Tugas Kelompok 1

Analisis Numerik

Deadline: 4 April 2021 23.59 WIB

Pada tugas ini, Anda akan menggunakan ilmu terkait materi yang sudah diajarkan oleh tim Dosen sejauh ini. Tugas ini diharapkan akan memberi Anda studi kasus yang menarik tentang pengaruh ukuran sistem persamaan dan *ill-conditioned* yang ingin Anda selesaikan dengan menggunakan metode pada mata kuliah ini.

Teori

Teori Balok Euler-Bernoulli adalah pemodelan untuk suatu material yang bengkok ketika diberikan tekanan. Perpindahan vertikal balok diwakili oleh fungsi $y(x)$, dengan $0 \le x \le L$, dengan L adalah panjang balok, fungsi $y(x)$memenuhi persamaan Euler-Bernoulli:

$$EIy'''' = f(x) \text{ (Persamaan 1)}$$

dengan E adalah modulus Young dari bahan balok dan I adalah luas momen inersia yang konstan sepanjang balok. $f(x)$adalah beban yang diterapkan ke balok, termasuk dengan beban dari baloknya.

Untuk memahami lebih lanjut tentang teori ini bisa *googling* dengan *keyword* “Euler-Bernoulli Beam”. Disini, kami sudah memberikan aproksimasi turunan keempat (y''''), yaitu:

$$y''''(x) \approx \frac{y(x-2h) - 4y(x-h) + 6y(x) - 4y(x+h) + y(x+2h)}{h^4} \qquad \text{(Persamaan 2)}$$

untuk suatu nilai h yang kecil.

Loh kok materinya malah jadi kayak persamaan diferensial? Tenang. Kita di sini akan menggunakan berbagai metode numerik untuk menyelesaikan berbagai permasalahan (asiiik 😄). Dari persamaan diferensial gini bisa jadi Sistem Persamaan Linear yang sudah kalian pelajari loh.

Untuk suatu bilangan bulat positif n, misalkan $h = L/n$. Bayangkan suatu garis bilangan dengan jarak yang sama antar bilangannya, dengan $0 = x_0 < x_1 <... < x_n$, dengan $h = x_i - x_{i-1}$; $i = 1,..., n$. Jadi misalkan panjang balok 5m dengan n=10, maka nilai x adalah = $\{0,\ 0.5,\ 1,\ 1.5,\ 2,\ 2.5,\ 3,\ 3.5,\ 4,\ 4.5,\ 5\}$.Titik ujung balok adalah x_n, jadi misal diminta untuk mencari nilai y pada x = L meter, maka yang ditanya adalah y_n. Dengan mensubstitusikan persamaan 1 ke persamaan 2 dan $y_i = y(x_i)$, didapat suatu sistem persamaan linear:

$$y_{i-2} - 4y_{i-1} + 6y_i - 4y_{i+1} + y_{i+2} = \frac{h^4}{EI} f(x_i) \quad \text{(Persamaan 3)}$$

Persamaan di atas adalah suatu SPL dengan n persamaan dan n variabel $(y_1, ..., y_n)$. Misal Anda akan membuat SPL di atas dengan representasi $Ax = b$, maka koefisien-koefisien dari A didapatkan dari variabel-variabel pada ruas kiri Persamaan 3. Tetapi, kita harus melihat persamaan pada bagian dekat ujung balok untuk mengambil *boundary condition*. Apa itu maksudnya? Yuk kita lihat pada bagian selanjutnya.

Latar Belakang

<u>Gambar 1 - Mas Febri si Penjaga Kolam Renang</u>

(Credit: [image source])

Suatu hari, Mas Febri (nama fiksi -- penjaga kolam renang yang pekerjaan sampingannya adalah programmer) sedang membersihkan kolam renang. Tiba-tiba, ada salah satu pengunjung yang tidak sengaja meninggalkan buku Analisis Numerik buatan Pak Chan. Tiba-tiba dia tertarik untuk menghubungkan materi Anum ke lingkungan sekitarnya. Terpikirkan oleh Mas Febri ini untuk mencari *vertical displacement* dari suatu balok saat diberikan suatu tekanan. *Kalau Mas Febri bisa, Anda juga harusnya bisa!* 😄

Pada tugas ini, Anda akan diminta untuk memodelkan suatu papan loncat indah. Papan loncat indah adalah suatu balok dengan satu ujungnya berada pada suatu permukaan sebagai tumpuan, dengan ujung yang lainnya bebas (untuk meloncat). Kasus ini biasa disebut ***cantilever beam.*** *Boundary condition* untuk kasus ini adalah:

$$y(0) = y'(0) = y''(L) = y'''(L) = 0$$

Diketahui bahwa $y_0 = 0$.Ketika kita ingin mencari y_1 dengan melakukan substitusi $i = 1$ke Persamaan 3, akan didapat:

$$y_{-1} - 4y_0 + 6y_1 - 4y_2 + y_3 = \frac{h^4}{EI} f(x_1)$$

Hmm, tapi kan y_{-1}tidak terdefinisi 🤔🤔🤔. Terus gimana ya? Nah untuk kasus ini, seharusnya Anda akan diminta untuk mencari persamaan aproksimasi turunan pada titik $x_1$dengan pada titik tumpu. Tapi karena materi tersebut ada setelah UTS nanti, jadi kita berikan persamaannya, yaitu:

$$y''''(x_1) \approx \frac{16y(x_1) - 9y(x_1 + h) + \frac{8}{3}y(x_1 + 2h) - \frac{1}{4}y(x_1 + 3h)}{h^4}$$

