Session 8

Critical Points & Hessian Matrix

A Geometric and Analytical Approach

Applied Mathematics for AI | Hobot Academy | Zahra Amini

Hobat Aacademy

Telegram & Instagram & YouTube: @hobotacademy & LinkedIn: @zahraamini-ai

www.hobotacademy.com

مشتقات مرتبه دوم: تحدب و تقعر

تحدب (Convex) چیست؟

یک تابع در بازه‌ای تحدب است اگر نمودار آن به سمت بالا باشد، به‌گونه‌ای که خط مماس بر هر نقطه از نمودار زیر آن قرار گیرد.

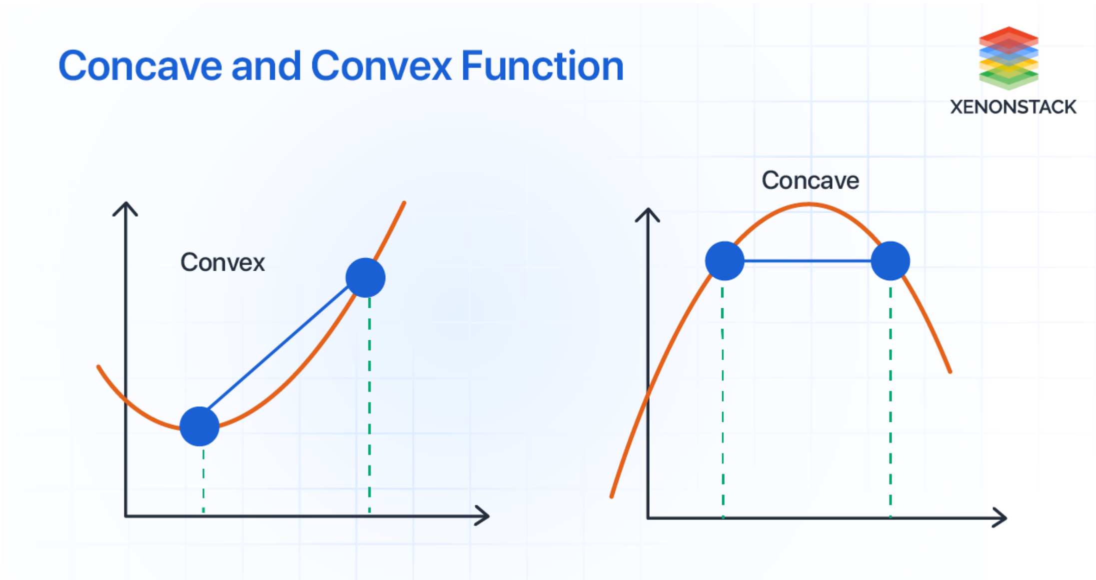
تقعر (Concave) چیست؟

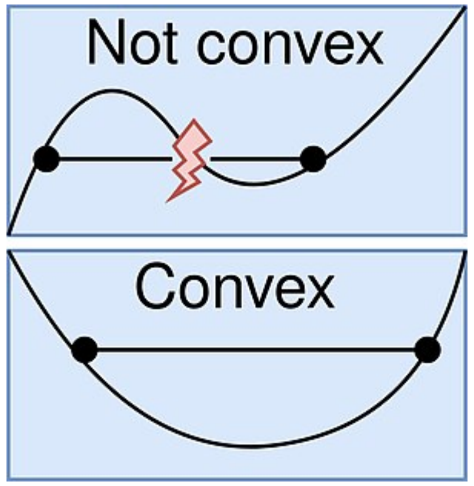
یک تابع در بازه‌ای تقعر است اگر نمودار آن به سمت پایین باشد، به‌گونه‌ای که خط مماس بر هر نقطه از نمودار بالای آن قرار گیرد.

شرط:

اگر $f''(x)>0$، تابع در بازه موردنظر محدب است.

اگر $f''(x)<0$، تابع در بازه موردنظر مقعر است.





Example: Analyze the Function $f(x) = x^3 - 3x^2 + 4$

1. Calculate Derivatives:

First derivative: $f'(x) = 3x^2 - 6x$.

Second derivative: $f''(x) = 6x - 6$.

