

Session 03

Matrix Decomposition

Applied Mathematics for AI | Hobot Academy | Zahra Amini



Telegram: @hobotacademy & Instagram:@hobotacademy & LinkedIn:
@zahraamini-ai

Lower-Upper (LU) Decomposition or Factorization

تجزیه LU یکی از تکنیک‌های مهم برای تجزیه یک ماتریس مربعی به دو ماتریس مثلثی است که

یکی پایین مثلثی (L) و دیگری بالامثلثی (U) است. این روش به ویژه در حل دستگاه‌های معادلات خطی و

محاسبات ماتریسی کاربرد دارد. ماتریس A با ابعاد $n \times n$ را می‌توان به شکل زیر در نظر گرفت:

$$A = L \rightarrow U$$

ماتریس بالامثلثی است (همه عناصر پایین قطر صفر هستند)

ماتریس پایین مثلثی است (همه عناصر بالای قطر صفر هستند)



$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ l_{21} & 1 & 0 \\ l_{31} & l_{32} & 1 \end{bmatrix}$$

$$U = \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} \\ 0 & u_{22} & u_{23} \\ 0 & 0 & u_{33} \end{bmatrix}$$



Step 1: Compute the elements of matrix U

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 4 & -6 & 0 \\ -2 & 7 & 2 \end{bmatrix}$$

$$u_{11} = a_{11} = 2$$

$$u_{12} = a_{12} = 1$$

$$u_{13} = a_{13} = 1$$

$$\longrightarrow U = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Step 2: Compute the elements of matrix L

$$l_{ij} = \frac{a_{ij} - \sum_{j=1}^{k-1} l_{ik} u_{kj}}{u_{jj}}$$

$$\rightarrow l_{21} = \frac{a_{21}}{u_{11}} = \frac{4}{2} = 2$$

$$l_{31} = \frac{a_{31}}{u_{11}} = \frac{-2}{2} = -1$$

$$\longrightarrow L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Step 3: Compute the remaining elements of U

$$u_{22} = a_{22} - l_{21} \cdot u_{12} = -6 - (2 \cdot 1) = -8$$

$$u_{23} = a_{23} - l_{21} \cdot u_{13} = 0 - (2 \cdot 1) = -2$$

$$u_{33} = a_{33} - l_{31} \cdot u_{13} = 2 - (-1 \cdot 1) = 3$$

$$\longrightarrow U = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & -8 & -2 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

Step 4: Compute the remaining elements of L

$$l_{32} = \frac{a_{32} - l_{31} u_{12}}{u_{22}} = \frac{7 - (-1 \cdot 1)}{-8} = \frac{8}{-8} = -1 \quad \rightarrow L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 4 & -6 & 0 \\ -2 & 7 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & -8 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

حل دستگاه معادلات خطی با استفاده از تجزیه LU

: در این مثال، می‌خواهیم یک دستگاه معادلات خطی را با استفاده از تجزیه LU حل کنیم

دستگاه معادلات خطی داده شده به صورت ماتریسی است:

$$Ax = b \longrightarrow A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 4 & -6 & 0 \\ -2 & 7 & 2 \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} 5 \\ -2 \\ 9 \end{bmatrix}$$

Step 1: LU Decomposition

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 4 & -6 & 0 \\ -2 & 7 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & -8 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Step 2: Solve Ly = b

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ -2 \\ 9 \end{bmatrix}$$

Equations:

$$1. y_1 = 5 \quad \checkmark$$

$$2. 2y_1 + y_2 = -2 \xrightarrow{y_1=5} 2 \cdot 5 + y_2 = -2 \Rightarrow y_2 = -2 - 10 \Rightarrow y_2 = -12 \quad \checkmark$$

$$3. -y_1 - y_2 + y_3 = 9 \xrightarrow{\begin{array}{l} y_1=5 \\ y_2=-12 \end{array}} -5 - (-12) + y_3 = 9 \Rightarrow 7 + y_3 = 9 \Rightarrow y_3 = 9 - 7 \Rightarrow y_3 = -2 \quad \checkmark$$

$$\left[\begin{array}{c} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{array} \right] = \left[\begin{array}{c} 5 \\ -12 \\ 2 \end{array} \right]$$

