Зростання та розпад

де це константа пропорційності. Приклади з біологіі показують нам, що за не значний проміжок чау зростання популяції пропорційна до змін у часі. Знаючи початковий стан популяції у момент часу, ми можемо прогнозувати кількість популяції у майбутньому. Константа пропорційності може бути знайдена з розв’язку задачі Коші. У фізиці та хімії таке явище можна побачити у реакції першого роду, у реакції якої швидкість , прямо пропорційна до кількості речовини у момент часу .

Приклад 1. Ріст бактерій

Напочатку кульура має бактерій. В момент часу t = 1 кількість бактерій становить 3/2\*Р0. Якщо швидкість росту пропорційна кількості бактерій Р(т) у момент часу т, визначити кількість часу необхідного для потроєння популяціі.

Розв’язок

Спочатку розв’язуємо рівняння (1), з символом Р замість х. У момент часу т0 = 0 початкова умова становить Р(0) = Р0. Потім ми використовуємо емпіричне спостереження щоб визначити коефіцієнт пропорційності к.

Зауважемо, що деференційне рівняння dP/dt = kP є як сепарабельним так і лінійним. Коли його перетворити у стандартну форму лінійного ДР першого порядку

dP/dt - kP = 0,

Ми бачимо, що інтигруючим фактором є e^(-kt). Домножаючи обидві частини рівняння на цей термін( Як це пояснити? ) та інтегруючи це дає

d/dt[e^(-ktp)] = 0, e^(-ktp) = c

Загалом /\*Р(т) = сукт\*/. За /\*т = 0 \*/ слідує /\*\*/ так що. Якщо /\*\*/ ми маємо \*\* або \*\*. З останнього виразу ми отримуємо \*\* так що \*\*\*. Щоб знайти час за який популяція бактеорій збільшиться втричі, ми повинні розв’язати \*\*. Це дає \*\* або \*\*

Зверніть увагу на Приклад 1, фактичная кількість \*\* бактерій представлена на початку не грає ніякої ролі в знаходженні часу за який популяція збільшиться втричі. Час необхідний для початковой кількості виду наприклад 100 або 1000000 бактерій щоб збільшитись втричі є приблизно 2.71 години.

Як зображено на Фігурі єкпоенційна функція \*\* зростає коли \*\* зростаэ за \*\* та зменьшуєтся коли \*\* зростая за \*\*. Таким чином описується зростання( популяціі, бактерій, капіталу) та характерезується позитивним значенням \*\*, в той час коли проблеми пов’язані з розпадом (радиоктивний розпад) негативним значенням. Відповідно ми кажемо що \*\* є константоє хростанн або розпаду.

Напіврозпад

У фізиці напіврозпад це характеристика радиоктивної речовини. Зпрощено, напіврозпадом є час який потрібен для однієї половини атомів в початковій кілкості \* розпастися або трансмутувати в атоми іншого єелменту. Чим біль період напівзрозпаду тим стаблініше є елемент. Наприклад період напіврозпаду вісокоактивного радіуму Ra-226 становить 1700 років. За 1700 років одна півчастка заданої кількості трансмутує в радон \*. Найільш зустрічаємий ізотоп урану \* має період напіврозпаду 4,500,000,000 років. В околі 4.5 міл’ярдів років одна напівчастка початкового об’єму \* трансмутує у \*.

Приклад 2. Напіврозпад плутонія

У ректорі-розмножувачі перетворуєетьсяя стабільний уран-238 в ізотопи плутонія-239. Після 15 років було з’ясовано, що 0.043% від початковой кількості \* плутонія роклалось. Знайти період напіврозпаду цього ізотопу за умови пропорційності швидкості розпаду та початкової кількості.

Розв’язок

Припистимо \* це початкова кількість плутонія за часу \*. Як у пррикладі 1 розв’язком задачі Коші.

\*

\*. Якщо 0.043% атомів від початковой кількості \* розклалось відповідно 99.957% речовини залишилось. Для знаходженная константи розпаду \* ми використуєм \*. Розв’язок дає \*. Звідси. Останній вираз дає.

Радіовуглецеве датування

Близько 1950 року команда вчених університету Чікаго за керівництвом хімика Віларда Лібі розробила метод використання радиоактивних ізотопів карбону як міру приблизного віку вуглецевмісних копалин. Теорія радіовуглецевого датування базується на факті що радіоізотоп карбону 14 з’являється в атмосфері як продукт впливу космічной радіаціі на нітроген 14. Відношення кількості с-14 до с-12 в атмосфері є константою та як наслідок пропорційний розмір ізотопів присутніх у живих організмах такий самий як і в атмосфері. Коли живий організм вмирає поглинання с-14 припиняєется. За порівнянням пропорційної кількості с-14 в копалинах з постійною килькісттю в атмосфері стає можливим отримання розумної оцінки віку. Метод базується на знаннях напірозпаду с-14. За Ліббі приблизним періодом напіврозпаду с-14 є 5600 років, але сьогодні загально прийнятим є значення 5730. За цю роботу Нобелевсьяка премія 1960 року з хіміі була віддана Ліббі. Метод Ліббі використовувався для розрахунку дерервяних меблів знайденних у пірамідах Єгипту, нещодавно знайдена копія Гностичної Івангеліі від Іуди написаній на папірусі та Туринської плащениці.

