

# Introdução ao Fractal

Sadao Massago

Outubro de 2010

## Nota

Este é o trabalho apresentado no “VII Semana Acadêmica de Matemática”, realizado no período de 27 de setembro de 2010 a 1o. de outubro de 2010, na Universidade Federal de Tocantins, Campus de Araguaína.

## Resumo

Apesar de ainda não existir nenhuma caracterização exata do conjunto fractal, a ideia intuitiva é o conjunto na qual contém uma cópia reduzida de si mesmo, podendo ou não ser acompanhado de deformações. Alguns destes conjuntos podem ser construídos para servir de exemplos do problema matemático, enquanto que outros aparecem naturalmente no estudo de alguns problemas. Recentemente o Mandelbrot constatou que a estrutura fractal aparece frequentemente na natureza, deixando de ser interesse não apenas dos matemáticos. Neste texto será apresentado somente os conceitos básicos, mas sem muito formalismo para evitar o uso de conceitos da matemática avançada necessário para estudo dos fractais.

**Palavras-chave:** fractal, IFS

## 1 Introdução

A ideia por trás do conjunto fractal é o “auto similaridade”, isto é, o conjunto na qual a parte dele é uma “miniatura” do conjunto todo. Vejamos o exemplo do triângulo de Sierpinski (Figura 1). Ele é formado pelas três cópias do “triângulo”, cada um situado em um canto do triângulo original. Cada cópia é exatamente a redução do original pela escala de  $1/2$ .

Quando o conjunto é exatamente a união das cópias reduzidas dele mesmo, dizemos que o conjunto é exatamente auto similar. No entanto, fractal não precisam ser

exatamente auto similar. Os fractais construídos são comportados, mas os que surgem no estudo de outros problemas costuma ser complexas. Por exemplo, o conjunto de Mandelbrot (Figura 2 a esquerda) contém muitas cópias reduzidas (Figura 2 no centro é uma ampliação de “ponto quase invisível” da ponta esquerda) com ou sem deformações, mas também contém muitos outros fractais (Figura 2 a direita é uma ampliação de onde “esfera gruda no cardioide”).

Em 1872, O Karl Weierstrass construiu um exemplo abstrato de uma função contínua que não é diferenciável em todos os pontos. Em 1904, o Helge von Koch construiu uma curva fractal que reproduz a função similar, denominado de curva de Koch. Em 1915, Wacław Sierpinski construiu o triângulo de Sierpinski. Maioria destes conjuntos auto similares foram construídos para obter exemplos de problemas complexos da matemática.

Nos séculos 19 e 20, foram estudadas iteração das funções no plano complexo (Henri Poincaré, Felix Klein, Pierre Fatou e Gaston Julia), mas ainda não tinha recursos computacionais que permitiria a visualização da estrutura fractal associada (veja [9] para mais detalhes).

Na década de 1960, o Benoit Mandelbrot inicia a investigação do conjunto auto similar (ver [5]) e a partir de 1975, usa o termo fractal (quebrado ou fraturado em latim) para designar o conjunto na qual a dimensão de Hausdorff–Besicovitch é maior do que a dimensão topológica. O Mandelbrot podia visualizar o conjunto com o uso de computador e percebeu que é um conjunto auto similar muito complexa. Também foi o Mandelbrot que chamou a atenção pelo fato de ter estrutura fractal na natureza (ver [5] e [6]).

Curiosamente, nem a definição do Mandelbrot, nem a definição posterior determina exatamente o conjunto que queríamos considerar como sendo fractal (veja [4]). Em outros termos, ainda não sabemos o que caracteriza exatamente o conjunto fractal. Apesar de ter outros tipos de conjuntos auto similares, nós concentraremos nos conjuntos fractais do tipo exatamente auto similar ou quase auto similar.

