Session 7

Calculus Foundation

Applied Mathematics for AI | Hobot Academy | Zahra Amini

Hobat Aacademy

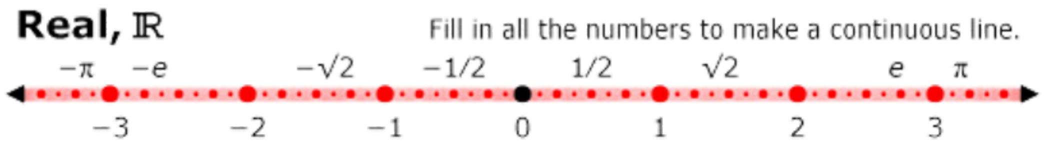
Telegram & Instagram & YouTube: @hobotacademy & LinkedIn: @zahraamini-ai

www.hobotacademy.com

اعداد حقیقی ($\mathbb{R}$)

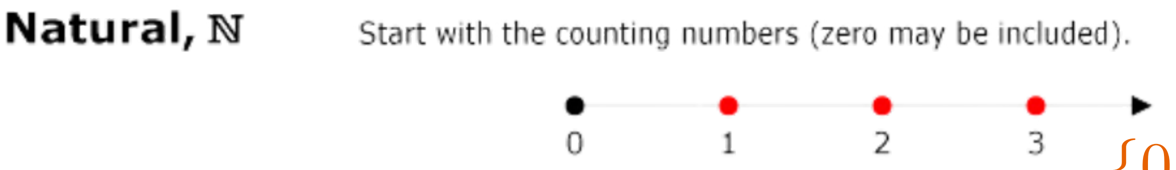
مجموعه اعداد حقیقی ($\mathbb{R}$) شامل اعداد صحیح، اعداد گویا (مانند $\frac{1}{2}$)، اعداد گنگ (مانند $\sqrt{2}$) و اعداد اعشاری نامتناهی است.

$$\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{I}$$



اعداد طبیعی ($\mathbb{N}$):

مجموعه اعداد طبیعی شامل تمامی اعداد صحیح مثبت از ۱ به بعد است: $\{1, 2, 3, 4, \dots\}$

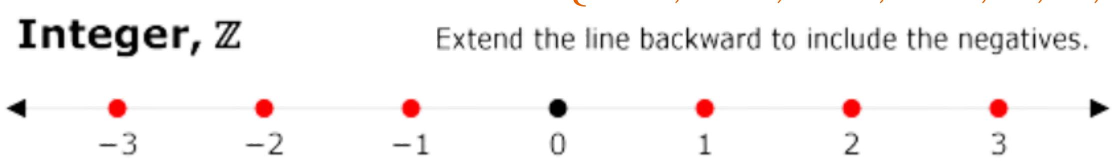


اعداد حسابی ($\mathbb{N}_0$):

مجموعه اعداد حسابی با افزودن ۰ به اعداد طبیعی تشکیل می‌شود: $\{0, 1, 2, 3, 4, \dots\}$

اعداد صحیح ($\mathbb{Z}$):

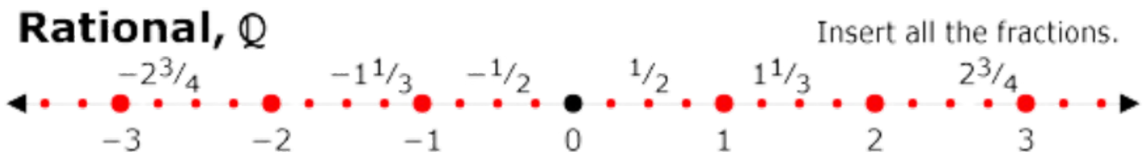
مجموعه اعداد صحیح شامل همه اعداد صحیح مثبت و منفی همراه با صفر است: $\{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$



اعداد گویا ($\mathbb{Q}$):

مجموعه اعداد گویا شامل اعدادی است که می‌توان آن‌ها را به صورت نسبت دو عدد صحیح $\frac{p}{q}$ نشان داد که در آن $q \neq 0$.

