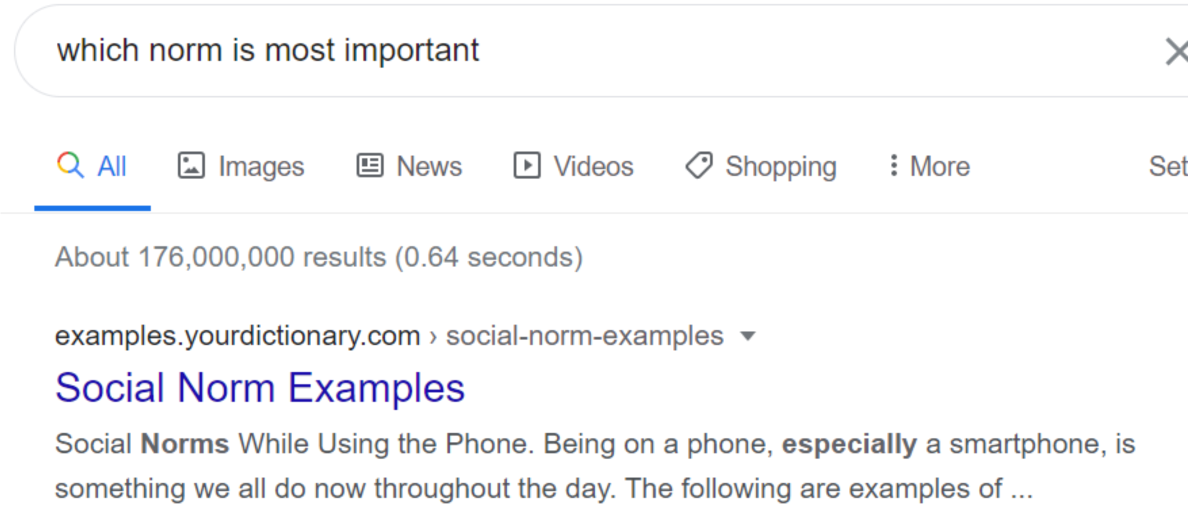
Catatan Week

https://learn.lboro.ac.uk/archive/olmp/olmp_resources/pages/workbooks_1_50_jan2008/Workbook30/30_4_mtrx_norms.pdf

Tidak ada standar khusus untuk norm mana yang digunakan. Benar bahwa $||u||_p \geq ||u||_{p+1}$.

https://people.eecs.berkeley.edu/~wkahan/MathH110/NormOvrv.pdf

~~The most used norm is social norm.~~



Di Octave, untuk solve persamaan linear bisa langsung

```
x = A \ b;
display(Ax - b)
```

Untuk titik dua mesti dispesifikasi, ujung-ujungnya.

Nomor 1

```
n = 4;
A = rand(n, n); U = triu(A); b = rand(n, 1); x = zeros(n, 1);
x(n) = b(n)/U(n, n);
for i = (n - 1):-1:1
    x(i) = b(i) - U(i, i+1:n) * x(i+1:n);
    x(i) /= U(i, i);
end
display(U); display(b); display(x);
% Compute error for U*x - b = 0
v = U*x - b;
er = norm(v, Inf)
display(er);
% Values vary from 0 to 2e-15
```

Nomor 2

```
n = 4;
```

```
A = rand(n, n); b = rand(n, 1); x = zeros(n, 1);

% n = 2
% A = [1, 1; -3, 1]; b = [6; 2]; x = zeros(n, 1);
% x = 1, y = 5

augmented = [A, b];
display(augmented);
for i=1:n
  for j=i+1:n
    m = augmented(j,i)/augmented(i,i);
    augmented(j, i) = 0;
    for k=(i+1):(n+1)
      augmented(j, k) -= m * augmented(i, k);
    endfor
  endfor
endfor

U = augmented; U(:,n+1) = [];
display(augmented);
display(U);
btilde = augmented; btilde(:,1:n) = []
display(btilde);
x(n) = btilde(n)/U(n, n);
for i = (n - 1):-1:1
    x(i) = btilde(i) - U(i, i+1:n) * x(i+1:n);
    x(i) /= U(i, i);
end

display(x)
% Compute error for A*x - b = 0
v = A*x - b;
er = norm(v, Inf)
display(er);
```

Nomor 1b

FLOPS operation (menyelesaikan $Ux = b$)

- Setiap looping i ada satu kali pembagian. Total pembagian ada n kali.
- Setiap looping i ada perkalian dua vektor dengan ukuran $n - i$, maka ada $\sum_{i=1}^{n-1}(n-i) = n(n-1) - \frac{n(n-1)}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$ perkalian.
- Ada pula pengurangan sebanyak $n - 1$ kali.

FLOPS operation (melakukan reduksi dengan Gaussian Elimination)

- Pembagian untuk mencari m ada $\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=i+1}^{n} 1 = \frac{n(n-1)}{2}$.
- Perkaliannya memiliki lapisan $\frac{(n+1)(n)(n-1)}{3}$ kali. Generating Function ftw
- Pengurangannya juga sama $\frac{(n+1)(n)(n-1)}{3}$ kali. Generating Function ftw

In C, an operation is the effect of an operator on an expression. Specific to floating-point numbers, a floating-point operation is any mathematical operation (such as +, -, *, /) or assignment that involves floating-point numbers (as opposed to binary integer operations).

Floating-point numbers have decimal points in them. The number 2.0 is a floating-point number because it has a decimal in it. The number 2 (without a decimal point) is a binary integer.

Floating-point operations involve floating-point numbers and typically take longer to execute than simple binary integer operations. For this reason, most embedded applications avoid wide-spread usage of floating-point math in favor of faster, smaller integer operations.