Existem vários softwares livres para desenhar fractais, tais como *fraqtive* (<http://fraqtive.mimec.org>) e *GNU XaoS* (<http://xao.s.sourceforge.net/>) especializado nos conjuntos de Julia e

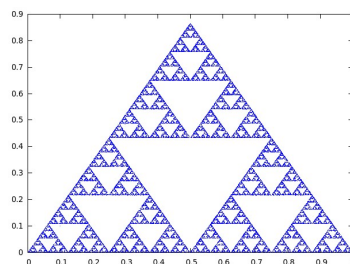


Figura 1: Triângulo de Sierpinski

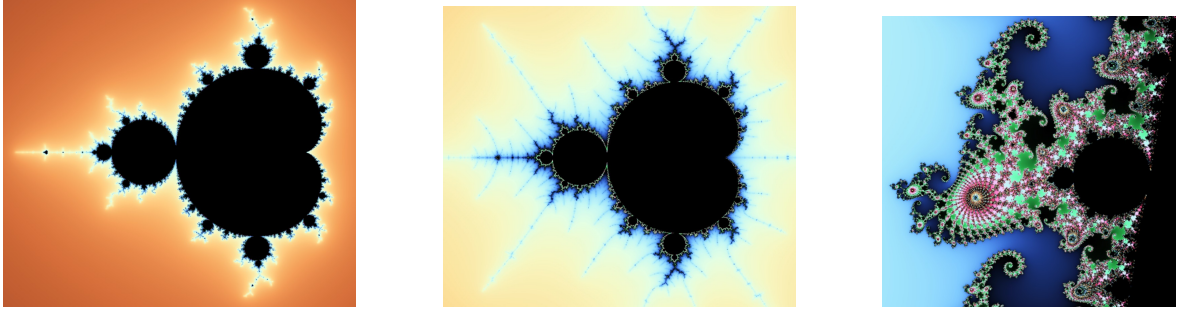


Figura 2: Conjunto de Mandelbrot

de Mandelbrot e gnofract4d (<http://gnofract4d.sourceforge.net/>) e clássico FractInt (<http://spanky.triumf.ca/www/fractint/fractint.html>) para fractais diversos.

## 2 Dimensão Fractal

Um fractal pode ser associado a medida de similaridade denominado de dimensão fractal. O estudo de dimensões é muito complexa, mas no caso de ser exatamente auto similar, podemos obter o seu valor.

Dizemos que um conjunto  $X$  é exatamente auto similar quando  $X = \Phi_0(X) \cup \dots \cup \Phi_{n-1}(X)$  onde  $\Phi_i(X)$  são cópias reduzidas exatas de  $X$  (sem deformação). No caso do triângulo de Sierpinski (Figura 1), ele é formado por três cópias reduzidas por escala de  $1/2$  (distância é reduzido a  $1/2$ ). Assim,  $\Phi_i(X)$  são exatamente as reduções na escala  $1/2$  do conjunto  $X$ , seguido de uma translação adequada.

Para definir a dimensão fractal, precisamos saber o que é uma dimensão no caso geral. Quando existe uma distância, dizemos que um conjunto foi escalado pelo fator  $\lambda$  quando a distância entre os pontos for multiplicado exatamente por  $\lambda$ . Quando um conjunto for escalado por  $\lambda$ , o comprimento será multiplicado por  $\lambda$  no caso de curvas, a área será multiplicado por  $\lambda^2$  no caso de superfícies e o volume, será multiplicado por  $\lambda^3$  no caso de sólidos. A medida é dito de dimensão  $d$  se for multiplicado por  $\lambda^d$  quando efetuar escalonamento por  $\lambda$ . Assim, comprimento, área e volumes são medidas de dimensão 1, 2 e 3 respectivamente. Formalmente, dizemos que uma medida  $m_d$  é de dimensão  $d$  quando  $m_d(\lambda \cdot X) = \lambda^d m_d(X)$  se  $\lambda \cdot X$  for conjunto  $X$  escalado por  $\lambda > 0$ .

Agora vamos supor que  $X = \Phi_0(X) \cup \dots \cup \Phi_{n-1}(X)$  onde  $\Phi_i(X)$  são cópias de  $X$  com a escala  $\lambda_i > 0$  e que essas cópias tenham intersecções vazias ou que sejam número finito de pontos. Então a medida de dimensão  $d$  deve satisfazer  $m_d(X) = m_d(\Phi_0(X) \cup \dots \cup \Phi_{n-1}(X)) = \lambda_0^d m_d(X) + \dots + \lambda_{n-1}^d m_d(X) = (\lambda_0^d + \dots + \lambda_{n-1}^d) m_d(X)$ , pois a medida do conjunto finito de pontos é nula para  $d > 0$ . Se  $m_d(X)$  existir, for finito e não nulo, temos a equação  $1 = \lambda_0^d + \dots + \lambda_{n-1}^d$ , cuja solução  $d$  é a dimensão fractal. Observe que no caso de ter algum  $\lambda_i \geq 1$ , a equação não teria solução positiva,

mas se  $\forall i, \lambda_i < 1$ , existe uma única solução. Note que a equação foi obtida, supondo que existe uma medida de dimensão  $d > 0$  na qual o conjunto tem medida não nula e limitada na qual não é fácil de provar.

