

# CS Study Fun – Khoa học máy tính

Learn & Enjoy ...

## Bài toán nhân đa thức – Phép biến đổi Fourier nhanh (Fast Fourier Transform) – FFT

Posted by Trần Quốc Long on Tháng Một 12, 2009

**Bài toán nhân đa thức:** Cho 2 đa thức  $A(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_{n-1}x^{n-1}$  và  $B(x) = b_0 + b_1x + \dots + b_{n-1}x^{n-1}$ , tính đa thức  $C(x) = A(x)B(x)$ . Nghĩa là tìm các hệ số  $c_0, c_1, \dots, c_{2n-2}$  của đa thức  $C(x)$  (Do  $A, B$  có bậc  $n - 1$  nên  $C(x)$  có bậc lớn nhất là  $2n - 2$ ).

Công thức của các hệ số  $c_k$  là

$$c_k = \sum_{i=0}^k a_i b_{k-i}, \forall i = 0, 1, \dots, 2n - 2$$

trong đó nếu  $i \geq n$  ta đặt  $a_i = b_i = 0$ . Như vậy, để tính tất cả các hệ số của đa thức  $C(x)$  bằng công thức trên ta cần  $O(n^2)$  phép tính. Tuy nhiên, ta có thể tính các hệ số của đa thức  $C(x)$  chỉ với độ phức tạp  $O(n \log n)$  bằng phép **biến đổi Fourier nhanh** (Fast Fourier Transform – FFT).

**Một số ý tưởng dẫn đến thuật toán FFT:**

1. Một đa thức bậc nhỏ hơn  $n$  hoàn toàn xác định nếu ta biết giá trị của đa thức tại  $n$  điểm phân biệt. Tức là nếu biết  $A(x_0), A(x_1), \dots, A(x_{n-1})$  thì sẽ tính được  $a_0, a_1, \dots, a_{n-1}$  và ngược lại.
2. Như vậy, nếu ta tính được giá trị của đa thức  $A, B$  tại các điểm  $x_0, x_1, \dots, x_{2n-2}$  thì do ta dễ dàng tính được  $C(x_i) = A(x_i)B(x_i), i = 0, 1, \dots, 2n - 2$ , nên đa thức  $C(x)$  và các hệ số của nó hoàn toàn xác định được.
3. Giả sử  $n$  chẵn và đa thức  $A(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_{n-1}x^{n-1}$ , xét 2 đa thức sau
 
$$A_e(x) = a_0 + a_2x^2 + a_4x^4 + \dots + a_{n-2}x^{(n-2)/2}$$
 sử dụng các hệ số bậc chẵn của  $A(x)$ 

$$A_o(x) = a_1 + a_3x + a_5x^2 + \dots + a_{n-1}x^{(n-2)/2}$$
 sử dụng các hệ số bậc lẻ của  $A(x)$

ta thấy  $A(x) = A_e(x^2) + xA_o(x^2)$ . Do đó nếu ta chọn tập các điểm  $x_0, x_1, \dots, x_{n-1}$  sao cho

$$x_i = -x_{i+n/2}, \forall i = 0, 1, \dots, n/2 - 1$$

$$x_0, x_1, \dots, x_{n/2-1}, -x_0, -x_1, \dots, -x_{n/2-1}$$

thì việc tính giá trị của đa thức  $A(x)$  tại  $n$  điểm  $x_0, \dots, x_{n-1}$  được quy về tính giá trị 2 đa thức  $A_e(x), A_o(x)$  (có bậc nhỏ hơn  $n/2$ ) tại  $n/2$  điểm  $x_0^2, x_1^2, \dots, x_{n/2-1}^2$ .

4. Nếu tại  $n/2$  điểm mới ta vẫn có tính chất một nửa số điểm trái dấu với nửa số điểm còn lại thì ta có thể tiếp tục đệ quy. Như vậy, độ phức tạp để tính toán giá trị đa thức tại  $n$  điểm có công thức

$$T(n) = 2T(n/2) + O(n)$$

trong đó  $2T(n/2)$  là độ phức tạp của 2 bài toán con, còn  $O(n)$  là độ phức tạp khi ta sử dụng công thức  $A(x) = A_e(x^2) + xA_o(x^2)$  để kết hợp kết quả của 2 bài toán con. Theo định lý tổng quát, ta có  $T(n) = \Theta(n \log n)$  giống trường hợp thuật toán **sắp xếp trộn** (Merge Sort).