$0, -3, \frac{1}{2}$



اعداد گنگ($\mathbb{I}$):

اعدادی که نمی‌توان آن‌ها را به صورت نسبت دو عدد صحیح بیان کرد. $e, \pi, \sqrt{2}$

اعداد مختلط ($\mathbb{C}$):

مجموعه اعداد مختلط شامل تمام اعداد به صورت $a+bi$ است که در آن $a, b \in \mathbb{R}$ و i واحد موهومی با خاصیت $i^2 = -1$ است.

$$C = \{z \mid z = a + bi,\ a, b \in \mathbb{R},\ i^2 = -1\}$$

اعداد اعشاری نامتناهی اعدادی هستند که بخش اعشاری آنها بی‌پایان ادامه دارد و متوقف نمی‌شود. این اعداد می‌توانند تناوبی (تکرارشونده) یا غیرتناوبی (نامنظم) باشند.

۱. اعداد اعشاری نامتناهی تناوبی (تکرارشونده): $\frac{1}{3} = 0.333\dots, \frac{1}{7} = 0.142857142857\dots, \frac{2}{3} = 0.666\dots$

۲. عداد اعشاری نامتناهی غیرتناوبی (نامنظم): $\pi = 3.1415926535\dots, e = 2.7182818284\dots, \sqrt{2} = 1.4142135623\dots$

تابع چیست؟

یک تابع f رابطه‌ای است که به هر عنصر x از یک مجموعه (دامنه)، یک عنصر $f(x)$ از مجموعه دیگری (برد) اختصاص می‌دهد.

این رابطه معمولاً به صورت $f: X \to Y$ نشان داده می‌شود که در آن:

X: دامنه یا مجموعه ورودی‌ها, Y: برد یا مجموعه خروجی‌ها, f(X): مقدار تابع برای ورودی X

$$x \longrightarrow \boxed{f(x)} \longrightarrow y$$

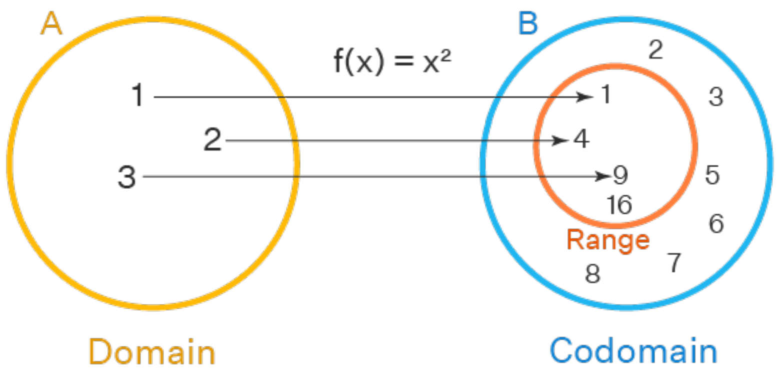
ویژگی‌های تابع:

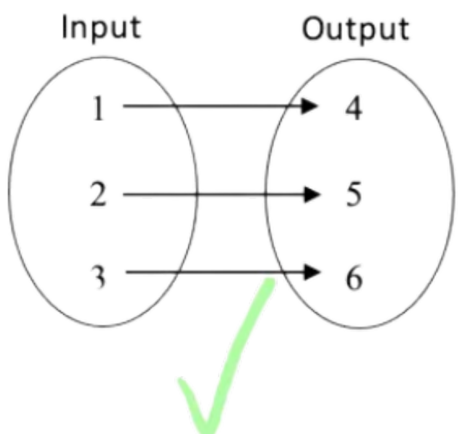
منحصر به فرد بودن خروجی: برای هر مقدار **x** در دامنه، فقط یک مقدار **f(x)** وجود دارد.

