Graphes

Lotfi HOCINI

Références: Moodle CESI

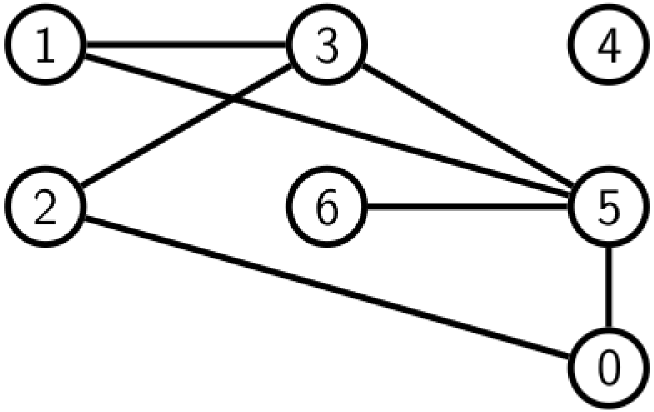
Graphe

Un graphe c'est :

- Des points — appelés **sommets** ou nœuds.

⇝ on peut les numéroter, par exemple ici à partir de 0.

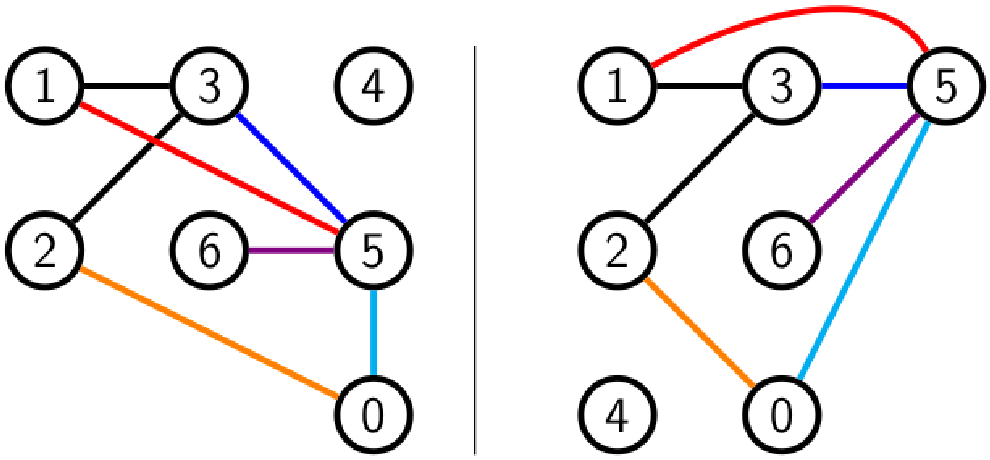
- Des liaisons entre ces points — appelées **arêtes** ou arcs.



Graphe

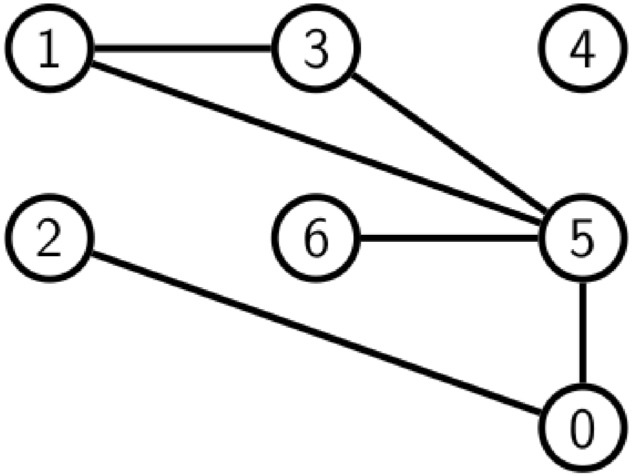
On ne tient pas compte de la position des points, ni de la forme des arêtes, ni des croisements d'arêtes.

Deux représentations d'un même graphe :



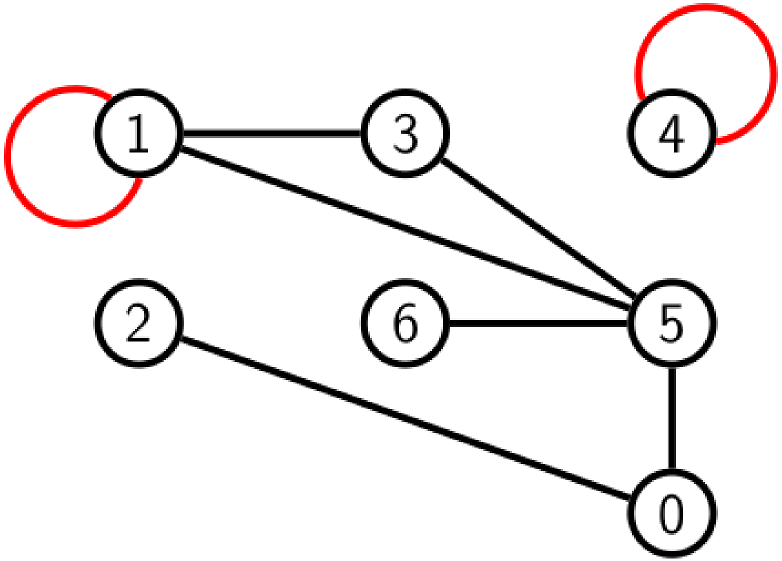
Graphe

Définitions complémentaires



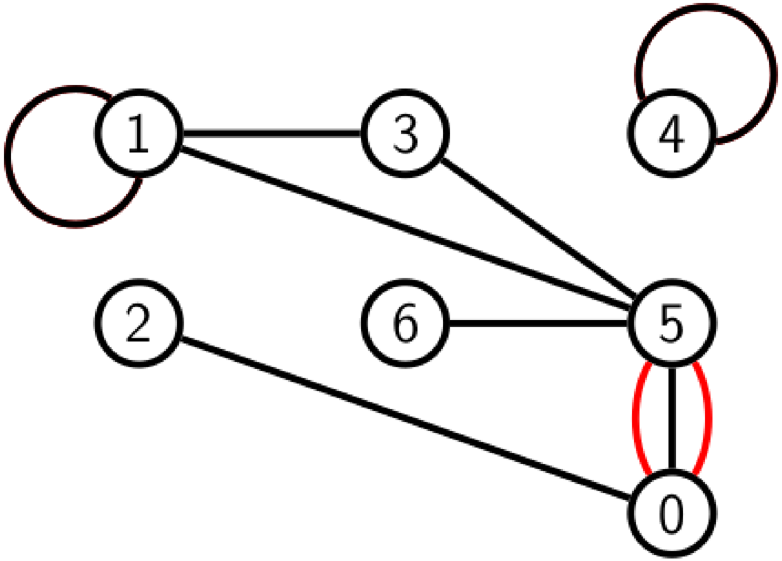
Graphe
Définitions complémentaires

- Certaines arêtes relient un sommet à lui-même.



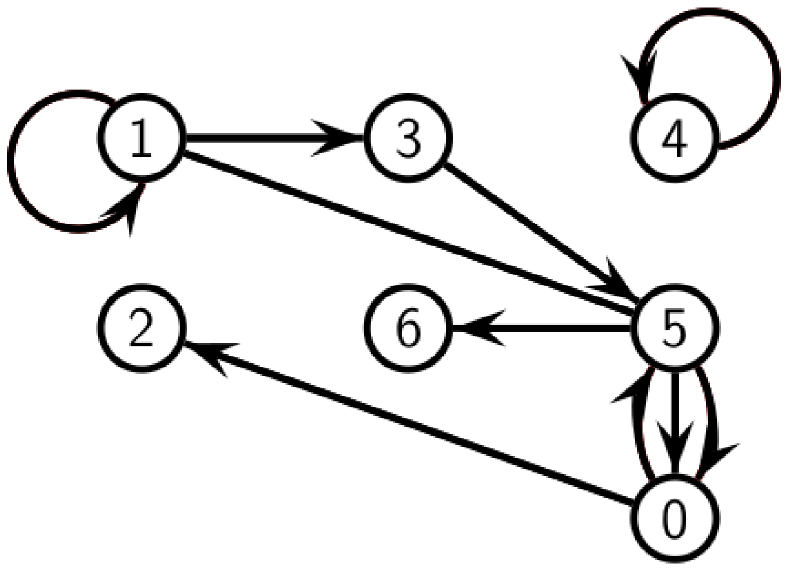
Graphe
Définitions complémentaires

- Certaines arêtes relient un sommet à lui-même.
- Il y a plusieurs arêtes entre deux sommets donnés.