5. Tuy nhiên, để trong  $n/2$  điểm  $x_0^2, x_1^2, \dots, x_{n/2-1}^2$  có một nửa số điểm trái dấu với nửa số điểm còn lại, các điểm  $x_i$  không thể là số thực vì  $x^2 \geq 0, \forall x \in R$ . Như vậy, ta **phải sử dụng số phức**.

6. Để ý rằng, ở trường hợp cơ sở,  $n = 1$ , nếu ta luôn chọn  $x_0 = 1$  để tính giá trị đa thức thì: Ở bước đệ quy trước đó, ta có các điểm  $x = \pm\sqrt{1} = \pm 1$

Ở bước đệ quy trước đó, ta có các điểm  $x = \pm\sqrt{1}, \pm\sqrt{-1} = 1, -1, +i, -i$

.....

Ở bước đệ quy với đa thức bậc nhỏ hơn  $n$  ta có các điểm là **căn phức bậc  $n$  của 1** ( $n$ -th complex roots of unity).

### Căn phức bậc $n$ của 1:

Từ công thức nổi tiếng của Euler  $e^{i\pi} + 1 = 0$ , ta có

$$e^{2i\pi} = 1 \Rightarrow e^{2i\pi k} = 1, \forall k = 0, 1, \dots, n-1$$

$$\Rightarrow (e^{2i\pi k/n})^n = 1$$

Nghĩa là  $\omega_{k,n} = e^{2i\pi k/n}, k = 0, 1, \dots, n-1$  là  $n$  căn phức bậc  $n$  của 1.

Hình sau cho thấy vị trí các căn phức của 1 trên đường tròn đơn vị.



### Căn phức bậc 4, 5, 6 của 1

Bây giờ ta xem xét các tính chất của **căn phức bậc  $n$  của 1**.

**Tính chất 1:** Nếu  $n$  chẵn thì  $\omega_{k,n} = -\omega_{k+n/2,n}$ ,  $\forall k = 0, 1, \dots, n/2 - 1$ , nghĩa là tập các căn phức bậc  $n$  của 1 chia thành 2 tập trái dấu nhau.

Chứng minh:

$$\begin{aligned}\omega_{k+n/2,n} &= e^{2i\pi(k+n/2)/n} = e^{i(2\pi k/n + \pi)} \\ &= \cos(2\pi k/n + \pi) + i \sin(2\pi k/n + \pi) = -\cos(2\pi k/n) - i \sin(2\pi k/n) \\ &= -e^{2i\pi k/n} = -\omega_{k,n}.\end{aligned}$$

**Tính chất 2:** Nếu  $n$  chẵn thì  $\omega_{k,n}^2 = \omega_{k,n/2}$ .

Chứng minh:

$$\omega_{k,n}^2 = e^{(2i\pi k/n)2} = e^{2i\pi k/(n/2)} = \omega_{k,n/2}$$

**Tính chất 3:** Nếu  $z$  là căn phức bậc  $n$  của 1 thì  $\sum_{k=0}^{n-1} z^k = \begin{cases} n & z = 1 \\ 0 & z \neq 1 \end{cases}$

Chứng minh:

$$0 = z^n - 1 = (z - 1) \sum_{k=0}^{n-1} z^k \Rightarrow z = 1 \text{ hoặc } \sum_{k=0}^{n-1} z^k = 0$$

$$\text{Với } z = 1 \text{ ta có } \sum_{k=0}^{n-1} z^k = n.$$

**Nhận xét:** Với các tính chất 1 và 2 ở trên, nếu  $n$  là lũy thừa của 2, và nếu ta chọn tập điểm để tính giá trị của đa thức  $A(x)$  tại căn phức bậc  $n$  thì ta có thể cài đặt thuật toán đệ quy như mô tả ở phần trên. Thuật toán này được gọi là **phép biến đổi Fourier nhanh** (FFT hay dFFT – chữ d là discrete – rời rạc).

