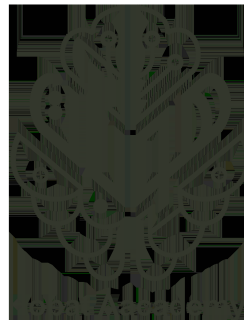


Session 03

Example for Calculating Matrix Rank

Applied Mathematics for AI | Hobot Academy | Zahra Amini



Telegram: @hobotacademy & Instagram:@hobotacademy & LinkedIn:
@zahraamini-ai

محاسبه رتبه ماتریس (Rank)

رتبه یا رنک یک ماتریس به معنای تعداد سطرها یا ستون‌های خطی مستقل آن است. به عبارت دیگر، رتبه‌ی یک

ماتریس برابر است با بیشترین تعداد سطرها یا ستون‌هایی که هیچ‌کدام از آن‌ها را نمی‌توان به صورت ترکیبی

خطی از سایر سطرها یا ستون‌ها نوشت. رتبه یک ماتریس نشان‌دهنده بعد فضای برداری تعریف‌شده

توسط سطرها یا ستون‌های آن است

محاسبه رتبه با روش حذف گاوسی

1 انتخاب سطر محوری (Pivot Row)

ابتدا سطر اول (سطر محوری) را انتخاب کرده و از عنصر موجود در اولین ستون به عنوان محور استفاده کنید هدف این است که تمام عناصر زیر محور را به صفر تبدیل کنید

اگر عنصر محوری صفر باشد، می‌توانید سطر محوری را با یکی از سطرهای زیرین که در همان ستون دارای مقدار غیر صفر است جابجا کنید

2 حذف عناصر زیر محور

از عملیات سطری استفاده کنید تا تمام عناصر زیر محور در ستون اول را صفر کنید. این عملیات به این شکل است که سطرهای زیر محور را با کمک سطر محوری تغییر می‌دهید

$$\text{Row}_i = \text{Row}_i - k \times \text{Pivot Row}$$

فرمول کلی برای این کار:

k نسبت مناسب برای حذف عنصر مورد نظر است

$$k = \frac{\text{Element to eliminate}}{\text{Pivot element}}$$

3 تکرار برای ستون‌های بعدی

پس از حذف عناصر ستون اول، به سراغ ستون دوم و سطر دوم بروید و همان عملیات را تکرار کنید. از سطر دوم به عنوان سطر محوری جدید استفاده کنید و عناصر زیر محور جدید را صفر کنید

این مراحل را تا زمانی که به انتهای ماتریس برسید ادامه دهید

4 به دست آوردن شکل پلکانی سطری

پس از اجرای عملیات حذف برای تمام سطرها و ستونها، ماتریس به شکل پلکانی سطری تبدیل خواهد شد در این شکل، تمامی عناصر زیر محور اصلی (در هر ستون) صفر شده‌اند

5 شمارش سطرهای غیر صفر

اکنون سطرهای غیر صفر در ماتریس پلکانی را بشمارید. تعداد سطرهای غیر صفر برابر با رتبه ماتریس است سطرهایی که تمام عناصرشان صفر باشند، تاثیری در رتبه نخواهند داشت

6 تعیین رتبه ماتریس

رتبه ماتریس برابر است با تعداد سطرهای غیر صفر در ماتریس پلکانی. این مقدار نشان‌دهنده تعداد بردارهای خطی مستقل (سطرها یا ستونها) است

محاسبه رتبه با روش حذف گاوسی

برای محاسبه رتبه یک ماتریس، معمولاً از روش حذف گاوسی استفاده می‌شود که ماتریس را به

شکل پلکانی تبدیل می‌کند. تعداد سطرهای غیر صفر در این ماتریس پلکانی، نشان‌دهنده رتبه ماتریس است

$$A = \begin{bmatrix} \overset{\text{Pivot}}{1} & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$$
$$\begin{aligned} \text{Row2} &= \text{Row2} - 4 \times \text{Row1} = (4, 5, 6) - 4 \times (1, 2, 3) = (0, -3, -6) \\ \text{Row3} &= \text{Row3} - 7 \times \text{Row1} = (7, 8, 9) - 7 \times (1, 2, 3) = (0, -6, -12) \end{aligned}$$
$$\begin{aligned} \text{Row3} &= \text{Row3} - 2 \times \text{Row2} = (0, -6, -12) - 2 \times (0, -3, -6) = (0, 0, 0) \end{aligned}$$
$$\left. \begin{aligned} &\rightarrow k = \frac{4}{1} = 4 \\ &\rightarrow k = \frac{7}{1} = 7 \\ &\rightarrow k = \frac{-6}{-3} = 2 \end{aligned} \right\} \begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -6 \\ 0 & -6 & -12 \end{array}$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -6 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

چون دو سطر غیر صفر داریم، رتبه‌ی این ماتریس ۲ است