Arranger Hocky Yudhiono
Credits Pak Raja, Machffud, (Myself), The internet, and some other unmentioned people.

Nomor 1

```
function [L, U, p] = LUwPivot(A)

  [n, n] = size(A);

  % initialize lower triangle matrix
  L = eye(n);
  p = 1:n;

  for k=1:n-1
    % Find row l, where l has the largest value
    [m, l] = max(abs(A(k:n, k)));
    % Adjust max indexing
    l += (k - 1);
    % swap l-th row and k-th row
    tmp = A(l, :);
    A(l, :) = A(k, :);
    A(k, :) = tmp;
    % swap p vector as well
    tmp = p(l);
    p(l) = p(k);
    p(k) = tmp;
    % Swap l-th row and k-th row of L
    % Swap processed row only
    tmp = L(l, 1:k-1);
    L(l, 1:k-1) = L(k, 1:k-1);
    L(k, 1:k-1) = tmp;
    for i=k+1:n
      % Find m untuk setiap baris i
      L(i, k) = A(i,k)/A(k, k);
      % Eliminasi baris i untuk kolom k + 1 .. n
      A(i,:) = A(i,:) - L(i, k) * A(k,:);
    endfor
  endfor
  U = A;
  % P = zeros(n, n);
  % for i=1:n
  %  P(i, p(i)) = 1
  % endfor
endfunction
```

Memori $O(n^2)$, banyak operasi flops?

Untuk flopsnya tergantung implementasi pak, pada loop terdalamnya. Tadi Prof. Chan menyampaikan bila dibongkar `A(i,:) = A(i,:) - L(i, k) * A(k,:);` nya (Tidak keseluruhan baris), maka ada $\frac{(n-1)(n)(2n-1)}{6}$ flops. Sama untuk kedua partial pivoting maupun tidak.

Nomor 2

```
octave:3> [L U P] = lu(A)
L =

   1   0   0   0
  -1   1   0   0
  -1  -1   1   0
  -1  -1  -1   1

U =

   1   0   0   1
   0   1   0   2
   0   0   1   4
   0   0   0   8

P =

Permutation Matrix

   1   0   0   0
   0   1   0   0
   0   0   1   0
   0   0   0   1
```

Nomor 3a

$A\vec{x} = \vec{b}$ dijadikan $L(U\vec{x}) = \vec{b}$.

Misalkan $L\vec{y} = \vec{b}$, maka $\vec{y}$ ialah penyelesaian dari persamaan tersebut dan berlaku: $\vec{y} = L^{-1}\vec{b}$, cari nilai $\vec{y}$ dengan Forward substitution, kemudian kerjakan bagian dalamnya yaitu $U\vec{x} = \vec{y}$. Perhatikan bahwa $L(U\vec{x}) = \vec{b}$ tadi memiliki solusi untuk $\vec{y}$ yang merupakan vektor yang memenuhi persamaan $L\vec{y} = \vec{b}$, makanya selanjutnya akan dikerjakan $U\vec{x} = \vec{y}$, dan carilah solusinya dengan backward substitution.

```
1;

function x = backward_sub(U, b)
  % This solves Ux = b
  [n n] = size(U);
  x = zeros(n, 1);
  x(n) = b(n)/U(n, n);
  for i = (n - 1):-1:1
    x(i) = b(i) - U(i, i+1:n) * x(i+1:n);
    x(i) /= U(i, i);
  endfor
  x;
endfunction

function x = forward_sub(L, b)
  % This solves Lx = b
  [n n] = size(L);
  x = zeros(n, 1);
  x(1) = b(1)/L(1, 1);
  for i = 2:n
    x(i) = b(i) - L(i, 1:i) * x(1:i);
    x(i) /= L(i, i);
```

```
  endfor
  display(x);
endfunction


L = [1,0,0;2,1,0;3,4,1];
U = [6,5,4;0,3,1;0,0,1];
b = [5;9;12];

y = forward_sub(L, b);
display(y);
x = backward_sub(U, y);
display(x);
```

