Probabilité et statistiques

L2 prépa

William Hodonou

Novembre 2020

Outline

Les variables aléatoires

On peut dire que des variables aléatoires nous entourent. Souvent, lors d'une expérience aléatoire, on ne s'intéresse pas à l'issue w de cette épreuve, mais à une fonction de cette réalisation (notée $X(w)$) de cette issue, donnant une valeur numérique...

Exemples 1

- Le nombre (inconnu) d'années que vous allez vivre est une variable aléatoire, tout comme
- Le nombre de réclamations d'assurance automobile que vous déposerez au cours de votre vie et
- Le nombre de d'écran appartenant à une famille Béninoise choisie au hasard. La caractéristique clé de chacune de ces variables aléatoires est que le résultat d'intérêt est un nombre (un décompte des réclamations d'assurance) et cela dépend du hasard.

Les variables aléatoires

Cela conduit à une définition intuitive d'une variable aléatoire.

Définition

Soit une expérience aléatoire et Ω l'ensemble fondamental. Une application

$$X : \Omega \to \mathbb{R}$$

$$\omega \to X(\omega)$$

est une variable aléatoire discrète, si l'ensemble des valeurs prises par X est fini ou dénombrable. Une application

$$X : \Omega \to \mathbb{R}$$

$$\omega \to X(\omega)$$

est une variable aléatoire continue, si l'ensemble des valeurs prises par X est un intervalle de $\mathbb{R}$.

Les variables aléatoires

Par exemple On lance 3 fois une pièce de monnaie (qui prend deux valeurs possibles "pile" ou "face"). L'ensemble fondamental est $\Omega = \{(P, F), (P, F), (P, F)\}$ Notons X le nombre de "face" apparue au bout des trois jets. Les valeurs possibles de X sont $D_X = \{0, 1, 2, 3\}$. X est une application de Ω dans D_X De manière générale, X est une application :

$$X : \Omega \to \mathbb{R}$$

Les variables aléatoires

Du fait que la valeur d'une variable aléatoire est déterminée par le résultat de l'expérience, il est possible d'attribuer une probabilité aux différentes valeurs que la variable aléatoire peut prendre.

Les différents types de variables aléatoire

Variable aléatoire discrète

Une variable aléatoire est dite discrète lorsque les valeurs xi qu'elle est susceptible de prendre sont en nombre fini, ou encore formés exclusivement de nombres entiers. Quelques exemples :

1. nombre de "face" apparaissant après 10 jets d'une pièce ;
2. nombre de véhicules passant à un carrefour dans une journée ;
3. nombre de clients entrant dans un magasin le samedi.

Les différents types de variables aléatoire

Variable aléatoire continue

Une variable aléatoire est dite continue si elle peut prendre toutes les valeurs d'un intervalle. Quelques exemples :

1. intervalle de temps entre 2 passages de train ;
2. longueur de cheveux ;
3. durée de vie en secondes d'une pièce mécanique.

Loi de probabilité (ou distribution) d'une variable aléatoire

a) Cas d'une variable aléatoire discrète :

Soit X une v.a. qui ne prend comme valeurs

Définition :

La loi de probabilité de X est l'ensemble des probabilités $P(X = x_i)$ ou $P(X = x)$ et qui satisfait :

1. $$0 \leq P(X = x_i) \leq 1$$
2. $$\sum_i P(X = x_i) = \sum_x P(X = x) = 1 \leftarrow$$

   condition de normalisation

Loi de probabilité (ou distribution) d'une variable aléatoire

Définition :

Cas discret : 3 étapes pour obtenir la loi de probabilité :

1. Valeurs de X
2. Calculer $P(X = x)$
3. Vérifier $\sum_x P(X = x) = 1$

Loi de probabilité (ou distribution) d'une variable aléatoire

Exemple :

Notre expérience consiste à jeter trois pièces équilibrées. Si l'on désigne le nombre de piles par Y, Y est une variable aléatoire et peut prendre les valeurs 0, 1, 2, 3 avec pour probabilité respectivement

Loi de probabilité (ou distribution) d'une variable aléatoire

Solution :

$$P\{Y = 0\} = P\{(P, P, P)\} = \frac{1}{8}$$
$$P\{Y = 1\} = P\{(P, P, F), (P, F, P), (F, P, P)\} = \frac{3}{8}$$
$$P\{Y = 2\} = P\{(P, F, F), (F, P, F), (F, F, P)\} = \frac{3}{8}$$
$$P\{Y = 3\} = P\{(F, F, F)\} = \frac{3}{8}$$

Loi de probabilité (ou distribution) d'une variable aléatoire

b) Cas des v.a. continues :

Définition :

On qualifiera X de variable aléatoire continue s'il existe une fonction f non négative définie pour tout $x \in R$ et vérifiant pour tout ensemble B de nombres réels la propriété:

$$P\{X \in B\} = \int_B f(x).dx$$

La fonction f est la **densité de probabilité** de la variable aléatoire X.

