Session 2

Linear Algebra Fundamentals

Applied Mathematics for AI | Hobot Academy | Zahra Amini

Hobat Aacademy

Telegram: @hobotacademy & Instagram:@hobotacademy & LinkedIn: @zahraamini-ai

www.hobotacademy.com

Matrix Multiplication

- Standard Multiplication ضرب استاندارد
- Hadamard Product ضرب عنصر به عنصر
- Outer Product ضرب خارجی
- Kronecker Product ضرب کرونکر
- Inner Product ضرب داخلی یا اسکالر
- Dot Product ضرب نقطه‌ای
- Cross Product ضرب متقاطع
- Tensor Product ضرب تانسورها

Matrix Multiplication | ضرب ماتریس

Standard Multiplication ضرب استاندارد ←

ضرب استاندارد چیست؟

ضرب استاندارد ماتریس، یک عملیات ریاضی است که برای ضرب دو ماتریس استفاده می‌شود

و برای اینکه ضرب دو ماتریس A و B تعریف شود، تعداد ستون‌های ماتریس اول باید برابر با تعداد سطرهای ماتریس دوم باشد

$$C_{ij} = \sum_{k=1}^{n} A_{ik} \cdot B_{kj}$$

Where:
Aik: Element in row i and column k of matrix A
Bkj: Element in row k and column j of matrix B

مثال

:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 7 & 8 \\ 9 & 10 \\ 10 & 12 \end{bmatrix}$$

Step 1 Check Dimensions

Matrix A ---> 2×3
Matrix B ---> 3×2
Resulting matrix AB ---> 2×2

Step 2 Compute Elements of Matrix C

The resulting matrix C will have elements:

$$C = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & C_{22} \end{bmatrix}$$

Calculate C11---> C11=(1·7)+(2·9)+(3·11)=7+18+33=58

Calculate C12---> C12=(1·8)+(2·10)+(3·12)=8+20+36=64

Calculate C21---> C21=(4·7)+(5·9)+(6·11)=28+45+66=139

Calculate C22---> C22=(4·8)+(5·10)+(6·12)=32+50+72=154

Step 3: Write the Resulting Matrix

$$C = \begin{bmatrix} 58 & 64 \\ 139 & 154 \end{bmatrix}$$ ✔

EX1:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$$

$C = A \times B =$?

EX2:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 4 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 0 \\ 5 & -2 \end{bmatrix}$$

$C = A \times B =$?

ضرب عنصر به عنصر چیست؟

ضرب عنصر به عنصر که به نام ضرب هادامارد نیز شناخته می‌شود، یک عمل ریاضی است که در آن

هر عنصر یک ماتریس با عنصر متناظر آن در ماتریس دیگر ضرب می‌شود.

برخلاف ضرب ماتریس استاندارد، ضرب هادامارد نیازمند این است که هر دو ماتریس دارای ابعاد یکسان باشند.

$$C_{ij} = A_{ij} \cdot B_{ij}$$

Where:
Cij: Element at row i and column j of the resulting matrix C
Aij: Corresponding element from matrix A
Bij: Corresponding element from matrix B

مثال

:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 7 & 8 & 9 \\ 10 & 11 & 12 \end{bmatrix}$$

Step 1: Check Dimensions

Both matrices A and B have dimensions 2 × 3, so the Hadamard Product can be performed.

Step 2: Compute the Elements of Matrix C (Using the formula:)

Compute the elements of the first row:

$C11=1\cdot7=7$, $C12=2\cdot8=16$, $C13=3\cdot9=27$

Compute the elements of the second row:

$C21=4\cdot10=40$, $C22=5\cdot11=55$, $C23=6\cdot12=72$

Step 3: Write the Resulting Matrix

$$C = \begin{bmatrix} 7 & 16 & 27 \\ 4 & 5 & 72 \end{bmatrix}$$

ویژگی‌های ضرب هادامارد
ابعاد یکسان: هر دو ماتریس باید دارای ابعاد یکسان باشند
عملیات ساده‌تر: برخلاف ضرب استاندارد ماتریس، نیازی به جمع عناصر نیست
کاربردها: معمولاً در یادگیری ماشین و شبکه‌های عصبی برای وزن‌دهی یا فیلتر کردن داده‌ها استفاده می‌شود