مثال: در تابع $f(x) = x^2$، اگر x = ۳ باشد، خروجی فقط می‌تواند ۹ باشد.

دامنه و برد: دامنه (**X**) مجموعه‌ای است از تمام مقادیر مجاز برای ورودی x.

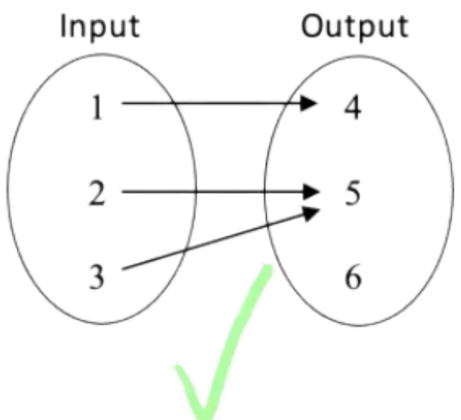
برد (**Y**) مجموعه‌ای از تمام خروجی‌های ممکن (**f(x)**).





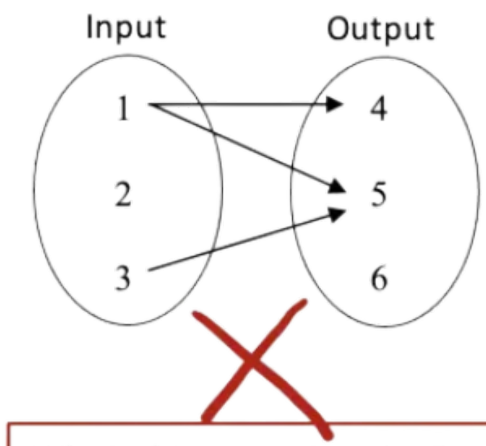
Why is this a Function?

There is a unique input for each output. This is a special kind of function, called a 1:1 function!



Why is this a Function?

There is a unique input for each output. Even though, there is a repeating output, of 5, this is ok and still qualifies as a function!



Why is this NOT a Function?

There is a repeat input of 1, making the above map, not a function!

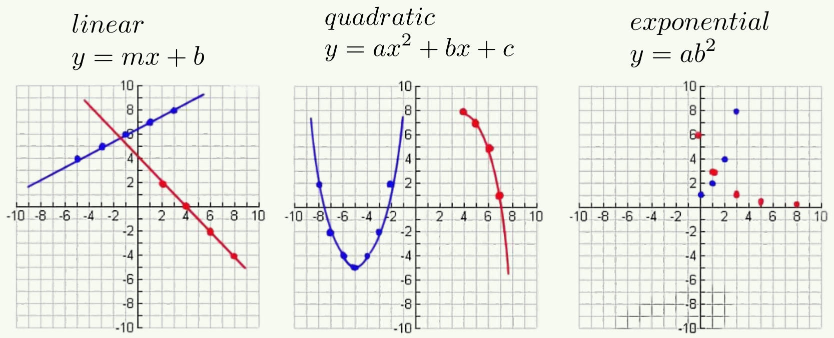
انواع توابع:

تابع خطی: $f(x) = mx + b$ (example: $f(x) = 2x + 1$)

تابع نمایی: $f(x) = a^x$ (example: $f(x) = 2^x$)

تابع درجه دوم: $f(x) = ax^2 + bx + c$ (example: $f(x) = x^2 - 3x + 2$)

تابع مثلثاتی: $f(x) = \sin(x), \cos(x), \tan(x)$



مفهوم حد:

حد در ریاضیات به بررسی رفتار یک تابع در نزدیکی یک نقطه خاص یا در بی‌نهایت می‌پردازد. حد به ما کمک می‌کند مقدار تابع را در نقطه‌ای مشخص کنیم،

حتی اگر تابع در آن نقطه تعریف نشده باشد. حد f(x) وقتی x به مقدار c نزدیک می‌شود، برابر با L است اگر:

$$\lim_{x \to c} f(x) = L$$

✓ این بدان معناست که هرچه x به c نزدیک‌تر شود، مقدار f(x) به L نزدیک می‌شود.