2. Sign Analysis of $f''(x)$:

Set $f''(x) = 6x - 6 = 0 \Rightarrow x = 1$.

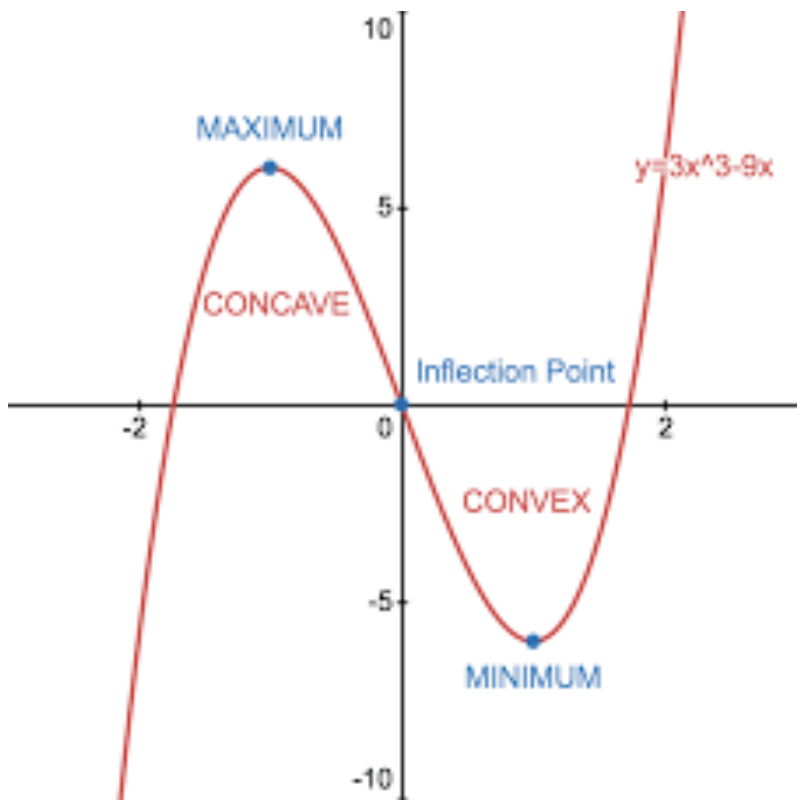
For $x < 1 : f''(x) < 0 \Rightarrow$ Concave.

For $x > 1 : f''(x) > 0 \Rightarrow$ Convex.

3. Conclusion:

The function $f(x)$ is concave in $(-\infty, 1)$ and convex in $(1, \infty)$.

نقطه عطف
Inflection Point



نقطه‌ای که در آن تابع از تقعر به تحدب یا برعکس تغییر حالت می‌دهد.

شرط لازم: $f''(x)=0$.
شرط کافی: علامت $f''(x)$ در دو طرف نقطه تغییر کند.

ماکزیمم و مینیمم محلی

نقاطی که تابع در آن‌ها به ترتیب بیشترین یا کمترین مقدار محلی را دارد.

شرط لازم: $f'(x)=0$
اگر $f''(x)>0$: مینیمم محلی (**Local minimum**)
اگر $f''(x)<0$: ماکزیمم محلی (**Local maximum**)

