OPPGJORET MED GAUSSING

Petter Hodt - TMA-4101 - H24
Forskningsassistent: Noah Hessen Bjerke

Oktober 2024

Jeg skal i denne oppgaven ta et oppgjør med gløshaugens største fiende, nemlig gaussing. Vi har alle vært der, hvor 2 - 1 plutselig ble lik 5. Så derfor har jeg gjort et forsøk dedikert til dette.

Problemstilling: Det er ikke ukjent at Nome er god i matte. Men er det noe i han som gjør han så god? Det skal jeg finne ut! Ved å konsumere Nome, som jeg for enkelhetens skyld antar består av 100% øl, skal jeg se om jeg kan tilegne meg guddommelige matematikk-egenskaper.

Hvor mye vil antall enheter traktet, påvirke hvor fort jeg kan løse en 3 x 4 matrise med gausseliminasjon?

Gjennomføringen: Forsøket innebar å få en tilfeldig 3x4 matrise produsert av chatGPT og dermed løse denne på tid. Man er i mål med matrisen når man har bare 0 under pivotene. Jeg målte antall riktig rader og tiden det tok å løse. Mellom hver matrise skal én enhet traktes (link til video), og slik fortsetter det i 7 runder. Fikk følgende resultat:

Matrisen $\longrightarrow$ Mitt forsøk : Fasit

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & -3 & 2 \\ 2 & 3 & 5 & -3 \\ 3 & -4 & 2 & 5 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & -3 & 2 \\ 0 & 3 & 8 & -5 \\ 0 & 0 & \frac{33}{2} & -\frac{17}{3} \end{array}\right] : \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & -3 & 2 \\ 0 & 3 & 8 & -5 \\ 0 & 0 & \frac{103}{6} & -\frac{14}{3} \end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} -5 & 1 & -4 & 0 \\ -5 & 1 & 3 & 0 \\ -2 & -2 & 5 & 3 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} -5 & 1 & -4 & 0 \\ 0 & \frac{12}{5} & \frac{33}{5} & 3 \\ 0 & 0 & 7 & 0 \end{array}\right] : \left[\begin{array}{ccc|c} -5 & 1 & -4 & 0 \\ 0 & -\frac{12}{5} & \frac{33}{5} & 3 \\ 0 & 0 & 7 & 0 \end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & 1 \\ -4 & -5 & -2 & 5 \\ -4 & 3 & 3 & -4 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & 1 \\ 0 & 3 & -14 & 9 \\ 0 & 0 & -\frac{95}{3} & 15 \end{array}\right] : \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & 1 \\ 0 & 3 & -14 & 9 \\ 0 & 0 & \frac{127}{3} & -33 \end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} -4 & -5 & -1 & -3 \\ -5 & -3 & -2 & 3 \\ -4 & -2 & 3 & -3 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} -4 & -5 & -1 & -3 \\ 0 & \frac{13}{5} & -\frac{3}{4} & \frac{27}{4} \\ 0 & 0 & \frac{45}{52} & \frac{141}{4} \end{array}\right] : \left[\begin{array}{ccc|c} -4 & -5 & -1 & -3 \\ 0 & \frac{13}{4} & -\frac{3}{4} & \frac{27}{4} \\ 0 & 0 & \frac{61}{13} & -\frac{81}{13} \end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} -1 & -5 & 4 & -1 \\ 5 & 4 & -2 & -1 \\ 3 & 0 & 2 & -4 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} -1 & -5 & 4 & -1 \\ 0 & -21 & -22 & -6 \\ 0 & 0 & -2 & -4 \end{array}\right] : \left[\begin{array}{ccc|c} -1 & -5 & 4 & -1 \\ 0 & -21 & -18 & -6 \\ 0 & 0 & \frac{8}{7} & -\frac{19}{7} \end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} & & & \\ & & & \\ & & & \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} -1 & -4 & -2 & 2 \\ 0 & 9 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 5 \end{array}\right] : \left[\begin{array}{ccc|c} & & & \\ & & & \\ & & & \end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} -4 & 5 & -4 & 4 \\ 0 & 3 & -1 & 4 \\ -1 & 5 & -3 & 1 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} -4 & 5 & -4 & 4 \\ 0 & 3 & -1 & 5 \\ 0 & 0 & -\frac{3}{4} & -\frac{25}{4} \end{array}\right] : \left[\begin{array}{ccc|c} -4 & 5 & -4 & 4 \\ 0 & 3 & -1 & 5 \\ 0 & 0 & -\frac{3}{4} & -\frac{25}{4} \end{array}\right]$$

