Session 4

Eigenvalues and Eigenvectors

Foundation of Advanced Matrix Concepts

Applied Mathematics for AI | Hobot Academy | Zahra Amini

Hobat Aacademy

Telegram: @hobotacademy & Instagram:@hobotacademy & LinkedIn: @zahraamini-ai

www.hobotacademy.com

مقدمه‌ای بر مقادیر ویژه و بردارهای ویژه

تعریف

یک مقدار ویژه (λ) یک عدد اسکالر و یک بردار ویژه (v) یک بردار غیرصفر است که با یک ماتریس مربعی (A) مرتبط است، به طوری که:

این معادله نشان می‌دهد که وقتی ماتریس A روی بردار v اعمال می‌شود، تنها جهت بردار حفظ شده و مقدار آن با ضریب λ تغییر می‌کند.

$$Av = \lambda v$$

ماتریس A به عنوان یک تبدیل عمل می‌کند. بردارهای ویژه، بردارهایی هستند که تحت این تبدیل، تنها کشیده یا فشرده می‌شوند، اما جهتشان تغییر نمی‌کند.

مراحل پیدا کردن مقادیر و بردارهای ویژه

۱. تعریف مسئله مقادیر ویژه و بردارهای ویژه
یک ماتریس A با اندازه $n\times n$ داده شده است. هدف این است که مقادیر ویژه (λ) و بردارهای ویژه (v) را بیابیم، به طوری که رابطه زیر برقرار باشد:

$$Av = \lambda v$$

۲. تشکیل معادله مشخصه
از تعریف بالا می‌توان نوشت:

$$Av - \lambda v = 0 \implies (A - \lambda I)v = 0$$

در اینجا I ماتریس واحد با ابعاد $n\times n$ است. برای وجود جواب غیر صفر برای v، باید:

$$\det(A - \lambda I) = 0$$

که به آن معادله مشخصه می‌گویند.

۳. عبارت $\det(A-\lambda I)=0$ یک چندجمله‌ای از درجه n است (که به آن چندجمله‌ای مشخصه گفته می‌شود).

با حل این چندجمله‌ای برای λ، مقادیر ویژه $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ به دست می‌آیند.

برای هر مقدار ویژه λ_i داریم :
۱. تشکیل ماتریس $(A - \lambda_i I)$: مقدار ویژه را در معادله $(A - \lambda_i I)v = 0$ جایگذاری کنید.

۲. حل دستگاه معادلات: دستگاه معادلات خطی حاصل را حل کنید تا فضای بردار ویژه (زیرفضای نال یا کرنل ماتریس) به دست آید.

۳. هر بردار غیر صفر در این فضای نال، یک بردار ویژه متناظر با λ_i است.

✔ بررسی نرمال‌سازی (اختیاری)
بردارهای ویژه معمولاً به شکل نرمال‌شده (طول برابر با ۱) بیان می‌شوند. برای نرمال‌سازی یک بردار v:

$$v_{\text{norm}} = \frac{v}{||v||}$$

که $||v||$ طول یا نرم v است.

✔ تأیید صحت مقادیر و بردارهای ویژه
برای اطمینان از صحت مقادیر ویژه و بردارهای ویژه، آن‌ها را در رابطه اصلی $Av=\lambda v$ جایگذاری کنید.

مقادیر ویژه و بردارهای ویژه ماتریس ۲×۲ زیر را محاسبه کنید:

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$$

Step 1: Find the Characteristic Equation

The characteristic equation is derived by solving:

$$\det(A - \lambda I) = 0$$

Where:
I is the identity matrix.
λ is the eigenvalue.

1. Compute $A - \lambda I$:

$$A - \lambda I = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4-\lambda & 1 \\ 2 & 3-\lambda \end{bmatrix}$$

2. Compute the determinant:

$$\det(A - \lambda I) = \det \begin{bmatrix} 4-\lambda & 1 \\ 2 & 3-\lambda \end{bmatrix}$$

$$\det(A - \lambda I) = (4-\lambda)(3-\lambda) - (2 \times 1) = (4-\lambda)(3-\lambda) - 2 = 12 - 7\lambda + \lambda^2 - 2 = \lambda^2 - 7\lambda + 10$$

3. Solve for λ (eigenvalues):

$$\lambda^2 - 7\lambda + 10 = 0$$

Factoring:

$$(\lambda - 5)(\lambda - 2) = 0$$

Eigenvalues: $\lambda_1 = 5, \lambda_2 = 2$

Step 2: Find Eigenvectors
For each eigenvalue, solve $(A - \lambda I)v = 0$.

