Probabilité et statistiques

L2 prépa

William Hodonou

Novembre 2020

Outline

Probabilité conditionnelle

Nous allons présenter dans ce chapitre l'un des plus importants concepts de la théorie des probabilités, celui de probabilité conditionnelle.

Définition

La notion de probabilité conditionnelle peut être nécessaire à chaque fois que pendant le déroulement d'une expérience aléatoire, on dispose d'une information partielle. Si on sait que l'événement A est réalisé, pour que l'événement B se réalise, on est amené a regarder l'événement $A \cap B$, puis à normaliser. Nous prenons la propriété-définition suivante : si $P(B) > 0$ la probabilité conditionnelle de A sera

$$P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

Probabilité conditionnelle

exercice

Jeu de 52 cartes

A = « Tirer un Roi »

B = « Tirer une carte > 10 » (V, D, R, As)

Calculer $P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$

Probabilité conditionnelle

Solution

$P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$ or $A \subset B \Rightarrow p(A \cap B) = p(A)$ donc

$P(A \mid B) = \frac{P(A)}{P(B)} = \frac{\frac{4}{52}}{\frac{16}{52}} = \frac{4}{16} = \frac{1}{4}$

$$\Rightarrow \frac{4}{16} = \frac{(nb\ cas\ favorables)}{nb\ cas\ possibles\ dans\ l'expace\ réduit\ de\ B}$$

Probabilité conditionnelle

Propriété

Si A et B sont des évènements de probabilités non nulles, on a :

$$P(A \cap B) = P(A \mid B) \times P(B) = P(B \mid A) \times P(A)$$

Propriété d'inclusion

Soient deux évènements A,B tels que $P(B) > 0$ et $A \subset B$, alors

$$P(A \mid B) = \frac{P(A)}{P(B)}$$

Probabilités composées

Formule des probabilités composées pour 3 évènements

Soient A, B et C des évènements tels que A et $A \cap C$ soient de probabilités non nulles. On a :

$$P(A \cap B \cap C) = P(A) \times P(B \mid A) \times P(C \mid A \cap B)$$

Probabilités composées

Formule des probabilités composées

On peut généraliser cette formule à l'intersection de n évènements.
Soient $A_1, ..., A_n$ des évènements tels que $P(A_1 \cap A_2 \cap ... \cap A_{n-1}) > 0$ on a

$$P(A_1 \cap A_2 \cap ... \cap A_n) = P(A_1) \times P(A_2 \mid A_1) \times P(A_3 \mid A_1 \cap A_2)$$
$$\times ... \times P(A_n) \mid A_1 \cap A_2 \cap ... \cap A_{n-1})$$

Formule des probabilités totales

Formule des probabilités totales (cas particulier)

Soient A et B deux évènements, avec $0 < \mathrm{P(B)} < 1$. On a :

$$P(B) = P(B \mid A) \times P(A) + P(B \mid A^{'}) \times P(A^{'})$$

Théorème de Bayes

- Motivation : Ces formules ont pour but d'exprimer $P(A \mid B)$ en fonction de $P(B \mid A)$.

Cas particulier du théorème de Bayes

Soient A et B deux événements avec $A \neq 0$ et $B \neq 0$, on a :
$P(A \cap B) = P(A) \times P(B \mid A) = P(B) \times P(A \mid B)$ Ce qui donne la formule de Bayes si $A \neq 0$ et $B \neq 0$, alors :

1. $$P(A \mid B) = \frac{p(A \cap B)}{P(B)} = \frac{P(A) \times P(B \mid A)}{P(B \mid A) \times P(A) + P(B \mid A') \times P(A')}$$

2. $$P(A^{'} \mid B) = 1 - P(A \mid B)$$

3. $$P(A \cup B \mid C) = P(A \mid C) + P(B \mid C) - P(A \cap B \mid C)$$

Outline

Indépendance entre deux évènements

Définition

Soient A et B deux évènements de probabilités non nulles. On dit que A et B sont indépendants si et seulement si :

$$P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$$

Ainsi $P(A \mid B) = P(A)$

Ne pas confondre incompatible et indépendant.

Généralisation

Les évènements sont mutuellement indépendants si

$$P(A \cap ... \cap A_n) = P(A_1) \times ... \times P(A_n)$$