Vậy để tính giá trị đa thức bậc  $n$  tại các căn phức bậc  $n$  của 1 (giả sử  $n$  là lũy thừa của 2) ta có **thuật toán FFT** như sau:

**procedure**  $FFT(A, n)$

**Input:**  $a_0, a_1, \dots, a_{n-1}$  là các hệ số của  $A(x)$ , trong đó  $n$  là lũy thừa của 2 (nếu  $n$  chưa phải là lũy thừa của 2, ta chỉ cần thêm các số 0 vào cho đủ)

**Output:** giá trị của đa thức  $A(x)$  tại các căn phức bậc  $n$  của 1:  
 $A(\omega_{0,n}), A(\omega_{1,n}), \dots, A(\omega_{n-1,n})$

1. If  $n = 1$ , return  $A(\omega_{0,1}) = A(1) = a_0$
2. Else Tạo 2 đa thức  
 $A_e(x) = a_0 + a_2x + a_4x^2 + \dots + a_{n-2}x^{(n-2)/2}$   
 $A_o(x) = a_1 + a_3x + a_5x^2 + \dots + a_{n-1}x^{(n-2)/2}$
3. Call  $FFT(A_e, n/2)$ ,  $FFT(A_o, n/2)$  để tính giá trị của  $A_e(x)$ ,  $A_o(x)$  tại  
 $\omega_{k,n/2} = \omega_{k,n}^2 = \omega_{k+n/2,n}^2, \forall k = 0, 1, \dots, n/2 - 1$
4. For  $k = 0 \rightarrow n/2 - 1$   
 $A(\omega_{k,n}) = A_e(\omega_{k,n/2}) + \omega_{k,n} A_o(\omega_{k,n/2})$   
 $A(\omega_{k+n/2,n}) = A_e(\omega_{k,n/2}) - \omega_{k,n} A_o(\omega_{k,n/2})$

Với thuật toán FFT trong tay, ta có **thuật toán nhân đa thức** sau:

**procedure**  $PolyMult(A, B)$

**Input:**  $a_0, a_1, \dots, a_{n-1}$  là các hệ số của  $A(x)$ ,  $b_0, b_1, \dots, b_{n-1}$  là các hệ số của  $B(x)$ . Ta cũng giả sử  $n$  là lũy thừa của 2.

**Output:**  $c_0, c_1, \dots, c_{2n-2}$  là các hệ số của  $C(x) = A(x)B(x)$

1. Call  $FFT(A, 2n)$ ,  $FFT(B, 2n)$  để tính giá trị đa thức  $A, B$  tại  $\omega_{k,2n}, \forall k = 0, 1, \dots, 2n - 1$
2. For  $k = 0 \rightarrow 2n - 1$ :  $C(\omega_{k,2n}) = A(\omega_{k,2n})B(\omega_{k,2n})$
3. Lập đa thức  $D(x)$  với các hệ số  $d_k = C(\omega_{k,2n}), k = 0, 1, \dots, 2n - 1$
4. Call  $FFT(D, 2n)$
5. For  $k = 0 \rightarrow 2n - 1$ :  $c_k = \frac{D(\omega_{2n-k,2n})}{2n}$   
 trong đó  $\omega_{2n,2n} = \omega_{0,2n} = 1$

Để thấy thuật toán trên cho ta hệ số  $c_k, k = 0, 1, \dots, 2n - 1$  đúng, ta có định lý sau