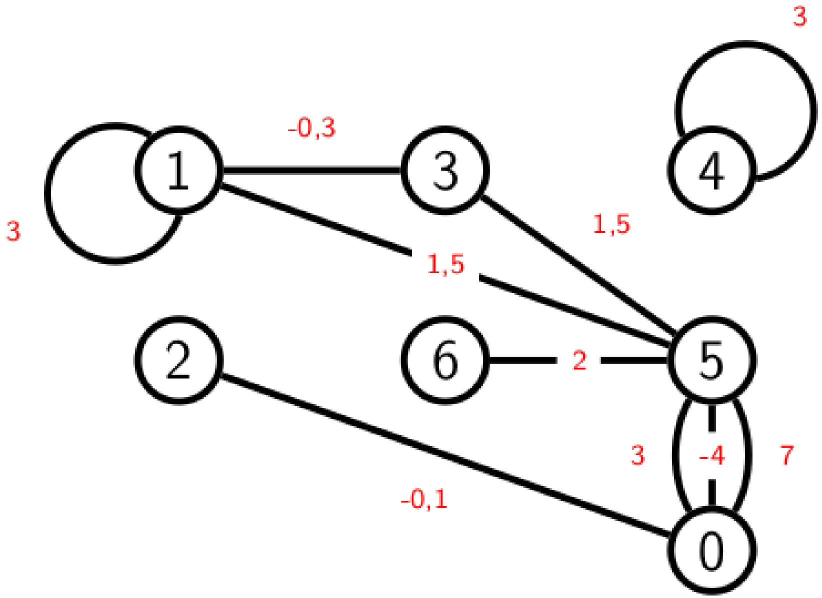
Graphe
Définitions complémentaires

- Certaines arêtes relient un sommet à lui-même.
- Il y a plusieurs arêtes entre deux sommets donnés.
- Les arêtes sont « orientées ».



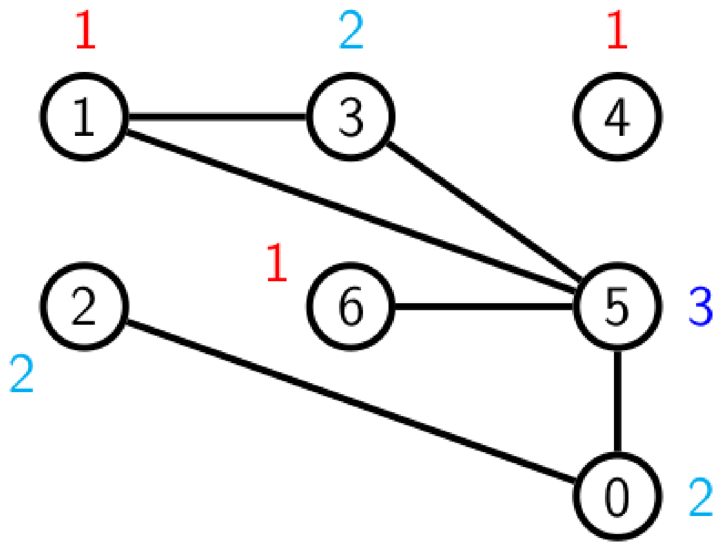
Graphe
Définitions complémentaires

- Certaines arêtes relient un sommet à lui-même.
- Il y a plusieurs arêtes entre deux sommets donnés.
- Les arêtes sont « orientées ».
- Les arêtes sont « pondérées (ou valuées) » par un nombre.



Graphe
Définitions complémentaires

- Certaines arêtes relient un sommet à lui-même.
- Il y a plusieurs arêtes entre deux sommets donnés.
- Les arêtes sont « orientées ».
- Les arêtes sont « pondérées (ou valuées) » par un nombre.
- Les sommets sont « colorés ».

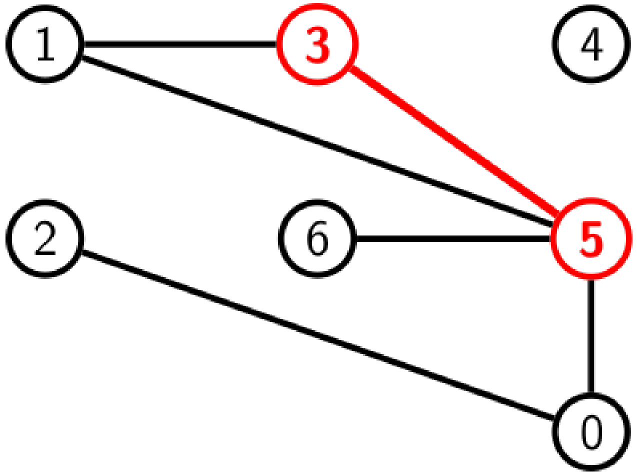


Graphe

Définitions complémentaires

Sommets voisins (ou adjacents)

Deux sommets sont voisins s'il existe une arête qui les relie.

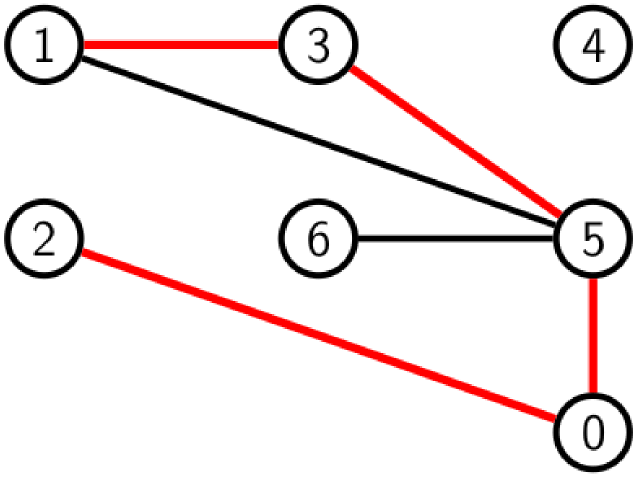


les sommets 3 et 5 sont voisins

Graphe
Définitions complémentaires

Chemin dans un graphe

C'est une suite de sommets telle que deux sommets consécutifs sont toujours voisins.



Chemin : 2-0-5-3-1

Graphe

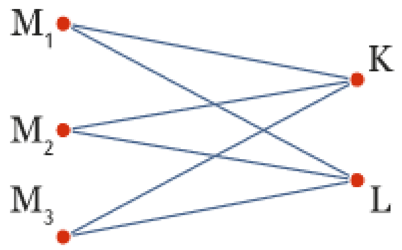
Définitions complémentaires

Ordre et degré d'un graphe

L'**ordre** d'un graphe est le nombre de sommets de ce graphe.
Le **degré** d'un sommet est le nombre d'arêtes incidentes à ce sommet, sans tenir compte de leur éventuel sens de parcours.

Exemple

Le graphe ci-contre est d'ordre 5.
Les sommets K et L sont de degré 3.
Les sommets M_1, M_2 et M_3 sont de degré 2.



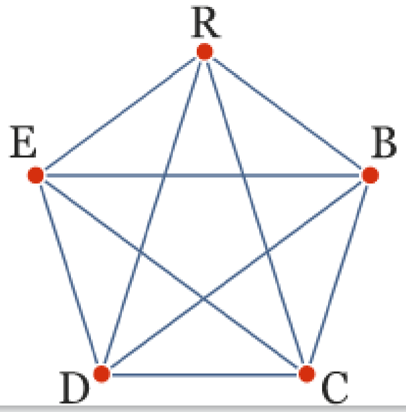
Graphe
Définitions complémentaires

Graphe complet

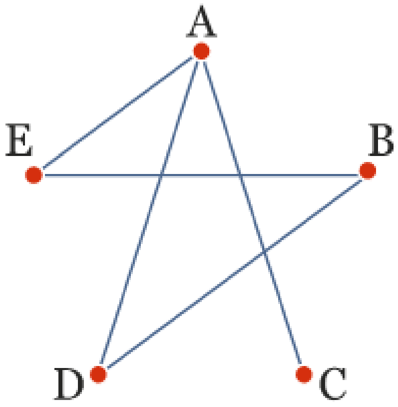
Un graphe est **complet** lorsque tous ses sommets sont deux à deux adjacents.