Example 1: Limit of a Simple Function

$$f(x) = 2x + 3 \to \lim_{x \to 2} f(x) = 2(2) + 3 = 7$$

Example 2: Limit of a Rational Function

$$f(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1} \to \lim_{x \to 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1}$$

Factorizing the numerator:

$$\frac{x^2 - 1}{x - 1} = \frac{(x-1)(x+1)}{x-1}$$

Canceling $x - 1$:

$$\lim_{x \to 1} (x + 1) = 1 + 1 = 2$$

حد از سمت راست و سمت چپ:

اگر حد تابع از دو سمت (راست و چپ) به مقدار یکسان میل کند، حد کلی وجود دارد.

حد از سمت راست: $\lim_{x \to c^+} f(x)$

حد از سمت چپ: $\lim_{x \to c^-} f(x)$

Example: Piecewise Function $\to f(x) = \begin{cases} x+1, & x > 0 \\ x-1, & x \leq 0 \end{cases}$

Finding the limit at $x = 0$:

Right-hand limit $(x \to 0^+) \to \lim_{x \to 0^+} f(x) = 0 + 1 = 1$

Left-hand limit $(x \to 0^-) \to \lim_{x \to 0^-} f(x) = 0 - 1 = -1$

Since $\lim_{x \to 0^+} \neq \lim_{x \to 0^-}$, the overall limit does not exist at $x = 0$.

مفهوم پیوستگی:

پیوستگی به معنای آن است که نمودار تابع در نقطه‌ای خاص شکسته یا گسسته نباشد.

تابع f(X) در نقطه X=C پیوسته است اگر سه شرط زیر برقرار باشد:
۱. باید f(C) تعریف شده باشد

۲. حد f(X) وقتی X→C وجود داشته باشد: $\lim_{x \to c} f(x)$ exists

۳. مقدار تابع برابر با حد باشد: $\lim_{x \to c} f(x) = f(c)$

Example 1: Continuous Function
The function $f(x) = x^2$ is continuous at every real number x :

$$\lim_{x \to c} f(x) = c^2, \quad f(c) = c^2$$

Example 2: Discontinuous Function

The function $f(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x - 1}$ has a discontinuity at $x = 1$:
At $x = 1$, both numerator and denominator are 0, so the function is undefined.
However, the limit $\lim_{x \to 1} f(x) = 2$, so there is a removable discontinuity.

تمرین:

HW 1:
Determine if the following function is continuous at $x = 2$:

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & x \neq 2 \\ 5, & x = 2 \end{cases}$$

HW 2:
Check if $f(x) = |x|$ is continuous at $x = 0$:
$f(0) = 0$
The limit $\lim_{x \to 0} f(x) = 0$
Since $\lim_{x \to 0} f(x) = f(0)$, the function is continuous at $x = 0$

