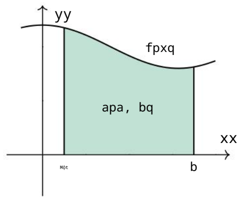
$$Apa, bq “ \int_a^b fpxq\, dx.$$

Diện tích Apa, bq được giới hạn bởi hàm số fpxq từ bên trên, bởi trục x từ bên dưới và bởi hai đường thẳng đứng tại x “ a và x “ b. Các điểm x “ a và x “ b được gọi là giới hạn của tích phân. Dấu ≥ xuất phát từ từ summa trong tiếng Latinh. Tích phân là “tổng” các giá trị của fpxq giữa hai giới hạn của tích phân.

Hàm tích phân Fpcq tương ứng với phép tính diện tích dưới dạng hàm giới hạn trên của tích phân:

$$Fpcq \overset{\text{chắc chắn}}{“} \int_0^c fpxq\, dx\ .$$

Có hai biến và một hằng số trong công thức này. Biến đầu vào c mô tả giới hạn trên của tích phân. Hội nhập



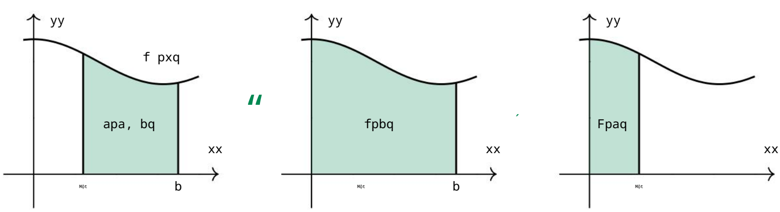
Hình 5.5: Tích phân của hàm f pxq giữa x “ a và x “ b tương ứng với diện tích Apa, bq.

biến x thực hiện quét từ x “ 0 cho đến x “ c. Hằng số 0 mô tả giới hạn dưới của tích phân. Lưu ý rằng việc chọn x “ 0 làm điểm bắt đầu của hàm tích phân là một lựa chọn tùy ý.

Hàm tích phân Fpcq chứa thông tin “đã được tính toán trước” về diện tích bên dưới đồ thị của fpxq. Nhớ lại đạo hàm hàm f pxq, hàm này cho chúng ta biết tính chất “độ dốc của đồ thị” của hàm fpxq với mọi giá trị của x. Tương tự, hàm tích phân Fpcq cho chúng ta biết thuộc tính “diện tích bên dưới đồ thị” của hàm fpxq đối với tất cả các giới hạn khả dĩ của tích phân.

Diện tích dưới fpxq giữa x “ a và x “ b nhận được bởi tính toán sự thay đổi trong hàm tích phân như sau:

$$\text{Apa, bq “ } \int_a^b \text{fpxq dx “ Fpbq ´ Fpaq.}$$



Hình 5.6: Hàm tích phân Fpxq tính diện tích dưới đường cong f pxq bắt đầu từ x “ 0. Diện tích dưới f pxq giữa x “ a và x “ b được tính bằng công thức Apa, bq “ Fpbq ´ Fpaq.

kỹ thuật tích hợp

Phần lớn tài liệu mới cần thiết để hiểu phép tính tích phân nằm ở việc học các kỹ thuật khác nhau để tính tích phân của các hàm. Tính toán tích phân không dễ như tính toán đạo hàm, bởi vì không có quy tắc chung để tuân theo.

Trong Phần 5.15, chúng tôi sẽ mô tả một số kỹ thuật phổ biến để tích hợp. Những kỹ thuật này sẽ cho phép bạn tính toán nguyên hàm của hàm đa thức, hàm mũ, logarit hàm số, hàm số lượng giác. Trong khi những kỹ thuật này sẽ giúp bạn tính tích phân trong nhiều tình huống, quá trình tính tích phân phần nào vẫn là một nghệ thuật. Trong nghệ thuật, không có các quy tắc cần tuân theo—là một nghệ sĩ, bạn phải sáng tạo và thử nghiệm những điều khác biệt tiếp cận cho đến khi bạn tìm thấy một cách hiệu quả.

Ứng dụng tích hợp

Các phép tính tích phân có ứng dụng rộng rãi trong nhiều lĩnh vực hơn khoa học hơn là thực tế để liệt kê ở đây. Hãy khám phá một vài ví dụ để đạt được một ý tưởng chung về cách các tích phân được áp dụng trong thế giới thực.

Tính tổng Các phép tính tích phân là cần thiết mỗi khi chúng ta muốn tính tổng của một số lượng thay đổi theo thời gian. Nếu như số lượng trong câu hỏi không đổi theo thời gian, chúng ta có thể nhân lên đại lượng này bằng thời gian để tìm tổng đại lượng. Ví dụ, nếu tiền thuê hàng tháng của bạn là $720, tiền thuê hàng năm của bạn là R “ $720 ˆ 12.

Nhưng nếu tiền thuê nhà của bạn thay đổi theo thời gian thì sao? Hãy tưởng tượng một lãnh chúa điên rồ yêu cầu bạn trả tiền hàng ngày và thay đổi hàng ngày thuê rptq mỗi ngày. Một số ngày tiền thuê là $20/ngày, một số ngày là $23/ngày, và có những ngày anh ta cho bạn ở với giá chỉ $15/ngày. Trong tình huống này, tính toán tiền thuê hàng năm của bạn liên quan đến tích phân R “ ≥365 0 rptq dt, trong đó mô tả cách tính tỷ lệ hàng ngày rptq nhân với thời lượng của mỗi ngày dt cộng lại cho tất cả các ngày trong năm.

Tính thế năng Trong Phần 4.6, chúng ta đã định nghĩa khái niệm thế năng là công âm của công thực hiện khi di chuyển một vật chống lại một lực bảo toàn. Chúng tôi đã nghiên cứu hai trường hợp cụ thể: grav thế năng lặp Ugphq Fg ¨ d~y “ mgh, và lỗ x́o≥h 0 chắc chắn ~ tiềm năng bên trong Uspxq “ ´ ≥x 0 chắc chắn ~Fspyq ¨ d~y “ $\frac{1}{2}$kx2. Hiểu về năng lượng grals sẽ cho phép bạn củng cố hiểu biết của mình về kết nối giữa mỗi lực ~F?pxq và thế năng liên quan của nó U?pxq.

Tính toán mômen quán tính Mômen quán tính của một vật thể hiện mức độ khó khăn khi làm cho vật đó quay. khoảnh khắc của quán tính được tính như tích phân sau:

tôi “ ª đối tượng r2dm .

Trong chương cơ học, tôi đã yêu cầu bạn ghi nhớ các công thức của Idisk “ $\frac{1}{2}$mR2 và Hình cầu “ $\frac{2}{5}$mR2 vì chưa đến lúc

Machine Translated by Google

giải thích chi tiết các phép tính tích phân. Sau khi tìm hiểu về tegrals, bạn sẽ có thể tự rút ra công thức cho Idisk và Isphere .

Giải phương trình vi phân Một trong những ứng dụng quan trọng nhất của tích phân là khả năng "hoàn tác" phép toán đạo hàm của chúng.
Nhớ lại định luật thứ hai của Newton Fnetptq " maptq, cũng có thể được viết mười như

$$\frac{Fnetptq}{tôi} " aptq " x2ptq " \frac{đ}{dx} ˆ d\frac{dx}{} xptq ˙ .$$

Trong Chương 2, chúng ta đã học cách sử dụng tích phân để giải xptq trong những trường hợp đặc biệt khi lực ròng không đổi Fnetptq " Fnet. Trong chương này, chúng ta sẽ xem lại quy trình tìm xptq, và tìm hiểu cách tính chuyển động của một vật chịu tác dụng của ngoại lực biến thiên theo thời gian Fnetptq.

Hạn mức

Công cụ mới chính mà chúng ta sẽ sử dụng trong giải tích là khái niệm về giới hạn. Trong giải tích, chúng ta sử dụng các giới hạn để mô tả điều gì xảy ra với các biểu thức toán học khi một biến trở nên rất lớn hoặc biến trở nên rất nhỏ.

Ví dụ, để mô tả một tình huống trong đó một số n trở thành lớn hơn và lớn hơn, chúng ta có thể nói,

biểu thức limnÑ8 liên quan đến nq.

Biểu thức này được đọc, "Trong giới hạn khi n tiến tới vô cùng, biểu thức liên quan đến n."

Một loại giới hạn khác xuất hiện khi một số nhỏ, dương—ví dụ d ° 0, chữ cái Hy Lạp delta—trở nên ngày càng nhỏ hơn. Phát biểu toán học chính xác mô tả điều gì xảy ra khi số d tiến về 0 là

$$\lim_{dÑ0} \text{ biểu thức liên quan đến dq,}$$

có nội dung, "Trong giới hạn khi d tiến tới 0, biểu thức liên quan đến d."

Các phép toán đạo hàm và tích phân đều được xác định theo giới hạn, vì vậy việc hiểu các giới hạn là điều cần thiết cho giải tích. Chúng ta sẽ khám phá các giới hạn chi tiết hơn và thảo luận về các thuộc tính của chúng trong Phần 5.4.

trình tự

Cho đến giờ, chúng ta đã nghiên cứu các hàm được xác định cho các đầu vào có giá trị thực x P R. Chúng ta cũng có thể nghiên cứu các hàm được xác định cho đầu vào số tự nhiên n P N. Các hàm này được gọi là dãy.

Một dãy là một hàm có dạng $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$. biến đầu vào thường được ký hiệu là n hoặc k, và nó tương ứng với chỉ số hoặc số trong dãy. Chúng tôi mô tả trình tự hoặc bằng cách nêu công thức của số hạng thứ n trong dãy hoặc bằng cách liệt kê tất cả các giá trị của dãy:

$$a_n, n \in \mathbb{N} \Leftrightarrow (a_0, a_1, a_2, a_3, a_4, \ldots).$$

Lưu ý ký hiệu mới cho biến đầu vào dưới dạng chỉ số. Đây là ký hiệu tiêu chuẩn để mô tả trình tự. Cũng lưu ý rằng sequence tiếp tục vô thời hạn.

Một ví dụ về trình tự là

$$a_n = \frac{1}{n^2}, n \in \mathbb{N}^* \Leftrightarrow \left(1, \frac{1}{4}, \frac{1}{9}, \frac{1}{16}, \frac{1}{25}, \ldots\right).$$

Chuỗi này chỉ được xác định cho các số tự nhiên dương nghiêm ngặt $\mathbb{N}^* = \{1, 2, 3, 4, \ldots\}$ làm đầu vào $n = 0$ tạo ra lỗi chia cho 0.

Câu hỏi cơ bản chúng ta có thể đặt ra về trình tự là liệu chúng có hội tụ trong giới hạn khi n tiến đến vô cùng hay không. Vì chẳng hạn, dãy $a_n = \frac{1}{n^2}$ hội tụ đến 0 khi n tiến đến vô cùng. Chúng ta có thể biểu thị sự thật này bằng biểu thức giới hạn $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} = 0$.

Chúng ta sẽ thảo luận chi tiết hơn về trình tự trong Phần 5.18.

Loạt

Giả sử chúng ta được cho một dãy a_n và chúng ta muốn tính tổng của tất cả các giá trị trong chuỗi này.

Để mô tả tổng của các phần tử thứ 3, thứ 4 và thứ 5 trong dãy a_n, ta chuyển sang ký hiệu tổng:

$$a_3 + a_4 + a_5 = \sum_{3\le n\le 5} a_n = \sum_{n=3}^{5} a_n.$$

Chữ sigma viết hoa trong tiếng Hy Lạp là viết tắt của từ sum, và phạm vi giá trị chỉ số bao gồm trong tổng này được biểu thị bên dưới và phía trên dấu cộng.

Tổng riêng phần của dãy giá trị a nằm trong khoảng từ $n = 0$ cho đến khi $n = N$ được ký hiệu là

$$S_N = \sum_{n=0}^{N} a_n = a_0 + a_1 + a_2 + \cdots + a_{N-1} + a_N.$$

Chuỗi $\sum a_n$ là tổng của tất cả các giá trị trong chuỗi a_n:

$$\sum a_n = S_\infty = \lim_{N\to\infty} S_N = \sum_{n=0}^{\infty} a_n = a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \cdots.$$

Lưu ý đây là một tổng vô hạn.

loạt kỹ thuật

Câu hỏi toán học chính mà chúng ta sẽ nghiên cứu với chuỗi là câu hỏi về sự hội tụ của chúng. Ta nói một chuỗi ∞ an hội tụ nếu tổng vô hạn S8 “ ∞ nPN an bằng một số hữu hạn LP R:

S8 “ ÿ8 an “ L ñ chuỗi ÿ an hội tụ.
n“0

Ta gọi L là giới hạn của dãy số ∞ an. Nếu tổng vô hạn S8 “ ∞ nPN an không hội tụ, ta nói chuỗi ∞ an phân kỳ. Các ví dụ về chuỗi phân kỳ bao gồm chuỗi "nổ tung" đến vô cực hoặc vô cực âm hoặc chuỗi dao động giữa các giá trị khác nhau và không thể "ổn định" gần một giá trị L.

Kỹ thuật chuỗi chính mà bạn cần học là cách phát hiện ra sự khác biệt giữa chuỗi hội tụ và chuỗi phân kỳ.
Bạn sẽ học cách thực hiện các kiểm tra hội tụ khác nhau trên các số hạng trong chuỗi, điều này sẽ cho biết liệu tổng vô hạn hội tụ hay phân kỳ.

Các ứng dụng

Chuỗi là một công cụ tính toán mạnh mẽ. Chúng ta có thể sử dụng chuỗi để đưa ra các xấp xỉ cho các số và hàm.
Ví dụ, số e có thể được tính như các chuỗi sau:

$$e “ ÿ8 \frac{1}{N!} “ 1 ` 1 ` \frac{1}{2 ¨ 1} ` ` \frac{1}{`\,`¨¨¨} . \frac{1}{3 ¨ 2 4 ¨ 3} ¨ \frac{1}{2\,5 ¨ 4 ¨ 3 ¨} 2$$
n“0

Phép toán giai thừa n! là tích của n lần tất cả các số nguyên nhỏ hơn n: n! “ npn ´ 1qpn ´ 2q¨¨¨ 3 ¨ 2 ¨ 1. Khi chúng ta tính toán nhiều số hạng hơn từ chuỗi, ước tính của chúng ta về số e trở nên chính xác hơn. Tổng riêng phần của sáu số hạng đầu tiên (như đã chỉ ra ở trên) cho chúng ta một giá trị gần đúng của e chính xác đến ba chữ số thập phân.
Tổng riêng phần của 12 số hạng đầu tiên cho ta độ chính xác đến chín chữ số thập phân.

Một điều hữu ích khác mà bạn có thể làm với chuỗi là các hàm xấp xỉ bằng các đa thức dài vô hạn. Xấp xỉ chuỗi lũy thừa cho một hàm fpxq được định nghĩa là chuỗi

fpxq “ ÿ8 cnxn “ c0 ` c1x ` c2x2 ` c3x3 ` c4x4 `¨¨¨ .
n“0

Mỗi số hạng trong chuỗi có dạng “ cnxn , trong đó cn là hằng số phụ thuộc vào hàm fpxq.

Machine Translated by Google

Ví dụ, chuỗi lũy thừa của sinpxq là

$$\sin(x) = \underbrace{\overbrace{x}^{T_1(x)} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!}}_{T_5(x)} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} - \frac{x^{11}}{11!} + \cdots.$$

Chúng ta có thể cắt ngắn chuỗi vô hạn ở bất kỳ đâu để có được xấp xỉ liên quan đến chức năng. Hàm $T_5(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!}$ là tốt nhất xấp xỉ hàm sinpxq theo đa thức bậc năm.
Phương trình tiếp tuyến T1pxq tại $x = 0$ là trường hợp đặc biệt của quy trình xấp xỉ chuỗi lũy thừa, xấp xỉ hàm dưới dạng đa thức bậc nhất.

Chúng ta sẽ tiếp tục thảo luận về chuỗi, thuộc tính của chúng và các ứng dụng trong Mục 5.19.

Nếu bạn vẫn chưa nhận thấy khi lướt qua các ví dụ cho đến nay, chủ đề chung làm nền tảng cho tất cả các chủ đề của giải tích là khái niệm về vô hạn. Bây giờ chúng ta hướng sự chú ý của chúng ta đến vô hạn.

5.3 Vô cực

Làm việc với số lượng vô cùng nhỏ và số lượng vô cùng lớn có thể là một công việc khó khăn. Điều quan trọng là chúng ta phải phát triển ngôn ngữ phù hợp để mô tả các khái niệm này càng sớm càng tốt. Như bây giờ.

lớn vô hạn

Con số 8 thực sự lớn. Làm thế nào lớn? Lớn hơn bất kỳ số nào bạn có thể nghĩ ra. Hãy nghĩ về bất kỳ số n. Đúng là n†8. Bây giờ nghĩ về một số lớn hơn N. Nó vẫn đúng là N † 8. Thực tế, bất kỳ số hữu hạn nào bạn có thể nghĩ đến, dù lớn đến đâu, sẽ luôn nhỏ hơn 8.

Về mặt kỹ thuật, 8 không phải là một con số; vô tận là một quá trình. Bạn có thể coi 8 là câu trả lời bạn nhận được bằng cách bắt đầu từ 0 và liên tục thêm 1 mãi mãi.

Để biết tại sao N † 8 cho bất kỳ số N hữu hạn nào, hãy xem xét suy luận sau. Khi chúng ta thêm 1 vào một số, chúng ta sẽ nhận được số lớn hơn con số. Thao tác `1 tương đương với việc thực hiện một bước đơn vị để bên phải trên trục số. Với mọi n, đúng là n † n ` 1. Để đến vô cùng, chúng ta bắt đầu từ n “ 0 và tiếp tục thêm 1. Sau N bước, chúng ta sẽ đến n “ N. Nhưng sau đó chúng ta phải tiếp tục cộng 1 và được N ` 1, N ` 2, N ` 3, v.v. Vì thêm 1 luôn tạo ra một

Ngay cả khi các đoạn của chuỗi nhỏ vô hạn, bởi vì có rất nhiều trong số chúng là hữu hạn, chúng vẫn cộng vào `.

Thông điệp mang về nhà là miễn là bạn xác định rõ ràng giới hạn, bạn có thể sử dụng các số nhỏ vô hạn trong phép tính của mình. Các khái niệm về một giới hạn là một trong những ý tưởng trung tâm trong khóa học này.

Giới hạn ở vô cực

Trong toán học, chúng ta thường quan tâm đến việc mô tả điều gì xảy ra với một hàm nào đó khi biến đầu vào của nó có xu hướng vô cùng. Thông tin này giúp chúng ta vẽ đồ thị của hàm số. fpxq có tiếp cận hữu hạn không số, hay nó tiếp tục tăng lên 8?

Như một ví dụ về loại tính toán này, hãy xem xét giới hạn của chức năng fpxq “ $\frac{1}{x}$ khi x tiến đến vô cùng:

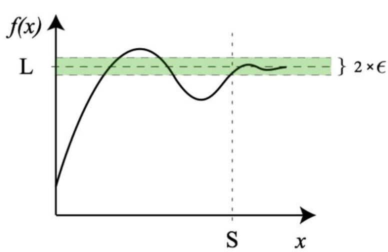
limxÑ8 fpxq “ limxÑ8 $\frac{1}{x}$ “0.

Tuyên bố này là đúng, mặc dù chức năng không bao giờ thực sự $\frac{1}{x}$ đạt đến số không. Hàm càng ngày càng tiến gần đến trục x nhưng không bao giờ chạm vào nó. Đây là lý do tại sao khái niệm giới hạn lại hữu ích: nó cho phép chúng ta viết limxÑ8 fpxq “ 0 mặc dù fpxq ‰ 0 với mọi x P R.

Hàm fpxq được gọi là hội tụ đến số L nếu hàm tiến tới giá trị L đối với các giá trị lớn của x:

limxÑ8 fpxq “ L.

Ta nói “Giới hạn của fpxq khi x tiến tới vô cùng là số L.” Nhìn thấy Hình 5.7 để minh họa. Biểu thức giới hạn là một cách ngắn gọn của nói phát biểu toán học chính xác sau: với mọi độ chính xác e ° 0, tồn tại điểm bắt đầu S, sau đó fpxq bằng L trong một độ chính xác e.



Hình 5.7: Một hàm f pxq có dao động quanh giá trị L nhỏ hơn hơn e với mọi x • S. Điểm bắt đầu S phụ thuộc vào sự lựa chọn độ chính xác e.

5.6 Công cụ phái sinh

Ở đầu chương chúng ta đã giới thiệu khái niệm đạo hàm bằng cách xác định đạo hàm với hệ số góc của đồ thị hàm số. Biểu diễn đồ họa này của các công cụ phái sinh và trực giác mà đi kèm với nó là rất quan trọng: đây là cách các nhà toán học và các nhà vật lý thường “nghĩ” về đạo hàm. Nó cũng quan trọng không kém để hiểu định nghĩa chính thức của phép toán đạo hàm, vì vậy đây là những gì chúng tôi sẽ đề cập tiếp theo. Sau đó, chúng tôi sẽ xây dựng một số thiết thực kĩ năng tính đạo hàm của hàm số.