Example: Analyze the Function $\rightarrow f(x)=x^3-6x^2+12x-8$

1. Calculate Derivatives:

First derivative: $f'(x)=3x^2-12x+12.$
Second derivative: $f''(x)=6x-12.$

2. Critical Points:

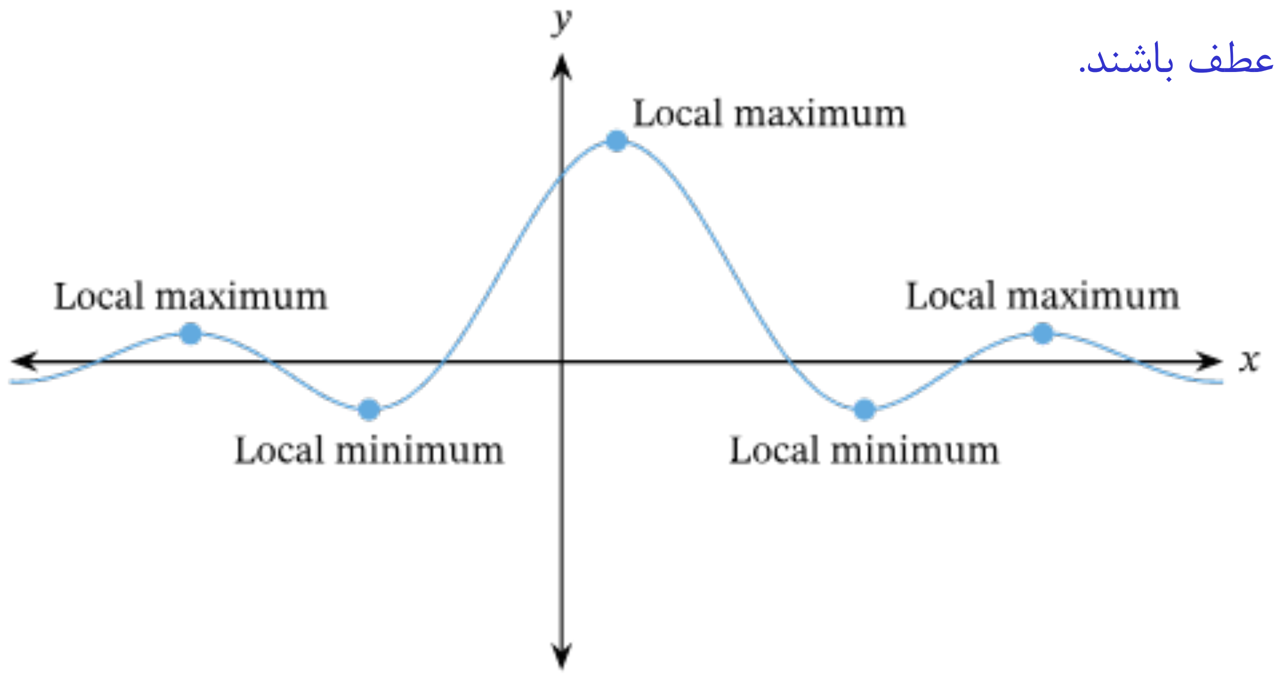
Solve $f'(x)=0 \Rightarrow 3x^2-12x+12=0 \Rightarrow x=2.$

3. Evaluate $f''(x)$ **:**

At $x=2, f''(2)=6(2)-12=0.$
Since $f''(x)$ does not change sign at $x=2,$ it is neither an inflection point nor an extremum.

مشتقات مرتبه دوم، نقاط بحرانی(**Critical Points**)

نقاط بحرانی یک تابع مقادیر **x** هستند که در آن‌ها مشتق اول تابع، یعنی $f'(x)$، صفر یا تعریف‌نشده باشد.



این نقاط اهمیت زیادی دارند زیرا می‌توانند نشان‌دهنده ماکزیمم، مینیمم یا نقاط عطف باشند.

شرایط:

یک نقطه $x=c$ نقطه بحرانی است اگر: $f'(c)=۰$

یا $f'(c)$ تعریف‌نشده باشد.

انواع نقاط بحرانی

ماکزیمم محلی: تابع در این نقطه به صورت محلی بیشترین مقدار را دارد.

مینیمم محلی: تابع در این نقطه به صورت محلی کمترین مقدار را دارد.

نقطه زینی: تابع در این نقطه تغییر رفتار می‌دهد اما ماکزیمم یا مینیمم نیست.

مراحل یافتن نقاط بحرانی

۱. مشتق اول $f'(x)$ را محاسبه کنید.

۲. معادله $f'(x)=۰$ را حل کنید یا نقاطی را بیابید که در آن‌ها $f'(x)$ تعریف‌نشده باشد.

۳. رفتار تابع را در اطراف هر نقطه بحرانی با استفاده از آزمون مشتق اول یا آزمون مشتق دوم بررسی کنید.

آزمون مشتق اول

علامت $f'(x)$ را در بازه‌هایی که شامل نقاط بحرانی هستند تحلیل کنید:

اگر $f'(x)$ از مثبت به منفی تغییر کند، $x=c$ یک ماکزیمم محلی است.

