جلسه دهم

1401/07/24

Supervised Learning → Regression
Supervised Learning → Classification → Email Spam

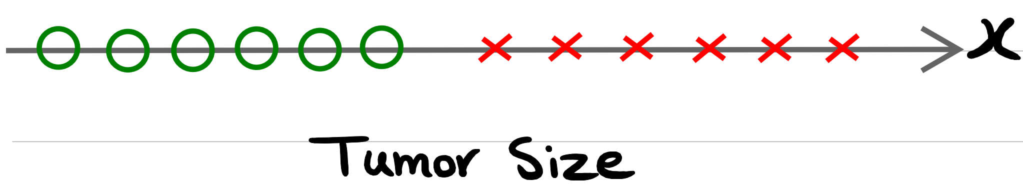
Transaction Fraudulent

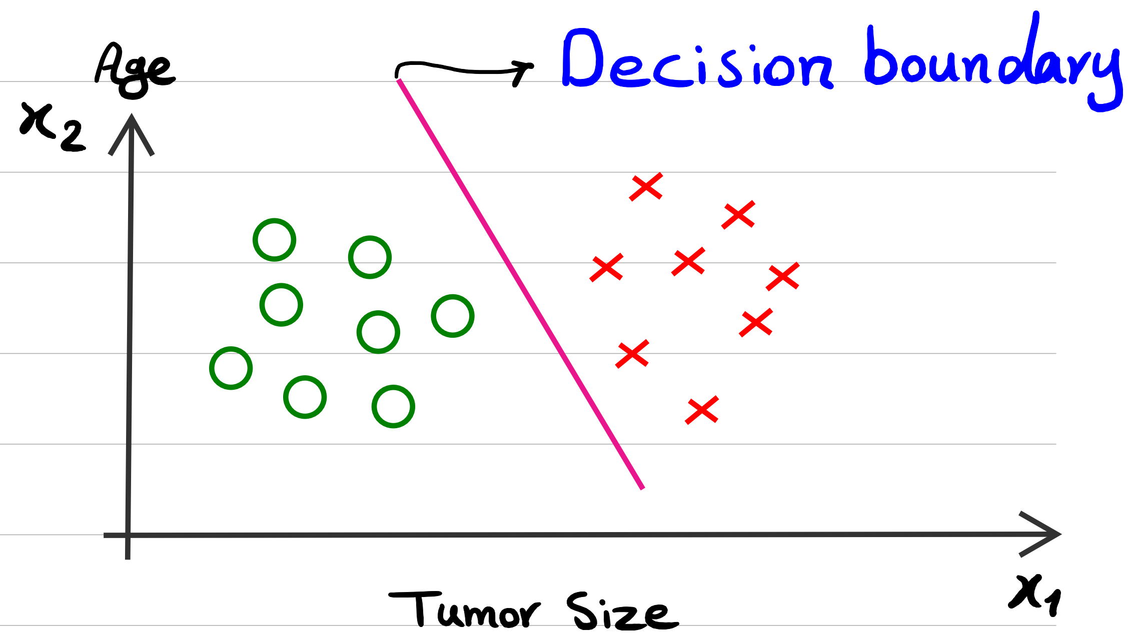
Tumor Maligant / cancer

Classification: Breast Cancer Detection

× Malignant بدخیم

○ Being خوش‌خیم





ج: تفاوت بین classification و Regression چیست؟

در classification ما سعی داریم تعداد کمی از خروجی‌ها را پیش‌بینی کنیم. به عبارتی اعداد محدودی داریم.

$$y \begin{cases} \to 0 \\ \to 1 \end{cases}$$

مثل اینجا که فقط دو خروجی 1 (خوش‌خیم) و 0 (بدخیم) را داریم.

اما در Regression ما سعی داریم هر عددی را پیش‌بینی کنیم.

$$y \in [0, +\infty)$$

* در classification ما می‌توانیم بیش از دو عدد داشته باشیم مثلاً 0, 1, 2, 3, 4 اما نمی‌توانیم بگوییم تمام اعداد بین 0 تا 1 (0, 0.0001, 0.2, ..., 1).

$$y \begin{cases} \to 1 \ (\text{Tumor Type } 1) \\ \to 2 \ (\text{Tumor Type } 2) \\ \to 3 \ (\text{Tumor Type } 3) \end{cases}$$

Clasification :