ضرب ماتریس | Matrix Multiplication ⟵ ضرب خارجی Outer Product

ضرب خارجی چیست؟

ضرب خارجی یک عملیات ماتریسی است که دو بردار را ترکیب می‌کند و یک ماتریس ایجاد می‌کند. این عمل بردار اول را به شکل ستون و بردار دوم را به شکل سطر در نظر می‌گیرد و حاصل آن، ماتریسی است که هر عنصر آن از ضرب عضو متناظر از بردار اول و دوم تشکیل می‌شود.

If we have two vectors u (of size m x 1) and v (of size 1 x n), their outer product C is defined as:

$$C = u \otimes v \dashrightarrow C_{ij} = u_i \cdot v_j$$

whre:
ui: The i-th element of vector u
vj: The j-th element of vector v

مثال

:

$$u = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \qquad v = \begin{bmatrix} 4 & 5 \end{bmatrix}$$

Step 1: Check Dimensions
- Vector u has dimensions 3×1
- Vector v has dimensions 1×2
- The resulting matrix C will have dimensions 3×2

Step 2: Compute the Elements of the Resulting Matrix

Compute the elements of the first row:
$C11=1\cdot4=4,\ C12=1\cdot5=5$

Compute the elements of the second row:
$C21=2\cdot4=8,\ C22=2\cdot5=10$

Compute the elements of the third row:
$C31=3\cdot4=12,\ C32=3\cdot5=15$

Step 3: Write the Resulting Matrix

$$C = \begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 8 & 10 \\ 12 & 15 \end{bmatrix}$$ ✔

ضرب خارجی صرفاً بین دو بردار انجام می‌شود، نه بین دو ماتریس.

ضرب داخلی چیست؟

ضرب داخلی یا ضرب اسکالر یک عملیات ریاضی است که بین دو بردار با ابعاد یکسان انجام می‌شود. حاصل این عمل یک عدد اسکالر است. این عملیات در بسیاری از حوزه‌ها مانند جبر خطی، فیزیک، و یادگیری ماشین کاربرد دارد.

$$u \cdot v = \sum_{i=1}^{n} u_i \cdot v_i$$

Where:
ui : The i-th element of vector u
vi : The i-th element of vector v

مثال

:

$$u = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \qquad v = \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix}$$

u·v = (u1·v1) + (u2·v2) + (u3·v3)

(1·4) + (2·5) + (3·6) = 4+10+18 = 32

Final Result: u·v = 32 ✔

ویژگی‌ها

نتیجه اسکالر: برخلاف ضرب خارجی که یک ماتریس تولید می‌کند، ضرب داخلی یک عدد اسکالر تولید می‌کند

ابعاد برابر: دو بردار باید دارای تعداد عناصر برابر باشند

جابجایی‌پذیر u·v = v·u

خاصیت خطی u·(v+w) = u·v+u·w

کاربرد در یادگیری‌ماشین

ضرب داخلی برای تعیین زاویه بین دو بردار و بررسی تشابه بین بردارها استفاده می‌شود:

$$u \cdot v = \|u\| \cdot \|v\| \cdot \cos(\theta)$$

$$\cos(\theta) = \frac{a \cdot b}{||a||\ ||b||}$$

EX3:

$$u = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} \qquad v = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix} \qquad \theta = \ ?$$

اگر ضرب داخلی دو بردار صفر باشد u·v = 0

نشان می‌دهد که دو بردار عمود هستند

بردارها باید دارای تعداد عناصر برابر باشند

ضرب کرونکر چیست؟

ضرب کرونکر یک عملیات ریاضی بین دو ماتریس است که یک ماتریس بزرگ‌تر تولید می‌کند

در این ضرب، هر عنصر ماتریس اول در کل ماتریس دوم ضرب می‌شود

Given:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix}$$

The Kronecker Product $A \otimes B$ is:

$$A \otimes B = \begin{bmatrix} a_{11}B & a_{12}B \\ a_{21}B & a_{22}B \end{bmatrix}$$

Where each $a_{ij}B$ represents multiplying every element of B by a_{ij}.

