Postscript

Inverting a Matrix

Applied Mathematics for AI | Hobot Academy | Zahra Amini

Hobat Aacademy

Telegram & Instagram & YouTube: @hobotacademy & LinkedIn: @zahraamini-ai

www.hobotacademy.com

معکوس کردن ماتریس ۲×۲

مقدمه

در جبر خطی، معکوس ماتریس یکی از ابزارهای کلیدی برای حل دستگاه معادلات خطی، تحلیل سیستم‌ها، و محاسبات مهندسی است.

معکوس ماتریس A به ماتریسی گفته می‌شود که ضرب آن در A برابر با ماتریس همانی I باشد:

$$A = \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix} \qquad A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I$$

شرط وجود معکوس ماتریس چیست؟

برای اینکه ماتریس A معکوس داشته باشد، باید دترمینان ماتریس ناصفر باشد.

✓ اگر $\mathrm{Det}(A) \neq 0$، ماتریس معکوس‌پذیر است.

✓ اگر $\mathrm{Det}(A) = 0$، ماتریس غیرمعکوس‌پذیر است و معکوس ندارد.

$$\mathrm{Det}(A) = ad - bc$$

فرمول محاسبه معکوس:

$$A^{-1} = \frac{1}{\mathrm{Det}(A)} \cdot \mathrm{Adj}(A) \rightarrow A^{-1} = \frac{1}{\mathrm{Det}(A)} \cdot \begin{bmatrix} d & -c \\ -b & a \end{bmatrix}$$

ماتریس الحاقی (Adjugate Matrix) یا ماتریس الحاقی اولیه (Adjoint Matrix) برای یک ماتریس ۲×۲ شناخته می‌شود.

این ماتریس با جایگذاری عناصر قطر اصلی (a و d) و تغییر علامت عناصر قطر فرعی (b و c) ساخته می‌شود.

نکته: این ماتریس نقش کلیدی در محاسبه معکوس ماتریس ۲×۲ ایفا می‌کند.

💎 دترمینان نمایانگر ویژگی‌های بنیادی ماتریس است و شرط وجود معکوس را مشخص می‌کند.

💎 حساسیت دترمینان به خطا: اگر مقدار دترمینان بسیار کوچک باشد، معکوس‌سازی ممکن است به خطای عددی منجر شود. این موضوع در محاسبات عددی بسیار مهم است.

ماتریس A به صورت زیر داده شده است، معکوس ماتریس را به دست آورید.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$

Step 1: Compute the Determinant

$$\text{Det}(A) = (2)(4) - (3)(1) = 8 - 3 = 5$$

Step 2: Modify the Matrix $\rightarrow$ Swap $a = 2$ and $d = 4$:

$$\begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$$

Change the signs of $b = 3$ and $c = 1$: $\begin{bmatrix} 4 & -1 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$

Step 3: Scale the MatrixDivide each element of the modified matrix by $\text{Det}(A) = 5$:

$$A^{-1} = \frac{1}{5} \cdot \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ -3 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{4}{5} & -\frac{1}{5} \\ -\frac{3}{5} & \frac{2}{5} \end{bmatrix}$$

Final Answer: $\quad A^{-1} = \begin{bmatrix} 0.8 & -0.2 \\ -0.6 & 0.4 \end{bmatrix}$

Verification of the Inverse:

To verify the result, compute $A \cdot A^{-1}$. The product should equal the identity matrix I :

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0.8 & -0.2 \\ -0.6 & 0.4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \checkmark$$

مراحل محاسبه معکوس ماتریس ۳×۳:

✓ یک ماتریس ۳×۳ تنها در صورتی معکوس‌پذیر است که دترمینان آن برابر با صفر نباشد.