Exemples

1. Le graphe ci-dessous est complet : tous ses sommets sont deux à deux adjacents.



2. Le graphe ci-dessous n'est pas complet : les sommets A et B, par exemple, ne sont pas adjacents.



Graphe

Définitions complémentaires

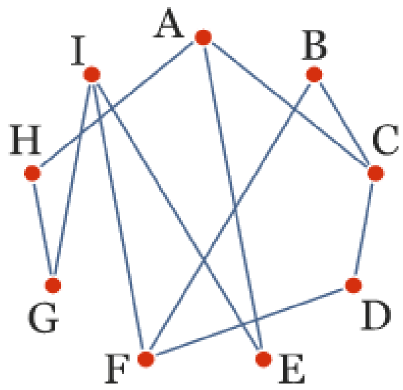
Chaîne et longueur d'une chaîne

Pour un graphe non orienté, une **chaîne** est une suite d'arêtes consécutives reliant deux sommets (éventuellement confondus).
La **longueur d'une chaîne** est le nombre d'arêtes la composant.
Pour un graphe orienté, un **chemin** est une suite d'arêtes consécutives reliant deux sommets (éventuellement confondus) en tenant compte du sens de parcours des arêtes.

Exemples

1. Sur le graphe ci-contre, $A - E - I - G - H$ est une chaîne de longueur 4.

2. De même, $A - C - B - F - D - C - A$ est une chaîne de longueur 6.



Graphe

Définitions complémentaires

Chaîne et longueur d'une chaîne

Propriété

Soient n et k deux entiers naturels non nuls et M la matrice d'adjacence d'un graphe d'ordre n, dont les sommets sont numérotés de 1 à n et rangés dans l'ordre croissant.

Le terme de la i-ème ligne et de la j-ième colonne de la matrice M^k donne le nombre de chaînes (ou de chemins) de longueur k reliant le sommet i au sommet j.

Graphe

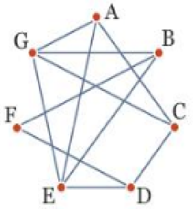
Définitions complémentaires

Chaîne et longueur d'une chaîne

EXEMPLE

En notant M la matrice d'adjacence du graphe ci-contre obtenue en rangeant les sommets dans l'ordre alphabétique,

on a $\mathrm{M} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.



En reprenant l'exemple précédent, on a $\mathrm{M}^4 = \begin{pmatrix} 23 & 20 & 13 & 20 & 16 & 5 & 23 \\ 20 & 20 & 12 & 18 & 14 & 4 & 18 \\ 13 & 12 & 22 & 6 & 27 & 12 & 17 \\ 20 & 18 & 6 & 21 & 8 & 2 & 20 \\ 16 & 14 & 27 & 8 & 35 & 17 & 24 \\ 5 & 4 & 12 & 2 & 17 & 10 & 11 \\ 23 & 18 & 17 & 20 & 24 & 11 & 31 \end{pmatrix}$.

Il existe donc 27 chaînes de longueur 4 reliant le sommet C au sommet E.

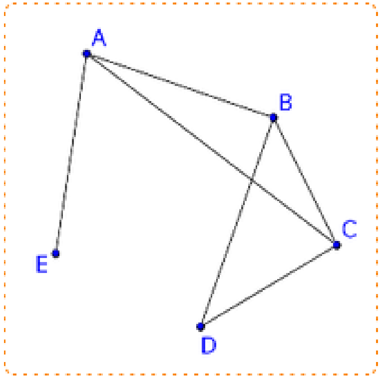
On a $\mathrm{M}^2 = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & 2 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & 3 & 1 & 2 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 0 & 3 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 0 & 3 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 3 & 0 & 4 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 2 & 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$ donc il n'existe aucune chaîne de longueur 2 reliant le sommet B au sommet F.

Graphe
Définitions complémentaires

Chaîne fermée et Cycle

On appelle **chaîne fermée** toute chaîne dont l'origine et l'extrémité coïncident.

On appelle **cycle** toute chaîne fermée dont les arêtes sont toutes distinctes.



Dans le graphe ci-contre :

E-A-C-B est un chaîne de longueur 3.

E-A-C-B-A-E est une chaîne fermée de longueur 5. Ce n'est pas un cycle car l'arête A-E est parcourue deux fois.

D-B-A-C-D est un cycle de longueur 4.

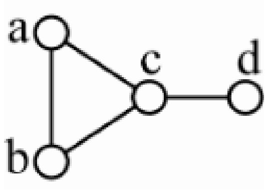
Graphe

Définitions complémentaires

Cycles Eulériens et Cycles Hamiltoniens

Un cycle qui passe exactement une fois par chaque arête d'un graphe est dit « eulérien ».
Un cycle qui passe exactement une fois par chaque sommet d'un graphe est dit « hamiltonien ».

Certains graphes ne possèdent ni cycle hamiltonien ni cycle eulérien, par exemple celui-ci-dessous.



Graphe

Définitions complémentaires

Cycles Eulériens et Cycles Hamiltoniens

Un **cycle eulérien** est un cycle qui passe par toutes les arêtes du graphe une et une seule fois.
Le théorème d'Euler affirme qu'un tel cycle existe si, et seulement si, tous les sommets du graphe sont de degré pair. On dit alors que le graphe est eulérien.
Démontrer ce théorème.

Pour construire une chaîne eulérienne, on utilise l'algorithme suivant.

Si il y a exactement deux sommets de degré impair
  Alors on construit une chaîne quelconque joignant ces deux sommets
  Sinon on construit un cycle à partir de n'importe quel sommet
Fin Si
Tant que toutes les arêtes n'ont pas été parcourues
  Si toutes les arêtes ont été parcourues
    Alors la chaîne (respectivement le cycle) est eulérienne (respectivement eulérien)
    Sinon on insère dans cette chaîne (respectivement ce cycle) un cycle ayant pour origine l'un des sommets déjà utilisés et ne contenant pas d'arête déjà parcourue ni deux fois la même arête
  Fin Si
Fin Tant que

Graphe

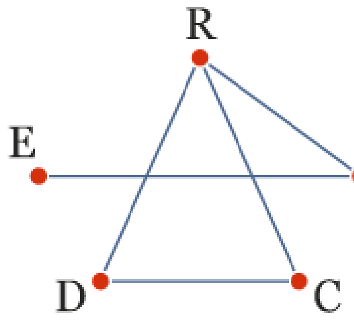
Définitions complémentaires

Graphe connexe

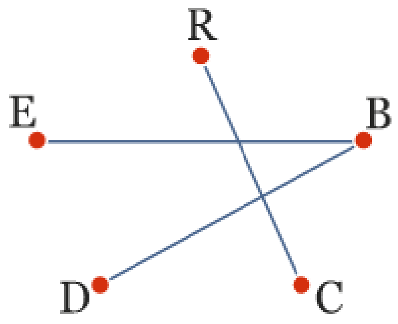
Un graphe non orienté est **connexe** lorsque chaque couple de ses sommets peut être relié par une chaîne.

Exemples

1. Un graphe connexe :



2. Un graphe non connexe : on ne peut pas relier R et B par une chaîne.



Graphe

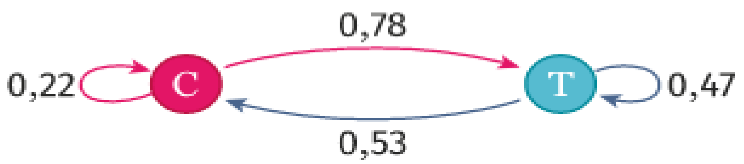
Définitions complémentaires

Graphe probabiliste et Chaînes de Markov

Un **graphe probabiliste** est un graphe orienté pondéré par des réels compris entre 0 et 1 et dans lequel la somme des poids des arêtes issues de chaque sommet est égale à 1.

Exemple

Le graphe suivant est un graphe probabiliste à deux états (C et T). On a $0{,}22 + 0{,}78 = 1$ et $0{,}47 + 0{,}53 = 1$.



Graphe

Définitions complémentaires

Graphe probabiliste et Chaînes de Markov

Une suite $(X_n)_{n\geqslant 0}$ de variables aléatoires est **une chaîne de Markov** à deux états a et b (respectivement à trois états a, b et c) lorsque, pour tous x_0, x_1, … , x_k, x_{k+1} dans $\{a\,;b\}$ (respectivement dans $\{a\,;b\,;c\}$), on a :

$$p_{X_0=x_0,X_1=x_1,\dots,X_k=x_k}(X_{k+1}=x_{k+1}) = p_{X_k=x_k}(X_{k+1}=x_{k+1}).$$

La probabilité $p_{X_k=x_k}(X_{k+1}=x_{k+1})$ s'appelle **probabilité de transition** de l'état x_k à l'état x_{k+1}.