اگر $f'(x)$ از منفی به مثبت تغییر کند، $x=c$ یک مینیمم محلی است.

اگر $f'(x)$ تغییر علامت ندهد، $x=c$ نه ماکزیمم است و نه مینیمم.

آزمون مشتق دوم

مشتق دوم $f''(x)$ را محاسبه کنید و مقدار $f''(c)$ را برای هر نقطه بحرانی **c** بررسی کنید:

اگر $f''(c)>۰$، $x=c$ یک مینیمم محلی است (نمودار در این نقطه رو به بالا است).

اگر $f''(c)<۰$، $x=c$ یک ماکزیمم محلی است (نمودار در این نقطه رو به پایین است).

اگر $f''(c)=۰$، آزمون نتیجه‌ای نمی‌دهد و نیاز به بررسی‌های بیشتری است.

تفاوت گلوبال و لوکال **Global vs Local Extremes**:

✓ ماکزیمم و مینیمم محلی فقط رفتار تابع را در یک محدوده کوچک (محله اطراف نقطه **c**) بررسی می‌کنند.

✓ ماکزیمم و مینیمم مطلق رفتار تابع را در کل دامنه بررسی می‌کنند.

✓ تابع می‌تواند همزمان ماکزیمم/مینیمم محلی و مطلق داشته باشد.

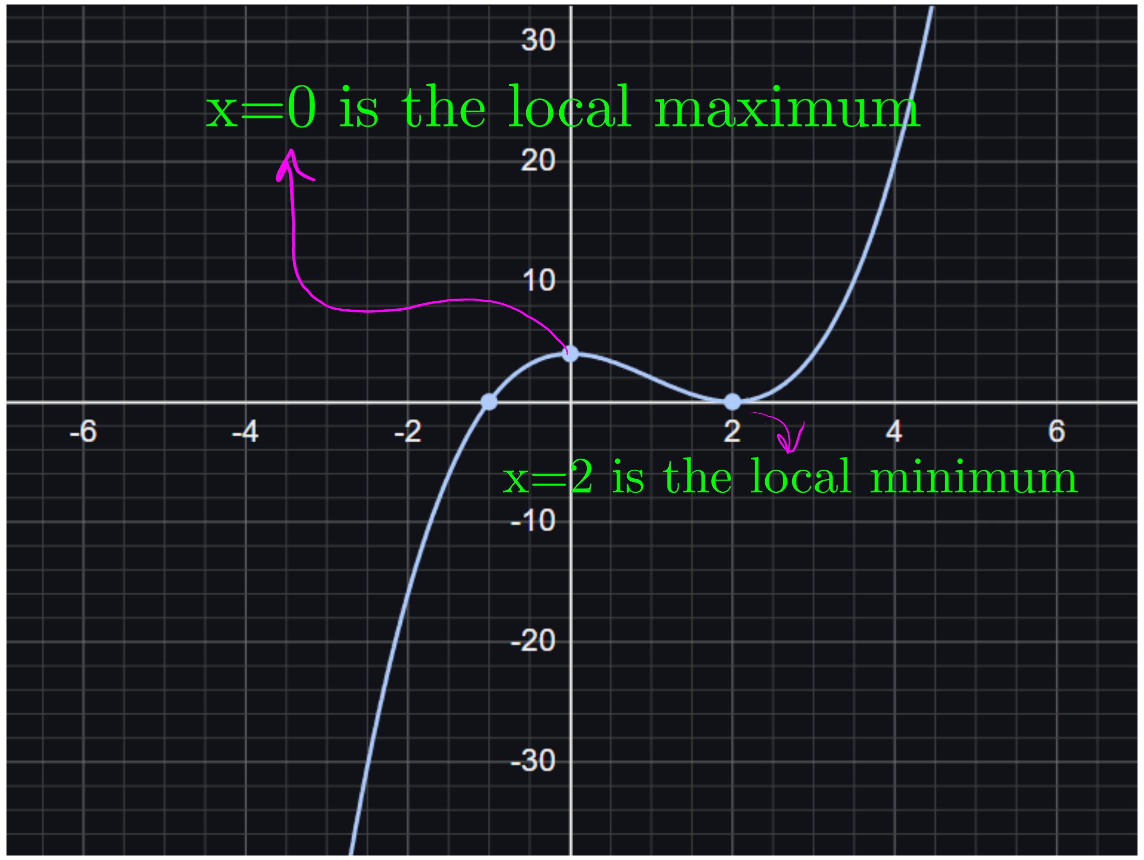
Example: Analyze the Critical Points of $f(x) = x^3 - 3x^2 + 4$