O caso especial na qual todas as cópias tem a mesma escala ( $\lambda = \lambda_i$ ), podemos resolver a equação como sendo  $1 = n\lambda^d$ . Aplicando logaritmos em ambos lados, isolando o  $d$  e simplificando, temos  $d = \frac{\ln n}{\ln(1/\lambda)}$  que permite calcular a dimensão fractal para o caso do conjunto exatamente auto similar cuja todas cópias tem o mesmo fator de escala.

No caso do triângulo de Sierpinski (Figura 1),  $X = \Phi_0(X) \cup \Phi_1(X) \cup \Phi_2(X)$  onde cada cópia  $\Phi_i(X)$  é uma redução por escala de  $1/2$ . ALogo,  $n = 3$  e  $\lambda = 1/2$ , tendo  $d = \frac{\ln 3}{\ln(2)} \cong 1.584962500721156$ .

Muitos dos fractais costumam ter dimensão não inteiras, mas existem fractais com dimensão inteira. Para estudos de dimensões, veja o [3].

### 3 Método da Contagem de Caixas

Exceto nos casos de fractais exatamente auto similares, não é simples de obter a dimensão fractal. Para ter um valor aproximado, podemos usar o processo de “contagem de caixas”.

Inicialmente, desenhamos um retângulo contendo o conjunto fractal de forma que o conjunto toque cada um dos lados. Subdividimos cada lado do retângulo em  $k$  partes iguais, obtendo  $k^2$  retângulos semelhantes, seja  $n_k$ , o número de retângulos que interceptam o conjunto  $X$  e calculamos  $d_k = \frac{\ln n_k}{\ln k}$ . Quando o conjunto satisfaz certas condições, podemos provar que  $d = \lim_{k \rightarrow \infty} d_k$  onde  $d$  é a dimensão fractal. Na prática, é difícil obter imagens de alta resolução exceto nos casos associados ao problema matemático, além dos objetos da natureza costumam ter dimensão fractal diferente em cada intervalo de escala. Para melhorar a estimativa em tais condições, a análise de dados costumam ser aplicadas sobre  $d_k$ .

### 4 IFS (Sistema Iterativa de Funções)

Quando um conjunto é formado pelas cópias reduzidas com deformações controladas, podemos obter a função que efetua tais reduções e deformações na qual servirá para reconstruir o conjunto todo. A função que determina a cópia é denominada de função de similaridade.

Uma aplicação  $\Phi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  é denominado de contração quando existe  $\lambda < 1$  tal que  $\forall X, Y \in \mathbb{R}^n, \|\Phi(X) - \Phi(Y)\| \leq \lambda \|X - Y\|$ .

Dado um conjunto de contrações  $\{\Phi_1, \dots, \Phi_n\}$ , podemos analisar o conjunto  $F$  tal que  $F = \Phi_1(F) \cup \dots \cup \Phi_n(F)$ . É possível mostrar que existe um único conjunto deste tipo e é compacto (limitado e fechado no caso do subconjunto de  $\mathbb{R}^n$ ). Para aplicações práticas, costumam usar contrações sejam as aplicações afins, isto é,  $\Phi_i(X) = A \cdot X + B$  onde  $A$  é uma matriz quadrada  $n \times n$  e  $B$  é um vetor  $n$  dimensional. Toda combinação da mudança de escala, rotação, reflexão e translações podem ser representados pelas aplicações afins.

Como exemplo, vamos obter o IFS associado ao triângulo de Sierpinski. Cada um dos três triângulos são exatamente a redução por escala de  $1/2$ . Analisando a posição do vértice do canto esquerdo inferior, veremos que  $\Phi_1(x, y) = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ ,  $\Phi_2(x, y) = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \end{bmatrix}$  e  $\Phi_3(x, y) = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{4} \\ \frac{\sqrt{3}}{4} \end{bmatrix}$ .

Um dos algoritmos mais simples para produzir a imagem do conjunto fractal associado ao IFS é o método de “Chaos Game”.