Nr.	**Tid [min]**	**Antall riktig**
1	4.20	2 av 3
2	3.43	3 av 3
3	4.09	2 av 3
4	6.10	2 av 3
5	2.23	1 av 3
6	1.28	0 av 3
7	2.28	3 av 3

Table 1: Enkel tabell

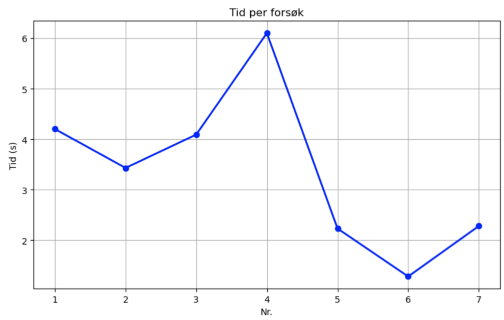

Figure 1: Tid per forsøk

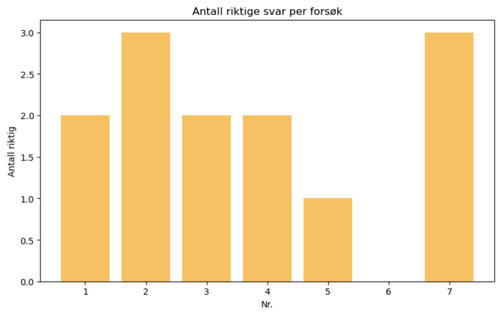

Figure 2: Antall riktig

Konklusjon:
Selvom dette er et enkeltstående forsøk så er det mye informasjon å reflektere rundt. Så jeg har merket meg et par punkter:

- Mer og mer selvtilitt. Er det en ting som er sikkert så er det at selvtilitten øker etterhvert. Så det er tydelig at tidene går betraktelig ned ved en 4 enheter innabords
- Flere feil. Gjetting blir også mer fremtredende. Dette fører til fler og fler feil, noe man ser en tydelig nedgang i på figur 2.
- Kan treffe jackpot. Ved sjeldne scenriorer kan man treffe med litt flaks, og derfor avsluttet det hele med den raskeste gaussingen i mitt liv. Får håpe dette er frampek mot eksamen.

Tømme trakten (for de spesielt interesserte leserne)

Nå kommer den tørreste delen av besvarelsen min. Jeg ønsker å regne på hvor fort høyden på trakten når en tilnærmet verdi til 0. Hvorfor ser jeg på dette? Vet ikke egentlig. Føler jeg må gjøre noe matematisk også, så det blir dette. Det er tydelig at dette ikke har noe reel verdi i den virkelig verden. Forsøket over derimot et høyst seriøs forskning. Lager utrykk for når modellen ser slik ut:

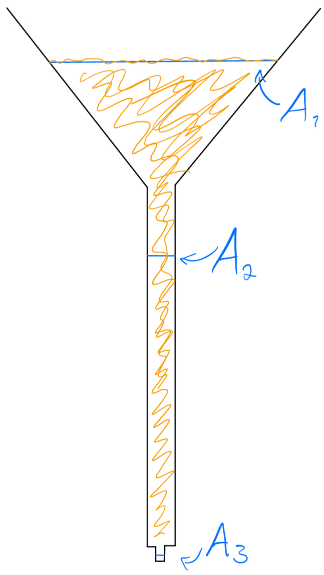

Figure 3: Modell

Det betyr at jeg setter opp ett utrykk for når væsken er tom i tanken, og ett for når væsken er tom i røret.

Ser derfor på volumbalanse. Endringen av volum (i avkappet kjegle) er lik endring av volumstrøm:

$$\dot{V} = A_1 \cdot \dot{h} = \frac{1}{3}\pi \dot{h}(R^2 + Rr_1 + r_1^2)$$

og volumstrømen er gitt ved Q:

$$\dot{V} = -Q = v \cdot A_2 = \pi r_1^2 \dot{h}$$

setter inn Torricelli's lov:

$$\dot{V} = \sqrt{2gh} \cdot \pi r_1^2$$

Setter $\dot{V} = \dot{V}$ og får følgene utrykk med negativ strømming ut av tanken:

$$\frac{1}{3}\pi \dot{h}(R^2 + Rr_1 + r_1^2) = -\sqrt{2gh} \cdot \pi r_1^2$$

Leker litt med utrykket og bruker A for enkelhetens skyld:

$$A_1 \dot{h} = -\sqrt{2gh} A_2$$

$$\dot{h}(t) + \frac{A_2}{A_1}\sqrt{2g}\sqrt{\dot{h}(t)} = 0$$

Får da henholdvis disse to likningene å løse for tanken og for røret:

$$\dot{h_1} + \lambda_1\sqrt{h} = 0, \qquad \lambda_1 = \frac{A_2}{A_1}\sqrt{2g}$$

$$\dot{h_2} + \lambda_2\sqrt{h} = 0, \qquad \lambda_2 = \frac{A_2}{A_3}\sqrt{2g}$$