1.Compute the Derivatives:

1.1. First derivative: $f'(x) = 3x^2 - 6x.$

1.2. Solve $f'(x) = 0:\ 3x^2 - 6x = 0 \Rightarrow 3x(x-2) = 0. \Rightarrow$ Critical points: $x = 0$ and $x = 2.$

1.3. Second Derivative: $f''(x) = 6x - 6.$



2. First Derivative Test

x	$f'(x)$	Behavior of the Function	Result
$x < 0$	$f'(x) > 0$	Function is increasing.	
$x = 0$	$f'(x) = 0$	Critical point.	Local maximum.
$0 < x < 2$	$f'(x) < 0$	Function is decreasing.	
$x = 2$	$f'(x) = 0$	Critical point.	Local minimum.
$x > 2$	$f'(x) > 0$	Function is increasing.	

3. Second Derivative Test

x	$f''(x)$	**Result**
$x = 0$	$f''(0) = -6$	$f''(x) < 0$: Local maximum.
$x = 2$	$f''(2) = 6$	$f''(x) > 0$: Local minimum.

4. Final Results

Critical Point	**Type**	**Explanation**
$x = 0$	Local maximum	The function reaches a local peak at $x = 0$.
$x = 2$	Local minimum	The function reaches a local trough at $x = 2$.

نقاط بحرانی | نقطه زینی (**Saddle Point**)

نقطه زینی (**Saddle Point**)

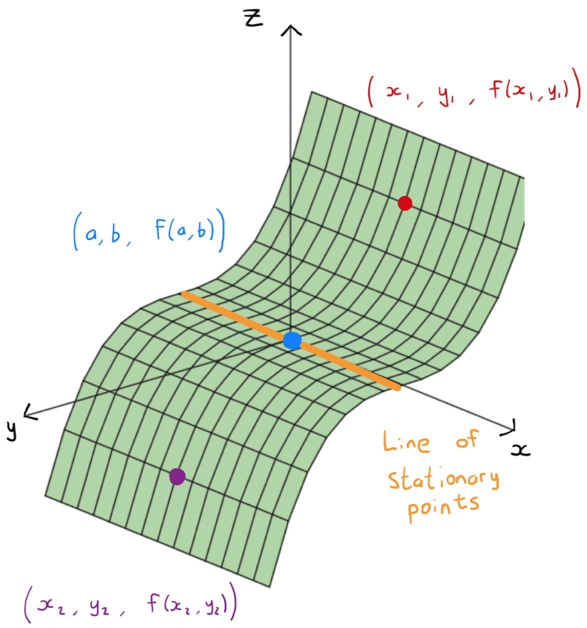
نقطه زینی **x=c** یک نقطه بحرانی از یک تابع است که در آن:

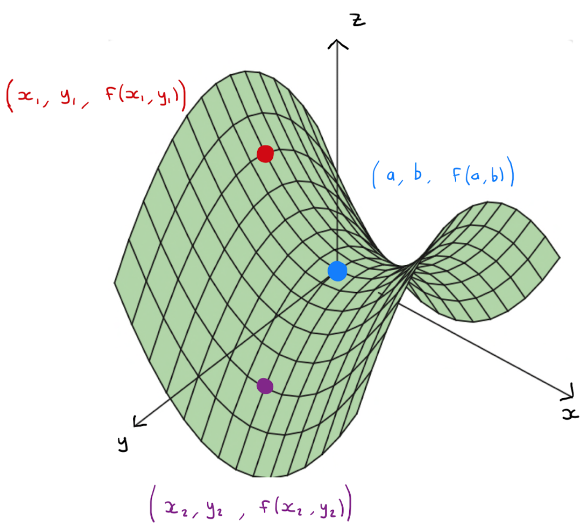
مشتق اول برابر صفر است (**f ' (c)**=۰).
اما نقطه زینی نه ماکزیمم محلی است و نه مینیمم محلی.