Algoritmo Chaos Game para  $\{\Phi_0, \dots, \Phi_{n-1}\}$

Escolha o ponto inicial  $x_0$

$x = x_0$

para  $i = 0 \dots N_0$

$k = \text{número sorteado entre } 0 \text{ e } n - 1$

$x = \Phi_k(x)$

fim para

para  $i = N_0 \dots [\text{Iteração máxima}]$

$k = \text{número sorteado entre } 0 \text{ e } n - 1$

$x = \Phi_k(x)$

desenhe o ponto  $x$

fim para

fim algoritmo

O método de Chaos Game é baseado no teorema relacionado ao conjunto atrator do sistema dinâmico determinado pelas funções  $\{\Phi_0, \dots, \Phi_{n-1}\}$  na qual não vamos entrar em detalhes. Os interessados podem consultar referências tais como [8, 7, 3]).

## 5 Onde aparece os fractais?

O conjunto fractal aparecem tanto no estudo dos problemas matemáticos, como no problemas relacionado aos estudos na natureza.

## 5.1 Objetos na Natureza

Muitos objetos da natureza tem a estrutura recursiva e podem manter a dimensão fractal até uma escala considerável. Os exemplos mais comuns são: costas e rios, superfícies dos planetas, fraturas, árvores e outras plantas, veias, texturas do solo, etc.

Para analisar tais objetos, costumam calcular a dimensão fractal e no caso de reconstrução, tentar determinar o IFS aproximado. Note que as técnicas de “Curvas de Koch” e “L-system” (sobre L-systems, veja [1]) são casos especiais de IFS.

O estudo da transmissão de sinais também envolve fractal como o estudo feito pelo Mandelbrot ou da antena fractal comumente utilizada nos celulares e outros receptores de sinais.

## 5.2 Exemplos Matemáticos

Os fractais são úteis para obter diversos exemplos interessantes de matemática. Veremos algumas delas. Para mais exemplos, veja [7].

### O conjunto de Cantor

O processo de obter o Conjunto de Cantor é remover um terço central do segmento. Na primeira etapa, sobra dois segmentos de tamanho  $1/3$ . Removendo um terço central de cada um deles, sobra  $2^2$  segmentos de tamanho  $1/3^2$ . Na etapa  $n$ , sobra  $2^n$  segmentos de tamanho  $1/3^n$ .



Figura 3: Conjunto de Cantor

O conjunto de Cantor é um conjunto não enumerável, tem medida nula e não é denso em nenhum ponto. Como ele é formado pelas duas cópias com escala de  $1/3$ , sua dimensão é  $d = \frac{\ln 2}{\ln 3} \cong 0.63092975357146$ .

### Curvas de Koch

Na curva do Koch, um segmento é substituído por segmento poligonal formado por 4 segmentos de tamanho  $1/3$ . O processo é aplicado indefinidamente em cada um dos segmentos. Na etapa  $n$ , terá uma linha poligonal com  $4^n$  segmentos de tamanho  $1/3^n$ . Esta curva é contínua, mas não tem derivadas em nenhum ponto. Um triângulo formado pelas três curvas de Koch é denominado de floco de neve de Koch e delimita uma região finita, apesar de ter perímetro infinito.

A curva de Koch é formado pelas 4 cópias com redução de  $1/3$ . Logo a sua dimensão é  $d = \frac{\ln 4}{\ln 3} = 1.261859507142915$ .



Figura 4: Curvas de Koch

### Curvas de Peano

Apesar da imagem da curva de Peano ser um quadrado e não um fractal, a construção consiste no processo de auto similaridade exata. Um segmento que é diagonal de um quadrado será substituído pelas linhas poligonais como mostrado na Figura 5. O limite deste processo gera uma função contínua e bijetiva do intervalo no quadrado. isto ilustra que a imagem da função contínua de um conjunto sem área pode ter área. Note que nos estudos relacionados às medidas, ter derivada contínua é importante para usar o Teorema de Sarge.



Figura 5: Processo de construção da Curva de Peano

Como um segmento (diagonal) é substituído pelos 9 diagonais de escala reduzida a  $1/3$ , sua dimensão é  $d = \frac{\ln 3^2}{\ln 3} = \frac{2 \ln 3}{\ln 3} = 2$ .

