

Bahnführung und Seilmodell für ein Flugwindkraftwerk

Rafael Wiedenroth

Masterarbeit

2020



Universität Stuttgart
Institut für Flugmechanik und Flugregelung

Erklärung

Hiermit versichere ich, dass ich diese Masterarbeit selbständig mit Unterstützung der Betreuer angefertigt und keine anderen als die angegebenen Quellen und Hilfsmittel verwendet habe.

Die Arbeit oder wesentliche Bestandteile davon sind weder an dieser noch an einer anderen Bildungseinrichtung bereits zur Erlangung eines Abschlusses eingereicht worden.

Ich erkläre weiterhin, bei der Erstellung der Arbeit die einschlägigen Bestimmungen zum Urrecht fremder Beiträge entsprechend den Regeln guter wissenschaftlicher Praxis¹ eingehalten zu haben. Soweit meine Arbeit fremde Beiträge (z.B. in der Form von Bildern, Zeichnungen, Textpassagen etc.) enthält, habe ich diese Beiträge als solche gekennzeichnet (Zitat, Quellenangabe) und eventuell erforderlich gewordene Zustimmungen der Urheber zur Nutzung dieser Beiträge in meiner Arbeit eingeholt. Mir ist bekannt, dass ich im Fall einer schuldhaften Verletzung dieser Pflichten die daraus entstehenden Konsequenzen zu tragen habe.

Ort, Datum

Rafael Wiedenroth

Betreuer: Stefan Notter, M.Sc.

¹Nachzulesen in den DFG-Empfehlungen zur „Sicherung guter wissenschaftlicher Praxis“ bzw. in der Satzung der Universität Stuttgart zur „Sicherung der Integrität wissenschaftlicher Praxis und zum Umgang mit Fehlverhalten in der Wissenschaft“

Kurzfassung

Die vorliegende Arbeit beschreibt die Entwicklung eines Seilmodells und einer Bahnführung für den zyklischen gefesselten Flug eines Flugwindkraftwerks. Das Seilmodell ist mit masselosen Kelvin-Voigt Elementen und Punktmassen in impliziter Form formuliert und berücksichtigt neben dem linear-elastischen Verhalten auch den Luftwiderstand. Die Bahnführung berechnet Bahnazimut und Bahnneigungswinkel und deren zeitliche Änderungen im erdfesten System auf Basis einer Sollbahn in Form einer Lemniskate. Beide Entwicklungen wurden in Simulationen mit einem kinematischen Ersatzmodell und einem Starrkörpermodell erfolgreich getestet.

Abstract

The present study describes the development of a tether model and a guidance scheme for the cyclic tethered flight of an airborne wind energy power plant. The tether model is expressed implicitly using massless kelvin-voigt elements and point masses and incorporates linear-elastic behavior as well as aerodynamic drag. The guidance calculates course angle and climb angle and their derivatives in the Earth-fixed frame based on a lemniscate as target track. Both developments were tested successfully in simulation with a kinematic analogous model and a rigid body model.

Inhaltsverzeichnis

Erklärung	iii
Kurzfassung / Abstract	v
Abbildungsverzeichnis	ix
Tabellenverzeichnis	xi
Nomenklatur	xiii
1. Einleitung	1
1.1. Einleitung zur Höhenwindenergie	3
1.2. Stand der Technik	5
1.3. Ziel der Arbeit	5
1.4. Methoden	5
2. Seilmodell	7
2.1. Modellbildung	7
2.1.1. Strukturmodellierung	7
2.1.2. Federkraft	9
2.1.3. Dämpfungskraft	10
2.1.4. Luftwiderstand	12
2.1.5. Aufprägung der Kräfte	13
2.1.6. Änderung der nominellen Seillänge	14
2.2. Berechnungsverfahren	14
2.2.1. Formulierung des Problems	14
2.2.2. Programmtechnische Umsetzung	16
3. Bahnführung	17
3.1. Koordinatensysteme	18
3.2. Sollbahn	20
3.2.1. Lemniskate von Bernoulli	20
3.2.2. Tangente an die Sollbahn und deren Ableitung	23
3.2.3. Transformationen	24
3.3. Bahnführung in der Tangentialebene	26
3.3.1. Bezugspunkt auf der Sollbahn	27

Inhaltsverzeichnis

3.3.2.	Vorsteuerung	30
3.3.3.	Regelkreis	39
3.3.4.	Bahnazimut und Azimutänderung	43
3.4.	Transformation in das erdfeste System	44
3.4.1.	Geometrische Transformation	45
3.4.2.	Kinematische Transformation	48
3.5.	Weiterentwicklung der Bahnführung	52
3.5.1.	Stetige Beschreibung der Ablage	53
3.5.2.	Zeitliche Änderung der Ablage	55
3.5.3.	Bahnazimut des Regelkreises	57
3.5.4.	Azimutänderung des Regelkreises	59
3.5.5.	Vergleich der Ergebnisse	60
4.	Simulation	63
4.1.	Simulation des Seils	63
4.2.	Simulation mit kinematischem Ersatzmodell	64
4.2.1.	Validierung der Bahnführung	65
4.2.2.	Diskussion der Seilsimulation	68
4.3.	SiL-Simulation	70
4.3.1.	Höhenregelung	70
4.3.2.	Simulationsergebnisse	71
5.	Zusammenfassung und Ausblick	75
A.	Vektortransformation	77
B.	Rotationsformel nach Rodrigues	79
	Literaturverzeichnis	81

Abbildungsverzeichnis

1.1. Google Scholar Suchergebnisse für „Airborne Wind Energy“, „High Altitude Wind Power“ und „Kite Power“ - kumuliert pro Jahr [15]	2
1.2. Einfluss der Elevation auf die Energieerzeugung	4
2.1. Prinzip des Seilmodells mit Diskretisierung in drei Segmente	8
2.2. Kelvin-Voigt Körper des Segments \mathcal{S}_2	9
2.3. Projektion der Relativgeschwindigkeit der Punktmassen auf \mathcal{S}_2	11
2.4. Kopplungsprinzip der Differentialgleichungssysteme	16
3.1. Struktur der Bahnführung	17
3.2. Übersicht der wichtigsten Koordinatensysteme	19
3.3. Lemniskate von Bernoulli für verschiedene Werte a	20
3.4. Parallelprojektion der Lemniskate auf die Kugeloberfläche	22
3.5. Zusammenhang zwischen der Ausdehnung der Lemniskate auf der Einheitskugel a und im Flug a_p	25
3.6. Ablage $\delta(s)$ von einem beliebigen Punkt auf der Sollbahn $\Gamma(s)$ zur projizierten Position des Fluggeräts in die Tangentialebene \mathbf{p}_\perp	28
3.7. Bezugspunkt auf der Sollbahn s^* auf Basis der kürzesten Ablage $\delta(s^*)$ zum Fluggerät	30
3.8. Allgemeiner Zusammenhang für $\chi_{\tau,0,\Gamma} \neq \chi_{\tau,0}$	31
3.9. Kreissegment zur Bestimmung des Geodätenvektors $\mathbf{b}(s)$	32
3.10. Transformation der Tangente an die Sollbahn	34
3.11. Bestimmung des Bahnazimuts $\chi_{\tau,0}$ in der Tangentialebene	35
3.12. Kinematische Zusammenhänge zur Bestimmung von $\dot{\lambda}$	38
3.13. Kinematische Zusammenhänge zur Bestimmung von \dot{s}	39
3.14. Geometrischen Zusammenhänge zur Bestimmung von $\chi_{\tau,\Delta}$	42
3.15. Geometrische Zusammenhänge zur Berechnung von σ auf einem Segment des Einheitskreises	43
3.16. Rotation des Windsystems gegenüber dem erdfesten System	46
3.17. Bestimmung des Bahnazimuts χ_{soll} im erdfesten System	46
3.18. Komponenten der Bahngeschwindigkeit \mathbf{v}_k	47
3.19. Unstetigkeiten beim Überschreiten der Abszisse durch Verwendung einer unstetigen Beschreibung der Ablage	53
3.20. Einführung des Geodätenkoordinatensystems (Index δ)	54
3.21. Ergebnis der Verwendung einer stetigen Beschreibung der Ablage	55

Abbildungsverzeichnis

3.22. Motivation zur Verwendung eines nichtlinearen Regelgesetzes für die Pseudosteuerung u_δ	58
3.23. Ergebnis vorangehender Veröffentlichungen zu Bahnazimut und Azimutänderung des Regelkreises [28, 27]	60
3.24. Ergebnis der E/A-Linearisierung mit $k_\delta = 0.85$	61
3.25. Ergebnis der Weiterentwicklung von Bahnazimut und Azimutänderung des Regelkreises	62
4.1. Prinzip der Simulation mit kinematischem Ersatzmodell	64
4.2. Simulation mit kinematischem Ersatzmodell: Projektion in Tangentialebene	66
4.3. Simulation mit kinematischem Ersatzmodell: Projektion in x_E/z_E -Ebene	66
4.4. Simulation mit kinematischem Ersatzmodell: Projektion in y_E/z_E -Ebene	67
4.5. Simulation mit kinematischem Ersatzmodell: Komponenten des Bahnazimuts χ_τ in der Tangentialebene	67
4.6. Simulation mit kinematischem Ersatzmodell und $\Delta t = 0.05$ s	69
4.7. Simulation mit kinematischem Ersatzmodell und $\Delta t = 0.01$ s	69
4.8. SiL-Simulation: Projektion in Tangentialebene	72
4.9. SiL-Simulation: Projektion in y_τ/z_τ -Ebene	72
4.10. SiL-Simulation: Bahnazimut und Azimutänderung des Regelkreises . . .	73
4.11. SiL-Simulation: Bahnazimut und Azimutänderung des Regelkreises . . .	73

Tabellenverzeichnis

4.1. Parameter der Seil-Simulation	63
4.2. Parameter der kinematischen Simulation	65
4.3. Parameter für SiL-Simulation	70

Nomenklatur

Abkürzungen

AWE	Airborne Wind Energy
E/A	Eingang/Ausgang
GG	Ground-Generation (Pumping-Mode)
HiL	Hardware-In-The-Loop
OG	Onboard-Generation (Drag-Mode)
SiL	Software-In-The-Loop

Lateinische Buchstaben

\mathcal{P}	(kg)	Punktmasse
\mathcal{S}	(m)	Segment
\mathbf{b}	(–)	Vektor von $\mathbf{\Gamma}(s^*)$ nach \mathbf{p}_\perp entlang der Geodäte (Geodätenvektor)
\mathbf{c}	(–)	Vektor von \mathbf{p}_\perp nach $\mathbf{\Gamma}(s^*)$ entlang der Geodäte (Geodätenvektor)
\mathbf{F}	(–)	Kraftvektor
\mathbf{k}	(–)	Rotationsvektor in der Rotationsformel nach Rodrigues
\mathbf{p}	(–)	Positionsvektor
\mathbf{R}	(–)	Residuum
\mathbf{S}	(–)	Zustandsvektor eines Seilsegments
\mathbf{t}	(–)	Tangente an die Sollbahn
\mathbf{v}	(–)	Geschwindigkeitsvektor
\mathbf{y}	(–)	Zustandsvektor des Seilmodells
A	(m ²)	Querschnittsfläche des Seils
a	(–)	Ausdehnung der Lemniskate auf der Abszisse
b	(m)	Spannweite
C	(–)	Beiwert
c	(Ns/m)	Dämpfungskoeffizient
d	(m)	Durchmesser des Seils
E	(MPa)	Elastizitätsmodul

Tabellenverzeichnis

F	(N)	Kraft
g	(m/s ²)	Erdbeschleunigung
k	(N/m)	Federsteifigkeit
k	(–)	Verstärkungsfaktor der Pseudosteuerung
L	(m)	Länge des Seils
m	(kg)	Masse
P	(W)	Leistung
S	(m ²)	Flügelfläche
s	(rad)	Bahnparameter
t	(–)	Zeit
u	(–)	Steuerung
z	(–)	Anzahl der Segmente des Seilmodells
P, P'	(–)	Punkt und Bildpunkt bei der Parallelprojektion

Griechische Buchstaben

χ	(rad)	Bahnazimut
δ	(rad)	Länge der Geodäte zwischen Sollbahn und \mathbf{p}_\perp
ϵ	(rad)	Elevation der Sollbahn
γ	(rad)	Bahnneigungswinkel
κ	(rad)	Drehwinkel
\mathcal{E}	(–)	Toleranzwert für das Abbruchkriterium beim Auffinden von s^*
μ	(rad)	Drehwinkel um die x -Achse
ν	(–)	Betrag des Geschwindigkeitsvektors
ρ	(kg/m ³)	Dichte
σ	(–)	Zeigt die Position links- oder rechtsseitig der Sollbahn an
σ	(MPa)	Normalspannung
θ	(rad)	Orientierung von $\dot{\mathbf{p}}_\perp$ gegenüber der Geodäte
Υ	(–)	Funktion zur Beschreibung von Azimut und Deklination
ε	(–)	Dehnung
Γ	(–)	Sollbahn im Windkoordinatensystem
ω	(rad/s)	Winkelgeschwindigkeit
φ	(–)	Ausgangsvektor der Bahnführung
Ξ	(–)	Transformation von Kugel- in kartesische Koordinaten
ξ	(rad)	Windrichtung

Indizes

$(\cdot)'$	(—)	Differenziation nach dem Bahnparameter s
$(\cdot)^*$	(—)	Bezogen auf kürzeste Geodäte zwischen Sollbahn und \mathbf{p}_\perp
$(\cdot)^{-1}$	(—)	Umkehrung einer Funktion oder Transformation
$(\cdot)^\star$	(—)	Definitionen vorausgehender Arbeiten [20, 28, 27]
$(\cdot)^\spadesuit$	(—)	Ergebnisse der E/A-Linearisierung
$(\cdot)_0$	(—)	Bezogen auf den nominellen Zustand oder Zeitpunkt $t = 0$
$(\cdot)_\infty$	(—)	Bezogen auf die freie Anströmung
$(\cdot)_\mathcal{S}$	(—)	Bezogen auf ein Seilsegment
$(\cdot)_A$	(—)	Bezogen auf den Auftrieb
$(\cdot)_a$	(—)	Aerodynamisch
$(\cdot)_d$	(—)	Bezogen auf die Dämpfungskraft
$(\cdot)_i$	(—)	Zähler für Punktmassen und Segmente des Seilmodells
$(\cdot)_k$	(—)	Bezogen auf die Federkraft
$(\cdot)_n$	(—)	Zähler in der numerischen Iteration
$(\cdot)_r$	(—)	Radiale Richtung
$(\cdot)_t$	(—)	Zur Tangente an die Sollbahn gehörend
$(\cdot)_W$	(—)	Bezogen auf den Luftwiderstand
$(\cdot)_w$	(—)	Bezogen auf den Wind
$(\cdot)_0$	(—)	Vorsteuerung aus der Geometrie der Sollbahn
$(\cdot)_\Delta$	(—)	Folgeregelung, um das Fluggerät auf die Sollbahn zu führen
$(\cdot)_\delta$	(—)	Zu δ gehörend
$(\cdot)_\Gamma$	(—)	Zur Sollbahn gehörend
$(\cdot)_\perp$	(—)	Projektion eines Vektors auf die Oberfläche der Einheitskugel
$(\cdot)_\tau$	(—)	Bezogen auf die Tangentialeben der Einheitskugel
$(\cdot)_{krit}$	(—)	Zeigt einen kritischen Wert an
$(\cdot)_{max}$	(—)	Maximum eines Werts
$(\cdot)_p$	(—)	Bezogen auf die Position des Fluggeräts
$(\cdot)_{soll}$	(—)	Bezeichnet eine Sollgröße
$(\cdot)_{ws}$	(—)	Bezogen auf die Anströmgeschwindigkeit
$\bar{(\cdot)}$	(—)	Bezogen auf ungefesselten Flug
$\dot{(\cdot)}$	(—)	Differenziation nach der Zeit
$\mathbf{v}(\cdot)$	(—)	Projektion auf Vektor \mathbf{v}
$\tilde{(\cdot)}$	(—)	Abweichender Wert aufgrund der Gewichtskraft
$\underline{(\cdot)}$	(—)	Gibt einen Durchschnittswert an

Koordinatensysteme und Einheitsvektoren

λ, ϕ	(rad)	Kugelkoordinatensystem aus Längengrad und Breitengrad
$\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z$	(–)	Kanonische Einheitsvektoren
$x_\delta, y_\delta, z_\delta$	(–)	Geodätenkoordinatensystem
x_E, y_E, z_E	(–)	Erdfestes Koordinatensystem auf der Erdoberfläche
x_w, y_w, z_w	(–)	Windkoordinatensystem
$x_{\mathcal{S}_i}, y_{\mathcal{S}_i}, z_{\mathcal{S}_i}$	(–)	Koordinatensystem des Segments \mathcal{S}_i
x_τ, y_τ, z_τ	(–)	Koordinatensystem in der Tangentialebene
$x_{\underline{k}}, y_{\underline{k}}, z_{\underline{k}}$	(–)	Rotiertes Bahnkoordinatensystem
x_f, y_f, z_f	(–)	Körperfestes Koordinatensystem
x_g, y_g, z_g	(–)	Geodätisches System
x_k, y_k, z_k	(–)	Bahnkoordinatensystem

1. Einleitung

Höhenwindenergie (*Airborne Wind Energy* (AWE)) beschreibt ein technisches Konzept, um mithilfe von Fluggeräten, den Flugwindkraftwerken, dem Wind einen Teil seiner Energie zu entziehen und technisch nutzbar zu machen. Wissenschaft und Industrie erforschen hierzu viele unterschiedliche Technologien [4, 30]. Die vorliegende Arbeit beschränkt sich darunter auf die Klasse der gefesselten und schnell-fliegenden Flugwindkraftwerke, die Fluggeschwindigkeiten bis zu 80 m/s erreichen [8]. Verglichen mit anderen AWE-Systemen, erzeugen diese am meisten Leistung, benötigen aber auch einen hohen Automatisierungsgrad, um sinnvoll betrieben werden zu können. Dabei ist es unerheblich, ob es sich um flexible - über Steuerleinen kontrollierte - Fluggeräte handelt, die mit Systemen aus dem *Kitesurfing* verwandt sind, oder Starrflügler verwendet werden, die üblicherweise über Steuerflächen am Fluggerät selbst kontrolliert werden und oft konventionellen Segelflugzeugen gleichen. Flexible Fluggeräte sind wissenschaftlich am intensivsten erforscht. Starrflügler rücken momentan aber immer mehr in den Fokus von Wirtschaft und Wissenschaft, da sie besser skalierbar sind und eine höhere Effizienz besitzen [28].

Im Vergleich zu konventionellen Windkraftanlagen (mit Turm und Rotor), können AWE-Anlagen in Höhen betrieben werden, in denen der Wind als Energiequelle konstanter und stärker ist [1]. Zudem sind immense Materialeinsparungen und ein hohes Verhältnis von Leistung zu Gewicht möglich [6]. AWE stellt damit eine Sparte der erneuerbaren Energien dar, die das Potential besitzt, den weltweiten Energiebedarf nachhaltig und mit überschaubaren wirtschaftlichen Ressourcen zu decken. Diese Erkenntnis führte über die letzten Jahre zu einem stetigen Interesse aus der Wissenschaft (vgl. Abb. 1.1).

Von der Schwierigkeit der praktischen Umsetzung zeugt die Insolvenz der Firma SkySails GmbH im Jahr 2016, die im Bereich der Zugdrachen für Containerschiffe einen sehr hohen Technologiereifegrad demonstrieren konnte. Aber auch der Rückzug von Alphabet Inc.¹ als Investor der Firma Makani Technologies LLC im Frühjahr 2020, die als größte und erfolgreichste Unternehmung im Bereich AWE galt. Daneben stellen Studien

¹Dachgesellschaft von Google LLC mit vielen risikoreichen Investments

1. Einleitung

der Europäischen Union die langfristige Wettbewerbsfähigkeit bei den Kosten in Frage und benennen einen geringen allgemeinen Technologiereifegrad, bescheinigen aber auch ausreichend Potential um die Technologie weiter zu erforschen [7].

Diese Überzeugung teilen auch rund 15 AWE-Unternehmen weltweit, die neben wissenschaftlichen Gruppen weiterhin an einer erfolgreichen Markteinführung arbeiten. Als eine der größten technischen Herausforderungen gilt dabei die Realisierung des autonomen Betriebs mit den Teildisziplinen Bahnführung, Navigation und Regelung. Ersteres stellt den Kernpunkt der vorliegenden Arbeit dar.

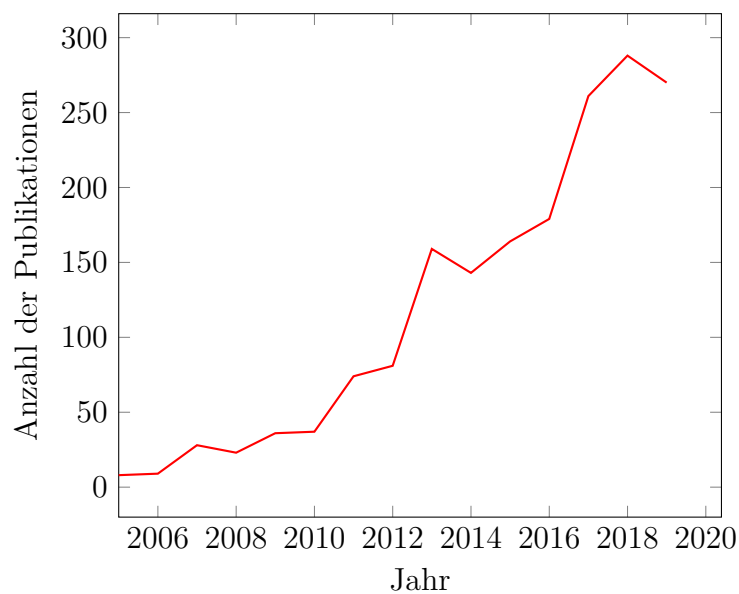


Abbildung 1.1.: Google Scholar Suchergebnisse für „Airborne Wind Energy“, „High Altitude Wind Power“ und „Kite Power“ - kumuliert pro Jahr [15]

1.1. Einleitung zur Höhenwindenergie

Konventionell werden schnell-fliegende gefesselte Flugwindkraftwerke genutzt, um elektrische Energie zu erzeugen. Dabei sind zwei Kategorien zu unterscheiden. Zum einen kann die entstehende Seilkraft genutzt werden, um eine Winde abzuwickeln und durch das entstehende Drehmoment einen Generator anzutreiben. Dies bedingt eine zyklische Änderung des geflogenen Orbits, da das Fluggerät nach dem Abwickeln der maximalen Seillänge wieder auf einen niedrigeren Orbit fliegen muss. Der Prozess kann dann von Neuem beginnen. Diese Kategorie wird einschlägig als *Pumping-Mode* oder *Ground-Generation* (GG) bezeichnet. Zum anderen kann Energie auch direkt an Bord des Fluggeräts über Windturbinen erzeugt und über das elektrisch leitende Seil zum Boden übertragen werden. Hier kann der geflogene Orbit als konstant betrachtet werden. Diese Kategorie wird mit *Drag-Mode* oder *Onboard-Generation* (OG) bezeichnet.

Im Folgenden werden technische Grundlagen erläutert, die für das Verständnis der vorliegenden Arbeit notwendig sind. Der Umfang ist dabei knapp gehalten und für weitere Informationen wird auf die ausführliche Beschreibung anderer Veröffentlichungen verwiesen [6]. In der vorliegenden Arbeit wird ausschließlich die euklidische Norm $\|(\cdot)\|_2$ verwendet und entsprechend mit $\|(\cdot)\|$ abgekürzt. Vektoren und Matrizen werden zur Unterscheidung von Skalaren **fett** geschrieben. Die Leistung P_w , die ein Fluggerät dem Wind entziehen kann berechnet sich zu:

$$P_w = \|\mathbf{v}_w\| \|\mathbf{F}_a\| \cos(\tilde{\epsilon}) \quad (1.1)$$

mit der Windgeschwindigkeit \mathbf{v}_w , der aerodynamischen Kraft \mathbf{F}_a und dem Winkel zwischen diesen beiden Vektoren $\tilde{\epsilon}$. In Abb. 1.2 sind die geometrischen Zusammenhänge verdeutlicht. Die Elevation ϵ ist ebenfalls eingezeichnet und dient der Beschreibung der Flughöhe in Kugelkoordinaten. Sie ist bei allen derzeit technisch realisierbaren Systemen größer null. Ist das Fluggerät masselos, dann ergibt sich $\tilde{\epsilon} = \epsilon$. Tatsächlich ist bei schnell-fliegenden Flugwindkraftwerken die Gewichtskraft gegenüber der aerodynamischen Kraft vernachlässigbar, weshalb in sehr guter Näherung:

$$P_w \approx \|\mathbf{v}_w\| \|\mathbf{F}_a\| \cos(\epsilon) \quad (1.2)$$

geschrieben werden kann. Es wird deutlich, dass sich die maximal mögliche Energieerzeugung mit zunehmender Elevation verringert. In Anlehnung an einen ähnlichen Term

1. Einleitung

im Bereich der Solarenergie wird dieser Verlust einschlägig als Kosinusverlust bezeichnet. Technisch optimierte AWE-Systeme fliegen üblicherweise bei $\epsilon < 45^\circ$ [6], was einem Verlust $< 30\%$ entspricht.