این بدان معناست که رفتار تابع در اطراف نقطه زینی تغییر می‌کند، اما تابع به اوج (ماکزیمم) یا کف (مینیمم) نمی‌رسد.
به عبارت دیگر، در یک طرف نقطه زینی تابع ممکن است صعود کند و در طرف دیگر نزول داشته باشد.

تفاوت با ماکزیمم و مینیمم:

✓ در ماکزیمم محلی، **f(x)** مقدار بیشتری نسبت به همسایگان دارد.
✓ در مینیمم محلی، **f(x)** مقدار کمتری نسبت به همسایگان دارد.
✓ اما در نقطه زینی، تابع ممکن است از یک طرف افزایش و از طرف دیگر کاهش داشته باشد.





آزمون‌های شناسایی نقطه زینی:

۱. آزمون مشتق اول:
▪ اگر **f ' (x)**=۰ باشد و علامت **f ' (x)** در اطراف نقطه تغییر نکند، ممکن است نقطه زینی داشته باشیم.

۲. آزمون مشتق دوم:
▪ اگر **f '' (x)**=۰، آزمون مشتق دوم برای تعیین ماهیت نقطه بحرانی کافی نیست.
▪ نیاز به بررسی رفتار تابع در اطراف نقطه داریم.

ماتریس هسین (**Hessian Matrix**)

یک ماتریس مربعی است که از مشتقات دوم جزئی یک تابع چندمتغیره تشکیل شده است.

این ماتریس در تحلیل رفتار تابع در نقاط بحرانی، به‌ویژه تعیین نوع نقاط بحرانی (ماکزیمم، مینیمم یا نقطه زینی) بسیار مفید است.

برای یک تابع دو متغیره **f(x,y)**، ماتریس هسین به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$H = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{bmatrix}$$

✓ نقاط زینی، رفتار خاصی از تابع را نشان می‌دهند که نه اوج هستند و نه کف، اما به دلیل تغییر رفتار تابع در اطراف آن‌ها، اهمیت ویژه‌ای در تحلیل توابع و نمودارها دارند.

✓ اگر تابع **f(x,y)** دو بار مشتق‌پذیر باشد، $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ آنگاه بنابراین ماتریس هسین متقارن است

Example 1:

Consider the function $f(x) = x^3$.

Solution:

First Derivative:

$f'(x) = 3x^2$

$f'(x) = 0 \Rightarrow x = 0$ (critical point).

Second Derivative:

$f''(x) = 6x$

At $x = 0 : f''(0) = 6(0) = 0 \Rightarrow$ The second derivative test is inconclusive.

Behavior of the Function:

For $x > 0 : f'(x) > 0,$ so the function is increasing.

For $x < 0 : f'(x) < 0,$ so the function is decreasing.

Conclusion:

At $x = 0,$ the function transitions from decreasing to increasing.

This is a saddle point because the function is neither a local maximum nor a local minimum.

Example 2 (Two-Dimensional):

Consider the function $f(x, y) = x^2 - y^2$.

Solution:

Partial Derivatives:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = -2y$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 0 \Rightarrow x = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 0 \Rightarrow y = 0$$

Critical point: $(0, 0)$.

Hessian Matrix:

The Hessian matrix H is formed from the second partial derivatives:

$$H = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$$

Determinant of the Hessian:

$\det(H) = (2)(-2) - (0)(0) = -4$

Since the determinant is negative, $(0, 0)$ is a saddle point.

Conclusion:

The point $(0, 0)$ is a saddle point because the function has a minimum along the x-axis (x^2) and a maximum along the y-axis $(-y^2)$.

آزمون هسین:

برای یک تابع دو متغیره **f(x,y)**، فرض کنید نقطه بحرانی (x_0, y_0) مشخص شده است.

ماتریس هسین **H** در این نقطه محاسبه شده و دترمینان آن به صورت زیر بررسی می‌شود:

دترمینان ماتریس هسین:

$$\det(H) = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)\left(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right) - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right)^2$$

Conditions Based on the Hessian Determinant:

$If \det(H) > 0 and \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} > 0,$ the critical point is a **local minimum**.