Question	Answer	
Is this Email Spam?	No	Yes
IS the transaction fraudulent?	No	Yes
IS the tumor malignant?	No	Yes

two classes → Binary Classification

category

False | True

0 | 1

0 → Negative class

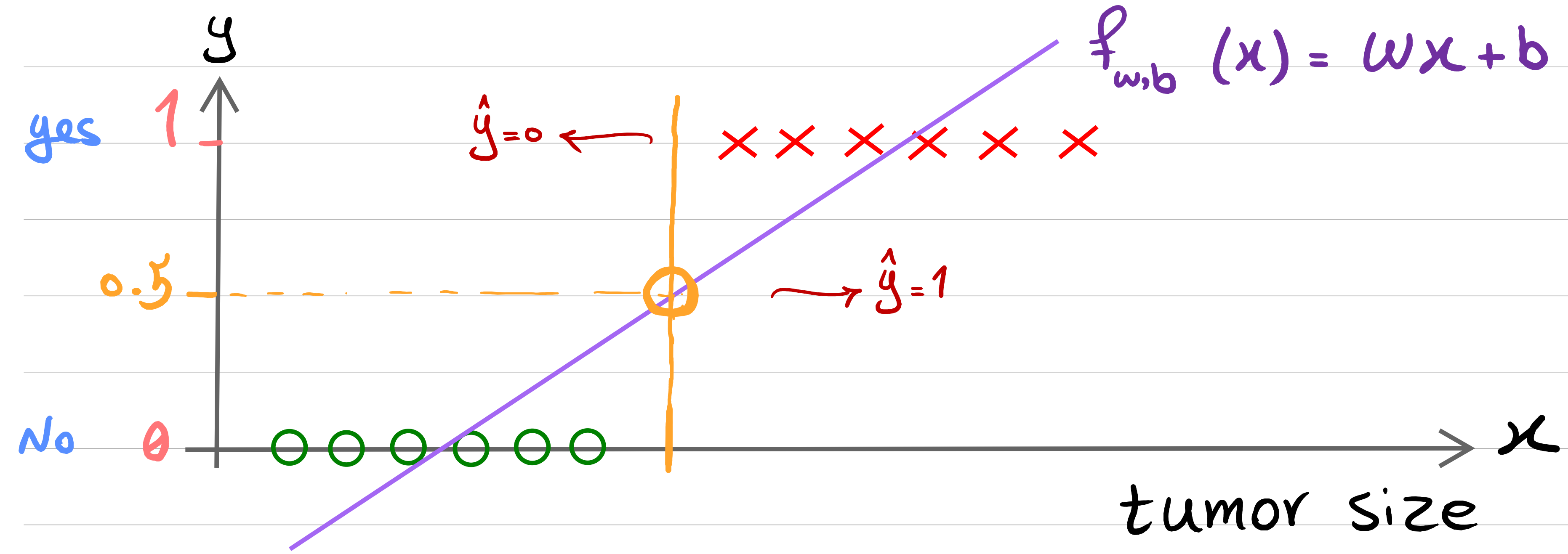
1 → Positive class

اگر بخواهیم به این سؤال پاسخ دهیم که "آیا تومور سرطانی ما بدخیم است؟" چه باید کرد؟

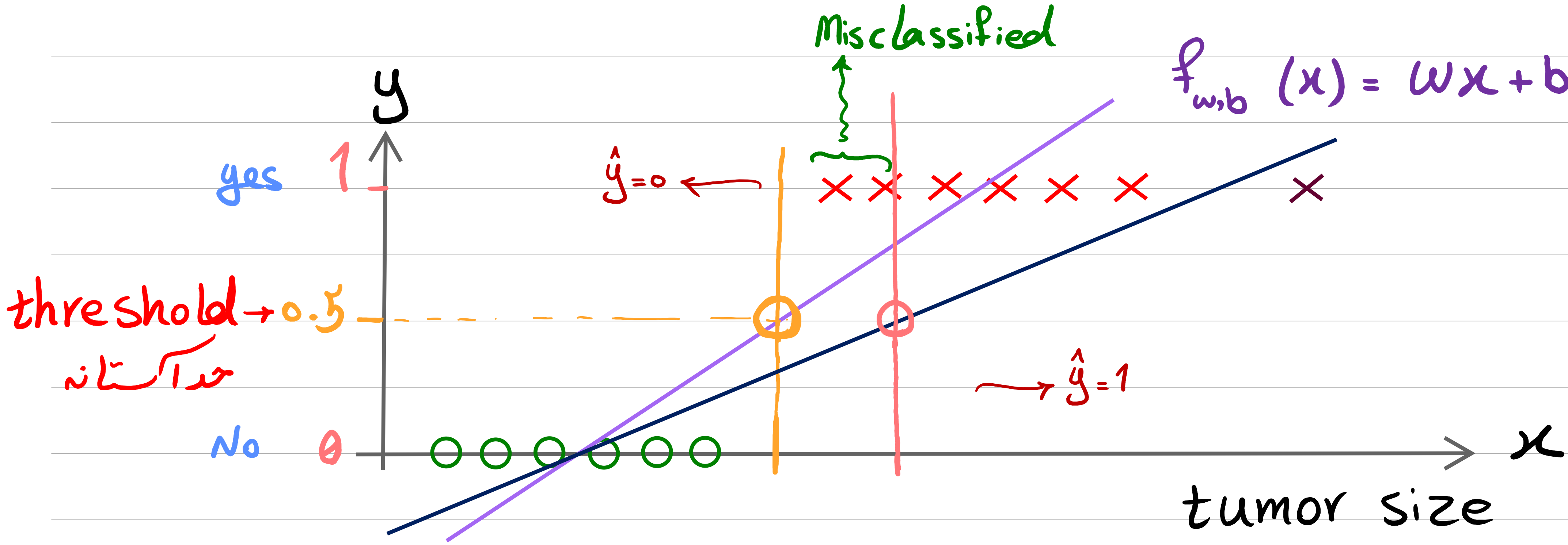
چه طور داده‌هایمان را کلاسه بندی کنیم؟ ← classification