Loi de probabilité (ou distribution) d'une variable aléatoire

Propriétés

1. On a toujours $f(x) \geq 0$ car $f(x).dx$ a la dimension d'une probabilité
2. Si v.a. continue, $P(X = x_0) = 0$ donc

$$
\begin{aligned}
& P(x_1 \leq X \leq x_2) \\
& = P(x_1 < X < x_2) \\
& = P(x_1 \leq X < x_2) \\
& = P(x_1 < X \leq x_2)
\end{aligned}
$$

Loi de probabilité (ou distribution) d'une variable aléatoire

Propriétés

Condition de normalisation

$$P(a \leq X \leq b) = 1 = \int_a^b f(x).dx$$

On retrouve les 3 étapes :

- Intervalle de X
- Trouver $f(x)$
- Vérifier que $\int_a^b f(x).dx = 1$
  Si l'intervalle est $\mathbb{R}$ tout entier, alors $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x).dx = 1 =$ Condition de Normalisation

Fonction de répartition

Dans certains cas, on peut être intéressé par l'obtention d'au moins "x" valeurs. Dans l'exemple des jets de pièces, on peut vouloir poser la question : "quelle est la probabilité que l'on obtienne au moins x-fois le côté pile de la pièce ?". Dans ce cas, on parle de probabilité cumulée ou encore de fonction de répartition.

Définition

C'est la fonction

$$F \to \mathbb{R}$$

$$x \to P(X \leq x)$$

ou encore

$$F(x) = P(X \leq x);$$

x est comme une valeur numérique, et X est le nom de la v.a. (ex : somme des résultats de 2 dés).

Fonction de répartition

Les **propriétés** associées à la fonction de répartition sont les suivantes :

Soit F_X la fonction de répartition d'une **variable aléatoire discrète** X alors :

(P_1) $\forall t \in \mathbb{R} \quad 0 \leq F_X(t) \leq 1$

(P_2) F_X est croissante sur $\mathbb{R}$

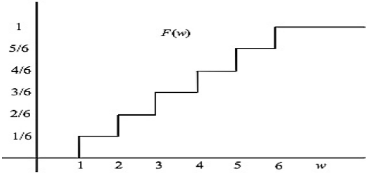
(P_3) $\lim\limits_{t \to -\infty} F_X(t) = 0$ et $\lim\limits_{t \to +\infty} F_X(t) = 1$

(P_4) si $a \leq b \quad P(a \leq X \leq b) = F_X(b) - F_X(a)$

Fonction de répartition

La fonction de répartition n'est autre que le cumul des probabilités individuelles. La probabilité pour que la variable aléatoire X prenne une valeur inférieure à x est une fonction $F(x)$ que l'on appelle fonction de répartition, $P(X < x) = F(x)$. si $D_x = \{0, 1, 2, ..., n\}$

$$F(x) = P(X < x) = \sum_{j=0}^{x-1} P(X = j)$$



Fonction de répartition

La fonction de distribution cumulative pour une variable aléatoire discrète infinie nécessite un peu plus de travail. Par exemple, la fonction de distribution cumulative pour la variable aléatoire de l'exemple nécessite l'utilisation de la formule pour la somme d'une série géométrique.

$$a + ar + ar^2 + ... + ar^n = a(\frac{1 - r^{n+1}}{1 - r})$$

avec $r \neq 0$

$$\sum_{k=1}^{\infty} ar^{k-1} = \frac{a}{1 - r}$$

si $|r| < 1$

Fonction de répartition

Exemple

Vous jouez une machine à sous à plusieurs reprises. La probabilité de gagner sur une seule partie est de 0,05 et les parties successives sont indépendantes. La variable aléatoire d'intérêt est X, le nombre de tentatives infructueuses avant la première victoire. Trouvez une expression pour $F(x)$ sachant que $P(k) = P(X = k) = 0.95^k(0.05)$.

Fonction de répartition

Cas des v.a. continues

$$F(x_0) = P(X \leq x_0) = P(X < x_0) = \int_a^{x_0} f(x).dx$$

ou encore

$$F(x) = P(X \leq x) = \int_a^{x} f(t).dt$$

NB :

$F'(x) = f(x)$: avec $F'(x) =$ fonction de répartition de $f(x) =$ densité de probabilité.

$P(x_1 \leq X \leq x_2)$

Fonction de répartition

Conclusion :

La loi de probabilité d'une v.a. est donnée :

- Cas discret : par les données de $P(X = x)$
- Cas continu : par la donnée de la densité de probabilité $f(x)$ ou de la fonction de répartition $F(x)$