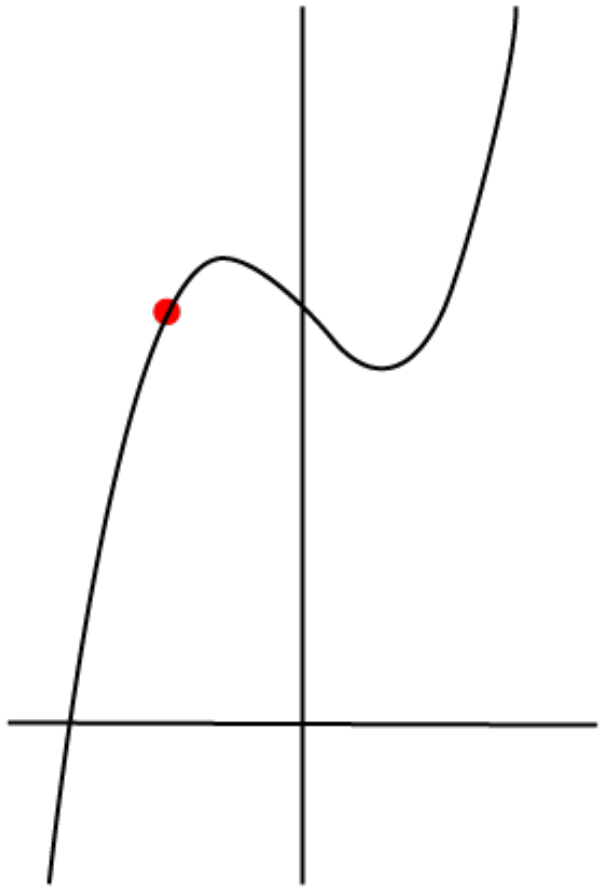
ارتباط حد و پیوستگی چیست؟

✓ اگر حد تابع در نقطه‌ای وجود داشته باشد و با مقدار تابع برابر باشد، تابع در آن نقطه پیوسته است.

✓ اگر تابع در نقطه‌ای تعریف نشده باشد یا حد در آن نقطه وجود نداشته باشد، تابع گسسته است.

$$\boxed{\begin{array}{l} f+g, \quad f-g, \quad fg \\ cf, \quad f \circ g \to f(g(x)) \\ \dfrac{f}{g}, \quad g(a) \neq 0 \end{array}}$$

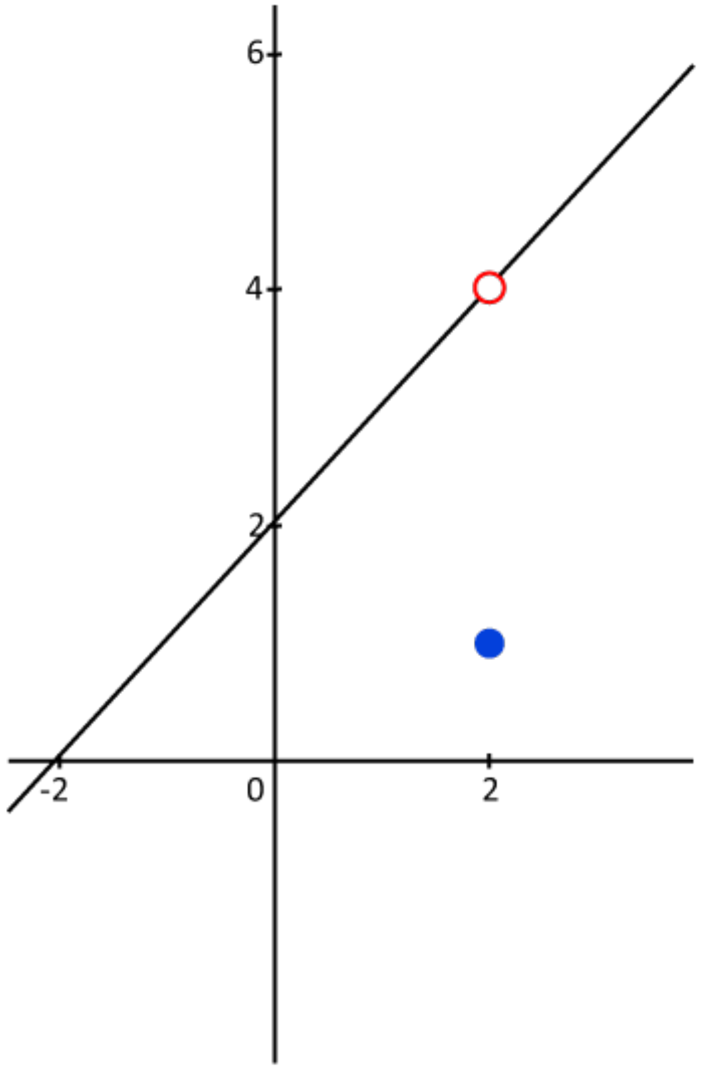
$$f(x) = x^3 - x + 3 \text{ at } x = -1$$