× Malignant بدخیم

○ Being خوش‌خیم



$$\text{if} \begin{cases} f_{w,b}(x) < 0.5 & \hat{y}=0 \\ f_{w,b}(x) \geq 0.5 & \hat{y}=1 \end{cases}$$



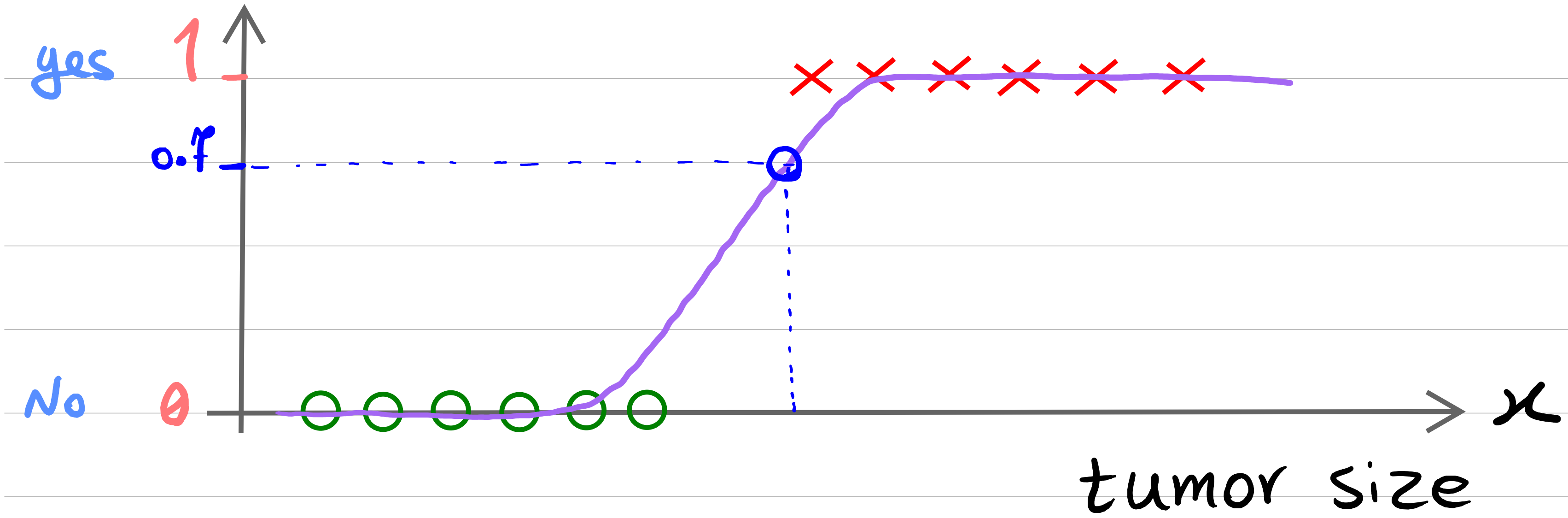
1. Misclassified

مشکلات استفاده از Regression:

2. $F_{w,b}(x) \in (-\infty, +\infty)$

؟: آیا می‌توان از Regression برای Classification استفاده کرد؟

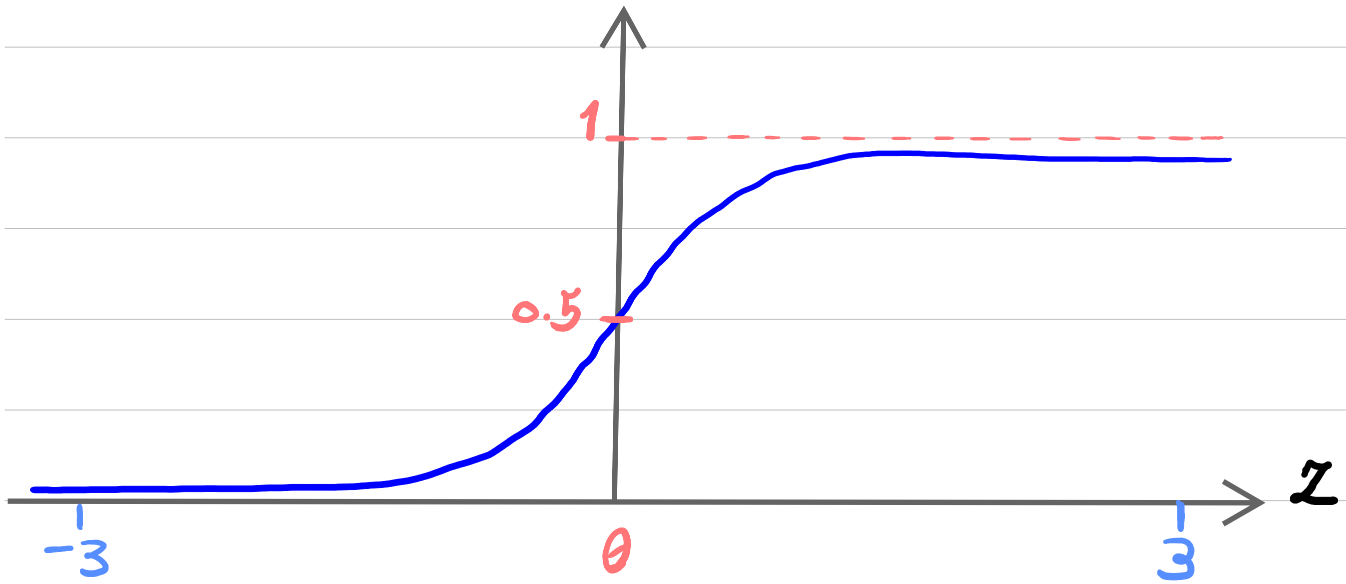
ج: برای رفع مشکلات Regression چه باید کرد؟



از تابع Sigmoid استفاده می‌کنیم. Sigmoid تابعی است که هر عددی را به عنوان ورودی بگیرد در خروجی به ما احتمالش (یعنی عددی بین 0 و 1) را می‌دهد.

Sigmoid Function:

$0 < \text{outputs} < 1$



$$g(z) = \frac{1}{1+e^{-z}}$$

$$0 < g(z) < 1$$

$$f_{w,b}(x) = wx + b \rightsquigarrow z = wx + b \xrightarrow{\text{Sigmoid}} g(z)$$