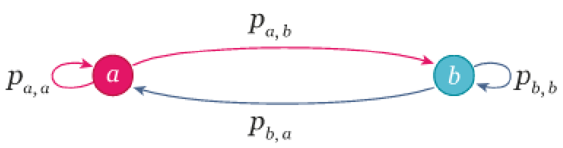
L'ensemble $\{a\,;b\}$ (respectivement $\{a\,;b\,;c\}$) est appelé **espace des états**.

Illustration à l'aide d'un graphe probabiliste :

On peut représenter une chaîne de Markov à l'aide d'un graphe probabiliste. Chaque sommet représente un état de la chaîne de Markov et les poids portés par les arêtes orientées représentent les probabilités de transitions.

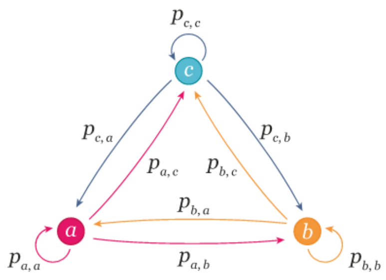
Graphe d'une chaîne de Markov à deux états

$$p_{X_k=a}(X_{k+1}=b) = p_{a,b}$$



Graphe d'une chaîne de Markov à trois états

$$p_{X_k=c}(X_{k+1}=b) = p_{c,b}$$



Graphe

Définitions complémentaires

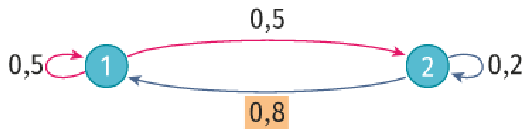
Graphe probabiliste et Chaînes de Markov

On considère une chaîne de Markov à n états, numérotés 1 ; ... ; n, et on note $\mathrm{E} = \{1\,;\ldots\,;n\}$ l'espace des états.
La **matrice de transition** P associée à cette chaîne de Markov est la matrice carrée d'ordre n telle que, pour tout $i \in \mathrm{E}$ et pour tout $j \in \mathrm{E}$, le coefficient $p_{i,j}$ correspond à la probabilité de transition de l'état i vers l'état j.

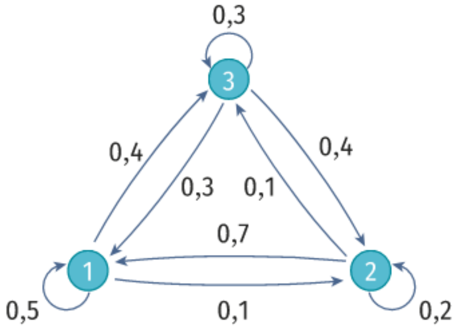
Exemples

1. La chaîne de Markov représentée ci-dessous par un graphe probabiliste a pour matrice de transition $\begin{pmatrix} 0{,}5 & 0{,}5 \\ \boxed{0{,}8} & 0{,}2 \end{pmatrix}$.

Le coefficient surligné $0{,}8$ indique que la probabilité de passer de l'état **2** à l'état **1** vaut $0{,}8$.



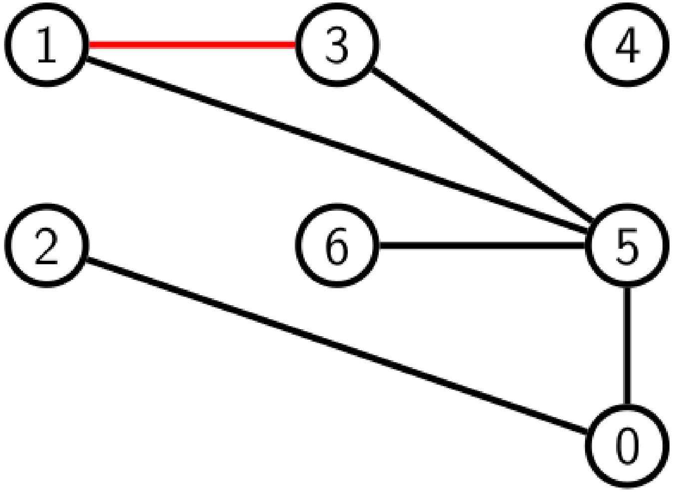
2. La chaîne de Markov représentée par le graphe probabiliste ci-dessous a pour matrice de transition $\begin{pmatrix} 0{,}5 & 0{,}1 & 0{,}4 \\ 0{,}7 & 0{,}2 & 0{,}1 \\ 0{,}3 & 0{,}4 & 0{,}3 \end{pmatrix}$.



Graphe

Représentation informatique (Python)

- Par une matrice d'adjacence :



$$\begin{matrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{matrix}$$

Le coefficient de la ligne `i` et de la colonne `j` vaut 1 si les sommets `i` et `j` sont voisins, et vaut 0 sinon.

⇝ cette représentation s'adapte aussi aux graphes orientés.

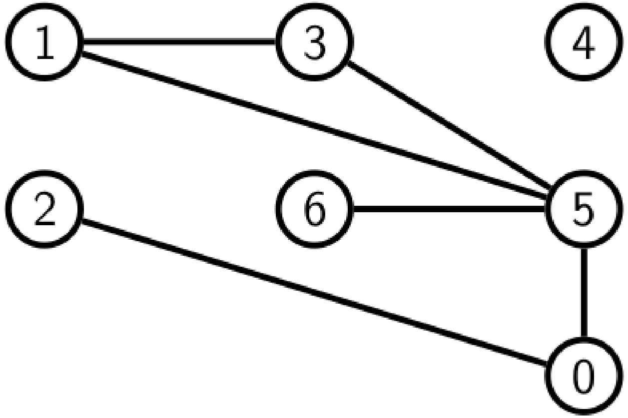
Graphe
Représentation informatique (Python)

- Utiliser une liste de listes :

```
In [1]: M=[[0, 1, 2],
           [3, 4, 5],
           [6, 7, 8]]
In [2]: M[1][0]
Out[2]: 3
```

Graphe
Représentation informatique (Python)

- Par un dictionnaire d'adjacence qui a pour clefs chaque sommet, avec comme valeur associée la liste des voisins de ce sommet.




```
ADJ={0:[2,5],1:[3,5],2:[0],3:[1,5],4:[],
      5:[0,1,3,6],6:[5]}
```

ADJ[1] $\rightarrow$ [3,5]

$\rightsquigarrow$ cette représentation s'adapte aussi aux graphes orientés.

Graphe

Applications des graphes

- Coloration d’un graphe (algorithme de coloration de Welsh et Powell)
- Graphes pondérés/valués (algorithme de Dijkstra afin de déterminer le plus court chemin)
- Voyageur de commerce,
- ...

