Probabilité et statistiques

L2 prépa

William Hodonou

Novembre 2020

Outline

Références bibliographiques

- G. Saporta. Probabilités, analyse des données et Statistique. Ed. Technip, (2006).
- Mathematical Statistics with Applications (Seventh Edition), 2008, by Wackerly, D., Mendenhall III, W., Scheaffer, R., Thomson Brooks/Cole ISBN: 978-0495110811, Chapters 1-7
- Probability and Statistical Inference (Ninth Edition), 2014, by Hogg, R.V., Tanis, E.A., and D. Zimmerman, Prentice Hall, ISBN: 978-0321923271, Chapters 1–5.

Objectifs

Ce cours permet de familiariser l'étudiant avec les notions de base de la théorie des probabilités et le rendre habile à résoudre des problèmes où jouent les lois du hasard.

Préalables académiques

Continuité et dérivabilité des fonctions de plusieurs variables réelles et des intégrales (doubles et triples), en mettant l'emphase sur le calcul.

Modalités d'évaluation

- 1 partiel de 3h.
- Contrôle continu : Evaluation sur la base de questions de réflexion et d'exercices appliqués que les étudiants doivent traiter régulièrement.

Introduction

- La théorie des probabilités est une branche des mathématiques née au XVIIe siècle de l'étude des jeux de hasard.
- Elle a été axiomatisée au début du XXe siècle.
- Elle est toujours utilisée notamment :
  - par les organisateurs de jeux de hasard (LNB, casinos)
  - dans le domaine de la couverture de risques (assurances)
  - en physique quantique
  - en statistique inférentielle (ou décisionnelle) lorsque l'on cherche à étendre une propriété constatée sur un échantillon à l'ensemble d'une population

Introduction

Associer une probabilité à un évènement, c'est lui associer un nombre qui indique la “vraisemblance” de la réalisation de cet évènement :

- Probabilité proche de 1 $\rightarrow$ évènement très probable
- Probabilité proche de 0 $\rightarrow$ évènement très peu probable

Que signifie : “la probabilité qu'il fasse beau demain est de 0,75 ?”

Pour quantifier une probabilité, on aura besoin de savoir déterminer le nombre de cas possibles de certaines configurations. C'est l'objet des deux premiers chapitres.

Outline

Expérience aléatoire

- But de la théorie des probabilités : développer un formalisme adapté à l'étude des phénomènes dans lequel le hasard intervient.
- « aléatoire » vient de « alea » signifiant « jeu de dés » en latin.

Expérience aléatoire

Définitions et notations

- Une expérience est dite **aléatoire** si on ne peut pas prédire avec certitude son résultat.
- Le résultat d'une expérience aléatoire est appelé **issue** ou **éventualité**, noté ω .
- L'ensemble des issues est appelé l'**espace/ensemble fondamental** (ou univers), noté Ω.

Exemple

- Tirer une carte au hasard dans un jeu de 52 cartes
- Compter le nombre de particules émises entre les instants 0 et t
- Si le résultat de l'expérience équivaut à la détermination du sexe d'un nouveauné, alors
- Si l'expérience consiste à jeter deux pièces

Définir Ω, dans les exemples ci-dessus :

Expérience aléatoire

Solution

$\Omega = \{As, P, AS, T, \cdots, 2P, 2T, 2C, 2C\}$
$\Omega = \{1, 2, 3, \cdots, \infty\}$
$\Omega = \{g, f\}$
$\Omega = \{(P, P), (P, F), (F, P), (F, F)\}$

Notion d'évènement

Définition

On appelle **évènement** A tout sous-ensemble de Ω

Exemple

- Evénement A = « tirer une carte de la couleur pique »

$$= \{AsP, RP, DP, \cdots, 2P\}$$

NB :
A partir d'un événement, on peut définir d'autres événements

Notion d'évènement

Inclusion

$A \subset B$ signifie que chacun des évènements élémentaires de A appartiennent également à B :

$$w \in A \Rightarrow w \in B$$

Si A est réalisé, alors B l'est également.

Opérations sur les événements: union

Exemple

Dans la suite on considère l'expérience aléatoire consistant à jeter un dé ;
$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ et A l'évènement :
A = "obtenir un nombre pair" $= \{2, 4, 6\}$

Réunion de deux évènements

Pour toute paire d'événements A et B d'un ensemble fondamental Ω, l'événement $A \cup B$ doit contenir chaque point se trouvant dans A, dans B ou dans les deux à la fois.

$$(w \in A \cup B) \Leftrightarrow (w \in A \; ou \; w \in B)$$

Le "ou" n'est pas exclusif.