Sự định nghĩa

Đạo hàm của một hàm được định nghĩa là

$$f^{1}pxq \overset{\text{chắc chắn}}{“} \lim_{d\ dÑ0} \frac{fpx ` dq ´ fpxq}{} .$$

Định nghĩa của đạo hàm xuất phát từ công thức tính hệ số góc của một đường thẳng:

$$\frac{\text{tăng lên}}{\text{chạy}} “ \frac{\text{đê}}{dx} “ \frac{yf ´ yi}{xf ´ xi} “ \frac{fpx ` dq ´ fpxq}{x ` d ´ x} .$$

Bằng cách làm cho d có xu hướng bằng 0 trong biểu thức trên, chúng ta có thể thu được hệ số góc của hàm fpxq tại điểm x.

Đạo hàm xuất hiện thường xuyên trong toán học đến nỗi người ta đã nghĩ ra nhiều cách để biểu thị chúng. Đừng để bị lừa bởi vô số này ký hiệu—tất cả chúng đều đề cập đến cùng một khái niệm:

$$D\ fpxq “ f^{1}pxq “ \frac{đ}{dx} fpxq “ \frac{}{dx} “ r\ f \frac{df}{} .$$

Ví dụ Hãy tính đạo hàm của fpxq “ 2x2 ` 3 để minh họa cách thức hoạt động của công thức đạo hàm trông phức tạp này:

$$f^{1}pxq “ \lim_{dÑ0} \frac{fpx ` dq ´ fpxq}{đ} “ \lim_{dÑ0} \frac{2px ` dq2 ` 3 ´ p2x2 ` 3q}{đ} .$$

Chúng ta có thể đơn giản hóa phân số bên trong giới hạn:

$$\frac{2x2 ` 4xd ` 2d2 ´ 2x2}{đ} “ \frac{4xd` 2d2\ \_}{đ} “ \frac{4xd}{đ} ` \frac{2d2}{đ} “4x` 2d.$$

Thuật ngữ thứ hai của biểu thức này biến mất khi chúng ta lấy giới hạn để có được câu trả lời cuối cùng:

$$f^{1}pxq “ \lim_{dÑ0} p4x ` 2dq “ 4x ` 0 “ 4x.$$

Quy tắc nhân

Đạo hàm của tích hai hàm thu được như sau:

rfpxqgpxqs1 “ f 1 pxqgpxq ` fpxqg1 pxq.

quy tắc thương số

Quy tắc thương cho chúng ta biết cách lấy đạo hàm của một phân số của hai hàm số:

“ fpxq 1 / gpxq — f 1 pxqgpxq ´ fpxqg1 pxq / gpxq2 .

quy tắc dây chuyền

Nếu bạn gặp tình huống bao gồm một hàm bên trong và một hàm bên ngoài, chẳng hạn như fpgpxqq, bạn có thể lấy đạo hàm theo quy trình gồm hai bước:

rfpgpxqqs1 “ f 1 pgpxqqg1 pxq.

Trong bước đầu tiên, hãy để nguyên hàm bên trong gpxq và tập trung vào việc lấy đạo hàm của hàm bên ngoài fpxq. Bước này 1 pgpxqq, giá trị của f 1 cho chúng tôi đánh giá tại gpxq. Ở bước thứ hai, chúng ta f nhân biểu thức thu được với đạo hàm của hàm trong g1 pxq.

Quy tắc dây chuyền cho chúng ta biết đạo hàm của một hàm hợp được tính bằng tích của đạo hàm của hàm ngoài và đạo hàm của hàm trong.

Ví dụ đơn giản Xét phép tính đạo hàm sau:

” sinpx2q ı1 “ cospx2q ” x2 ı1 “ cospx2q2x.

Quy tắc dây chuyền cũng áp dụng cho các hàm của các hàm của các hàm fpgphpxqqq. Để lấy đạo hàm, hãy bắt đầu từ hàm ngoài cùng và tìm đến x.

rfpgphpxqqqs1 “ f 1 pgphpxqqqg1 phpxqqh1 pxq.

đánh cắp tài nguyên thiên nhiên từ các nước thuộc Thế giới thứ ba, về cơ bản là tối ưu hóa bất cứ thứ gì có thể di chuyển. Do đó, Hệ thống muốn bạn—thế hệ trẻ và mạnh mẽ của tương lai—học kỹ năng quan trọng này và trở thành nhân viên trung thành của các tập đoàn. Các tập đoàn muốn bạn học phép tính để bạn có thể giúp họ tối ưu hóa mọi thứ, đảm bảo sự tiếp tục trôi chảy của toàn bộ doanh nghiệp.

Kiến thức toán học không đi kèm với sổ tay đạo đức để giúp bạn quyết định điều gì nên và không nên tối ưu hóa; trách nhiệm này rơi vào bạn. Nếu, giống như tôi, bạn không muốn trở thành một công ty bán tháo, bạn luôn có thể chọn sử dụng phép tính cho khoa học.
Không quan trọng đó là vật lý, y học hay điều hành công ty của riêng bạn, tất cả đều tốt. Chỉ cần tránh xa Hệ thống.
Hãy làm điều này vì chính bạn và tương lai của chúng ta, bạn nhé?

Sau khi đã nói những lời cảnh báo này, bây giờ chúng ta hãy tiếp tục để tôi có thể chỉ cho bạn thuật toán tối ưu hóa mạnh mẽ.

5.10 Thuật toán tối ưu hóa

Phần này trình bày và giải thích các chi tiết của thuật toán tìm giá trị lớn nhất của một hàm. Điều này được gọi là tối ưu hóa, như trong việc tìm ra giải pháp tối ưu cho một vấn đề.

Giả sử bạn có hàm fpxq, biểu thị một hiện tượng trong thế giới thực. Ví dụ: fpxq có thể biểu thị mức độ vui vẻ mà bạn có khi uống rượu trong một buổi tối. Tất cả chúng ta đều biết rằng với quá nhiều x, cuộc vui sẽ dừng lại và bạn thấy mình, như người Ireland nói, “nói chuyện với Chúa trên chiếc điện thoại lớn màu trắng”. Quá ít x và bạn có thể không đủ can đảm để trò chuyện với cô gái/anh chàng đó từ bàn đối diện trong phòng. Để có nhiều niềm vui nhất có thể, bạn muốn tìm mức tiêu thụ rượu x˚ trong đó f lấy

gia tri lơn nhât.

Đây là một trong những ứng dụng nổi bật của giải tích (tôi đang nói về tối ưu hóa, không phải mức tiêu thụ rượu). Đây là lý do tại sao bạn đã học về tất cả các giới hạn, công thức đạo hàm và quy tắc vi phân trong các phần trước.

Các định nghĩa

- x: biến chúng ta có thể kiểm soát
- rxi, xfs: khoảng các giá trị mà x có thể được chọn. Các giá trị của x phải tuân theo xi § x § xf . Đây là những hạn chế của vấn đề tối ưu hóa. Đối với bài toán tối ưu hóa uống rượu, x • 0 vì bạn không thể uống rượu âm, và có lẽ

Cuộc thảo luận

Chúng ta đã đi được nửa điểm của chương giải tích. Chúng ta đã học về đạo hàm và mô tả các ứng dụng của đạo hàm cho các bài toán tối ưu hóa, tìm tiếp tuyến, tỷ lệ liên quan, v.v.

Trước khi bạn tiếp tục đọc về tích phân trong nửa sau của chương, tôi thực sự khuyên bạn nên thử giải một số bài toán đạo hàm bắt đầu từ trang 431.

Một điều nữa tôi muốn giới thiệu là xem một số bài giảng trong khóa học Điểm nổi bật của Giải tích của Giáo sư Gilbert Strang (xem https://youtube.com/playlist?list=PLBE9407EA64E2C318).

5.12 Tích phân

Bây giờ chúng ta bắt đầu thảo luận về tích phân, chủ đề thứ hai trong giải tích. Tích phân là một cách thú vị để tính diện tích dưới đồ thị của hàm số. Phép tính tích phân thường được dạy như một khóa học riêng biệt sau phép tính vi phân, nhưng sự tách biệt này có thể phản tác dụng. Cách dễ nhất để hiểu tích phân là coi nó như là phép toán nghịch đảo của phép toán đạo hàm. Tích phân là phản nguyên hàm. Khi bạn nhận ra sự thật cơ bản này, bạn sẽ có thể áp dụng tất cả kiến thức về phép tính vi phân của mình vào lĩnh vực phép tính tích phân. Trong phép tính vi phân, chúng ta đã học cách lấy một hàm pxq. Trong phép tính tích fpxq và tìm đạo hàm f của nó [1]phân, chúng ta sẽ được cung cấp một hàm fpxq và chúng ta sẽ được yêu cầu tìm hàm nguyên hàm Fpxq của nó. Nguyên hàm của fpxq là một hàm Fpxq có đạo hàm bằng fpxq.

Trong phần này, chúng ta sẽ tìm hiểu về hai nhiệm vụ: cách tính các nguyên hàm và cách tính diện tích bên dưới đồ thị của fpxq. Một cách khó hiểu, cả hai thao tác này đều được gọi là tích hợp.

Để tránh mọi khả năng nhầm lẫn, chúng ta sẽ định nghĩa ngay hai khái niệm: •

Tích phân bất định của fpxq được ký hiệu≥ fpxqdx “ Fpxq ` C. Để tính tích phân bất định của fpxq, bạn phải tìm một hàm F : R Ñ R, sao cho F1 pxq “ fpxq. tích phân không xác định là hàm phản vi.

- Tích phân xác định của fpxq giữa x “ a và x “ b được ký hiệu ≥b fpxqdx “ Apa, bq. Các tích phân xác định tương ứng với cách tính diện tích theo hàm fpxq giữa x “ a và x “ b. Tích phân xác định là một số Apa, bq P R.

Hai hoạt động tích hợp có liên quan. Diện tích dưới đường cong Apa, bq có thể được tính là sự thay đổi trong hàm phản nguyên hàm, sử dụng công thức Apa, bq “ “ Fpxq ` C ‰ b “ Fpbq ´ Fpaq.

Machine Translated by Google

Các định nghĩa

Bạn hẳn đã quen thuộc với những khái niệm này:

- R: tập hợp các số thực
- fpxq: một hàm có dạng f : R Ñ R, có nghĩa là f nhận số thực làm đầu vào và tạo số thực làm đầu ra
- limdÑ0: một biểu thức giới hạn trong đó số d có xu hướng tiến tới 0
- f 1pxq: đạo hàm của fpxq là tốc độ thay đổi của f tại x:

$$f^1pxq \overset{\text{chắc chắn}}{“} \lim_{d\,dÑ0} \frac{fpx ` dq ´ fpxq}{} .$$

Đạo hàm là một hàm có dạng f 1 : R Ñ R .

Đây là những khái niệm mới mà chúng ta sẽ tìm hiểu về tích phân tích:

- Apa, bq: giá trị diện tích dưới đường cong fpxq từ x “ a cho đến x “ b. Diện tích Apa, bq được tính như sau tích phân

$$Apa, bq “ ª_{\text{Một}}^{b} fpxq\ dx.$$

Dấu ≥ là viết tắt của tổng. Thật vậy, tích phân là “tổng” của fpxq cho tất cả các giá trị của x giữa a và b.

- A0pxq: hàm tích phân của fpxq. Hàm tích phân tương ứng với việc tính toán diện tích bên dưới fpxq dưới dạng một hàm của giới hạn trên của tích phân:

$$A0pxq \overset{\text{chắc chắn}}{“} Ap0, xq “ ª_{0}^{x} fpuq\ du.$$

Việc chọn x “0 làm giới hạn dưới của tích phân là tùy ý.

- Fpxq ` C: Nguyên hàm của hàm fpxq. MỘT hàm phản nguyên hàm được định nghĩa là hàm có đạo hàm bằng fpxq.

Hàm nguyên hàm luôn bao gồm một hằng số cộng C. Nếu hàm Fpxq là một hằng số nguyên hàm (tuân theo F1 pxq “ fpxq) thì hàm Fpxq ` C cũng là một đạo hàm thủy triều vì

$$\frac{đ}{dx} rFpxq ` Cs “ fpxq,$$

cho bất kỳ hằng số C.

- Định lý cơ bản của giải tích (FTC) phát biểu rằng hàm nguyên hàm A0pxq bằng với hàm nguyên hàm Fpxq cho đến một hằng số cộng C:

$$\text{Ap0, xq “ A0pxq } \overset{\text{FTC}}{\text{“}} \text{ Fpxq ` C.}$$

Định lý cơ bản dẫn chúng ta đến công thức sau để tính diện tích Apa, bq:

$$\text{Apa, bq “ Ap0, bq ´ Ap0, aq “ A0pbq ´ A0paq “ Fpbq ´ Fpaq.}$$

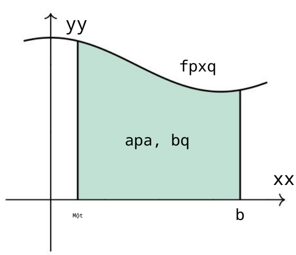
Diện tích dưới đường cong, Apa, bq, bằng với sự thay đổi của hàm nguyên hàm Fpxq giữa x “ a và x “ b.

Diện tích dưới đường cong

Tích phân mô tả cách tính diện tích dưới đường cong fpxq giữa x “ a và x “ b:

$$\text{Apa, bq “ } \int_{\text{Một}}^{b} \text{fpxq dx.}$$

Chúng tôi gọi các số a và b là các giới hạn của tích hợp. Vị trí bắt đầu tích phân, x “ a, được gọi là giới hạn dưới của tích phân. Vị trí tại đó tích phân dừng, x “ b, được gọi là giới hạn trên của tích phân.



Hình 5.16: Tích phân của hàm f pxq giữa x “ a và x “ b tương ứng với diện tích Apa, bq.

Tích phân như một hàm

Hàm tích phân của fpxq mô tả “tổng chạy” của diện tích dưới đường cong fpxq như một hàm của giới hạn trên của tích phân:

$$\text{A0pxq “ Ap0, xq “ } \int_{0}^{x} \text{fpuq du.}$$

5.13 Tổng Riemann

Thảo luận của chúng ta trong phần trước tập trung vào mối quan hệ nghịch đảo giữa toán tử tích phân ≥ fpxqdx và đạo hàm dx . Chúng ta đã biết hàm nguyên đường $\frac{đ}{}$ hàm Fpxq có thể được sử dụng toán tử để tính diện tích dưới một cong fpxq bằng cách sử dụng công thức ≥b fpxq dx “ Fpbq ´ Fpaq. Do Một đó, với kỹ năng vi phân và một số kỹ thuật đảo ngược, giờ đây bạn cũng có thể xử lý tích phân.

Có cách nào để tính tích phân mà không cần dùng đến phép toán đạo hàm không? Không khóa học nào về giải tích sẽ hoàn thành nếu không kể “câu chuyện hình chữ nhật” cổ điển để tính các tích phân xác định, có tên là tổng Riemann. Tổng Riemann là một thủ tục để tính diện tích dưới một đường cong bằng cách chia diện tích đó thành nhiều dải hình chữ nhật nhỏ có chiều cao thay đổi tùy theo fpxq. Để có được tổng diện tích dưới đường cong, chúng ta tính tổng tất cả các diện tích của các hình chữ nhật nhỏ này.

Đầu tiên, giống như dàn nhân vật, chúng tôi sẽ giới thiệu một số định nghĩa.

Các định nghĩa

- fpxq: một hàm f : R Ñ R • a: nơi tổng bắt đầu • b: nơi tổng kết thúc • Apa, bq: giá trị chính xác của diện tích dưới đường cong fpxq từ x “ a cho đến x “ b
- Snpa, bq: diện tích gần đúng của A tính theo n hình chữ nhật • sk: diện tích của hình chữ nhật thứ k khi tính từ bên trái sang

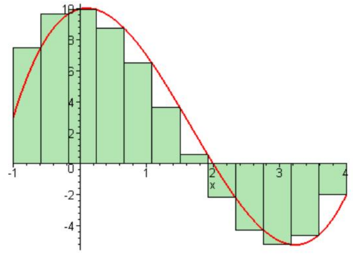
Trong phần này, chúng ta sẽ xem xét việc tính toán diện tích dưới đường cong fpxq “ x3 ´ 5x2 ` x ` 10 giữa x “ ´1 và x “ 4. Hình 5.18 cho thấy đồ thị của fpxq và diện tích gần đúng của diện tích dưới đường cong là tổng diện tích của 12 hình chữ nhật.

công thức

Xấp xỉ diện tích kết hợp được tính bằng tổng diện tích của các hình chữ nhật nhỏ:

$$\text{Snpa, bq “ ÿn}_{k“1} \; \text{sk.}$$

Mỗi hình chữ nhật nhỏ có diện tích sk bằng chiều cao của hình chữ nhật nhân với chiều rộng của nó. Chiều cao của mỗi hình chữ nhật sẽ thay đổi, nhưng chiều rộng là không đổi. Tại sao không đổi? Riemann cho rằng việc có mỗi hình chữ nhật có chiều rộng không đổi Dx sẽ giúp dễ dàng



Hình 5.18: Xấp xỉ diện tích dưới hàm f pxq " x3 ´ 5x2 ` x ` 10 giữa x " ´1 và x " 4 sử dụng n " 12 hình chữ nhật.

tính xấp xỉ. Tổng độ dài của khoảng từ x " a đến x " b là pb ´ aq. Khi ta chia độ dài này thành n đoạn cách đều nhau thì mỗi đoạn sẽ có chiều rộng Dx cho bởi

$$Đx " \frac{ba}{N}.$$

Được rồi, chúng ta có công thức chiều rộng; bây giờ chúng ta hãy tìm chiều cao của hình chữ nhật thứ k trong dãy các hình chữ nhật. Đối với các hình chữ nhật, chúng tôi chọn các "mẫu" riêng biệt của fpxq cho các giá trị sau:

xk " a ` kDx, với k P t1, 2, 3, . . . , nu,

với tất cả các hình chữ nhật cách đều nhau $\frac{ba}{N}$ riêng biệt.

Dx " Chiều cao của hàm thay đổi khi chúng ta di chuyển dọc theo trục x. Các diện tích của mỗi hình chữ nhật bằng chiều cao của nó fpxkq nhân với chiều rộng của nó:

sk " fpa ` kDxqDx.

Bây giờ, các em thân mến, tôi muốn các em nhìn vào phương trình trên và thực hiện một số phép tính đơn giản để kiểm tra xem các em đã hiểu chưa. Không có ích gì khi tiếp tục nếu bạn chỉ tin lời tôi. Xác minh rằng khi k " 1, công thức cho diện tích của hình chữ nhật nhỏ đầu tiên.
Cũng xác minh rằng khi k " n, công thức xk " a ` kDx đạt đến giới hạn trên b.

Hãy đặt công thức của chúng ta cho sk trong tổng mà nó thuộc về. Các Xấp xỉ tổng Riemann sử dụng n hình chữ nhật được cho bởi

Snpa, bq " ÿn fpa `kDxqDx,
k"1

Dx ở đâu " $\frac{ba}{N}$.

Tích phân được định nghĩa là giới hạn của tổng Riemann khi n tiến đến vô cùng: ≥b fpxq dx chắc chắn " limnÑ8 Snpa, bq " limnÑ8 ∞n k"1 fpa ` kDxqDx.

Machine Translated by Google

Một cách tiên nghiệm, không có lý do gì để nghi ngờ hàm tích phân sẽ liên quan đến phép toán đạo hàm. Tích phân tương ứng với phép tính diện tích, trong khi phép toán đạo hàm com tính hệ số góc của một hàm. Định lý cơ bản của giải tích mô tả mối quan hệ giữa đạo hàm và tích phân.

Định lý (định lý cơ bản của giải tích). Cho fpxq là hàm số liên tục trên khoảng ra, bs và c P R là hằng số. Định nghĩa hàm Acpxq như sau:

$$\text{Acpxq} \overset{\text{chắc chắn}}{“} \int_{a}^{x} \text{fpuq du.}$$

Sau đó, đạo hàm của Acpxq bằng fpxq:

$$\frac{đ}{dx} “ \text{Acpxq ‰ “ fpxq,}$$

với mọi x P pa, bq.

Định lý cơ bản của giải tích thiết lập một sự tương đương giữa tập hợp các hàm tích phân và tập hợp các hàm phản nguyên hàm:

Acpxq “ Fpxq ` C.

Tất cả các hàm tích phân Acpxq đều là nguyên hàm của fpxq.

Phép tính vi phân và phép tính tích phân là hai mặt của cùng một đồng tiền. Nếu bạn hiểu tại sao định lý là đúng, bạn sẽ hiểu một điều gì đó rất sâu sắc về giải tích. Khác biệt hóa là hoạt động ngược lại của hội nhập. Cho một hàm Gpxq “ ≥ gpxqdx, chúng ta có thể nhận được hàm gpxq bằng cách lấy đạo hàm của Gpxq: G1 pxq “ gpxq. Mối quan hệ nghịch đảo cũng hoạt động theo hướng khác. Nếu bạn được cung cấp đạo hàm h1 pxq của một số hàm hpxq chưa biết, bạn có thể tìm hàm hpxq (đến một hằng số), sử dụng tích phân: hpxq ` C “ ≥ h1 pxqdx.

Có bằng chứng?

Có một quy tắc bất thành văn trong toán học: khi từ định lý xuất hiện trong văn bản, nó phải được theo sau bởi từ chứng minh. Do đó, chúng ta cần xem xét chứng minh của định lý cơ bản của phép tích cal (FTC). Việc bạn hiểu các chi tiết của chứng minh không quá quan trọng, nhưng tôi vẫn khuyên bạn nên đọc tiểu mục này để biết kiến thức toán học tổng quát của mình. Tuy nhiên, nếu bạn đang vội, hãy bỏ qua phía trước.