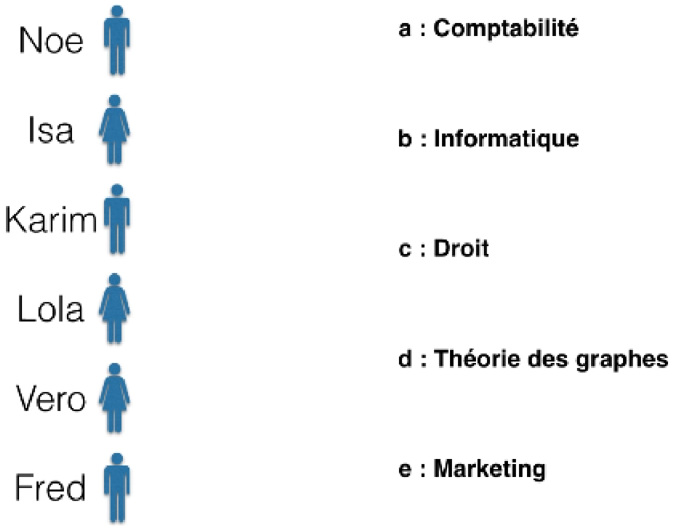
Graphe

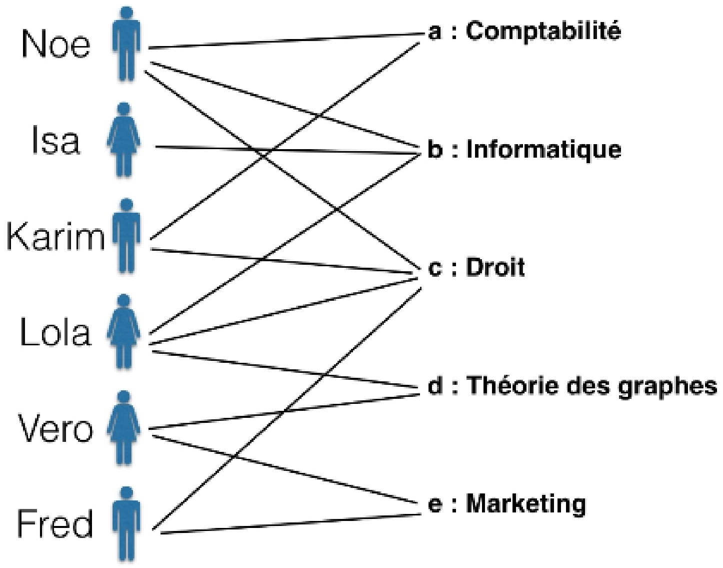
Applications des graphes

Coloration des graphes

But : organiser une session de formation qui dure le moins de temps possible en tenant compte des contraintes des formation

Coloration et plannings



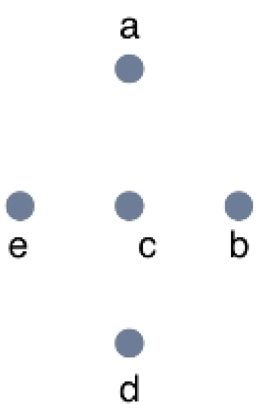


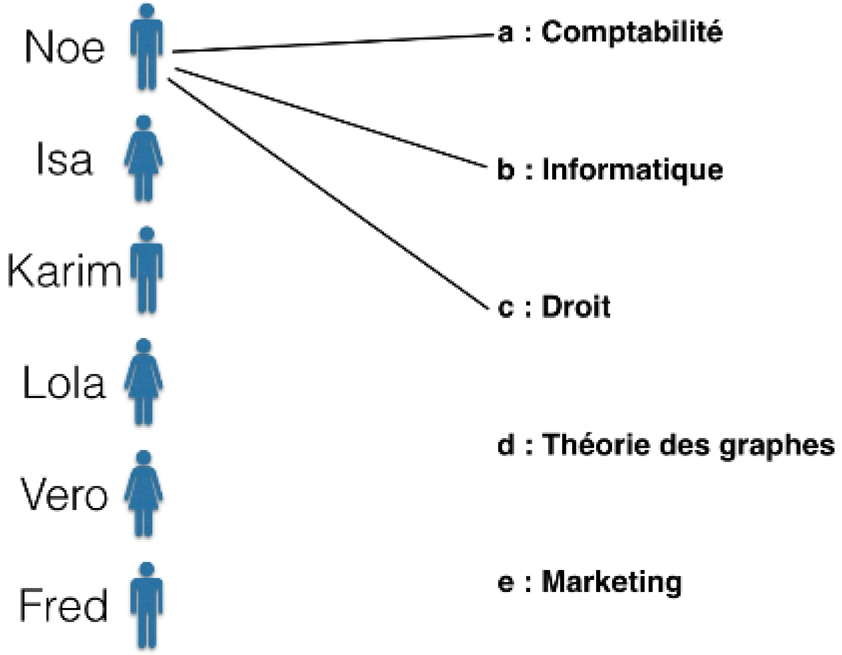
Graphe

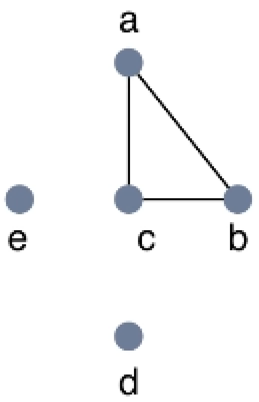
Applications des graphes

Coloration des graphes

But : organiser une session de formation qui dure le moins de temps possible en tenant compte des contraintes des formation



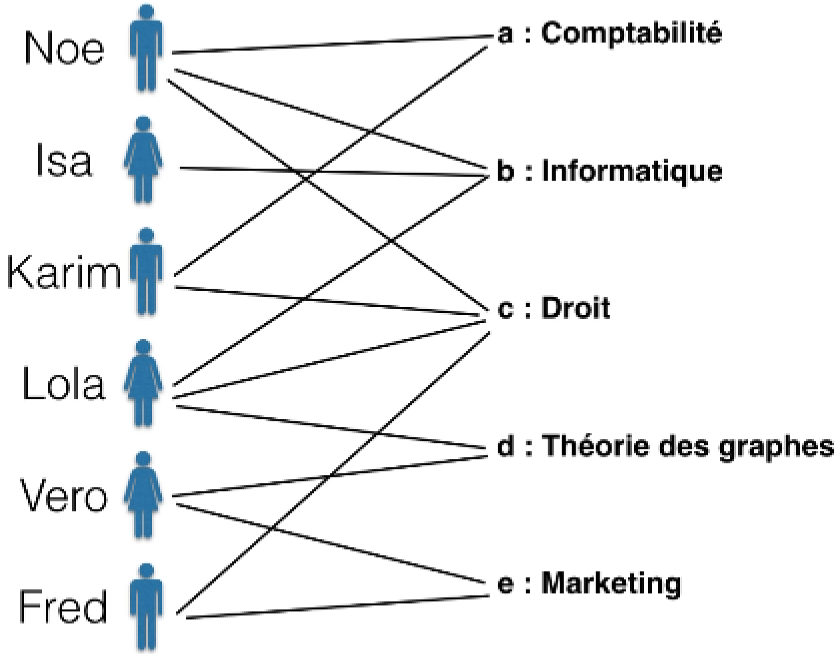


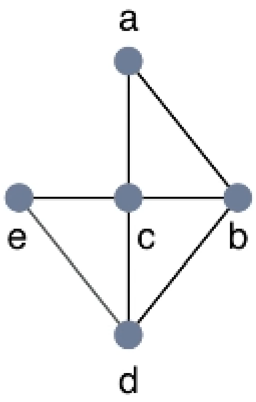


Graphe
Applications des graphes

Coloration des graphes

But : organiser une session de formation qui dure le moins de temps possible en tenant compte des contraintes des formation



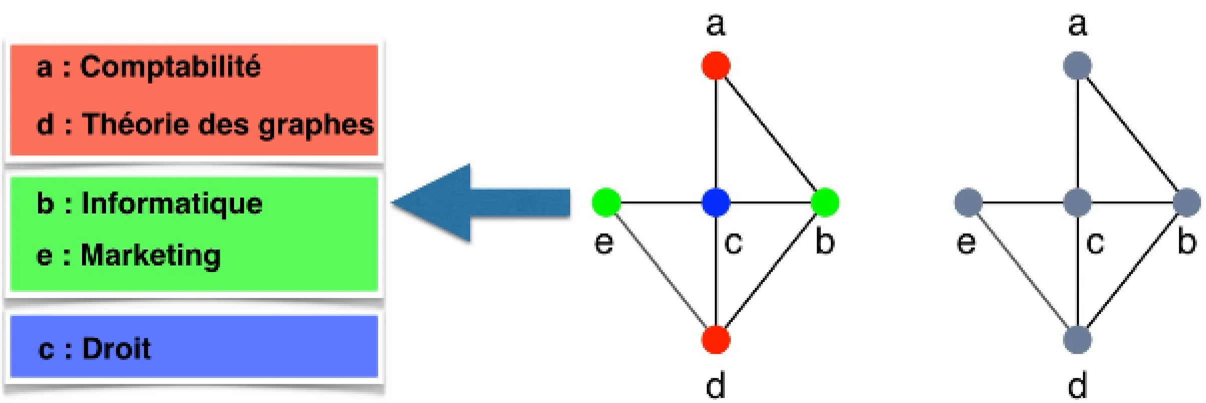


Graphe

Applications des graphes

Coloration des graphes

But : organiser une session de formation qui dure le moins de temps possible en tenant compte des contraintes des formation