1. $\lim\limits_{x\to -1^-}\left(x^3 - x + 3\right) = \lim\limits_{x\to -1^+}\left(x^3 - x + 3\right) = 3$
2. $f(-1) = (-1)^3 - (-1) + 3 = 3$

Therefore, since $\lim\limits_{x\to -1} f(x) = 3$ and $f(-1) = 3$ is defined, then function $f(x)$ is continuous at $x = -1$

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - 4}{x - 2} & , x \neq 2 \\ 1 & , x = 2 \end{cases}$$



1. $\lim\limits_{x\to 2}\left(\dfrac{x^2 - 4}{x - 2}\right) = \lim\limits_{x\to 2^-}\left(\dfrac{\cancel{(x-2)}(x+2)}{\cancel{(x-2)}}\right) = \lim\limits_{x\to 2}(x+2) = 4$
2. $f(2) = 1$

However, $4 \neq 1$. Therefore, because $\lim\limits_{x\to 2} f(x) \neq f(2)$ the function $f(x)$ is discontinuous at $x = 2$

تعریف مشتق با استفاده از حد:

مشتق تابع f(x) در نقطه x=a، نرخ تغییر لحظه‌ای تابع در آن نقطه است. تعریف رسمی به صورت زیر است:

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

f'(a) بیانگر شیب خط مماس بر نمودار تابع f(x) در نقطه x=a است.

صورت کسر (f(a+h)−f(a)) نشان‌دهنده تغییرات تابع است.

مخرج کسر (h) تغییرات ورودی را نشان می‌دهد.

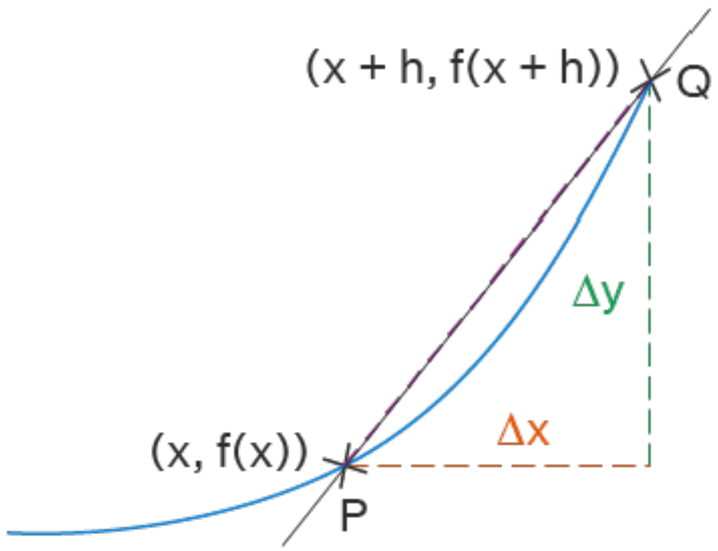
حد تضمین می‌کند که این نرخ تغییر برای بازه‌های بسیار کوچک حول a محاسبه شود.

چگونه شیب خط‌مماس محاسبه می‌شود؟

۱. ابتدا دو نقطه روی نمودار تابع در نظر بگیرید:

$$P \to (x, f(x))$$

$$Q \to (x+h, f(x+h))$$



$$\text{Slope} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

$$= \frac{f(x+h) - f(x)}{(x+h) - x}$$

$$= \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

۲. خط PQ خط قاطع است و شیب آن به‌صورت زیر محاسبه می‌شود:

۳. برای یافتن شیب خط مماس، h را به صفر میل می‌دهیم تا دو نقطه P و Q بی‌نهایت به هم نزدیک شوند:

$$\textit{Slope of tangent line} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

شیب خط مماس

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

$$\to \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{dy}{dx}$$

نشان‌گذاری لایبنیتز dy/dx : برای نشان دادن مشتق استفاده می‌شود.