Unter idealen Bedingungen kann die Abschätzung:

$$P_w = \frac{2}{27} \rho_\infty S \|v_w\|^3 C_A \left(\frac{C_A}{C_W} \right)^2 \quad (1.3)$$

für die erzeugte Leistung eines gefesselten Fluggeräts mit der Luftdichte ρ_∞ , der Flügel­fläche S und den Auftriebs- bzw. Widerstandsbeiwerten C_A, C_W angegeben werden [26]. Diese Abschätzung gilt für GG und OG-Systeme gleichermaßen und es wird die Bedeutung einer guten Gleitzahl deutlich, die in Form des letzten Faktors quadratisch in die Gleichung eingeht. Da Starrflügler üblicherweise eine höhere Gleitzahl als flexible Drachen aufweisen, unterstreicht dies die anfangs aufgestellte These der höheren Effizienz. Der Widerstandsbeiwert im Nenner unterscheidet sich jedoch deutlich von ungefesselten Fluggeräten, da dieser vom Luftwiderstand des Seils dominiert wird. Eine qualitativ hochwertige Modellierung des Seils ist deshalb für die Entwicklung eines AWE-Systems unerlässlich. In Kap. 2 wird die Entwicklung eines entsprechenden Modells vorgestellt.

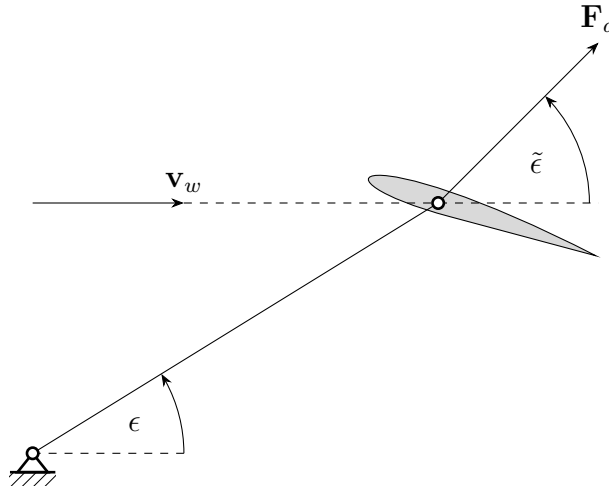


Abbildung 1.2.: Einfluss der Elevation auf die Energieerzeugung

1.2. Stand der Technik

Seilmodelle im Bereich AWE besitzen viele Parallelen zur Modellierung von *Space Tethers* [25], für die effiziente Berechnungsmethoden zur Verfügung stehen [9]. Vermehrt wird doch auf vereinfachte starre Stabmodelle zurückgegriffen, um das Seilmodell besser in bestehende Simulationen implementieren zu können [31]. Allen Ansätzen gemeinsam ist das Problem der hinreichend genauen Modellierung des Luftwiderstands [8].

Bei der Erforschung des autonomen Betriebs fällt der Großteil der Veröffentlichung in den Bereich der flexiblen Fluggeräten. Starrflügler sind zum gegenwärtigen Stand weniger repräsentiert. Durch die Herausforderungen der sehr dynamischen Flugmanöver werden häufig nichtlineare und fortschrittliche Regelungsmethoden untersucht, wie *Data-Driven-Learning-Control* [12], *Model-Predictive-Control* [33], Lyapunov-Regelung [22], und Ein-/Ausgangslinearisierung [23]. Aber auch lineare Ansätze kommen zum Einsatz [10, 32]. Viel Forschungsaktivität fällt zudem in den Bereich der Optimalsteuerung [19, 24], mit dem Ziel die Energieausbeute zu maximieren.

Die dieser Arbeit zugrunde liegenden Veröffentlichungen sind zu Beginn der jeweiligen Kapitel benannt.

1.3. Ziel der Arbeit

Am Institut für Flugmechanik und Flugregelung (iFR) der Universität Stuttgart wird eine Simulationsumgebung für Flugwindkraftwerke erarbeitet. Hierfür soll in der vorliegenden Arbeit ein Seilmodell und eine Bahnführung entwickelt werden. Beide sind möglichst allgemeingültig für die Verwendung mit flexiblen Drachen und Starrflüglern zu entwickeln und sollen in bestehende Simulationsumgebungen integrierbar sein. Hierfür muss insbesondere die Bahnführung die üblichen Schnittstellen zu konventionellen Autopiloten zur Verfügung stellen. Der Fokus beim Seilmodell liegt auf der Abbildung aller relevanten Effekte und einer effizienten Lösbarkeit der Differenzialgleichungssysteme.

1.4. Methoden

Für die Entwicklung von Seilmodell und Bahnführung eignet sich generell ein *Bottom-Up* Vorgehen, da viele Komponenten eigenständig entwickelt und getestet werden können. So kann das Seilmodell zunächst ohne äußere Anregung durch das Fluggerät auf Plausibilität

1. Einleitung

überprüft werden, um es dann sukzessive in eine bestehende Simulation zu integrieren. Die Entwicklung einer Bahnführung erlaubt allgemein eine anschauliche grafische Validierung der geometrischen Zusammenhänge der Komponenten, bevor diese miteinander verknüpft werden. Zudem kann das gesamte Konzept zunächst problemlos mit statischen und zeitunabhängigen Werten für den Zustand des Fluggeräts getestet werden. Im Anschluss können dann zeitabhängige Werte durch ein kinematisches Modell, oder weiterführend durch ein Starrkörpermodell, übergeben werden. Bestehende Simulationsumgebungen sind in MATLAB SIMULINK[®] implementiert und erlauben eine einfache Generierung von flugfähigen Autopiloten. Das Seilmodell und die Bahnführung werden entsprechend in dieser Softwareumgebung entwickelt. Auf Programmbibliotheken außerhalb der MATLAB[®] Hochsprache wird dabei nicht zurückgegriffen, was eine einfache Portierung in andere Programmierumgebungen ermöglicht.

2. Seilmodell

Auf das Fluggerät wirkt eine Seilkraft aufgrund der Fesselung, die das Flugverhalten wesentlich beeinflusst. Die Kenntnis dieser Kraft ist für die Auslegung des Autopiloten entscheidend. In diesem Kapitel wird ein Modell für Seile vorgestellt, das auch den Luftwiderstand bei der Bewegung berücksichtigt. Die Basis zu diesen Ausführungen sind Veröffentlichungen im Bereich *Space Tether* [25] und AWE [13].

2.1. Modellbildung

Das vorgestellte Seilmodell ist grundsätzlich sehr einfach gehalten und berücksichtigt lediglich die relevantesten Mechanismen. Wenn Modellierungsfehler qualitativ oder quantitativ bekannt sind, so wird in den einzelnen Kapiteln gesondert darauf eingegangen.

2.1.1. Strukturmodellierung

Das Seil wird in $z \in \mathbb{N}$ gleichförmige Segmente \mathcal{S}_i mit $i \in \mathbb{N} \leq z$ diskretisiert, die mit den Segmentkoordinatensystemen (Index \mathcal{S}_i) geometrisch beschrieben werden können. Dabei zeigt die $x_{\mathcal{S}_i}$ -Achse entlang des Segments \mathcal{S}_i in Richtung des Segments \mathcal{S}_{i+1} . Die Definition des zugehörigen Basisvektors wird nachfolgend in Gl. 2.4 angegeben. Für die weiteren Herleitungen genügt eine eindimensionale Beschreibung des Segments, weshalb die anderen Achsen nicht definiert werden. Jedes Segment ist mit einem Momentengelenk an zwei Punktmassen \mathcal{P}_i und \mathcal{P}_{i+1} angebunden, wodurch keine Drehmomente übertragen werden. Diese Vereinfachung kann getroffen werden, da die Biegesteifigkeit aufgrund des kleinen Seildurchmessers vernachlässigbar ist. Die erste Punktmasse \mathcal{P}_1 entspricht einem Festlager und ist entgegen der Bezeichnung masselos. Die letzte Punktmasse $\mathcal{P}_p = \mathcal{P}_{z+1}$ ist ebenfalls masselos und entspricht der Lagerung des Seils am Fluggerät. Alle übrigen

2. Seilmodell

Punktmassen nehmen entsprechend:

$$\mathcal{P}_i = \frac{z m_{\mathcal{S}}}{z - 1} \quad (2.1)$$

gleichförmig die Masse der Seilsegmente $m_{\mathcal{S}}$ auf. Das Prinzip ist in Abb. 2.1 für $z = 3$ verdeutlicht.

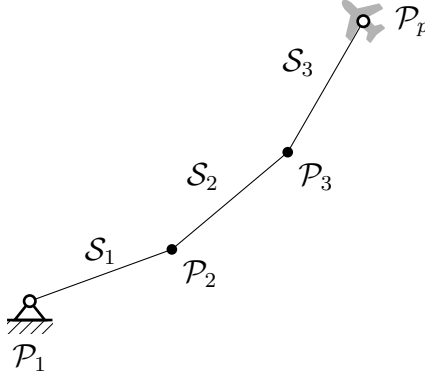


Abbildung 2.1.: Prinzip des Seilmodells mit Diskretisierung in drei Segmente

Jeder Punktmasse werden die Zustände: Position $\mathbf{p}_i \in \mathbb{R}^3$ und Geschwindigkeit $\mathbf{v}_i \in \mathbb{R}^3$ zugeordnet. Das Segment \mathcal{S}_i wird mit dem dem Vektor $\mathbf{S}_i \in \mathbb{R}^3$:

$$\mathbf{S}_i = \mathbf{p}_{i+1} - \mathbf{p}_i \quad (2.2)$$

beschrieben und entspricht dessen Länge:

$$\mathcal{S}_i = \|\mathbf{S}_i\| . \quad (2.3)$$

Der zugehörige Basisvektor $\mathbf{e}_{\mathcal{S}_i}$ des Segmentkoordinatensystems berechnet sich zu:

$$\mathbf{e}_{\mathcal{S}_i} = \frac{\mathbf{S}_i}{\|\mathbf{S}_i\|} \quad (2.4)$$

und ist im Inertialsystem dargestellt (Indizierung entfällt). Auf die Kennzeichnung einer Koordinatenrichtung wird verzichtet, da das modellierte Seil eindimensional ist. Jedes Segment wird als Kelvin-Voigt Körper modelliert, was einer Parallelschaltung von einer Feder mit der Federsteifigkeit k und einem Dämpfer mit dem Dämpfungskoeffizienten

c entspricht. Dies erlaubt die Berücksichtigung der axialen Steifigkeit und der viskosen Dämpfung des Seils. Das Prinzip ist in Abb. 2.2 für das Segment \mathcal{S}_2 veranschaulicht. Bei einer äußeren Belastung werden Federkräfte und Dämpfungskräfte induziert, die Teilkomponenten der gesuchten Seilkraft sind.

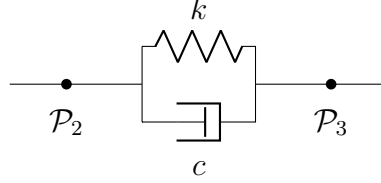


Abbildung 2.2.: Kelvin-Voigt Körper des Segments \mathcal{S}_2

2.1.2. Federkraft

Die nominelle Länge eines Segments \mathcal{S}_0 ergibt sich aus der Gesamtlänge des Seils L und der Anzahl der Segmente z zu:

$$\mathcal{S}_0 = \frac{L}{z}. \quad (2.5)$$

Ist das Segment unbelastet, so entspricht diese Länge der Definition in Gl. (2.3). Erfährt das Segment jedoch eine Dehnung ε_i :

$$\varepsilon_i = \frac{\mathcal{S}_i - \mathcal{S}_0}{\mathcal{S}_0} \quad (2.6)$$

durch eine äußere Belastung, so wird die Normalspannung σ_i induziert. Nach dem Gesetz von Hooke gilt allgemein:

$$\sigma_i = E \varepsilon_i \quad (2.7)$$

mit dem Elastizitätsmodul E des Seils. Die Normalspannung kann mit der Querschnittsfläche A des Seils gemäß:

$$F_{k,i} = \sigma_i A \quad (2.8)$$

in eine Normalkraft umgerechnet werden, die der gesuchten Federkraft F_k entspricht. Die Querschnittsfläche wird als konstant angenommen und lokale Einschnürungen vernachlässigt. Setzt man Gl. (2.6) und (2.7) in (2.8) ein, so kann:

$$F_{k,i} = \varepsilon_i E A \quad (2.9)$$

2. Seilmodell

zusammengefasst werden. Schreibt man die obige Gleichung gemäß:

$$F_{k,i} = \underbrace{\left(\frac{EA}{\mathcal{S}_0}\right)}_k (\mathcal{S}_i - \mathcal{S}_0) \quad (2.10)$$

um, so kann der erste Faktor als Federsteifigkeit k und der zweite Faktor als Auslenkung der Feder interpretiert werden. Die vektorielle Form ergibt sich aus der Multiplikation des Basisvektors des Segments mit dem zuvor berechneten Skalar:

$$\mathbf{F}_{k,i} = \varepsilon_i EA \mathbf{e}_{\mathcal{S}_i}. \quad (2.11)$$

Dieser Kraftvektor greift durch die Definition des Einheitsvektors an der Punktmasse \mathcal{P}_i an. An der Punktmasse \mathcal{P}_{i+1} entsteht eine betragsmäßig gleiche, aber entgegen gerichtete Kraft. Dies wird bei der Aufprägung der Kräfte auf die Punktmassen in Abschn. 2.1.5 entsprechend berücksichtigt. Da Seile eine geringe Drucksteifigkeit besitzen, wird außerdem eine Fallunterscheidung gemäß:

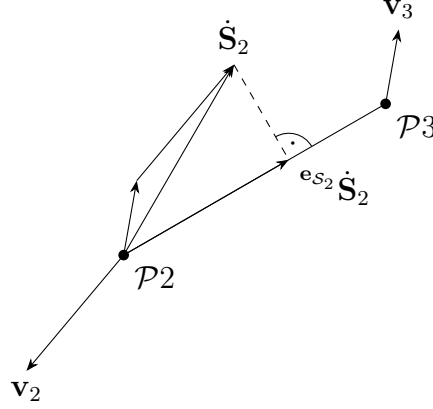
$$\mathbf{F}_{k,i} = \begin{cases} \mathbf{F}_{k,i}, & \text{für } \varepsilon_i > 0 \\ 0.1 \mathbf{F}_{k,i}, & \text{sonst} \end{cases} \quad (2.12)$$

angewandt. Bei der berücksichtigten Drucksteifigkeit handelt es sich um einen groben Schätzwert. Dieser ist für die Qualität der Simulation allerdings von großer Bedeutung, da das Modell bei vernachlässigter Drucksteifigkeit zur axialen Oszillation neigt.

2.1.3. Dämpfungskraft

Während die Federkraft generell von der Längenänderung des Seils abhängt, bestimmt sich die Dämpfungskraft eines Segments aus der Differenziation der Längenänderung nach der Zeit. Diese kann als die Komponente der Relativgeschwindigkeit der angebundenen Punktmassen in Richtung des Segments interpretiert werden. Die geometrischen Zusammenhänge sind in Abb. 2.3 für das Segment \mathcal{S}_2 dargestellt. Die Relativgeschwindigkeit der angebundenen Punktmassen berechnet sich analog zu Gl. (2.2) mit:

$$\dot{\mathbf{S}}_i = \mathbf{v}_{i+1} - \mathbf{v}_i. \quad (2.13)$$

Abbildung 2.3.: Projektion der Relativgeschwindigkeit der Punktmassen auf S_2

Der hochgestellte Punkt (Newton-Notation) indiziert in der vorliegenden Arbeit die Ableitung nach der Zeit. Die Komponente von $\dot{\mathbf{S}}_i$ in Richtung des Segments berechnet sich aus der Projektion auf den Basisvektor des Segments. Allgemein wird die Projektion eines Vektors \mathbf{a} auf einen Vektor \mathbf{b} in der vorliegenden Arbeit mit ${}^b\mathbf{a}$ gekennzeichnet. Aus der Definition des Skalarprodukts ergibt sich damit für die Dämpfungskraft \mathbf{F}_d :

$$\mathbf{F}_{d,i} = c {}^{\mathbf{e}_{S_i}}\dot{\mathbf{S}}_i = c (\dot{\mathbf{S}}_i^T \mathbf{e}_{S_i}) \mathbf{e}_{S_i}. \quad (2.14)$$

Der Dämpfungskoeffizient c nimmt analog zur Federsteifigkeit (vgl. Gl. (2.10)) mit zunehmender Länge vom nominellen Wert c_0 ab, der auf die nominelle Länge S_0 bezogen ist. Daraus folgt für die Bestimmung von c :

$$c = \frac{c_0}{S_0}. \quad (2.15)$$

Analog zur Federkraft besitzen Seile für Druckbelastungen eine abweichende Dämpfungskraft, weshalb die Fallunterscheidung:

$$\mathbf{F}_{d,i} = \begin{cases} \mathbf{F}_{d,i}, & \text{für } \dot{\mathbf{S}}_i^T \mathbf{e}_{S_i} > 0 \\ 0.1 \mathbf{F}_{d,i}, & \text{sonst} \end{cases} \quad (2.16)$$

angewandt wird. Auf den Vorfaktor der reduzierten Dämpfungskraft wird in den Simulationsergebnissen in Abschn. 4.2.2 gesondert eingegangen.

2.1.4. Luftwiderstand

Die Abbildung der relevanten Effekte bei der Modellierung des Luftwiderstands gestaltet sich als besonders schwierig. Vernachlässigt man die Änderung des Querschnitts aufgrund der Dehnung, so kann das Seil in guter Näherung als Zylinder mit konstantem kreisförmigem Querschnitt betrachtet werden. Der Hauptanteil der Luftkraft setzt sich bei stationärer Umströmung im niederen Geschwindigkeitsbereich aus dem Luftwiderstand zusammen, der durch senkrechte Anströmung eines Segments induziert wird [13]. Der korrelierte Widerstandsbeiwert ist abhängig von der Reynoldszahl und liegt für den Betriebsbereich der Flugwindkraftwerke im Bereich von $0.98 - 1.8$ [8]. Instationäre Effekte führen jedoch zu großen Modellierungsfehlern bei dieser Approximation. So können wirbel-induzierte Vibrationen den nominellen Luftwiderstand um bis zu 300 % erhöhen [8]. Für erste Auslegungen kann das stark vereinfachte Modell allerdings brauchbare Anhaltspunkte liefern, weshalb instationäre Effekte nachfolgend vernachlässigt werden.

Der gemittelte Luftwiderstand wird für jedes Segment berechnet und dann zu gleichen Teilen auf die angrenzenden Punktmassen aufgebracht. Die Durchschnittsgeschwindigkeit eines Segments $\underline{\dot{S}}$ berechnet sich zu:

$$\underline{\dot{S}} = \frac{\mathbf{v}_{i+1} + \mathbf{v}_i}{2}. \quad (2.17)$$

An jeder Punktmasse greift die Windgeschwindigkeit $\mathbf{v}_{w,i}$ an. Die Durchschnittsgeschwindigkeit des Windes am Segment \mathcal{S}_i wird mit $\mathbf{v}_{w,\mathcal{S}_i}$ bezeichnet und ergibt sich aus den Windgeschwindigkeiten an den Punktmassen \mathcal{P}_{i+1} und \mathcal{P}_i zu:

$$\mathbf{v}_{w,\mathcal{S}_i} = \frac{\mathbf{v}_{w,i+1} + \mathbf{v}_{w,i}}{2}. \quad (2.18)$$

Daraus kann die Anströmgeschwindigkeit am Segment bestimmt werden:

$$\mathbf{v}_{ws,\mathcal{S}_i} = \mathbf{v}_{w,\mathcal{S}_i} - \underline{\dot{S}}. \quad (2.19)$$

Der so berechnete Vektor hat im Allgemeinen eine beliebige Orientierung. Da aber lediglich der Luftwiderstand aus der Anströmung normal zum Segment betrachtet wird, ist die Komponente dieses Vektors von Interesse, die senkrecht auf dem Segment steht. Für die Berechnung wird die Projektion von $\mathbf{v}_{ws,\mathcal{S}_i}$ auf den Basisvektor des Segments $\mathbf{e}_{\mathcal{S}_i}$ von

$\mathbf{v}_{ws,\mathcal{S}_i}$ subtrahiert und mit $\mathbf{v}_{ws,\mathcal{S}_i,\perp}$ bezeichnet:

$$\mathbf{v}_{ws,\mathcal{S}_i,\perp} = \mathbf{v}_{ws,\mathcal{S}_i} - (\mathbf{v}_{ws,\mathcal{S}_i}^\top \mathbf{e}_{\mathcal{S}_i}) \mathbf{e}_{\mathcal{S}_i}. \quad (2.20)$$

Die Luftwiderstandskraft $\mathbf{F}_{W,i}$ in vektorieller Form ergibt sich schließlich aus:

$$\mathbf{F}_{W,i} = \frac{\rho_\infty}{2} \|\mathbf{v}_{ws,\mathcal{S}_i,\perp}\| \mathbf{v}_{ws,\mathcal{S}_i,\perp} C_W \mathcal{S}_i d \quad (2.21)$$

mit der lokalen Luftdichte ρ_∞ , dem Widerstandsbeiwert C_W und dem Durchmesser des Seils d . Die Luftdichte kann im Allgemeinen nicht als konstant angenommen werden. Besonders bei Systemen mit großer Flughöhe beeinflusst diese den Luftwiderstand signifikant.

2.1.5. Aufprägung der Kräfte

Die berechneten nicht-gravitativen Kräfte in den Abschnitten 2.1.2 - 2.1.4 für ein Segment \mathcal{S}_i werden nun auf die angrenzenden Punktmassen \mathcal{P}_i und \mathcal{P}_{i+1} aufgeprägt. Dabei sind für Federkraft \mathbf{F}_k und Dämpfungskraft \mathbf{F}_d die Vorzeichen zu beachten, da diese jeweils für die Punktmasse i hergeleitet wurden und entsprechend für $i + 1$ negiert werden müssen. Es ergibt sich für die Kräfte auf die Punktmassen \mathbf{F}_i :

$$\mathbf{F}_i = \mathbf{F}_{k,i} + \mathbf{F}_{d,i} + \frac{1}{2} \mathbf{F}_{W,i} \quad (2.22)$$

und für \mathbf{F}_{i+1} :

$$\mathbf{F}_{i+1} = -\mathbf{F}_{k,i} - \mathbf{F}_{d,i} + \frac{1}{2} \mathbf{F}_{W,i}. \quad (2.23)$$

Die Kraft aus dem Luftwiderstand wird, wie in Abschn. 2.1.4 beschrieben, zu gleichen Teilen auf beide angrenzenden Punktmassen aufgeprägt.

Der Berechnung der Kraft auf die Punktmasse \mathcal{P}_z ist besondere Beachtung zu schenken, da das Segment \mathcal{S}_z am Fluggerät angebracht ist und Position und Geschwindigkeit von \mathcal{P}_p entsprechend vom Fluggerät aufgeprägt werden (vgl. Abb. 2.1). Die berechnete Kraft $-\mathbf{F}_z$, entspricht damit der Seilkraft am Momentengelenk des Fluggeräts.

2. Seilmodell

2.1.6. Änderung der nominellen Seillänge

Bisher wurde die nominelle Länge des Seilsegments \mathcal{S}_0 als konstant betrachtet. Das Auf- oder Abwickeln der Winde führt aber zu einer Änderung der Seillänge nach der Zeit. Dies induziert Änderungen in allen bisher berechneten Kräften und soll in der Modellbildung entsprechend berücksichtigt werden. Die Längenänderung des Seils nach der Zeit wird mit $\|\mathbf{v}_{k,r}\|$ bezeichnet, da diese eine radiale Komponente der Bahngeschwindigkeit \mathbf{v}_k darstellt. In Abschn. 3.4.1 auf S. 45 wird dies ausführlich erklärt und hier als bekannt vorausgesetzt. Die nominelle Segmentlänge zu Beginn jedes Zeitschritts $n + 1$ ergibt sich zu:

$$\mathcal{S}_{0,n+1} = \mathcal{S}_{0,n} + \frac{\|\mathbf{v}_{k,r}\| \Delta t}{z} \quad (2.24)$$

mit der Zeitschrittweite Δt . Eine veränderte Seillänge induziert eine veränderte Masse des Seils. Um diesen Effekt abzubilden, könnten Punktmassen hinzugefügt oder entfernt werden. Von diesem Vorgehen wird allerdings abgesehen, da dies zu Unstetigkeiten in der Berechnung führen kann [13]. Stattdessen wird die Masse der Segmente mit der Dichte des Seils ρ_S zu jedem Integrationsschritt entsprechend:

$$m_{\mathcal{S}_n} = \rho_S A \mathcal{S}_{0,n} \quad (2.25)$$

neu bestimmt. Wie zuvor beschrieben, wird die Querschnittsfläche A als konstant betrachtet. Die Masse der Segmente kann dann zum Zeitschritt n auf die Punktmassen mit:

$$\mathcal{P}_{i,n} = z \frac{\rho_S A \mathcal{S}_{0,n}}{z - 1}, \forall i \in \mathbb{N} \setminus \{1\} \leq z \quad (2.26)$$

aufgeprägt werden. Die Punktmasse \mathcal{P}_1 ist entsprechend Abschn. 2.1.1 masselos.

2.2. Berechnungsverfahren

Im Folgenden wird auf den mathematischen Formalismus bei der Formulierung des Problems eingegangen und auf Details bei der programmtechnischen Umsetzung hingewiesen.