5.15 Kỹ thuật tích hợp

Phép toán "lấy tích phân" của một hàm nào đó thường được phức tạp hơn nhiều so với việc lấy đạo hàm. Bạn có thể lấy đạo hàm của bất kỳ hàm nào—dù phức tạp đến đâu—bằng cách sử dụng quy tắc tích, quy tắc chuỗi và các công thức đạo hàm. Cái này không đúng với tích phân.

Nhiều tích phân không có nghiệm dạng đóng, nghĩa là hàm không có nguyên hàm. Không có thủ tục đơn giản để làm theo sao cho bạn nhập một chức năng và "quay tay quay" cho đến khi phần tích hợp xuất hiện. Tích hợp là một chút nghệ thuật.

Chúng ta có thể tích hợp những chức năng nào và bằng cách nào? Trước đây, các nhà khoa học đã thu thập các bảng lớn với các công thức tích phân cho các hàm phức tạp khác nhau. Chúng ta có thể sử dụng các bảng này để tra cứu một tích phân cụ thể công thức. Bảng như vậy được đưa ra ở trang 507 ở cuối cuốn sách.

Chúng ta cũng có thể tìm hiểu một số kỹ thuật tích phân để giúp biến các tích phân phức tạp trở nên đơn giản hơn. Hãy nghĩ về các kỹ thuật được trình bày trong này phần như bộ điều hợp. Bạn có thể sử dụng các bộ điều hợp này khi hàm bạn cần tích phân không xuất hiện trong bảng tích phân của bạn, nhưng một cái tương tự được tìm thấy trong bảng.

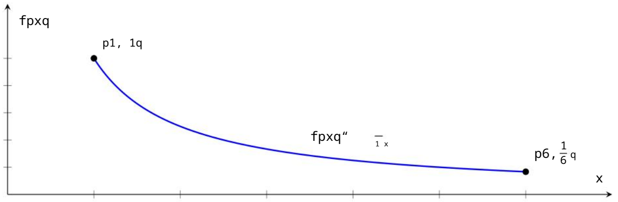
Một lưu ý cho tất cả các sinh viên của chúng tôi trong số những khán giả đang tham gia một khóa học tính toán trong tegral. Những kỹ thuật tích hợp này chính xác là các kỹ năng bạn sẽ phải thể hiện trong trận chung kết. Thay vì sử dụng bảng tích phân để tra cứu các tích phân phức tạp, bạn sẽ cần biết điền vào bảng.

Đối với những người quan tâm đến việc học vật lý, tôi sẽ thành thật nói với bạn rằng nếu bạn bỏ qua phần tiếp theo này, bạn sẽ không bỏ lỡ nhiều. Bạn nên đọc phần quan trọng về thay thế, nhưng không cần phải đọc các chi tiết của tất cả các công thức để tích hợp mọi thứ. Đối với hầu hết các ý định và mục đích, khi bạn hiểu tích phân là gì, bạn có thể sử dụng một máy tính để tính toán nó. Một công cụ tốt để tính tích phân là hệ thống đại số máy tính tại live.sympy.org.

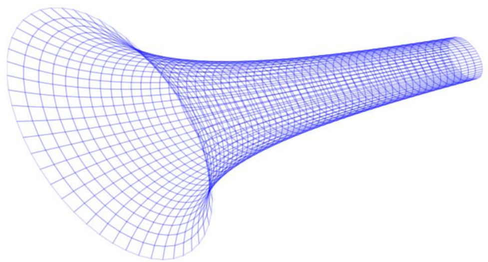
```
>>> tích phân( sin(x) )
-cos(x)
>>> tích hợp( x**2*exp(x) )
x**2*exp(x) - 2*x*exp(x) + 2*exp(x)
```

Bạn có thể sử dụng SymPy cho mọi nhu cầu tích hợp của mình.

Lời góp ý cho những bạn đọc sách này cho vui, không cần thêm căng thẳng của bài tập về nhà và các kỳ thi. Xem xét hàng tá tiếp theo các trang như một bản chụp dân tộc học về cuộc sống hàng ngày của sinh viên chưa tốt nghiệp về khoa học. Hãy thử hình dung cuộc sống của sinh viên khoa học năm thứ nhất, bận rộn tích hợp những thứ họ không muốn tích hợp trong nhiều giờ dài. Hình ảnh một số sinh viên khoa học xui xẻo bị khóa



Hình 5.28: Đồ thị của f pxq “ $\frac{1}{x}$ giữa x “ 1 và x “ 6. Bề mặt nào sẽ được tạo ra nếu chúng ta xoay đường cong này quanh trục x?



Hình 5.29: Mặt quay tạo bởi tiết diện của đường cong f pxq “ $\frac{1}{x}$ nằm giữa x “ 1 và x “ 6 khi xoay quanh trục x.

Diện tích của bề mặt quay được vẽ bởi đồ thị fpxq giữa x “ a và x “ b khi nó quay quanh trục x được cho bởi công thức

$$A = \int_a^b 2\pi f(x)\, d\ell = \int_a^b 2\pi f(x) \sqrt{1 + (f'(x))^2}\, dx.$$

Khối lượng của cuộc cách mạng

Hãy chuyển sang tích phân ba chiều, hoặc tích phân trên thể tích. Một lần nữa, chúng ta sẽ sử dụng tính đối xứng tròn của thể tích của vật thể để chia vật thể thành các “phần thể tích” nhỏ và sau đó tính tích phân để tìm thể tích tổng.

Phương pháp đĩa

Chúng ta có thể mô tả thể tích của một vật có đối xứng tròn là tổng của một số đĩa. Mỗi đĩa sẽ có độ dày dx và bán kính tỷ lệ với hàm fpxq. Nói cách khác, hàm fpxq mô tả ranh giới bên ngoài của đối tượng. Diện tích của mỗi đĩa là $\pi (f(x))^2$ và độ dày của nó là dx.

Thể tích của khối tròn xoay có biên fpxq được quay

Tỷ lệ hội tụ

Các số trong dãy Fibonacci lớn vô hạn ($\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$), trong khi tỉ lệ của $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ hội tụ về một hằng số:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1.618033\ldots$$

Hằng số này được gọi là tỷ lệ vàng.

Giải tích về dãy số

Nếu một dãy a_n giống như một hàm $f(x)$, chúng ta có thể thực hiện phép tính trên đó. Chúng ta đã thấy cách chúng ta có thể lấy giới hạn của các dãy, nhưng liệu chúng ta có thể tính đạo hàm và tích phân của dãy không?

Khái niệm đạo hàm thông thường là không nên vì nó phụ thuộc vào hàm $f(x)$ liên tục và các chuỗi chỉ được xác định cho các giá trị số nguyên. Thay vì các đạo hàm, chúng ta có thể tính các sai phân hữu hạn, là các dãy có được bằng cách trừ các số hạng liền kề trong trình tự. Cho dãy $(a_0, a_1, a_2, a_3, a_4, \ldots)$, dãy khác biệt đầu tiên là dãy $(a_1 - a_0, a_2 - a_1, a_3 - a_2, \ldots)$. Có hạn sự khác biệt đóng một vai trò lớn trong việc nghiên cứu các phương trình vi phân.

Chúng ta cũng có thể tính tích phân của các dãy, và đây là công thức con chủ đề của phần tiếp theo.

Sê-ri 5.19

Bạn có thể tính toán $\ln(2)$ chỉ bằng một máy tính cơ bản với bốn phép tính $+$ $-$ $\times$ và $\div$ không? Tôi có thể cho bạn biết một cách để làm điều này; tính tổng vô hạn sau:

$$\ln(2) = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7} - \frac{1}{8} + \cdots.$$

Vì tổng là vô hạn, sẽ mất một lúc để có được giá trị của $\ln(2)$, nhưng nếu bạn tiếp tục thêm nhiều số hạng vào tổng, bạn có thể tính ra câu trả lời $\ln(2) = 0.69314718\ldots$ đến bất kỳ độ chính xác nào.

Hãy làm cho máy tính thực hiện tổng kết cho chúng tôi. đầu tiên chúng tôi xác định công thức cho số hạng thứ n trong chuỗi $a_n = \frac{(-1)^{n+1}}{n}$, sau đó chúng ta tính tổng của 100, 1000 và 1000000 số hạng đầu tiên:

```
>>> def an_ln2(n): return (-1.0)**(n+1)/n
>>> tổng([ an_ln2(n) cho n trong phạm vi(1,100) ])
0,698172179310195
```

số tiền chính xác

Các công thức tồn tại để tính tổng chính xác của một số chuỗi nhất định.

Tổng của chuỗi hình học có độ dài N là

$$S_N = \sum_{n=0}^{N} r^n = 1 + r + r^2 + \cdots + r^N = \frac{1 - r^{N+1}}{1 - r}.$$

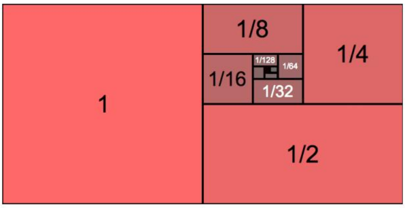
Nếu $|r| < 1$, lấy giới hạn $N \to \infty$ trong biểu thức trên dẫn đến

$$S_\infty = \lim_{N\to\infty} S_N = \sum_{n=0}^{\infty} r^n = 1 + r + r^2 + r^3 + \cdots = \frac{1}{1 - r}.$$

Ví dụ Xét dãy hình học với $r = \frac{1}{2}$. Áp dụng các công thức trên ta được

$$S_\infty = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \cdots = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = 2.$$

Bạn có thể hình dung tổng kết vô hạn này bằng đồ họa. Hãy tưởng tượng bắt đầu với một mảnh giấy có kích thước từng mảnh một, sau đó thêm mảnh giấy thứ hai có kích thước bằng một nửa mảnh thứ nhất, và mảnh thứ ba có kích thước bằng một nửa mảnh thứ hai, v.v. Tổng diện tích chiếm bởi các mảnh giấy này được thể hiện trong Hình 5.32.



Hình 5.32: Biểu diễn đồ thị của tổng vô hạn của chuỗi hình học với $r = \frac{1}{2}$. Diện tích của mỗi khu vực tương ứng với một trong các điều khoản trong bộ truyện. Tổng diện tích bằng $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 2$.

Bây giờ chúng ta sẽ phát biểu mà không cần chứng minh một số công thức khác trong đó tổng của một chuỗi có thể được lấy dưới dạng biểu thức dạng đóng.

Công thức tính tổng của N số nguyên dương đầu tiên và tổng bình phương của N số nguyên dương đầu tiên là

$$\sum_{n=1}^{N} n = \frac{N(N+1)}{2}, \qquad \sum_{n=1}^{N} n^2 = \frac{N(N+1)(2N+1)}{6}.$$

5.21 Bài toán giải tích

Trong chương này chúng ta đã học về đạo hàm và tích phân, đó là các phép toán liên quan đến hệ số góc của một hàm và diện tích dưới đồ thị hàm số. Chúng tôi cũng đã học về giới hạn, trình tự, và loạt. Bây giờ là lúc để xem bạn thực sự có bao nhiêu đã học bằng cách cố gắng giải một số bài toán giải tích.

Giải tích đã không thay đổi nhiều trong hàng trăm năm qua. Minh chứng cho thực tế này là nhiều vấn đề được trình bày ở đây đã chuyển thể từ cuốn sách "Giải tích dễ dàng" của Silvanus Thomp son, xuất bản lần đầu1 năm 1910. Những bài toán này ngày nay vẫn còn phù hợp và thú vị như cách đây 100 năm.

Nhiều như tính toán là về sự hiểu biết mọi thứ về mặt khái niệm và nhìn thấy bức tranh toàn cảnh (trừu tượng), giải tích cũng là về thực hành. Có hơn 120 vấn đề để giải quyết trong phần này. Các mục tiêu là biến sự khác biệt và tích hợp thành các hoạt động thông thường mà bạn có thể thực hiện mà không bị căng thẳng. Bạn nên chinh phục như nhiều vấn đề vì bạn cần cảm thấy thoải mái với các thủ tục của tích.

Được rồi, đủ nói chuyện chuẩn bị. Hãy đến với các vấn đề!

Vấn đề giới hạn

P5.1 Sử dụng đồ thị hàm số f pxq trên Hình 5.33 để tính các biểu thức giới hạn sau:

(1) lim xÑ´5´ f pxq (2) lim xÑ´5` f pxq (3) limxÑ´5 f pxq

(4) limxÑ2´ f pxq (5) limxÑ2` f pxq (6) limxÑ2 f pxq

(7) limxÑ5´ f pxq (8) limxÑ5` f pxq (9) limxÑ5 f pxq

(10) Hàm số f pxq có liên tục tại x " 5 không?

(11) Hàm số f pxq liên tục trên các khoảng nào?

P5.2 Tìm giá trị của các biểu thức giới hạn sau:

(a) limxÑ3 4 (b) limxÑ3 2x (c) limxÑ3 x2 ´ 2x ` 2

P5.3 Chứng minh mệnh đề giới hạn sau bằng cách dựng chứng minh e, d:

lim 3x " 15.
xÑ5

Nhớ lại trò chơi điện tử: một người chơi (người hoài nghi) chỉ định độ chính xác cần thiết e ° 0, và người chơi còn lại (người nói) phải tìm một giá trị d ° 0 sao cho |3x ´ 15| § e với mọi x trong khoảng p5 ´ d, 5 ` dq.

Gợi ý: Chọn d là bội của e.

1Toàn văn có sẵn tại http:/gutenberg.org/ebooks/33283 (phạm vi công cộng).

kết thúc vấn đề

Phần kết luận

Chúng tôi đã xoay xở để bao quát nhiều vấn đề, giải thích nhiều chủ đề và khái niệm trong một cuốn sách giáo khoa tương đối nhỏ. Chúng tôi ôn lại môn toán phổ thông và học về cơ học và giải tích. Trên hết, chúng tôi đã kiểm tra tài liệu toán và vật lý theo cách tích hợp.

Nếu bạn thích hoặc ghét cuốn sách này, hãy nhớ gửi phản hồi cho tôi. Phản hồi là rất quan trọng để tôi biết cách điều chỉnh cách viết, nội dung và thái độ của cuốn sách đối với những người học toán trong tương lai. Vui lòng dành thời gian để gửi cho tôi một dòng nếu bạn tìm thấy lỗi hoặc cho tôi biết suy nghĩ của bạn. Bạn có thể liên hệ với tôi qua email tại ivan@minireference.com.

Nếu bạn muốn tìm hiểu về các cuốn sách khác trong sê-ri Hướng dẫn Không nhảm nhí hoặc nghe về công nghệ chúng tôi đang sử dụng tại Công ty Minireference để tiếp quản ngành sách giáo khoa, hãy xem blog của công ty tại minireference.com/blog/. Bạn cũng có thể tìm thấy chúng tôi trên twitter @minireference và trên facebook fb.me/noBSguide.

Sự nhìn nhận

Cuốn sách này sẽ không thể ra đời nếu không có sự ủng hộ và động viên của những người xung quanh tôi. Tôi may mắn được lớn lên cùng với những người tốt bụng, những người biết giá trị của toán học và khuyến khích tôi học tập cũng như thực hiện dự án này. Trong phần này, tôi muốn lớn lên tất cả những người xứng đáng.

Đầu tiên và quan trọng nhất trong danh sách này là cha mẹ tôi, những người mà tôi đã học được mọi thứ từ họ và những người đã ủng hộ tôi trong suốt cuộc đời.

Xếp hàng tiếp theo là tất cả các giáo viên của tôi. Tôi cảm ơn các giáo viên CEGEP của mình: Karnig Bedrossian, người mà tôi đã học phép tính, Paul Kenton, người mà tôi đã học được cách suy nghĩ về vật lý một cách lạnh lùng, và Benoit Larose, người đã dạy tôi rằng nhiều chiều hơn không có nghĩa là mọi thứ trở nên phức tạp hơn. Tôi cảm ơn Kohur Gowrisankaran, Frank

Ferrie, Mourad El-Gamal và Ioannis Psaromiligkos vì đã dạy tôi trong những ngày làm kỹ sư của tôi, và Guy Moore và Zaven Al tounian vì đã dạy tôi các chủ đề vật lý nâng cao. Trong số tất cả của tôi các giáo viên, tôi mang ơn Patrick Hayden nhiều nhất, người có phương pháp giảng dạy luôn truyền cảm hứng cho tôi. Từ anh ấy, tôi đã học được điều đó bằng cách xác định mọi thứ rõ ràng, bạn có thể lừa học sinh học các chủ đề nâng cao, và thậm chí làm cho kết quả có vẻ như là hiển nhiên! cảm ơn đi ra ngoài tất cả các cộng tác viên nghiên cứu và bạn bè của tôi: David Avis, Arlo Breault, Juan Pablo Di Lelle, Omar Fawzi, Adriano Ferrari, Igor Khavkine, Felix Kwok, Doina Precup, Andie Sigler và Mark M. Wilde. Cám ơn tất cả các bạn đã dạy tôi rất nhiều điều!

Việc chuẩn bị cuốn sách này mất nhiều năm và những nỗ lực tổng hợp của nhiều người. Tôi muốn cảm ơn Afton Lewis, Oleg Zhoglo, và Alexandra Foty đã giúp tôi đọc lại v2 của cuốn sách và tất cả độc giả đã báo cáo lỗi chính tả và đề nghị làm rõ. Cảm ơn tất cả cho ý kiến và phản hồi của bạn! Georger Araujo và Tomasz Swi ˛ecicki xứng đáng được đề cập đặc biệt vì việc đọc văn bản tỉ mỉ của họ đã dẫn đến việc sửa nhiều lỗi kỹ thuật. Tôi cũng muốn để cảm ơn Mohamad Nizar Kezzo đã giúp tôi chuẩn bị các vấn đề và bài tập cho cuốn sách. Trên tất cả, tôi muốn cảm ơn biên tập viên của tôi Sandy Gordon, người đã giúp tôi cải thiện đáng kể bài viết trong quyển sách. Chuyên môn của cô ấy với ngôn ngữ tiếng Anh và lời khuyên của cô ấy về phong cách và nội dung đã hoàn toàn vô giá.

Cuối cùng nhưng không kém phần quan trọng, tôi muốn cảm ơn tất cả các sinh viên của tôi vì câu hỏi và yêu cầu giải thích. Nếu tôi đã phát triển bất kỳ kỹ năng giải thích mọi thứ, tôi nợ họ.

đọc thêm

Bạn đã đọc hết cuốn sách này, nhưng bạn mới chỉ ở phần đầu của hành trình khám phá khoa học. Có rất nhiều điều thú vị những thứ còn lại để bạn tìm hiểu về. Dưới đây là một số khuyến nghị về các chủ đề mà bạn có thể thấy thú vị.

Điện và Từ trường

Tĩnh điện học là nghiên cứu về lực điện $\vec{F}_e$ và các lực liên quan điện thế U_e. Ở đây, bạn cũng sẽ tìm hiểu về điện trường $\vec{E}$ và điện thế V.

Từ học là nghiên cứu về lực từ $\vec{F}_b$ và từ trường trường $\vec{B}$ do dòng điện chạy qua dây dẫn gây ra. Cường độ dòng điện I là tổng số electron đi qua tiết diện ngang của dây dẫn trong một giây. Nhờ chuyển động của nó thông qua không gian, mỗi electron góp phần vào sức mạnh của từ trường xung quanh dây.

Vẻ đẹp của điện từ học là toàn bộ lý thuyết có thể được được mô tả chỉ trong bốn phương trình:

$$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$ Định luật Gauss

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0$$ Định luật Gauss cho từ tính

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$ Định luật cảm ứng Faraday

$$\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$ Định luật mạch điện của Ampère

Cùng với nhau, chúng được gọi là phương trình Maxwell.

Toán tử vectơ

Bạn có thể tự hỏi điều tam giác là gì. Ký hiệu ∇ (được gọi là nabla) là phép toán đạo hàm theo vectơ: ∇ Đoán chắc chắn $= \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right)$. xem—bạn cũng có thể thực hiện phép tính với vectơ.

Nếu bạn tham gia khóa học về giải tích véc tơ, bạn sẽ học về đường đi trong tegrals, tích phân mặt và tích phân thể tích của hàm véc tơ. Bạn cũng sẽ tìm hiểu về đạo hàm vectơ, cũng như hai vectơ tương đương của định lý cơ bản của phép tính:

- Định lý Stokes:

$$\iint_S \nabla \times \vec{F} \cdot d\vec{S} = \oint_{\partial S} \vec{F} \cdot d\vec{r},$$

trong đó nói rằng tích phân của curl, $\text{curl}(\vec{F})$ của chắc chắn $= \nabla \times \vec{F}$, cánh đồng $\vec{F}$ trên bề mặt S bằng với sự lưu thông của $\vec{F}$ dọc theo ranh giới của bề mặt ∂S.
- Định lý phân kỳ Gauss:

$$\iiint_V \nabla \cdot \vec{F}\, dV = \iint_{\partial V} \vec{F} \cdot d\vec{S},$$

trong đó nêu tích phân của phân kỳ, $\text{div}(\vec{F})$ chắc chắn $= \nabla \cdot \vec{F}$, của trường $\vec{F}$ trên thể tích V bằng với thông lượng của $\vec{F}$ qua biên của thể tích ∂V.