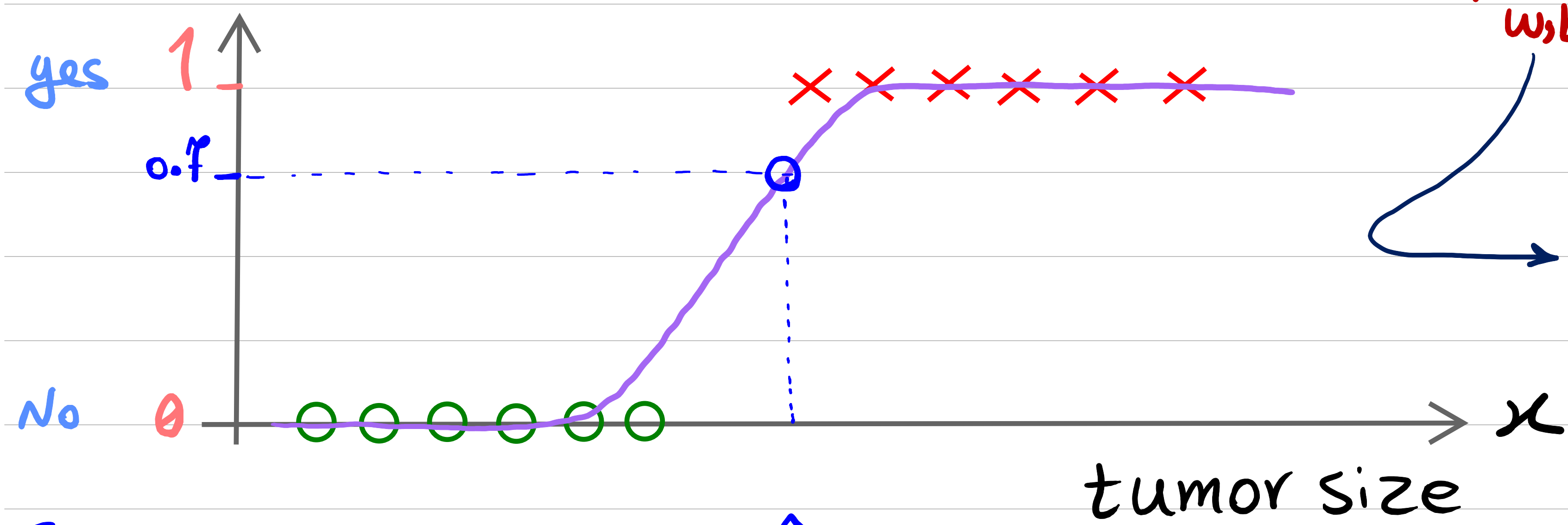
$$g(z) = \frac{1}{1+e^{-z}}$$

Logistic Regression

$$f_{w,b}(x) = g(wx+b) = \frac{1}{1+e^{-(wx+b)}}$$

$$F_{w,b}(x) = \frac{1}{1 + e^{-(wx+b)}}$$

Probability that class is 1



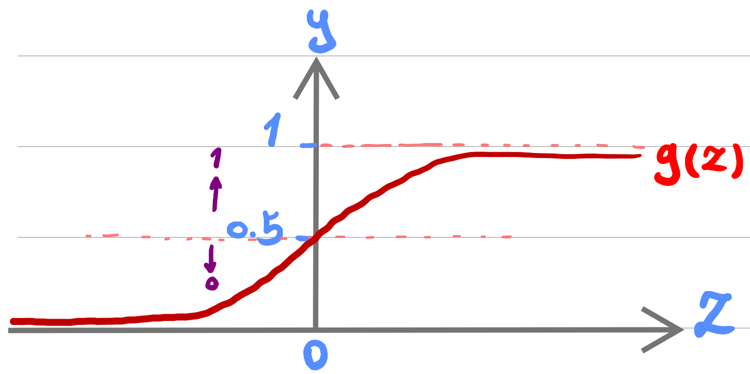
$F_{w,b}(x) = 0.7 \rightsquigarrow \hat{y} = ?$

$F_{w,b}(x) = P(y=1 \mid x; w,b) \longrightarrow$ احتمال اینکه $\hat{y}=1$ بشود به‌ازای x و با پارامترهای w,b

$P(y=0) + P(y=1) = 1$

$$\begin{cases} F_{w,b}(x) \geq 0.5 & \hat{y}=1 \\ F_{w,b}(x) < 0.5 & \hat{y}=0 \end{cases}$$

$P(\overset{0.3}{y=0}) + P(\overset{0.7}{y=1}) = 1$



$$z = w.x + b$$

$$\downarrow$$

$$z$$

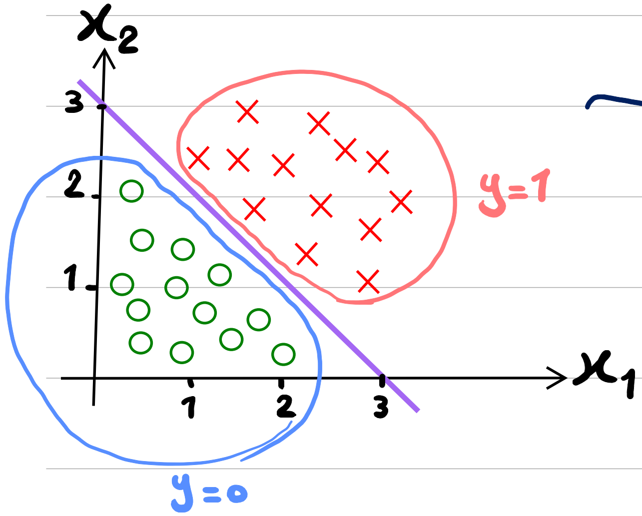
$$\downarrow$$

$$g(z) = \frac{1}{1+e^{-z}}$$

$$F_{\vec{w},b}(\vec{x}) = g(\vec{w}.\vec{x}+b) = \frac{1}{1+e^{-(\vec{w}.\vec{x}+b)}} = P(y=1 \mid x; \vec{w}, b)$$