Opérations sur les événements: union

Si $D =$ "obtenir un nombre inférieur ou égal à 3",

Opérations sur les événements: union

alors $A \cup D = \{1, 2, 3, 4, 6\}$

$$(w \in A \cap B) \Leftrightarrow (w \in A \text{ et } w \in B)$$

Cardinal d'une réunion

Si A et B sont deux ensembles, on a :

$$card(A \cup B) = card(A) + card(B) - card(A \cap B).$$

Opérations sur les événements: intersection

Intersection de deux évènements

Pour toute paire d'événements A et B on peut définir le nouvel événement $A \cap B$, appelé intersection de A et B, comme l'ensemble des réalisations qui sont à la fois dans A et dans B. Cela veut dire que l'événement $A \cap B$ ne sera réalisé que si A et B le sont à la fois.

$$(w \in A \cap B) \Leftrightarrow (w \in A \ et \ w \in B)$$

Intersection de deux évènements

Si C = "obtenir un nombre supérieur ou égal à 5", alors $A \cap C = \{6\}$

Opérations sur les événements

Extension des définitions

On définit l'union et l'intersection de plus de deux événements de la même manière:si E_1, E_2, ... sont des événements, leur union, notée

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$$

est par définition l'événement qui contient chaque point qui se trouve dans E_n pour au moins une valeur de $n = 1, 2, ...$ De même l'intersection des événements E_n, notée

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} E_n$$

est par définition l'événement comprenant tous les points qui sont dans tous les événements E_n à la fois,$n = 1, 2, ...$

Opérations sur les événements: Evénement vide

L'événement "obtenir 8" est $\emptyset$, ensemble vide : c'est l'événement impossible.

Puisqu'il faut donner un nom à un tel événement, on l'appellera l'événement vide et on le notera 0 . (0 désigne donc l'événement ne contenant aucun point).

Evènements incompatibles

Si $A \cap B = 0$, alors A et B sont dits **mutuellement exclusifs.** Signifie que A et B sont des évènements incompatibles. A et B ne peuvent pas être réalisés en même temps.

- A et $\bar{A}$ sont incompatibles : $A \cap \bar{A} = \emptyset$.

Opérations sur les événements: Evènement complémentaire

L'évènement complémentaire de A, noté $\bar{E}$ ou $E^{'}$ est constitué des évènements élémentaires qui n'appartiennent pas à A.
Dans notre exmple : $\bar{A}$ = "obtenir un nombre impair" $= \{1, 3, 5\}$

Evènement certain, évènement impossible

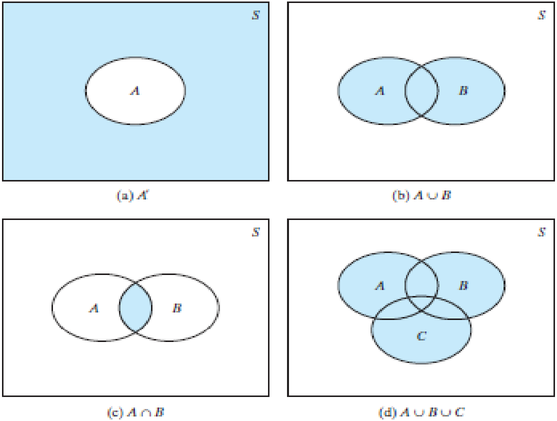
- Ω est l'évènement certain (il est réalisé à chaque expérience). Son complémentaire
- $\emptyset$ est l'évènement impossible.

Représentation graphique d'événements

Une représentation graphique très utile pour l'illustration des relations logiques entre les événements est le diagramme de **Venn.** L'ensemble S est représenté par tous les points d'un grand rectangle et les événements E, F, G ... sont représentés par tous les points situés à l'intérieur de cercles inclus dans le rectangle.

Des événements d'intérêt particulier peuvent ensuite être mis en évidence en ombrant les aires appropriées du diagramme. Par exemple, dans les diagrammes de Venn montrés sur la figure les zones ombrées représentent respectivement les événements $E \cup F$, $E \cap F$.