Cả hai định lý đều liên hệ tổng đạo hàm của một đại lượng trên một miền R nào đó với giá trị của đại lượng đó trên biên của

Phụ lục A

Câu trả lời và giải pháp

giải pháp chương 1

Đáp án bài tập

E1.1 a) x “ 3; b) x “ 30; c) x “ 2; d) x “´3. E1.2 a) Z, Q, R, C; b) C; c) N, Z, Q, R, C; đ) Q, R, C; e) R, C. E1.3 a) 21; b) 0; c) $\frac{2}{27}$. E1.4 a) “ $\frac{5}{6}$; b) $\frac{13}{12}$ $\frac{1}{}$ $\frac{31}{6}$ “ 5 $\frac{1}{6}$. E1.5 a) x “ 2; b) x “ 25; c) x “ 100. E1.6 a) f ´1pxq “ x2, x “ 16. b) g´1pxq“´ lnpxq, $\frac{1}{2}$ x “ 0. E1.7 a) px ´ 1qpx ´ 7q; b) px ` 2q2; c) px` 3qpx ´ 3q. E1.8 a) x2 ` 2x ´ 15 “ px ` 1q2 ´ 16 “ 0 có nghiệm là x “ 3 và x “ ´5; b) x2 ` 4x ` 1 “ px ` 2q2 ´ 3 “ 0, với nghiệm x “ ´2 ` ?3 và x “ ´2 ´ ?3. E1.9 x1 “ $\frac{3}{2}$ và x2 “ ´1. E1.10 x “˘?2. E1.11 a) 8; b) a´1b´2c´3 “ $\frac{1}{ab2c3}$; c) 8a2; d) a6b´2. E1.12 a) 3; b) 12; c) ?3; đ) |a|. E1.13 a) 2p; b) 4 ` “ 4,25; c) $\frac{1}{4}$; d) x2. E1.14 a) x “ ?a và x “´?a; b) x “ ?3 b; c) x “ ?4 c và x “ ´?4 c; d) x “ ?5 d. Điểm thưởng nếu bạn cũng có thể giải x2 “ ´1. Chúng ta sẽ làm điều đó trong Phần 3.5. E1.15 ke “ 8,988 ˆ 109. E1.16 a) logp2xyq. b) ´ logpzq. c) logpyq. d) 3. e) ´3. f) 4. E1.17 Miền: R. Hình ảnh: r´2, 2s. Từ gốc: t..., ´ , $\frac{P}{2}$, $\frac{P}{2}$, $\frac{3p}{2}$, $\frac{5p}{2}$,...u. E1.18 a) ppxq chẵn và có bậc 4. b) qpxq là số lẻ và có bậc 7. E1.19 a) x “ 5 và x “ ´3; b) x “ 1 ` ?3 và x “ 1 ´ ?3. E1.20 a) pq ˝ f qpxq “ qp f pxqq “ px ` 5q2; qpxq dịch chuyển năm đơn vị sang trái. b) pf ˝ qqpxq “ x2 ` 5; qpxq dịch chuyển lên trên năm đơn vị. c) pq ˝ gqpxq“px ´ 6q2; qpxq dịch chuyển sáu đơn vị sang phải. d) pq ˝ hqpxq “ 49x2; qpxq được nén theo chiều ngang bởi một thừa số bảy. E1.21 A “ 5, l “ 0,1 và f “ gpxq “ 2 ?x ´ 3 $\frac{P}{8}$ . E1.22 f pxq “ x2 ´ 2x ` 5. E1.23 ´ 2. E1.24 x “ ?21. E1.25 V “ 33.51 và A “ 50.26. E1.26 Chiều dài đường đua “ 5C “ 5pd “ 11,47 m. E1.27 x “ 5 cosp45˝q “ 3.54, y “ 5 sinp45˝q “ 3.54; C “ 10p. E1.28 a) rad. E1.29 a) $\frac{P}{6}$ rad; b) $\frac{P}{4}$ rad; c) $\frac{P}{3}$ rad; đ) $\frac{3p}{2}$ E1.30 a) 0; b) 1; c) 2 $\frac{1}{}$; d) 1. E1.31 a) 3.16=18.43˝; b) 2,24=243,43˝ “ 2,24=´116,57˝; c) 6=270˝ “ 6=´90˝; đ) p8.66, 5q; đ) tr9.66, 2.59q; f) p´5, 8,66q. E1.32 y “ 2. E1.33 c “ ?a2 ´ b2. E1.34 y “ x2. E1.35 a) $\frac{1}{4}$ f p1, q. b) p1, 2q. c) $\frac{1}{2}$ p´2, 2q. E1.36 x “ 2, y “ 3. E1.37 x “ 5, y “ 6, và z “ ´3. E1.38 p “ 7 và q “ 3. E1.39 a) $53 974,14; b) $59 209,77; c) $65 948,79. E1,40 $32 563,11. E1.41 a) t2, 4, 6, 7u; b) t1, 2, 3, 4, 5, 6u; c) t1, 3, 5u; đ) H; e) t1, 2, 3, 4, 5, 6, 7u; f) t7u; g) t2, 4, 6, 7u; h) H. E1.42 a) p´8, $\frac{3}{2}$ q; b) p´8,´5s; c) p´1, 4q; đ) p4, 8q; đ) r $\frac{14}{3}$, 8q; f) p´8,´4sYr2, 8q.

Machine Translated by Google

Chương 2 giải pháp

Đáp án các bài toán P2.1 Hạt đang

tăng tốc và chuyển động của nó là một UAM. P2.2 Bạn không chạy với UVM. P2.3 (1) Tốc độ đang giảm dần. (2) Tốc độ ngày càng tăng. P2.4 UAM trước t “ t0 và UVM sau t “ t0. P2.5 vA “ 6[m/s], vB “ 6[m/s], vC “ 8[m/s], vD “ 8[m/s] và vE “ 4[m/s]. P2.6 vptq “ 9t ` 10t ´ 3, aptq “ 18t ` 10. P2.7 (1) gjupiter “ 24,5[m/s2]. (2) yptq “ 4 ´ 12,25t 2. P2.8 (1) vptq “ 12t ` 2[m/s], aptq “ 12[m/s2]. (2) F “ 60[N]. P2.9 (1) aptq “ 2[m/s2], vptq “ 2t[m/s], và xptq “ t 2[m]. (2) vp4q “ 8[m/s]. (3) v “ 6[m/s] khi x “ 9[m]. P2.10 (1) vp2q “ 6[m/s], xp2q “ 4[m]. (2) Với t° 2[s]: vptq “ 6 ` 6pt ´ 2q[m/s], xptq “ 4 ` 6pt ´ 2q ` 3pt ´ 2q2[m] . (3) Khi x “ 49[m], t “ 5[s]. (4) v “ 12[m/s] khi x “ 13[m]. P2.11 (1) vAÑB “ 0[m/s], vCÑD “ 2[m/s], và vEÑF “ ´1,5[m/s]. (2) Từ 0[s] đến 2[s] con sóc không chạy, từ 2[s] đến 6[s] nó chạy tới và từ 6[s] đến 9[s] nó chạy lùi. Con sóc đổi hướng lúc t “ 6[s]. P2.12 t 2[m] và x2ptq “ (1) vi “ 6[m/s]. (2) xptq “ 6t ´ t [m]. P2.13 (1) x1ptq “

2 $\frac{3}{2}$

$\frac{1}{2}t$ ` 3t ` 4[m]. (2) x1 “ x2 “ 24[m] khi t “ 4[s]. P2.14 (1) xi “ 7[m] và vi “ 5[m/s]. (2) vptq “ 4t ` 5 [m/s] và aptq “ 4[m/s2]. (3) xp5q “ 82[m] và vp5q “ 25[m/s]. P2.15 vi “ 4 ?2[m/s] và tstop “ ?2[s].

Lời giải P2.1 Mối quan hệ giữa vận

tốc và thời gian là tuyến tính và v tăng theo thời gian. Tốc độ tăng vận tốc không đổi nên gia tốc không đổi.

P2.2 Vận tốc của bạn trong khoảng thời gian đầu tiên (từ t “ 0[s] đến t “ 2[s]) là 1,5[m/s]. Trong khoảng thời gian thứ hai, vận tốc của bạn là 2,5[m/s] và trong khoảng thời gian thứ ba là 3[m/s]. Lần chạy của bạn không phải là một UVM.

P2.3 Khi vận tốc và gia tốc ngược chiều nhau thì vận tốc của ô tô giảm. Khi vận tốc và gia tốc cùng chiều thì vận tốc của ô tô tăng.

P2.4 Sử dụng F “ ma. Khi F không đổi, a không đổi và chuyển động là UAM. Khi F “ 0, a “ 0 và chuyển động là UVM.

P2.5 Để tìm vận tốc, hãy tính diện tích bên dưới biểu đồ và cộng các diện tích cho mỗi bước. Lưu ý khu vực âm từ D đến E.

P2.6 Vi phân hàm xptq để tìm vận tốc vptq. Vi phân vptq để tìm gia tốc aptq.

P2.7 Sử dụng v^2_{fi} ´ v2 “ 2apyf ´ yiq để tìm gia tốc. Sử dụng phương trình tổng quát yptq “ yi ` vit ` $\frac{1}{2}$at2 và cắm yi “ 4[m], vi “ 0[m/s], và a “ ´24,5[m/s2] vào tìm chiều cao theo thời gian.

P2.8 Đạo hàm vị trí đối với t để tìm vptq, sau đó vi phân vptq để tìm aptq. Sử dụng F ma để tìm lực.

P2.9 (1) Tính aptq từ định luật 2 Newton để thu được aptq “ 2[m/s2]. Tích phân theo thời gian để thu được vận tốc và sau đó tích phân lại để tìm vị trí.
(2) Cắm t “ 4[s] vào vptq. (3) Sử dụng phương trình thứ tư để tìm vận tốc sau khi ô tô đi được 9[m].

vào P2.10 (1) Sử dụng tích phân để tìm vptq $\frac{3}{2}$t 2[m/s] và xptq “ $\frac{1}{2}$t 3[m], sau đó thế “ t “ 2[s]. (2) Để mô tả UAM bắt đầu tại t “ 2[s], hãy sử dụng phương trình tổng quát xptq x2 ` v2pt ´ 2q ` $\frac{1}{2}$“ apt ´ 2q2, trong đó x2 “ 4[m] và v2 “ 6[m/s] là các điều kiện ban đầu tại t “ 2[s]. “ 2apx (3) Giải ´ x2q với f xptq “ 49[m], vf(4) 12[m/s] sử dụng v2 ´ v2 4[m] để tìm độ dịch chuyển trong UAM.

1 P5.104 Quan sát thấy 2n`n † $\frac{1}{2n}$ với mọi n • 1. Ta biết ∞ N 1 2n hội tụ vì nó là một chuỗi hình học với r $\frac{1}{2}$ và |r| † 1. Bằng phép thử so sánh trực tiếp, ∞ N 1 2n`n Mà còn " hội tụ.

P5.105 Giới hạn của số hạng thứ n trong dãy là limnÑ8 $\frac{n2}{2n2 `1}$ " $\frac{1}{}$ ‰ 0. Bộ truyện ∞ N $\frac{2\ n2}{2n2`1}$ liên quan đến giới hạn của vô số số hạng khác không; do đó nó phải là khác nhau.

P5.109 Trong mỗi trường hợp, chúng tôi sử dụng công thức cho chuỗi hình học ∞8 n"0 arn " $\frac{Một}{1´r}$. Nhìn thấy bit.ly/1e9F52v để tính toán.

P5.110 Sử dụng công thức chuỗi hình học ∞8 n"0 arn " $\frac{Một}{1´r}$.

P5.112 Đây là một chuỗi hình học với r " $\frac{1}{2}$ và một " $\frac{2}{3}$, vậy $\frac{Một}{1´r}$ " $\frac{\frac{2}{3}}{1´\frac{1}{2}}$ " $\frac{4}{3}$.

P5.119 Sử dụng cách tiếp cận được gợi ý trong gợi ý, chúng tôi viết tổng ∞N n"1 N bằng cách nhóm 1 với N, 2 với N ´ 1, 3 với N ´ 2, v.v. để thu được giá $\frac{N}{2}$ điều khoản, mỗi trị N ` 1. Do đó, chúng tôi tìm thấy ∞N n"1 n " $\frac{N}{2}$ pN ` 1q " 2 Đối $\frac{NpN`1q}{}$.

với phần thứ hai, chúng ta có thể sử dụng tính chất "kính thiên văn" của loạt bài này. Ngoại trừ số hạng đầu tiên và số hạng cuối cùng trong chuỗi này, phần âm của mỗi số hạng pn ` 1q3 ´ n3 hủy bỏ phần tích cực của thuật ngữ tiếp theo. Do đó, chỉ có phần tiêu cực của thuật ngữ đầu tiên và phần dương của số hạng cuối cùng còn lại: ∞N n"1pn ` 1q3 ´ n3 " pN ` 1q3 ´ 1. Sử dụng phép toán đại số cơ bản, ta thấy:

pn `1q3 ´ n3 " n3 ` 3n2 ` 3n ` 1 ´ n3 " 3n2 ` 3n ` 1.

Vì chúng ta biết ∞N n"1pn ` 1q3 ´ n3 " pN ` 1q3 ´ 1 từ phương pháp kính thiên văn, chúng ta thu được phương trình

pN ` 1q3 ´ 1 " ÿN n"1 3n2 ` 3n ` 1 " 3 ÿN n"1 n2 `3 ÿN n"1 n ` ÿN n"1 1.

Sử dụng các công thức ∞N n"1 n " $\frac{NpN`1q}{2}$ và ∞N n"1 1 "N, chúng ta viết lại phương trình dưới dạng

pN ` 1q3 ´ 1 " 3 ÿN n"1 n2 `3 $\frac{NpN `1q}{2}$ `N.

Cô lập ∞N n"1 n2 và việc đơn giản hóa dẫn chúng ta đến kết quả mong muốn.

P5.120 Sử dụng định nghĩa tích phân là giới hạn của tổng Riemann từ trang 372, chúng ta có thể viết công thức sau cho tích phân của f pxq giữa x " a và x " b:

b a Một f pxq dx chắc chắn " limnÑ8 ÿn k"1 f pa ` kDxqDx,

trong đó Dx " $\frac{ba}{N}$ biểu thị chiều rộng của hình chữ nhật được sử dụng để tính gần đúng diện tích dưới đường cong. Đối với tích phân của hàm f pxq " mx ` b, công thức trở thành

b a Một mx ` b dx " limnÑ8 ÿn k"1 pmpa ` kDxq ` bq Dx

" limnÑ8 Dx ˜ pma ` bq ÿn k"1 1 ` mpDxq ÿn k"1 k ¸

" limnÑ8 Dx ˆ pma ` bqn ` mpDxq $\frac{npn `1q}{2}$˙ .

Sau khi lấy giới hạn n Ñ 8 và sau một số bước đơn giản hóa, chúng tôi thu được câu trả lời cuối cùng, ≥b Một pmx ` bq dx " bpb ´ aq ` $\frac{tôi}{2}$pb2 ´ a2q.

Machine Translated by Google

P5.121 Sử dụng định nghĩa của tích phân dưới dạng tổng Riemann vô hạn và lấy, xk “ 0 ` Dxk và Dx “ d´0 / N ,chúng ta thu được công thức sau cho diện tích dưới đường cong của f pxq “ ax2 ` bx ` c giữa x “ 0 và x “ d:

đ
a 0 ax2 ` bx ` c dx “ limnÑ8 ÿn k“1 ´ apDxq 2k2 ` bpDxqk ` c ¯ Dx

“ limnÑ8 Dx ˜ apDxq2 k“1 k2 ` bpDxq ÿn k“1 k `c ÿn k“1 1 ¸

ÿn “ limnÑ8 Dx ˜ apDxq2 ÿn k“1 npn `1qp2n `1q npn `1q ` bpDxq 6 2 ` cn¸ ,

1 trở thành 3 — quảng cáo3 ` — 1 2 bd2 `cd sau khi sử dụng Dx“ đ / N và lấy giới hạn.

P5.122 Có thể tính diện tích bề mặt của một hình cầu bán kính R bằng cách chia nó thành các dải hình tròn, hẹp có diện tích dA, với bán kính thay đổi theo f pxq “ ? R2 ´ x2 . Chiều rộng của mỗi dải được cho bởi công thức độ dài cung, d` “ a1 ` pf 1pxqq2 dx. Để tính toán Asphere “ ≥R 2p f pxq a1 ` pf 1pxqq2 dx, sau đó chúng tôi trước tiên hãy tìm f 1pxq“ ´x / ? R2´x2 ,thu được a1 ` pf 1pxqq2 “ r / ? R2´x2 . thay thế thành công thức, chúng tôi tìm thấy Asphere ´R 2p ?R2 ´ x2 ? r / R2´x2 dx, giúp đơn giản hóa thành “ ≥R ´R 1 dx, mang lại 4pR2 như mong đợi.

2pR ≥R P5.125 Sử dụng phương pháp đĩa, chúng tôi tìm thấy âm lượng của kèn Torricelli giữa x “ 1 và x “ a là ≥a 1 pp f pxqq2 dx “ p ≥a 1 1/x2 dx “ p ´ 1 ´ 1/một ¯ . Để tìm tổng khối lượng, chúng tôi tính giới hạn limaÑ8 p ´ 1 ´ 1/a ¯ “ p.

P5.126 Để đánh giá Isph.shell “ ≥R ´Rp f pxqq2 s2p f pxq a1 ` pf 1pxqq2 dx, trước tiên chúng tôi tính f 1pxq “ ´x / ? R2´x2 sau đó lấy a1 ` pf 1pxqq2 “ r / ? R2´x2 . Thay thế các phép tính này chuyển thành tích phân, chúng ta tìm thấy Isph.shell “ 2psR ≥R ´RpR2 ´ x2q dx, là tích phân của một đa thức.

P5.127 Công thức tính thể tích của hình cầu bằng phương pháp vỏ hình cầu là Vsphere “ ≥R 0 2prhprqdr ,trong đó hprq “ 2 ?R2 ´ r2 là chiều cao của vỏ hình trụ mỏng tại bán kính r và 2pr là chu vi của nó. Để đánh giá Isphere tích phân “ ≥ r2dm, chúng tôi xác định dm “ rAprqdr “ r2prhprq dr và chia tỷ lệ phần đóng góp của từng dm theo hệ số bổ sung r2. Do đó, chúng ta thu được Isphere “ ≥R 0 r2r2pr2 ?R2 ´ r2 dr. Việc tính tích phân ≥R 0 r3 ?R2 ´ r2 dr yêu cầu một số bước và tôi khuyến khích bạn tự thực hiện phép tính. Các phép thế r “ R sin q và sau đó là u “ cos q có thể có ích.

P5.128 Tích phân để tính toán, ≥R ´R mpxqrrpxqs2 dx, trở thành 2pr ≥R ´Rp f pxqq4 ≥R ´R ldiskpxq dx “ 1 2 dx sau khi thay thế tất cả các giá trị đã biết. Sau khi mở rộng pf pxqq4, 2pr chúng tôi tìm thấy Isphere “ 1 2 ≥R ´RpR4 ´ 2R2x2 ` x4q dx, tính toán dễ dàng.

Phụ lục B

ký hiệu

Phụ lục này chứa một bản tóm tắt các ký hiệu được sử dụng trong cuốn sách này.

ký hiệu toán học

Biểu thức đọc là a, b,	Dùng để biểu thị
x, y “	biến
bằng	các biểu thức có cùng giá trị một định
“ được định nghĩa	nghĩa biến mới
là a ` ba cộng	tổng độ dài của a và b
ba ´ ba trừ ba ˆ	sự khác biệt về độ dài giữa a và b
b “ ab a nhân b a2 “	diện tích hình chữ nhật
aa a bình a3 “ aaa a	diện tích hình vuông có cạnh a
lập phương ba an a	thể tích hình lập phương có cạnh a
mũ n	a nhân với chính nó n lần
?a “a $\frac{1}{2}$ căn bậc hai của a	độ dài cạnh của hình vuông diện tích a
?3 một “ một ^{1} căn bậc ba của a	độ dài cạnh của hình lập phương có thể tích a
a{b “ $\frac{Một}{}$ a chia cho ba phần của một tổng chia thành b phần	
a´1 “ $\frac{b}{Một}$ 1 một trên một	phân chia bởi một
f pxq f của	hàm f được áp dụng cho đầu vào x
f ´1 xf nghịch	hàm ngược của f pxq
đảo f ˝ gf soạn g	thành phần chức năng; f ˝ gpxq “ f pgpxqq
ví dụ e đến x	hàm số mũ cơ số e
lnpxq log tự nhiên của x	logarit cơ số e
ax a đến x	cơ số hàm mũ a
logapxq log cơ số a của x	cơ số logarit a
q, f theta, phi	góc độ
sin, cos, tan sin, cos,	tỉ số lượng giác
tan % phần trăm	tỷ lệ của một tổng số; Một% " $\frac{Một}{100}$

Đặt ký hiệu

Bạn không cần nhiều ký hiệu hoa mỹ để hiểu toán học. Nó
Tuy nhiên, thực sự hữu ích nếu bạn biết một chút ký hiệu tập hợp.