Graphe

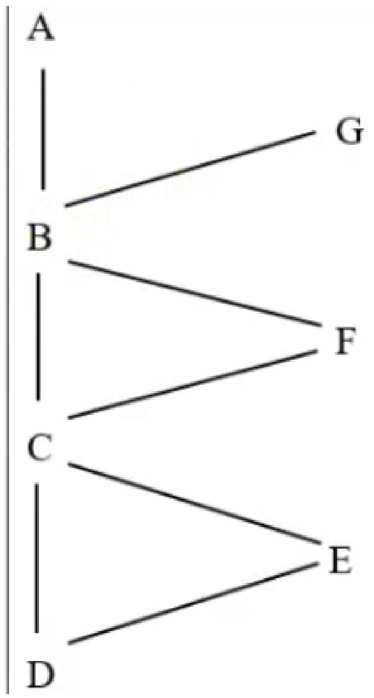
Applications des graphes

Algorithme de Welsh-Powell

1. Ranger les sommets dans l'ordre décroissant des degrés
2. Tant que tous les sommets ne sont pas colorés :
   - Considérer une couleur K, différente des couleurs déjà utilisées
   - Considérer le premier sommet non encore coloré dans l'ordre décroissant des degrés et lui affecter la couleur K
   - Considérer chacun des autres sommets non colorés dans l'ordre décroissant des degrés

     ► S'il est adjacent à un sommet déjà coloré en K, ne lui affecter aucune couleur

     ► Sinon, lui attribuer la couleur K
3. L'algorithme est terminé dès que tous les sommets sont colorés

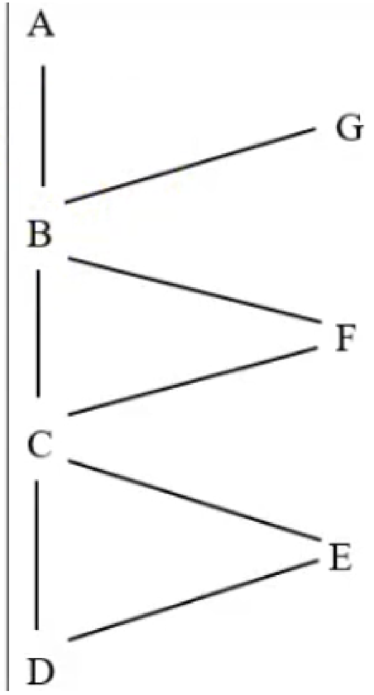


Graphe

Applications des graphes

Algorithme de Welsh-Powell (exemple 1)

Sommets	**B**	**C**	**D**	**E**	**F**	**A**	**G**
Degré	**4**	**4**	**2**	**2**	**2**	**1**	**1**

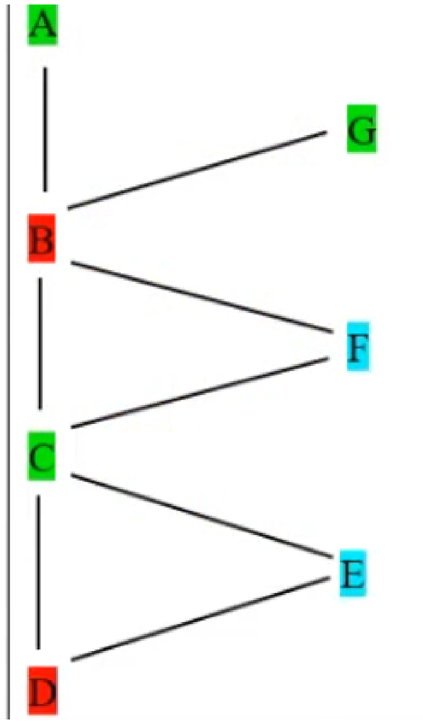


Graphe

Applications des graphes

Algorithme de Welsh-Powell (exemple 1)

Sommets	B	C	D	E	F	A	G
Degré	4	4	2	2	2	1	1
Rouge	Oui		Oui				
Vert	X	Oui	X			Oui	Oui
Bleu	X	X	X	Oui	Oui	X	X

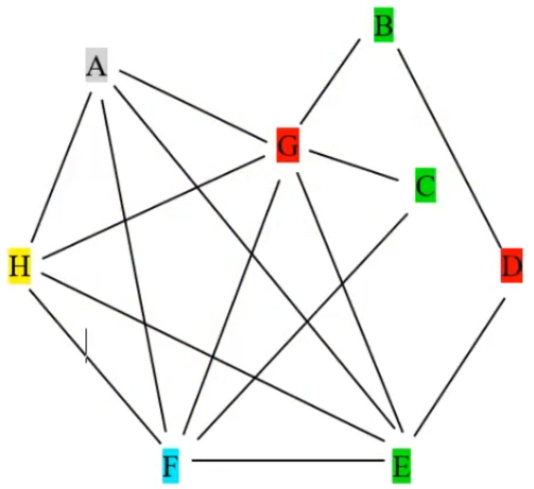


Graphe

Applications des graphes

Algorithme de Welsh-Powell (exemple 2)

Sommets	G	E	F	A	H	B	C	D
Degré	**6**	**5**	**5**	**4**	**4**	**2**	**2**	**2**
Rouge	Oui							Oui
Vert	X	Oui				Oui	Oui	X
Bleu	X	X	Oui			X	X	X
Gris	X	X	X	Oui		X	X	X
Jaune	X	X	X	X	Oui	X	X	X



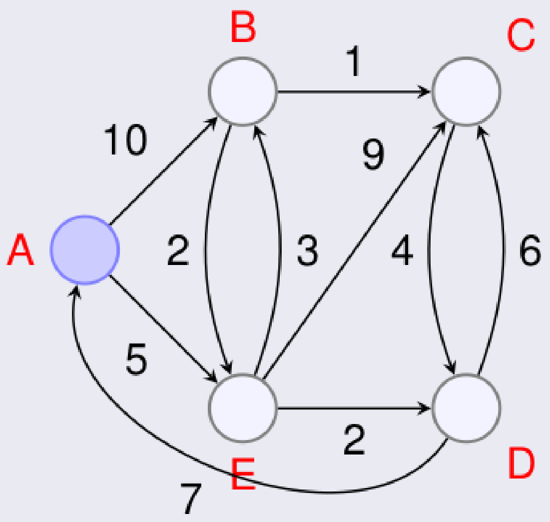
Graphe

Applications des graphes

Algorithme de Dijkstra (Trouver le plus court chemin entre deux sommets)

Exemple 1

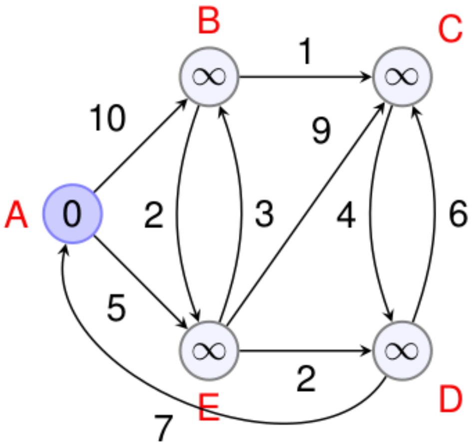
Cherchons les plus courts chemins d'origine *A* dans ce graphe:



Graphe
Applications des graphes

Algorithme de Dijkstra (exemple 1)

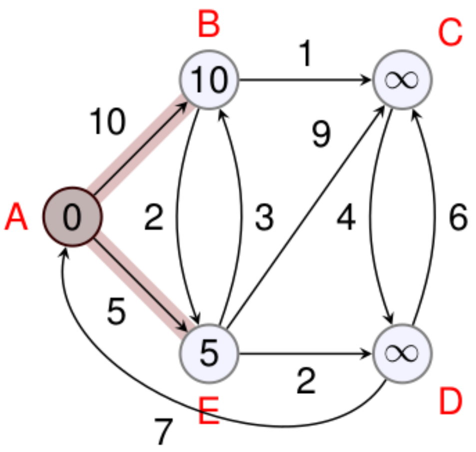
On se place au sommet de plus petit poids, ici le sommet A.



A	B	C	D	E
$\boxed{0}$	∞	∞	∞	∞
•				
•				
•				
•				
•				

Algorithme de Dijkstra (exemple 1)

On étudie chacune des arêtes partant du sommet choisi.