## 5.3 Conjunto Fractal no sistema dinâmico

Quando estuda o comportamento das funções, a sua representação gráfica pode ter uma estrutura fractal como no caso do conjunto de Mandelbrot (Figura\_2). O conjunto de Mandelbrot é um mapeamento do comportamento de “divergência” da sequência associada na qual não vamos entrar em detalhes. No caso do estudo do comportamento das equações diferenciais, costuma aparecer também o conjunto denominado de “chaos” na qual não apresenta propriedades de auto similaridade, o que complica mais ainda o seu estudo.

Consideremos somente o caso do sistema dinâmico associado ao estudo da iteração das funções.

Dada uma função  $\Phi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  e um ponto  $x_0 \in \mathbb{R}^n$ , podemos criar uma sequência

de forma recursiva, definindo  $x_{n+1} = \Phi(x_n)$  para  $n > 0$ . O Julia considerou o caso da função  $\Phi(z) = z^2 + c$  no plano complexo e estudou o comportamento da sequência associada. O contorno da região onde seus pontos  $x_0$  gera uma sequência que tende a infinito no sentido de  $|x_n| \rightarrow \infty$  costuma ser um fractal, denominado de conjunto de Julia.

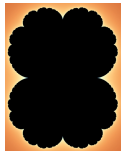


Figura 6: Fractal de Julia de  $\Phi(z) = z^2 + 0.25$

O Mandelbrot fixou  $x_0 = 0$  e analisou o comportamento em relação ao parâmetro  $c$ . Dada família de funções a um parâmetro, o contorno do conjunto de parâmetros na qual a sequência recursiva associada é uma sequência que tende a infinito ( $|x_n| \rightarrow \infty$ ) forma um fractal denominado de Conjunto de Mandelbrot. A Figura 2 é o caso de  $\Phi_c(z) = z^2 + c$ . Os fractais do tipo Julia ou Mandelbrot costuma ter estruturas complexas, mesmo no caso das funções mais simples, o que torna difícil de ser estudados. Os interessados podem consultar o [2].

## 5.4 IFS Como Sistema Dinâmicos

Para estudar o IFS, é necessário analisar como um sistema dinâmico. Em vez de analisar se a sequência tende a infinito, também podemos analisar se a sequência tende a algum conjunto limitado.

Dado uma aplicação  $\Phi : X \rightarrow X$ , dizemos que  $F$  é um atrator quando, para todo  $x_0$ , a sequência recursiva  $x_{n+1} = \Phi(x_n)$  associado tende ao conjunto  $F$ , isto é, torna cada vez mais próximo de  $F$ . No caso de  $\Phi$  ser uma contração, o teorema de Picard garante que existe um único ponto fixo (logo,  $F$  é composto de um único ponto). Caso de ter várias contrações como no caso de IFS, o conjunto atrator  $F$  costuma ser um conjunto compacto satisfazendo  $F = \Phi_0(F) \cup \dots \cup \Phi_{n-1}(F)$  que é um conjunto auto similar (fractal). Como a regra de similaridade são as contrações usadas, o problema pode ser estudado mais facilmente do que outros tipos de fractais. Por exemplo, a demonstração da funcionalidade do Chaos Game não será difícil.

## Referências

- [1] Barnsley, Michael et. al., “The Science of Fractal Images”, Springer-Verlag, 1988.



- [2] Devaney, Robert L., "Introduction to Chaotic Dynamical Systems", second edition, Addison-Wesley, 1989.
- [3] Edgar, Gerald, "Measure, Topology, and Fractal Geometry", Second Edition, Springer, 2008.
- [4] Falconer, Kenneth J., "Fractal Geometry (Mathematical Foundations and Applications)", second edition, John Wiley & Sons Ltd., 2003.
- [5] Mandelbrot, Benoît, "How Long Is the Coast of Britain? Statistical Self-Similarity and Fractional Dimension", Science, New Series, 1967, Vol. 156, No. 3775, pp. 636-638.
- [6] Mandelbrot, Benoit, "The Fractal Geometry of Nature", W. H. Freeman and Company, 1982.
- [7] Sagan, Hang, "Space Filling Curves", Springer-Verlag, 1994.
- [8] Vicsek, Tamás, "Fractal Growth Phenomena", World Scientific, 1989.
- [9] Disponível em <<http://en.wikipedia.org/wiki/Fractal>>, consultado em 09 de setembro de 2010.