Decision boundary

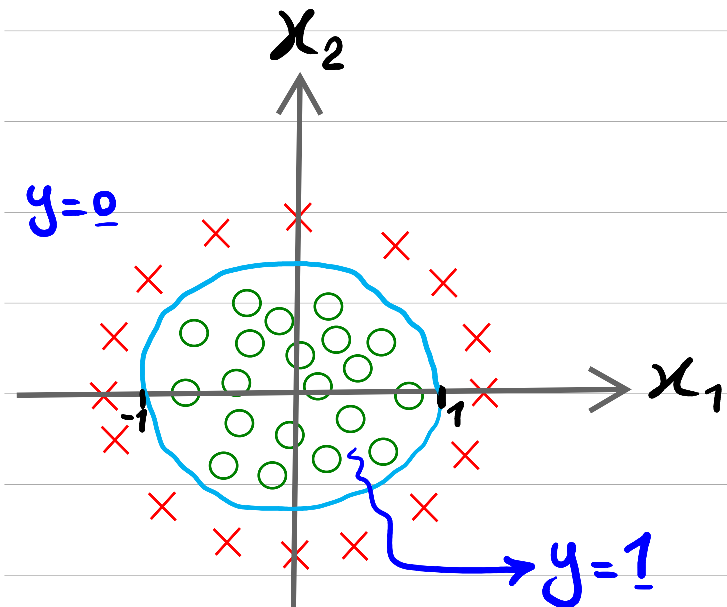
حالا می‌خواهیم بریم سراغ حالتی که مسأله‌ی classification ما دو ویژگی (x_1, x_2) دارد.



$$f_{\vec{w},b}(\vec{x}) = g(z) = g(w_1x_1 + w_2x_2 + b)$$

$$z = \vec{w}\cdot\vec{x} + b = 0 \qquad \text{if } w_1=1,\ w_2=1,\ b=-3$$

$$w_1x_1 + w_2x_2 + b = 0 \rightsquigarrow x_1 + x_2 - 3 = 0 \rightsquigarrow \begin{cases} x_1=0, & x_2=3 \\ x_1=3, & x_2=0 \end{cases}$$



$$z = x_1^2 + x_2^2 - 1 = 0 \longrightarrow x_1^2 + x_2^2 = 1$$

$$\boxed{\begin{aligned} &\text{if } x_1 = 0 \\ &\cancel{w_1x_1}^{\,0} + w_2x_2 + b = 0 \\ &\Rightarrow w_2x_2 = -b \Rightarrow \\ &x_2 = \frac{-b}{w_2} = \frac{-(-3)}{1} = 3 \end{aligned}}$$

tumor size x_1	...	Patient's age x_n	malignant? y
10		52	1
2		73	0
5		55	0
12		49	1
⋮		⋮	⋮

$i = 1, \dots, m$

$j = 1, \dots, n$

target y is $\underline{0}$ or $\underline{1}$

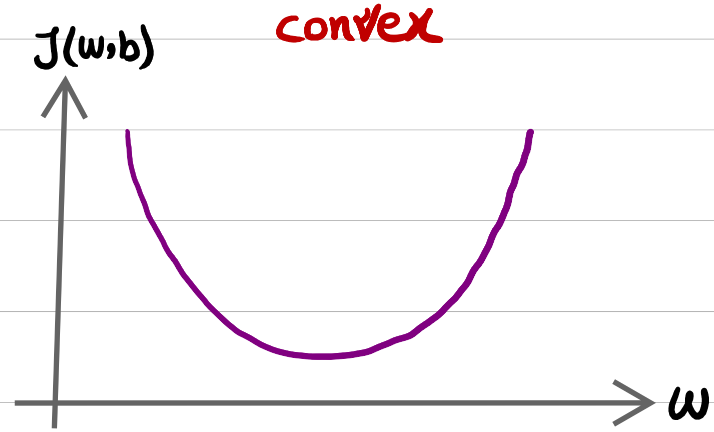
$$f_{w,b}(x) = \frac{1}{1+e^{-(wx+b)}}$$

$$\vec{w} = [w_1 \; w_2 \; \cdots \; w_n], \quad b$$

Linear Regression   Cost Function ⟵ چه طور بهترین w و b را انتخاب کنیم ؟

$$J(w,b) = \frac{1}{2m} \sum_{i=1}^{m} \Big(\underbrace{f_{w,b}(x^{(i)})}_{\hat{y}^{(i)}} - y^{(i)} \Big)^2$$