2.2.1. Formulierung des Problems

Die Modellierung des Seils mit Feder-/Dämpferelementen ergibt steife Differentialgleichungen deren Lösungen mit expliziten Integrationsverfahren kritisch ist [31]. Deshalb

wird das Problem als System impliziter gewöhnlicher Differentialgleichungen formuliert und entsprechend mit einem Löser basierend auf Rückwärtsdifferenzenformeln variabler Ordnung gelöst. Es ergibt sich ein Anfangswertproblem der Form:

$$f(t, \mathbf{y}, \dot{\mathbf{y}}) = 0 \quad (2.27)$$

und

$$\mathbf{y}(t_0) = \mathbf{y}_0, \quad \dot{\mathbf{y}}(t_0) = \dot{\mathbf{y}}_0 \quad (2.28)$$

mit der Zeit t und dem Zustandsvektor der Seilmodells $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^{6z}$. Letzterer setzt sich zusammen aus der Position $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^{3z}$ und der Geschwindigkeit $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^{3z}$ der Punktmassen:

$$\mathbf{y} = \begin{pmatrix} \mathbf{p} \\ \mathbf{v} \end{pmatrix}. \quad (2.29)$$

Für die programmtechnische Lösung des Problems ist das Residuum $\mathbf{R} \in \mathbb{R}^{6z}$ notwendig:

$$\mathbf{R} = f(t, \mathbf{y}, \dot{\mathbf{y}}) \quad (2.30)$$

das sich aus dem Residuum des Ortsvektors und dessen Ableitung $\mathbf{R}_{\mathbf{p}}$ und dem Residuum des Geschwindigkeitsvektors und dessen Ableitung $\mathbf{R}_{\mathbf{v}}$ gemäß:

$$\mathbf{R} = \begin{pmatrix} \mathbf{R}_{\mathbf{p}} \\ \mathbf{R}_{\mathbf{v}} \end{pmatrix}. \quad (2.31)$$

beschreiben lässt. Das Residuum des Ortsvektors und dessen Ableitungen ergibt sich zu:

$$\mathbf{R}_{\mathbf{p}} = \begin{pmatrix} \mathbf{p}_1 \\ \mathbf{v}_2 - \dot{\mathbf{p}}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{v}_z - \dot{\mathbf{p}}_z \end{pmatrix} \quad (2.32)$$

wobei die einzelnen Komponenten durch den Zustandsvektor \mathbf{y} und dessen Ableitung $\dot{\mathbf{y}}$ auszudrücken sind. Die abweichende Behandlung der Position der ersten Punktmasse folgt aus der Forderung, dass diese im Ursprung fixiert ist und entsprechend $\mathbf{p}_1 = 0$ gilt. Das Residuum des Geschwindigkeitsvektor und dessen Ableitung kann gemäß dem zwei-

2. Seilmodell

ten Gesetz von Newton berechnet werden und berücksichtigt entsprechend die Beschleunigungen, die durch die zuvor berechneten Seilkräfte induziert werden. Die erste Punktmasse wird wieder gesondert mit $\mathbf{v}_1 = 0$ behandelt. Damit kann:

$$\mathbf{R}_v = \begin{pmatrix} \mathbf{v}_1 \\ \dot{\mathbf{v}}_2 - \frac{\mathbf{F}_2}{\mathcal{P}_2} - g \\ \vdots \\ \dot{\mathbf{v}}_z - \frac{\mathbf{F}_z}{\mathcal{P}_z} - g \end{pmatrix} \quad (2.33)$$

mit der Erdbeschleunigung g angegeben werden. Diese muss berücksichtigt werden, da in Abschn. 2.1.5 lediglich nicht-gravitative Kräfte hergeleitet wurden. Analog zum Residuum des Ortsvektors müssen bei der programmtechnischen Umsetzung die einzelnen Komponenten durch den Zustandsvektor \mathbf{y} und dessen Ableitung $\dot{\mathbf{y}}$ ausgedrückt werden.

2.2.2. Programmtechnische Umsetzung

Bei der Implementierung des Seilmodells in eine bestehende Simulation ist zu beachten, dass in konventionellen Flugsimulatoren die Bewegungsgleichungen des Fluggeräts explizit formuliert und die verwendeten Löser auf diese Klasse der Differentialgleichungen beschränkt sind. Dies bedingt die Nutzung eines gesonderten impliziten Löfers für das Seilmodell und die Kopplung beider dynamischer Systeme. Das Prinzip ist in Abb. 2.4 schematisch dargestellt. Der Zustand der Flugzeugbewegung \mathbf{x} besteht aus Position und Geschwindigkeit, die der Punktmasse \mathcal{P}_p aufgeprägt werden. Aus dem Zustand des Seilmodells \mathbf{y} kann hingegen die Seilkraft $-\mathbf{F}_z$ bestimmt werden, die am Schwerpunkt des Fluggeräts angreift.

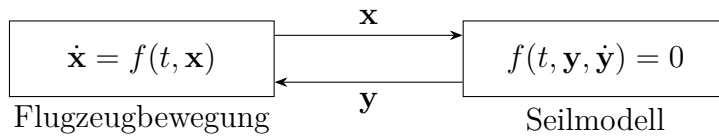


Abbildung 2.4.: Kopplungsprinzip der Differentialgleichungssysteme

3. Bahnführung

Die Struktur der hier vorgestellten Bahnführung basiert auf vorausgehenden Arbeiten, um ein flexibles und gefesselttes Fluggerät (Drachen) auf einer gekrümmten Sollbahn zu führen [2, 20]. Die Motivation hinter diesen Bemühungen besteht darin, dass für Drachen eine direkte Beziehung zwischen der Steuerung und der Azimutänderung in der Tangentialebene einer Kugeloberfläche angegeben werden kann [11]. Auf dieser Basis erfolgt eine Weiterentwicklung für starre Fluggeräte [28, 27]. Die dort vorgestellten Zusammenhänge werden in der vorliegenden Arbeit weitgehend übernommen. Die präsentierten Ergebnisse sind jedoch eigenständig und ausführlich hergeleitet. Auf eigenen Entwicklungen beruhen dagegen Abschn. 3.2 zur Sollbahn und die Ausführungen zur Weiterentwicklung der Bahnführung in Abschn. 3.5. An entsprechender Stelle wird nochmals darauf hingewiesen.

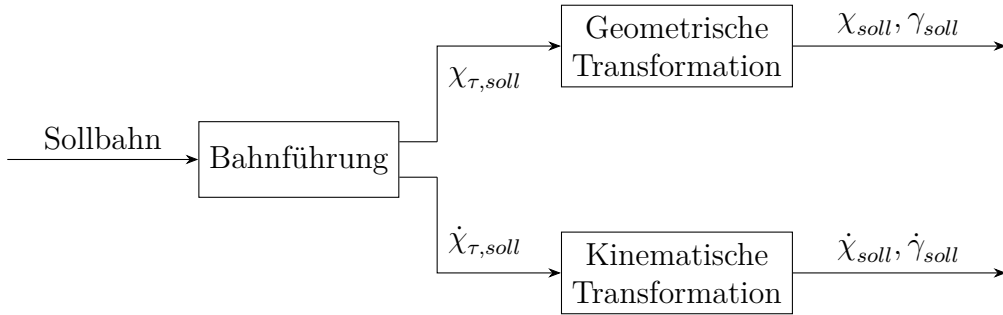


Abbildung 3.1.: Struktur der Bahnführung

Ein Überblick über die Struktur der Bahnführung ist in Abb. 3.1 gegeben. Alle im Folgenden genannten Komponenten werden als Teil der Bahnführung betrachtet, auch wenn diese als eigenständiger Block in der vorgestellten Abbildung auftaucht. In Abschn. 3.1 werden zunächst die verwendeten Koordinatensysteme vorgestellt. Die mathematische Beschreibung der Sollbahn folgt in Abschn. 3.2. Die Sollbahn dient dann als Vorgabe für die Bahnführung in Abschn. 3.3. Hier wird der gesuchte Bahnazimut χ und die Azimutänderung $\dot{\chi}$ in vereinfachten Koordinaten abgeleitet und schließlich in Abschn. 3.4

3. Bahnführung

in das erdfeste System transformiert. Aus diesen Transformationen entstehen schließlich die kommandierte Bahnwinkel und deren zeitliche Änderungen, wie sie in konventionellen Autopiloten Verwendung finden. In den unterlagerten Regelkreisen können daraus dann im weiteren Verlauf Befehle für die Steuerflächen abgeleitet werden.

Wenn sich aus der programmtechnischen Umsetzung der aufgezeigten mathematischen Zusammenhänge Besonderheiten ergeben, wird entsprechend darauf hingewiesen.

3.1. Koordinatensysteme

In der Bahnführung werden Position \mathbf{p} und Geschwindigkeit \mathbf{v} des Fluggeräts auf die Oberfläche der Einheitskugel projiziert und in der lokalen Tangentialebene Bahnazimut und Azimutänderung hergeleitet. Man kann die Kugel dabei als „kleinen Erde“ interpretieren, über der das Fluggerät kreist. Geometrisch ergeben sich hieraus Analogien zur konventionellen Flugmechanik, auf die an entsprechender Stelle explizit hingewiesen wird. Im Zentrum der Kugel liegt das Windkoordinatensystem (Index w) in dessen Ursprung \mathcal{O} der Ankerpunkt der Fesselung (Winde) positioniert ist (vgl. Abb. 3.2). Die x_w -Achse zeigt in Windrichtung \mathbf{v}_w und liegt zusammen mit der y_w -Achse auf der Erdoberfläche. Die z_w -Achse ergänzt das Koordinatensystem zu einem Rechtssystem nach „oben“. In der Analogie zur klassischen Flugmechanik entspricht dies dem erdfesten Koordinatensystem der runden Erde. Neben dem dargestellten kartesischen System kann jeder Punkt auf der Kugeloberfläche auch eindeutig in Kugelkoordinaten festgelegt werden. Die entsprechenden Koordinaten sind dann der Längengrad λ (Azimut) und der Breitengrad ϕ (Deklination).

Auf jeden Punkt der Kugeloberfläche kann eine Tangentialebene gelegt werden, die hier mit dem Tangentialkoordinatensystem (Index τ) beschrieben wird. In der Analogie entspricht dies dem geodätischen Koordinatensystem und dementsprechend werden auch die Achsen festgelegt. Die x_τ -Achse zeigt zum Zenit (geodätisch nach Norden) und die z_τ -Achse zum Mittelpunkt der Kugel. Die y_τ -Achse ergänzt das System zum Rechtssystem nach „rechts“ (geodätisch nach Osten).

Weitere Koordinatensysteme, die jedoch in Abb. 3.2 nicht dargestellt sind, sind das erdfeste System auf der Erdoberfläche (Index E), das körperfeste System (Index f) und das Bahnkoordinatensystem (Index k), die nach üblichen Konventionen in der Flugmechanik definiert sind [14, S. 4-7]. Letzteres wird durch Rotation um die x_k -Achse in das rotierte Bahnkoordinatensystem (Index \underline{k}) überführt. Eine detaillierte Erklärung hierzu folgt in

Abschn. 3.4. Für die Weiterentwicklung der Bahnführung (vgl. Abschn. 3.5) wird außerdem das Geodätenkoordinatensystem (Index δ) eingeführt, das in dem entsprechenden Kapitel genauer erläutert wird.

Wenn nicht explizit darauf hingewiesen wird, beziehen sich alle folgenden Ausführungen, Vektoren und Achsen auf das Windkoordinatensystem. Der Index w in ${}_w\mathbf{v}$ für einen Vektor \mathbf{v} wird einfachheitshalber weggelassen. Von dieser Konvention wird erst wieder im Abschn. 3.4 abgewichen.

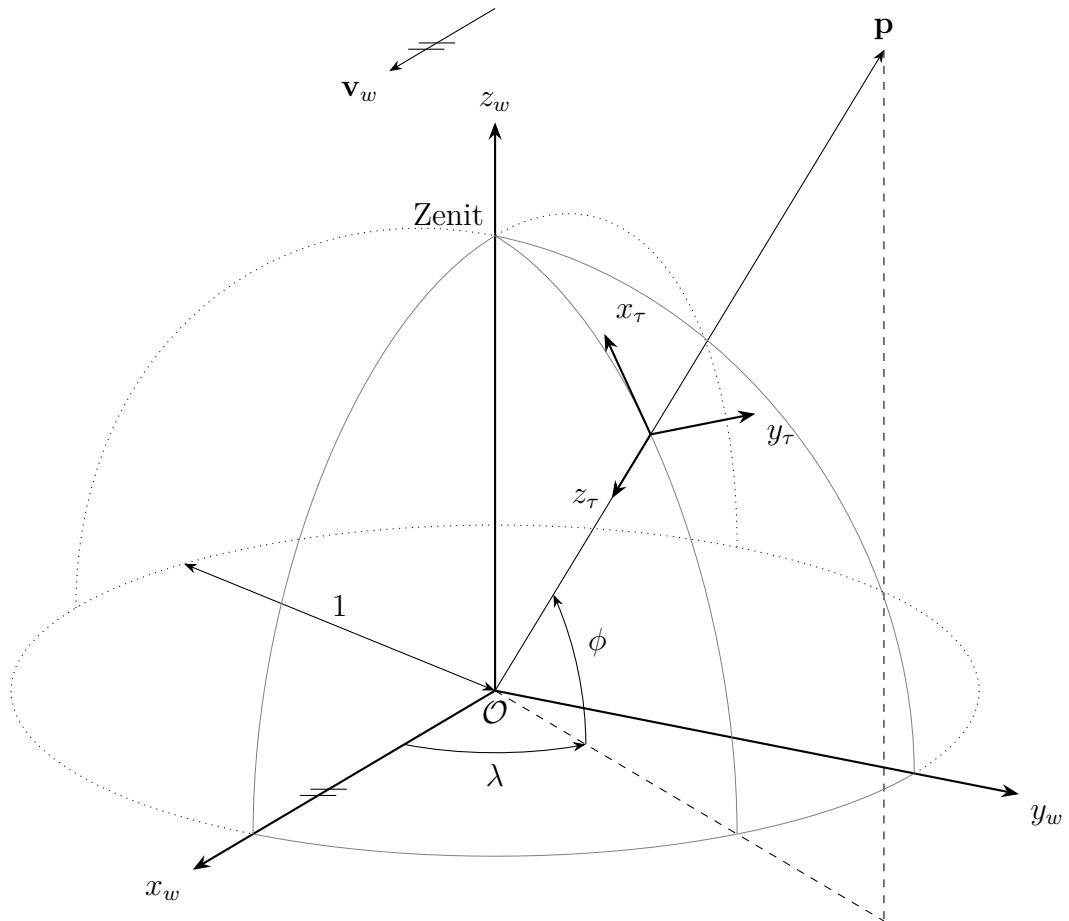


Abbildung 3.2.: Übersicht der wichtigsten Koordinatensysteme

3.2. Sollbahn

Als Sollbahn wird eine Lemniskate (Achterschleife) definiert, da hier keine Verdrillung des Seils induziert wird. Eine einfache Kreisbahn erzeugt im Vergleich zwar mehr Energie, der Gewinn ist aber zu unwesentlich, um die Herausforderungen bei der Beseitigung der Verdrillung zu kompensieren [18]. In der aktuellen Forschungstätigkeit wird sich deshalb auf die Lemniskate konzentriert. Lemniskaten können in eine Vielzahl von Arten unterschieden werden, die bezüglich des Einsatzzwecks unterschiedlich gut geeignet sind. In der vorliegenden Arbeit wird die Lemniskate von Bernoulli verwendet [5], während vorausgehende Arbeiten [28, 27] die Lemniskate von Booth nutzen [3]. Die Ergebnisse unterscheiden sich dementsprechend, werden aber nicht quantitativ gegenübergestellt. Eine derartige Untersuchung kann im Bereich der Optimalsteuerung angesiedelt werden und soll nicht Teil dieser Arbeit sein.

3.2.1. Lemniskate von Bernoulli

Die Lemniskate von Bernoulli kann in kartesischen Koordinaten mit:

$$(x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2) \quad (3.1)$$

implizit beschrieben werden kann. Mit dem Parameter a wird dabei die halbe Ausdehnung der Kurve auf der Abszisse festgelegt. Die Breite ist demnach $2a^1$ (vgl. Abb. 3.3).

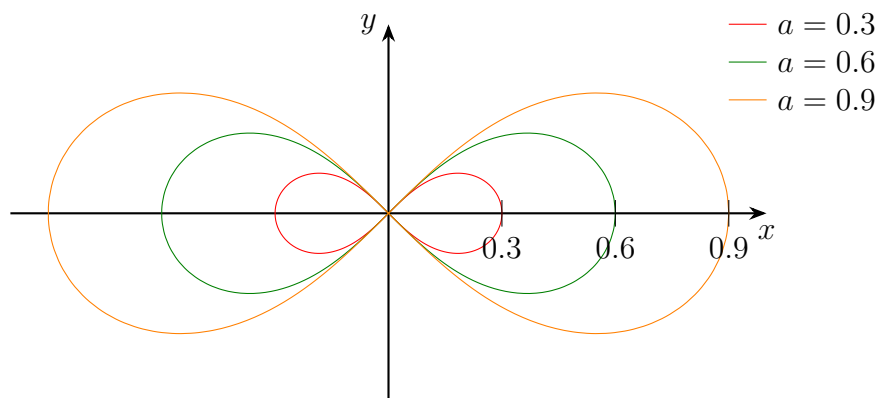


Abbildung 3.3.: Lemniskate von Bernoulli für verschiedene Werte a

¹Andere gebräuchliche Darstellungsarten bedienen sich des Abstands der beiden umkreisten Pole mit dem Parameter $d = a/\sqrt{2}$.

Eine parametrische Darstellung in kartesischen Koordinaten kann mit:

$$x(s) = \frac{a \cos(s)}{1 + \sin^2(s)} \quad (3.2)$$

und:

$$y(s) = \frac{a \cos(s) \sin(s)}{1 + \sin^2(s)} \quad (3.3)$$

mit dem Bahnparameter $s \in (0, 2\pi)$ angegeben werden [17, S. 46]. Von der Darstellung in Polarkoordinaten wird abgesehen, da hier der Definitionsbereich des Parameters s beschränkt ist. Um diese Kurve in der Bahnführung verwenden zu können, muss sie zunächst auf die Kugeloberfläche transformiert werden. In der vorliegenden Arbeit wird eine Parallelprojektion verwendet, wobei es zur Flächen- und Winkerverzerrung kommt². Aus der ebenen Kurve in \mathbb{R}^2 entsteht so eine Raumkurve in \mathbb{R}^3 . Am einfachsten kann die projizierte Sollbahn in Kugelkoordinaten angegeben werden.

Für den Längengrad $\lambda_\Gamma(s)$ ergibt sich mit den Gleichungen (3.2) und (3.3) die Beziehung:

$$\tan(\lambda_\Gamma(s)) = \frac{y(s)}{x(s)} = \sin(s) \quad (3.4)$$

wobei der Index Γ die Zugehörigkeit zur Sollbahn zum Ausdruck bringt. Da später auch andere Punkte auf der Kugeloberfläche in Kugelkoordinaten ausgedrückt werden, wird so eine Unterscheidbarkeit gewährleistet. Die Hintergründe zu dieser Herleitung sind in Abb. 3.4(a) mit dem Punkt P' auf der Lemniskate und dem projizierten Bildpunkt P auf der Einheitskugel dargestellt.

Der Breitengrad $\phi_\Gamma(s)$ ergibt sich analog (vgl. Abb. 3.4(b)) zu:

$$\cos(\phi_\Gamma(s)) = x(s) = \frac{a \cos(s)}{1 + \sin^2(s)}. \quad (3.5)$$

Da hier auf die Einheitskugel projiziert wird, vereinfacht sich die Hypotenuse zu 1. Beide Variablen lassen sich durch die mit:

$$\Upsilon(s) = \begin{pmatrix} \arctan(\sin(s)) \\ \arccos\left(\frac{a \cos(s)}{1 + \sin^2(s)}\right) \end{pmatrix} \quad (3.6)$$

²Daneben sind natürlich auch andere Projektionsarten, wie z.B. Mercatorprojektion oder stereographische Projektion denkbar.

3. Bahnführung

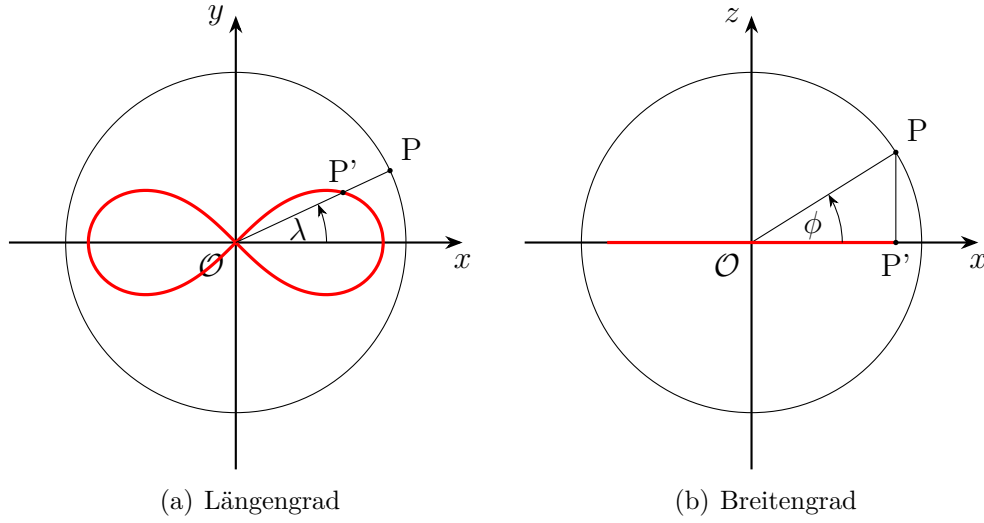


Abbildung 3.4.: Parallelprojektion der Lemniskate auf die Kugeloberfläche

definierte vektorwertige Funktion $\Upsilon : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2, s \rightarrow (\lambda_\Gamma \ \phi_\Gamma)^\top$ zusammenfassen. Viele Vektoroperationen lassen sich in kartesischen Koordinaten allerdings einfacher beschreiben als in Kugelkoordinaten. Die allgemeine Transformation von Kugelkoordinaten in kartesische Koordinaten kann durch die mit:

$$\Xi(\lambda, \phi) = \begin{pmatrix} \cos(\lambda) \cos(\phi) \\ \sin(\lambda) \cos(\phi) \\ \sin(\phi) \end{pmatrix} \quad (3.7)$$

definierte Funktion $\Xi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3, (\lambda \ \phi)^\top \rightarrow (x \ y \ z)^\top$ beschrieben werden. Die einzelnen Komponenten ergeben sich anschaulich beim Betrachten von Abb. 3.2. So ergibt sich $x = 1$ wenn gilt $\lambda = \phi = 0$, während für $\lambda, \phi > 0$ entsprechend eine Abnahme nach der Kosinusfunktion erfolgt. Die beiden anderen Komponenten ergeben sich analog. Die Sollbahn in kartesischen Koordinaten $\Gamma(s) = \Xi \circ \Upsilon : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ folgt schließlich aus der Verkettung der Funktionen (3.6) und (3.7):

$$\Gamma(s) = \begin{pmatrix} \cos(\lambda_\Gamma(s)) \cos(\phi_\Gamma(s)) \\ \sin(\lambda_\Gamma(s)) \cos(\phi_\Gamma(s)) \\ \sin(\phi_\Gamma(s)) \end{pmatrix}. \quad (3.8)$$

3.2.2. Tangente an die Sollbahn und deren Ableitung

Die Ableitung der Sollbahn nach dem Bahnparameter s entspricht geometrisch der Tangente. Daneben ist für die weiteren Berechnungen auch die zweite Ableitung notwendig. Beide Funktionen werden im Folgenden hergeleitet. $\mathbf{\Gamma}(s)$ ist eine vektorwertige Funktion in den zwei unabhängigen Variablen λ_Γ und ϕ_Γ , die wiederum vom Parameter s abhängig sind. Die Tangente $\mathbf{t}_\Gamma(s) = \frac{d}{ds}\mathbf{\Gamma}(s)$ kann als Jacobimatrix dieser verketteten Funktion aufgefasst werden. Unter Berücksichtigung der Rechenregel für verkettete Funktionen $\mathbf{J}_\Gamma(s) = \mathbf{J}_\Xi(\Upsilon(s))\mathbf{J}_\Upsilon(s)$ ergibt sich:

$$\mathbf{t}_\Gamma = \mathbf{J}_\Gamma(s) = \begin{bmatrix} \frac{\partial \mathbf{\Gamma}}{\partial \lambda_\Gamma} & \frac{\partial \mathbf{\Gamma}}{\partial \phi_\Gamma} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{d\lambda_\Gamma}{ds} \\ \frac{d\phi_\Gamma}{ds} \end{bmatrix} \quad (3.9)$$

mit:

$$\frac{\partial \mathbf{\Gamma}}{\partial \lambda_\Gamma} = \begin{pmatrix} -\sin(\lambda_\Gamma) \cos(\phi_\Gamma) \\ \cos(\lambda_\Gamma) \cos(\phi_\Gamma) \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \frac{\partial \mathbf{\Gamma}}{\partial \phi_\Gamma} = \begin{pmatrix} -\cos(\lambda_\Gamma) \sin(\phi_\Gamma) \\ -\sin(\lambda_\Gamma) \sin(\phi_\Gamma) \\ \cos(\phi_\Gamma) \end{pmatrix} \quad (3.10)$$

und:

$$\frac{d\lambda_\Gamma}{ds} = \frac{\cos(s)}{\sin^2(s) + 1}, \quad \frac{d\phi_\Gamma}{ds} = -\frac{a \sin(s)}{\sin^2(s) + 1} - \frac{2a \sin(s) \cos^2(s)}{(\sin^2(s) + 1)^2} \cdot \sqrt{1 - \frac{a^2 \cos^2(s)}{(\sin^2(s) + 1)^2}}. \quad (3.11)$$

Durch die Multiplikation der verketteten Matrizen degeneriert die Jacobimatrix zum Vektor $\mathbf{t}_\Gamma(s)$.

