Session 01

Introduction to Matrices and Vectors

Math | Hobot | Zahra Amini

Hobot Academy

Telegram: @zahraamini_ai & Instagram:@zahraamini_ai & LinkedIn: @zahraamini-ai

https://aminizahra.github.io

مفاهیم پایه‌ای بردارها

① تعریف بردار و نمادگذاری

بردار مجموعه‌ای از عناصر عددی (اسکالرها) است که می‌تواند نشان‌دهنده جهت و بزرگی باشد

نام‌گذاری بردارها در ریاضیات و جبر خطی معمولاً با حروف کوچک انگلیسی انجام می‌شود، مانند v, u یا w

Vector

$$v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$$

که $v_1, v_2, \dots, v_n$ مولفه‌های بردار در فضای n-بعدی هستند

$$v = (0.2, -0.7, 0.5, 1.2)$$

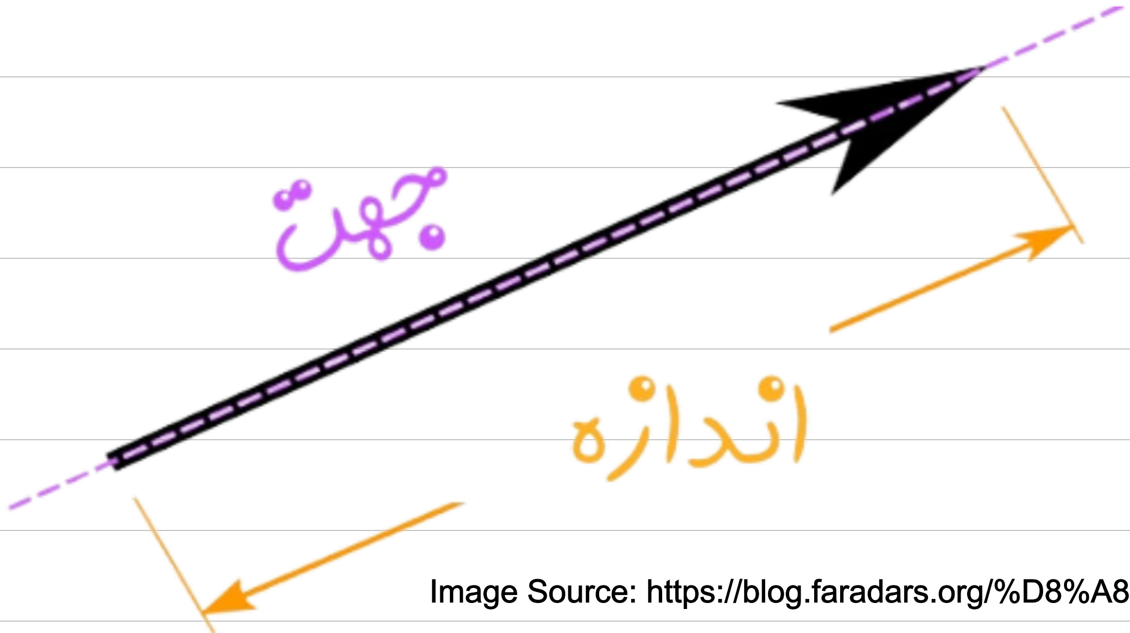


Image Source: https://blog.faradars.org/%D8%A8%D8%B1%D8%AF%D8%A7%D8%B1-vector/

② بردارهای تک‌واحدی (Unit Vectors)

بردارهای تک‌واحدی، بردارهایی با طول واحد (۱) هستند که تنها جهت دارند و از نظر بزرگی نرمال‌سازی شده‌اند

برای نرمال‌سازی هر بردار v به بردار تک‌واحدی u کافی است بردار را بر طول آن تقسیم کنیم:

$$u = \frac{v}{||v||} \qquad ||v|| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + \dots + v_n^2}$$

: $v=(3,-4,5)$ $\quad u=?$

$$1.\ ||v|| = \sqrt{3^2+(-4)^2+5^2} = \sqrt{9+16+25} = \sqrt{50} = 7.07$$

$$2.\ u = \frac{1}{7.07} \cdot (3,-4,5) \simeq (0.42, -0.57, 0.71)$$

نرمال‌سازی (Normalization) در بردارها به فرآیندی گفته می‌شود که بردار را به یک نسخه با طول واحد (Norm = 1) تبدیل می‌کند، در حالی که جهت بردار تغییر نمی‌کند. به عبارت دیگر، نرمال‌سازی مقیاس بردار را تغییر می‌دهد، اما همچنان بردار در همان راستا باقی می‌ماند.