مشتق، اگر وجود داشته باشد، تغییرات لحظه‌ای f(x) نسبت به x را کمی‌سازی می‌کند.

فرایند یافتن مشتق را مشتق‌گیری (Differentiation) می‌گویند.

Example: Find the derivative of $f(x) = x^2$.

Use the formula for the derivative $\rightarrow f'(x) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(x+h) - f(x)}{h}$

Substitute $f(x) = x^2 \rightarrow f'(x) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{(x+h)^2 - x^2}{h}$

Expand $(x+h)^2 \rightarrow f'(x) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{x^2 + 2xh + h^2 - x^2}{h}$

Simplify the numerator $\rightarrow f'(x) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{2xh + h^2}{h}$

Factor h from the numerator $\rightarrow f'(x) = \lim\limits_{h \to 0} (2x + h)$

Take the limit as $h \to 0 \rightarrow f'(x) = 2x$

قواعدپایه مشتق گیری

1. Derivative of a Constant:
If c is a constant:

$$\frac{d}{dx}[c] = 0$$

Example: $\frac{d}{dx}[5] = 0$

2. Derivative of a Linear Function:
If $f(x) = ax + b,$ the derivative is the coefficient of x :

$$\frac{d}{dx}[ax + b] = a$$

Example: $\frac{d}{dx}[3x + 2] = 3$

3. Power Rule:
If $f(x) = x^n$ (where n is a constant):

$$\frac{d}{dx}[x^n] = n \cdot x^{n-1}$$

Examples:

$$\frac{d}{dx}[x^2] = 2x$$
$$\frac{d}{dx}[x^3] = 3x^2$$
$$\frac{d}{dx}[x] = 1 \text{ (since } x = x^1)$$

قواعدپایه مشتق گیری

4. Sum or Difference Rule:
The derivative of a sum or difference of two functions is:

$$\frac{d}{dx}[f(x)+g(x)] = \frac{d}{dx}[f(x)] + \frac{d}{dx}[g(x)], \qquad \frac{d}{dx}[f(x)-g(x)] = \frac{d}{dx}[f(x)] - \frac{d}{dx}[g(x)]$$

Example: $\frac{d}{dx}[x^2+3x] = \frac{d}{dx}[x^2] + \frac{d}{dx}[3x] = 2x+3$

5. Constant Multiplication Rule:
If c is a constant and $f(x)$ is a function:

$$\frac{d}{dx}[c \cdot f(x)] = c \cdot \frac{d}{dx}[f(x)]$$

Example: $\frac{d}{dx}[3x^2] = 3 \cdot \frac{d}{dx}[x^2] = 3 \cdot 2x = 6x$

6. Derivative of Exponential Functions (Base e):
If $f(x) = e^x$:

$$\frac{d}{dx}[e^x] = e^x$$

Example: $\frac{d}{dx}[e^x] = e^x$

Proof Using the Definition of Derivative:

From the definition of the derivative: $\frac{d}{dx}[e^x] = \lim_{h\to 0} \frac{e^{x+h}-e^x}{h}$.

Using the property of exponents: $e^{x+h} = e^x \cdot e^h$.

Substituting this into the limit: $\frac{d}{dx}[e^x] = \lim_{h\to 0} \frac{e^x \cdot e^h - e^x}{h}$.

Factoring e^x : $\frac{d}{dx}[e^x] = e^x \cdot \lim_{h\to 0} \frac{e^h-1}{h}$.

The limit $\lim_{h\to 0} \frac{e^h-1}{h} = 1$. Therefore: $\frac{d}{dx}[e^x] = e^x \cdot 1 = e^x$.

Conclusion: $\rightarrow \frac{d}{dx}[e^x] = e^x$.

چرا مشتق e^x یک ویژگی منحصربه‌فرد دارد: نرخ تغییر آن (یعنی مشتق) در هر نقطه برابر مقدار خود تابع در آن نقطه است.