Nomor 3b

Perhatikan bahwa $P^{-1} = P^{\intercal}$. Maka $P^{-1}LUx = b \iff LUx = Pb$

```
function x = solve_LUX(L, U, b)
  y = forward_sub(L, b);
  x = backward_sub(U, y);
  x;
endfunction

%%
% L = [1,0,0;2,1,0;3,4,1];
% U = [6,5,4;0,3,1;0,0,1];
% b = [5;9;12];

%%

L = [1,0,0;1,1,0;0.5,0,1];
U = [2,4,7;0,-2,-7;0,0,-0.5];
P = [0,1,0;0,0,1;1,0,0];
b = [1;2;4];

bb = P * b;
x = solve_LUX(L, U, bb);
display(x);
```

Nomor 3c

$PAQ = LU$, solve for $A\vec{x} = \vec{b} \iff P^{-1}LUQ^{-1}\vec{x} = \vec{b}$

Nomor 4

Buktikan bahwa $LDL^{\intercal}$ merupakan matriks simetris. Jika elemen diagonal D semuanya positif buktikan bahwa $LDL^{\intercal}$ juga matriks positif definit.

$LDL^T = L^T D^T L = L^T DL \iff LDL^T$ simetris

A matrix A is called *positive definite* matrix if

for all non-zero vector x, the inequality

$$x^\top Ax > 0.$$

Perhatikan bahwa harus dibuktikan $xLDL^\top x^\top > 0$

Kita buat sebuah matriks $S = \sqrt{D}$ ialah matriks diagonal yang entri diagonalnya ialah akar dari entri pada matriks D. Selanjutnya perhatikan bahwa $S = S^\top$ dan berlaku $SS = D$. Tentunya S juga merupakan matriks diagonal positif.

Didapatkan bahwa $\vec{x}LSS^\top L^\top \vec{x}^\top = \vec{x}LS(\vec{x}LS)^\top$. Misalkan $LS = G$, maka akan diselesaikan permasalahan pengecekan definit positif dari $\vec{x}G(\vec{x}G)^\top$.

Selanjutnya soal ini akan direduce menjadi soal nomor 5 yang sudah pernah diselesaikan. Untuk tambahan, LS mesti invertible. syaratnya agar invertible ialah L juga invertible. Pada matriks segitiga bawah, determinannya ialah perkalian dari entri di diagonal utamanya, yang mengimplikasikan elemen pada diagonal utamanya tidak boleh 0. Sehingga itu juga harus menjadi syarat dari permasalahan ini.

Nomor 5

Jika G matriks segitiga bawah dan definit positif, buktikan $GG^\top$ matriks yang simetris dan definit positif. $GG^T = (GG^T)^T = G^TG$.

$$G = \begin{bmatrix} g_{1,1} & 0 & \cdots & 0 \\ g_{2,1} & g_{2,2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ g_{n,1} & g_{n,2} & \cdots & g_{n,n} \end{bmatrix}$$

$$GG^T = \begin{bmatrix} g_{1,1}^2 & g_{2,1}g_{1,1} & \cdots & g_{n,1}g_{1,1} \\ g_{2,1}g_{1,1} & g_{2,1}^2 + g_{2,2}^2 & \cdots & g_{n,1}g_{2,1} + g_{n,2}g_{2,2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ g_{n,1}g_{1,1} & g_{n,1}g_{2,1} + g_{n,2}g_{2,2} & \cdots & \sum_{i=1}^n g_{n,i}^2 \end{bmatrix}$$

Asumsikan matriks G invertible, artinya $GG^{-1} = I$

Harus dicari tahu apakah untuk semua vektor $\vec{x}$ tak nol, haruslah benar bahwa $xAx^\top > 0$. Perhatikan bahwa disini $\vec{x}$ ialah vektor baris, $\vec{x}G$ itu juga matriks baris.