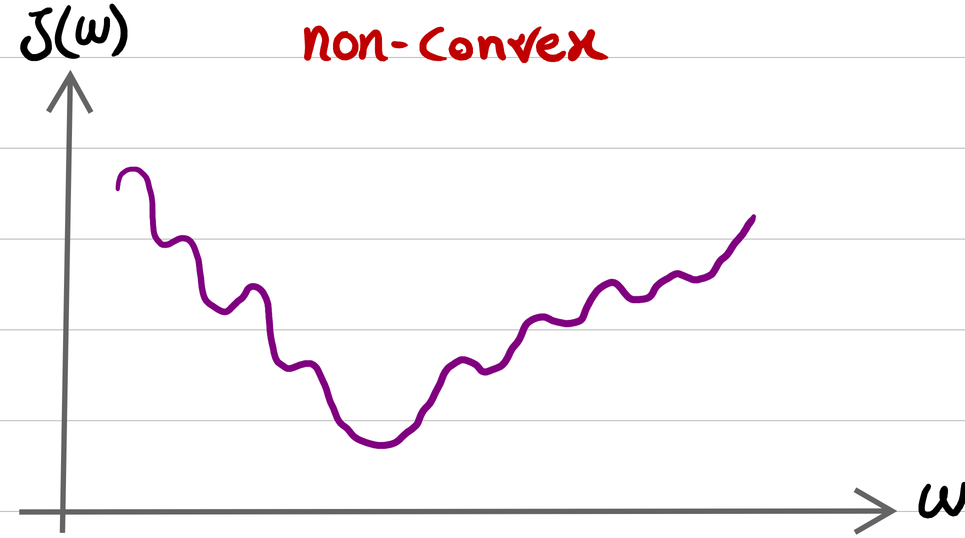
convex



$$f_{w,b}(x) = w.x + b$$

Logistic Regression

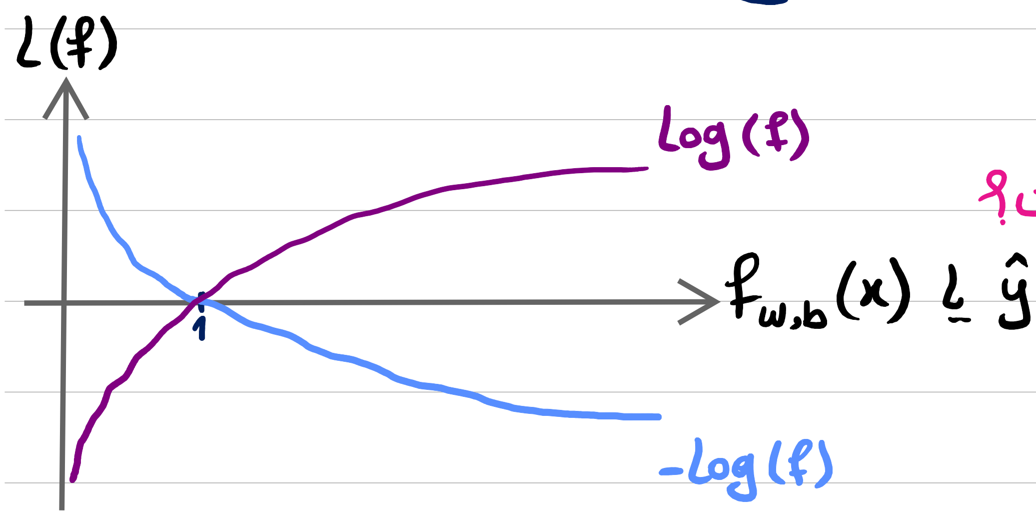
$$f_{w,b}(x) = \frac{1}{1+e^{-(wx+b)}}$$



non-convex

Logistic Loss Function

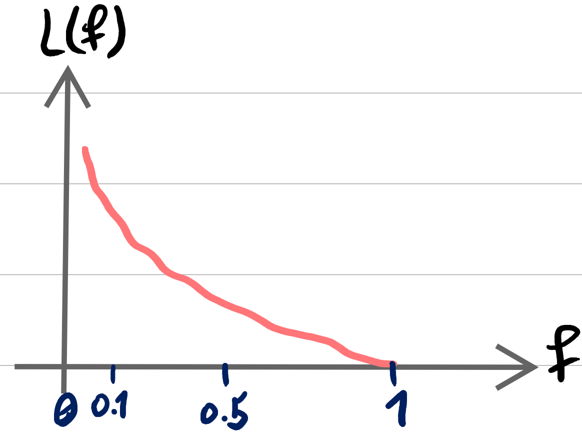
$$L\left(f_{w,b}(x^{(i)}),\ y^{(i)}\right) = \begin{cases} -\log\left(f_{w,b}(x^{(i)})\right) & \text{if } y^{(i)}=1 \\ -\log\left(1-f_{w,b}(x^{(i)})\right) & \text{if } y^{(i)}=0 \end{cases}$$