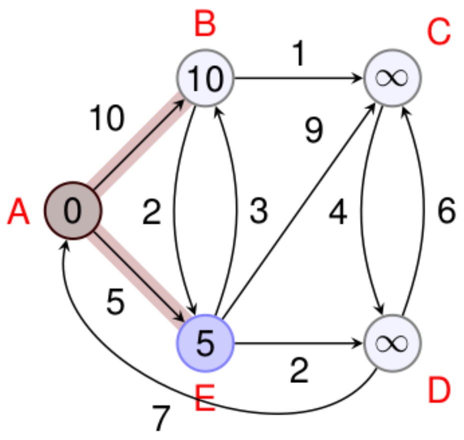


A	B	C	D	E
$\boxed{0}$	∞	∞	∞	∞
•	10_A	∞	∞	5_A
•				
•				
•				
•				

Dans les colonnes, on mets la distance à A, et le sommet d'où l'on vient.

Graphe
Applications des graphes
Algorithme de Dijkstra (exemple 1)

On se place de nouveau au sommet de plus petit poids, ici *E*.



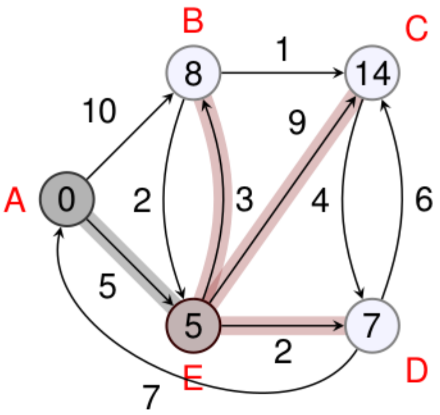
A	B	C	D	E
0	∞	∞	∞	∞
•	10_A	∞	∞	$\boxed{5_A}$
•				•
•				•
•				•
•				•

Graphe

Applications des graphes

Algorithme de Dijkstra (exemple 1)

Et ainsi de suite.

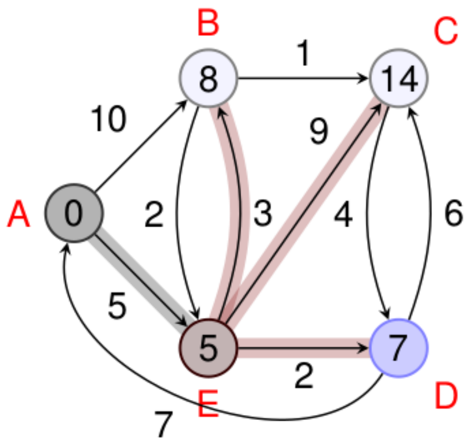


A	B	C	D	E
0	∞	∞	∞	∞
•	10_A	∞	∞	$\boxed{5_A}$
•	8_E	14_E	7_E	•
•				•
•				•

Graphe

Applications des graphes

Algorithme de Dijkstra (exemple 1)

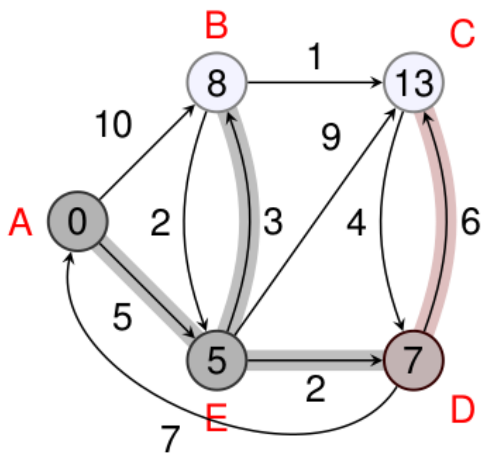


A	B	C	D	E
0	∞	∞	∞	∞
•	10_A	∞	∞	5_A
•	8_E	14_E	$\boxed{7_E}$	•
•			•	•
•			•	•

Graphe

Applications des graphes

Algorithme de Dijkstra (exemple 1)

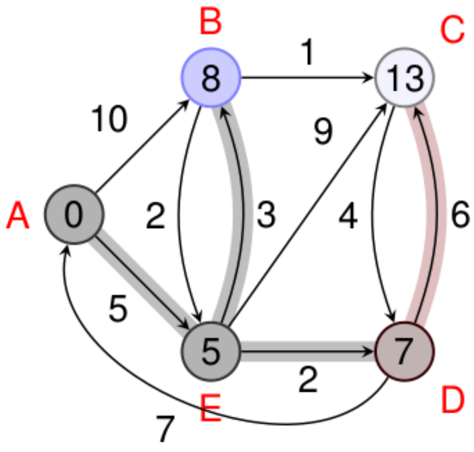


A	B	C	D	E
0	∞	∞	∞	∞
•	10_A	∞	∞	5_A
•	8_E	14_E	$\boxed{7_E}$	•
•	8_E	13_D	•	•
•			•	•
•			•	•

Graphe

Applications des graphes

Algorithme de Dijkstra (exemple 1)

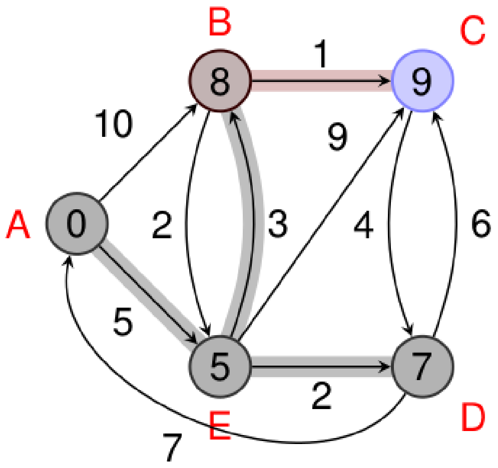


A	B	C	D	E
0	∞	∞	∞	∞
•	10_A	∞	∞	5_A
•	8_E	14_E	7_E	•
•	$\boxed{8_E}$	13_D	•	•
•	•		•	•
•	•		•	•

Graphe

Applications des graphes

Algorithme de Dijkstra (exemple 1)

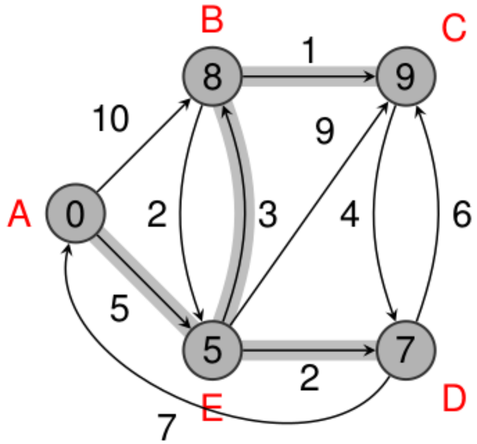


A	B	C	D	E
0	∞	∞	∞	∞
•	10_A	∞	∞	5_A
•	8_E	14_E	7_E	•
•	8_E	13_D	•	•
•	•	$\boxed{9_B}$	•	•
•	•	•	•	•

Graphe

Applications des graphes

Algorithme de Dijkstra (exemple 1)



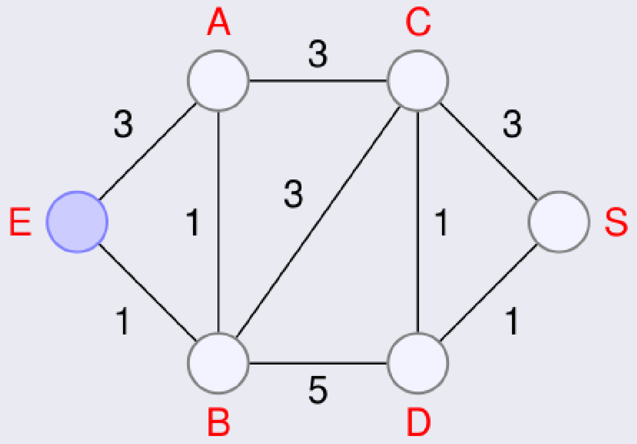
A	B	C	D	E
0	∞	∞	∞	∞
•	10_A	∞	∞	5_A
•	8_E	14_E	7_E	•
•	8_E	13_D	•	•
•	•	9_B	•	•
•	•	•	•	•

Si l'on ne considère que les flèches soulignées, on obtient un *arbre*, un graphe sans cycle.