فرض کنید ماتریس A به صورت زیر باشد:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

مرحله ۱: محاسبه دترمینان

برای محاسبه دترمینان ماتریس A، ماتریس‌های مینور را به صورت زیر تشکیل دهید:

Minor:

$M_{ij} = \det(A_{ij}) \rightarrow$

$$M_{11} = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, M_{12} = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}, M_{13} = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

$$\text{Det}(A) = a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) - a_{12}(a_{21}a_{33} - a_{23}a_{31}) + a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31})$$

✓ مینور هر عنصر a_{ij} (عنصر واقع در سطر i و ستون j)، دترمینان ماتریس ۲×۲ است که با حذف سطر i و ستون j از A به دست می‌آید.

✓ برای هر عنصر a_{ij}، دترمینان زیرماتریس ۲×۲ را محاسبه کنید.

مرحله ۲: تشکیل ماتریس کوفاکتورها

کوفاکتور یک عنصر a_{ij} برابر است با:

$$C_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot \mathrm{Minor}_{ij}$$

ماتریس کوفاکتورها را با جایگذاری کوفاکتورهای هر عنصر تشکیل دهید.

$$\mathrm{C}_{11} \rightarrow \mathrm{Minor}_{11} = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \quad \mathrm{C}_{12} \rightarrow \mathrm{Minor}_{12} = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}, \quad \mathrm{C}_{13} \rightarrow \mathrm{Minor}_{13} = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

$$\mathrm{C}_{21} \rightarrow \mathrm{Minor}_{21} = \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \quad \mathrm{C}_{22} \rightarrow \mathrm{Minor}_{22} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}, \quad \mathrm{C}_{23} \rightarrow \mathrm{Minor}_{23} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

$$\mathrm{C}_{31} \rightarrow \mathrm{Minor}_{31} = \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix}, \quad \mathrm{C}_{32} \rightarrow \mathrm{Minor}_{32} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix}, \quad \mathrm{C}_{33} \rightarrow \mathrm{Minor}_{33} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

$$(-1)^{i+j} \rightarrow \begin{bmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{bmatrix} \rightarrow \mathrm{Cofactors}(A) : C = \begin{bmatrix} +C_{11} & -C_{12} & +C_{13} \\ -C_{21} & +C_{22} & -C_{23} \\ +C_{31} & -C_{32} & +C_{33} \end{bmatrix} \checkmark$$

مرحله ۳: تشکیل ماتریس الحاقی (Adjugate Matrix)

ماتریس الحاقی یا ماتریس مجاور، ترانهاده‌ی (Transpose) ماتریس کوفاکتورها است:

$$\mathrm{Adj}(A) = C^{\top}$$

✓ برای ترانهاده کردن ماتریس جای سطها و ستون‌ها عوض می شود،

مثلا سطر اول ماتریس C به ستون اول ماتریس $C^{\top}$ تبدیل می‌شود.

$$C_{ij} \to C_{ji}$$

$$C = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{21} & C_{31} \\ C_{12} & C_{22} & C_{32} \\ C_{13} & C_{23} & C_{33} \end{bmatrix} \to C^{\top} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} \end{bmatrix}$$

مرحله ۴: تقسیم بر دترمینان

معکوس ماتریس A برابر است با:

$$A^{-1} = \frac{1}{\mathrm{Det}(A)} \cdot \mathrm{Adj}(A)$$

حل دستگاه معادلات خطی با استفاده از معکوس ماتریس

دستگاه معادلات خطی به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$A \cdot x = b$$

که: A یک ماتریس ضرایب است، x بردار مجهولات است و b بردار ثابت‌ها است.

برای حل این دستگاه، می‌توان از معکوس ماتریس A استفاده کرد، مشروط بر اینکه A معکوس‌پذیر باشد. در این صورت، رابطه زیر برقرار است:

$$x = A^{-1} \cdot b$$

We are given the matrix: $A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \\ 1 & 5 & 1 \end{bmatrix}$

We will calculate the inverse of this matrix step by step using the formula:

$$A^{-1} = \frac{1}{\text{Det}(A)} \cdot \text{Adj}(A)$$

Where:
$\text{Det}(A)$: The determinant of A
$\text{Adj}(A)$: The adjugate (or adjoint) of A, which is the transpose of the cofactor matrix.