Nomor 2b

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p & 0 \\ q & r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s & t \\ 0 & u \end{bmatrix}$$

Dibuat 4 buah persamaan:

- $p \cdot s = 0$
- $p \cdot t = 1$
- $q \cdot s = 1$
- $q \cdot t + r \cdot u = 0$

Berdasarkan persamaan 2 dan 3, diketahui bahwa $p, t, q, s \neq 0$. Kontradiksi dengan pernyataan pertama, yaitu $p \cdot s = 0$.

Nomor 3b

a) Hasilnya ialah matriks A dengan baris 1 dan 4 ditukar

b)

```
A = eye(4)
B = eye(4)
A([1 2],:) = A([2 1],:)
B([2 3],:) = B([3 2],:)
% Berbeda A dan B
```

```
octave:5> A([1 2],:) = A([2 1],:)
A =

   0   1   0   0
   1   0   0   0
   0   0   1   0
   0   0   0   1

octave:6> B([2 3],:) = B([3 2],:)
B =

   1   0   0   0
   0   0   1   0
   0   1   0   0
   0   0   0   1

octave:7> A * B
ans =

   0   0   1   0
   1   0   0   0
   0   1   0   0
   0   0   0   1
```

```
octave:8> B * A
ans =

   0   1   0   0
   0   0   1   0
   1   0   0   0
   0   0   0   1
```

c) Matriks A disebut simetris bila $A = A^\intercal$, atau $A_{i,j} = A_{j,i}$ untuk setiap i, j. Pada matriks $P_{i,j}$ pada awalnya matriks tersebut simetris, kemudian $r_i \leftrightarrow r_j$, sehingga $A_{i,j} = A_{j,i} = 1$, kesimetrisan tetap terjaga.

d) Matriks $P_{i,j}$ ialah matriks elementer dan karena matriks tersebut merupakan matriks ortogonal dan simetris, maka $P_{i,j} = P_{i,j}^{-1} = P_{i,j}^{T}$. Didapatkan $P_{i,j}^2 = I$. Pada dasarnya matriks tersebut merupakan matriks tukar baris, yang merupakan operasi pertukaran baris i dan j secara intuitif, diketahui bahwa dengan menukar baris yang sama 2 kali akan mengembalikannya ke matriks awal.

e) $Q^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ Kalau ada beberapa operasi, kerjakan dari kanan, karena matriks elementer paling kanan ialah identitas.

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$$
$$\textbf{Proof}$$
$$(B^{-1}A^{-1})(AB) = I \implies B^{-1}A^{-1} = (AB)^{-1}$$

f) $AP_{i,j} = AP_{i,j}^\intercal = (P_{i,j}A^\intercal)^\intercal$. Perhatikan bahwa karena transposnya sama, hal tersebut berlaku, jadi intinya dilakukan transpos pada A, kini kolom menjadi baris dan baris menjadi kolom, kemudian dilakukan tukar baris, setelah itu ditranspos lagi, berarti akan terjadi operasi tukar kolom.

Nomor 4

a) Dengan asumsi $A_{1,1} \neq 0$, maka matriks tersebut akan melakukan salah satu iterasi pertama dari operasi Gaussian Eliminiation, yaitu dengan menjadikan baris-baris di bawah baris pertama memiliki entri di kolom pertamanya 0. Perhatikan bahwa $R_{i,j}(c)$ menyatakan salah satu operasi baris elementer yaitu mengurangi suatu baris dengan kelipatan skalar dari baris lain.

b) Tidak berpengaruh, karena setiap operasinya independen terhadap baris berbeda yang dipengaruhinya.

$$Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -c & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -b & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -a & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -a & 1 & 0 & 0 \\ -b & 0 & 1 & 0 \\ -c & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

c) Perhatikan bahwa $R_{i,j}(c)$ merupakan sebuah matriks elementer. Invers dari fungsi tersebut ialah dengan mengurangi baris j dengan baris i dengan kelipatan lawan c, yaitu $-c$, sehingga $R_{i,j}^{-1}(c) = R_{i,j}(-c)$. Didapat $R_{i,j}(c)R_{i,j}(-c) = I$

d)

$$Q^{-1} = R_{1,2}^{-1}(-a)R_{1,3}^{-1}(-b)R_{1,4}^{-1}(-c) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ a & 1 & 0 & 0 \\ b & 0 & 1 & 0 \\ c & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

e) $P_{2,3}QP_{2,3}, P_{2,4}QP_{2,4}P_{3,4}QP_{4,3}$

```
P = eye(4); P([2 3],:) = P([3 2],:);
Q = eye(4); Q(2, 1) = -2; Q(3,1) = -3; Q(4,1) = -4 % Dimisalkan biar gampang
display(P * Q * P)

octave:14> display(P * Q * P)
   1   0   0   0
  -3   1   0   0
  -2   0   1   0
  -4   0   0   1

 % Terjadi tukar baris 2 dan 3, tapi diagonal utamanya tetap. Setelah dicoba ke
yang lain, juga sama
```

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -a & 1 & 0 & 0 \\ -b & 0 & 1 & 0 \\ -c & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \implies \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -b & 0 & 1 & 0 \\ -a & 1 & 0 & 0 \\ -c & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \implies \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -b & 1 & 0 & 0 \\ -a & 0 & 1 & 0 \\ -c & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Hal ini terjadi karena pada operasi pertamanya akan dilakukan operasi tukar baris seperti biasa, kemudian dilakukan operasi tukar kolom. Karena kolom yang bersesuaian hanya bernilai 1 pada diagonal utama lama, maka akan dikembalikan kondisi awalnya.