Probabilité et statistiques

L2 prépa

William Hodonou

Novembre 2020

Outline

Analyse combinatoire

Objectif : Compter rapidement le nombre d'éléments d'un ensemble et le nombre de résultats possibles d'une expérience. L'analyse combinatoire est une branche des mathématiques qui étudie comment dénombrer des objets.

Outline

Principe de multiplication

Soit une expérience où on a p étapes successives et indépendantes.
1e : n_1 résultats possibles
2e : n_2 résultats possibles
3e : n_3 résultats possibles
Alors le nombre de résultats possibles de l'expérience est :
$N = n_1 \times n_2 \times ... \times n_p$

Exemple

Une petite communauté se compose de dix hommes et de leurs fils, chaque homme ayant trois fils. Si un homme et l'un de ses fils doivent être désignés «père et fils exemplaires», combien y a-t-il de choix différents possibles?

Principe de multiplication

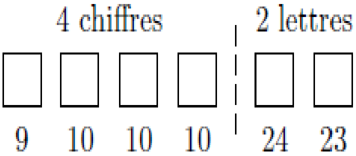
Solution: En considérant le choix du père comme la première expérience et ensuite le choix de l'un de ses fils comme la seconde, nous conclurons d'après le principe fondamental qu'il y a $10 \times 3 = 30$ choix possibles.

Exemple

Un système d'immatriculation comprend 4 chiffres dont le premier est non nul, suivis de 2 lettres distinctes, différentes de I et O. Quel est le nombre de plaques d'immatriculation ?

Principe de multiplication

Solution



Il y a donc $9 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 24 \cdot 23 = 4968000$ plaques différentes.

Exercice

Combien de nombres de 4 chiffres peut-on former avec les chiffres de 0 à 9 : 1) si les répétitions sont autorisées ? 2) si les répétitions sont interdites ? 3) si les répétitions sont interdites et le dernier chiffre doit être 0 ?

Outline

Permutations

Permutations simples (Permutation sans répétition)

Toute disposition ordonnée de n éléments distincts s'appelle une permutation simple(Permutation sans répétition). Le principe de multiplication montre que le nombre P_n de Permutation sans répétition vaut :

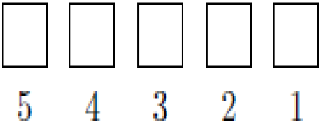
$P_n = n \times (n-1) \times (n-2) \times ... \times 3 \times 2 \times 1 = n!$

Exemple

Combien d'anagrammes du mot **SOEUR** (même sans signification en français) peut-on former ?

Permutations

Solution Il y a 5 lettres distinctes, donc 5 possibilités pour la première lettre, 4 possibilités pour la deuxième lettre, etc.



Il y a donc $5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 5! = 120$ anagrammes possibles.

Permutations

Permutations avec répétitions

Toute disposition ordonnée de n éléments, dont n_1 sont identiques de type 1, n_2 identiques de type 2, . . . , n_p identiques de type p avec $n_1 + n_1 + ... + n_p = n$, s'appelle une permutation avec répétitions. Alors le nombre de permutations de cet ensemble est :

$$\frac{n!}{n_1!n_2!...n_p!}$$

Exemple

Combien d'anagrammes du mot NONNE (même sans signification en français) peut-on former ?

Permutations

Solution Si l'on distingue les trois N en les numérotant, il y a $P5 = 5! = 120$ permutations des lettres N1, O, N2, N3, E. Parmi ces permutations, certaines sont identiques. Chaque anagramme a été compté $P3 = 3! = 6$ fois. Il y aura donc $\frac{5!}{3!} = 20$ anagrammes du mot NONNE.

Outline

Arrangements

Soient n objets. Un arrangement de p objets est obtenu en tirant p objets parmi les n, en les rangeant.

On appelle arrangement simple un choix ordonné de p éléments distincts parmi n éléments distincts. Le nombre A_n^p p d'arrangements simples est :

$$A_n^p = n(n-1)(n-2)...(n-p+1) = \frac{n!}{(n-p)!}$$

Exemple

n=4, 4 lettres a, b, c et d Nombre d'arrangements de 2 lettres ?

Arrangements

Solution

ab, ac, ad, bc, bd, cd, ba, ca, da, cb, db, dc => 12 mots ou objets.
D'une manière plus rapide :
Nombre de places disponibles pour la 1e case : 4
Nombre de places disponibles pour la 2e case : 3
=> 4*3 = 12

Arrangements avec répétition

On appelle arrangement avec répétitions un choix ordonné de k éléments, distincts ou non (on peut choisir plusieurs fois le même), parmi n éléments distincts. Le nombre d'arrangements avec répétition de k objets parmi n est n^k .

Exemple

Les plaques d'immatriculation d'un pays sont formées d'exactement quatre lettres de l'alphabet latin. Combien de voitures peut-on immatriculer dans ce pays ? Il y a 26 possibilités pour la première lettre, 26 pour la deuxième, 26 pour la troisième et 26 pour la quatrième. En tout, il y a donc $26 \cdot 26 \cdot 26 \cdot 26 = 26^4 = 456976$ plaques possibles.

Outline

Combinaisons

On appelle combinaison un choix non-ordonné de p éléments distincts parmi n éléments distincts. Le nombre C_n^p de combinaisons simples est :

$$c_n^p = \frac{n(n-1)(n-2)...(n-p+1)}{k!} = \frac{n!}{p!(n-p)!} = \frac{A_n^p}{p!}$$

Combinaisons

formule

$C_n^0 = 1$
$C_n^1 = n$
$C_n^p = C_n^{n-p}$
Si on veut calculer $C_{20}^{17} = C_{20}^{3}$

Formule du Binôme de Newton :

$$(a+b)^n = \sum_{p=0}^{n} C_n^p a^p b^{n-p}$$

Combinaisons

Récapitulation

<table>
<tr><td colspan="2"></td><td>sans répétitions</td><td>avec répétitions</td></tr>
<tr><td colspan="2">disposition ordonnée de tous les éléments</td><td>$\mathrm{P}_n = n!$</td><td>$\overline{\mathrm{P}}(n_1, n_2, \ldots, n_p) = \dfrac{n!}{n_1!\, n_2!\, \ldots\, n_p!}$</td></tr>
<tr><td rowspan="2">choix d'éléments</td><td>en tenant compte de l'ordre</td><td>$\mathrm{A}_k^n = \dfrac{n!}{(n-k)!}$</td><td>$\overline{\mathrm{A}_k^n} = n^k$</td></tr>
<tr><td>sans tenir compte de l'ordre</td><td>$\mathrm{C}_k^n = \dfrac{n!}{k!\,(n-k)!}$</td><td>$\overline{\mathrm{C}_k^n} = \dfrac{(n+k-1)!}{k!\,(n-1)!}$</td></tr>
</table>