$If \det(H) > 0 and \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} < 0,$ the critical point is a **local maximum**.

$If \det(H) < 0,$ the critical point is a **saddle point**.

$If \det(H) = 0,$ the test is **inconclusive**.

کاربردهای مشتق در بهینه‌سازی

تعریف مسائل بهینه‌سازی	بهینه‌سازی فرایندی است که هدف آن یافتن مقدار بیشینه (ماکزیمم) یا کمینه (مینیمم) یک تابع است. این مفهوم در حوزه‌هایی مانند آمار، علم داده و یادگیری‌ماشین کاربرد فراوانی دارد.
مراحل کلی حل مسائل بهینه‌سازی	۱. مشتق‌گیری از تابع: مشتق تابع، نرخ تغییرات آن را نشان می‌دهد. ۲. یافتن نقاط بحرانی: نقاطی که در آن‌ها $f'(x)=0$ یا مشتق تعریف نشده باشد. ۳. بررسی نقاط بحرانی: با استفاده از مشتق دوم یا مقایسه مقادیر تابع در نقاط بحرانی و انتهایی، نوع نقطه (ماکزیمم، مینیمم یا نقطه عطف) مشخص می‌شود.

مشتق‌گیری ابزار اصلی برای یافتن ماکزیمم و مینیمم توابع تک‌متغیره است.

شرایط لازم: $f'(x)=0$ یا مشتق تعریف‌نشده.

شرایط کافی: استفاده از مشتق دوم برای بررسی نوع نقاط بحرانی.

Example 1: Finding the Maximum and Minimum of a Single-Variable Function

Consider the function $f(x) = -x^2 + 4x + 1$. Find its maximum and minimum values.

Step 1: Differentiate the Function

The first derivative is: $f'(x) = \frac{d}{dx}(-x^2 + 4x + 1) = -2x + 4.$

Step 2: Find the Critical Points

Solve $f'(x) = 0 : -2x + 4 = 0,$ which gives $x = 2.$

Step 3: Analyze the Critical Point Using the Second Derivative

Find the second derivative: $f''(x) = \frac{d}{dx}(-2x + 4) = -2.$

Since $f''(x) = -2 < 0,$ the function has a relative maximum at $x = 2.$

Step 4: Calculate the Function Value at the Critical Point

Evaluate $f(2) : f(2) = -2^2 + 4(2) + 1 = -4 + 8 + 1 = 5.$

Result:

The function has a maximum value of $f(x) = 5$ at $x = 2.$

Example 2: Analyzing Maximum and Minimum Using the Second Derivative

Consider the function $g(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 1$. Determine the nature of its critical points.

Step 1: Differentiate the Function

First derivative: $g'(x) = \frac{d}{dx}(x^3 - 6x^2 + 9x + 1) = 3x^2 - 12x + 9.$

Step 2: Find the Critical Points

Solve $g'(x) = 0 :$
$3x^2 - 12x + 9 = 0$
Divide by 3: $x^2 - 4x + 3 = 0$
Factorize: $(x - 1)(x - 3) = 0 \Rightarrow x = 1 \text{ and } x = 3.$

Step 3: Calculate the Second Derivative

$g''(x) = \frac{d}{dx}(3x^2 - 12x + 9) = 6x - 12.$

Step 4: Analyze the Nature of Critical Points

At $x = 1 :$
$g''(1) = 6(1) - 12 = -6$
Since $g''(1) < 0,$ $x = 1$ is a relative maximum.
At $x = 3 :$
$g''(3) = 6(3) - 12 = 6$
Since $g''(3) > 0,$ $x = 3$ is a relative minimum.

Step 5: Calculate the Function Values at Critical Points

$g(1) = 1^3 - 6(1)^2 + 9(1) + 1 = 1 - 6 + 9 + 1 = 5.$
$g(3) = 3^3 - 6(3)^2 + 9(3) + 1 = 27 - 54 + 27 + 1 = 1.$

Result:

Relative Maximum: $x = 1,$ $g(1) = 5.$
Relative Minimum: $x = 3,$ $g(3) = 1.$