For $\lambda = 5:$ Compute $A - 5I:$

$$A - 5I = \begin{bmatrix} 4-5 & 1 \\ 2 & 3-5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}$$

Solve: $$\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

This simplifies to:

$$-1x + 1y = 0 \implies y = x$$

Eigenvector:

$$v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \text{ (any scalar multiple of this vector is valid).}$$

For $\lambda = 2,$ Compute $A - 2I:$

$$A - 2I = \begin{bmatrix} 4-2 & 1 \\ 2 & 3-2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

Solve: $$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

This simplifies to: $2x + y = 0 \implies y = -2x$

Eigenvector: $v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}$

$$\boxed{\begin{array}{l} \text{Eigenvalues: } 5, 2 \\ \text{Eigenvectors:} \\ \text{For } \lambda = 5: \ v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \\ \text{For } \lambda = 2: \ v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} \end{array}}$$

Step 3: Verify Results

For $\lambda = 5:$ $$Av_1 = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 5 \end{bmatrix} = 5 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

For $\lambda = 2:$ $$Av_2 = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -4 \end{bmatrix} = 2 \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}$$

Both results confirm the calculations.

Finding the Characteristic Polynomial and Eigenvalues for a 3×3 Matrix
Matrix:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

Step 1: Find the characteristic equation $\det(A - \lambda I) = 0:$

$$A - \lambda I = \begin{bmatrix} 3-\lambda & 1 & 0 \\ 1 & 3-\lambda & 1 \\ 0 & 1 & 3-\lambda \end{bmatrix}$$

Step 2: Compute the determinant:

$$\det(A - \lambda I) = \det \begin{bmatrix} 3-\lambda & 1 & 0 \\ 1 & 3-\lambda & 1 \\ 0 & 1 & 3-\lambda \end{bmatrix} = (3-\lambda)\left(\det \begin{bmatrix} 3-\lambda & 1 \\ 1 & 3-\lambda \end{bmatrix}\right) - 1 \cdot \det \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 3-\lambda \end{bmatrix} + 0$$

$= (3-\lambda)\left((3-\lambda)(3-\lambda) - 1\right) - (1 \cdot (3-\lambda)) = (3-\lambda)\left((3-\lambda)^2 - 1\right) - (3-\lambda) = (3-\lambda)^3 - 2(3-\lambda)$

Step 3: Compute Minor Determinants
First Minor:

$$\det \begin{bmatrix} 3-\lambda & 1 \\ 1 & 3-\lambda \end{bmatrix} = (3-\lambda)(3-\lambda) - (1 \cdot 1)$$

$= (3-\lambda)^2 - 1 = 9 - 6\lambda + \lambda^2 - 1 = \lambda^2 - 6\lambda + 8$

Second Minor:

$$\det \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 3-\lambda \end{bmatrix} = (1)(3-\lambda) - (1 \cdot 0) = 3 - \lambda$$

Step 4: Substitute the Minors into the Determinant

$$\det(A - \lambda I) = (3-\lambda) \cdot (\lambda^2 - 6\lambda + 8) - (3-\lambda)$$

Step 5: Simplify the Characteristic Polynomial
Expand:
$\det(A - \lambda I) = (3-\lambda)(\lambda^2 - 6\lambda + 8) - (3-\lambda) = (3-\lambda)(\lambda^2 - 6\lambda + 7) = 3(\lambda^2 - 6\lambda + 7) - \lambda(\lambda^2 - 6\lambda + 7) = 3\lambda^2 - 18\lambda + 21 - \lambda^3 + 6\lambda^2 - 7\lambda = -\lambda^3 + 9\lambda^2 - 25\lambda + 21 \rightarrow$
Step 6: Find Eigenvalues
Set the characteristic polynomial equal to zero:
$-\lambda^3 + 9\lambda^2 - 25\lambda + 21 = 0$

Using numerical or factorization methods, solve for λ.
The eigenvalues are:
$\lambda_1 = 3, \lambda_2 = 3, \lambda_3 = 3$

Result:
Characteristic Polynomial: $-\lambda^3 + 9\lambda^2 - 25\lambda + 21$
Eigenvalues: $\lambda_1 = 3, \lambda_2 = 3, \lambda_3 = 3$

یک مقدار ویژه (λ) یک عدد اسکالر و یک بردار ویژه (v) یک بردار غیرصفر است که با یک ماتریس مربعی (A) مرتبط است، به طوری که:

این معادله نشان می‌دهد که وقتی ماتریس A روی بردار v اعمال می‌شود، تنها جهت بردار حفظ شده و مقدار آن با ضریب λ تغییر می‌کند.

$$Av = \lambda v$$

ماتریس A به عنوان یک تبدیل[خطی] عمل می‌کند.