Die Ableitung der Tangente $\mathbf{t}'_\Gamma(s) = \frac{d}{ds}\mathbf{t}_\Gamma(s)$ kann so ebenfalls als Jacobimatrix der vektorwertigen Funktion $\mathbf{t}_\Gamma(s)$ aufgefasst werden. Generell werden nachfolgend Ableitungen nach dem Bahnparameter s mit dem Index ' gekennzeichnet (Lagrange-Notation). Die Ableitung der Tangente ist im Gegensatz zur Tangente (vgl. Gl. (3.9)) allerdings explizit von s abhängig, weshalb in:

$$\mathbf{t}'_\Gamma = \mathbf{J}_t(s) = \begin{bmatrix} \frac{\partial \mathbf{t}_\Gamma}{\partial \lambda_\Gamma} & \frac{\partial \mathbf{t}_\Gamma}{\partial \phi_\Gamma} & \frac{\partial \mathbf{t}_\Gamma}{\partial s} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{d\lambda_\Gamma}{ds} \\ \frac{d\phi_\Gamma}{ds} \\ \frac{ds}{ds} \end{bmatrix} \quad (3.12)$$

3. Bahnführung

eine weitere partielle Ableitung hinzukommt. Leitet man die einzelnen Komponenten partiell ab und multipliziert mit der verketteten Matrix, so ergibt sich in ausgeschriebener Form:

$$\mathbf{t}'_{\Gamma}(s) = \frac{\partial^2 \mathbf{\Gamma}}{\partial \lambda_{\Gamma}^2} \left(\frac{d\lambda_{\Gamma}}{ds} \right)^2 + 2 \frac{\partial^2 \mathbf{\Gamma}}{\partial \lambda_{\Gamma} \partial \phi_{\Gamma}} \frac{d\lambda_{\Gamma}}{ds} \frac{d\phi_{\Gamma}}{ds} + \frac{\partial^2 \mathbf{\Gamma}}{\partial \phi_{\Gamma}^2} \left(\frac{d\phi_{\Gamma}}{ds} \right)^2 + \frac{\partial \mathbf{t}_{\Gamma}}{\partial s} \quad (3.13)$$

mit:

$$\frac{\partial^2 \mathbf{\Gamma}}{\partial \lambda_{\Gamma}^2} = \begin{pmatrix} -\cos(\lambda_{\Gamma}) \cos(\phi_{\Gamma}) \\ -\sin(\lambda_{\Gamma}) \cos(\phi_{\Gamma}) \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \frac{\partial^2 \mathbf{\Gamma}}{\partial \lambda_{\Gamma} \partial \phi_{\Gamma}} = \begin{pmatrix} \sin(\lambda_{\Gamma}) \sin(\phi_{\Gamma}) \\ -\cos(\lambda_{\Gamma}) \sin(\phi_{\Gamma}) \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \frac{\partial^2 \mathbf{\Gamma}}{\partial \phi_{\Gamma}^2} = \begin{pmatrix} -\cos(\lambda_{\Gamma}) \cos(\phi_{\Gamma}) \\ -\sin(\lambda_{\Gamma}) \cos(\phi_{\Gamma}) \\ -\sin(\phi_{\Gamma}) \end{pmatrix} \quad (3.14)$$

und:

$$\frac{\partial \mathbf{t}_{\Gamma}}{\partial s} = \frac{\partial \mathbf{\Gamma}}{\partial \lambda_{\Gamma}} \frac{d^2 \lambda_{\Gamma}}{ds^2} + \frac{\partial \mathbf{\Gamma}}{\partial \phi_{\Gamma}} \frac{d^2 \phi_{\Gamma}}{ds^2}. \quad (3.15)$$

Die sperrigen Ausdrücke $\frac{d^2 \lambda_{\Gamma}}{ds^2}$ und $\frac{d^2 \phi_{\Gamma}}{ds^2}$ werden hier nicht gesondert aufgeführt, können aber durch ein Computer-Algebra-System bestimmt werden.

3.2.3. Transformationen

Die relevanten Größen der Bahnführung werden auf der Einheitskugel durch die Relation zwischen Sollbahn und projizierter Position des Fluggeräts bestimmt. Folgt nun die projizierte Position einer konstanten Sollbahn auf dieser Kugel, so ändert sich die geflogene Lemniskate mit dem Abstand des Fluggeräts zum Koordinatenursprung. Wird beispielsweise ein GG-System eingesetzt, so vergrößert sich die Breite der geflogenen Lemniskate a_p kontinuierlich mit dem Abwickeln der Fesselung. Diese Varianz kann unerwünscht sein, aber in gewissen Grenzen mit der Manipulation des Parameters a begegnet werden (vgl. Abb. 3.3). Durch den linearen Zusammenhang:

$$a_p = \|\mathbf{p}\| a \quad (3.16)$$

mit dem Positionsvektor \mathbf{p} des Schwerpunkts des Fluggeräts im Windkoordinatensystem (vgl. Abb. 3.5), kann der Parameter a entsprechend manipuliert werden, um eine konstante Breite der geflogenen Sollbahn zu erreichen. Dieser Manipulation sind Grenzen gesetzt durch die Beschränkung des Definitionsbereichs der Arkuskosinusfunktion in Gl. (3.6). Es ergeben sich entsprechend sinnvolle Werte für $a \in [0, 1]$, die auch aus den

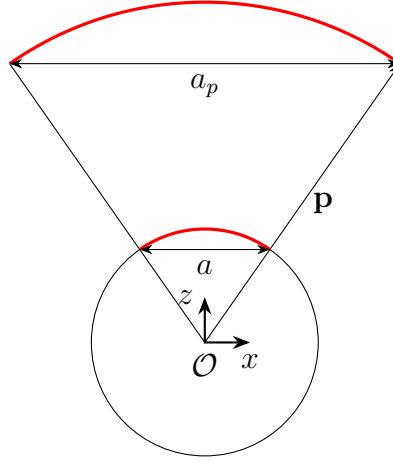


Abbildung 3.5.: Zusammenhang zwischen der Ausdehnung der Lemniskate auf der Einheitskugel a und im Flug a_p

geometrischen Randbedingungen der Einheitskugel abgeleitet werden können. Die Breite der geflogenen Lemniskate ist somit nach oben durch den Abstand zwischen Fluggerät und Koordinatenursprung mit:

$$a_{p,max} = \|\mathbf{p}\| \quad (3.17)$$

beschränkt. Bei einer niedrigen Flughöhe über dem Koordinatenursprung, kann so eine gewünschte geflogene Breite a_p gegebenenfalls nicht erreicht werden.

Neben diesen Überlegungen zur Dimension, spielt auch die Lage eine Rolle. Die bisher spezifizierte Sollbahn $\Gamma(s)$ liegt im Zenit der Einheitskugel parallel zur x_w -Achse (vgl. Abb. 3.3). Um einen möglichst hohen Energiegewinn erzielen zu können, ist allerdings ein Flug mit geringer Elevation nahe der Erdoberfläche notwendig (vgl. Abschn. 1.1 auf Seite 3). Die entsprechende Transformation kann durch zwei elementare Rotationen vollzogen werden. Zunächst wird die Lemniskate um die Hochachse um 90° gedreht, um für das Ergebnis der darauffolgenden Rotation aus der „stehenden“ eine „liegende“ Acht zu machen. Anschließend führt eine Rotation um die y_w -Achse zu einer Abweichung vom Zenit bis zur gewünschten Elevation. Bei einer gewünschten Elevation von beispielsweise $\epsilon = 30^\circ$ ist so eine positive Drehung von 60° um die y_w -Achse notwendig. Die Rotation erfolgt in kartesischen Koordinaten mit den allgemeinen Drehmatrizen \mathbf{T}_y und \mathbf{T}_z , die im Anhang A auf S. 77 neben allgemeinen Bemerkungen zur Indizierung bei Vektoren

3. Bahnführung

und Matrizen aufgeführt sind. Die Rotationsvorschrift kann angegeben werden mit:

$$\mathbf{\Gamma}(s)\Big|_{\epsilon} = \mathbf{T}_y^T(\pi/2 - \epsilon) \mathbf{T}_z^T(\pi/2) \mathbf{\Gamma}(s). \quad (3.18)$$

Die gesonderte Kennzeichnung der Rotation wird einfachheitshalber weggelassen. Mit $\mathbf{\Gamma}(s)$ ist damit nachfolgend die transformierte Sollbahn gemeint. Es wird darauf hingewiesen, dass es sich hier um eine aktive Drehung der Vektoren handelt, weshalb eine Transposition der Drehmatrizen notwendig ist. Die Tangente $\mathbf{t}_{\Gamma}(s)$ und deren Ableitung $\dot{\mathbf{t}}_{\Gamma}(s)$ werden analog behandelt. Die so erzeugten Vektoren sind im Windkoordinatensystem definiert. Für eine Darstellung im erdfesten System ist eine Koordinatentransformation notwendig, die in Abschn. 3.4 beschrieben wird.

3.3. Bahnführung in der Tangentialebene

Das Ergebnis der Bahnführung ist in der konventionellen Flugmechanik der Bahnazimut χ und der Bahnneigungswinkel γ . Beide Winkel zusammen geben dabei die Lage des Bahnkoordinatensystems gegenüber dem geodätischen Koordinatensystem an. Dieses Konzept wird nun auf die „kleine Erde“ übertragen, wobei die Tangentialebene auf der Oberfläche der Einheitskugel die Rolle des geodätischen Systems spielt. Die Sollbahn liegt exakt auf der Kugeloberfläche, weshalb die Orientierung des bahnfesten Systems gegenüber der Tangentialebene vollständig mit dem Bahnazimut $\chi_{\tau, \text{soll}}$ beschrieben werden kann (Bahnneigungswinkel entfällt). Der Index τ betont dabei die Zugehörigkeit zur Tangentialebene. Die Ableitung des Bahnazimuts nach der Zeit ergibt die Azimutänderung $\dot{\chi}_{\tau, \text{soll}}$.

Allgemein kann die Regelgüte jeder Folgeregelung durch eine Vorsteuerung (vgl. Unterabschn. 3.3.2) verbessert werden. In der vorliegenden Arbeit wird diese mit $\chi_{\tau, 0}$ bezeichnet und auf Basis der Geometrie der Sollbahn bestimmt. Fliegt das Fluggerät lediglich diesen Kurs, so bewegt es sich parallel zur Sollbahn. Um eine auftretende Ablage zu kompensieren und das Fluggerät auf die Sollbahn zu führen, ist außerdem ein Regelkreis (vgl. Unterabschn. 3.3.3) mit der Rückführung des Bahnfehlers notwendig. Der Ausgabewert dieses Regelkreises wird mit $\chi_{\tau, \Delta}$ bezeichnet. Damit kann die Struktur der Bahnführung in der Tangentialebene der Einheitskugel für Bahnazimut und Azimutänderung mit:

$$\chi_{\tau, \text{soll}} = \chi_{\tau, 0} + \chi_{\tau, \Delta} \quad (3.19)$$

$$\dot{\chi}_{\tau, \text{soll}} = \dot{\chi}_{\tau, 0} + \dot{\chi}_{\tau, \Delta} \quad (3.20)$$

angegeben werden. Um die Verwendbarkeit dieser Größen in konventionellen Autopiloten zu gewährleisten, erfolgt in Abschn. 3.4 eine Transformation in das erdfeste System. Dabei werden auch die Größen für Bahnneigungswinkel und Neigungswinkeländerung erzeugt, die in der Tangentialebene selbst keine Rolle spielen.

3.3.1. Bezugspunkt auf der Sollbahn

Bevor die Ausgabewerte von Vorsteuerung und Regelung bestimmt werden können, muss ein Bezugspunkt auf der Sollbahn festgelegt werden, der bei einer Ablage als aktueller Referenzpunkt für die Bahnführung dient. Es ist naheliegend, hierfür jenen Punkt auf der Sollbahn zu nutzen, der dem Fluggerät am nächsten liegt. Dafür wird zunächst allgemein die Ablage zwischen Sollbahn und Fluggerät hergeleitet und dann über eine Extremwertbestimmung der gesuchte Punkt berechnet.

Um die Ablage auf einfache Weise in Bogenmaß auf der Kugeloberfläche angeben zu können, wird die Position des Fluggeräts auf diese projiziert und mit \mathbf{p}_{\perp} bezeichnet. Die Berechnung erfolgt gemäß:

$$\mathbf{p}_{\perp} = \frac{\mathbf{p}}{\|\mathbf{p}\|}. \quad (3.21)$$

Nachfolgend werden alle Vektoren mit \perp gekennzeichnet, wenn sie entsprechend auf die Oberfläche der Einheitskugel projiziert sind. Die kürzeste Verbindungslinie zwischen zwei Punkten auf einer Kugeloberfläche wird allgemein als Geodäte bezeichnet. Die gesuchte Ablage ist folglich die Länge der Geodäte zwischen einem Punkt auf $\Gamma(s)$ und \mathbf{p}_{\perp} . Sie wird mit $\delta(s)$ bezeichnet und lässt sich rechnerisch aus der Definition des Skalarprodukts mit:

$$\begin{aligned} \mathbf{p}_{\perp}^T \Gamma(s) &= \cos(\delta(s)) \|\mathbf{p}_{\perp}\| \|\Gamma(s)\| \\ \delta(s) &= \arccos(\mathbf{p}_{\perp}^T \Gamma(s)) \end{aligned} \quad (3.22)$$

angeben. Beide Vektoren sind hier durch die Lage auf der Kugeloberfläche Einheitsvektoren, weshalb sich die Normen zu eins vereinfachen. Es wird nochmal darauf hingewiesen, dass die obige Definition die Ablage auf der Einheitskugel beschreibt. Wenn hingegen der Abstand des Fluggeräts von der Sollbahn bestimmt werden soll, so muss $\delta(s)$ entsprechend mit $\|\mathbf{p}\|$ multipliziert werden. Nachfolgend wird als Ablage jedoch der Zusammenhang

3. Bahnführung

nach Gl. (3.22) bezeichnet.

Bei der programmtechnischen Umsetzung der obigen Gleichung ist die Beschränkung des Definitionsbereichs der Arkuskosinusfunktion auf $[-1, 1]$ zu beachten. Numerische Ungenauigkeiten können ansonsten dazu führen, dass für den Fall: Bahnfehler $\rightarrow 0$ das Ergebnis: $\mathbf{p}_\perp^\top \boldsymbol{\Gamma}(s) > 1$ berechnet und damit der Definitionsbereich verletzt wird. Die geometrischen Zusammenhänge dieser Ausführungen sind in Abb. 3.6 veranschaulicht.

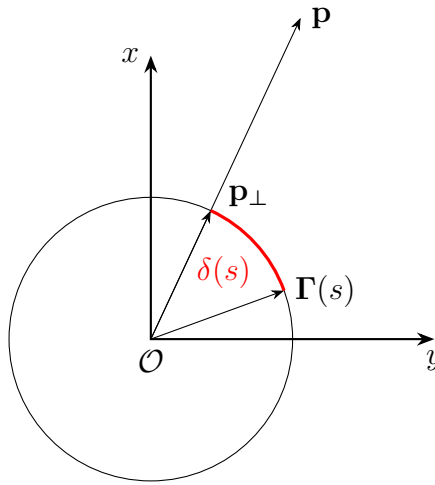


Abbildung 3.6.: Ablage $\delta(s)$ von einem beliebigen Punkt auf der Sollbahn $\boldsymbol{\Gamma}(s)$ zur projizierten Position des Fluggeräts in die Tangentialebene \mathbf{p}_\perp

Der gesuchte Bezugspunkt wird durch den Punkt auf der Sollbahn festgelegt, für den die oben definierte Ablage minimal wird. Er wird mit s^* bezeichnet und ist in Abb. 3.7 dargestellt. Die Berechnung erfolgt durch Extremwertbestimmung von Gl. (3.22) mit:

$$\left. \frac{d\delta}{ds} \right|_{s=s^*} = 0. \quad (3.23)$$

Die Differenziation kann durch Substitution von $\mathbf{p}_\perp^\top \boldsymbol{\Gamma}(s)$ mit $x(s)$ und der Verwendung der Identität $\frac{d}{ds}(\arccos(x(s))) = \frac{-x'(s)}{\sqrt{1-x(s)^2}}$ vereinfacht werden. Es folgt nach Rücksubstitution:

$$\frac{d\delta}{ds} = -\frac{\mathbf{p}_\perp^\top \mathbf{t}_\Gamma(s)}{\sqrt{1 - (\mathbf{p}_\perp^\top \boldsymbol{\Gamma}(s))^2}}. \quad (3.24)$$

3.3. Bahnführung in der Tangentialebene

Der Nenner der obigen Gleichung kann mit der Identität $\sin(\arccos(x(s))) = \sqrt{1 - x(s)^2}$ und Gl. (3.22) weiter zu:

$$\frac{d\delta}{ds} = -\frac{\mathbf{p}_\perp^\top \mathbf{t}_\Gamma(s)}{\sin(\delta(s))} \quad (3.25)$$

vereinfacht werden. Setzt man Gl. (3.25) zu null, wird diese nach Gl. (3.23) zur Bestimmungsgleichung für den gesuchten Bezugspunkt s^* . Das Problem der Nullstellensuche reduziert sich damit auf den Zähler, welcher mit $f = \mathbf{p}_\perp^\top \mathbf{t}_\Gamma(s)$ bezeichnet wird. Eine Möglichkeit zur Lösung dieses Problems besteht in der Verwendung des eindimensionalen Newtonverfahrens mit dem Algorithmus:

$$s_{n+1} = s_n - \frac{f(s_n)}{f'(s_n)}. \quad (3.26)$$

Der Index n gibt dabei den Iterationsschritt an. Die Differenziation von f nach s kann durch die Bestimmung von $\mathbf{t}'_\Gamma(s)$ in Unterabschn. 3.2.2 direkt angegeben werden und entspricht $f' = \mathbf{p}_\perp^\top \mathbf{t}'_\Gamma(s)$. Da das Verfahren nicht notwendigerweise konvergiert, müssen zwei Abbruchkriterien definiert werden [21, S. 282]. Ein Abbruch erfolgt, wenn die gesuchte Nullstelle s^* hinreichend gut approximiert ist. Das Kriterium $|s_n - s^*| < \mathcal{E}$ für die skalare Größe $\mathcal{E} > 0$ ist für die Praxis allerdings unbrauchbar, da s^* unbekannt ist. Stattdessen wird:

$$|s_{n+1} - s_n| < \mathcal{E} \quad (3.27)$$

verwendet, da man für große n begründen kann $|s_n - s^*| \leq |s_{n+1} - s_n|$. Wenn keine Konvergenz zu erwarten ist, kann außerdem mit dem Kriterium:

$$|f(s_{n+1})| > |f(s_n)| \quad (3.28)$$

abgebrochen werden. Das Verfahren konvergiert in der Regel quadratisch und ist damit in der Praxis bei geringer Ablage zur Sollbahn sehr performant. Anders verhält es sich bei großen Ablagen. Definitionsgemäß kann das Verfahren nicht zwischen Minima und Maxima - und schon gar nicht zwischen lokalen und globalen Extrempunkten - unterscheiden. Dies kann bei großen Ablagen zu einem erratischen Hin- und Herspringen zwischen verschiedenen Werten führen. Bei geringen Ablagen, wie sie im nominellen Betrieb vorkommen, spielt dieses Phänomen allerdings keine Rolle und die Simulationsergebnisse in Kap. 4 zeigen, dass selbst bei extremen Ablagen die Sollbahn sicher angesteuert wird. Eine andere Möglichkeit zur Lösung des Problems der Nullstellensuche stellt das Bisekti-

3. Bahnführung

onsverfahren dar, das garantiert - jedoch lediglich linear - konvergiert. Ein Vergleich zum Newtonverfahren wird in der vorliegenden Arbeit allerdings nicht durchgeführt.

Bei der programmtechnischen Umsetzung ist zu beachten, dass der Nenner in Gl. (3.26) nicht null werden darf. Dies ist im praktischen Betrieb dann der Fall, wenn die Navigationslösung die Position des Fluggeräts nicht richtig erfasst, oder es sich im Koordinatenursprung befindet. Es wird festgelegt, dass für $\|\mathbf{p}\| < 1$ der alte Wert von s^* (oder der geschätzte Startwert) übergeben und die Iteration abgebrochen wird.

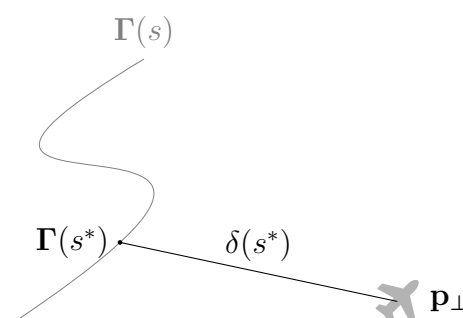


Abbildung 3.7.: Bezugspunkt auf der Sollbahn s^* auf Basis der kürzesten Ablage $\delta(s^*)$ zum Fluggerät

3.3.2. Vorsteuerung

Mit dem zuvor berechneten Bezugspunkt auf der Sollbahn s^* kann nun die Vorsteuerung bestimmt werden. Diese führt das Fluggerät parallel zur Sollbahn und kann allein aus deren Geometrie hergeleitet werden. Für eine derartige Bahnführung muss der Geschwindigkeitsvektor des Fluggeräts parallel zum lokalen Tangentenvektor der Sollbahn am Bezugspunkt ausgerichtet sein. Ist dies der Fall, so folgt das Fluggerät einer Bahn, die der Geometrie der Sollbahn (an der Position des Fluggeräts) entspricht.

Geometrische Grundlagen

In der Bahnführung der klassischen Flugmechanik, kann das geodätische System g in sehr guter Näherung durch das erdfeste System der flachen Erde approximiert werden. Eine Ablage zur Sollbahn ist hier im Regelfall einige Größenordnungen kleiner als der Erdradius, weshalb zwischen den geodätischen Systemen am Bezugspunkt der Sollbahn und an der Position des Fluggeräts nicht unterschieden werden muss. Es kann in sehr

3.3. Bahnführung in der Tangentialebene

guter Näherung angenommen werden, dass beide Systeme auf demselben Längengrad liegen und damit nicht gegeneinander verdreht sind. Das Problem vereinfacht sich dadurch erheblich, da der Basisvektor $\mathbf{e}_{x,g}$, gegenüber dem der Bahnazimut bestimmt wird, im betrachteten Gebiet als konstant vorausgesetzt wird.

Bei der Bahnführung über der „kleinen Erde“ gilt eine derartige Approximation nicht mehr, da bereits geringe Ablagen zu wesentlichen Änderungen im Azimut λ führen. Der Basisvektor $\mathbf{e}_{x,\tau}$, gegenüber dem der Bahnazimut bestimmt wird, kann so nicht mehr als konstant betrachtet werden. Bereits bei geringen Ablagen besitzen die zwei Tangentialebenen am Bezugspunkt der Sollbahn und an der Position des Fluggeräts deutlich zueinander verdrehte x_τ -Achsen. Der berechnete Bahnazimut am Bezugspunkt der Sollbahn unterscheidet sich somit im Allgemeinen vom korrekten Bahnazimut an der Position des Fluggeräts. Veranschaulicht ist dieser Zusammenhang in Abb. 3.8, wo zwischen Größen an der Sollbahn (mit Γ indiziert) und am Fluggerät unterschieden wird. Beide x_τ -Achsen zeigen hier zum Zenit der Einheitskugel und $\chi_{\tau,0,\Gamma}$ besitzt ein negatives Vorzeichen. Die Einheitsvektoren der z_τ -Achsen werden aus Gründen der Übersicht nicht dargestellt.