Substitusikan $A = GG^\top$ akibatnya $xGG^\top x^\top = (xG)(xG)^T$

Katakan $\vec{x}G = \vec{y}$, maka $yy^\top > 0 \iff \sum_{i=1}^n y_i^2 > 0$.

$$\begin{array}{c} \vec{x} \\ \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_n \end{bmatrix} \end{array}$$

ini $\vec{x}$

$$\begin{array}{cccc} \vec{c}_1 & \vec{c}_2 & & \vec{c}_n \end{array}$$
$$\begin{bmatrix} g_{11} & g_{12} & \cdots & g_{1n} \\ g_{21} & g_{22} & \cdots & g_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ g_{n1} & g_{n2} & \cdots & g_{nn} \end{bmatrix}$$

ini G

$$= \begin{bmatrix} \vec{x}\vec{c}_1 & \vec{x}\vec{c}_2 & \dots & \vec{x}\vec{c}_n \end{bmatrix}.$$

Misal ini $\vec{y}$

$$\vec{x}G = \left((\vec{x}G)^T\right)^T = \left((G^T)\vec{x}^T\right)^T$$

$\vec{x} \neq \vec{0}$

$\Rightarrow \text{null}(G^T) = \{\vec{0}\} \Leftrightarrow G^T$ invertible

G^T invertible $\Leftrightarrow G$ invertible

$\Rightarrow (G \text{ singular} \Rightarrow \exists \vec{x} \wedge (\vec{x} \neq \vec{0}) \wedge (\vec{x}G = \vec{0}))$

Perhatikan bahwa $\vec{y}.\vec{y}^T = \sum_{i=1}^{n} (\vec{x}\vec{c}_i)^2$

G invertible $\Rightarrow \forall \vec{x} : (\vec{x} \neq \vec{0} \Rightarrow \vec{x}G \neq \vec{0})$

$\Rightarrow (\vec{x}G)(\vec{x}G)^T > 0$ //

$\Leftrightarrow \vec{x}A\vec{x}^T > 0$

$\Rightarrow A$ positif definit $\wedge$ A simetris

Perhatikan bahwa penting fakta bahwa ruang null ialah himpunan semua x dengan $A\vec{x} = \vec{0}$, untuk suatu matriks A.

Bonus:

A real symmetric matrix **A** is positive definite iff there exists a real nonsingular matrix **M** such that

$$\mathbf{A} = \mathbf{M}\,\mathbf{M}^{\mathrm{T}},$$

Nomor 6

$$GG^{\intercal} = \begin{bmatrix} a^2 & ab \\ ab & b^2 + c^2 \end{bmatrix}$$
$$a = 2; b = 3; c = 1;$$
$$G = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$$

$$HH^T = \begin{bmatrix} a^2 & ab & ad \\ ab & b^2 + c^2 & bd + ce \\ ad & bd + ce & d^2 + e^2 + f^2 \end{bmatrix}$$
$$a = 2;$$
$$b = 1;$$
$$d = -1;$$
$$c = 1;$$
$$e = 0;$$
$$f = 1;$$
$$H = \begin{bmatrix} 2 & & \\ 1 & 1 & \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

```
octave:40> H = [4,2,-2;2,2,-1;-2,-1,2]
H =

   4   2  -2
   2   2  -1
  -2  -1   2
```

```
H = [4,2,-2;2,2,-1;-2,-1,2];
disp(chol(H)');
G = [4, 6; 6, 10];
disp(chol(G)');
```

https://en.wikipedia.org/wiki/Cholesky_decomposition

Nomor 7

$$\mathrm{cond}(A) = ||A|| \cdot ||A^{-1}||$$

https://www.netlib.org/lapack/lug/node75.html

```
A = [1,1;1,1.001];
b = [2;2];
bt = [2;2.001];
% A
nrm = inf;
ans = norm(bt - b,nrm)/norm(b,nrm);
disp(ans);
% 5.0000e-04
% B
x = A \ b;
xt = A \ bt;
ans = norm(xt - x, nrm)/norm(x, nrm);
disp(ans);
% 0.5000
% C
normA = norm(A, nrm);
normAi = norm(inv(A), nrm);
disp(normA * normAi);
% 4004.0, really ill
```