Step 1: Compute the Determinant of A

The determinant of A is given by:

$$\text{Det}(A) = a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) - a_{12}(a_{21}a_{33} - a_{23}a_{31}) + a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31})$$

Substitute the values of A :

$$\text{Det}(A) = 2((1)(1) - (5)(2)) - 3((4)(1) - (5)(3)) + 1((4)(2) - (1)(3))$$

Simplify:

$$\text{Det}(A) = 2(1-10) - 3(4-15) + 1(8-3) \to \text{Det}(A) = 2(-9) - 3(-11) + 1(5) \to \text{Det}(A) = -18 + 33 + 5 = 20$$

Thus, $\text{Det}(A) = 20$

Step 2: Compute the Cofactor Matrix

The cofactor of each element a_{ij} is given by: $\to C_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot \text{Minor}_{ij}$

Cofactor $C_{11} \to \text{Minor}_{11} = \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = (1)(1) - (5)(2) = -9, \quad C_{11} = (+1) \cdot (-9) = -9$

Cofactor $C_{12} \to \text{Minor}_{12} = \begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = (4)(1) - (5)(3) = -11, \quad C_{12} = (-1) \cdot (-11) = 11$

Cofactor $C_{13} \to \text{Minor}_{13} = \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = (4)(2) - (1)(3) = 5, \quad C_{13} = (+1) \cdot (5) = 5$

Cofactor $C_{21} \to \text{Minor}_{21} = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = (3)(1) - (1)(2) = 1, \quad C_{21} = (-1) \cdot (1) = -1$

Cofactor $C_{22} \to \text{Minor}_{22} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = (2)(1) - (1)(1) = -1, \quad C_{22} = (+1) \cdot (-1) = -1$

Cofactor $C_{23} \to \text{Minor}_{23} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = (2)(2) - (3)(1) = -5, \quad C_{23} = (-1) \cdot (-5) = 5$

Cofactor $C_{31} \to \text{Minor}_{31} = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = (3)(5) - (1)(1) = 14, \quad C_{31} = (+1) \cdot (14) = 14$

Cofactor $C_{32} \to \text{Minor}_{32} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = (2)(5) - (1)(4) = 6, \quad C_{32} = (-1) \cdot (6) = -6$

Cofactor $C_{33} \to \text{Minor}_{33} = \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = (2)(1) - (4)(3) = -10, \quad C_{33} = (+1) \cdot (-10) = -10$

Step 3: Form the Cofactor Matrix $\to C = \begin{bmatrix} -9 & 11 & 5 \\ -1 & -1 & 5 \\ 14 & -6 & -10 \end{bmatrix}$

Step 4: Compute the Adjugate Matrix

The adjugate matrix is the transpose of the cofactor matrix:

$$\text{Adj}(A) = C^{\top} = \begin{bmatrix} -9 & 11 & 5 \\ -1 & -1 & 5 \\ 14 & -6 & -10 \end{bmatrix}^{\top} = \begin{bmatrix} -9 & -1 & 14 \\ 11 & -1 & -6 \\ 5 & 5 & -10 \end{bmatrix}$$

Step 5: Divide by the Determinant

The inverse of A is: $\to A^{-1} = \frac{1}{\text{Det}(A)} \cdot \text{Adj}(A)$

Substitute $\text{Det}(A) = 20$:

$$A^{-1} = \frac{1}{20} \cdot \begin{bmatrix} -9 & -1 & 14 \\ 11 & -1 & -6 \\ 5 & 5 & -10 \end{bmatrix}$$

Simplify:

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{9}{20} & -\frac{1}{20} & \frac{7}{10} \\ \frac{11}{20} & -\frac{1}{20} & -\frac{3}{10} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

Final Answer:

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{9}{20} & -\frac{1}{20} & \frac{7}{10} \\ \frac{11}{20} & -\frac{1}{20} & -\frac{3}{10} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

verification:

$$A \cdot A^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \\ 1 & 5 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -\frac{9}{20} & \frac{11}{20} & \frac{1}{4} \\ -\frac{1}{20} & -\frac{1}{20} & \frac{1}{4} \\ \frac{7}{10} & -\frac{3}{10} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Solving the System of Equations with the Given Inverse Matrix