Ký hiệu Đọc là	biểu thị
t...ư bộ . . . |	xác định một tập hợp
sao cho N các	mô tả hoặc hạn chế các phần tử của một tập hợp
số tự nhiên	bộ N chắc chắn “t0, 1, 2, . . .u. Lưu ý N˚ chắc chắn “ Nzt0u.
Z các số nguyên	bộ Z chắc chắn “ t..., ´2, ´1, 0, 1, 2, 3, . . .u
Q các lý	tập hợp các phân số của các số nguyên
R số thực	tập hợp các số thực
C	tập hợp các số phức
Ä tập hợp con	một bộ được chứa trong một bộ khác
Ñ tập con hoặc bằng	ngăn chặn hoặc bình đẳng
công đoàn Y	các phần tử kết hợp từ hai tập hợp
ngã tư X	các phần tử hai tập hợp có điểm chung
SzT S đặt trừ T a PS	các phần tử của S không thuộc T
a trong S	a là một phần tử của tập hợp S
a RS a không thuộc	a không phải là phần tử của tập hợp S
S @x với mọi x	mệnh đề đúng với mọi x
Dx tồn tại x	một tuyên bố tồn tại
Ví dụ không tồn tại câu nói không tồn tại xa	

Một ví dụ về một câu lệnh toán học cô đọng sử dụng ký hiệu tập hợp
là “Em, n P Z sao cho “ ? 2, $\frac{m}{N}$ có nghĩa là “không tồn tại
hai số nguyên m và n có tỉ số bằng ? 2.” Vì chúng tôi xác định tập hợp các
phân số của số nguyên với số hữu tỷ, mệnh đề này là tương đương
để ngắn hơn “? 2 R Q,” đọc “? 2 là vô lý.”

Kí hiệu số phức

Sự biểu lộ	biểu thị
C	tập hợp các số phức C chắc chắn “ ta ` bi | a, b P ru
Tôi	số ảo đơn vị i phần thực của chắc chắn “?´1 hay tôi2 “´1
Retzu “ một	z “ a ` bi
Imtzu “ b |	phần ảo của z “ a ` bi
z|=jz |	biểu diễn cực của z “ |z| cos jz ` i|z| tội jz
z| “ aa2 ` b2	độ lớn của z “ a ` bi
jz “ tan´1pb{aq	giai đoạn hoặc đối số của z “ a ` bi
z “ a ´ bi	phức liên hợp của z “ a ` bi

Machine Translated by Google

ký hiệu vectơ

Sự biểu lộ	biểu thị
Rn	tập hợp các vectơ n chiều
	một véc tơ
~v pvx,	vectơ trong ký hiệu thành phần
vyq vxı^`	vectơ trong ký hiệu vectơ đơn vị
vy ,^ }	vectơ trong ký hiệu chiều dài và hướng
~v}	chiều dài của vectơ ~v
=q }~v} q	góc của vectơ ~v tạo với trục x
v^ ~v / }~v}	vectơ đơn vị cùng hướng với ~v
~u	tích vô hướng của các vectơ ~u và ~v
¨~v ~u ^~v	tích chéo của các vectơ ~u và ~v

ký hiệu cơ học

biểu thị biểu thị	
xptq	vị trí của một đối tượng như là một chức năng của thời gian
vptq	vận tốc của một vật là một hàm của thời gian
aptq	gia tốc của một đối tượng như là một chức năng của thời gian
	khối lượng m của một vật
	một lực lượng
N~	lực bình thường
ffs	lực ma sát tĩnh
Ff k	động lực ma sát
Fg “ W~	lực hấp dẫn; trọng lượng của một vật
Ug	thế năng hấp dẫn
	Lực Fs của lò xo
	Chúng tôi năng lượng tiềm năng mùa xuân
~p	động lượng của vật chuyển động
K	động năng
qptq	vị trí góc của vật quay theo thời gian
wptq	vận tốc góc của một vật thể là một hàm của thời gian
aptq	gia tốc góc của một vật là một hàm của thời gian
Iobj	momen quán tính của vật
	mô-men xoắn T
	Động lượng góc L của một vật đang quay
Kr	động năng quay của vật quay

ký hiệu giải tích

biểu thị	biểu thị
8	vô cực
e, d	các chữ cái Hy Lạp epsilon và delta
f pxq	một hàm có dạng f : R Ñ R
limxÑ8 f pxq	giới hạn của f pxq khi x tiến đến vô cùng
lim xÑa f pxq	giới hạn của f pxq khi x tiến đến a từ bên phải
lim xÑa´f pxq	giới hạn của f pxq khi x tiến đến a từ bên trái
limxÑa f pxq	giới hạn của f pxq khi x tiến đến a
f 1 pxq	đạo hàm pxq của f pxq
f 2pxq	đạo hàm cấp hai của f
d dx pxq	toán tử đạo hàm
Hàm nguyên hàm fpxq	của f pxq
≥ f pxq dx	tích phân bất định của f pxq (spoiler: ≥ f pxq dx “ Fpxq ` C)
≥b Một f pxq dx	tích phân xác định của f pxq giữa x “ a và x “ b
Fpxq ˇb Một	thay đổi trong Fpxq giữa a và b: Fpxq ˇb Một “ Fpbq ´ Fpaq
ÿN k“1 sk	tổng của N số hạng s1 ` s2 `¨¨¨` sN
dãy an : N Ñ R,	còn được kí hiệu là pa0, a1 , a2, a3,... q
ÿ8 n“0	một chuỗi ∞ an, là tổng vô hạn của chuỗi an

Phụ lục C

Hằng số, đơn vị và tỷ lệ chuyển đổi

Trong phụ lục này, bạn sẽ tìm thấy một số bảng thông tin hữu ích mà bạn có thể cần khi giải các bài toán và vật lý.

Hằng số cơ bản của tự nhiên

Nhiều phương trình vật lý bao gồm các hằng số như các tham số của phương trình. Ví dụ, định luật vạn vật hấp dẫn của Newton nói rằng hợp lực giữa hai vật khối lượng M và m cách nhau một khoảng khoảng cách r là F_g “ $\frac{GMm}{r2}$ trong đó G là hằng số hấp dẫn của Newton.

Giá trị biểu tượng	Các đơn vị	Tên
g	6.673 84 ˆ 10´11 m3 kg´1s´2 hằng số hấp dẫn	
	9,806 65 « 9,81 m s´2 1,672	Gia tốc rơi tự do của trái đất
g	621 ˆ 10´27 kg 9,109 382	khối lượng proton
mp tôi	ˆ 10´31 kg NA 6,022 14076	khối lượng điện tử
ˆ 1023 mol´1 1,380 648 ˆ 10´23 J K´1 kB		Số avogadro
	J K´1 mol ´1 R 8,314 462 1	hằng số Boltzmann
1.256 637 ˆ 10´6 N A´2 8.854 187 ˆ 10´12 F m´1		hằng số khí R “ NAkB
μ0		tính thấm của không gian trống
#0		hằng số điện môi của không gian trống
c	299 792 458	tốc độ ánh sáng c „ $\frac{1}{?\ \overline{\mu 0\#0}}$
e	1,602 176 ˆ 10´19 C	điện tích cơ bản
h	6,626 069 ˆ 10´34 J s	Hằng số của Planck

Các đơn vị

Hệ thống đơn vị quốc tế (Système International) định nghĩa bảy đơn vị cơ bản để đo đại lượng vật lý.

Tên	Sym.	Đo	Sự định nghĩa
mét	m	chiều dài	Quãng đường ánh sáng đi được trong chân không trong một giây $\frac{1}{299792458th}$
thứ hai		thời gian	Thời gian để 9192631770 chuyển đổi trong trạng thái cơ bản của nguyên tử cesium-133.
kilôgam	kg	khối lượng	Được định nghĩa theo tốc độ ánh sáng c, an tần số chuyển tiếp nguyên tử của nguyên tử cesium 133, và hằng số Planck h.
Ampe		Dòng điện	Một ampe là cường độ dòng điện chạy qua trong hai sợi dây dài vô hạn đặt cách nhau cách nhau 1[m], để tạo ra một lực giữa chúng của 2 ˆ 10´7[N/m].
Kelvin	K	nhiệt độ	độ Kelvin là $\frac{1}{273.16}$ của nhiệt động lực học nhiệt độ điểm ba của nước.
nốt ruồi	mol	# nguyên tử	Một nốt ruồi là bao nhiêu nguyên tử carbon trong 0,012[kg] cacbon-12.
nến	cd	cường độ ánh sáng	Một candela được định nghĩa là cường độ sáng của nguồn đơn sắc có tần số và cường độ bức xạ cụ thể.

đơn vị phái sinh

Các đơn vị SI cơ sở bao gồm hầu hết các đại lượng cơ bản. Khác các đơn vị vật lý được định nghĩa là sự kết hợp của các đơn vị cơ bản.

Tên	Sym.	Đo	Định nghĩa	SI tương đương
Hertz	Hz	tần số		s´1
Newton	N	lực		kg m s´2
pascal	Pa	áp suất	n/m2	kg m´1 s´2
Joule	J	năng lượng, công, nhiệt	N m	kg m2 s´2
Watt	W	Công suất	J/s	kg m2 s´3
Coulomb	C	Điện tích		s A
vôn	V	Điện áp, điện thế		kg m2 s´3 A´1
Om	W	Điện trở, phản kháng	V/A	kg m2 s´3 A´2
Siemens	S	độ dẫn điện	A/V	kg´1 m´2 s3 A2
Farad	F	Điện dung	C/V	kg´1 m´2 s4 A2
Tesla	T	Cường độ từ trường		kg s´2 A´1
Henry	H	điện cảm	W s	kg m2 s´2 A´2
Weber	Wb	Từ thông	m2 _	kg m2 s´2 A´1

Các đơn vị khác và chuyển đổi

Chúng ta thường đo các đại lượng vật lý như chiều dài, trọng lượng và vận tốc bằng các đơn vị không chuẩn như feet, pound và dặm trên giờ.

Bảng sau đây liệt kê các tỷ lệ chuyển đổi được yêu cầu để chuyển đổi các đơn vị đo lường không chuẩn này thành các đơn vị SI.

Biểu tượng kích thước Tên Å 1[Å]			chuyển đổi
chiều dài Angstrom inch 1[in] = 2,54[cm]			= 10´10[m] = 0,1[nm]
	trong, " ft chân		1[ft] = 12[in] = 0,3048[m]
	yd sân 1[yd]= 3[ft] = 0,9144[m]		
	mi	dặm	1[mi] = 5280[ft] = 1609,344[m]
	nmi hải lý 1[nmi] = 1852[m]		
	ly-năm ánh sáng in2		1[ly] = 9.460 730 472 ˆ 1015[m]
khu vực	1[in2] = 6,452 ˆ 10´4[m2]	inch vuông	
	ft2 1[ft2] = 9,290 ˆ 10´2[m2]	foot vuông	
			1[m2] = 110.764[ft2]
		mẫu	1[ac] = 4840[yd2] = 4046,856[m2]
	ac	Anh ha	1[ha] = 10 000[m2]
	hà mi2	dặm vuông	1[mi2] = 2,589 988 ˆ 106[m2]
âm lượng	l	lít	1[L] = 1[dm3] = $\frac{1}{1000}$[m3]
	gal(Mỹ) gallon (chất		1[gal] = 3,785[L]
cân nặng	lb	lỏng)	1[lb] = 0,454[kg] = 453,592[g]
	t	pound tấn	1[t] = 1000[kg]
góc	rad ˝	độ	1[rẽ] = 2p[rad]
		radian	360[˝]=2p[rad]
	vòng quay	cách mạng	1[vòng] = 360[˝]=2p[rad]
	tốt nghiệp	gradian	1[grad]= $\frac{1}{400}$[vòng] = 0,9[˝]
thời gian	phút phút		1[phút] = 60[giây]
	h	giờ	1[h] = 60[phút] = 3600[s]
vận tốc	km/h km trên giờ 1[km/h] = dặm/giờ trên		$\frac{1}{3.6}$[m/s] = 0,2$\bar{7}$[m/s]
	giờ 1[mph] = 0,447[m/s] = 1,61[km/h]		
nhiệt độ ˝C ˝F		độ C	x[˝C] = px ` 273.15q[˝K]
		độ F	xr ˝Fs “ $\frac{5}{\text{px}}$ ` 459.67qr˝Ks
			xr ˝Fs “ $\frac{9}{9}$^{5}px ´ 32qr˝Cs
áp lực	ATM	thanh không	1ratms “ 101 325rPas
	quán ba	khí	1[thanh] =105[Pa]

Phụ lục D

hướng dẫn SymPy

Máy tính có thể rất hữu ích trong việc xử lý các biểu thức toán học phức tạp hoặc khi làm chậm các phép tính tẻ nhạt. Thông qua cuốn sách này, chúng tôi đã sử dụng SymPy để minh họa một số khái niệm từ toán học và vật lý. Bây giờ chúng ta sẽ xem xét tất cả các công cụ toán học và vật lý có sẵn thông qua dòng lệnh SymPy. Đừng lo lắng nếu bạn không phải là dân máy tính; chúng ta sẽ chỉ thảo luận về các khái niệm mà chúng ta đã trình bày trong cuốn sách và các lệnh máy tính mà chúng ta sẽ học rất giống với các phép toán mà bạn đã quen thuộc. Phần này cũng đóng vai trò là phần đánh giá cuối cùng về tài liệu được đề cập trong cuốn sách.

Giới thiệu

Bạn có thể sử dụng hệ thống đại số máy tính (CAS) để tính toán các biểu thức toán học phức tạp, giải các phương trình, thực hiện các quy trình tính toán và mô phỏng các hệ thống vật lý.

Tất cả các hệ thống đại số máy tính về cơ bản đều cung cấp cùng một chức năng, vì vậy bạn sử dụng hệ thống nào không quan trọng: có các hệ thống miễn phí như SymPy, Magma hoặc Octave và các hệ thống thương mại như Maple, MATLAB và Mathematica. Hướng dẫn này giới thiệu về SymPy, một hệ thống đại số máy tính tượng trưng được viết bằng ngôn ngữ lập trình Python. Trong một CAS tượng trưng, các số và phép toán được biểu diễn một cách tượng trưng, vì vậy các câu trả lời thu được là chính xác. Ví dụ, số ? 2 được biểu diễn trong SymPy dưới dạng đối tượng Pow(2,1/2), trong khi trong các hệ thống đại số máy tính số như Octave, số ? 2 được biểu diễn dưới dạng xấp xỉ 1.41421356237310 (số float). Đối với hầu hết các mục đích, phép tính gần đúng là được, nhưng đôi khi phép tính gần đúng có thể dẫn đến sự cố: float(sqrt(2))*float(sqrt(2)) = 2.00000000000000044 ‰ 2.

Vì SymPy sử dụng các biểu diễn chính xác nên bạn sẽ không bao giờ gặp phải những vấn đề như vậy: Pow(2,1/2)*Pow(2,1/2)“ 2.

Hướng dẫn này trình bày nhiều giải thích dưới dạng các đoạn mã. Đảm bảo tự mình thử các ví dụ mã bằng cách nhập các lệnh vào SymPy. Nó luôn luôn quan trọng để xác minh cho chính mình!

Sử dụng SymPy

Cách dễ nhất để sử dụng SymPy, với điều kiện là bạn đã kết nối với internet, là truy cập http://live.sympy.org. Bạn sẽ thấy một lời nhắc tương tác để bạn có thể nhập các lệnh của mình—ngay trong trình duyệt của bạn.

Nếu bạn muốn sử dụng SymPy trên máy tính của mình, trước tiên bạn phải cài đặt Python và gói Python sympy. Sau đó, bạn có thể mở dấu nhắc lệnh và bắt đầu phiên Python bằng cách sử dụng:

```
you@host> python
Python XYZ [GCC
 abc (Thông tin bản dựng)] trên nền tảng Nhập
"trợ giúp", "bản quyền" hoặc "giấy phép" để biết thêm thông tin. >>>
```

Dấu nhắc >>> cho biết bạn đang ở trong trình bao Python chấp nhận các lệnh Python. Nhập nội dung sau vào trình bao Python:

```
>>> từ nhập sympy * >>>
```

Lệnh từ sympy import * nhập tất cả các chức năng của SymPy vào không gian tên hiện tại. Tất cả các chức năng của SymPy hiện có sẵn cho bạn. Để thoát khỏi vỏ trăn, nhấn CTRL + D.

Để có trải nghiệm tốt hơn nữa, bạn có thể dùng thử jupyter notebook, đây là một giao diện web để truy cập trình bao Python. Tìm kiếm “jupyter notebook” trên web và làm theo hướng dẫn cài đặt dành riêng cho hệ điều hành của bạn. Nó hoàn toàn xứng đáng!

Mỗi phần trong phụ lục này bắt đầu bằng một câu lệnh nhập python cho các chức năng được sử dụng trong phần đó. Nếu bạn sử dụng câu lệnh từ sympy import * ở đầu mã của mình, thì bạn không cần chạy các câu lệnh nhập riêng lẻ này, nhưng tôi đã bao gồm chúng để bạn biết từ vựng SymPy nào được đề cập trong mỗi câu lệnh
phần.

Nguyên tắc cơ bản của toán học

Hãy bắt đầu bằng cách tìm hiểu về các đối tượng SymPy cơ bản và các thao tác chúng ta có thể thực hiện trên chúng. Chúng ta sẽ học các từ tương đương SymPy của nhiều động từ toán học như: “giải” (một phương trình), “khai triển” (một biểu thức), “to nhân tử” (một đa thức).

số

```
>>> từ sympy nhập sympify, S, evalf, N
```

Trong Python, có hai loại đối tượng số: ints và float.

```
>>> 3
3                                    # một int
>>> 3.0
3.0                                  # một cái phao
```

Các đối tượng số nguyên trong Python là một đại diện trung thực của tập hợp các số nguyên Z “ t..., ´2, ´1, 0, 1, 2, . . .u. Các số dấu phẩy động là các biểu diễn gần đúng của số thực R. Một số dấu phẩy động có 16 chữ số thập phân chính xác.

Cần đặc biệt cẩn thận khi chỉ định số hữu tỷ nếu bạn muốn nhận được câu trả lời chính xác. Nếu bạn cố gắng chia hai số, Python sẽ tính toán một xấp xỉ dấu phẩy động:

```
>>> 1/7
0,14285714285714285                  # một cái phao
```

Số dấu phẩy động 0,14285714285714285 là một xấp xỉ của số chính xác P Q. $\frac{1}{7}$ Phép xấp xỉ float có 16 deci dài vô hạn. Để có được mals trong khi mở rộng thập phân của một $\frac{1}{7}$ đại diện chính xác của $\frac{1}{7}$, bạn cần tạo biểu thức SymPy. Bạn có thể ký hiệu bất kỳ biểu thức nào bằng cách sử dụng hàm phím tắt S():

```
>>> S('1/7') # = sympify('1/7')
1/7                                  # = Hợp lý (1,7)
```

Lưu ý đầu vào cho S() được chỉ định dưới dạng chuỗi văn bản được phân tách bằng dấu ngoặc kép. Chúng ta có thể đạt được kết quả tương tự khi sử dụng S('1')/7 vì một đối tượng SymPy chia cho một int là một đối tượng SymPy.

Ngoại trừ toán tử chia phức tạp trong Python, các toán tử toán học và phép tors như phép cộng +, phép trừ sẽ -, nhân * khác hoạt động như bạn mong đợi. Cú pháp ** được sử dụng để biểu thị lũy thừa:

```
>>> 2**10                            # giống như S('2^10')
1024
```

Khi giải toán, tốt nhất là làm việc với các đối tượng SymPy, và đợi để tính toán câu trả lời số cuối cùng. Để có được một xấp xỉ bằng số của một đối tượng SymPy dưới dạng float, hãy gọi .evalf() của nó phương pháp:

```
>>> pi
số Pi
>>> pi.evalf()                       # = pi.n() = N(pi)
3.14159265358979
```

Phương thức .n() tương đương với .evalf(). Chức năng SymPy toàn cầu N() cũng có thể được sử dụng để tính toán các giá trị số. Bạn có thể dễ dàng thay đổi số chữ số của độ chính xác của xấp xỉ. Nhập pi.n(400) để có giá trị xấp xỉ từ p đến 400 số thập phân.

ký hiệu

```
>>> từ sympy nhập Ký hiệu, ký hiệu Python là
```

một ngôn ngữ văn minh nên không cần định nghĩa các biến trước khi gán giá trị cho chúng. Khi bạn viết a=3, bạn xác định một tên mới a và đặt nó thành giá trị 3. Giờ đây, bạn có thể sử dụng tên a trong các phép tính tiếp theo.

Hầu hết các phép tính SymPy thú vị đều yêu cầu chúng tôi xác định các ký hiệu, là các đối tượng SymPy để biểu diễn các biến và ẩn số. Để thuận tiện cho bạn, khi live.sympy.org khởi động, nó sẽ tự động chạy các lệnh sau:

```
>>> từ nhập sympy * >>> x, y,
z, t = biểu tượng ('xyz t') >>> k, m, n =
biểu tượng ('km n', số nguyên = True) >>> f, g, h = biểu
tượng ('fg h', cls=Hàm)
```

Câu lệnh đầu tiên nhập tất cả các hàm SymPy. Ba câu lệnh còn lại xác định một số ký hiệu chung x, y, z và t và một số ký hiệu khác có thuộc tính đặc biệt.