به عبارت دیگر، این تابع با سرعتی تغییر می‌کند که برابر مقدار خودش است.

قواعدپایه مشتق گیری

7. Derivatives of Trigonometric Functions:

$$\frac{d}{dx}[\sin(x)] = \cos(x), \qquad \frac{d}{dx}[\cos(x)] = -\sin(x), \frac{d}{dx}[\tan(x)] = \sec^2(x), \quad \text{if } \cos(x) \neq 0$$

8. Product Rule:

$$\frac{d}{dx}[f(x) \cdot g(x)] = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$$

Example:

$$\frac{d}{dx}[x^2 \cdot \sin(x)] = \frac{d}{dx}[x^2] \cdot \sin(x) + x^2 \cdot \frac{d}{dx}[\sin(x)] = 2x \cdot \sin(x) + x^2 \cdot \cos(x)$$

9. Quotient Rule: $\longrightarrow$ قاعده خارج‌قسمت

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right] = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{[g(x)]^2}, \quad \text{if } g(x) \neq 0$$

Example:

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{x}{\sin(x)}\right] = \frac{\frac{d}{dx}[x] \cdot \sin(x) - x \cdot \frac{d}{dx}[\sin(x)]}{[\sin(x)]^2} = \frac{\sin(x) - x \cdot \cos(x)}{\sin^2(x)}$$

10. Chain Rule:

$$\frac{dy}{dx} = f'(g(x)) \cdot g'(x), \quad \text{if } y = f(g(x))$$

Example:

$$\frac{d}{dx}[\sin(x^2)] = \cos(x^2) \cdot \frac{d}{dx}[x^2] = \cos(x^2) \cdot 2x$$

Explanation of the Chain Rule:

$TheChainRulestates:$

1. Differentiate the outer function $f(g(x))$ with respect to the inner function $g(x)$.
2. Multiply the result by the derivative of the inner function $g(x)$.

Formula:

If: $y = f(g(x))$, then: $\frac{dy}{dx} = f'(g(x)) \cdot g'(x)$.

Example 1: Derivative of $y = (3x^2 + 5)^4$

Inner function: $g(x) = 3x^2 + 5$

Outer function: $f(u) = u^4$, where $u = g(x)$.

Derivative of the outer function: $f'(u) = 4u^3$.

Derivative of the inner function: $g'(x) = 6x$.

Using the Chain Rule: $\frac{dy}{dx} = f'(g(x)) \cdot g'(x) = 4(3x^2 + 5)^3 \cdot 6x$.

Simplify: $\frac{dy}{dx} = 24x(3x^2 + 5)^3$.

Example 2: Derivative of $y = e^{x^2}$

Inner function: $g(x) = x^2$

Outer function: $f(u) = e^u$, where $u = g(x)$.

Derivative of the outer function: $f'(u) = e^u$.

Derivative of the inner function: $g'(x) = 2x$.

Using the Chain Rule: $\frac{dy}{dx} = f'(g(x)) \cdot g'(x) = e^{x^2} \cdot 2x$.

Final result: $\frac{dy}{dx} = 2xe^{x^2}$.

Example 3: Derivative of $y = \ln(2x + 1)$

Inner function: $g(x) = 2x + 1$

Outer function: $f(u) = \ln(u)$, where $u = g(x)$.

Derivative of the outer function: $f'(u) = \frac{1}{u}$.

Derivative of the inner function: $g'(x) = 2$.

Using the Chain Rule: $\frac{dy}{dx} = f'(g(x)) \cdot g'(x) = \frac{1}{2x + 1} \cdot 2$.

Final result: $\frac{dy}{dx} = \frac{2}{2x + 1}$.

HW:

1.Find the derivative of $y = (x^2 + 1)^5 \cdot e^x$.

2.Find the derivative of $y = \sin(3x^2)$.

3.Find the derivative of $y = \ln(2x + 1)$.