

B-1)

Ya, Pertama, perhalikan bahwa $(A^*B^*)^* = (A \cup B)^*$

Bukti: $A \subseteq A^* \subseteq A^*B^*$ dan $B \subseteq B^* \subseteq A^*B^* \Rightarrow (A \cup B) \subseteq A^*B^* \Rightarrow (A \cup B)^* \subseteq (A^*B^*)^*$

$A \subseteq A+B \subseteq (A+B)^*$ dan $B \subseteq A+B \subseteq (A+B)^* \Rightarrow A^* \subseteq (A+B)^*$ dan $B^* \subseteq (A+B)^*$

$A^*B^* \subseteq (A+B)^* \Rightarrow (A^*B^*)^* \subseteq (A+B)^*$

Terbukti, $(A^*B^*)^* \subseteq (A \cup B)^*$ dan $(A \cup B)^* \subseteq (A^*B^*)^*$. Maka, $(A^*B^*)^* = (A \cup B)^*$

Persamaan soal dapat ditulis:

Properti:

$$(L_1^* (L_2 \cup L_3)^*)^* = ((L_1 \cup L_2)^* L_3^*)^*$$

Sifat di atas

$$(L_1 \cup (L_2 \cup L_3))^* = ((L_1 \cup L_2) \cup L_3)^*$$

Hukum Asosiatif

$$(L_1 \cup L_2 \cup L_3)^* = (L_1 \cup L_2 \cup L_3)^*$$

Jadi, terbukti bahwa untuk setiap L_1, L_2 , dan L_3 berlaku

$$(L_1^* (L_2 \cup L_3)^*)^* = ((L_1 \cup L_2)^* L_3^*)^*$$

B-2)

Tidak. Kasus sanggahannya ialah saat $L_1 = \{a\}$; $L_2 = \{a, aa\}$.

Jelas bahwa $L_1 \subseteq L_2$, sehingga $L_1^* = L_2^*$. Namun, $L_1 \neq L_2$

Jadi, salah bahwa untuk setiap L_1 dan L_2 berlaku $L_1 = L_2 \Leftrightarrow L_1^* = L_2^*$

B-3)

Ya, Perhatikan bahwa $B \subseteq A \Rightarrow A^* B^* = A^*$

Bukti: Jelas bahwa $A^* \subseteq A^* B^*$

$$B \subseteq A \Rightarrow B^* \subseteq A^* \Rightarrow A^* B^* \subseteq A^* A^* = A^*$$

Karena $A^* \subseteq A^* B^*$ dan $A^* B^* \subseteq A^*$ maka $A^* B^* = A^*$

Dengan bukti yang serupa, berlaku juga $B \subseteq A \Rightarrow B^* A^* = A^*$

Perhatikan bahwa $L_1 \cap L_2 \subseteq L_1 \cup L_2$ dan $L_2 \subseteq L_1 \cup L_2$. Persamaan awal

$$\begin{aligned} \text{dapat ditulis: } (L_1 \cap L_2)^* (L_1 \cup L_2)^* &= (L_1 \cup L_2)^* L_2^* \\ (L_1 \cup L_2)^* &= (L_1 \cup L_2)^* \end{aligned}$$

Jadi, terbukti bahwa untuk setiap L_1 dan L_2 , benar

$$(L_1 \cap L_2)^* (L_1 \cup L_2)^* = (L_1 \cup L_2)^* L_2^*$$

B-4)

Ya, misalkan sebuah string $w \in L$, dan misalkan operasi triplikasi F pada string w sebagai $F(w)$. Untuk sembarang string w , berlaku $\#_a(w) = 2i$ dan $\#_b(w) = 2j + 1$, untuk bilangan bulat non-negatif i dan j .

Asumsikan $F(w)$ akan menghasilkan string x . Maka $\#_a(x) = 3 \#_a(w) = 6i$

dan $\#_b(x) = 3 \#_b(w) = 3(2j + 1) = 6j + 3 = 2(3j + 1) + 1$. Selanjutnya, karena

masing-masing $\#_a(x)$ dan $\#_b(x)$ dapat dinyatakan dalam $2c$ dan $2d + 1$

berturut-turut untuk bilangan bulat non negatif c dan d . Dapat disimpulkan

bahwa $\#_a(x)$ genap dan $\#_b(x)$ ganjil. Sehingga, string x terdapat di L .

Terbukti, bahwa L bersifat tertutup terhadap operasi triplikasi www .