We will solve the system:

$A \cdot x = b$

Where:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \\ 1 & 5 & 1 \end{bmatrix}, \quad A^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{9}{20} & -\frac{1}{20} & \frac{7}{10} \\ \frac{11}{20} & -\frac{1}{20} & -\frac{3}{10} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 5 \\ 6 \\ 4 \end{bmatrix}$$

We solve for x using: $x = A^{-1} \cdot b$

Step 1: Perform Matrix Multiplication $A^{-1} \cdot b$

$$x = \begin{bmatrix} -\frac{9}{20} & -\frac{1}{20} & \frac{7}{10} \\ \frac{11}{20} & -\frac{1}{20} & -\frac{3}{10} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 5 \\ 6 \\ 4 \end{bmatrix}$$

Compute each element of x :

$$x_1 = \left(-\frac{9}{20} \cdot 5\right) + \left(-\frac{1}{20} \cdot 6\right) + \left(\frac{7}{10} \cdot 4\right) \rightarrow x_1 = -\frac{45}{20} - \frac{6}{20} + \frac{28}{10} = -\frac{51}{20} + \frac{56}{20} = \frac{5}{20} = 0.25$$

$$x_2 = \left(\frac{11}{20} \cdot 5\right) + \left(-\frac{1}{20} \cdot 6\right) + \left(-\frac{3}{10} \cdot 4\right) \rightarrow x_2 = \frac{55}{20} - \frac{6}{20} - \frac{12}{10} = \frac{49}{20} - \frac{24}{20} = \frac{25}{20} = 1.25$$

$$x_3 = \left(\frac{1}{4} \cdot 5\right) + \left(\frac{1}{4} \cdot 6\right) + \left(-\frac{1}{2} \cdot 4\right) \rightarrow x_3 = \frac{5}{4} + \frac{6}{4} - \frac{8}{4} = \frac{11}{4} - \frac{8}{4} = \frac{3}{4} = 0.75$$

Step 2: Write the Final Solution

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.25 \\ 1.25 \\ 0.75 \end{bmatrix}$$

Step 3: Verify the Solution

Substitute $x_1 = 0.25,\ x_2 = 1.25,\ x_3 = 0.75$ into the original system:

$$2(0.25) + 4(1.25) + 3(0.75) = 5 \quad \text{(True)}$$
$$3(0.25) + 1(1.25) + 2(0.75) = 6 \quad \text{(True)}$$
$$1(0.25) + 5(1.25) + 1(0.75) = 4 \quad \text{(True)}$$

The solution is correct. $\boxed{\text{Success!}}$ ✓

Now it's your turn

Hobat Aacademy

Exercise 1: Checking Matrix Invertibility

For each of the matrices below:

1. Determine whether the matrix is invertible by calculating its determinant.
2. If it is invertible, find its inverse.

a) $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$

b) $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$

Exercise 2: Calculating the Inverse of a Matrix

Given the matrix: $\quad A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 5 & 6 & 0 \end{bmatrix}$

1. Calculate the determinant of A.
2. Form the cofactor matrix.
3. Compute the inverse of A.

Exercise 3: Solving a System of Linear Equations Using the Inverse

Solve the following system of equations using the matrix inversion method:

$$x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 6$$
$$2x_1 + 3x_2 + x_3 = 8$$
$$3x_1 + x_2 + 2x_3 = 7$$

1. Define the coefficient matrix (A), the constants vector (b), and the unknowns (x).
2. Compute the inverse of A.
3. Use the formula $x = A^{-1} \cdot b$ to find the solution.

Exercise 4: Using Matrix Inversion in Linear Regression

Given the following data matrix and output vector $\rightarrow X = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}, \quad y = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}$

1. Using the formula $\beta = (X^T X)^{-1} X^T y$, compute the regression coefficients β.
2. Determine whether the data is linear.

Thanks for your attention 🙏

Hobat Aacademy

www.hobotacademy.com