U

Step 3: Solve $Ux = y$

$$\left[\begin{array}{ccc} 2 & 1 & 1 \\ 0 & -8 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \left[\begin{array}{c} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{array} \right] = \left[\begin{array}{c} 5 \\ -12 \\ 2 \end{array} \right]$$

Equations:

$$1. 2x_1 + x_2 + x_3 = 5 \xrightarrow{x_2=x_3} 2x_1 + 1 + 2 = 5 \Rightarrow 2x_1 + 3 = 5 \Rightarrow 2x_1 = 5 - 3 \xrightarrow{2} \Rightarrow x_1 = 1 \quad \checkmark$$

$$2. -8x_2 - 2x_3 = -12 \xrightarrow{x_3=2} -8x_2 - 2 \cdot (2) = -12 \Rightarrow -8x_2 = -12 + 4 \Rightarrow -8x_2 = -8 \Rightarrow x_2 = 1 \quad \checkmark$$

$$3. x_3 = 2 \xrightarrow{x_3=2} \quad \checkmark$$

$$Ax = b \longrightarrow x_1 = 1$$

$$x_2 = 1$$

$$x_3 = 2$$

$$\left[\begin{array}{c} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{array} \right] = \left[\begin{array}{c} 1 \\ 1 \\ 2 \end{array} \right]$$

QR Decomposition

تجزیه QR به این معنی است که یک ماتریس A را به حاصل ضرب دو ماتریس Q و R تجزیه می‌کنیم، به طوری که:

$$A = QR$$

یک ماتریس اورتوگونال است (یعنی ستون‌های آن عمود بر هم و نرمال شده‌اند، به این معنی که $Q^T Q = I$ است)

یک ماتریس بالامثلثی است (یعنی تمام عناصر زیر قطر اصلی آن صفر هستند)

کاربردها ---> کاهش بعد: در تحلیل داده‌های با ابعاد بالا، تجزیه QR می‌تواند به فشرده‌سازی داده‌ها کمک کند.

مسائل بهینه‌سازی: این تجزیه در روش‌های حل بهینه‌سازی برای یافتن راه حل‌های تقریباً بهینه به کار می‌رود.



$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Step 1: Compute the Columns of Q

First Column Q_1 :

$$a_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

The first column Q_1 is the normalized version of a_1 . First, calculate the norm (magnitude) of a_1 :

$$\|a_1\| = \sqrt{1^2 + 1^2 + 1^2} = \sqrt{3}$$

Thus, we normalize a_1 to get Q_1 :

$$Q_1 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix}$$

Second Column Q_2 :

$$a_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

اکنون برای محاسبه، Q_2 ابتدا باید مؤلفه هایی از a_2 که در جهت Q_1 هستند حذف کنیم (یعنی پروجکشن a_2 روی Q_1)

The projection of a_2 onto Q_1 is given by:

$$\text{Proj}_{Q_1}(a_2) = \left(\frac{a_2 \cdot Q_1}{Q_1 \cdot Q_1} \right) Q_1$$

$$a_2 \cdot Q_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix} = 1 \cancel{\cdot \frac{1}{\sqrt{3}}} + (-1) \cancel{\cdot \frac{1}{\sqrt{3}}} + 1 \cancel{\cdot \frac{1}{\sqrt{3}}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

Since $Q_1 \times Q_1 = 1$, the projection becomes:

$$\text{Proj}_{Q_1}(a_2) = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Now subtract this projection from a_2 to get the orthogonal component v_2 :

$$v_2 = a - \text{Proj}_{Q_1}(a_2) = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} - \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} \\ -\frac{4}{3} \\ \frac{2}{3} \end{bmatrix}$$