Lưu ý sự khác biệt giữa hai tuyên bố sau:

```
>>> x + 2
x + 2                            # một Thêm biểu thức
>>> p + 2
TênError: tên 'p' không được xác định Tên x
```

được định nghĩa là một ký hiệu, vì vậy SymPy biết rằng x+2 là một biểu thức; nhưng biến p không được xác định, vì vậy SymPy không biết phải làm gì với p+2. Để sử dụng p trong biểu thức, trước tiên bạn phải xác định nó dưới dạng ký hiệu: >>> p = Ký hiệu('p') #

```
giống như p = ký hiệu('p') >>> p + 2 p + 2 Bạn có thể xác định một
chuỗi các
biến                             # = Thêm(Ký hiệu('p'), Số nguyên(2))
```

sử dụng ký hiệu sau:

```
>>> a0, a1, a2, a3 = ký hiệu ('a0:4')
```

Bạn có thể sử dụng bất kỳ tên nào bạn muốn cho một biến, nhưng tốt nhất là bạn nên tránh các chữ cái Q,C,O,S,I,N và E vì chúng có những cách sử dụng trong SymPy: I là số ảo đơn vị i logarit tự chắc chắn đặc biệt “?´1, E là cơ sở của nhiên, S() là hàm biểu thị, N() được sử dụng để lấy xấp xỉ số và O được sử dụng cho ký hiệu big-O.

Biểu thức

```
>>> từ nhập sympy đơn giản hóa, nhân tố, mở rộng, thu thập
```

Bạn xác định các biểu thức SymPy bằng cách kết hợp các ký hiệu với các phép toán cơ bản và các chức năng khác:

```
>>> expr = 2*x + 3*x - sin(x) - 3*x + 42 >>> đơn giản
hóa(expr) 2*x - sin(x)                              # Đơn giản hóa biểu thức
+ 42
```

Chức năng rút gọn có thể được sử dụng trên bất kỳ biểu thức nào để đơn giản hóa nó. Các ví dụ bên dưới minh họa các hàm SymPy hữu ích khác tương ứng với các phép toán phổ biến trên các biểu thức:

```
>>> thừa số( x**2-2*x-8 ) (x -                      # nhân tử một đa thức
4)*(x + 2) >>> mở
rộng( (x-4)*(x+2) ) x**2 - 2 *x -                   # mở rộng và biểu thức
8 >>> thu
thập(x**2+x*b+a*x+a*b, x) x**2 + (a+b)*x +          # thu thập các điều khoản thích trong x
a*b
```

Để thay thế một giá trị đã cho thành một biểu thức, hãy gọi phương thức .subs(), chuyển vào một đối tượng từ điển python { key:val, ... } bằng các thay thế ký hiệu–giá trị mà bạn muốn thực hiện: >>> expr = sin (x) + cos(y) >>> expr sin(x) +

```
cos(y) >>> expr.subs({x:1, y:2})                    # định nghĩa một biểu thức
sin(1) +
cos(2) >>>
expr .subs({x:1, y:2}).n()                          # phụ. x=1,y=1 trong expr
0.425324148260754
                                                    # tính giá trị số
```

Lưu ý cách chúng tôi sử dụng .n() để lấy giá trị số của biểu thức.

Giải phương trình

```
>>> from sympy import giải quyết
```

Hàm giải quyết là đặc điểm chính trong SymPy. Chức năng vô cùng mạnh mẽ này biết cách giải tất cả các loại phương trình. Trong thực tế, giải có thể giải bất kỳ phương trình nào! Khi học sinh trung học tìm hiểu về hàm này, chúng thực sự tức giận—tại sao chúng lại dành 5 năm cuộc đời để học giải các phương trình khác nhau bằng tay, trong khi từ lâu đã có thứ giải này có thể giải tất cả các phép toán cho chúng? Đừng lo lắng, học toán không bao giờ là lãng phí thời gian.

Hàm giải quyết có hai đối số. Sử dụng giải (expr, var) để giải phương trình expr==0 cho biến var. Bạn có thể viết lại bất kỳ phương trình nào ở dạng expr==0 bằng cách chuyển tất cả các số hạng sang một vế của phương trình; lời giải cho Apxq “ Bpxq giống như lời giải cho Apxq ´ Bpxq “ 0.

Ví dụ: để giải phương trình bậc hai x2 ` 2x ´ 8 “ 0, hãy sử dụng

```
>>> giải( x**2 + 2*x - 8, x) [2, -4]
```

Trong trường hợp này, phương trình có hai nghiệm, vì vậy, giải trả về một danh sách. Kiểm tra xem x “ 2 và x “ ´4 có thỏa mãn phương trình x2 ` 2x ´ 8 “ 0.

Phần tốt nhất về giải và SymPy là bạn có thể nhận được các câu trả lời tượng trưng khi giải các phương trình. Thay vì giải một phương trình bậc hai cụ thể, chúng ta có thể giải tất cả các phương trình có thể có dạng ax2 ` bx ` c “ 0 bằng các bước sau: >>> a, b, c = symbol('ab c') >>> giải

```
( a*x**2 + b*x + c, x) [(-b+sqrt(b**2
- 4*a*c))/(2*a), (-b-sqrt(b* *2-4*a*c))/
 (2*a)]
```

Trong trường hợp này, giải đã tính nghiệm theo các ký hiệu a, b và c. Bạn sẽ có thể nhận ra các biểu thức trong giải pháp ´b˘ ?b2´4ac —đó là công thức bậc hai x1,2 “

2a .

Để giải một hệ phương trình, bạn có thể cấp phép giải với danh sách các phương trình làm đối số đầu tiên và chỉ định danh sách ẩn số mà bạn muốn giải làm đối số thứ hai. Ví dụ: để tìm x và y trong hệ phương trình x ` y “ 3 và 3x ´ 2y “ 0, hãy sử dụng >>> giải([x + y - 3, 3*x - 2*y], [x , y]) {x: 6/5, y: 9/5}

Chức năng giải quyết giống như một con dao của quân đội Thụy Sĩ mà bạn có thể sử dụng để giải quyết mọi loại vấn đề. Giả sử bạn muốn hoàn thành bình phương trong biểu thức x2 ´ 4x ` 7, nghĩa là bạn muốn tìm các hằng số h và k sao cho x2 ´ 4x ` 7 “ px ´ hq2 ` k. Không có chức năng "hoàn thành bình phương" đặc biệt trong SymPy, nhưng bạn có thể gọi giải phương trình px ´ hq2 ` k ´ px2 ´ 4x ` 7q “ 0 để tìm h và k chưa biết:

```
>>> h, k = biểu tượng('h k')
>>> giải( (xh)**2 + k - (x**2-4*x+7), [h,k] ) [(2 , 3)] >>>
 mở                                              # vậy h = 2 và k = 3
rộng( (x-2)**2+3 ) x**2 - 4*x                    # xác minh...
+ 7
```

Tìm hiểu các lệnh SymPy cơ bản và bạn sẽ không bao giờ phải chịu đựng một phép tính số học tẻ nhạt nào khác được thực hiện một cách tỉ mỉ bằng tay nữa!

Các chức năng hợp lý

>>> from sympy import together, apart Theo mặc

định, SymPy sẽ không kết hợp hoặc tách các biểu thức hữu tỉ. Bạn cần sử dụng cùng nhau để tính toán một cách tượng trưng phép cộng các phân số:

```
>>> a, b, c, d = ký hiệu('abc d')
>>> a/b + c/
da/b + c/
d >>> cùng nhau(a/b + c/
d) (a* d + b*c)/(b*d)
```

Ngoài ra, nếu bạn có một biểu thức hữu tỉ và muốn chia tử số cho mẫu số, hãy sử dụng hàm tách: >>> apart((x**2+x+4)/

(x+2)) x - 1 + 6 /(x + 2)

Hàm mũ và logarit Số Euler e “

2.71828 . . . được định nghĩa theo một trong nhiều cách,

e “ limnÑ8 ˆ 1 ` $\frac{1}{n}$ ˙n “ limÑ0 1{e p1 ` eq “ ÿ8 $\frac{1}{N!}$, n“0

và được ký hiệu là E trong SymPy. Sử dụng exp(x) tương đương với E**x.

Các hàm log và ln đều tính logarit cơ số e: >>> log(E**3)

giống như ln(E**3)

3

Theo mặc định, SymPy giả định đầu vào cho các hàm như exp và log là các số phức, do đó, nó sẽ không mở rộng các biểu thức logarit nhất định. Tuy nhiên, cho SymPy biết rằng các đầu vào là số thực dương sẽ làm cho việc mở rộng hoạt động: >>> x, y

```
= symbol('x y') >>>
expand( log(x*y) )
log(x*y)
>>> a, b = biểu tượng('a b', positive=True)
>>> mở rộng( log(a*b) )
log(a) + log(b)
```

đa thức

Hãy xác định một đa thức P với nghiệm tại x “ 1, x “ 2, và x “ 3:

```
>>> P = (x-1)*(x-2)*(x-3)
>>> P
(x - 1)*(x - 2)*(x - 3)
```

Để xem phiên bản mở rộng của đa thức, hãy gọi phương thức mở rộng của nó:

```
>>> mở rộng(P)
x**3 - 6*x**2 + 11*x - 6
```

Khi đa thức được biểu diễn ở dạng khai triển Ppxq “ x3 ´ 62 ` 11x ´ 6, chúng ta không thể xác định ngay nghiệm của nó. Đây là lý do tại sao dạng nhân tử Ppxq“px ´ 1qpx ´ 2qpx ´ 3q được ưa chuộng hơn. Để phân tích thành nhân tử của một đa thức, hãy gọi phương thức nhân tử của nó hoặc đơn giản hóa nó:

```
>>> thừa số(P) (x - 1)*(x -
2)*(x - 3) >>>
đơn giản hóa(P) (x - 1)* (x - 2)*(x - 3)
```

Nhớ lại rằng nghiệm của đa thức Ppxq được định nghĩa là nghiệm của phương trình Ppxq “ 0. Chúng ta có thể sử dụng chức năng giải để tìm nghiệm của đa thức: >>> roots = Solve(P,x)

```
>>> rễ
[1, 2, 3]
# hãy kiểm tra xem P có bằng (x-1)(x-2)(x-3) >>>
rút gọn ( P - (x-roots[0])*(x-roots[1 ])*(x-root[2]) )
0
```

Kiểm tra sự bằng nhau

Trong ví dụ trước, chúng ta đã sử dụng hàm rút gọn trên hiệu của hai biểu thức để kiểm tra xem chúng có bằng nhau hay không. Cách kiểm tra đẳng thức này hoạt động vì P “ Q khi và chỉ khi P ´ Q “ 0.
Để biết liệu P có Q hay không, chúng ta có thể tính toán đơn giản hóa (PQ) và xem liệu kết quả có bằng 0 hay không. Đây là cách tốt nhất để kiểm tra xem hai biểu thức có bằng nhau trong SymPy hay không vì nó thử tất cả các phép đơn giản hóa có thể có khi so sánh các biểu thức. Dưới đây là danh sách các cách khác để kiểm tra xem hai đại lượng có bằng nhau hay không, với các trường hợp ví dụ không phát hiện được đẳng thức:

```
>>> P = (x-5)*(x+5)
>>> Q = x**2 - 25
>>> P == Q                                          # thất bại
SAI
>>> P - Q == 0                                      # thất bại
SAI
>>> rút gọn(P - Q) 0                                # làm!

>>> sin(x)**2 + cos(x)**2 == 1                      # thất bại
SAI
>>> đơn giản hóa( sin(x)**2 + cos(x)**2 - 1 )       # làm!
0
```

lượng giác

```
từ sympy nhập sin, cos, tan, trigsimp, expand_trig
```

Hàm lượng giác sin và cos nhận đầu vào theo đơn vị radian: >>> sin(pi/6) 1/2

>>> cos(pi/6)

sqrt(3)/2

Đối với góc theo độ, bạn cần hệ số chuyển đổi >>> sin(30*pi/180) # $\frac{P}{180}$ [rad/˝]:

30 độ = pi/6 rads 1/2

Các hàm lượng giác nghịch đảo sin´1pxq “ arcsinpxq và cos´1pxq “ arccospxq được sử dụng như sau:

```
>>> asin(1/2)
pi/6
>>> acos(sqrt(3)/2)
pi/6
```

Nhớ lại rằng tanpxq “ $\frac{\text{sinpxq}}{\text{cospxq}}$. Hàm nghịch đảo của tanpxq là tan´1pxq “ arctanpxq “

atan(x) >>> tan(pi/6) 1/sqrt(3) >>>

atan(1/sqrt(3))

pi/6 Hàm

= (1/2)/(sqrt(3)/2)

acos trả về các góc trong

phạm

vi r0, ps, trong khi asin và atan trả về các góc trong phạm vi r´p Dưới đây là một số đặc điểm lượng giác mà SymPy biết: trang 2 , 2 S.

```
>>> sin(x) == cos(x - pi/2)
ĐÚNG VẬY
>>> đơn giản hóa( sin(x)*cos(y)+cos(x)*sin(y) )
sin(x + y)
>>> e = 2*sin(x)**2 + 2*cos( x)**2
>>> trigsimp(e) 2

>>> trigsimp(log(e))
log(2*sin(x)**2 + 2*cos(x)**2)
>>> trigsimp(log(e), deep=True)
log(2)
>>> đơn giản hóa( sin(x)**4 - 2*cos(x)**2*sin(x)**2 + cos(x)**4 )
cos(4*x)/2 + 1/ 2
```

Chức năng trigsimp về cơ bản thực hiện công việc tương tự như chức năng đơn giản hóa.

Nếu thay vì đơn giản hóa, bạn muốn mở rộng một biểu thức trig, bạn nên sử dụng expand_trig, bởi vì mở rộng mặc định sẽ không chạm vào các hàm trig: >>> expand(sin(2*x)) sin(2*x)

>>> expand_trig (sin(2*x))
# =

expand(sin(2*x), trig=True) 2*sin(x)*cos(x)

Machine Translated by Google

Số phức

```
>>> from sympy nhập I, re, im, abs, arg, liên hợp
```

Xét phương trình bậc hai x2 “ ´1. Không có nghiệm thực cho phương trình này, nhưng chúng ta có thể định nghĩa một số ảo i “ ?´1 (ký hiệu là I trong SymPy) thỏa mãn phương trình này:

```
>>> Tôi * tôi
-1
>>> giải ( x**2 + 1    , x)
[I, -I]
```

Các nghiệm là x “ i và x “ ´i, và quả thực chúng ta có thể xác minh rằng 2 ` 1 “ 0 và p´iq2 ` 1 “ 0 2 “´1.

vì ii Các số phức C được định nghĩa là ta ` bi | a, b P ru. cốm số plex chứa một phần thực và một phần ảo:

```
>>> z = 4 + 3*I
>>> z
4 + 3*I
>>> re(z)

4 >>> im(z)
3
```

Biểu diễn cực của một số phức là z“|z|=q“|z|eiq. Đối với một số phức z “ a ` bi, số lượng |z| “? a2 ` b2 được gọi là giá trị tuyệt đối của z, và q là pha hoặc đối số của nó: >>> Abs(z)

```
5
>>> arg(z)
atan(3/4)
```

Số phức liên hợp của z “ a ` bi là số z “ a ´ bi, có cùng giá trị tuyệt đối với z nhưng ngược pha: >>> liên hợp(z)

```
4 - 3*tôi
```

Liên hợp phức rất quan trọng để tính giá trị tuyệt đối của z (|z| “ ? zz) và để chia cho z ($\frac{1}{z}$ “ $\frac{\bar{z}}{|z|^2}$).

Công thức của Euler

```
>>> from sympy import mở rộng, viết lại
```

Công thức Euler cho thấy một mối quan hệ quan trọng giữa hàm mũ ex và hàm lượng giác sinpxq và cospxq:

ix “ cos x ` i sin x. e

Để có được kết quả này trong SymPy, bạn phải xác định rằng số x là số thực và cũng cho expand biết rằng bạn quan tâm đến các phép mở rộng phức tạp:

```
>>> x = biểu tượng('x', real=True) >>>
expand(exp(I*x), complex=True) cos(x) +
I*sin(x) >>>
re( exp(I *x) ) cos(x)
>>>
im( exp(I*x) ) sin(x)
```

Về cơ bản, cospxq là phần thực của eix và sinpxq là phần ảo của eix. Cái gì? Tôi biết điều đó thật kỳ lạ, nhưng những điều kỳ lạ chắc chắn sẽ xảy ra khi bạn nhập các số ảo vào các hàm.

giải tích

Giải tích là nghiên cứu về các tính chất của các hàm. Các hoạt động của phép tính được sử dụng để mô tả hành vi giới hạn của các hàm, tính toán tốc độ thay đổi của chúng và tính diện tích bên dưới đồ thị của chúng. Trong phần này, chúng ta sẽ tìm hiểu về các hàm SymPy để tính toán giới hạn, đạo hàm, tích phân và tổng.

vô cực

```
from sympy import oo
```

Biểu tượng vô cực được ký hiệu là oo (hai chữ thường os) trong SymPy. Trong vô hạn không phải là một con số mà là một quá trình: quá trình đếm mãi. Do đó, 8 ` 1 “ 8, 8 lớn hơn mọi số hữu hạn và 1{8 là một số nhỏ vô hạn. Sympy biết cách xử lý chính xác vô cực trong các biểu thức:

```
>>> oo+1
ôi
>>> 5000 < ồ
ĐÚNG VẬY
>>> 1/oo 0
```

Hạn mức

```
từ giới hạn nhập sympy Chúng
```

tôi sử dụng các giới hạn để mô tả, với độ chính xác toán học, số lượng lớn vô hạn, số lượng nhỏ vô hạn và quy trình với nhiều bước hữu hạn.

Số e được định nghĩa là giới hạn e “ limnÑ8 ˆ 1 ` n ˙n : (1 / n)

```
>>> giới hạn( (1+1/n)**n, n, oo)
e            # = 2,71828182845905
```

Biểu thức giới hạn này mô tả tỷ lệ tăng trưởng hàng năm của một khoản vay với lãi suất danh nghĩa 100% và lãi kép vô hạn. Vay 1000 đô la trong chương trình như vậy và bạn sẽ nợ 2718,28 đô la sau đó một năm.

Các giới hạn cũng hữu ích để mô tả hành vi của các chức năng. Xem xét chức năng fpxq “ $\frac{1}{x}$. Lệnh giới hạn cho chúng ta thấy những gì xảy ra với fpxq gần x “ 0 và khi x tiến tới vô cùng:

```
>>> giới hạn( 1/x, x, 0, dir="+")
ôi
>>> giới hạn( 1/x, x, 0, dir="-")
-oo
>>> giới hạn( 1/x, x, oo)
0
```

Khi x trở nên lớn hơn và lớn hơn, phân số ngày càng $\frac{1}{x}$ trở nên nhỏ hơn nhỏ hơn. Trong giới hạn mà x tiến đến vô cùng, bằng 0: $\frac{1}{x}$ cách tiếp cận limxÑ8 và các $\frac{1}{x}$ “ 0. Mặt khác, khi x càng nhỏ giá trị dương nhỏ hơn, biểu thức limxÑ0` “ 8. Khi $\frac{1}{x}$ trở nên vô tận: x tiến dần $\frac{1}{x}$ đến 0 từ bên trái, ta có limxÑ0´ “´8 $\frac{1}{x}$. Nếu những tính toán này không rõ ràng với bạn, hãy nghiên cứu đồ thị của fpxq $\frac{1}{x}$.

“ Dưới đây là một số ví dụ khác về giới hạn:

```
>>> giới hạn(sin(x)/x, x, 0)
1
>>> giới hạn(sin(x)**2/x, x, 0)
0
>>> limit(exp(x)/x**100,x,oo) # cái nào lớn hơn e^x hay x^100 ?
ôi                                 # exp f >> tất cả poly f cho x lớn
```

Các dẫn xuất

Hàm đạo hàm, ký hiệu là tốc độ thay ^{1}pxq, $\frac{đ}{dx}$fpxq, $\frac{df}{\text{hoặc } dx}$, $\frac{đê}{dx}$, mô tả đổi của hàm fpxq. Hàm SymPy diff com đặt đạo hàm của bất kỳ biểu thức nào:

```
>>> khác biệt(x**3, x)
3*x**2
```

Hoạt động phân biệt biết quy tắc sản phẩm rfpxqgpxqs1 “ f ^{1}pxqgpxq ` fpxqg1 pxq, quy tắc chuỗi fpgpxqq1 “ f 1 pgpxqqg1 pxq và “ quy tắc thương ” $\frac{fpxq}{gpxq}$ 1 $\frac{f^1 pxqgpxq´f pxqg1 pxq}{gpxq2}$:

```
>>> khác biệt( x**2*sin(x), x )
2*x*sin(x) + x**2*cos(x)
>>> diff( sin(x**2), x )
cos(x**2)*2*x
>>> khác biệt( x**2/sin(x), x )
(2*x*sin(x) - x**2*cos(x))/sin(x)**2
```

Đạo hàm cấp hai của hàm f là diff(f,x,2):

```
>>> khác biệt(x**3, x, 2)          # giống như diff(diff(x**3, x), x)
6*x
```

Các tiếp tuyến

Tiếp tuyến của hàm số fpxq tại x “ x0 là đường thẳng đi qua các điểm px0, fpx0qq và có cùng hệ số góc với hàm số tại điểm đó. Tiếp tuyến của hàm số fpxq tại điểm x “ x0 được mô tả bởi phương trình

$$T1pxq “ fpx0q ` f ^1px0qpx ´ x0q.$$

Phương trình của tiếp tuyến với fpxq là gì “ $\frac{1}{2}$x2 tại x0 “ 1?

```
>>> f = S('1/2')*x**2
>>>
fx**2/2
>>> df = diff(f, x)
>>> df
x
>>> T_1 = f.subs({x:1}) + df.subs({x:1})*(x - 1)
>>> T_1
x - 1/2                  # y = x - 1/2
```

Tiếp tuyến T1pxq có cùng giá trị và hệ số góc với hàm số fpxq tại x “ 1:

```
>>> T_1.subs({x:1}) == f.subs({x:1})
ĐÚNG VẬY
>>> diff(T_1, x).subs({x:1}) == diff(f, x).subs({x:1})
ĐÚNG VẬY
```

Xem Hình 5.10 trang 335.