ویژگی‌ها

Matrix Expansion: The resulting matrix is much larger than the input matrices.

Dimensions of A⊗B: $(m \cdot p) \times (n \cdot q)$

Not Commutative:

$A \otimes B \neq B \otimes A$

Associativity:

$(A \otimes B) \otimes C = A \otimes (B \otimes C)$

Distributive:

$A \otimes (B + C) = (A \otimes B) + (A \otimes C)$

Step 1: Compute Dimensions

- Matrix A: 2×2
- Matrix B: 2×2
- Dimensions of $A \otimes B$: $(2 \cdot 2) \times (2 \cdot 2) = 4 \times 4$

Step 2: Apply the Formula

Compute $A \otimes B$ element by element:

$$A \otimes B = \begin{bmatrix} 1 \cdot B & 2 \cdot B \\ 3 \cdot B & 4 \cdot B \end{bmatrix}$$

Calculate each block:

$$1 \cdot B = \begin{bmatrix} 0 & 5 \\ 6 & 7 \end{bmatrix}, \quad 2 \cdot B = \begin{bmatrix} 0 & 10 \\ 12 & 14 \end{bmatrix}$$

$$3 \cdot B = \begin{bmatrix} 0 & 15 \\ 18 & 21 \end{bmatrix}, \quad 4 \cdot B = \begin{bmatrix} 0 & 20 \\ 24 & 28 \end{bmatrix}$$

Combine the blocks:

$$A \otimes B = \begin{bmatrix} 0 & 5 & 0 & 10 \\ 6 & 7 & 12 & 14 \\ 0 & 15 & 0 & 20 \\ 18 & 21 & 24 & 28 \end{bmatrix}$$

EX4:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$$ $A \otimes B =$?

EX5:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}$$ $A \otimes B =$?

ضرب متقاطع چیست؟

ضرب متقاطع یک عملیات ریاضی است که بین دو بردار سه‌بعدی انجام می‌شود و حاصل آن یک بردار جدید است

برخلاف ضرب داخلی که نتیجه آن یک عدد اسکالر است، نتیجه ضرب متقاطع برداری است که

عمود بر هر دو بردار ورودی است

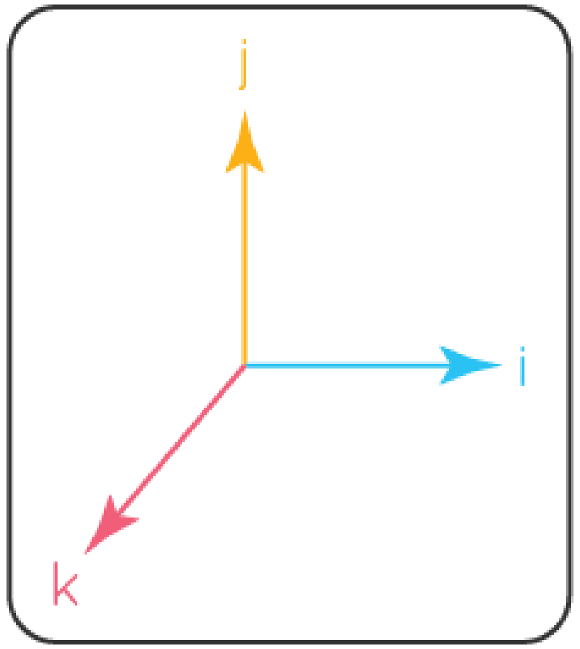
جهت آن با استفاده از قاعده دست راست تعیین می‌شود

$$\vec{a} = a_1\hat{i} + a_2\hat{j} + a_3\hat{k} \qquad \vec{b} = b_1\hat{i} + b_2\hat{j} + b_3\hat{k}$$

