Nomor 8

$L = \{vw : (w \in \{a,b\}^*) \wedge (v^R \text{ suffix dari } w) \wedge (2|v| \geq |w|)\}$.

Akan dibuktikan bahwa bahasa L merupakan bahasa non regular menggunakan *pumping theorem*. Asumsikan L merupakan bahasa reguler, dan k merupakan pumping length.

Pilih suatu string $s = a^k ba^k = a^k ba^k$. Perhatikan bahwa pada string ini, salah satu cara untuk mempartisi string menjadi vw ialah $v = a^k$ dan $w = ba^k$. Hal ini valid karena $2|v| \geq |w| \iff 2k \geq k+1$ untuk $k > 0$. String s tersebut dapat dipartisi menjadi:

- $x = a^i, y = a^j, z = a^{k-i-j}ba^k$, dengan $1 \leq i+j \leq k$ dan $j \geq 1$.
- Berdasarkan teorema pumping, setiap $q \geq 0$ berlaku $xy^q z \in L$. Pilih $q = k+1$.
- Maka $xy^{k+1}z = a^i a^{(k+1)j} a^{k-i-j} ba^k = a^{k(j+1)} ba^k$.

Akan dibuktikan bahwa tidak ada partisi v dan w sehingga string $xy^{k+1}z$ tersebut merupakan anggota bahasa L.

Bukti.

Kasus 1: Coba partisi $v = a^x$, dengan $x > k$, maka jelas v^R yang panjangnya $> k$ tidak dapat menjadi suffix string w yang secara trivial diketahui memiliki suffix ba^k.

Kasus 2: Coba partisi $v = a^{k(j+1)} ba^x$, dengan $x \geq 0$, maka jelas v^R yang panjangnya $> k$ tidak dapat menjadi suffix string w yang kini panjangnya $\leq k$.

Kasus 3: Coba partisi $v = a^x$, dengan $x \leq k$.

- $|v| = x$.
- $|w| = k(j+1) - x + 1 + k = k(j+2) + 1 - x$.
- Karena $j \geq 1$, maka $|w| = k(j+2) + 2 \geq 3k + 2$.
- Dapat ditulis $2|v| = 2x \leq 2k < (3k+2) \leq |w| \iff 2|v| < w$. Hal ini berkontradiksi dengan syarat bahasa ini anggota dari bahasa L.

Sehingga, terbukti bahwa $xy^{k+1}z \notin L$. Sehingga berdasarkan *pumping theorem*, dapat disimpulkan L merupakan bahasa non-regular.