3 جمع و تفریق بردارها

$$a + b = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 \\ \vdots \\ a_n + b_n \end{pmatrix}$$

$$a - b = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 - b_1 \\ a_2 - b_2 \\ \vdots \\ a_n - b_n \end{pmatrix}$$

: $a=(2,3,1)$ and $b=(5,-1,4)$ $\quad a + b = ?$ $\quad a - b = ?$

$a + b = (2 + 5, 3 + (-1), 1 + 4) = (7, 2, 5)$ $\quad a - b = (2 - 5, 3 - (-1), 1 - 4) = (-3, 4, -3)$

4 ضرب عدد(اسکالر) در بردار

$$c \,.\, v = c \,.\, \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 \times v_1 \\ c_2 \times v_2 \\ \vdots \\ c_n \times v_n \end{pmatrix}$$

: $v=(1.5, -3, 4)$ and $c=2.5$ $\quad c \,.\, v = ?$

$2.5 \cdot v = (2.5 \times 1.5, 2.5 \times (-3), 2.5 \times 4) = (3.75, -7.5, 10)$

⑤ طول یا نرم بردار (Norm of a Vector)

$$\|v\|_p = \left(\sum_{i=1}^{n} |v_i|^p \right)^{\frac{1}{p}} \xrightarrow{p = 2} \underbrace{\|v\|_2}_{\text{Euclidean norm}} = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + \dots + v_n^2}$$

: $v = (1, -2, 2, -3)$,   Euclidean norm =?

$$\|v\|_2 = \sqrt{1^2 + (-2)^2 + 2^2 + (-3)^2} = \sqrt{1 + 4 + 4 + 9} = \sqrt{18} = 4.24$$

6 ضرب داخلی (Dot Product)

ضرب داخلی (Dot Product) دو بردار یک معیار کلیدی برای سنجش هم‌ترازی است. اگر دو بردار a و b داشته باشیم

ضرب داخلی آن‌ها به صورت زیر تعریف می‌شود :

$$a \cdot b = \sum_{i=1}^{n} a_i \cdot b_i = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n$$

: $a = (2, 3, -1)$ and $b = (4, -1, 5)$

$a \cdot b = 2 \cdot 4 + 3 \cdot (-1) + (-1) \cdot 5 = 8 - 3 - 5 = 0$ چون نتیجه صفر است، این دو بردار عمود بر هم هستند

7 زاویه بین دو بردار و کاربردهای آن در یادگیری ماشین

زاویه بین دو بردار و بردار می‌تواند معیاری از شباهت آن‌ها باشد. برای محاسبه زاویه بین دو بردار a وb داریم:

اگر زاویه کوچک باشد، بردارها مشابه‌اند و اگر زاویه نزدیک به ۹۰ درجه باشد، بردارها تقریباً ناهمراستا هستند