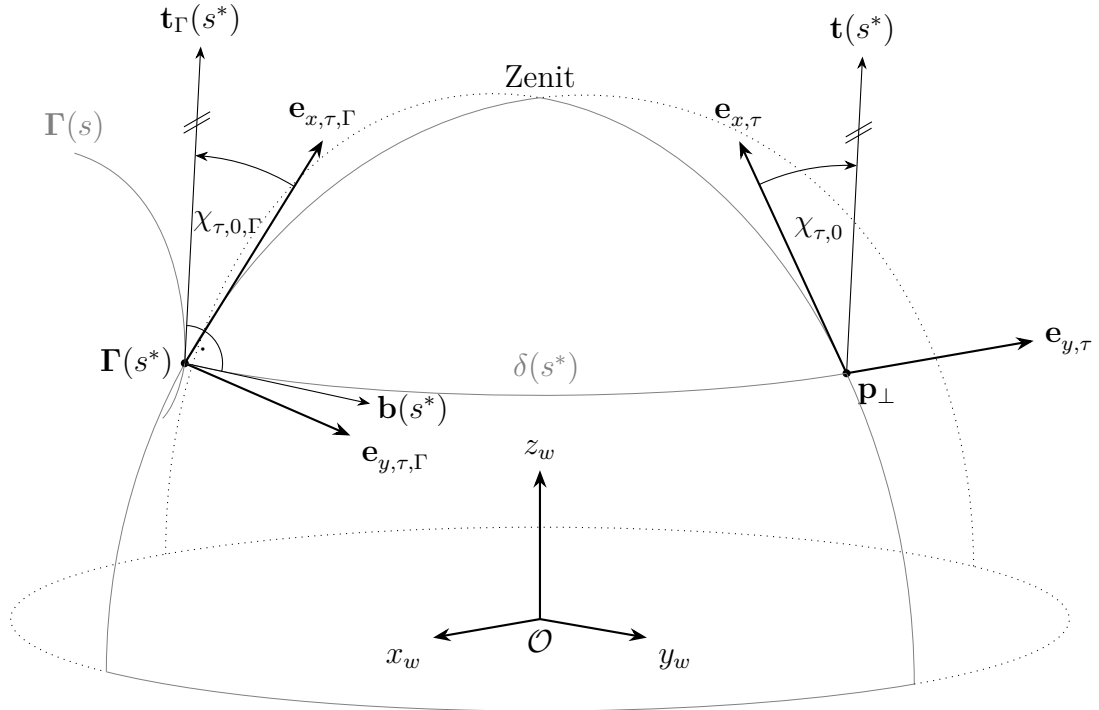


Abbildung 3.8.: Allgemeiner Zusammenhang für $\chi_{\tau,0,\Gamma} \neq \chi_{\tau,0}$

3. Bahnführung

Hervorzuheben ist der rechte Winkel zwischen der Tangente an die Sollbahn \mathbf{t}_Γ und der Geodäte. Dies ist nicht willkürlich gewählt, sondern gilt allgemein und lässt sich folgendermaßen herleiten. Gesucht ist zunächst der Einheitsvektor $\mathbf{b}(s)$, der von einem beliebigen Punkt auf der Sollbahn $\Gamma(s)$ zu \mathbf{p}_\perp zeigt. Da dieser Vektor auch als Tangente an die Geodäte interpretiert werden kann, wird er nachfolgend als Geodätenvektor bezeichnet. Die geometrischen Zusammenhänge sind in Abb. 3.9 gezeigt. Die Projektion von \mathbf{p}_\perp auf

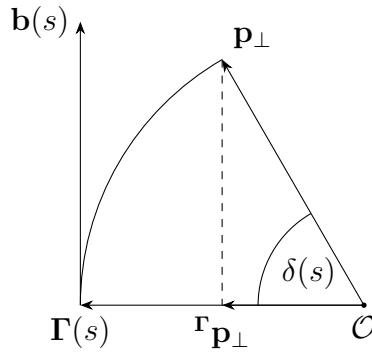


Abbildung 3.9.: Kreissegment zur Bestimmung des Geodätenvektors $\mathbf{b}(s)$

$\Gamma(s)$ wird mit ${}^r\mathbf{p}_\perp$ bezeichnet und ergibt sich aus der Definition des Skalarprodukts mit:

$${}^r\mathbf{p}_\perp = (\mathbf{p}_\perp^\top \Gamma(s)) \Gamma(s) = \cos(\delta(s)) \Gamma(s). \quad (3.29)$$

Die Vereinfachung des Skalarprodukts folgt aus Gl. (3.22). Der Geodätenvektor kann nun geschrieben werden als:

$$\mathbf{b}(s) = \frac{\mathbf{p}_\perp - {}^r\mathbf{p}_\perp}{\|\mathbf{p}_\perp - {}^r\mathbf{p}_\perp\|} = \frac{\mathbf{p}_\perp - \cos(\delta(s))\Gamma(s)}{\sin(\delta(s))}. \quad (3.30)$$

Die Vereinfachung des Nenners ist in Abb. 3.9 als gestrichelte Länge veranschaulicht, die entsprechend der Sinusfunktion der Ablage beschrieben werden kann. Es wird darauf hingewiesen, dass der so definierte Geodätenvektor eine Singularität für $\delta \rightarrow 0$ besitzt. Dies ist allerdings für die nachfolgende Herleitung unerheblich. Nach Unterabschn. 3.3.1 ist:

$$\mathbf{t}_\Gamma(s^*)^\top \mathbf{p}_\perp = 0 \quad (3.31)$$

3.3. Bahnführung in der Tangentialebene

die Bestimmungsgleichung für den Bezugspunkt auf der Sollbahn s^* . Löst man Gl. (3.30) nach \mathbf{p}_\perp auf und setzt das Ergebnis in (3.31) ein, so folgt:

$$\mathbf{t}_\Gamma(s^*)^\top (\cos(\delta(s^*))\mathbf{\Gamma} + \sin(\delta(s^*))\mathbf{b}(s)) = 0. \quad (3.32)$$

Dies lässt sich mit dem Distributivgesetz zu:

$$\cos(\delta(s^*)) \underbrace{\mathbf{\Gamma}^\top \mathbf{t}_\Gamma(s^*)}_0 + \sin(\delta(s))\mathbf{b}^\top(s^*)\mathbf{t}_\Gamma(s^*) = 0 \quad (3.33)$$

weiter vereinfachen, da der erste Summand im Zähler verschwindet (der Tangentenvektor steht senkrecht auf der Sollbahn). Die nichttriviale Lösung ist für $\delta(s^*) \neq 0$:

$$\mathbf{b}^\top(s^*)\mathbf{t}_\Gamma(s^*) = 0. \quad (3.34)$$

Dies zeigt, dass der Geodätenvektor \mathbf{b} senkrecht auf der Tangente \mathbf{t}_Γ steht, wenn die Länge der Geodäte zwischen Sollbahn und projizierter Position des Fluggeräts - festgelegt durch den Bezugspunkt s^* - minimal wird. Dadurch vereinfacht sich die Transformation von \mathbf{t}_Γ zur projizierten Position des Fluggeräts \mathbf{p}_\perp erheblich, da der Tangentenvektor $\mathbf{t}_\Gamma(s^*)$ auf \mathbf{p}_\perp und $\mathbf{b}(s^*)$ senkrecht steht und seine Lage bei der Transformation unverändert bleibt. Deutlich wird dieser Zusammenhang in Abb. 3.10. Die Transformation kann als Rotation entlang des Vektors $\mathbf{k} = \mathbf{\Gamma}(s) \times \mathbf{p}_\perp$ aufgefasst werden, der senkrecht auf $\mathbf{\Gamma}(s)$ und \mathbf{p}_\perp steht. Für $\mathbf{\Gamma}(s^*)$ ist \mathbf{k} parallel zur Tangente $\mathbf{t}_\Gamma(s^*)$, da die Rotation entlang $\mathbf{b}(s^*)$ erfolgt. Ein Vektor bleibt im Allgemeinen unverändert, wenn eine Rotation entlang eines anderen Vektors erfolgt, der parallel zu diesem Vektor liegt. Es gilt somit allgemein:

$$\mathbf{t}(s^*) = \mathbf{t}_\Gamma(s^*). \quad (3.35)$$

Es soll aber betont werden, dass dies nur für den Bezugspunkt s^* gilt. Die in Unterabschn. 3.3.1 festgelegte Definition s^* als Bezugspunkt zu wählen, vereinfacht wie beschrieben die Projektion des Tangentenvektors. Falls allerdings ein anderer Bezugspunkt gewählt wird, oder die Berechnung von s^* entsprechend Gl. (3.26) nicht konvergiert, so gilt im Allgemeinen: $\mathbf{t}(s) \neq \mathbf{t}_\Gamma(s)$. Der projizierte Vektor $\mathbf{t}(s)$ kann dann z.B. mit der Rotationsformel nach Rodrigues berechnet werden [16], die der Vollständigkeit halber im Anhang B gezeigt ist. In der vorliegenden Arbeit wird allerdings davon ausgegan-

3. Bahnführung

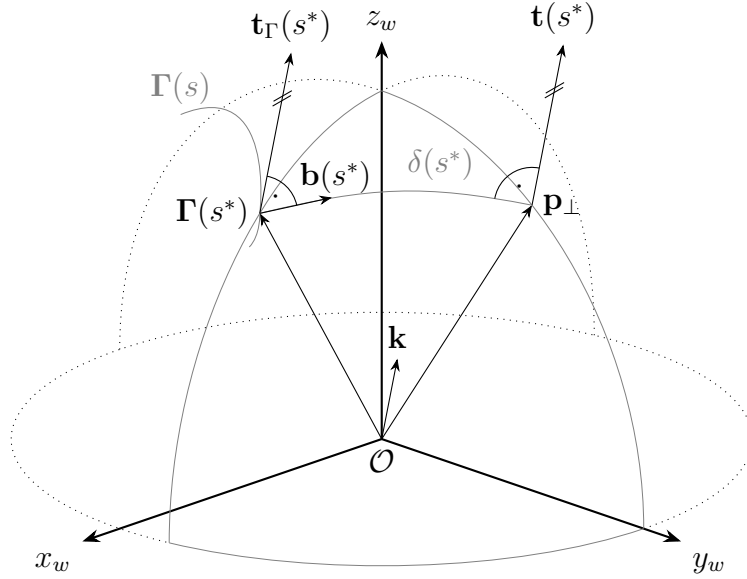


Abbildung 3.10.: Transformation der Tangente an die Sollbahn

gen, dass s^* stets gefunden wird und somit die oben genannte Vereinfachung gültig ist. Nachfolgend werden $\mathbf{t}(s^*)$ und $\mathbf{t}_\Gamma(s^*)$ equivalent behandelt und als \mathbf{t} bezeichnet. Die explizite Kennzeichnung des Arguments entfällt, da alle folgenden Herleitungen bezüglich des Bezugspunkts s^* gemacht werden.

Bahnazimut

Die eigentliche Berechnung des Bahnazimuts $\chi_{\tau,0}$ an der Position des Fluggeräts birgt keine größeren Schwierigkeiten und kann anhand von Abb. 3.11 geometrisch hergeleitet werden. Der gesuchte Winkel geht direkt aus den Projektionen des Tangentenvektors auf die Basisvektoren der Tangentialebene hervor. Die Norm der Projektion von \mathbf{t} auf den Basisvektor der Tangentialebene $\mathbf{e}_{x,\tau}$ ergibt sich aus der Definition des Skalarprodukts mit:

$$\|\mathbf{e}_{x,\tau}\mathbf{t}\| = \frac{\mathbf{e}_{x,\tau}^\top \mathbf{t}}{\underbrace{\|\mathbf{e}_{x,\tau}\|}_1} = \mathbf{e}_{x,\tau}^\top \mathbf{t}. \quad (3.36)$$

Die Projektion auf $\mathbf{e}_{y,\tau}$ erfolgt analog. Der Bahnazimut ist schließlich das Ergebnis der Arkustangensfunktion dieser beiden Längen, wobei zur Berechnung des Winkels im kor-

3.3. Bahnführung in der Tangentialebene

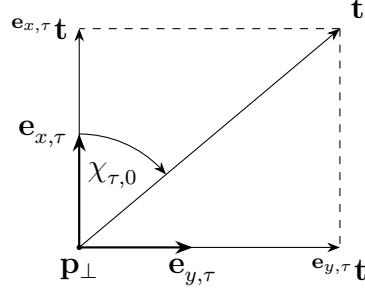


Abbildung 3.11.: Bestimmung des Bahnazimuts $\chi_{\tau,0}$ in der Tangentialebene

rekten Quadranten die $\arctan2$ -Funktion verwendet wird. Somit gilt:

$$\chi_{\tau,0} = \arctan2(\mathbf{e}_{y,\tau}^\top \mathbf{t}, \mathbf{e}_{x,\tau}^\top \mathbf{t}) \quad (3.37)$$

mit den Basisvektoren:

$$\mathbf{e}_{x,\tau} = \begin{pmatrix} -\cos(\lambda) \sin(\phi) \\ -\sin(\lambda) \sin(\phi) \\ \cos(\phi) \end{pmatrix}, \quad \mathbf{e}_{y,\tau} = \begin{pmatrix} -\sin(\lambda) \\ \cos(\lambda) \\ 0 \end{pmatrix} \quad (3.38)$$

deren Herleitung analog zu Gl. (3.7) auf S. 22 anschaulich entsprechend den geometrischen Zusammenhängen erfolgt. Da die gesuchten Basisvektoren allerdings in der Tangentialebene mit Ursprung in der projizierten Position des Fluggeräts \mathbf{p}_\perp liegen, sind λ, ϕ zunächst unbekannt (bisher wurden lediglich Azimut und Deklination der Sollbahn bestimmt). Sie können aber mit der durch

$$\Xi^{-1}(x, y, z) = \begin{pmatrix} \arctan2(y, x) \\ \arcsin(z) \end{pmatrix} \quad (3.39)$$

definierten Funktion $\Xi^{-1} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2, (x \ y \ z)^\top \rightarrow (\lambda \ \phi)^\top$ aus den kartesischen Koordinaten von \mathbf{p}_\perp berechnet werden. Dies entspricht der Umkehrung der in Gl. (3.7) definierten Transformation.

3. Bahnführung

Azimetänderung

Die Ableitung des Bahnazimuts (vgl. Gl. (3.37)) nach der Zeit ergibt die Vorsteuerung für die Azimetänderung:

$$\dot{\chi}_{\tau,0} = \frac{d}{dt} \left(\arctan \left(\frac{\mathbf{e}_{y,\tau}^\top \mathbf{t}}{\mathbf{e}_{y,\tau}^\top \dot{\mathbf{t}}} \right) \right). \quad (3.40)$$

Das Argument in dieser Gleichung wird mit $x = c/d$ substituiert und nach der Zeit abgeleitet. Unter der Berücksichtigung der Quotientenregel ergibt dies:

$$\dot{x} = \frac{\dot{c}d - c\dot{d}}{d^2}. \quad (3.41)$$

Einsetzen in die Identität $\frac{d}{dt}(\arctan(x)) = \frac{\dot{x}}{1+x^2}$ folgert:

$$\frac{d}{dt}(\arctan(x)) = \frac{\dot{c}d - c\dot{d}}{c^2 + d^2}. \quad (3.42)$$

Die Ableitung des Zählerarguments (Nennerargument analog) in Gl. (3.40) ergibt mit den Regeln zur Differenziation von Skalarprodukten und der totalen Differenziation:

$$\dot{c} = \left(\frac{\partial \mathbf{e}_{y,\tau}}{\partial \lambda} \dot{\lambda} + \frac{\partial \mathbf{e}_{y,\tau}}{\partial \phi} \dot{\phi} \right)^\top \mathbf{t} + \mathbf{e}_{y,\tau}^\top \underbrace{\frac{d\mathbf{t}}{ds}}_{\mathbf{t}'} \dot{s}. \quad (3.43)$$

Wegen $\mathbf{t} = \mathbf{t}_\Gamma$ entspricht die Ableitung der Tangente an der Flugzeugposition $\mathbf{t}' = \mathbf{t}'_\Gamma$. Die Unbekannten $\dot{\lambda}$, $\dot{\phi}$ und \dot{s} werden am Ende dieses Abschnitts bestimmt, doch zunächst soll $\dot{\chi}_{\tau,0}$ in kompakter Form angegeben werden. Drückt man das Skalarprodukt aus Tangentenvektor und Basisvektoren der Tangentialebene mit dem eingeschlossenen Winkel $\chi_{\tau,0}$ aus, so kann geschrieben werden (vgl. Abb. 3.11):

$$c = \mathbf{e}_{y,\tau}^\top \mathbf{t} = \cos(\pi/2 - \chi_{\tau,0}) \underbrace{\|\mathbf{e}_{y,\tau}\|}_{1} \|\mathbf{t}\| = \sin(\chi_{\tau,0}) \|\mathbf{t}\| \quad (3.44)$$

und analog:

$$d = \mathbf{e}_{x,\tau}^\top \mathbf{t} = \cos(\chi_{\tau,0}) \underbrace{\|\mathbf{e}_{x,\tau}\|}_{1} \|\mathbf{t}\| = \cos(\chi_{\tau,0}) \|\mathbf{t}\|. \quad (3.45)$$

3.3. Bahnführung in der Tangentialebene

Der Nenner von Gl. (3.42) lässt sich damit vereinfachen zu:

$$c^2 + d^2 = \underbrace{(\sin^2(\chi_{\tau,0}) + \cos^2(\chi_{\tau,0}))}_1 \|\mathbf{t}\|^2 = \|\mathbf{t}\|^2. \quad (3.46)$$

Setzt man die Gleichungen (3.43) - (3.46) in (3.42) ein, so ergibt sich schließlich:

$$\dot{\chi}_{\tau,0} = \frac{\begin{bmatrix} \cos(\chi_{\tau,0}) & -\sin(\chi_{\tau,0}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \left(\frac{\partial \mathbf{e}_{y,\tau}}{\partial \lambda} \dot{\lambda} + \frac{\partial \mathbf{e}_{y,\tau}}{\partial \phi} \dot{\phi} \right)^\top \mathbf{t} + \mathbf{e}_{y,\tau}^\top \mathbf{t}' \dot{s} \\ \left(\frac{\partial \mathbf{e}_{x,\tau}}{\partial \lambda} \dot{\lambda} + \frac{\partial \mathbf{e}_{x,\tau}}{\partial \phi} \dot{\phi} \right)^\top \mathbf{t} + \mathbf{e}_{x,\tau}^\top \mathbf{t}' \dot{s} \end{bmatrix}}{\|\mathbf{t}_\Gamma\|} \quad (3.47)$$

mit:

$$\frac{\partial \mathbf{e}_{y,\tau}}{\partial \lambda} = \begin{pmatrix} -\cos(\lambda) \\ -\sin(\lambda) \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \frac{\partial \mathbf{e}_{y,\tau}}{\partial \phi} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (3.48)$$

und:

$$\frac{\partial \mathbf{e}_{x,\tau}}{\partial \lambda} = \begin{pmatrix} \sin(\lambda) \sin(\phi) \\ -\cos(\lambda) \sin(\phi) \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \frac{\partial \mathbf{e}_{x,\tau}}{\partial \phi} = \begin{pmatrix} -\cos(\lambda) \cos(\phi) \\ -\sin(\lambda) \cos(\phi) \\ -\sin(\phi) \end{pmatrix}. \quad (3.49)$$

Abschließend sollen die Unbekannten $\dot{\lambda}$, $\dot{\phi}$ und \dot{s} erläutert werden. Analog zum Vorgehen in Gl. (3.36) kann die Bahngeschwindigkeit \mathbf{v}_k auf die Basisvektoren $\mathbf{e}_{x,\tau}$ und $\mathbf{e}_{y,\tau}$ der Tangentialebene projiziert werden. Aus der Definition des Skalarprodukts ergibt sich:

$$\|\mathbf{e}_{y,\tau} \mathbf{v}_k\| = \mathbf{v}_k^\top \mathbf{e}_{y,\tau}. \quad (3.50)$$

Diese Transport-Geschwindigkeit ergibt sich an der Position des Fluggeräts \mathbf{p} mit dem Hebelarm $\|\mathbf{p}\|$ und der Winkelgeschwindigkeit $\dot{\lambda}$ (vgl. Abb. 3.12). Aufgelöst nach der Winkelgeschwindigkeit ergibt sich:

$$\dot{\lambda} = \frac{\mathbf{v}_k^\top \mathbf{e}_{y,\tau}}{\|\mathbf{p}\| \cos(\phi)} \quad (3.51)$$

wobei die Kosinusfunktion im Nenner berücksichtigt, dass die Winkelgeschwindigkeit mit zunehmendem Abstand vom „Äquator“ (Deklination) zunimmt. Anschaulich gesprochen wird bei gleichbleibender Bahngeschwindigkeit eine kürzere Strecke auf der Kugelober-

3. Bahnführung

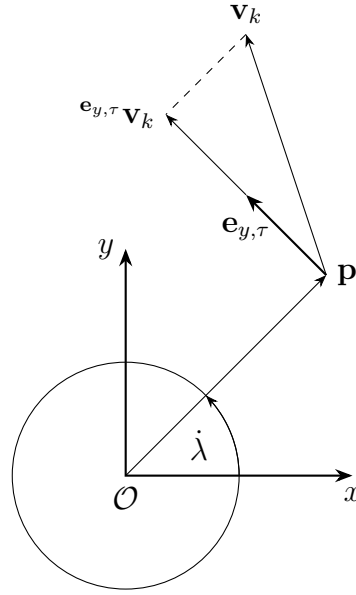


Abbildung 3.12.: Kinematische Zusammenhänge zur Bestimmung von $\dot{\lambda}$

fläche zurückgelegt. Für die Winkelgeschwindigkeit $\dot{\phi}$ kann analog:

$$\dot{\phi} = \frac{\mathbf{v}_k^\top \mathbf{e}_{x,\tau}}{\|\mathbf{p}\|} \quad (3.52)$$

angegeben werden.

Auf ähnliche Weise kann die Geschwindigkeit des Bahnparameters \dot{s} bestimmt werden, die dem Betrag der Projektion des projizierten Bahngeschwindigkeitsvektors $\mathbf{v}_{k,\perp}$ auf den Tangentenvektor der Sollbahn entspricht (vgl. Abb. 3.13). Die Projektion von \mathbf{v}_k auf die Kugeloberfläche kann durch $\mathbf{v}_{k,\perp} = \frac{\mathbf{v}_k}{\|\mathbf{p}\|}$ berechnet werden (linearer Zusammenhang). Des Weiteren kann die gleiche Beziehung wie in Gl. (3.36) angewandt werden, wenn der Tangentenvektor vor der Projektion zu einem Einheitsvektor normalisiert wird. Dies ergibt:

$$\dot{s} = \|\mathbf{t} \mathbf{v}_{k,\perp}\| = \left(\frac{\mathbf{v}_k}{\|\mathbf{p}\|} \right)^\top \frac{\mathbf{t}}{\|\mathbf{t}\|} = \frac{\mathbf{v}_k^\top \mathbf{t}}{\|\mathbf{p}\| \|\mathbf{t}\|} \quad (3.53)$$

wobei auf der rechten Seite der Gleichung, zur Vereinfachung des Ausdrucks, das gemischte Assoziativgesetz Anwendung findet.

Alle drei Größen $\dot{\lambda}$, $\dot{\phi}$ und \dot{s} besitzen Singularitäten. Es wird deshalb bei der programmtechnischen Umsetzung ein Mindestabstand des Fluggeräts vom Ursprung $\|\mathbf{p}\| \geq 1$ vorgegeben. Dies führt zu keinen Einschränkungen im Betrieb und erhöht die Robustheit

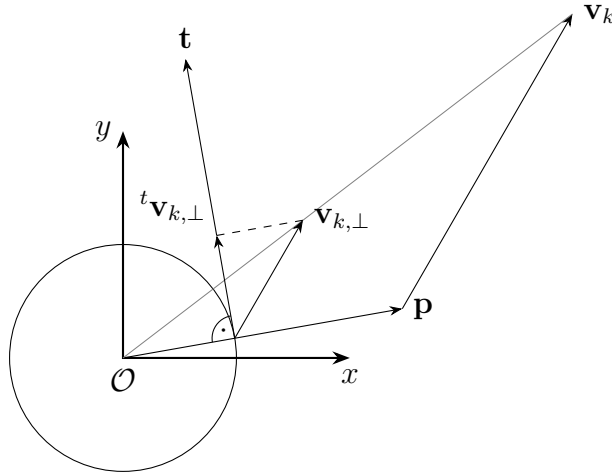


Abbildung 3.13.: Kinematische Zusammenhänge zur Bestimmung von \dot{s}

der Bahnführung für den Fall, dass die Navigationslösung fehlerhafte Werte liefert, oder sich das Fluggerät im Koordinatenursprung befindet. Dem Nenner in Gl. (3.51) ist jedoch zusätzlich Beachtung zu schenken. Für den Flug nahe des Zenits und $\phi \rightarrow \pi/2$ geht dieser gegen null. Im Regelbetrieb spielt dieser Fall keine Rolle, da mit geringer Elevation geflogen werden muss, um den Kosinusverlust (vgl. Abschn. 1.1 auf S. 3) gering zu halten. Um die Robustheit zu erhöhen, wird jedoch $\phi < 9\pi/20$ festgelegt.

3.3.3. Regelkreis

Der bisher abgeleitete Bahnazimut $\chi_{\tau,0}$ und die Azimutänderung $\dot{\chi}_{\tau,0}$ beschreiben Sollgrößen für die unterlagerten Regelkreise, um das Fluggerät parallel zur Sollbahn zu führen. Ein etwaiger Bahnfehler geht nicht in die Berechnung dieser Größen ein. Um das Fluggerät auf die Sollbahn zu führen, ist ein Regelkreis notwendig, der nachfolgend ausgelegt wird.

Geometrische Grundlagen

Für weiterführende Berechnung ist die Komponente des Betrags der Bahngeschwindigkeit von Interesse, die in der Tangentialebene der Kugeloberfläche liegt. Die Komponenten dieser gesuchten Geschwindigkeit in Richtung der Basisvektoren der Tangentialebene wurden bereits bei der Bestimmung von $\dot{\lambda}$ und $\dot{\phi}$ hergeleitet (vgl. Gl. (3.50)) und können

3. Bahnführung

entsprechend:

$$\|\mathbf{v}_{k,\tau}\| = \sqrt{(\mathbf{v}_k^\top \mathbf{e}_{x,\tau})^2 + (\mathbf{v}_k^\top \mathbf{e}_{y,\tau})^2} \quad (3.54)$$

zusammengesetzt werden. Entsprechend dem bereits zitierten linearen Zusammenhang bei der Projektion auf die Kugeloberfläche (vgl. Gl. (3.53)), kann diese Gleichung durch Division entsprechend:

$$\|\mathbf{v}_{k,\tau,\perp}\| = \frac{\|\mathbf{v}_{k,\tau}\|}{\|\mathbf{p}\|} \quad (3.55)$$

auf die Berechnung der gesuchten Größe erweitert werden. Diese Größe kann auch als Geschwindigkeit der projizierten Position des Fluggeräts auf der Kugeloberfläche interpretiert und entsprechend mit $\|\dot{\mathbf{p}}_\perp\|$ bezeichnet werden. Künftig werden beide Bezeichnungen durch: $\|\mathbf{v}_{k,\tau,\perp}\| = \|\dot{\mathbf{p}}_\perp\| = \nu_\perp$ ausgedrückt. Auch Gl. (3.55) besitzt eine Singularität, weshalb programmtechnisch $\|\mathbf{p}\| > 1$ vorausgesetzt wird.

