Identities of Regular Expression

$A\varnothing = \varnothing A = \varnothing$
$A\{\varepsilon\} = \{\varepsilon\}A = A$
$(AB)C = A(BC)$
$(A \subseteq B) \wedge (C \subseteq D) \Rightarrow AC \subseteq BD$
$A(B \cup C) = AB \cup AC$
$(B \cup C)A = BA \cup CA$
$A(B \cap C) \subseteq AB \cap AC$
$(B \cap C)A \subseteq BA \cap CA$
$A^* = A^+ \cup \{\varepsilon\}$
$A^n \subseteq A^*, n \geq 0$
$A^n \subseteq A^+, n \geq 1$
$A \subseteq AB^*$
$A \subseteq B^*A$
$A \subseteq B \Rightarrow A^* \subseteq B^*$
$A \subseteq B \Rightarrow A^+ \subseteq B^+$
$AA^* = A^*A = A^+$
$\{\varepsilon\} \in A$ iff $A^+ = A^*$
$(A^*)^* = A^*A^* = A^*$
$(A^*)^+ = (A^+)^* = A^*$
$A^*A^+ = A^+A^* = A^*$
$(A^*B^*)^* = (A \cup B)^* = (A^* \cup B^*)^*$
$(C = AC \cup B) \Rightarrow (C = A^*B)$

Nomor 1

Untuk setiap L_1, L_2, dan L_3, $(L_1^*(L_2 \cup L_3)^*)^* = ((L_1 \cup L_2)^* L_3^*)^*$.

Ya, perhatikan bahwa $(A^*B^*)^* = (A \cup B)^*$

To show that $L(R_2) \subseteq L(R_1)$ you should note that $L(A) \subseteq L(A^*) \subseteq L(A^*B^*)$, analogously $L(B) \subseteq L(A^*B^*)$, so $L(A+B) \subseteq L(A^*B^*)$ ah hence $L((A+B)^*) \subseteq L((A^*B^*)^*)$.
For the converse, note that $L(A) \subseteq L(A+B) \subseteq L((A+B)^*)$ and (being the latter concatenation-closed) $L(A^*) \subseteq L(((A+B)^*)^*) = L((A+B)^*)$ analogously $L(B^*) \subseteq L((A+B)^*)$, so, again for concatenation closedness $L(A^*B^*) \subseteq L((A+B)^*)$ and you finally have (for the same reason) $L((A^*B^*)^*) \subseteq L((A+B)^*)$.

$$(L_1^*(L_2 \cup L_3)^*)^* = ((L_1 \cup L_2)^* L_3^*)^*$$
$$(L_1 \cup (L_2 \cup L_3))^* = ((L_1 \cup L_2) \cup L_3)^*$$
$$(L_1 \cup L_2 \cup L_3)^* = (L_1 \cup L_2 \cup L_3)^*$$

Nomor 2

Untuk setiap L_1 dan L_2, berlaku $L_1 = L_2 \iff L_1^* = L_2^*$.

Tidak, kasus sanggahannya ialah saat $L_1 = \{a\}; L_2 = \{a, aa\}$; Jelas bahwa $a^2 = aa$, sehingga $L_1^* = L_2^*$, namun $L_1 \neq L_2$.

Nomor 3

Untuk setiap L_1 dan L_2, benar $(L_1 \cap L_2)^*(L_1 \cup L_2)^* = (L_1 \cup L_2)^* L_2^*$

Ya, Perhatikan bahwa $B \subseteq A \implies A^*B^* = A^*$.

$$\textbf{Proof}$$
$$\{\varepsilon\} \in B^* \implies A^* \subseteq A^*B^*$$
$$B \subseteq A \implies B^* \subseteq A^* \implies A^*B^* \subseteq A^*A^* = A^*$$

$$\textbf{Implies}$$
$$A^* \subseteq A^*B^* \wedge A^*B^* \subseteq A^* \implies A^*B^* = A^*$$

Dengan bukti yang serupa, didapatkan juga bahwa $A \subseteq B \implies B^*A^* = A^*$.

Perhatikan bahwa berlaku pula $L_1 \cap L_2 \subseteq L_1 \cup L_2$ dan $L_2 \subseteq L_1 \cup L_2$, dari lemma di atas, dapat disimpulkan bahwa $(L_1 \cap L_2)^*(L_1 \cup L_2)^* = (L_1 \cup L_2)^* L_2^* = (L_1 \cup L_2)^*$.

Nomor 4

$L = \{w \in \{a, b\}^* : \#_a(w) \text{ genap dan } \#_b(w) \text{ ganjil}\}$ bersifat tertutup (closed) terhadap operasi triplikasi www (L tertutup terhadap triplikasi: jika w adalah string dari L maka juga www adalah juga di dalam L).

Ya, misalkan sebuah string $w \in L$, dan misalkan operasi triplikasi F pada string w sebagai $F(w)$. Untuk sembarang string w, berlaku $\#_a(w) = 2i; \#_b(w) = 2j + 1$; untuk suatu bilangan bulat non negatif i dan j. Asumsikan $F(w)$ akan menghasilkan string x. Maka, $\#_a(x) = 3 \cdot \#_a(w) = 6i; \#_b(x) = 3 \cdot \#_b(w) = 3(2j + 1) = 6j + 3 = 2(3j + 1) + 1$; Selanjutnya, perhatikan bahwa $\#_a(x)$ dan $\#_b(x)$ dapat dinyatakan dalam $2c$ dan $2d + 1$ secara berturut-turut untuk bilangan bulat non negatif c dan d. Dapat disimpulkan bahwa $\#_a(x)$ genap dan $\#_b(x)$ ganjil. Sehingga, string x terdapat di L. Maka, terbukti bahwa L bersifat tertutup (*closed*) terhadap operasi triplikasi $F(w) = www$.