Kan nå altså løse en 1.ordens diff.likning:

$$\dot{h}(t) = -\lambda\sqrt{h(t)}$$

Alle barn i barnehagen ser:

$$\frac{dh}{dt} = -\lambda\sqrt{h}$$

$$\frac{1}{-\lambda\sqrt{h}}dh = dt$$

$$\int \frac{1}{-\lambda\sqrt{h}}dh = \int dt$$

$$-\frac{2}{\lambda}\sqrt{h} = t + C$$

$$\sqrt{h} = -\frac{\lambda}{2}t - \frac{\lambda}{2}C$$

$$h = \left(-\frac{\lambda}{2}\cdot t - \frac{\lambda}{2}C\right)^2$$

Initialkravene blir nå høyden på væsken i tanken og høyden på røret:

Bruk initialbetingelsen $h(0) = h_0$ for å finne C:

$$h_0 = \left(-\frac{\lambda}{2}\cdot 0 - \frac{\lambda}{2}C\right)^2 \implies h_0 = \frac{\lambda^2}{4}C^2 \implies C = \pm\frac{2\sqrt{h_0}}{\lambda}$$

Sett C tilbake i ligningen med posisitv verdi:

$$h = \left(\sqrt{h_0} + -\frac{\lambda}{2}t\right)^2$$

Setter inn verdiene for lambda, og får disse to utrykkene:

$$h_1(t) = \left(\sqrt{h_0} - \frac{1}{2}\cdot\frac{A_2}{A_1}\sqrt{2g}t\right)^2 = \left(\sqrt{h_0} + -\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi r_1^2\sqrt{2g}}{\frac{1}{3}\pi(R^2 + Rr_1 + r_1^2)}t\right)^2$$

$$h_2(t) = \left(\sqrt{h_0} - \frac{1}{2}\cdot\frac{A_3}{A_2}\sqrt{2gt}\right)^2 = \left(\sqrt{h_0} + -\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi r_2^2\sqrt{2g}}{\pi r_1^2}t\right)^2$$

Så jeg målt disse verdiene:

$$
\begin{aligned}
R_1 &= 5\text{cm} \\
r_1 &= 2.25\text{cm} \\
r_2 &= 1.75\text{cm} \\
\text{Starthøyde trakt} &= 10\text{cm} \\
\text{Starthøyde rør} &= 100\text{cm}
\end{aligned}
$$

Plotter dette i python og leser av grafen:

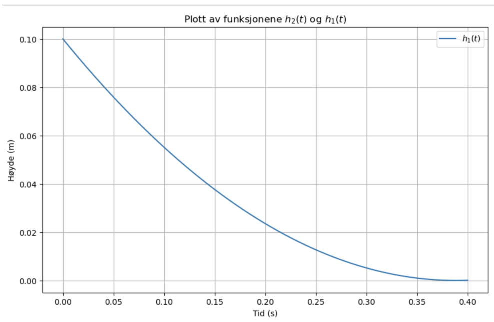

Figure 4: Tid trakt

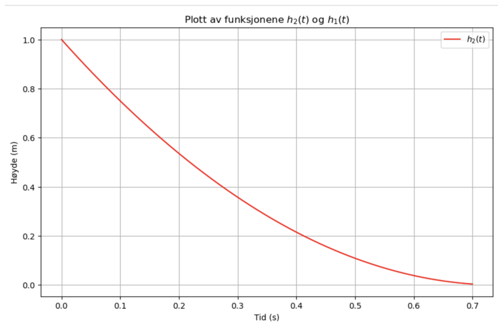

Figure 5: Tid rør

Ser at det tar 0.7s for trakten å tømme seg og 0.4. Så det tar 1.1s for trakten å tømme én enhet uten fortyrrelser. Når vi testen dette selv og tok tiden så kom det også på rundt 1s. Veldig kult.