$$\cos(\theta) = \frac{a \cdot b}{||a||\ ||b||}$$

: $a=(3,-5)$ and $b=(7,1)$

$$a \cdot b = 3 \cdot 7 + (-5) \cdot 1 = 21 - 5 = 16$$

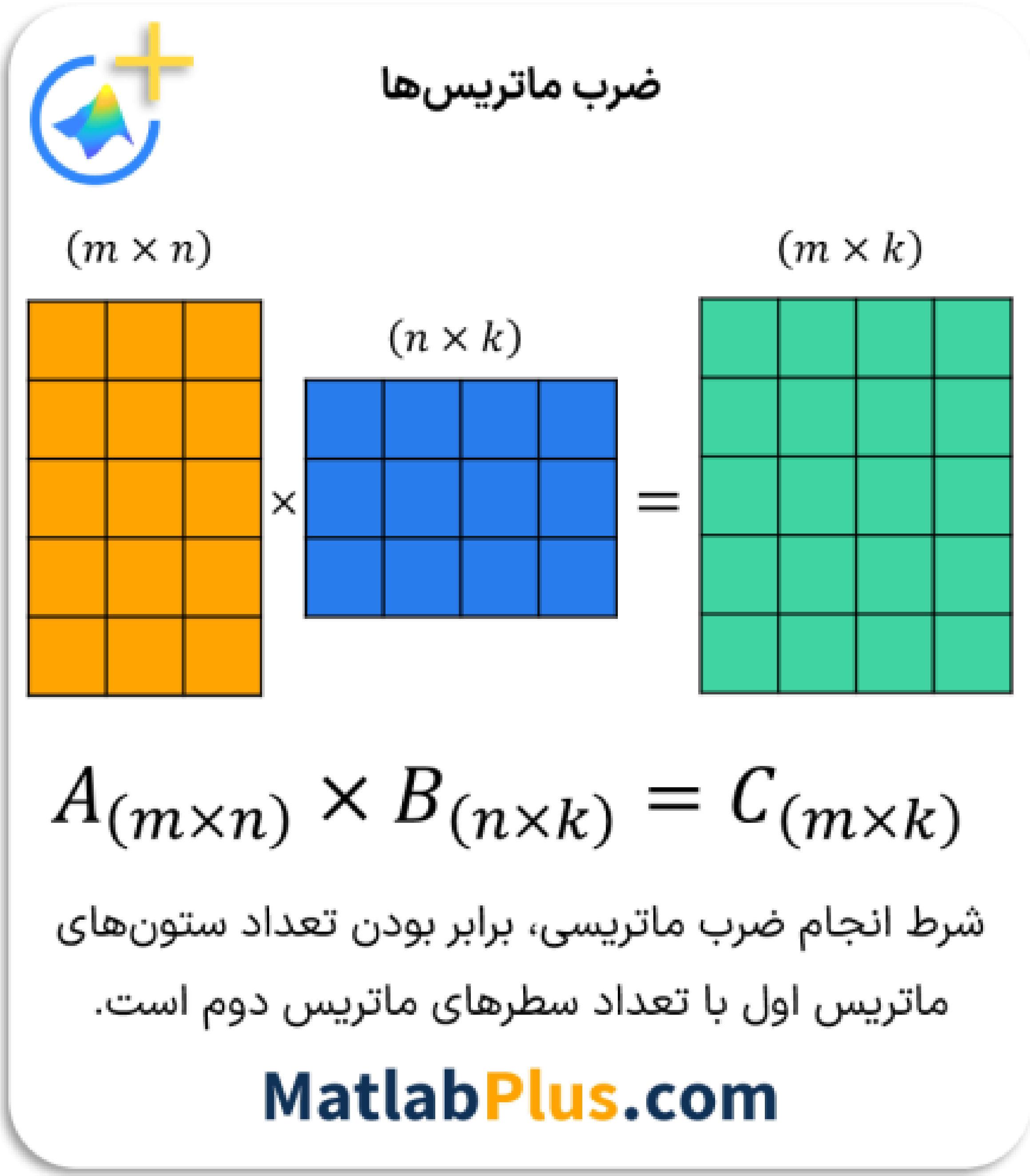
$$\|a\| = \sqrt{3^2 + (-5)^2} = \sqrt{9 + 25} = \sqrt{34}$$

$$\|b\| = \sqrt{7^2 + 1^2} = \sqrt{49 + 1} = \sqrt{50}$$

$$\cos(\theta) = \frac{16}{\sqrt{34} \times \sqrt{50}} \approx 0.388$$

$$\theta = \cos^{-1}(0.388) \approx 67.84^{\circ}$$

ضرب ماتریس‌ها



$$\begin{bmatrix} 1 & 7 & 10 \\ 9 & 4 & 1 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 5 & 8 \\ 4 & 2 \\ 8 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1*5+7*4+10*8 & \\ & \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 7 & 10 \\ 9 & 4 & 1 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 5 & 8 \\ 4 & 2 \\ 8 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1*5+7*4+10*8 & 1*8+7*2+10*5 \\ & \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 7 & 10 \\ 9 & 4 & 1 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 5 & 8 \\ 4 & 2 \\ 8 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1*5+7*4+10*8 & 1*8+7*2+10*5 \\ 9*5+4*4+1*8 & \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 7 & 10 \\ 9 & 4 & 1 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 5 & 8 \\ 4 & 2 \\ 8 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1*5+7*4+10*8 & 1*8+7*2+10*5 \\ 9*5+4*4+1*8 & 9*8+4*2+1*5 \end{bmatrix}$$

Image Source: https://howsam.org/array-calculations/

انواع ماتریس‌ها

1. ماتریس واحد (Identity Matrix)
2. ماتریس ناصفر (Non-Zero Matrix)
3. ماتریس اسپارس (Sparse Matrix)
4. ماتریس تکین (Singular Matrix)
5. ماتریس غیرتکین (Non-Singular Matrix)
6. ماتریس معکوس (Inverse Matrix)
7. ماتریس قطری (Diagonal Matrix)
8. ماتریس متقارن (Symmetric Matrix)

1 ماتریس واحد (Identity Matrix)

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad A \cdot I = A$$

2 ماتریس ناصفر (Non-Zero Matrix)

ماتریس ناصفر هر ماتریسی است که حداقل یکی از درایه‌های آن غیر صفر باشد

چنین ماتریسی الزاماً هیچ ویژگی خاصی ندارد جز اینکه تمام درایه‌های آن صفر نیستند

3 ماتریس اسپارس (Sparse Matrix)