Tối ưu hóa

Nhớ lại phép thử đạo hàm cấp hai tìm cực đại và cực tiểu của hàm số đã học ở trang 351.

Hãy tìm các điểm cực trị của hàm số fpxq “ x3 ´ 2x2 ` x và sử dụng thông tin từ đạo hàm cấp hai của nó để tìm giá trị cực đại của hàm số trên khoảng x P r0, 1s.

```
>>> x = Ký hiệu('x') >>>
f = x**3-2*x**2+x
>>> diff(f, x)
3*x**2 - 4*x + 1
>>> sols = giải quyết ( diff(f,x), x) >>>
sols
```

```
[1/3,
1] >>> diff(diff(f,x), x).subs( {x:sols[0]} )
-2
>>> diff(diff(f,x), x).subs( {x:sols[1]} ) 2
```

Nó sẽ giúp nhìn vào đồ thị của chức năng này. Điểm x “ là điểm cực đại cục bộ vì nó là điểm tới hạn của fpxq mà độ cong là âm, có nghĩa là fpxq trông giống như đỉnh của một ngọn núi 1s đạt tại 3x .“ Giá trị lớn nhất của fpxq trên khoảng x P r0, $\frac{1}{3}$

f ´ 1 3 ¯ “ $\frac{4}{27}$. Điểm x “ 1 là điểm cực tiểu cục bộ vì nó là điểm tới hạn có độ cong dương, nghĩa là fpxq giống như đáy của thung lũng tại x “ 1.

Tích phân

Trong SymPy, chúng tôi sử dụng integration(f, x) để lấy hàm tích phân Fpxq của bất kỳ hàm fpxq nào: Fpxq “ ≥x 0 fpuq du.

```
>>> tích phân(x**3,
x)
x**4/4 >>> tích

phân(sin(x), x) -cos(x)
>>> tích phân(ln(x), x) x*log (x) - x
```

Đây được gọi là tích phân không xác định vì các giới hạn của tích phân không được xác định.

Ngược lại, một tích phân xác định tính diện tích dưới fpxq bằng giữa x “ a và x “ b. Sử dụng integration(f, (x,a,b)) để tính các tích phân xác định có dạng Apa, bq “ ≥b Một fpxq dx:

```
>>> tích hợp(x**3, (x,0,1)) 1/4
                      # diện tích dưới x^3 từ x=0 đến x=1
```

Chúng ta có thể có cùng diện tích bằng cách tính tích phân không xác định Fpcq “ ≥c 0 fpxq dx, sau đó sử dụng Apa, bq “ b Một “ Fpbq ´ Fpaq: Fpxq ˇ

```
>>> F = integration(x**3, x)
>>> F.subs({x:1}) - F.subs({x:0}) 1/4
```

Tích phân tương ứng với phép tính diện tích có dấu:

```
>>> integration(sin(x), (x,0,pi))
2
>>> tích phân(sin(x), (x,pi,2*pi)) -2

>>> tích phân(sin(x), (x,0,2*pi)) 0
```

Trong nửa đầu của chu kỳ 2p của nó, đồ thị của sinpxq nằm phía trên trục x, vì vậy nó có đóng góp tích cực vào diện tích dưới đường cong. Trong nửa sau của chu kỳ của nó (từ x “ p đến x “ 2p), sinpxq nằm dưới trục x, vì vậy nó đóng góp diện tích âm. Vẽ đồ thị của sinpxq để xem điều gì đang xảy ra.

Định lý cơ bản của giải tích

Tích phân là "phép toán nghịch đảo" của đạo hàm. Nếu bạn thực hiện phép toán tích phân theo sau là phép toán đạo hàm trên một hàm nào đó, bạn sẽ nhận được hàm tương tự:

$$\left(\frac{d}{dx} \circ \int dx\right) f(x) = \frac{d}{dx}\int_c^x f(u)\,du = f(x).$$

```
>>> f = x**2
>>> F = tích phân(f, x)
>>> F
x**3/3             # + C
>>> diff(F, x)
x**2
```

Ngoài ra, nếu bạn tính đạo hàm của một hàm theo sau là tích phân, bạn sẽ thu được hàm ban đầu fpxq (đến một hằng số):

$$\left(\int dx \circ \frac{d}{dx}\right) f(x) = \int_c^x f'(u)\,du = f(x) + C.$$

```
>>> f = x**2
>>> df = diff(f, x)
>>> df
2*x
>>> tích hợp(df, x)
x**2    # + C
```

Định lý cơ bản của giải tích rất quan trọng vì nó cho chúng ta biết cách giải các phương trình vi phân. Nếu chúng ta phải giải fpxq trong phương trình vi phân $\frac{d}{dx}f(x) = g(x)$, chúng ta có thể lấy tích phân ở cả hai vế của phương trình để được đáp số $f(x) = \int g(x)\,dx + C$.

trình tự

Chuỗi là các hàm lấy số nguyên làm đầu vào. Thay vì các đầu vào liên tục $x \in \mathbb{R}$, các dãy lấy số tự nhiên $n \in \mathbb{N}$ làm đầu vào. Chúng tôi biểu thị các chuỗi dưới dạng ký hiệu hàm apnq thay vì thông thường.

Chúng tôi xác định một chuỗi bằng cách chỉ định một biểu thức cho thuật ngữ thứ n của nó :

```
>>> a_n = 1/n
>>> b_n = 1/giai thừa(n)
```

Thay thế giá trị mong muốn của n để xem giá trị của thuật ngữ thứ n :

```
>>> a_n.subs({n:5})
1/5
```

Cú pháp hiểu danh sách Python [mục cho mục trong danh sách] có thể được sử dụng để in các giá trị chuỗi cho một số phạm vi chỉ số: >>>

```
[ a_n.subs({n:i}) for i in range(0,8) ] [oo, 1,
 1/2, 1/3, 1/4, 1/5, 1/6, 1/7] >>>
[ b_n.subs({n:i}) cho i trong phạm vi(0, 8) ]
 [1, 1, 1/2, 1/6, 1/24, 1/120, 1/720, 1/5040]
```

Quan sát rằng an không được xác định chính xác cho n “ 0 do $\frac{}{1\ 0}$ là một bộ phận lỗi bằng 0. Nói một cách chính xác, chúng ta nên nói tập xác định của an là số tự nhiên dương của an : N` Ñ R. Hãy quan sát hàm giai thừa n nhanh như thế nào! “ 1 ¨ 2 ¨ 3 ¨¨¨pn ´ 1q ¨ n tăng: 7! “5040, 10! “3628800, 20! ° 1018.

Chúng ta thường quan tâm đến việc tính giới hạn của dãy là n Ñ 8. Điều gì xảy ra với các số hạng trong dãy khi n trở nên lớn? >>> giới

```
hạn(a_n, n, oo)
0
>>> giới hạn(b_n, n, oo)
0
```

Cả một “ $\frac{1}{N}$ và bạn “ n! $\frac{1}{}$hội tụ về 0 là n Ñ 8.

Nhiều đại lượng toán học quan trọng được định nghĩa là biểu thức giới hạn. Một ví dụ thú vị để xem xét là số p, được định nghĩa là diện tích của hình tròn có bán kính 1. Chúng ta có thể tính gần đúng diện tích của hình tròn đơn vị bằng cách vẽ một đa giác đều có nhiều cạnh xung quanh hình tròn. Tách đa giác đều n cạnh thành các mảnh ghép tam giác giống hệt nhau, chúng ta có thể thu được công thức tính diện tích An (xem lời giải cho P1.36).

Trong giới hạn là n Ñ 8, phép tính gần đúng của đa giác n cạnh với diện tích của hình tròn đơn vị trở nên chính xác:

```
>>> A_n = n*tan(2*pi/(2*n))
>>> giới hạn(A_n, n,
oo) pi
```

Loạt

Giả sử chúng ta được cho một dãy an và chúng ta muốn tính tổng của tất cả các giá trị trong dãy này ∞8 an. Sê-ri là tổng của các se quences. Tính tổng các giá trị của một dãy an : N Ñ R tương tự như lấy tích phân của hàm f : R Ñ R.

Để làm việc với chuỗi trong SymPy, hãy sử dụng hàm tổng có cú pháp tương tự như hàm tích hợp:

```
>>> a_n = 1/n >>>
b_n = 1/giai thừa(n) >>> tổng
(a_n, [n, 1, oo])
ôi
>>> tổng (b_n, [n, 0, oo])
e
```

Ta nói chuỗi ∞ an phân kỳ đến vô cùng (hoặc phân kỳ) trong khi chuỗi ∞ bn hội tụ (hoặc hội tụ). Khi chúng ta cộng ngày càng nhiều số hạng của dãy bn, tổng càng ngày càng tiến gần đến một số hữu hạn nào đó. Trong trường hợp này, tổng vô hạn $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{N!}$ hội tụ đến số e “ 2.71828 . . ..

Lệnh tính tổng rất hữu ích vì nó cho phép chúng ta tính các tổng vô hạn, nhưng đối với hầu hết các ứng dụng thực tế, chúng ta không cần lấy vô số số hạng trong một chuỗi để có được một xấp xỉ tốt. Đây là lý do tại sao các chuỗi rất gọn gàng: chúng đại diện cho một cách tuyệt vời để đạt được các giá trị gần đúng.

Sử dụng các lệnh Python tiêu chuẩn, chúng ta có thể có được giá trị gần đúng của e chính xác đến sáu chữ số thập phân bằng cách tính tổng 10 số hạng trong chuỗi:

```
>>> nhập toán học
>>> def b_nf(n):
        return 1.0/math.factorial(n)
>>> sum( [b_nf(n) for n in range(0,10)] ) 2.718281
52557319 >>> E.evalf()

2.718281 82845905              # giá trị đích thực
```

Dòng Taylor Đợi

đã, còn nữa! Chúng ta không chỉ có thể sử dụng chuỗi để tính gần đúng số, mà còn có thể sử dụng chúng để tính gần đúng các hàm.

Chuỗi lũy thừa là chuỗi có các số hạng chứa các lũy thừa khác nhau của biến x. Số hạng thứ n trong một chuỗi lũy thừa là một hàm của cả chỉ số thứ tự n và biến đầu vào x.

Ví dụ, chuỗi luỹ thừa của hàm exppxq “ ex là

$$\exp(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{N!}.$$

IMHO, đây là một trong những ý tưởng quan trọng nhất trong giải tích: bạn có thể tính giá trị của expp5q bằng cách lấy tổng vô hạn các số hạng trong chuỗi luỹ thừa với x “ 5:

```
>>> exp_xn = x**n/giai thừa ( n) >>>
tổng kết( exp_xn.subs({x:5}), [n, 0,
oo] ).evalf() 148.413159102577
```

```
>>> exp(5).evalf()
148.413159102577              # giá trị đích thực
```

Lưu ý rằng SymPy thực sự đủ thông minh để nhận ra rằng chuỗi vô hạn mà bạn đang tính toán tương ứng với biểu thức dạng đóng e5:

```
>>> tổng kết( exp_xn.subs({x:5}), [n, 0, oo])
hết hạn(5)
```

Lấy ít nhất 35 số hạng trong chuỗi là đủ để có được một xấp xỉ e chính xác đến 16 chữ số thập phân:

```
>>> nhập toán học                          # làm lại chỉ bằng python
>>> def exp_xnf(x,n):
        trả lại x**n/math.factorial(n)
>>> tổng( [exp_xnf(5.0,i) cho tôi trong phạm vi(0,35)] )
148.413159102577
```

Các hệ số trong chuỗi lũy thừa của một hàm (còn được gọi là chuỗi Taylor) phụ thuộc vào giá trị của các đạo hàm bậc cao của chức năng. Công thức cho số hạng thứ n trong chuỗi Taylor của fpxq được mở rộng tại x “ c là anpxq $\frac{\text{f pnqpcq}}{\text{N!}}$ px ´ cqn, trong đó f pnqpcq là “ giá trị của đạo hàm bậc n của fpxq được đánh giá tại x “ c. thuật ngữ Chuỗi Maclaurin đề cập đến các khai triển của chuỗi Taylor tại x “ 0.

Chuỗi hàm SymPy là một cách thuận tiện để lấy chuỗi của bất kỳ hàm nào. Chuỗi cuộc gọi (expr,var,at,nmax) sẽ hiển thị bạn mở rộng chuỗi expr gần var=at lên đến sức mạnh nmax:

```
>>> chuỗi( sin(x), x, 0, 8)
x - x**3/6 + x**5/120 - x**7/5040 + O(x**8)
>>> chuỗi ( cos(x), x, 0, 8)
1 - x**2/2 + x**4/24 - x**6/720 + O(x**8)
>>> chuỗi( sinh(x), x, 0, 8)
x + x**3/6 + x**5/120 + x**7/5040 + O(x**8)
>>> chuỗi ( cosh(x), x, 0, 8)
1 + x**2/2 + x**4/24 + x**6/720 + O(x**8)
```

Một số chức năng không được xác định tại x “ 0, vì vậy chúng tôi mở rộng chúng tại một giá trị khác của x. Ví dụ: chuỗi lũy thừa của lnpxq mở rộng tại x “ 1 là

```
>>> chuỗi(ln(x), x, 1, 6) x -          # Chuỗi Taylor của ln(x) tại x=1
x**2/2 + x**3/3 - x**4/4 + x**5/5 + O(x* *6)
```

Ở đây, kết quả mà SymPy trả về là sai lệch. Chuỗi Taylor của lnpxq mở rộng tại x “ 1 có các số hạng có dạng px ´ 1qn:

$$\text{lnpxq“px ´ 1q ´ } \frac{\text{px ´ 1q2}}{2} \text{ ` } \frac{\text{px ´ 1q3}}{3} \text{ ´ } \frac{\text{px´ 1q4}}{4} \text{ ` } \frac{\text{px´ 1q5}}{5} \text{ `……} .$$

Xác minh đây là công thức chính xác bằng cách thay thế x “ 1. SymPy trả về một câu trả lời dưới dạng tọa độ so với x “ 1.

Thay vì mở rộng lnpxq xung quanh x “ 1, chúng ta có thể thu được một đẳng thức biểu thức tương tự nếu chúng ta mở rộng lnpx `1q xung quanh x “ 0:

```
>>> chuỗi(ln(x+1), x, 0, 6) # Chuỗi Maclaurin của ln(x+1) x - x**2/2 + x**3/3
- x**4/4 + x**5/5 + O(x**6)
```

vectơ

Một vectơ ~v P Rn là một bộ n số thực. Ví dụ, hãy xem xét một vectơ có ba thành phần:

~v " pv1, v2, v3q P R3.

Để chỉ định vector~v, chúng ta chỉ định các giá trị cho ba thành phần v1, v2 và v3 của nó.

Ma trận AP Rmˆn là một mảng hình chữ nhật các số thực có m hàng và n cột. Một vectơ là một loại ma trận đặc biệt; bạn có thể coi vectơ ~v P Rn là ma trận 1 ˆ n. Do sự tương đương này giữa vectơ và ma trận, trong SymPy, chúng tôi sử dụng các đối tượng Ma trận để biểu diễn vectơ.

Đây là cách chúng ta định nghĩa các vectơ và tính toán các thuộc tính của chúng: >>> u = Matrix([4,5,6])

```
>>> bạn
 [4, 5, 6]                       #3-vectơ
>>> u[0]                         # lập chỉ mục dựa trên 0 cho các mục nhập
4
>>> u.norm()                     # chiều dài của bạn
sqrt(77)
>>> uhat = u/u.norm()            # vectơ đơn vị trong cùng thư mục với u
>>> uh
 [4/sqrt(77), 5/sqrt(77), 6/sqrt(77)] >>>
uhat.norm() 1
```

chấm sản phẩm

Tích vô hướng của 3 vectơ ~u và ~v có thể được định nghĩa theo hai cách:

~u ¨~v " uxvx ` uyvy ` uzvz " }~u}}~v} cospjq PR ,
looooooooooomoooooooooooon looooooooooooon
def đại số. độ nét hình học

trong đó j là góc giữa các vectơ ~u và ~v. Trong SymPy,

```
>>> u = Ma trận([ 4,5,6]) >>>
v = Ma trận([-1,1,2]) >>>
u.dot(v)
13
```

Chúng ta có thể kết hợp các công thức đại số và hình học cho dấu chấm tích để thu được cosin của góc giữa các vectơ

$$\cos(\varphi) = \frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{\|\vec{u}\|\|\vec{v}\|} = \frac{u_xv_x + u_yv_y + u_zv_z}{\|\vec{u}\|\|\vec{v}\|},$$

và sử dụng hàm acos để tìm số đo góc:

```
>>> acos(u.dot(v)/(u.norm()*v.norm())).evalf()
0,921263115666387             # tính bằng radian = 52,76 độ
```

Chỉ bằng cách nhìn vào tọa độ của các vectơ ~u và ~v, thật khó để xác định hướng tương đối của chúng. Nhờ tích vô hướng, tuy nhiên, chúng ta biết góc giữa các vectơ là 52,76˝, mà nghĩa là chúng chỉ về cùng một hướng. Các vectơ tại một góc j “ 90˝ được gọi là trực giao, nghĩa là vuông góc với nhau. Tích vô hướng giữa hai vectơ là âm khi góc giữa chúng là j ° 90˝.

Khái niệm “góc giữa các vectơ” áp dụng đồng minh hơn cho các vectơ có số chiều bất kỳ. Sản phẩm chấm cho vectơ n chiều là ~u ¨ ~v “ ∞n i“1 uivi. Điều này có nghĩa là chúng ta có thể nói chuyện về “góc giữa” các vectơ 1000 chiều. đẹp đấy thật điên rồ nếu bạn nghĩ về nó—không có cách nào chúng ta có thể “trực quan hóa” các vectơ 1000 chiều, nhưng với hai vectơ như vậy chúng ta có thể cho biết liệu chúng chủ yếu chỉ theo cùng một hướng, theo các hướng vuông góc hay chủ yếu theo các hướng ngược nhau.

Tích vô hướng là một phép toán giao hoán ~u ¨~v “ ~v ¨ ~u:

```
>>> u.dot(v) == v.dot(u)
ĐÚNG VẬY
```

sản phẩm chéo

Tích chéo, ký hiệu là ˆ, lấy hai vectơ làm đầu vào và tạo ra một vectơ làm đầu ra. Tích chéo của từng phần tử cơ bản được định nghĩa như sau:

$$\hat{\imath}\times\hat{\jmath} = \hat{k}, \qquad \hat{\jmath}\times\hat{k} = \hat{\imath}, \qquad \hat{k}\times\hat{\imath} = \hat{\jmath}.$$

Sản phẩm chéo được xác định theo phương trình sau:

$$\vec{u}\times\vec{v} = (u_yv_z - u_zv_y,\ u_zv_x - u_xv_z,\ u_xv_y - u_yv_x).$$

Đây là cách tính tích chéo của hai vectơ:

```
>>> u = Ma trận([ 4,5,6])
>>> v = Ma trận([-1,1,2])
>>> u.cross(v)
 [4, -14, 9]
```

Vectơ ~u ˆ~v trực giao với cả ~u và ~v. Định mức của tích chéo }~u ˆ~v} tỷ lệ với độ dài của các vectơ và sin của góc giữa chúng:

```
(u.cross(v).norm()/(u.norm()*v.norm())).n() #
0.796366206088088      = sin(0.921..)
```

Tích chéo là phản giao hoán, ~u ˆ~v " ´~v ˆ~u:

```
>>> u.cross(v)
[4, -14,
9] >>>
v.cross(u) [-4, 14,-9]
```

Hãy chú ý đến điều này, bởi vì nó là một điều mới. Tích của hai số a và b có tính chất giao hoán: ab "ba. Tích vô hướng của hai vectơ ~u và ~v là giao hoán: ~u ¨ ~v " ~v ¨ ~u. Tuy nhiên, tích chéo không giao hoán: ~u ˆ~v ‰ ~v ˆ ~u, nó có tính phản giao hoán: ~u ˆ~v " ´~v ˆ~u.

cơ khí

Mô-đun có tên là sympy.physics.mechanics chứa các công cụ phức tạp để mô tả các hệ cơ học, điều khiển các hệ quy chiếu, lực và mô-men xoắn. Các chức năng chuyên biệt này không cần thiết cho khóa học cơ khí năm thứ nhất. Các chức năng cơ bản của SymPy như giải quyết và các phép toán vectơ mà bạn đã học trong các phần trước đủ mạnh cho cơ học Newton cơ bản.

động lực học

Lực tổng hợp tác dụng lên một vật là tổng của tất cả các ngoại lực Fnet " vectơ tác ∞~ F. Vì các lực là vectơ nên chúng ta cần sử dụng phép cộng dụng lên nó để tính tổng lực.

tính toán fnet " F1 ` F2, ở đâu F1 " 4ıˆ[N] và F2 " 5=30˝[N]:

```
>>> F_1 = Ma trận( [4,0] )
>>> F_2 = Ma trận( [5*cos(30*pi/180), 5*sin(30*pi/180)] )
>>> F_net = F_1 + F_2
>>> F_net
[4 + 5*sqrt(3)/2, 5/2]
>>> F_net.evalf()
[8.33012701892219, 2.5]                    # tính bằng Newton
```

Để thể hiện câu trả lời bằng ký hiệu chiều dài và hướng, hãy sử dụng định mức để tìm độ dài của Fnet và sử dụng hàm tiếp tuyến nghịch đảo hai đầu vào atan2 để tính hướng:

"Machine Translated by Google"


```
>>> F_net.norm().evalf()
8.69718438067042                              # |F_net| nhà trọ]
>>> (atan2(F_net[1],F_net[0])*180/pi).n()
16.7053138060100                              # góc theo độ
```

Lực ròng tác dụng lên vật là Fnet " 8,697=16,7˝[N].