Yang bernilai valid ketika $y(x_0) = y'(x_0) = 0$. Apa itu maksudnya valid? Secara teori, ini berarti pada titik tersebut error dari fungsi aproksimasinya 0. Kok bisa? Nanti setelah UTS ya. 😬

Dengan mencoba memasukkan lagi $i = 1$ke Persamaan 3, akan didapat:

$$16y_1 - 9y_2 + \frac{8}{3}y_3 - \frac{1}{4}y_4 = \frac{h^4}{EI} f(x_1).$$

Bagaimana untuk bagian balok yang dekat dengan titik bebasnya? Sudah kami hitung, tenang aja. Akan didapat persamaan:

$$y''''(x_{n-1}) \approx \frac{-28y_n + 72y_{n-1} - 60y_{n-2} + 16y_{n-3}}{17h^4}$$
$$y''''(x_n) \approx \frac{72y_n - 156y_{n-1} + 96y_{n-2} - 12y_{n-3}}{17h^4}$$

Sudah banyak persamaan nih, kira-kira gimana bentuk matriksnya? Kalau sudah ada yang menebak bentuk matriksnya, mantap. Kalau belum? Tidak apa-apa, yuk langsung lihat bentuk SPL nya dalam matriks!

$$\begin{bmatrix}
16 & -9 & \frac{8}{3} & -\frac{1}{4} & & & & & & \\
-4 & 6 & -4 & 1 & & & & & & \\
1 & -4 & 6 & -4 & 1 & & & & & \\
 & 1 & -4 & 6 & -4 & 1 & & & & \\
 & & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & & & \\
 & & & & 1 & -4 & 6 & -4 & 1 & \\
 & & & & & 1 & -4 & 6 & -4 & 1 \\
 & & & & & & \frac{16}{17} & -\frac{60}{17} & \frac{72}{17} & -\frac{28}{17} \\
 & & & & & & -\frac{12}{17} & \frac{96}{17} & -\frac{156}{17} & \frac{72}{17}
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ y_{n-1} \\ y_n \end{bmatrix}
= \frac{h^4}{EI}
\begin{bmatrix} f(x_1) \\ f(x_2) \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ f(x_{n-1}) \\ f(x_n) \end{bmatrix}.$$

Gambar 2 - Bentuk SPL Euler-Bernoulli Beam dalam Matriks

Waduh, ternyata persamaan di atas ujung-ujungnya **matriks pita (banded).** Kirain awalnya susah gara-gara persamaannya aneh, ternyata (cuma) SPL aja 😂. Untung di kelas sudah beberapa kali dibahas tentang matriks ini. Masih ada yang bingung? Video rekaman kelas selalu tersedia di SCeLE. Masih bingung juga? Gunakan Discord untuk berdiskusi dengan teman-teman yang lain. Silahkan *googling*, tapi jangan lupa untuk menjaga integritas jawaban kalian, cantumkan **semua referensi** yang Anda gunakan baik itu teori/implementasi.

Apa itu matriks pita? ***Quick recap***: Berarti semua elemen yang jauh dari diagonal utamanya bernilai 0. Untuk kasus kita sekarang, semua elemen di matriks $a_{ij} = 0$, kecuali untuk $|i - j| \leq 3$. Kita sudah siap untuk memodelkan kasus kita tadi (jangan lupa minum, biar mata seger lagi)

Misalkan ada papan loncat indah dengan bahan kayu jati. Misalkan panjang papannya adalah $L = 2\,m$, lebarnya $w = 30\,cm$ dan tebalnya $d = 3\,cm$. Kerapatan kayu jati diperkirakan $480 kg/m^3$. Gaya satu Newton adalah $1 kg\, m/s^2$,dan Modulus Young dari kayu di-aproksimasikan $E = 1.3 \, x\, 10^{10} N/m^2$. Luas momen inersia I di sekitar pusat massa baloknya adalah $wd^3/12$.

Di sini, Anda akan menghitung pergeseran dari baloknya tanpa beban, jadi nilai $f(x)$ adalah berat dari baloknya itu sendiri, dalam satuan gaya per meter. Jadi dapat disimpulkan nilai $f(x)$ adalah berat per meter ($480 kg/m^3$) dikalikan dengan percepatan gravitasi ke bawah yaitu $-\,g = \; -\,9.81 m/sec^2$,atau untuk menyederhanakan, f dapat dilihat sebagai:

$$f(x) = f = \; -\,480\, wdg$$

Sekian dongengnya, kami menyediakan beberapa soal agar kalian makin mengerti terkait materi ini, dan juga terbiasa dengan Matlab.