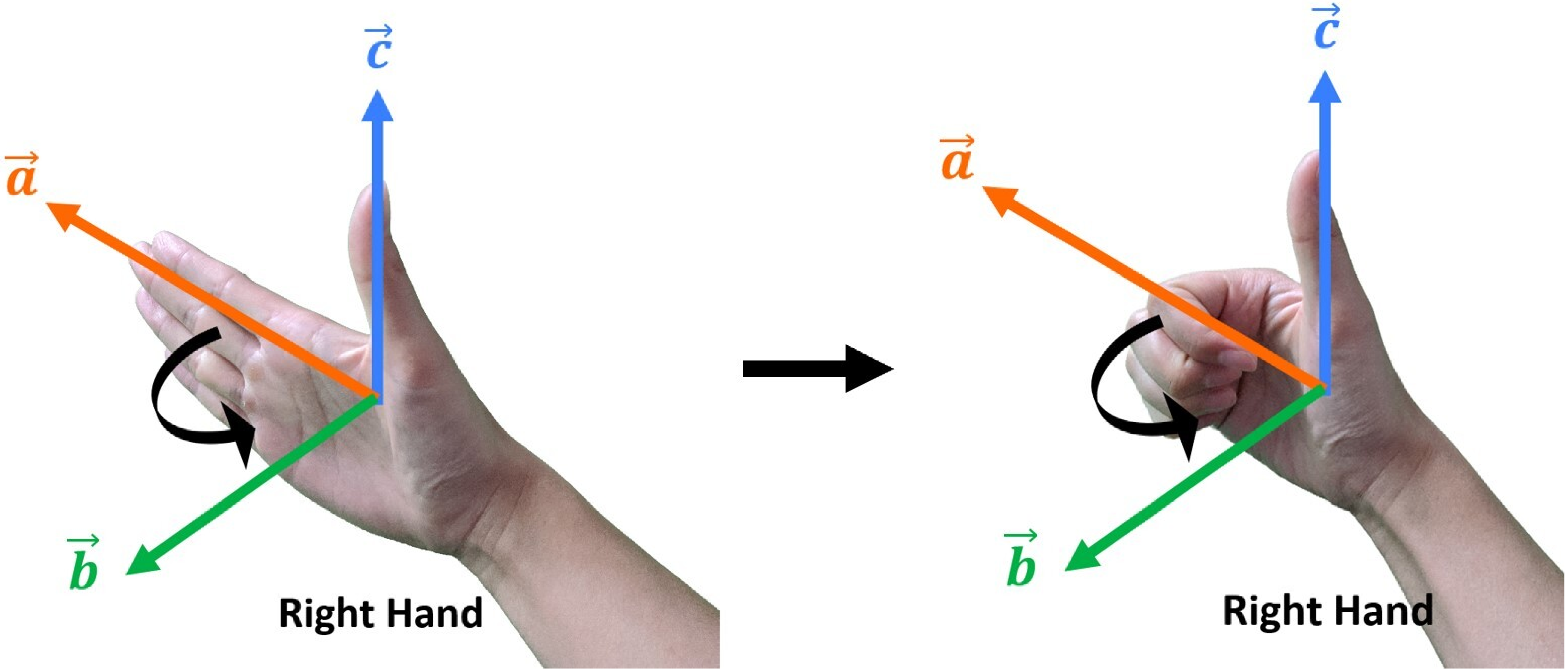
$$\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$$

$$\vec{c} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$$

$$\vec{c} = \hat{i}\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} - \hat{j}\begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix} + \hat{k}\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}$$



$$\boxed{\vec{c} = \hat{i}\,|a_2b_3 - a_3b_2| - \hat{j}\,|a_1b_3 - a_3b_1| + \hat{k}\,|a_1b_2 - a_2b_1|}$$



اندازه a×b

$\|a \times b\| = \|a\| \cdot \|b\| \cdot \sin(\theta)$

$$\mathbf{a} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 5 \\ 6 \\ 7 \end{bmatrix}$$

1

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \mathbf{i} \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 6 & 7 \end{vmatrix} - \mathbf{j} \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 5 & 7 \end{vmatrix} + \mathbf{k} \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 6 \end{vmatrix}$$