Algorithme de Dijkstra

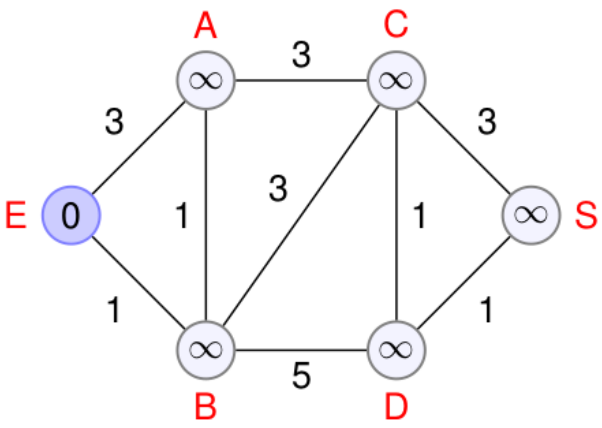
Exemple 2

Cherchons les plus courts chemins d'origine E dans ce graphe:



Graphe
Applications des graphes

Algorithme de Dijkstra (exemple 2)

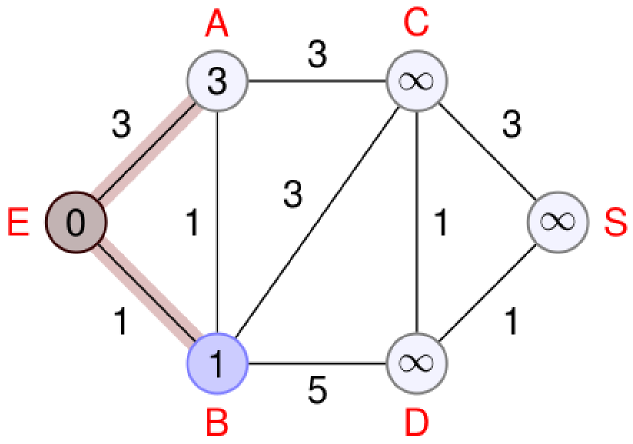


E	A	B	C	D	S
$\boxed{0}$	∞	∞	∞	∞	∞
•					
•					
•					
•					
•					

Graphe

Applications des graphes

Algorithme de Dijkstra (exemple 2)

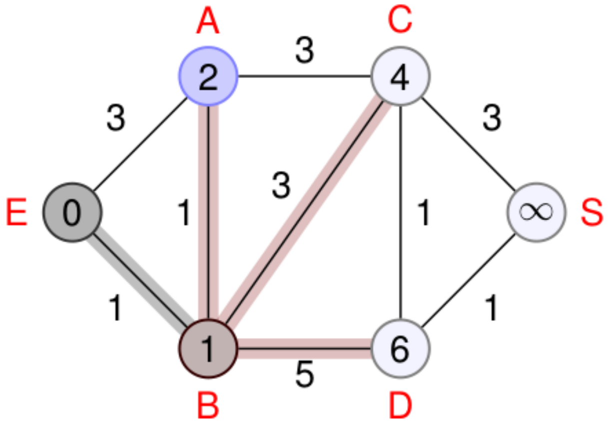


E	A	B	C	D	S
0	∞	∞	∞	∞	∞
•	3_E	$\boxed{1_E}$	∞	∞	∞
•		•			
•		•			
•		•			
•		•			

Graphe

Applications des graphes

Algorithme de Dijkstra (exemple 2)

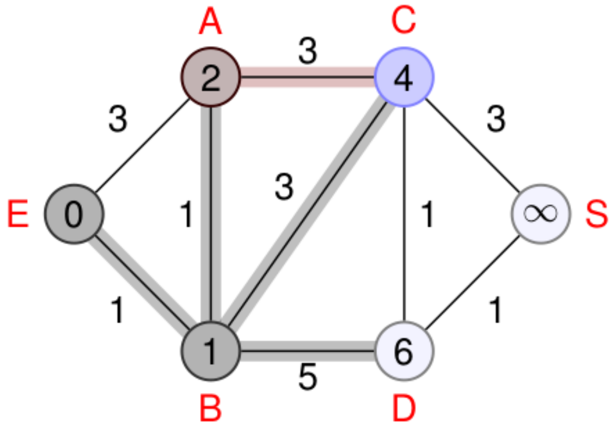


E	A	B	C	D	S
0	∞	∞	∞	∞	∞
•	3_E	1_E	∞	∞	∞
•	$\boxed{2_B}$	•	4_B	6_B	∞
•	•	•			
•	•	•			
•	•	•			

Graphe

Applications des graphes

Algorithme de Dijkstra (exemple 2)

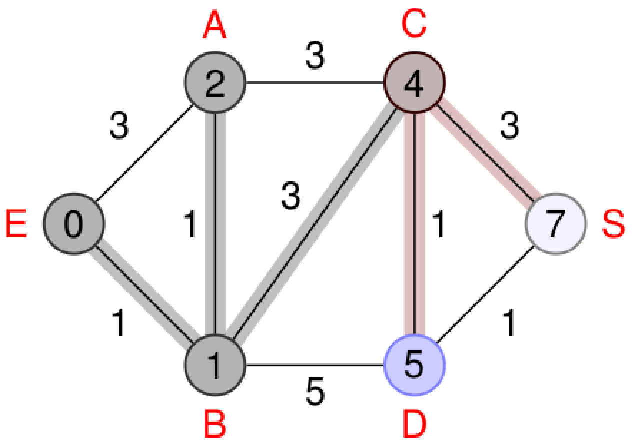


E	A	B	C	D	S
0	∞	∞	∞	∞	∞
•	3_E	1_E	∞	∞	∞
•	2_B	•	4_B	6_B	∞
•	•	•	$\boxed{4_B}$	6_B	∞
•	•	•	•		
•	•	•	•		

Graphe

Applications des graphes

Algorithme de Dijkstra (exemple 2)

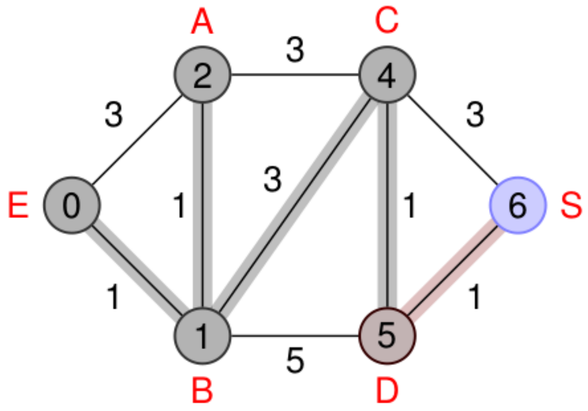


E	A	B	C	D	S
0	∞	∞	∞	∞	∞
•	3_E	1_E	∞	∞	∞
•	2_B	•	4_B	6_B	∞
•	•	•	4_B	6_B	∞
•	•	•	•	$\boxed{5_C}$	7_C
•	•	•	•	•	

Graphe

Applications des graphes

Algorithme de Dijkstra (exemple 2)

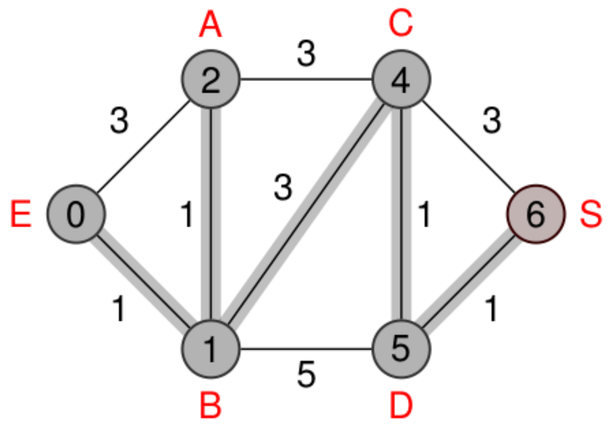


E	A	B	C	D	S
0	∞	∞	∞	∞	∞
•	3_E	1_E	∞	∞	∞
•	2_B	•	4_B	6_B	∞
•	•	•	4_B	6_B	∞
•	•	•	•	5_C	7_C
•	•	•	•	•	$\boxed{6_D}$

Graphe

Applications des graphes

Algorithme de Dijkstra (exemple 2)



E	A	B	C	D	S
0	∞	∞	∞	∞	∞
•	3_E	1_E	∞	∞	∞
•	2_B	•	4_B	6_B	∞
•	•	•	4_B	6_B	∞
•	•	•	•	5_C	7_C
•	•	•	•	•	6_B

Graphe

Applications des graphes

Algorithme de Dijkstra (Implementation)

SCAN ME

https://github.com/hocinilotfi/cesi

Graphe

Applications des graphes

Exercices