Приклад 3 Вік копалин

Скам’яніла кістка містить 0,1% від його початкової кількості вуглецю - 14. Визначте вік копалень.

Розв’язок

Початковою точкою

Для визначення значень розпаду, ми викорастаємо той факт, що. Останнє рівняння має на увазі. Тому. З ми маємо.

Дата знайдена у прикладі-3 дійсно знаходиться у межі точності цьго методу.

Звичайний вуглець 14 є методом з обмеженням 10 періодів напіврозпаду ізотопу або приблизно 60 000 років. Одна з причин такого обмеження полягає у тому, що хімічний аналіз необхідний для отримання точного вимірення залишку С14 становить приблизно в околі. Крім того, цей аналіз вимагає руйнування досить великих зразків…(dopisat’) Т\_Т

Закон Ньютона про похолодання /потелпління.

У рівнянні 3 ми бачимо, що математична формула імпіричного закона Ньютона: набуття тепла об’єктом, становить лінійним дифиренційним рівнянням першого порядку.

Де к є константою пропрорційності, \* це є температурю об’єкта за часу t>0, Тm це є температура навколишньго середовища, яка є середньою температурю навколо об’єкта.У прикладі 4 ми припустимо, що Tm є константа.

Приклад 4. Холодний кекс.

Коли кекс дістають з печі, його температура становить 300° F.Через 3 хвилини температура становить 200° F. Як дового він буде охолоджуватись до температури в приміщенні 70° F.

Розв’язок

Ми зробили ототожнення. Ми повинні розв’язати задачу Коші

Визначити таке значення к, за яким.

Рівняння 3 являють собою лінійні та сепарабельні. Якщо ми розділемо змінні.

/\*формули\*/

Ми зауважимо, що дає некінцевий розв’зок. Але ми інтуітивно очікуємо, що кекс змньшить свою температуру до кімнатної за, доволі, великий проміжок часу. Але на скільки це великий проміжок? Також ми маємо не зверати уваги, що модель не є близькою до нашої інтуіції.

Частини А і Б доволі чітко зобржають, що кекс понизить свою температуру до кімнатної, за 1.5 години.

Температура навколишньго середовища повинна бути константною, але може бути і функцією від часу.

Суміші.

Змішування двох рідин інколи дає лінійне дифиренційне рівняння 1-го степеня.

Приклад 5. Суміш двох сольових розчинів. Припускаючи, що контейнер містить 300 галонів сольового розчину. Сіль входить і віходить з контейнеру. Сольовий розчин потрапляє в контейнер зі швидкістю 3 галона за хвилину. Він змішується з сумішю і виходить з баку зі швидкістю 3 галона за хвилину. Концентрація солі або сольового розчину становить 2лб на галон. Таким чином сіль заходить у кабіну зі швидкістю.

Та виходить зі швидкістю \*\*\*\*\*\*\*

З цих даних ми отримаємо рівняння \*.   
Якщо було розпущено 50 фунтів солі в 300 галонів спочатку. Скільки солі залишиться в кабіні, після доволі довгого проміжку часу?

Розв’язок

Щоб знайти кількість солі у баку у час т ми розв’язуємо задчу Коші.

\*

Слід зазначити, що побічною умовою є початкове значення кількості солі А(0) = 50 в баку та не початкова кількість рідини в баку. Тепер з інтегруючим фактором

лінійного диференційного рівняння \* ми маємо можливість записати вираз

\*

Інтегруючи останню частину та розв’язок відносно А дає нам загальний розв’язок . Коли ми знайдемо, що. Така кількість солі у резервуарі у часу знаходиться за функцією   
  
Приклад 6

Якщо добре переміщана речовина з 5 прикладу буде відкачуватись з меньшою швидкістю, наприклад \* тоді рідина буде накопичуватися у резурвуарі за показником \*. Коли мине \* хвилин,

\*

так щоб у резервуарі накопичилось \* галонів розсолу. Концентрація відтіку становитиме \*, а відтік салі становитиме \* або \*

Звідси рівняння (5) перетворюється у

\*

Інтегруючий фактор в останнєм рівнянні