ماتریس اسپارس ماتریسی است که بیشتر درایه‌های آن صفر باشند. این ماتریس‌ها در الگوریتم‌های مختلف یادگیری ماشین و محاسبات بزرگ مقیاس مورد استفاده قرار می‌گیرند، زیرا می‌توانند به صرفه‌جویی در فضای حافظه کمک کنند.

$$S = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

این ماتریس اسپارس است زیرا بیشتر عناصر آن صفر هستند

④ ماتریس قطری (Diagonal Matrix)

ماتریس قطری یک ماتریس مربعی است که عناصر غیرقطری آن (عناصری که در قطر اصلی قرار ندارند) برابر با صفر هستند. به عبارتی، تنها درایه‌های روی قطر اصلی (از بالا چپ تا پایین راست) می‌توانند مقادیر غیر صفر داشته باشند. یک ماتریس D به صورت زیر، ماتریس قطری است:

$$D = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{bmatrix} \qquad D = \begin{bmatrix} d_1 & 0 & 0 \\ 0 & d_2 & 0 \\ 0 & 0 & d_3 \end{bmatrix}$$

5 ماتریس متقارن (Symmetric Matrix)

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \qquad A = A^T \qquad A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 4 & 5 & 7 \\ 6 & 7 & 8 \end{bmatrix} \qquad A^T = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 4 & 5 & 7 \\ 6 & 7 & 8 \end{bmatrix}$$

عملیات ترانهاده (Transpose)

یک فرآیند ریاضی است که در آن سطرها و ستون‌های یک ماتریس با یکدیگر جابه‌جا می‌شوند. به عبارتی دیگر، در ترانهاده‌ی یک ماتریس، هر سطر ماتریس اصلی به یک ستون در ماتریس ترانهاده تبدیل می‌شود و هر ستون به یک سطر

$$A_{ij} = A^T_{ji}$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} \qquad A^T = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$$

$$(A^T)^T = A$$
$$(A + B)^T = A^T + B^T$$
$$(A \cdot B)^T = A^T \cdot B^T$$
$$(c \cdot B)^T = c \cdot B^T$$

⑥ماتریس تکین (Singular Matrix)

یک ماتریس تکین ماتریسی مربعی است که معکوس ندارد. به عبارت دیگر، ماتریس تکین نمی‌تواند به‌وسیله‌ی هیچ ماتریسی ضرب شود تا نتیجه‌ی آن ماتریس همانی یا واحد I باشد

- دترمینان صفر: اگر دترمینان یک ماتریس برابر صفر باشد، آن ماتریس تکین است. دترمینان صفر به این معنی است که سطرها یا ستون‌های ماتریس به صورت خطی وابسته هستند (یعنی یکی از سطرها یا ستون‌ها را می‌توان به عنوان ترکیبی خطی از سطرها یا ستون‌های دیگر نوشت)

- معکوس ندارد: اگر ماتریسی تکین باشد، معکوس آن وجود ندارد

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\det(A) = (1 \times 4) - (2 \times 2) = 4 - 4 = 0$$

چون دترمینان ماتریس صفر است، نتیجه می‌گیریم که این ماتریس تکین است

وابستگی خطی در این مثال، مشاهده می‌کنید که سطر دوم برابر با دو برابر:

$$Row2 = 2 \times Row1$$

7 ماتریس غیرتکین (Non-Singular Matrix)

یک ماتریس غیرتکین، یا معکوس‌پذیر، ماتریسی است که معکوس دارد. این بدان معناست که ماتریس غیرتکین

می‌تواند با ضرب در معکوس خود نتیجه‌ی ماتریس همانی یا واحد I را بدهد

- دترمینان غیر صفر: اگر دترمینان یک ماتریس غیر صفر باشد، آن ماتریس غیرتکین است. دترمینان غیر صفر

نشان‌دهنده این است که سطرها یا ستون‌های ماتریس خطی مستقل هستند

- معکوس دارد: ماتریس غیرتکین دارای معکوس است و می‌توان آن را به شکل زیر تعریف کرد

8 ماتریس معکوس (Inverse Matrix)

ماتریس معکوس ماتریسی است که در ضرب با ماتریس اولیه، ماتریس همانی یا واحد I را نتیجه دهد

$$A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I$$

ماتریس باید مربعی و غیر تکین باشد تا معکوس آن وجود داشته باشد.

معکوس یک ماتریس به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \qquad A^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

* $ad - bc \neq 0$

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} \qquad A^{-1} = \frac{1}{(2 \times 4) - (3 \times 1)} \begin{bmatrix} 4 & -3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} = \frac{1}{8 - 3} \begin{bmatrix} 4 & -3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 4 & -3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.8 & -0.6 \\ -0.2 & 0.4 \end{bmatrix}$$

Coding