Session 3

Linear Algebra Fundamentals

Applied Mathematics for AI | Hobot Academy | Zahra Amini

Hobat Aacademy

Telegram: @hobotacademy & Instagram:@hobotacademy & LinkedIn: @zahraamini-ai

www.hobotacademy.com

تعریف ترکیب خطی
Linear Combination

ترکیب خطی به معنای ساخت یک بردار جدید از ترکیب چند بردار موجود است که در این ترکیب، هر بردار با یک عدد حقیقی (اسکالر) ضرب و سپس جمع می‌شود.

برای بردارهای V و اسکالرهای C، ترکیب خطی به‌صورت زیر تعریف می‌شود:(که در آن w یک بردار جدید است.)

$$w = c_1v_1 + c_2v_2 + \cdots + c_nv_n$$

فرض کنید دو بردار زیر داریم:

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix}$$

و اسکالرهای C1=۲ و C۲=-۱ داده شده‌اند. ترکیب خطی این بردارها به‌صورت زیر است:

$$\mathbf{w} = 2\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} + (-1)\begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix} \longrightarrow \mathbf{w} = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -4 \\ -5 \\ -6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

تعریف اسپن (**Span**):

اسپن مجموعه تمام بردارهایی است که می‌توانند به‌صورت ترکیب خطی از یک مجموعه داده‌شده از بردارها ساخته شوند.

اگر $v_1, v_2, \ldots, v_n$ بردارهایی در فضای $\mathbb{R}^m$ باشند، اسپن این بردارها به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\mathrm{Span}(v_1, v_2, \ldots, v_n) = \{c_1v_1 + c_2v_2 + \cdots + c_nv_n \mid c_1, c_2, \ldots, c_n \in \mathbb{R}\}$$

بردارهای V۱ و V۲ زیر را در نظر بگیرید، اسپن V۱ و V۲ چیست؟

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathrm{Span}(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2) = \{c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 \mid c_1, c_2 \in \mathbb{R}\}$$

ترکیب خطی این دو بردار به شکل زیر است:

$$c_1\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + c_2\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} \longrightarrow \mathrm{Span}(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2) = \mathbb{R}^2$$

یعنی این دو بردار می‌توانند هر برداری در صفحه دوبعدی را تولید کنند.

وابستگی و استقلال خطی (**Linear Dependence and Independence**) و رنک ماتریس

وابستگی خطی چیست؟	اگر مجموعه‌ای از بردارها $v_1, v_2, \ldots, v_n$ وجود داشته باشند که یکی از آن‌ها بتواند به‌صورت ترکیب خطی از سایر بردارها بیان شود، این بردارها وابسته خطی هستند.
استقلال خطی چیست؟	بردارها $v_1, v_2, \ldots, v_n$ زمانی مستقل خطی هستند که هیچ برداری از این مجموعه نتواند به‌صورت ترکیب خطی از سایر بردارها بیان شود.
معیار استقلال خطی	برای بررسی استقلال خطی، باید ثابت کنیم که اگر: $$c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + \cdots + c_n\mathbf{v}_n = 0$$ تنها راه‌حل این معادله، ۰ = **cn** = ... = **c۲** = **c۱** باشد.
رنک ماتریس **Matrix Rank**	رنک (**Rank**) یک ماتریس تعداد سطرها یا ستون‌های مستقل خطی در ماتریس است. به عبارت دیگر، رنک نشان‌دهنده بعد فضای ستونی یا فضای سطری ماتریس است.
رنک ماتریس چه طور محاسبه می‌شود؟	۱. ماتریس را به فرم سطری کاهش‌یافته (**Row Reduced Echelon Form**) یا فرم مثلثی تبدیل کنید. ۲. تعداد سطرهای غیرصفر در این فرم، رنک ماتریس است.

فرض کنید ماتریس زیر داده شده است:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

هدف: تبدیل A به فرم مثلثی یا ردیفی کاهش‌یافته.

گام ۱: تنظیم ستون اول
از عنصر A[۱,۱]=۱ (در سطر اول) به‌عنوان محوری برای صفر کردن سایر عناصر در ستون اول استفاده می‌کنیم.

عملیات روی سطر دوم:

$$R_2 \to R_2 - 2R_1 \longrightarrow [2,4,6] - 2\,[1,2,3] = [0,0,0]$$

عملیات روی سطر سوم:

$$R_3 \to R_3 - R_1 \longrightarrow [1,1,1] - [1,2,3] = [0,-1,-2] \longrightarrow A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -2 \end{bmatrix}$$

گام ۲: تنظیم ستون دوم
به ستون دوم نگاه می‌کنیم. از عنصر غیرصفر A[۳,۲]=−۱ استفاده می‌کنیم تا ستون دوم را ساده کنیم.