ج: آیا استفاده از این تابع برای Logistic درست است؟

$L(f_{w,b}(x^{(i)}), y^{(i)})$

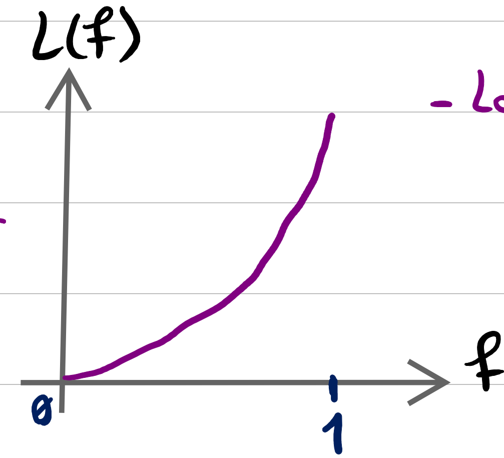
if $y=1$



if $f_{w,b}(x^{(i)}) \to 1$ then Loss $\to 0$

but if $f_{w,b}(x^{(i)}) \to 0$ then Loss $\to \infty$

$-\log(1 - f_{w,b}(x^{(i)}))$ $\boxed{\text{if } y^{(i)} = 0}$



$-\log(1-f) \rightsquigarrow [0,1]$

if $f_{w,b}(x^{(i)}) \to 0$ then Loss $\to 0$

$f_{w,b}(x^{(i)}) \to 1$ then Loss $\to \infty$

Logistic Regression Cost function:

$$J(w,b) = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^{m} L\left(f_{w,b}(x^{(i)}), y^{(i)}\right)$$

$$\begin{cases} -\log\left(f_{w,b}(x^{(i)})\right) & \text{if } y^{(i)} = 1 \\ -\log\left(1 - f_{w,b}(x^{(i)})\right) & \text{if } y^{(i)} = 0 \end{cases}$$

$$L\left(f_{w,b}\left(x^{(i)}\right), y^{(i)}\right) = \begin{cases} -\log\left(f_{w,b}\left(x^{(i)}\right)\right) & \text{if } y^{(i)}=1 \\ -\log\left(1-f_{w,b}\left(x^{(i)}\right)\right) & \text{if } y^{(i)}=0 \end{cases}$$

ج: حالا اگر یک تابع یکپارچه بخواهیم باید چه کنیم ؟

$$L\left(f_{w,b}\left(x^{(i)}\right), y^{(i)}\right) = \overbrace{-\,y^{(i)}\log\left(f_{w,b}\left(x^{(i)}\right)\right)-\left(1-y^{(i)}\right)\log\left(1-f_{w,b}\left(x^{(i)}\right)\right)}^{\text{Convex}}$$

if $y^{(i)}=1$:

$$-(1)\log\left(f_{w,b}\left(x^{(i)}\right)\right)-\cancelto{0}{(1-(1))\log\left(1-f_{w,b}\left(x^{(i)}\right)\right)}$$

if $y^{(i)}=0$:

$$\cancelto{0}{-(0)\log\left(f_{w,b}\left(x^{(i)}\right)\right)}-(1-(0))\log\left(1-f_{w,b}\left(x^{(i)}\right)\right)$$

$$J(w,b) = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^{m} \left[L\left(f_{w,b}(x^{(i)}),\ y^{(i)}\right)\right]$$

$$= -\frac{1}{m} \sum_{i=1}^{m} \underbrace{\left[y^{(i)} \log\left(f(x^{(i)})\right) + (1-y^{(i)}) \log\left(1 - f_{w,b}(x^{(i)})\right)\right]}_{\text{Log likelihood}}$$

حالا ما باید به دنبال w و b باشیم که J cost ما را minimum کند.

چ: چه طور مقدار w و b را پیدا کنیم؟

دو روش رایج داریم:

1. Newton's Method

2. Gradient Descent

Gradient Descent :

$$J(w,b) = -\frac{1}{m} \sum_{i=1}^{m} \left[y^{(i)} \log \left(f_{w,b}(x^{(i)}) \right) + (1 - y^{(i)}) \log \left(1 - f_{w,b}(x^{(i)}) \right) \right]$$

repeat

{

$$w_j = w_j - \alpha \boxed{\frac{\partial}{\partial w_j} J(w,b)} \rightsquigarrow \frac{\partial}{\partial w} J(w,b) = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^{m} \left(f_{w,b}(x^{(i)}) - y^{(i)} \right) x_j^{(i)}$$

$$b = b - \alpha \boxed{\frac{\partial}{\partial b} J(w,b)} \rightsquigarrow \frac{\partial}{\partial b} J(w,b) = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^{m} \left(f_{w,b}(x^{(i)}) - y^{(i)} \right)$$

}

$$f_{w,b}(x) = \frac{1}{1 + e^{-(wx+b)}}$$