Finally, normalize v_2 to compute Q_2 :

$$\|v_2\| = \sqrt{\left(\frac{2}{3}\right)^2 + \left(-\frac{4}{3}\right)^2 + \left(\frac{2}{3}\right)^2} = \sqrt{\frac{4}{9} + \frac{16}{9} + \frac{4}{9}} = \sqrt{\frac{24}{9}} = \frac{2\sqrt{6}}{3}$$

$$Q_2 = \frac{v_2}{\|v_2\|} = \frac{1}{\frac{2\sqrt{6}}{3}} \begin{bmatrix} \frac{2}{3} \\ -\frac{4}{3} \\ \frac{2}{3} \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Step 2: Compute the Matrix R

$$R = Q^T A$$

$$A = Q R$$

$$Q = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{2}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \end{bmatrix}$$

$$Q^T = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \end{bmatrix}$$

$$A \quad Q^T \quad R$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{3} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & \frac{2\sqrt{6}}{3} \end{bmatrix}$$

تجزیه ویژه (Eigenvalue and Eigenvector Decomposition)

تجزیه ویژه یا تجزیه مقادیر ویژه و بردارهای ویژه یکی از مفاهیم اساسی در جبر خطی است که ماتریس مربعی A

را به مقادیر ویژه و بردارهای ویژه تجزیه می‌کند. این موضوع در کاربردهایی مثل تحلیل مؤلفه‌های اصلی (PCA)،

مکانیک کوانتوم و تحلیل ارتعاشات بسیار مهم است.

برای یک ماتریس مربعی A ، تجزیه ویژه به ما اجازه می‌دهد تا بردارهای ویژه v و مقادیر ویژه λ را بیابیم که معادله زیر را ارضاء کنند:

$$Av = \lambda v$$

که در آن: λ یک مقدار ویژه از ماتریس A است

v بردار ویژه متناظر با λ است

بردارهای ویژه بردارهایی هستند که تحت تأثیر ماتریس A فقط کشیده یا فشرده می‌شوند، و مقادیر ویژه نشان‌دهنده ضریب این کشش یا فشردگی هستند

مراحل تجزیه ویژه

Step 1: Find Eigenvalues (λ)

$$\det(A - \lambda I) = 0$$

$\underbrace{}$

• A ماتریس مربعی داده شده است.

حل این معادله به ما مقادیر ویژه را می‌دهد

• λ اسکالر (مقدار ویژه) است.

• I ماتریس همانی (واحد) با همان ابعاد A است.

• $\det()$ نشان‌دهنده دترمینان است.

Step 2: Find Eigenvectors (v)

$$(A - \lambda I) v = 0$$

☞: $A = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

So the matrix $A - \lambda I$ is:

$$A - \lambda I = \begin{pmatrix} 4 - \lambda & 1 \\ 2 & 3 - \lambda \end{pmatrix}$$

Now, we calculate the determinant of $A - \lambda I$:

$$\det(A - \lambda I) = (4 - \lambda)(3 - \lambda) - (2)(1)$$

$$(4 - \lambda)(3 - \lambda) = 12 - 4\lambda - 3\lambda + \lambda^2$$

$$12 - 4\lambda - 3\lambda + \lambda^2 - 2 = \lambda^2 - 7\lambda + 10$$

$$\lambda^2 - 7\lambda + 10 = 0$$

$$\lambda = \frac{-(-7) \pm \sqrt{(-7)^2 - 4(1)(10)}}{2(1)}$$

$$\lambda = \frac{7 \pm \sqrt{49 - 40}}{2}$$

$$\lambda = \frac{7 \pm \sqrt{9}}{2}$$

$$\lambda = \frac{7 \pm 3}{2}$$

Step 2: Find the Eigenvectors (v)

$$\lambda_1 = \frac{7 + 3}{2} = 5, \quad \lambda_2 = \frac{7 - 3}{2} = 2$$

$$(A - 5I)v = 0$$

$$A - 5I = \begin{pmatrix} 4 - 5 & 1 \\ 2 & 3 - 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$-1v_1 + v_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad v_1 = v_2$$

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

For λ_2 :

$$(A - 2I)v = 0$$

$$A - 2I = \begin{pmatrix} 4 - 2 & 1 \\ 2 & 3 - 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$2v_1 + v_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad v_2 = -2v_1$$

$$v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Final Results ---> The eigenvalues of matrix A are:

$$\lambda_1 = 5, \quad \lambda_2 = 2$$

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