Bei einem Flug entlang der Geodäte in Richtung Sollbahn kann ν_\perp als zeitliche Änderung der Ablage interpretiert werden. Hingegen erfolgt keine Annäherung, wenn entlang dem zuvor berechneten Kurs $\chi_{\tau,0}$ geflogen wird. Es erfolgt dann lediglich eine Bewegung parallel zur Sollbahn. In Gl. (3.30) auf S. 32 wurde der Geodätenvektor $\mathbf{b}(s)$ an der Sollbahn bestimmt. Daraus folgt analog der Geodätenvektor $\mathbf{c}(s)$ an der projizierten Position des Fluggeräts \mathbf{p}_\perp mit:

$$\mathbf{c}(s) = \frac{\mathbf{\Gamma}(s) - \cos(\delta(s))\mathbf{p}_\perp}{\sin(\delta(s))}. \quad (3.56)$$

Die Differenziation von Gl. 3.22 auf S. 27 nach der Zeit an der Stelle $s = s^*$ ergibt:

$$\dot{\delta} = -\frac{\dot{\mathbf{p}}_\perp^\top \mathbf{\Gamma}(s^*) + \overbrace{\mathbf{p}_\perp^\top \dot{\mathbf{\Gamma}}(s^*)}^0}{\sin(\delta(s^*))}. \quad (3.57)$$

Mit $\dot{\mathbf{\Gamma}}(s^*) = \mathbf{t}(s^*)\dot{s}^*$ verschwindet der zweite Summand, da der Positionsvektor auf der Tangente senkrecht steht. Löst man Gl. (3.56) nach $\mathbf{\Gamma}$ auf:

$$\mathbf{\Gamma}(s^*) = \mathbf{c}(s^*) \sin(\delta(s^*)) + \mathbf{p}_\perp \cos(\delta(s^*)) \quad (3.58)$$

und setzt in Gl. (3.57) ein, so kann geschrieben werden:

$$\dot{\delta} = -\frac{\dot{\mathbf{p}}_\perp^\top \mathbf{\Gamma}(s^*)}{\sin(\delta(s^*))} = \frac{\dot{\mathbf{p}}_\perp^\top \mathbf{c}(s^*) \sin(\delta(s^*)) + \overbrace{\dot{\mathbf{p}}_\perp^\top \mathbf{p}_\perp}^0 \cos(\delta(s^*))}{\sin(\delta(s^*))}. \quad (3.59)$$

3.3. Bahnführung in der Tangentialebene

Der zweite Summand verschwindet, da der Geschwindigkeitsvektor $\dot{\mathbf{p}}_{\perp}$ auf dem Positionsvektor \mathbf{p}_{\perp} senkrecht steht. Schließlich kann die Beziehung:

$$\dot{\delta} = -\dot{\mathbf{p}}_{\perp}^T \mathbf{c}(s^*) \quad (3.60)$$

angegeben werden. Aus der Definition des Skalarprodukts folgt für die rechte Seite:

$$-\dot{\mathbf{p}}_{\perp}^T \mathbf{c}(s^*) = \cos(\theta) \underbrace{\|\dot{\mathbf{p}}_{\perp}\|}_{\nu_{\perp}} \underbrace{\|\mathbf{c}(s^*)\|}_1 \quad (3.61)$$

und schließlich:

$$\dot{\delta} = -\nu_{\perp} \cos(\theta) \quad (3.62)$$

mit dem Winkel θ zwischen $\dot{\mathbf{p}}_{\perp}$ und $\mathbf{c}(s^*)$. Diese Herleitung belegt, was oben bereits beschrieben wurde. Bei einem Flug entlang von $\mathbf{c}(s^*)$ wird θ zu null und die zeitliche Änderung der Ablage erfolgt entsprechend $-\nu_{\perp}$. Wird dieser Flug kontinuierlich weitergeführt, so wird die Sollbahn schließlich senkrecht überflogen, denn es gilt:

$$\mathbf{c}^T(s^*) \mathbf{t}(s^*) = 0 \quad (3.63)$$

analog zu Gl. (3.34). Dies kann hergeleitet werden aus einer Grenzwertbetrachtung der Zähler der Gl. (3.30) und (3.56) entsprechend:

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \mathbf{b} = \lim_{\delta \rightarrow 0} -\mathbf{c}. \quad (3.64)$$

Ziel ist nun, aus diesem Zusammenhang den kommandierten Bahnazimut aufgrund des Regelfehlers $\chi_{\tau,\Delta}$ herzuleiten, der zur Annäherung des Fluggeräts an die Sollbahn führt. Für große Ablagen soll entsprechend $\theta \rightarrow 0$ geflogen werden, um eine schnelle Annäherung zu gewährleisten. Für $\delta \rightarrow 0$ ist jedoch eine Anpassung des kommandierten Bahnazimuts in der Tangentialebene $\chi_{\tau,soll}$ erforderlich, sodass sich das Fluggerät asymptotisch der Bahn „anschmiegt“ und diese nicht „überschießt“. Diese geometrischen Zusammenhänge können als konforme Abbildung (vgl. Abb. 3.14) verdeutlicht werden, sodass aus der Geodäte eine Gerade wird [20]. Alle übrigen Vektoren behalten ihre Orientierung gegenüber der Geodäte. Der kommandierte Bahnazimut $\chi_{\tau,soll}$ setzt sich zusammen aus der Vorsteuerung $\chi_{\tau,0}$ und dem Bahnazimut aufgrund des Regelfehlers $\chi_{\tau,\Delta}$. Letzterer ist im gezeigten Szenario negativ, weshalb sich der kommandierte Bahnazimut zum Flug

3. Bahnführung

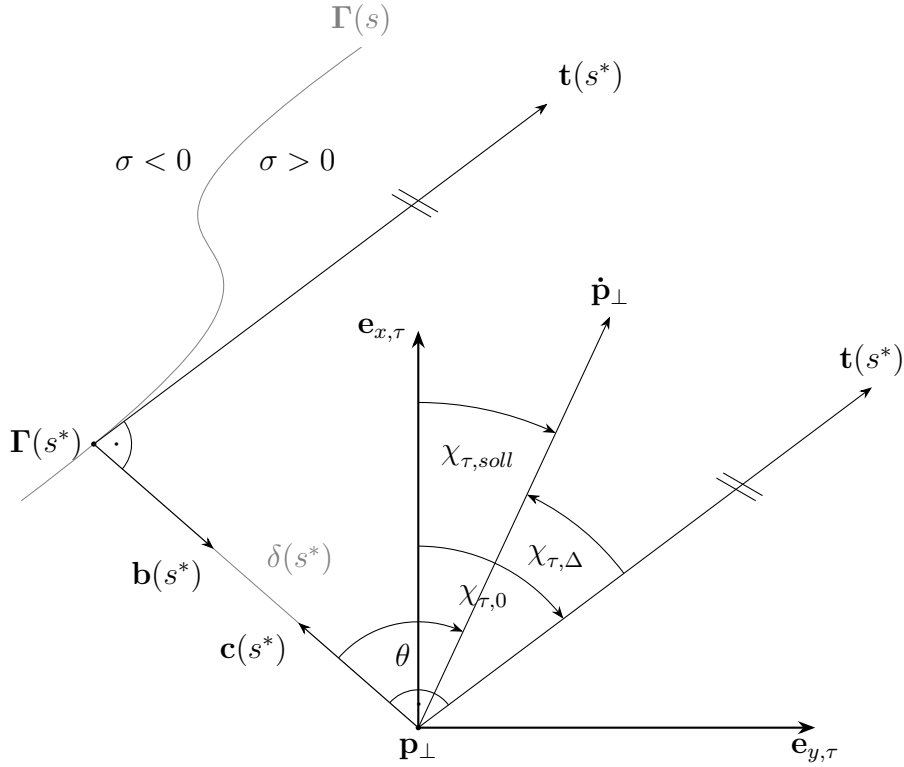


Abbildung 3.14.: Geometrischen Zusammenhänge zur Bestimmung von $\chi_{\tau,\Delta}$

parallel zur Sollbahn entsprechend verringert und sich das Fluggerät dieser annähert. Die beiden Geodätenvektoren \mathbf{b} und \mathbf{c} sind aus Gründen der Übersicht verkürzt dargestellt. Befindet sich das Fluggerät, wie skizziert, in Flugrichtung rechts von der Sollbahn, so bildet die Differenz von θ mit $\chi_{\tau,\Delta}$ einen rechten Winkel. Bei einem Flug links von der Sollbahn, muss entsprechend das Vorzeichen des Winkels $\chi_{\tau,\Delta}$ umgekehrt werden, um sich der Sollbahn anzunähern. Diese Fallunterscheidung wird abgebildet durch die Funktion:

$$\sigma = \text{sign} ((\mathbf{t}(s^*) \times \mathbf{\Gamma}(s^*))^\top (\mathbf{p}_\perp - \mathbf{\Gamma}(s^*))) \quad (3.65)$$

die zwei resultierende Vektoren über das Skalarprodukt miteinander vergleicht (vgl. Abb. 3.15). Befindet sich das Fluggerät rechts von der Sollbahn, so zeigen die resultierenden Vektoren in die gleiche Richtung. Die Signumfunktion übergibt dementsprechend den Wert $+1$. Bei einem Flug links der Bahn, kehrt sich das Vorzeichen um.

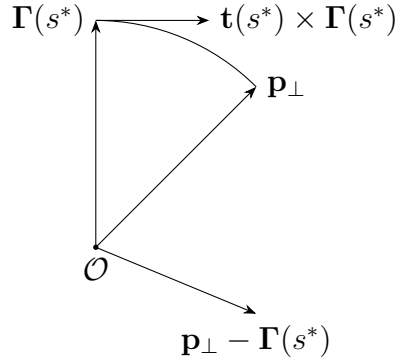


Abbildung 3.15.: Geometrische Zusammenhänge zur Berechnung von σ auf einem Segment des Einheitskreises

Damit kann für den Winkel θ allgemein:

$$\theta = \begin{cases} \pi/2 - \chi_{\tau,\Delta}, & \text{für } \sigma < 0 \\ \pi/2 + \chi_{\tau,\Delta}, & \text{für } \sigma > 0 \end{cases} \quad (3.66)$$

angegeben werden. Eingesetzt in Gl. (3.62), unter Anwendung der Komplementbeziehung $\cos(\pi/2 - x) = \sin(x)$, ergibt:

$$\dot{\delta} = \begin{cases} -\nu_{\perp} \sin(\chi_{\tau,\Delta}), & \text{für } \sigma < 0 \\ -\nu_{\perp} \sin(-\chi_{\tau,\Delta}), & \text{für } \sigma > 0 \end{cases} \quad (3.67)$$

die Fallunterscheidung für die Änderung der Ablage $\dot{\delta}$. Daraus folgt der allgemeingültige Zusammenhang:

$$\dot{\delta} = \sigma \nu_{\perp} \sin(\chi_{\tau,\Delta}). \quad (3.68)$$

Werden schnelle unterlagerte Regelkreise vorausgesetzt, so entspricht $\chi_{\tau,\Delta}$ in der obigen Gleichung bereits dem gesuchten Wert für den Bahnazimut (keine Unterscheidung von Soll- und Istwerten).

3.3.4. Bahnazimut und Azimutänderung

In diesem Kapitel werden die Ergebnisse für Bahnazimut und Azimutänderung vorausgehender Veröffentlichungen kurz zusammengefasst [20, 28, 27]. Eine genaue Herleitung

3. Bahnführung

folgt nicht, da diese Definitionen in Abschn. 3.5 weiterentwickelt und nicht weiter verwendet werden. Für den Bahnazimut wird die Funktion:

$$\chi_{\tau,\Delta} = \arctan 2(-\sigma\delta, \delta_0) \quad (3.69)$$

vorgeschlagen. Die skalare Größe $\delta_0 > 0$ kann dabei als Inverse eines Verstärkungsfaktors interpretiert werden. Über die Herleitung dieser Gleichung wird in den aufgeführten Quellen keine Aussage getroffen. Die Differenziation der obigen Gleichung nach der Zeit ergibt die Azimutänderung:

$$\dot{\chi}_{\tau,\Delta} = -\frac{\sigma/\delta_0}{1 + (\delta/\delta_0)^2} \dot{\delta}. \quad (3.70)$$

Für die zeitliche Änderung der Geodäte $\dot{\delta}$ kann aus Gl. (3.68) und (3.69):

$$\dot{\delta} = -\nu_{\perp} \frac{\delta/\delta_0}{\sqrt{1 + (\delta/\delta_0)^2}} \quad (3.71)$$

hergeleitet werden. Damit ergibt sich für die Azimutänderung schließlich:

$$\dot{\chi}_{\tau,\Delta} = \frac{\nu_{\perp} \sigma/\delta_0^2}{(1 + (\delta/\delta_0)^2)^{3/2}} \delta. \quad (3.72)$$

Beim Vergleich von Gl. (3.69) und (3.72) wird bereits deutlich, dass die vorgeschlagene Azimutänderung keine exakte zeitliche Änderung des Bahnazimuts sein kann. Beide Größen besitzen stets ein gegensätzliches Vorzeichen. In Unterabschn. 3.5.5 auf Seite 60 wird dies anhand einer Gegenüberstellung der Ergebnisse weiter verdeutlicht.

3.4. Transformation in das erdfeste System

Die bisher bestimmten Größen $\chi_{\tau,soll}$ und $\dot{\chi}_{\tau,soll}$ ermöglichen die Bahnführung in der Tangentialebene der Einheitskugel. Nun soll eine Transformation zu Bahnazimut und Bahnneigungswinkel (und deren zeitlichen Änderungen) in der Konvention der klassischen Flugmechanik erfolgen. So können die bisherigen Ergebnisse auch in herkömmlichen Autopiloten verwendet werden. Bahnazimut und Bahnneigungswinkel werden üblicherweise gegenüber dem geodätischen System beschrieben. Wie in Unterabschn. 3.3.2 beschrieben, kann in sehr guter Näherung stattdessen das erdfeste System auf der Erdoberfläche (Index E) verwendet werden. Eine nennenswerte laterale Abweichung vom Ankerpunkt ist durch

die Fesselung ohnehin nicht möglich. In diesem Kapitel weicht die Notation vom bisherigen Vorgehen ab, so dass Vektoren, Achsen und Winkel ohne Kennzeichnung im erdfesten System zu verstehen sind. Alles übrige wird entsprechend gekennzeichnet. Während für die Azimutänderung kinematische Manipulationen notwendig sind, genügt für den Bahnazimut eine geometrische Transformation. Dazu werden im folgenden Kapitel zunächst die notwendigen Transformationsmatrizen hergeleitet.

3.4.1. Geometrische Transformation

Das Windkoordinatensystem (Index w) zeigt mit der x_w -Achse in Windrichtung und ist damit parallel zu \mathbf{v}_w . Da die Elevation der Lemniskate in positiver Drehrichtung bezüglich der y_w -Achse definiert ist (vgl. Unterabschn. 3.2.3 auf S. 24), ist das Windsystem bei Nordwind gegenüber dem erdfesten System um 180° verdreht (vgl. Abb. 3.16). Allgemein gilt der Zusammenhang:

$${}_E\mathbf{T}_w = \mathbf{T}_x(\pi) \mathbf{T}_z(\pi + \xi) \quad (3.73)$$

mit der Windrichtung ξ . Die vorangestellte Matrix \mathbf{T}_x ist notwendig, da die z_E -Achse in Richtung Erdmittelpunkt orientiert ist, während z_w nach „oben“ zeigt.

Die Transformation vom Windsystem in das System der Tangentialebene (Index τ) kann mit Azimut λ und Deklination ϕ mit:

$${}_\tau\mathbf{T}_w = \mathbf{T}_y(-\pi/2 - \phi) \mathbf{T}_z(\lambda). \quad (3.74)$$

angegeben werden. In der klassischen Flugmechanik entspräche dies der Transformation vom erdfesten System (im Erdmittelpunkt) in das geodätische System.

Bahnazimut

In der Tangentialebene kann die kommandierte Flugrichtung durch den Einheitsvektor:

$${}_\tau\mathbf{e}_{soll} = \mathbf{T}_z^T(\chi_{\tau,soll}) {}_\tau\mathbf{e}_{x,\tau} \quad (3.75)$$

beschrieben werden. Es erfolgt dabei eine aktive Drehung von ${}_\tau\mathbf{e}_{x,\tau}$ um ${}_\tau\mathbf{e}_{z,\tau}$. Die gesuchte Flugrichtung im erdfesten System entspricht dann der Transformation dieses Vektors von

3. Bahnführung

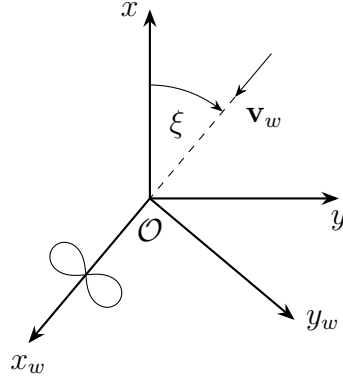


Abbildung 3.16.: Rotation des Windsystems gegenüber dem erdfesten System

der Tangentialebene in das erdfeste System und damit:

$$\mathbf{e}_{soll} = {}_E\mathbf{T}_{ww} \mathbf{T}_{\tau\tau} \mathbf{e}_{soll} \quad (3.76)$$

mit ${}_w\mathbf{T}_{\tau} = {}_{\tau}\mathbf{T}_w^T$. Nachdem die Flugrichtung im erdfesten System bekannt ist, kann der Bahnazimut auf einfache Weise abgeleitet werden. Das Vorgehen ähnelt der Bestimmung des Bahnazimuts in der Tangentialebene in Gl. (3.37) auf S. 35, wird aber dadurch vereinfacht, dass \mathbf{e}_{soll} bereits im erdfesten System ausgedrückt ist. Die Projektionen auf die x und y -Achse entfallen demnach und die Komponenten können direkt aus dem Vektor abgelesen werden (vgl. Abb. 3.17). Der Bahnazimut ergibt sich aus der arctan2-Funktion mit:

$$\chi_{soll} = \arctan2(\mathbf{e}_y^T \mathbf{e}_{soll}, \mathbf{e}_x^T \mathbf{e}_{soll}) . \quad (3.77)$$

Es wird nochmals daran erinnert, dass in diesem Kapitel ungekennzeichnete Größen im erdfesten Koordinatensystem dargestellt sind.

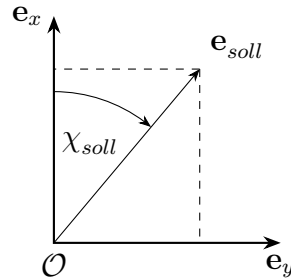


Abbildung 3.17.: Bestimmung des Bahnazimuts χ_{soll} im erdfesten System

Bahnneigungswinkel

Bei Flugwindkraftwerken, die Energie an Bord in Form von Turbinen erzeugen (OG), kann \mathbf{e}_{soll} genutzt werden, um den Bahnneigungswinkel γ direkt zu berechnen. Dann stimmt $\mathbf{e}_{x,k}$ mit \mathbf{e}_{soll} überein und die gesuchte Sollgröße kann mit:

$$\gamma_{\Gamma} = -\arcsin(\mathbf{e}_z^{\top} \mathbf{e}_{soll}) \quad (3.78)$$

angegeben werden. Das Minuszeichen kommt dadurch zustande, dass die z -Achse im erdfesten System zum Erdmittelpunkt zeigt und der Index Γ zeigt an, dass der Bahnneigungswinkel allein aus der Sollbahn hervorgeht.

Wird hingegen ein GG-System verwendet, so erfährt das Fluggerät eine zusätzliche radiale Geschwindigkeitskomponente $\mathbf{v}_{k,r}$ durch das Abwickeln des Seils. Die Abwickelgeschwindigkeit $\|\mathbf{v}_{k,r}\|$ induziert einen, im Vergleich zu einem identischen System ohne Abwicklung, größeren Bahnneigungswinkel, da der kommandierte Bahngeschwindigkeitsvektor nicht mehr in der Tangentialebene liegt. In Abb. 3.18 ist dieser Zusammenhang skizziert. Die

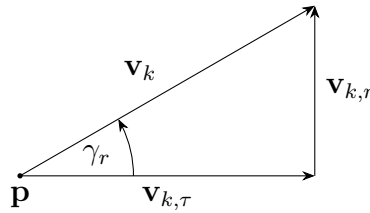


Abbildung 3.18.: Komponenten der Bahngeschwindigkeit \mathbf{v}_k

Abwickelgeschwindigkeit $\|\mathbf{v}_{k,r}\|$ wird von einem Windenregler - unter Berücksichtigung von maximaler Energieernte und Aufrechterhaltung der strukturellen Integrität des Fluggeräts vorgegeben³ - und als bekannt vorausgesetzt. Mit der Annahme schneller unterlagerter Regelkreise entsprechen \mathbf{v}_k und $\mathbf{v}_{k,r}$ ihren Sollgrößen und es kann der Bahnneigungswinkel:

$$\gamma_r = \arcsin\left(\frac{\|\mathbf{v}_{k,r}\|}{\|\mathbf{v}_k\|}\right) \quad (3.79)$$

berechnet werden, der allein von der radialen Geschwindigkeitskomponente induziert wird. Schließlich kann das Ergebnis für den Bahnneigungswinkel als Summe beider Kom-

³Die Auslegung des Windenreglers ist nicht Teil dieser Arbeit.

3. Bahnführung

ponenten mit:

$$\gamma_{soll} = \gamma_{\Gamma} + \gamma_r \quad (3.80)$$

angegeben werden. Durch diesen Ansatz kann $\gamma_{soll} > 90^\circ$ an die unterlagerten Regelkreise übergeben werden. Im dynamischen Betrieb von Flugwindkraftwerken ist ein derartiges Verhalten durchaus denkbar und muss entsprechend abgefangen werden können.

Aus Sicht der programmtechnischen Umsetzung ist in Gl. (3.79) der Definitionsbereich der Arkussinusfunktion zu beachten. Explizit wird das Argument so beschränkt, dass gilt: $\gamma_r < 30^\circ$ (im praktischen Betrieb sind $\gamma_r < 10^\circ$ zu erwarten).

3.4.2. Kinematische Transformation

Neben Bahnazimut und Bahnneigungswinkel, sollen auch deren zeitliche Änderungen $\dot{\chi}_{soll}$ und $\dot{\gamma}_{soll}$ im erdfesten System E bestimmt werden.

In der klassischen Flugmechanik legen zwei elementare Drehungen um die zuvor bestimmten Winkel Bahnazimut und Bahnneigungswinkel die Orientierung des bahnfesten Systems gegenüber dem geodätischen System fest. Die Beziehung zwischen dem Bahnazimut in der Tangentialebene und dem bahnfesten System ist komplizierter, da im Allgemeinen keine Achse des bahnfesten Systems in der Tangentialebene liegt. Die Orientierung beider Systeme zueinander bedarf so drei elementarer Drehungen mit einer zusätzlichen Drehung um die x_k -Achse mit dem Winkel μ_k . Die zugehörige Transformationsmatrix basiert auf der Eulerwinkelfolge mit ${}_k\mathbf{T}_\tau = \mathbf{T}_x(\mu_k) \mathbf{T}_y(\gamma_r) \mathbf{T}_z(\chi_{soll})$. Um Analogien aus der klassischen Flugmechanik nutzen zu können wird nun ein neues Koordinatensystem (Index \underline{k}) definiert, das aus dem bahnfesten System durch Rotation der x_k -Achse um μ_k , abgeleitet wird. Diese Rotation sorgt letztlich dafür, dass die $y_{\underline{k}}$ -Achse in der Tangentialebene liegt. Man erhält so ein rotiertes Bahnsystem, das sich zum Tangentialsystem ebenso verhält wie das ursprüngliche Bahnsystem zum geodätischen System in der klassischen Flugmechanik. Die entsprechende Transformationsmatrix lautet ${}_{\underline{k}}\mathbf{T}_\tau = \mathbf{T}_y(\gamma_r) \mathbf{T}_z(\chi_{soll})$.

Um die gesuchten Größen im erdfesten System zu bestimmen, wird die Winkelgeschwindigkeit zwischen dem rotierten Bahnsystem und dem erdfesten System in \underline{k} -Koordinaten ${}_{\underline{k}}\boldsymbol{\omega}^{E\underline{k}}$ (nachfolgend mit $\bar{\boldsymbol{\omega}}$ abgekürzt) auf zwei Arten hergeleitet. Die erste Herleitung erfolgt auf Basis von bisher bestimmten und bekannten Größen. Die zweite Herleitung erfolgt allgemein auf Basis der gesuchten Größen. Ein Gleichsetzen beider Herleitungen erlaubt dann die Auflösung nach der Azimutänderung und der Änderung des Bahnneigungswinkels im erdfesten System.