1. Buatlah program MATLAB untuk membuat matriks A seperti cerita di atas. Lalu <u>buatlah</u> implementasi algoritma yang **efisien**. Sebisa mungkin tidak menggunakan bawaan matlab seperti x=*A\b* (dilarang keras solve SPL-nya **cuma** pakai ini), *lu(A)*, dan semacamnya {untuk ones, eye, dsb boleh} untuk solve SPL-nya. Anda diminta untuk menyelesaikan SPL di atas, dengan percobaan persamaan dengan $n \in \{10, 20, 40, 80, 100\}$. Jelaskan juga kompleksitas dari algoritma yang Anda buat, bisa dengan mencari jumlah FLOPs. Misalkan solusi yang anda dapat dari soal ini adalah y_{approx}.

2. Plot solusi yang Anda dapatkan untuk tiap n dari soal sebelumnya dengan membandingkan dengan solusi eksak/matematis untuk $y(x)$ yaitu $y(x) = (\, f\, /\, 24EI\,)\, x^2\, (x^2 - 4Lx + 6L^2)$, dengan f = f(x) sama dengan konstan yang didefinisikan sebelumnya. Menggunakan rumus diatas dengan inputnya adalah vektor [0.2, 0.4, …, 2] untuk n=10 (untuk nilai n yang lain menyesuaikan), anda akan mendapatkan vektor y_{exact}. Anda bisa menggunakan fungsi plot pada matlab dengan menggunakan y_{approx}dan y_{exact} . Cek error pada bagian ujung balok, $x = L\, meter$ Pada kasus ini, aproksimasi turunannya eksak, jadi seharusnya error yang Anda dapatkan akan dekat dengan nilai *machine round off*.

3. Jalankan dengan menggunakan program Anda pada soal pertama untuk $n = 10.2^{k}$dengan $k = 1,..., 11$. Buatlah tabel untuk **error pada** $x = L\, meter$untuk setiap nilai n. Kapan error nya paling kecil? Mengapa error nya tiba-tiba malah semakin membesar setelah suatu nilai n? Anda bisa mencari alasannya dengan membuat tabel dari seluruh condition number dari matriks A. Diharapkan Anda dapat melakukan analisis mengapa fenomena tersebut terjadi. Untuk menghindari menghindari komputasi yang terlalu berat pada k yang besar, mungkin Anda dapat memerintahkan MATLAB untuk menyimpan matriks A sebagai *sparse matrix* ($A = sparse(n, n)$) agar memory tidak cepat habis. Misal di komputer anda tidak bisa menjalankan programnya saat nilai n tertentu, silahkan ditulis saja di laporan-nya.

4. Mari kembali lagi ke suatu teknik pendekatan yang digunakan sebelum kita tiba di matriks pita agar lebih paham. Soal di atas menggunakan metode numerik untuk mengaproksimasi y''''. Ada permasalahan turunan numerik yang lebih sederhana yaitu untuk y' seperti $y'(x) = (y(x + h) - y(x))/h$(forward difference), $y'(x) = (y(x) - y(x - h))/h$ (backward difference) dan $y'(x) = (y(x + h) - y(x - h))/2h$. Secara teori, dua rumus pertama memiliki order akurasi $O(h)$dan rumus terakhir memiliki order akurasi $O(h^{2})$. <u>Disini, fungsi y yang anda gunakan bebas. Bisa menggunakan fungsi kuadrat, cubic, trigonometri dan semacamnya</u>.

   Lakukan eksperimen numerik untuk mengklarifikasi order akurasi $O(h)$ dan $O(h^{2})$ untuk fungsi y yang diketahui turunannya dan $h \in \{1,\ 2^{-1},\ 2^{-2},\ 2^{-3},...,\ 2^{-100}\}$. Untuk ukuran *step-size*h yang bagaimanakah y' diaproksimasi bekerja dengan baik oleh masing-masing rumus? Anda mungkin perlu melakukan beberapa eksperimen dengan berbagai y dan nilai x juga.

   Lakukan eksperimen serupa untuk salah satu rumus aproksimasi y'''' yang ada pada soal di atas untuk mencari tahu order akurasi rumus yang digunakan.

Penilaian

Komponen

Komponen	Persentase
Kerapian penulisan, tata letak laporan, dan kelengkapan referensi pendukung	40%
Penjelasan analisis & kesimpulan secara benar dan konsisten	30%
Implementasi dan solusi dalam penyelesaian masalah	30%

Keterangan Nilai (per Komponen)

Nilai	Deskripsi
100	Komponen penilaian bernilai sempurna
90	Komponen penilaian bernilai hampir sempurna (terdapat kekurangan kecil)
80	Komponen penilaian bernilai sangat baik (terdapat beberapa kekurangan)
70	Komponen penilaian bernilai baik
60	Komponen penilaian bernilai baik namun terdapat kekurangan fatal
50	Komponen penilaian bernilai kurang
40	Komponen penilaian bernilai sangat kurang
0 - 30	Komponen penilaian bernilai sangat kurang dan terdapat kesalahan fatal