Représentation graphique d'événements



Propriétés des opérations sur les événements

Les opérations d'union, d'intersection et de complémentation d'événements obéissent à certaines règles rappelant celles de l'algèbre. En voici quelques-unes:

- Commutativité $A \cup B = B \cup A$ et $A \cap B = B \cap A$
- Associativité $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$

$$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$$

- Distributivite $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

Propriétés des opérations sur les événements

Loi de Morgan

Les relations suivantes entre les trois opérations de base consistant à former des unions, des intersections ou des complémentations, sont connues sous le nom de **lois de DeMorgan** et sont très utilisées.

$$(\cup_{i=1}^{n} E_i)^c = \cap_{i=1}^{n} E_i^c$$

$$(\cap_{i=1}^{n} E_i)^c = \cup_{i=1}^{n} E_i^c$$

plus simplement $(A \cup B)^{'} = A^{'} \cap B^{'}$et $(A \cap B)^{'} = A^{'} \cup B^{'}$ on peut le generaliser à plus de deux ensembles

$$(A \cup B \cup C)^{'} = A^{'} \cap B^{'} \cap C^{'}$$

Propriétés des opérations sur les événements

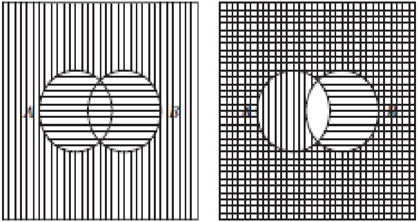
Exercice 2:

Utiliser un diagramme de venn pour démontrer le premier DeMorgan's law.

Propriétés des opérations sur les événements

Solution

Sur la figure (a), $(A \cup B)$ est représenté par des lignes horizontales, et donc $(A \cup B)$ est la région représentée par des lignes verticales. Dans la Figure (b), A est indiqué par des lignes horizontales et B par des lignes verticales. Un élément appartient à $A \cap B$ s'il appartient à la fois à A et à B. Ainsi, la région hachurée représente $A \cap B$. De toute évidence, cette région hachurée est la même que celle ombrée de lignes verticales en a.



(a) (b)

Terminologie des événements aléatoires

- Un événement A est certain si $A = \Omega$
- Un événement A est impossible si $A = \varnothing$;
- A est l'événement contraire d'un événement A si $\bar{A} = \Omega \setminus A$
- Deux événements A1 et A2 sont incompatibles (ou mutuellement exclusifs) si $A_1 \cap A_2 = \phi$

Terminologie des événements aléatoires

Résumons le tout dans un tableau:

Langage probabiliste	Notation	Langage ensembliste
Issue ou résultat	ω ($\omega \in \Omega$)	élément de Ω
Événement A	$A \subset \Omega$	partie de Ω
A est réalisé	$\omega \in A$	appartenance
Événement contraire (non-A)	$\bar{A} = \Omega \setminus A$	complémentaire
A et B	$A \cap B$	intersection
A ou B	$A \cup B$	union
Événements incompatibles	$A \cap B = \emptyset$	disjoints
A implique l'événement B	$A \subset B$	inclusion
Événement impossible	$\emptyset$	ensemble vide
Événement certain	Ω	partie pleine
Système complet d'événements A_n	$\Omega = \bigcup_n A_n$ et $A_i \cap A_j = \emptyset$ pour $i \neq j$	partition

Outline

Approche intuitive

Fonction probabilité

Avant d'effectuer une expérience, on ne sait pas si l'événement A sera réalisé ou non. La donnée d'une probabilité permet de mesurer les chances pour que A se réalise.

Définition :

Soit une expérience Ω son ensemble fondamental et a l'ensemble des événements. p est une probabilité sur (Ω, a) si l'application

$$p : a \rightarrow [0,\ 1]$$

$$A \rightarrow p(A)$$

Vérifie

Approche intuitive

Définition :

1. $P(\Omega) = 1$; $P(\emptyset) = 0$
2. les probabilités s'additionnent pour des évènements disjoints ;

$$p(A \cup B) = p(A) + p(B)$$

   si A et B sont disjoints $(A \cap B) = \emptyset$
3. $p(\cup_{i=1}^{\infty} A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} p(A_i)$ pour les événements disjoints 2 à 2.

Approche intuitive

Définition :

Cas particulier : Si les événements élémentaires w_i sont équiprobables. On a :

$$\sum_{i}^{n} p_i = 1 \Rightarrow P_i = \frac{1}{n}$$

Dans ce cas,

$$P(A) = \frac{nbcasfavorable}{nbcaspossible} = \frac{card(A)}{card(\Omega)}$$

QUELQUES THÉORÈMES ÉLÉMENTAIRES

1. $P(S) = 1$, $P(\phi) = 0$
2. $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$
3. $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$
4. $A \subset B$ implique $P(A) \leq P(B)$
5. $P(A) = P(A \cap B) + P(A \cap B^{'})$