động học

Đặt xptq biểu thị vị trí của một vật thể, vptq biểu thị vận tốc của nó và aptq biểu thị gia tốc của nó. Cùng xptq, vptq và aptq được biết đến như phương trình chuyển động của vật.

Xuất phát từ những hiểu biết về Fnet, chúng ta có thể tính aptq " $\frac{\tilde{f}net}{tôi}$,
sau đó thu được vptq bằng cách tích phân aptq, và cuối cùng thu được xptq bằng cách tích phân vptq:

$$\underbrace{\frac{\tilde{f}net}{m} " aptq}_{\text{định luật 2 newton}} \quad \underbrace{\frac{vi`\geq}{dt} › Ñ vptq \quad \frac{xi`\geq}{dt} › Ñ xptq.}_{\text{động học}}$$

Chuyển động gia tốc đều (UAM)

Hãy phân tích trường hợp hợp lực tác dụng lên vật không đổi.
Một lực không đổi gây ra một gia tốc không đổi một hằng số " $\frac{F}{tôi}$ ". Nếu như hàm gia tốc không đổi theo thời gian aptq " a. Chúng tôi tìm thấy vptq và xptq như sau:

```
>>> t, a, v_i, x_i = biểu tượng('ta v_i x_i')
>>> v = v_i + tích hợp(a, (t,0,t))
>>> v
a*t + v_i
>>> x = x_i + tích hợp(v, (t,0,t))
>>> x
a*t**2/2 + v_i*t + x_i
```

Bạn có thể nhớ những phương trình này từ Mục 2.4 (trang 170).
Chúng là các phương trình chuyển động có gia tốc đều (UAM):

$$aptq " a,$$

$$vptq " vi ` tại,$$

$$xptq " xi ` vit ` \frac{1}{2}at2.$$

Ở trường học, có lẽ bạn phải ghi nhớ những phương trình này. Hiện nay bạn biết cách tự mình rút ra chúng bắt đầu từ những nguyên tắc đầu tiên.

Để hoàn thiện, bây giờ chúng ta sẽ rút ra UAM thứ tư phương trình liên hệ vận tốc cuối cùng của vật thể với vận tốc ban đầu, độ dời và gia tốc, mà không cần tham chiếu đến thời gian:

```
>>> mở rộng(v*v)
a**2*t**2 + 2*a*t*v_i + v_i**2 >>>
đơn giản hóa(mở rộng(v*v) - 2*a*x) -
2*a*x_i + v_i**2
```

Phép tính trên cho thấy v2 ´ 2axf „ ´2axi ` v2 i . Sau khi chuyển f số hạng 2axf sang vế kia của phương trình, ta thu được

pvptqq2 " v2 " v2 ` 2aDx " v2 ` 2apxf ´ xiq. fi

Phương trình thứ tư rất quan trọng cho các mục đích thực tế vì nó cho phép chúng ta giải các bài toán vật lý mà không cần sử dụng biến thời gian.

Ví dụ

Tìm hàm tọa độ của vật tại thời điểm t " 3[s], nếu nó xuất phát từ xi " 20[m] với vi " 10[m/s] và chịu gia tốc không đổi a " 5[m/s2]. Vận tốc của vật tại thời điểm t " 3[s] là bao nhiêu?

```
>>> x_i = 20 # vị trí ban đầu >>> v_i =
10 # vận tốc ban đầu # gia tốc (không
                  đổi khi chuyển động) >>> a = 5 >>> v = v_i +
integration(a, (t,0,t)) >>> x = x_i + tích
hợp(v, (t,0,t))
>>> x
5*t**2/2 + 10*t + 20 >>>
x.subs({t:3}).n() 72,5                  # x(3) trong [m]

>>> diff(x,t).subs({t:3}).n() # v(3) in [m/s] 25 # =
sqrt( v_i**2 + 2*a*52.5 )
```

Nếu bạn nghĩ về nó, kiến thức vật lý kết hợp với kỹ năng máy tính giống như một siêu năng lực!

Phương trình chuyển động tổng quát

vi`≥ xi`≥

dt Có thể sử dụng thủ tục vptq " dt apτq ptq " xptq để thu được hàm vị trí xptq ngay cả khi gia tốc không đổi.

Giả sử gia tốc của vật là aptq " ? kt; xptq của nó là gì? >>> t, v_i, x_i, k

```
= symbol('t v_i x_i k') >>> a = sqrt(k*t) >>> v =
v_i + integration(a,
(t,0,t)) >>> x = x_i + tích hợp(v, (t,0,t))

>>> x
x_i + v_i*t + (4/15)*(k*t)**(5/2)/k**2
```

Machine Translated by Google

Năng lượng tiềm năng

Ứng với mỗi lực $\tilde{F}pxq$ có một thế năng tương ứng UFpxq. Độ biến thiên thế năng liên quan đến lực $\tilde{F}pxq$ và chuyển vị d~ được định nghĩa là độ âm của công thực hiện bởi lực trong quá trình dịch chuyển: UFpxq“´W “ ´ ≥ d~ $\tilde{F}pxq$ ¨ d~x.

Các năng lượng tiềm năng liên quan đến trọng lực $\tilde{F}g$ “ ´mg,ˆ và lực của lò xo $\tilde{F}s$ “ ´k~x được tính như sau:

```
>>> x, y = ký hiệu ('x y')
>>> m, g, k, h = biểu tượng ('mgk h')

>>> F_g = -m*g                        # Lực hấp dẫn lên khối lượng m
>>>U_g=      - tích hợp (F_g, (y,0,h))
>>> U_g
m*g*h                                 # Grav. năng lượng tiềm năng

>>> F_s = -k*x                        # Lực lò xo để dịch chuyển x
>>> U_s=     - tích hợp (F_s, (x,0,x))
>>> U_s
k*x**2/2                              # Năng lượng tiềm năng mùa xuân
```

Lưu ý dấu âm trong công thức xác định thế năng. Âm này bị hủy bởi dấu âm của tích vô hướng $\tilde{F}$ ¨ d~x: khi lực tác dụng ngược chiều với độ dời, công mà lực thực hiện là âm.

Dao động điều hòa đơn giản

```
từ Hàm nhập sympy, dsolve
```

Lực do lò xo tác dụng được cho bởi công thức F “ ´kx. Nếu như lực duy nhất tác dụng lên một khối lượng m là lực của lò xo, chúng ta có thể sử dụng định luật II Newton để thu được phương trình sau:

$$F “ ma ñ ´kx “ ma ñ ´kxptq “ m \frac{d2}{dt2} ” xptq tôi .$$

Chuyển động của hệ thống lò xo khối lượng được mô tả bằng vi sai phương $\frac{d2}{}$ xptq ` w2xptq “ 0, trong đó hằng số w “ b k $\frac{}{tôi}$ được gọi là trình dt2 tần số góc. Chúng ta có thể tìm hàm vị trí xptq bằng cách sử dụng phương pháp giải quyết:

```
>>> t = Ký hiệu('t') >>>              # thời gian t
x = Hàm('x') # hàm định vị x(t)
>>> w = Ký hiệu('w', positive=True) # tần số góc w
>>> sol = dsolve( diff(x(t),t,t) + w**2*x(t), x(t) )
>>> sol
```

Machine Translated by Google


```
x(t) == C1*sin(w*t) + C2*cos(w*t)
>>> x = sol.rhs
>>> x
C1*sin(w*t) + C2*cos(w*t)
```

Lưu ý nghiệm xptq “ C1 sinpwtq ` C2 cospwtq tương đương với xptq “ A cospwt ` fq, thường được sử dụng để mô tả chuyển động điều hòa đơn giản. Chúng ta có thể sử dụng hàm expand với đối số trig=True để thuyết phục bản thân về sự tương đương này: >>> A, phi = symbol("A phi") >>> expand(A*cos(w*t - phi), trig = Đúng)

```
A*sin(phi)*sin(w*t) + A*cos(phi)*cos(w*t)
```

Nếu chúng ta xác định C1 “ A sinpfq và C2 “ A cospfq, chúng ta sẽ có dạng xptq “ C1 sinpwtq ` C2 cospwtq mà SymPy đã tìm thấy.

Ba o toan năng lươ ng

Chúng ta có thể xác minh rằng tổng năng lượng của hệ thống lò xo khối lượng được cung cấp bằng cách hiển thị hằng số ETptq “ Usptq ` Kptq “: >>> x = sol.rhs.subs({"C1":0,"C2":A})

```
>>> x
A*cos(t*w)
>>> v = diff(x, t)
-A*w*sin(t*w)
>>> E_T = (0,5*k*x**2 + 0,5*m*v**2).đơn giản hóa()
>>> E_T
0,5*A**2*(k*cos(w*t)**2 + m*w**2*sin(w*t)**2)
>>> E_T.subs({k:m*w**2}).simplify()
0.5*m*(w*A)**2                                   # = K_max
>>> E_T.subs({w:sqrt(k/m) }).đơn giản
hóa() 0,5*k*A**2                                 # = U_max
```

Phần kết luận

Tôi sẽ kết thúc bằng một số lời cảnh báo về sự phụ thuộc vào công nghệ. Công nghệ máy tính rất mạnh mẽ và ở khắp mọi nơi xung quanh chúng ta, nhưng chúng ta không được quên rằng máy tính chỉ là máy tính phụ thuộc vào mệnh lệnh của con người để điều khiển chúng. Điều này có nghĩa là điều quan trọng là bạn phải học cách làm toán “bằng tay” trước, để biết cách hướng dẫn máy tính làm toán cho bạn.

Tôi không muốn bạn sử dụng các thủ thuật bạn đã học được trong hướng dẫn này để tránh học cách làm toán và dựa dẫm một cách mù quáng vào SymPy để thực hiện các phép tính toán cho bạn. Đó không phải là một ý tưởng hay! Tôi sẽ rất thất vọng nếu bạn sử dụng SymPy mà bỏ qua “sự đau khổ về trí tuệ” cần thiết để học các khái niệm toán học mới như số, phương trình, hàm, v.v. Đó là tất cả những gì về toán học—hiểu các khái niệm toán học và mối quan hệ giữa các khái niệm. Phần học thuộc lòng các quy trình tính toán mà lẽ ra bạn phải học ở trường hoàn toàn không quan trọng. Các phép tính toán tẻ nhạt và lặp đi lặp lại chính xác là những gì có thể được "thuê ngoài" cho SymPy.

Để giải quyết các vấn đề trong toán học (hoặc vật lý, hóa học, sinh học, v.v.), điều quan trọng nhất là: A) xác định các biến liên quan đến vấn đề, B) vẽ sơ đồ và C) thiết lập rõ ràng các phương trình của vấn đề theo thuật ngữ của các biến bạn đã xác định. Với các bước này, một nửa công việc giải quyết vấn đề đã được thực hiện! Những người sử dụng máy tính không thể trợ giúp với những nhiệm vụ cụ thể về vấn đề và lập mô hình ban đầu quan trọng này—chỉ có con người mới giỏi công việc này. Sau khi bạn thiết lập vấn đề (A, B, C), SymPy có thể giúp bạn lướt qua mọi phép tính tiếp theo có thể cần thiết để có được câu trả lời cuối cùng.

Hầu hết các khám phá lớn về toán học và khoa học đều được thực hiện bằng bút và giấy, điều này cho thấy việc viết nguệch ngoạc trên giấy là một công cụ hữu ích để tư duy. Với những gì bạn đã học về SymPy, giờ đây bạn có quyền truy cập vào sự kết hợp giữa bút chì và giấy để suy nghĩ và SymPy để tính toán. Đó là một sự kết hợp rất mạnh mẽ! Vấn đề trong thế giới thực mà bạn muốn giải quyết là gì? Hãy thử lập mô hình vấn đề bằng các phương trình toán học và xem điều gì sẽ xảy ra. Đi ra ngoài đó và làm một số khoa học!

liên kết

[Hướng dẫn cài đặt jupyter notebook] https://jupyter.readthedocs.io/en/latest/install.html

[Hướng dẫn SymPy chính thức] http://docs.sympy.org/latest/tutorial/intro.html

[Danh sách các vấn đề của SymPy] http://docs.sympy.org/dev/gotchas.html

Phụ lục E

công thức

công thức giải tích

đê / dx	–› y › Ñ	ª y dx
đại số		
1	x	$\frac{1}{2}$x2 `C
0	Một	rìu `C
nxn´1	xn	$\frac{1}{n\ `1}$ xn`1 `C
´x´2	x´1	ln x `C
$\frac{du}{dx}$ ˘ $\frac{đv}{dx}$ ˘ $\frac{dw}{dx}$	u ˘ v ˘ w	≥ u dx ˘ ≥ v dx ˘ ≥ w dx
bạn $\frac{đv}{dx}$ `v $\frac{du}{dx}$	tia cực tím	Không có hình thức chung được biết đến
$\frac{v \frac{du}{dx} ´ u \frac{đv}{dx}}{v2}$	$\frac{bạn}{v}$	Không có hình thức chung được biết đến
	bạn	ux ´ ≥ x du ` C

Machine Translated by Google

$\frac{đê}{dx}$	-› y › Ñ	ª y dx
Hàm mũ và logarit		
cũ	bản tại	cũ `C
x´1 x	ln	xpln x ´ 1q ` C
$\frac{1}{\text{trong } 10}$ ´1	x log10 x	$\frac{1}{\text{trong } 10}$ xpln x ´ 1q ` C
rìu ln một	cây rìu	$\frac{\text{cây rìu}}{\text{trong một}}$ `C
lượng giác		
cos x	tội x	´ cos x ` C
´ tội x	cos x	tội lỗi x ` C
sec2 x	tân x	´ ln |cos x| `C
lượng giác nghịch đảo		
$\frac{1}{\text{ap1 ´ x2q}}$	sin´1pxq	x sin´1pxq ` a1 ´ x2 ` C
´ $\frac{1}{\text{ap1 ´ x2q}}$	cos´1pxq	x cos´1pxq ´ a1 ´ x2 ` C
$\frac{1}{1 \text{ ` } x2}$	tan´1pxq	x tan´1pxq ´ $\frac{1}{2}$ lnp1 ` x2q `C
hypebol		
cosh x	sinh x	cosh x `C
sinh x	cosh x	sinh x `C
sech2 x	tanh x	ln pcosh xq ` C
nghịch đảo hyperbol		
´ $\frac{x}{\text{pa2 ` x2q}^{\frac{3}{2}}}$	$\frac{1}{\text{aa2 ` x2}}$	sinh´1p x q ` C “ lnpx ` aa2 ` x2q ` C

$\frac{\text{đê}}{dx}$	-› y › Ñ	ª y dx
Điều khoản khác		
$\frac{1}{px ´ aq2}$	$\frac{1}{x ´ a}$	ln |x ´ a| ` C, x‰a
- $\frac{b}{pa ˘ bxq2}$	$\frac{1}{a ˘ bx}$	˘ $\frac{1}{b}$ ln ˇˇa ˘ bxˇˇ ` C, a ˘ bx ‰ 0
$\frac{3a2x}{pa2 ` x2q^{\frac{5}{2}}}$	$\frac{a2}{pa2 ` x2q^{\frac{3}{2}}}$	$\frac{x}{? a2 ` x2}$ `C
rìu cos	rìu tội lỗi	´$\frac{1}{\text{Một}}$ cos ax `C
´a rìu tội lỗi	rìu cos	$\frac{1}{\text{Một}}$ sin rìu ` C
rìu sec2	rìu tan	´$\frac{1}{\text{Một}}$ ln |cos ax| `C
tội lỗi gấp đôi	sin2 x	$\frac{x}{2}$ ´ $\frac{\text{tội lỗi gấp đôi}}{4}$ `C
´ tội lỗi 2 lần	cos2 x	$\frac{x}{2}$ ` $\frac{\text{tội lỗi gấp đôi}}{4}$ `C
n sin´1 x cos x	tội x	´ ~~cos x~~ N tội lỗi´1 x ` ~~n´ 1~~ n ª sinn´2 x dx ` C
´ $\frac{\cos x}{\sin2 x}$	$\frac{1}{\text{tội } x}$	ln ˇ rám nắng $\frac{x}{2}$ ˇ `C
´$\frac{\sin 2x}{\sin4 x}$	$\frac{1}{\sin2 x}$	´ cotan x ` C
$\frac{\sin2 x ´ \cos2 x}{\sin2 x \cos2 x}$	$\frac{1}{\sin x \cos x}$	ln |tan x| `C
n sin mx cos nx ` m sin nx cos mx	sin mx sin nx	$\frac{1}{2}$ cospm ´ nqx ´ $\frac{1}{2}$ cospm `nqx` C
2a sin 2ax	rìu sin2	$\frac{x}{2}$ ´ $\frac{\text{tội lỗi 2ax}}{4a}$ `C
´2a sin 2ax	rìu cos2	$\frac{x}{2}$ ` $\frac{\text{tội lỗi 2ax}}{4a}$ `C

công thức cơ học

Lực lượng:

$$W “ Fg “ \frac{GMm}{r2} “ gm, Fs “ ´kx, Ff s § μsN, Ff k “ μkN$$

Ba định luật Newton:

$$\text{nếu không } \tilde{F}\text{ext, sau đó } \tilde{v}i “ \tilde{v}f \quad (1)$$

$$\tilde{F}net “ m\tilde{a} \quad (2)$$

$$\text{nếu như } \tilde{F}12\text{, rồi } D\tilde{} F21 “ ´\tilde{} F12 \quad (3)$$

Chuyển động gia tốc đều (UAM):

$$aptq “ \quad (4)$$

$$\text{một } vptq “ \text{ tại } ` vi \quad (5)$$

$$xptq “ \frac{1}{2}at2 ` vit ` xi \quad (6)$$

$$v2 “ v2 ` 2aDx f \quad (7)$$

Quán tính:

$$\tilde{p} “ m\tilde{v} \quad \text{(số 8)}$$

Năng lượng và công việc:

$$K“ \bar{1} 2mv2, Ug “ mgh, Us “ \frac{1}{2}kx2, Kr “ \frac{1}{2}Iw2, W “ \tilde{F} ¨ d\tilde{} \quad (9)$$

Định luật bảo tồn:

$$ÿ\tilde{p}in “ ÿ\tilde{p}out \quad (10)$$

$$Lin “ Lout \quad (11)$$

$$ÿ Ein ` Win “ ÿ Eout ` Wout \quad (12)$$

Chuyển động tròn (gia tốc hướng tâm và lực hướng tâm):

$$\text{là } “ \frac{v2}{r}, \quad \tilde{F}r “ marr\hat{} \quad (13)$$

Chuyển động góc:

$$F “ ma ñ T “ Ia \quad (14)$$

$$aptq, vptq, xptq ñ aptq, wptq, qptq \quad (15)$$

$$\tilde{p} “ m\tilde{v} ñ L “ Iw \quad (16)$$

$$K“ \bar{1} 2mv2 ñ Kr “ \frac{1}{2}Iw2 \quad (17)$$

SHM với w “ b k tôi (hệ thống lò xo khối lượng) hoặc w “ bg ` (con lắc):

$$xptq “ A cospwt ` fq \quad (18)$$

$$vptq“´Aw sinpwt ` fq \quad (19)$$

$$aptq“´Aw2 cospwt ` fq \quad (20)$$

Mục lục

Các số trang được in đậm chỉ ra các định nghĩa khái niệm.

Often calculus and mechanics are taught as separate subjects. It shouldn't be like that. Learning calculus without mechanics is incredibly boring. Learning mechanics without calculus is missing the point. This textbook integrates both subjects and highlights the profound connections between them.

This is the deal. Give me 350 pages of your attention, and I'll teach you everything you need to know about functions, limits, derivatives, integrals, vectors, forces, and accelerations. The book in your hands is the only math book you'll need for the first semester of undergraduate studies in science.

With concise, jargon-free lessons on topics in math and physics, each section covers one concept at the level required for a first-year university course. **Anyone can pick up this book and become proficient in calculus and mechanics, regardless of their mathematical background.**

> *"I like the conversational tone of your writing. It's almost like I'm learning math from a friend."* —Kevin Del Castillo, student

> *"It's literally two heavy textbooks packed into a very light and small book. My only problem has been when I am working through it in the library and start laughing out loud—you have great examples."* —Miriam Aczel, student

The author has more than 14 years of tutoring experience, a B.Eng. in electrical engineering, a M.Sc. in physics, and a Ph.D. in computer science.

Contents:

- HIGH SCHOOL MATH
- VECTORS
- MECHANICS
- DERIVATIVES
- INTEGRALS

Cuốn sách No Bullshit Guide to Math and Physics của Ivan Savov (Minireference Publishing, v5.4 2020, ISBN 0992001005) có sẵn ở cả định dạng in và kỹ thuật số.

- Bản in bìa mềm từ lulu.com: bit.ly/noBSmathphys-sc
- Bản in bìa cứng từ lulu.com: bit.ly/noBSmathphys-hc
- Bản in bìa mềm từ amazon: amazon.com/dp/0992001005
- Tải xuống kỹ thuật số từ gumroad: gum .co/noBSmathphys

Để biết thêm thông tin, hãy truy cập trang web minireference.com của cuốn sách .