**Định lý:** Với mọi  $k = 0, 1, \dots, 2n - 1$ , ta có đẳng thức

$$c_k = \frac{D(\omega_{2n-k,2n})}{2n}$$

**Chứng minh:** Thật vậy, khai triển  $D(\omega_{2n-k,2n})$  ta được:

$$\begin{aligned} D(\omega_{2n-k,2n}) &= \sum_{s=0}^{2n-1} d_s \omega_{2n-k,2n}^s \\ &= \sum_{s=0}^{2n-1} C'(\omega_{s,2n}) \omega_{2n-k,2n}^s \\ &= \sum_{s=0}^{2n-1} \sum_{t=0}^{2n-1} c_t \omega_{s,2n}^t \omega_{2n-k,2n}^s \\ &= \sum_{t=0}^{2n-1} c_t \sum_{s=0}^{2n-1} \omega_{s,2n}^t \omega_{2n-k,2n}^s \\ &= \sum_{t=0}^{2n-1} c_t \sum_{s=0}^{2n-1} \omega_{2n-k+t,2n}^s \end{aligned}$$

Theo tính chất 3 ở trên, ta có

$$\sum_{s=0}^{2n-1} \omega_{2n-k+t,2n}^s = \begin{cases} 2n & \omega_{2n-k+t,2n} = 1 \Leftrightarrow t = k \\ 0 & \omega_{2n-k+t,2n} \neq 1 \end{cases}$$

Vậy  $D(\omega_{2n-k,2n}) = (2n)c_k$ , điều phải chứng minh.

**Nhận xét:**

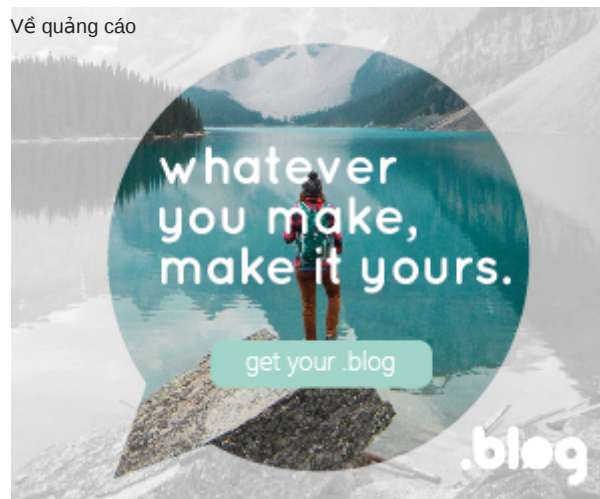
1. Định lý cho thấy quan hệ của các hệ số  $c_0, \dots, c_{2n-1}$  và giá trị của đa thức tại căn phức của 1:

$C(\omega_{0,2n}), \dots, C(\omega_{2n-1,2n})$  qua phép biến đổi Fourier (xuôi và ngược).

$$C_k = C(\omega_{k,n}) = \sum_{t=0}^{n-1} c_t \omega_{k,n}^t = \sum_{t=0}^{n-1} c_t e^{2i\pi kt/n}$$

$$c_k = \frac{1}{n} \sum_{t=0}^{n-1} C_t e^{-2i\pi kt/n}$$

2. Phép biến đổi Fourier nhanh với độ phức tạp  $O(n \log n)$  là công cụ tính toán quan trọng trong **ngành xử lý tín hiệu số** (*Digital Signal Processing*), hầu hết các phần mềm xử lý hình ảnh, âm thanh đều có cài đặt **thuật toán FFT**.
3. Thuật toán FFT được đưa ra bởi Cooley và Tukey năm 1965, nhưng thật ra, thuật toán này đã được Gauss nghĩ ra từ năm 1805, tuy vào thời điểm đó, ông không quan tâm đến độ phức tạp thuật toán.



This entry was posted on Tháng Một 12, 2009 lúc 11:00 chiều and is filed under [Chia để trị](#), [Thuật toán](#).

Tagged: [biến đổi Fourier nhanh](#), [complex roots of unity](#), [căn phức của 1](#), [Fast Fourier Transform](#), [FFT](#), [master theorem](#), [nhân đa thức](#), [định lý tổng quát](#). You can follow any responses to this entry through the [RSS 2.0](#) feed. You can skip to the end and leave a response. Pinging is currently not allowed.

« [Quy hoạch nón \(Conic programming\) \(1\) – Thứ tự trên các véc tơ \(partial order\)](#)

[Quy hoạch nón \(Conic Programming\) \(2\) – Một số nón lồi](#) »

[Blog at WordPress.com.](#)