2

1. For $\mathbf{i}$:

$$\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 6 & 7 \end{vmatrix} = (3 \cdot 7) - (4 \cdot 6) = 21 - 24 = -3$$

2. For $\mathbf{j}$:

$$\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 5 & 7 \end{vmatrix} = (2 \cdot 7) - (4 \cdot 5) = 14 - 20 = -6$$

3. For $\mathbf{k}$:

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} = (2 \cdot 6) - (3 \cdot 5) = 12 - 15 = -3$$

3

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \mathbf{i}(-3) - \mathbf{j}(-6) + \mathbf{k}(-3)$$

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = -3\mathbf{i} + 6\mathbf{j} - 3\mathbf{k}$$

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{bmatrix} -3 \\ 6 \\ -3 \end{bmatrix}$$

1. Direction

The resulting vector $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ must be **perpendicular** to both $\mathbf{a}$ and $\mathbf{b}$. To verify:

- Compute the dot product of $\mathbf{a}$ with $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$:

$$\mathbf{a} \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = (2 \cdot -3) + (3 \cdot 6) + (4 \cdot -3)$$

$$= -6 + 18 - 12 = 0$$

- Compute the dot product of $\mathbf{b}$ with $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$:

$$\mathbf{b} \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = (5 \cdot -3) + (6 \cdot 6) + (7 \cdot -3)$$

$$= -15 + 36 - 21 = 0$$

Since both dot products are zero, $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ is **perpendicular** to both $\mathbf{a}$ and $\mathbf{b}$.

2. Magnitude

The magnitude of $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ is:

$$\|\mathbf{a} \times \mathbf{b}\| = \|\mathbf{a}\| \cdot \|\mathbf{b}\| \cdot \sin(\theta)$$

Step 1: Compute $\|\mathbf{a}\|$

$$\|\mathbf{a}\| = \sqrt{2^2 + 3^2 + 4^2} = \sqrt{4 + 9 + 16} = \sqrt{29}$$

Step 2: Compute $\|\mathbf{b}\|$

$$\|\mathbf{b}\| = \sqrt{5^2 + 6^2 + 7^2} = \sqrt{25 + 36 + 49} = \sqrt{110}$$

Step 3: Compute $\sin(\theta)$

Using the formula:

$$\cos(\theta) = \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{\|\mathbf{a}\| \cdot \|\mathbf{b}\|}$$

Compute $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$:

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = (2 \cdot 5) + (3 \cdot 6) + (4 \cdot 7)$$

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 10 + 18 + 28 = 56$$

Compute $\cos(\theta)$:

$$\cos(\theta) = \frac{56}{\sqrt{29} \cdot \sqrt{110}}$$

$$\cos(\theta) = \frac{56}{\sqrt{3190}} \approx 0.992$$

Find $\sin(\theta)$: Using $\sin^2(\theta) + \cos^2(\theta) = 1$:

$$\sin^2(\theta) = 1 - \cos^2(\theta) = 1 - (0.992)^2$$

$$\sin^2(\theta) = 1 - 0.984 = 0.016$$

$$\sin(\theta) = \sqrt{0.016} = 0.126$$

Step 4: Compute $\|\mathbf{a} \times \mathbf{b}\|$

$$\|\mathbf{a} \times \mathbf{b}\| = \|\mathbf{a}\| \cdot \|\mathbf{b}\| \cdot \sin(\theta)$$

$$\|\mathbf{a} \times \mathbf{b}\| = \sqrt{29} \cdot \sqrt{110} \cdot 0.126$$

$$\|\mathbf{a} \times \mathbf{b}\| \approx \sqrt{3190} \cdot 0.126 \approx 56 \cdot 0.126 \approx 7.1$$

From the result of $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{bmatrix} -3 \\ 6 \\ -3 \end{bmatrix}$:

$$\|\mathbf{a} \times \mathbf{b}\| = \sqrt{(-3)^2 + 6^2 + (-3)^2}$$

$$\|\mathbf{a} \times \mathbf{b}\| = \sqrt{9 + 36 + 9} = \sqrt{54} \approx 7.1$$