Winkelgeschwindigkeit aufgrund bekannter Größen

Die gesuchte Winkelgeschwindigkeit $\bar{\omega}$ kann generell als Summe der Winkelgeschwindigkeiten zwischen den Teilsystemen mit Index: $\underline{k} - \tau - w - E$ geschrieben werden. Da der Ausdruck in \underline{k} -Koordinaten gesucht ist, muss entsprechend transformiert werden. Es gilt:

$$\bar{\omega} = \underline{k}\mathbf{T}_E \left(\omega^{Ew} + {}_E\mathbf{T}_{ww} \omega^{w\tau} \right) + \underline{k}\omega^{\tau\underline{k}}. \quad (3.81)$$

Die Winkelgeschwindigkeit ω^{Ew} beschreibt die Drehung des Windsystems bezüglich dem erdfesten System aufgrund einer zeitlichen Änderung der Windrichtung $\dot{\xi}$ (vgl. Abb. 3.16 auf S. 46). Im Vergleich zu den übrigen Summanden ist dieser Term betragsmäßig klein und kann in guter Näherung vernachlässigt werden [27]. Damit vereinfacht sich die obige Gleichung zu:

$$\bar{\omega} = \underline{k}\mathbf{T}_{EE} \mathbf{T}_{ww} \omega^{w\tau} + \underline{k}\omega^{\tau\underline{k}}. \quad (3.82)$$

Der erste Summand beschreibt die Drehgeschwindigkeit des Tangentialsystems bezüglich dem Windsystem und geht aus den kinematischen Beziehungen hervor, mit denen die Gleichungen (3.51) und (3.52) auf S. 37 hergeleitet wurden. Es ergibt sich:

$${}_w\omega^{w\tau} = {}_w \begin{pmatrix} \dot{\phi} \sin(\lambda) & -\dot{\phi} \cos(\lambda) & \dot{\lambda} \end{pmatrix}^T \quad (3.83)$$

wobei die Herleitung anschaulich anhand Abb. 3.2 auf S. 19 erfolgt. So rotiert das Tangentialsystem um die x_w -Achse mit $\dot{\phi}$, wenn sich dieses in der y_w/z_w -Ebene (mit $\lambda = \pi/2$) befindet. Eine Abnahme erfolgt entsprechend der Sinusfunktion. Die anderen Komponenten ergeben sich analog. Die Transformationsmatrix ${}_E\mathbf{T}_w$ wurde in Gl. (3.73) auf S. 45 bereits hergeleitet. Die Transformationsmatrix $\underline{k}\mathbf{T}_E$ kann wie im Anhang A.1 beschrieben, aus den Basisvektoren des rotierten Bahnsystems, dargestellt im erdfesten System, aufgebaut werden. Dies ergibt:

$$\underline{k}\mathbf{T}_E = \begin{bmatrix} \mathbf{e}_{x,\underline{k}} & \mathbf{e}_{y,\underline{k}} & \mathbf{e}_{z,\underline{k}} \end{bmatrix}^T. \quad (3.84)$$

3. Bahnführung

Der Basisvektor $\mathbf{e}_{x,\underline{k}}$ stimmt mit $\mathbf{e}_{x,k}$ überein und kann aus der Anschauung mit:

$$\mathbf{e}_{x,\underline{k}} = \begin{pmatrix} \cos(\chi) \cos(\gamma) \\ \sin(\chi) \cos(\gamma) \\ -\sin(\gamma) \end{pmatrix} \quad (3.85)$$

angegeben werden. Die beiden anderen Basisvektoren ergeben sich aus den geometrischen Randbedingungen mit:

$$\mathbf{e}_{y,\underline{k}} = \frac{-_E \mathbf{T}_{ww} \mathbf{p} \times \mathbf{e}_{x,\underline{k}}}{\| -_E \mathbf{T}_{ww} \mathbf{p} \times \mathbf{e}_{x,\underline{k}} \|} \quad (3.86)$$

und:

$$\mathbf{e}_{z,\underline{k}} = \mathbf{e}_{x,\underline{k}} \times \mathbf{e}_{y,\underline{k}}. \quad (3.87)$$

Der zweite Summand in Gl. (3.82) beschreibt die Winkelgeschwindigkeit zwischen dem rotierten Bahnsystem und dem Tangentialsystem und kann in \underline{k} -Koordinaten mit

$$\underline{k} \boldsymbol{\omega}^{\tau \underline{k}} = \begin{pmatrix} 0 \\ \dot{\gamma}_r \\ 0 \end{pmatrix} + \mathbf{T}_y(\gamma_r) \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\chi}_\tau \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\dot{\chi}_\tau \sin(\gamma_r) \\ \dot{\gamma}_r \\ \dot{\chi}_\tau \cos(\gamma_r) \end{pmatrix} \quad (3.88)$$

angegeben werden. Die Transformation ist notwendig, da $\dot{\chi}_\tau$ im Allgemeinen nicht im rotierten Bahnsystem liegt. Die Komponente des Bahnneigungswinkels aus der Abwinkelgeschwindigkeit γ_r wird vom Windenregler (vgl. Gl. (3.79)) vorgegeben. Mit $\dot{\gamma}_r$ steht nun ein weiterer Freiheitsgrad zur Verfügung, der durch $\|\dot{\mathbf{v}}_{k,r}\|$ festgelegt wird. In der vorliegenden Arbeit wird der Windenregler, wie bereits beschrieben, aber nicht weiter behandelt und $\dot{\gamma}_r = 0$ gesetzt. Für OG-Systeme mit $\|\mathbf{v}_{k,r}\| = 0$ kann die rechte Seite der obigen Gleichung zu $\underline{k} \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dot{\chi}_\tau \end{pmatrix}^\top$ vereinfacht werden.

Aufgrund der Zusammenhänge in Gl. (3.81) - (3.88) kann der gesuchte Vektor $\bar{\boldsymbol{\omega}}$ berechnet werden und dient dem komponentenweisen Vergleich im übernächsten Abschnitt.

Winkelgeschwindigkeit in gesuchten Größen

Es kann auch eine Herleitung für $\bar{\boldsymbol{\omega}}$ angegeben werden, die allein auf Winkeln und Winkelgeschwindigkeiten im erdfesten System beruht. Die Winkelgeschwindigkeiten entsprechen dabei den gesuchten Größen. Die Herleitung erfolgt auf Basis der Beziehung zwischen

Kardanwinkel und Winkelgeschwindigkeit im körperfesten System [14, S. 23] mit:

$$\bar{\boldsymbol{\omega}} = \begin{pmatrix} \dot{\mu}_k \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \mathbf{T}_x(\mu_k) \begin{pmatrix} 0 \\ \dot{\gamma} \\ 0 \end{pmatrix} + \mathbf{T}_x(\mu_k) \mathbf{T}_y(\gamma) \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\chi} \end{pmatrix}. \quad (3.89)$$

Multipliziert man diese Gleichung aus und fasst zusammen, so ergibt sich:

$$\bar{\boldsymbol{\omega}} = \begin{pmatrix} \bar{\omega}_x \\ \bar{\omega}_y \\ \bar{\omega}_z \end{pmatrix} = \underset{\underline{k}}{\begin{pmatrix} \dot{\mu}_k - \dot{\chi} \sin(\gamma) \\ \dot{\gamma} \cos(\mu_k) + \dot{\chi} \sin(\mu_k) \cos(\gamma) \\ -\dot{\gamma} \sin(\mu_k) + \dot{\chi} \cos(\mu_k) \cos(\gamma) \end{pmatrix}} \quad (3.90)$$

mit den aufgezeigten Teilkomponenten des Drehvektors.

Gleichsetzen und Bestimmung der gesuchten Größen

Die gesuchten Größen können nun komponentenweise berechnet werden, doch zuvor muss der unbekannte Drehwinkel μ_k bestimmt werden.

Die Transformationsmatrix $\underset{\underline{k}}{\mathbf{T}}_E$ wurde in Gl. (3.84) mit Basisvektoren hergeleitet. Sie kann aber auch als Eulerwinkelfolge und der zugehörigen Transformationsmatrix:

$$\underset{\underline{k}}{\mathbf{T}}_E = \mathbf{T}_x(\mu_k) \mathbf{T}_y(\gamma) \mathbf{T}_z(\chi) \quad (3.91)$$

angegeben werden. Die dritte Spalte der ausmultiplizierten und zusammengefassten Version lautet:

$$\underset{\underline{k}}{\mathbf{T}}_E \mathbf{e}_z = \begin{bmatrix} -\sin(\mu_k) \\ \cos(\gamma) \sin(\mu_k) \\ \cos(\gamma) \cos(\mu_k) \end{bmatrix} \quad (3.92)$$

und erlaubt einen Einblick in die Struktur der Matrix. Zur Bestimmung von μ_k sind die beiden unteren Einträge besonders von Interesse. Setzt man diese in Relation findet man:

$$\frac{\mathbf{e}_y^T \underset{\underline{k}}{\mathbf{T}}_E \mathbf{e}_z}{\mathbf{e}_z^T \underset{\underline{k}}{\mathbf{T}}_E \mathbf{e}_z} = \frac{\sin(\mu_k)}{\cos(\mu_k)} = \tan(\mu_k). \quad (3.93)$$

3. Bahnführung

Damit lässt sich die gesuchte Größe durch:

$$\mu_k = \arctan \left(\frac{\mathbf{e}_y^T \underline{k} \mathbf{T}_E \mathbf{e}_z}{\mathbf{e}_z^T \underline{k} \mathbf{T}_E \mathbf{e}_z} \right) \quad (3.94)$$

mit der bekannten Transformationsmatrix $\underline{k} \mathbf{T}_E$ aus Gl. (3.84) berechnen.

Die gesuchten Änderungen von Bahnazimut und Bahnneigungswinkel im erdfesten System ergeben sich schließlich durch einen komponentenweisen Vergleich von Gl. (3.90) mit der aufgezeigten Herleitung für Gl. (3.82). Die ersten beiden Komponenten werden entsprechend:

$$\bar{\omega}_y \sin(\mu_k) + \bar{\omega}_z \cos(\mu_k) = \dot{\chi} \cos(\gamma) \underbrace{(\sin^2(\mu_k) + \cos^2(\mu_k))}_1 \quad (3.95)$$

addiert und mit:

$$\dot{\chi} = \frac{\bar{\omega}_y \sin(\mu_k) + \bar{\omega}_z \cos(\mu_k)}{\cos(\gamma)} \quad (3.96)$$

nach der gesuchten Azimutänderung aufgelöst. Die Änderung des Bahnneigungswinkels lässt sich durch Einsetzen dieser Gleichung in die dritte Zeile in Gl. (3.90) zu:

$$\dot{\gamma} = \bar{\omega}_y \cos(\mu_k) - \bar{\omega}_z \sin(\mu_k) \quad (3.97)$$

berechnen. Werden schnelle unterlagerte Regelkreise vorausgesetzt, dann können χ, γ durch $\chi_{soll}, \gamma_{soll}$ und $\dot{\chi}, \dot{\gamma}$ durch $\dot{\chi}_{soll}, \dot{\gamma}_{soll}$ ersetzt werden. Eingesetzt in die Gleichungen (3.85), (3.96) und (3.97) führt dies schließlich auf die Bestimmungsgleichungen für die gesuchten Größen.

3.5. Weiterentwicklung der Bahnführung

Während den bisherigen Ausführungen zur Bahnführung andere Veröffentlichungen zugrunde liegen [20, 28, 27], basiert das Vorgehen in diesem Kapitel auf eigenen Entwicklungen. Es werden neue Definitionen für Bahnazimut $\chi_{\tau, \Delta}$ und Azimutänderung $\dot{\chi}_{\tau, \Delta}$ des Regelkreises in Unterabschn. 3.3.3 auf S. 39 vorgeschlagen, die auf einer stetigen Beschreibung der Ablage von der Sollbahn und deren zeitlicher Änderung beruhen. Zur Veranschaulichung der Herleitungen sind Ergebnisse aus Kap. 4 zur Simulation mit einem kinematischen Ersatzmodell vorweggenommen. Zur Unterscheidbarkeit von den weiter-

entwickelten Größen werden die bisherigen Größen nachfolgend mit ★ gekennzeichnet.

3.5.1. Stetige Beschreibung der Ablage

In Unterabschn. 3.3.1 wurde eine Beziehung für die Ablage von der Sollbahn als Länge der Geodäte hergeleitet. Die Gleichung wird hier zur besseren Lesbarkeit wiederholt:

$$\delta(s)^\star = \arccos(\mathbf{p}_\perp^\top \mathbf{\Gamma}(s)). \quad (3.98)$$

Durch die einfache mathematische Form ist diese Gleichung zur Entwicklung einer Regelung des Bahnfehlers (vgl. Unterabschn. 3.3.3) gut geeignet. Da die Definition des Skalarprodukts als Bestimmungsgleichung jedoch nur für positive Winkel definiert ist, ergibt $\delta(t)$ eine unstetige Funktion und es kann keine Unterscheidung bezüglich Linksseitigkeit und Rechtsseitigkeit der Sollbahn getroffen werden. Um die Ablage von der Sollbahn vollständig beschreiben zu können, wurde die Funktion σ (vgl. Gl. (3.65) auf S. 42) eingeführt, die das Überschreiten der Sollbahn durch einen Vorzeichenwechsel indiziert. Bei der numerischen Integration ist dieses Vorgehen allerdings kritisch. Zur Veranschaulichung ist in Abb. 3.19 ein Ausschnitt des Zeitschriebs für $\chi_{\tau,\Delta}$ gezeigt.

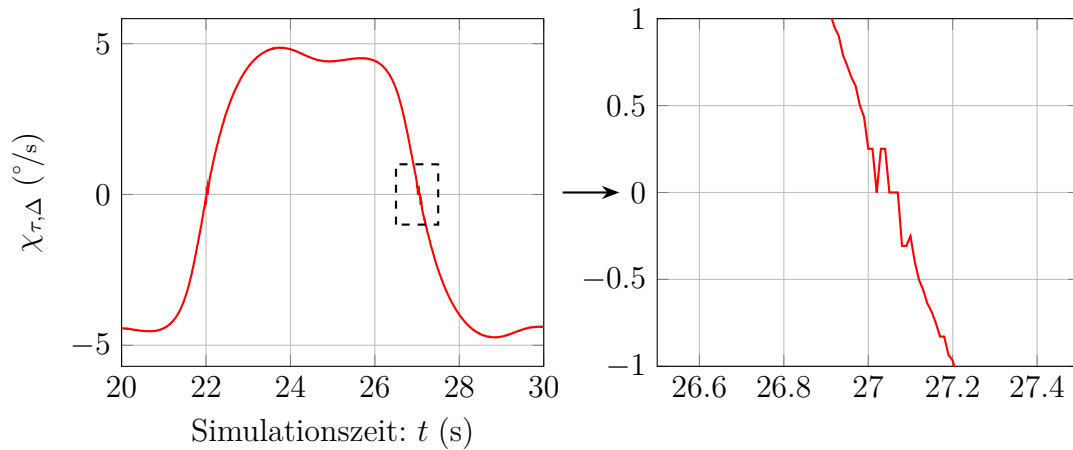


Abbildung 3.19.: Unstetigkeiten beim Überschreiten der Abszisse durch Verwendung einer unstetigen Beschreibung der Ablage

Zur Lösung dieses Problems wird ein neues Geodätenkoordinatensystem (Index δ) eingeführt, das eine stetige Beschreibung der Ablage ermöglicht. Der Einheitsvektor $\mathbf{e}_{x,\delta}$

3. Bahnführung

entspricht der projizierten Position des Fluggeräts \mathbf{p}_\perp :

$$\mathbf{e}_{x,\delta} = \mathbf{p}_\perp . \quad (3.99)$$

Die y_δ -Achse wird durch $\mathbf{e}_{y,\delta}$ beschrieben:

$$\mathbf{e}_{y,\delta} = \frac{\mathbf{e}_{x,\delta} \times \mathbf{t}}{\|\mathbf{e}_{x,\delta} \times \mathbf{t}\|} \quad (3.100)$$

sodass $\Gamma(s^*)$ in der x_δ/y_δ -Ebene liegt. Hier wird der in Unterabschn. 3.3.2 aufgezeigte Zusammenhang genutzt, dass für $s = s^*$ die Tangenten an \mathbf{p}_\perp und $\Gamma(s^*)$ identisch sind. Die z_δ -Achse ergänzt die beiden vorherigen Achsen zu einem Rechtssystem:

$$\mathbf{e}_{z,\delta} = \mathbf{e}_{x,\delta} \times \mathbf{e}_{y,\delta} . \quad (3.101)$$

In Abb. 3.20 ist dieser Zusammenhang veranschaulicht. Die Transformationsmatrix vom

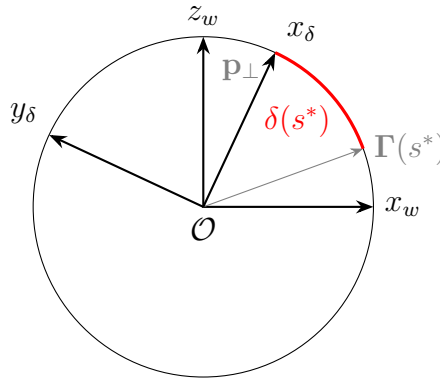


Abbildung 3.20.: Einführung des Geodätenkoordinatensystems (Index δ)

Windkoordinatensystem in das Geodätenkoordinatensystem wird beschrieben durch:

$${}_\delta \mathbf{T}_w = \begin{bmatrix} \mathbf{e}_{x,\delta} & \mathbf{e}_{y,\delta} & \mathbf{e}_{z,\delta} \end{bmatrix}^\top \quad (3.102)$$

und ermöglicht die Transformation von $\Gamma(s^*)$ vom Windkoordinatensystem:

$${}_\delta \Gamma(s^*) = {}_\delta \mathbf{T}_{w\delta} \Gamma(s^*) \quad (3.103)$$

in das Geodätenkoordinatensystem. Die Ablage $\delta(s^*)$ kann dadurch mit:

$$\delta(s^*) = \arctan 2(\mathbf{e}_y^\top \delta \mathbf{\Gamma}(s^*), \mathbf{e}_x^\top \delta \mathbf{\Gamma}(s^*)) \quad (3.104)$$

als stetige Funktion angegeben werden. Die ursprüngliche geometrische Bedeutung der Geodäte bleibt dabei erhalten, es werden aber in Flugrichtung linksseitig der Sollbahn negative Werte berechnet. Die Länge der Geodäte berechnet sich somit allgemein mit $\|\delta(s^*)\|$. Das Ergebnis der numerischen Integration ist in Abb. 3.21 abgebildet und zeigt einen stetigen Übergang beim Überschreiten der Abszisse.

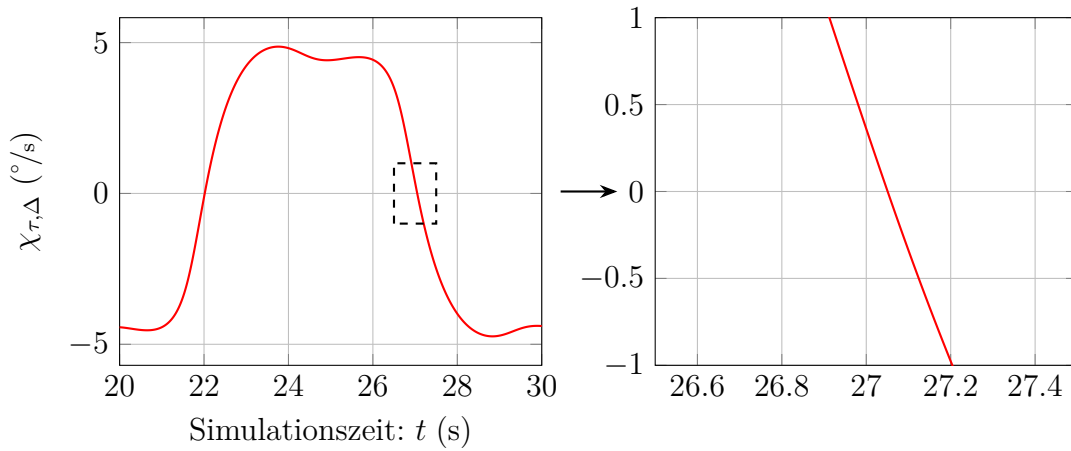


Abbildung 3.21.: Ergebnis der Verwendung einer stetigen Beschreibung der Ablage

3.5.2. Zeitliche Änderung der Ablage

Für die Bestimmung der Azimutänderung des Regelkreises $\dot{\chi}_{\tau,\Delta}$ ist die zeitliche Änderung der Ablage an der Stelle $s = s^*$ notwendig. Die unstetige geometrische Beschreibung von $\delta(s)^\star$ (entsprechend Gl. (3.98)) ist hierfür ungeeignet, da die Differenziation eine Singularität bei $s^* = 0$ erzeugt (vgl. Unterabschn. 3.3.3 auf Seite 39):

$$\dot{\delta}(s^*)^\star = -\frac{\dot{\mathbf{p}}_\perp^\top \mathbf{\Gamma}(s^*)}{\sin(\delta(s^*)^\star)} . \quad (3.105)$$

In Gl. (3.72) auf S. 44 wird stattdessen die Definition nach Gl. (3.71) verwendet, die als geforderte Abklingrate interpretiert werden kann und nicht aus den geometrischen Zusammenhängen hervorgeht. Dies führt auf ein fehlerhaftes Ergebnis, wie in Unterabschn. 3.5.5

3. Bahnführung

entsprechend demonstriert wird. Zur Lösung dieses Problems wird im Folgenden eine Definition für die zeitliche Änderung der Ablage auf Basis der stetigen Funktion (3.104) hergeleitet, die gänzlich auf geometrischen Zusammenhängen beruht. Die Differenzierung von ${}_{\delta}\dot{\mathbf{\Gamma}}(s^*)$ in Gl. (3.103) nach der Zeit ergibt sich zu:

$${}_{\delta}\dot{\mathbf{\Gamma}}(s^*) = {}_{\delta}\dot{\mathbf{T}}_{ww}\mathbf{\Gamma}(s^*) + {}_{\delta}\mathbf{T}_{ww}\dot{\mathbf{\Gamma}}(s^*) . \quad (3.106)$$

Der erste Summand entspricht dem Transport-Term, der durch die relative Drehgeschwindigkeit der beiden Koordinatensysteme beschrieben wird:

$${}_{\delta}\dot{\mathbf{T}}_{ww}\mathbf{\Gamma}(s^*) = -{}_{\delta}\mathbf{T}_{ww}\dot{\mathbf{p}}_{\perp} . \quad (3.107)$$

Die Geschwindigkeit $\dot{\mathbf{p}}_{\perp}$ kann aus der Bahngeschwindigkeit im Windsystem berechnet werden, indem die Geschwindigkeitskomponente senkrecht zur Tangentialebene von der projizierten Bahngeschwindigkeit auf den Einheitskreis $\mathbf{v}_{\perp} = \frac{\mathbf{v}_k}{\|\mathbf{p}\|}$ subtrahiert wird:

$$\dot{\mathbf{p}}_{\perp} = \mathbf{v}_{\perp} - (\mathbf{v}_{\perp}^{\top}\mathbf{p}_{\perp})\mathbf{p}_{\perp} . \quad (3.108)$$

Der zweite Summand in Gl. (3.106) kann entsprechend:

$${}_{\delta}\mathbf{T}_{ww}\dot{\mathbf{\Gamma}}(s^*) = {}_{\delta}\mathbf{T}_w \underbrace{\frac{\partial \mathbf{\Gamma}(s^*)}{\partial s}}_{\mathbf{t}(s^*)} \frac{ds}{dt} \quad (3.109)$$

umformuliert werden. Die Tangente \mathbf{t} steht per Definition senkrecht auf der x_{δ}/y_{δ} -Ebene, weshalb ${}_w\dot{\mathbf{\Gamma}}(s^*)$ lediglich eine Komponente in z_{δ} -Richtung besitzt. Die Berechnung der zeitlichen Änderung der Ablage ist damit von diesem Term unabhängig und Gl. (3.106) vereinfacht sich hier zu:

$${}_{\delta}\dot{\mathbf{\Gamma}}(s^*) = -{}_{\delta}\mathbf{T}_{ww}\dot{\mathbf{p}}_{\perp} . \quad (3.110)$$

Mit der Identität $\frac{d}{dt}(\arctan(x)) = \frac{\dot{x}}{1+x^2}$ und der Substitution des Arguments in Gl. (3.104) durch x gilt:

$$\dot{x} = {}_{\delta} \left(\frac{\mathbf{e}_y^{\top} \dot{\mathbf{\Gamma}}(s^*) \mathbf{e}_x^{\top} \mathbf{\Gamma}(s^*) - \mathbf{e}_y^{\top} \mathbf{\Gamma}(s^*) \mathbf{e}_x^{\top} \dot{\mathbf{\Gamma}}(s^*)}{(\mathbf{e}_x^{\top} \mathbf{\Gamma}(s^*))^2} \right) \quad (3.111)$$

in Koordinaten des Geodätensystems. Mit $x = \frac{\mathbf{e}_y^\top \boldsymbol{\Gamma}(s^*)}{\mathbf{e}_x^\top \boldsymbol{\Gamma}(s^*)}$ kann schließlich die zeitliche Änderung der Ablage an der Stelle $s = s^*$ angegeben werden:

$$\dot{\delta}(s^*) = \left(\frac{\mathbf{e}_y^\top \dot{\boldsymbol{\Gamma}}(s^*) \mathbf{e}_x^\top \boldsymbol{\Gamma}(s^*) - \mathbf{e}_y^\top \boldsymbol{\Gamma}(s^*) \mathbf{e}_x^\top \dot{\boldsymbol{\Gamma}}(s^*)}{(\mathbf{e}_x^\top \boldsymbol{\Gamma}(s^*))^2 + (\mathbf{e}_y^\top \boldsymbol{\Gamma}(s^*))^2} \right) . \quad (3.112)$$

Der Index δ wurde aus Gründen der Übersicht in Gl. (3.111) und (3.112) bei $\boldsymbol{\Gamma}(s^*)$ und $\dot{\boldsymbol{\Gamma}}(s^*)$ weggelassen und vor die Klammer gezogen. Auf Basis der entwickelten stetigen Funktionen für die Ablage und deren zeitliche Änderung werden im Folgenden der Bahnazimut und die Azimutänderung des Regelkreises hergeleitet.