نرمال‌سازی سطر سوم:

$$R_3 \to -R_3 \longrightarrow [0,-1,-2] \to [0,1,2] \longrightarrow A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

گام ۳: تنظیم ستون سوم
با استفاده از A[۳,۲]=۱ در سطر سوم، مقدار ستون سوم در سطر اول را صفر می‌کنیم:

$$R_1 \to R_1 - 2R_3 \longrightarrow [1,2,3] - 2\,[0,1,2] = [1,0,-1] \qquad A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

نتیجه: فرم ردیفی کاهش‌یافته
در این مرحله، ماتریس به فرم ردیفی کاهش‌یافته تبدیل شده است: $\longleftarrow$

$$A_{\text{RREF}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

تعداد سطرهای غیرصفر در این ماتریس رنک آن است:
Rank(A)=۲

تفسیر
رنک برابر با ۲ است، که نشان می‌دهد فضای برداری این ماتریس دوبعدی است و ستون‌ها یا سطرهای آن وابسته خطی هستند.

پایه و بعد فضاهای برداری

تعریف پایه (Basis)

پایه مجموعه‌ای از بردارها در یک فضای برداری است که:

✓ مستقل خطی باشند.
✓ بتوانند کل فضای برداری را اسپن کنند (Span).

تعریف بعد (Dimension)

بعد یک فضای برداری تعداد بردارهای موجود در هر پایه آن فضا است.

بردارهای $\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$ پایه R۲ هستند، زیرا:

✓ مستقل خطی‌اند.
✓ هر برداری در R۲ را می‌توان به صورت ترکیب خطی آن‌ها نوشت.

روش پیدا کردن پایه و بعد

استفاده از روش حذف گاوسی:

فضای ستونی ماتریس زیر را بررسی می‌کنیم:

$$A = \begin{bmatrix}1 & 2 & 1\\2 & 4 & 2\\1 & 1 & 1\end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix}1 & 2 & 1\\0 & 0 & 0\\0 & 1 & 0\end{bmatrix}$$

- تبدیل به فرم مثلثی
- انتخاب ستون‌های مستقل: از ماتریس نهایی مشخص است که ستون اول و سوم مستقل‌اند. بنابراین:

$$\text{Basis for Column Space}\left\{\begin{bmatrix}1\\2\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\2\\1\end{bmatrix}\right\} \rightarrow 2 = \text{Dimension}$$

فضای خنثی
Null Space

فضای خنثی ماتریس A شامل تمام بردارهای است که: A·x=۰

$$\text{Null Space}(A) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid A \cdot x = 0\}$$

Find the null space.

Solution: $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \end{bmatrix}$

$A \cdot x = 0 \quad \text{where} \quad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$

This gives: $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 + 2x_2 + 3x_3 \\ 2x_1 + 4x_2 + 6x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

Solve:
$x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0$

The second row is redundant. Rearranging, we get: $x_1 = -2x_2 - 3x_3$

The null space is: $\text{Null Space}(A) = \text{Span}\left\{ \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$

فضای ستونی

فضای ستونی ماتریس A، اسپن تمام ستون‌های آن است:

$$\text{Column Space}(A) = \text{Span}\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$$

که ai ستون‌های ماتریس A هستند.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \end{bmatrix}$$

The column space is spanned by:

$$\text{Column Space}(A) = \text{Span}\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ 6 \end{bmatrix} \right\}$$

Notice that all columns are linearly dependent. The basis for the column space is:

$$\text{Basis for Column Space} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \right\}$$

$$\text{Rank}(A) = 1$$

فضای سطری

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \end{bmatrix}$$

Row reduce A to row echelon form: $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

The row space is: $\text{Row Space}(A) = \text{Span}\left\{ \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \right\}$

$\text{Rank}(A) = 1$

ماتریس انتقال
Transformation Matrix

تغییر پایه به معنای نمایش بردارها در یک سیستم مختصات جدید است. این کار با استفاده از ماتریس انتقال انجام می‌شود.

اگر $B = \{b_1, b_2, \ldots, b_n\}$ یک پایه جدید باشد، ماتریس انتقال P شامل بردارهای پایه به صورت ستون‌های ماتریس است:

$$P = \begin{bmatrix} b_1 & b_2 & \ldots & b_n \end{bmatrix}$$

برای تبدیل یک بردار v از پایه اصلی به پایه جدید:

$$[v]_B = P^{-1} \cdot v$$

برای بازگشت به پایه اصلی:

$$v = P \cdot [v]_B$$

$$v = \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \end{bmatrix}, \quad B = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

$$1.\ \text{Transformation Matrix: } P = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$2.\ \text{New Coordinates: } [v]_B = P^{-1} \cdot v$$

$$\text{Compute } P^{-1}:$$

$$P^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$[v]_B = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 5 \end{bmatrix}$$