3.5.3. Bahnazimut des Regelkreises

Als Grundlage der Herleitung des Bahnazimuts des Regelkreises wird die Definition (3.68) auf S. 43 verwendet:

$$\dot{\delta} = \sigma \nu_\perp \sin(\chi_{\tau,\Delta}) . \quad (3.113)$$

Die zeitliche Änderung der Ablage entspricht einer Funktion des gesuchten Bahnazimuts $\chi_{\tau,\Delta}$ und der Geschwindigkeit ν_\perp in der Tangentialfläche auf der Kugeloberfläche. Der Vorzeichenwechsel beim Überschreiten der Sollbahn kann nach der neuen Definition der Ablage mit:

$$\sigma = \frac{\delta(s^*)}{\|\delta(s^*)\|} \quad (3.114)$$

angegeben werden. Das weitere Vorgehen gleicht im Ansatz einer Ein-/Ausgangslinearisierung (E/A-Linearisierung), wofür zunächst die Pseudosteuerung:

$$u_\delta = \dot{\delta} \quad (3.115)$$

definiert wird. Damit wird aus dem nichtlinearen Entwurfsmodell in Gl. (3.113) ein einfacher Integrator. Es ist naheliegend, ein Regelgesetz der Form $u_\delta = -k_\delta \|\delta\|$ mit dem skalaren Verstärkungsfaktor $k_\delta > 0$ zu definieren, sodass die Regeldifferenz $\|\delta\|$ gemäß einer stabilen linearen Dynamik gegen null geht. Da nach Gl. (3.113) allerdings eine obere Grenze für die Abklingrate der Form:

$$\|\dot{\delta}_{max}\| = \nu_\perp \quad (3.116)$$

3. Bahnführung

besteht, muss hier ein Begrenzer vorgesehen werden. Bei großen Ablagen ergibt das Produkt $k_\delta \|\delta\|$ ansonsten unzulässige Werte. In Abb. 3.22 ist dieser Sachverhalt verdeutlicht. Ab einer kritischen Ablage $\|\delta_{krit}\|$ muss das lineare Regelgesetz begrenzt werden, um die Forderung in Gl. (3.116) nicht zu verletzen. Dies führt auf einen unstetigen Ver-

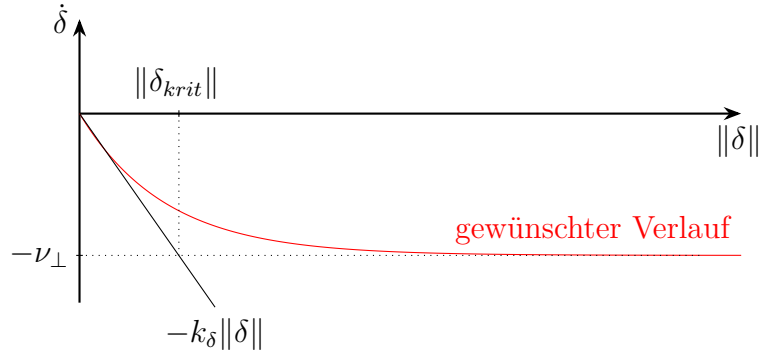


Abbildung 3.22.: Motivation zur Verwendung eines nichtlinearen Regelgesetzes für die Pseudosteuerung u_δ

lauf $\chi_{\tau,\Delta}(\|\delta\|)$ und in der Folge zu Singularitäten bei der Bestimmung von $\dot{\chi}_{\tau,\Delta}$ durch Differenziation. Befindet sich das Fluggerät in der Nähe der Sollbahn mit $k_\delta \|\delta\| < \nu_\perp$, so tritt dieses Phänomen nicht auf und es kann das obige lineare Regelgesetz mit dem klassischen Vorgehen der E/A-Linearisierung angewendet werden. Das Ziel der nachfolgenden Ausführungen besteht allerdings darin, ein global gültiges und stetiges Verhalten für Azimut und Azimutänderung des Regelkreises herzuleiten. Folglich ist eine Funktion gesucht, die einen stetigen Übergang von der maximalen Abklingrate $|\nu_\perp|$ ermöglicht (gewünschter Verlauf in Abb. 3.22). Es wird eine exponentielle Funktion vorgeschlagen, die auf das nichtlineare Regelgesetz:

$$u_\delta = -\nu_\perp(1 - e^{-k_\delta \|\delta\|}) \quad (3.117)$$

führt. Der geschlossene Regelkreis ergibt sich so zu:

$$\dot{\delta} = -\nu_\perp(1 - e^{-k_\delta \|\delta\|}). \quad (3.118)$$

Nach dem Einsetzen von Gl. (3.118) in (3.113) und Auflösen kann das Ergebnis der Regelung mit:

$$\chi_{\tau,\Delta} = \sigma \arcsin(e^{-k_\delta \|\delta\|} - 1) \quad (3.119)$$

angegeben werden. Die σ -Funktion kann dabei vor den Arkussinus gezogen werden, da diese lediglich das Vorzeichen abbildet. Es ist leicht zu überprüfen, dass $\chi_{\tau,\Delta}$ für einen abklingenden Bahnfehler verschwindet. Dies führt zum beabsichtigten Verhalten, dass bei einem Flug auf der Sollbahn der kommandierte Bahnazimut:

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \chi_{\tau,soll} = \chi_{\tau,0} \quad (3.120)$$

rein aus der Geometrie der Sollbahn in der Vorsteuerung bestimmt wird.

3.5.4. Azimutänderung des Regelkreises

Wie bereits bei der Vorsteuerung in Unterabschn. 3.3.2 auf S. 30 diskutiert, ergibt die Ableitung des Bahnazimuts nach der Zeit die Azimutänderung:

$$\dot{\chi}_{\tau,\Delta} = \frac{d}{dt} \left(\sigma \arcsin(e^{-k_\delta \|\delta\|} - 1) \right). \quad (3.121)$$

Weiter aufgelöst kann geschrieben werden:

$$\dot{\chi}_{\tau,\Delta} = \dot{\sigma} \arcsin(e^{-k_\delta \|\delta\|} - 1) + \sigma \frac{d}{dt} \left(\arcsin(e^{-k_\delta \|\delta\|} - 1) \right). \quad (3.122)$$

Mit:

$$\dot{\sigma} = \frac{d}{dt} \left(\frac{\delta}{\|\delta\|} \right) \quad (3.123)$$

und der Differenziation der Norm der Ablage nach der Zeit:

$$\frac{d}{dt} (\|\delta\|) = \frac{\delta \dot{\delta}}{\|\delta\|} \quad (3.124)$$

folgt:

$$\dot{\sigma} = \frac{\dot{\delta}}{\|\delta\|} \left(1 - \underbrace{\frac{\delta^2}{\|\delta\|^2}}_1 \right) = 0. \quad (3.125)$$

Damit verschwindet der erste Summand in Gl. (3.122). Die Differenziation des zweiten Summanden ergibt sich mit der Identität $\frac{d}{dt}(\arcsin(x)) = \frac{\dot{x}}{\sqrt{1-x^2}}$ und der Substitution des Arguments durch x :

$$\dot{x} = -k_\delta \|\dot{\delta}\| e^{-k_\delta \|\delta\|}. \quad (3.126)$$

3. Bahnführung

Einsetzen von Gl. (3.124) und Rücksubstitution führt auf:

$$\dot{\chi}_{\tau,\Delta} = -\sigma \frac{\dot{\delta}\delta}{\|\delta\|} \frac{k_\delta e^{-k_\delta \|\delta\|}}{\sqrt{1 - (e^{-k_\delta \|\delta\|} - 1)^2}}. \quad (3.127)$$

Und schließlich kann nach Berücksichtigung von Gl. (3.114) und Vereinfachung das Ergebnis angegeben werden:

$$\dot{\chi}_{\tau,\Delta} = \frac{-k_\delta \dot{\delta}}{\sqrt{2e^{k_\delta \|\delta\|} - 1}}. \quad (3.128)$$

3.5.5. Vergleich der Ergebnisse

Im Folgenden werden die Zeitschriebe für Bahnazimut und Azimutänderung des Regelkreises der bisher vorgestellten Konzepte qualitativ verglichen. Dazu sind Ergebnisse aus Kap. 4 zur Simulation mit einem kinematischen Ersatzmodell vorweggenommen.

Wie bereits angedeutet erzeugt das Ergebnis vorheriger Arbeiten (vgl. Abb. 3.23) ein fehlerhaftes Ergebnis [28, 27]. Offensichtlich entspricht die angegebene Definition für die Azimutänderung nicht der zeitlichen Ableitung des Bahnazimuts.

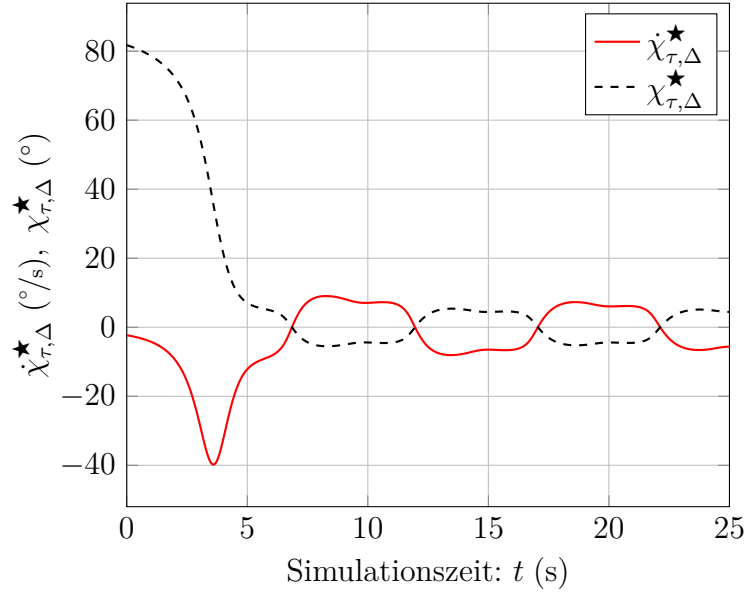


Abbildung 3.23.: Ergebnis vorangehender Veröffentlichungen zu Bahnazimut und Azimutänderung des Regelkreises [28, 27]

3.5. Weiterentwicklung der Bahnführung

Führt man eine E/A-Linearisierung wie in Unterabsch. 3.5.3 angedeutet und dem linearen Regelgesetz $u_\delta = -k_\delta \|\delta\|$ durch, so ergibt sich für den Bahnazimut:

$$\chi_{\tau,\Delta}^\spadesuit = \sigma \arcsin \left(\frac{-k_\delta \|\delta\|}{\nu_\perp} \right) \quad (3.129)$$

und die Azimutänderung:

$$\dot{\chi}_{\tau,\Delta}^\spadesuit = \frac{-k_\delta \dot{\delta}}{\nu_\perp \sqrt{1 - \left(\frac{k_\delta \|\delta\|}{\nu_\perp} \right)^2}} \quad (3.130)$$

mit der Annahme $\dot{\nu}_\perp = 0$. Der Bahnazimut ist für $k_\delta \|\delta\| > \nu_\perp$ undefiniert und die Azimutänderung besitzt die angesprochene Singularität. Begrenzt man den kritischen Bereich entsprechend, so ergibt sich der Zeitschrieb in Abb. 3.24. Das Fluggerät bewegt sich senkrecht zur Bahn bis der kritische Bereich verlassen wird und nähert sich dann asymptotisch dieser an. Die Sprünge in den Verläufen stellen jedoch kein zufriedenstellendes Verhalten dar.

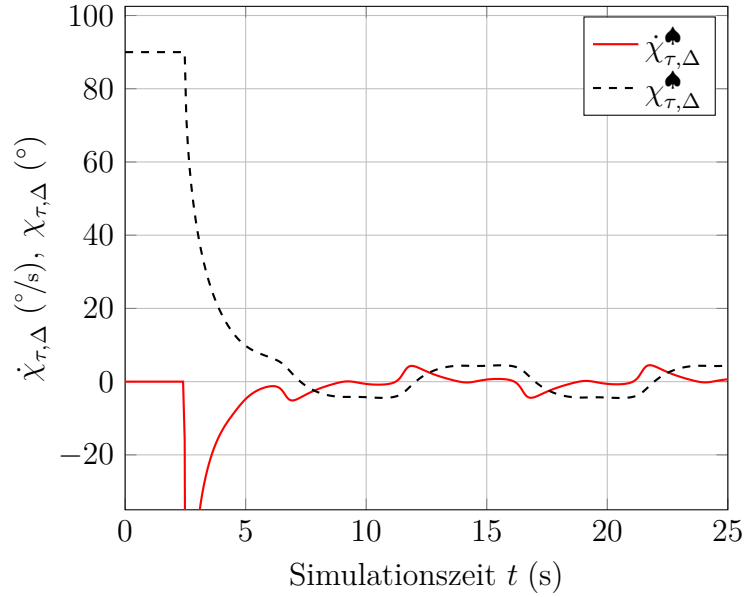


Abbildung 3.24.: Ergebnis der E/A-Linearisierung mit $k_\delta = 0.85$

Das Ergebnis der vorgestellten Weiterentwicklung der Bahnführung auf Basis des nicht-linearen Regelgesetzes $u_\delta = -\nu_\perp (1 - e^{-k_\delta \|\delta\|})$ ist in Abb. 3.25 gezeigt. Das Verhalten ist global gültig und zeigt im Gegensatz zu Abb. 3.23 ein plausibles Ergebnis. Der Zeitverlauf der Azimutänderung stimmt bei geringer Ablage zur Sollbahn in guter Näherung mit

3. Bahnführung

dem Ergebnis der E/A-Linearisierung in Abb. 3.24 überein. Vergleicht man Gl. (3.128) und (3.130) für $\|\delta\| \rightarrow 0$ wird deutlich:

$$\chi_{\tau,\Delta}^{\spadesuit} \approx \chi_{\tau,\Delta} . \quad (3.131)$$

Dies untermauert die Plausibilität des vorgestellten Ergebnisses für die Azimutänderung.

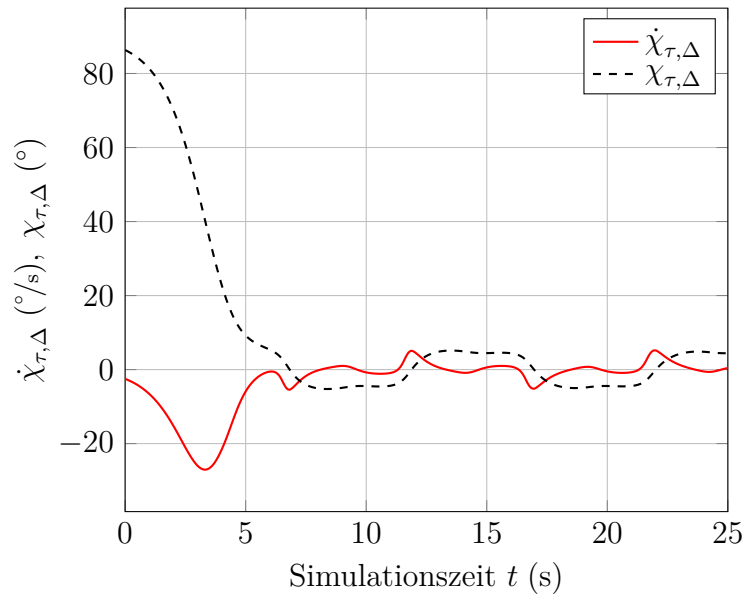


Abbildung 3.25.: Ergebnis der Weiterentwicklung von Bahnazimut und Azimutänderung des Regelkreises

4. Simulation

4.1. Simulation des Seils

Zur Berechnung der Seilkraft sind verschiedene Parameter notwendig, die in Tab. 4.1 zusammengefasst sind. Es wird ein Hochmodul Polyethylen Seil (Handelsname Dyneema® SK78) mit einem Durchmesser von 1 mm ausgewählt. Diese Auswahl berücksichtigt die intendierte spätere Verwendung mit einem unbemannten Luftfahrzeug der 4 kg Klasse (vgl. Abschn. 4.3). Während die Parameter für Elastizitätsmodul und Dichte typische technische und einfach zu messende Größen sind [29], ist die Bestimmung des Dämpfungskoeffizienten deutlicher komplizierter. Der verwendete nominelle Wert c_0 stammt aus Untersuchungen für ein 200 m langes Seil mit dem spezifischen Dämpfungskoeffizienten $c = 0.3 \text{ Ns/m}$ [25]. Für den Widerstandsbeiwert C_W wird für erste Untersuchungen 0.98 definiert (vgl. Unterabschn. 2.1.4). Die Zeitschrittweite wird im Rahmen dieser Arbeit konstant auf dem Wert $\Delta t_S = 0.01 \text{ s}$ gehalten. Eine Untersuchung bezüglich der Auflösung bei der Diskretisierung in Form einer variablen Anzahl an Segmenten wird nicht durchgeführt.

Tabelle 4.1.: Parameter der Seil-Simulation

Parameter	Größe	Wert	Einheit
Elastizitätsmodul	E	109	GPa
Dämpfungskoeffizient	c_0	60	Ns
Durchmesser	d	10^{-3}	m
Dichte	ρ	970	kg/m^3
Widerstandsbeiwert	C_W	0.98	-
Anzahl der Segmente	-	6	-
Zeitschrittweite	Δt_S	0.01	s

4.2. Simulation mit kinematischem Ersatzmodell

Zur Validierung der Kopplung eines implizit formulierten Seilmodells mit einer explizit formulierten Fluggerätbewegung wird letztere durch eine einfach Kinematik ersetzt. Diese erzeugt Position und Geschwindigkeit $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} \mathbf{p} \\ \mathbf{v} \end{pmatrix}$ in Abhängigkeit der Ausgangsgrößen der Bahnführung $\boldsymbol{\varphi} = (\chi_{soll} \quad \gamma_{soll})^T$. Mit der Transformationsmatrix vom erdfesten System in das Bahnsystem:

$${}_k\mathbf{T}_E = \mathbf{T}_y(\gamma_{soll})\mathbf{T}_z(\chi_{soll}) \quad (4.1)$$

kann mit ${}_E\mathbf{T}_k = {}_k\mathbf{T}_E^T$ die Kinematik:

$${}_E\mathbf{v} = {}_E\mathbf{T}_k {}_k\mathbf{v}_{soll} \quad (4.2)$$

mit der kommandierten Bahngeschwindigkeit ${}_k\mathbf{v}_{soll}$ in bahnfesten Koordinaten angegeben werden. Aus Integration entsteht daraus der Positionsvektor \mathbf{p} . Das Seilmodell wird durch den Zustandsvektor der Kinematik \mathbf{x} angeregt und erzeugt die Seilkraft $-\mathbf{F}_z$. Diese hat allerdings keinen Einfluss auf \mathbf{x} , da die Kinematik per Definition kräftefrei ist. Eine Prinzipdarstellung der Vorgehensweise ist in Abb. 4.1 gezeigt.

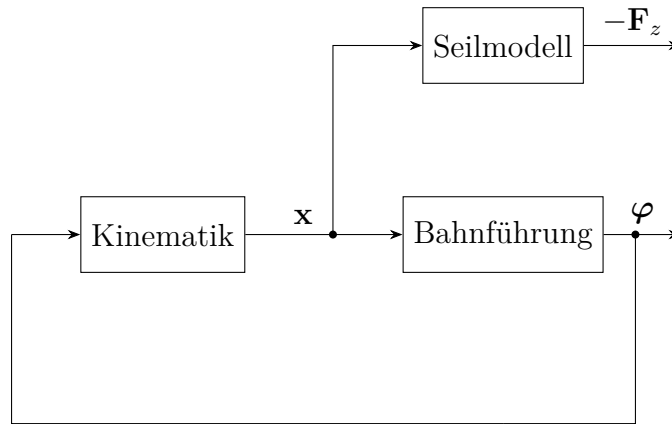


Abbildung 4.1.: Prinzip der Simulation mit kinematischem Ersatzmodell

Als Windrichtung wird $\xi = 0^\circ$ (Nordwind) definiert, weshalb die x_w -Achse nach Süden zeigt. Die Elevation der Sollbahn beträgt 45° . Als Anfangswerte der Kinematik wird eine Position 300m über dem Koordinatenursprung mit der Geschwindigkeit ${}_k v_{soll}$ definiert. Die Anfangswerte des Seils setzen sich zusammen aus einer linearen Verteilung

der Positionen und Geschwindigkeiten der Punktmassen. Letztere nehmen entsprechend von null am Koordinatenursprung bis zur Geschwindigkeit der äußeren Anregung durch das Fluggerät zu. Obwohl die induzierte Seilkraft keinen Einfluss auf die Kinematik hat, wird dennoch eine Abwickelgeschwindigkeit der Fesselung definiert, da diese entsprechend Gl. (3.79) auf S. 47 zu einer kontinuierlichen Zunahme des geflogenen Orbits führt und diese Funktionalität überprüft werden soll. Alle relevanten Parameter der Simulation sind in Tab. 4.2 zusammengefasst.

Tabelle 4.2.: Parameter der kinematischen Simulation

Parameter	Größe	Wert	Einheit
Kommandierte Bahngeschwindigkeit	k^v_{soll}	60	m/s
Anfangswert für Fluggerätposition	h	300	m
Elevation	ϵ	45	°
Halbe Ausdehnung der Lemniskate im Flug	a_p	120	m
Abwickelgeschwindigkeit des Seils	$\ \mathbf{v}_{k,r}\ $	8	m/s
Verstärkungsfaktor in E/A-Linearisierung	k_δ	9	-
Simulationszeit	t	40	s

4.2.1. Validierung der Bahnführung

Zunächst soll die grundlegende Funktion der Bahnführung mit dem kinematischen Ersatzmodell validiert werden. Die Simulationsergebnisse sind in Abb. 4.2 - 4.4 gezeigt und bestätigen das erwartete Verhalten. Trotz anfänglicher Ablage von der Sollbahn wird diese sicher angesteuert. Ein Oszillieren des Bezugspunkts s^* zwischen Extrema der Nullstellensuche (vgl. Unterabschn.3.3.1 auf S. 27) kann nicht beobachtet werden. Der weiterentwickelte Regelkreis mit der E/A-Linearisierung (vgl. Abschn. 3.5 auf S. 52) führt auf die gewünschte asymptotische Annäherung an die Sollbahn. Die mittlere Ablage von der Sollbahn (vgl. Abb. 4.2) kann durch eine Erhöhung von k_δ verringert werden. Der kritische Wert liegt bei einer *Software-In-The-Loop-Simulation* (SiL) mit einem Starrkörpermodell des Fluggeräts (vgl. Abschn. 4.3) allerdings niedriger als bei der hier gezeigten vereinfachten Simulation. Interessant ist der Zeitschrieb der Komponenten des Bahnazimuts in der Tangentialebene (vgl. Abb. 4.5). Ist die Annäherung an die Sollbahn abgeschlossen, so ergibt sich der kommandierte Bahnazimut ($\chi_{\tau,soll} = \chi_{\tau,0} + \chi_{\tau,\Delta}$) zum Großteil aus der Vorsteuerung $\chi_{\tau,0}$. Dies sorgt für ein schnelles Folgeverhalten.

4. Simulation

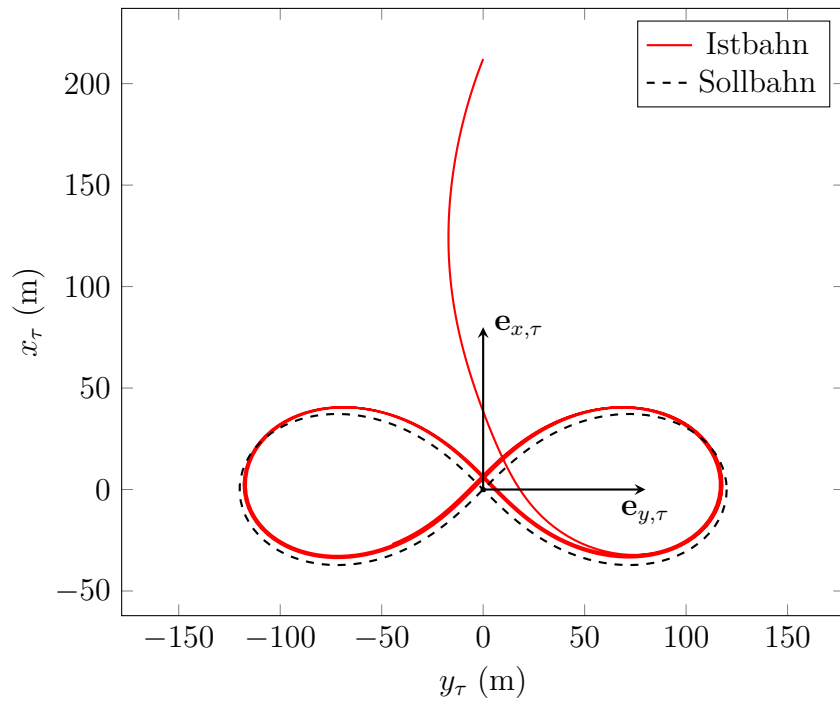


Abbildung 4.2.: Soll- und Istbahn projiziert in die Tangentialebene

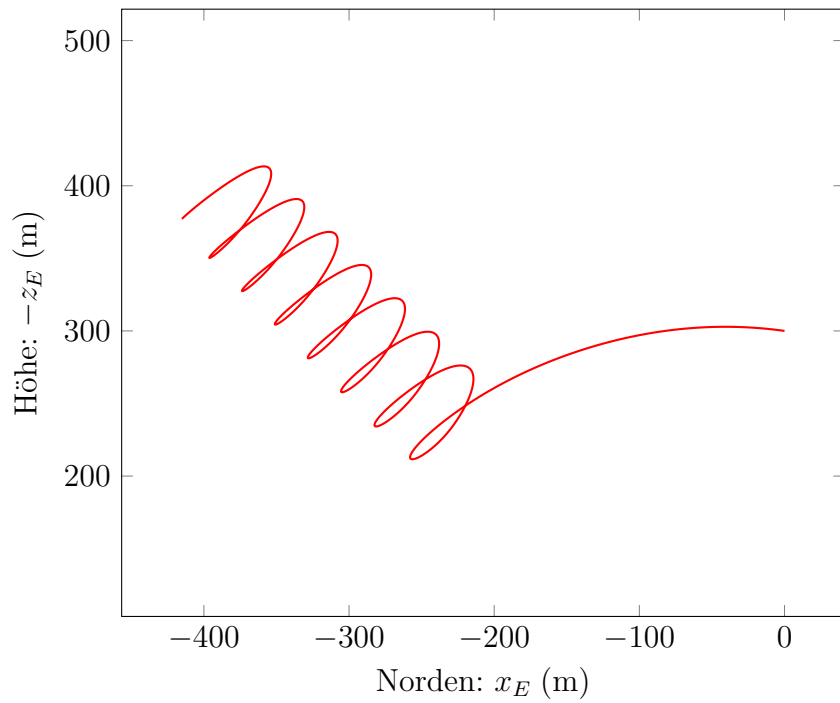


Abbildung 4.3.: Istbahn projiziert in die x_E/z_E -Ebene

4.2. Simulation mit kinematischem Ersatzmodell

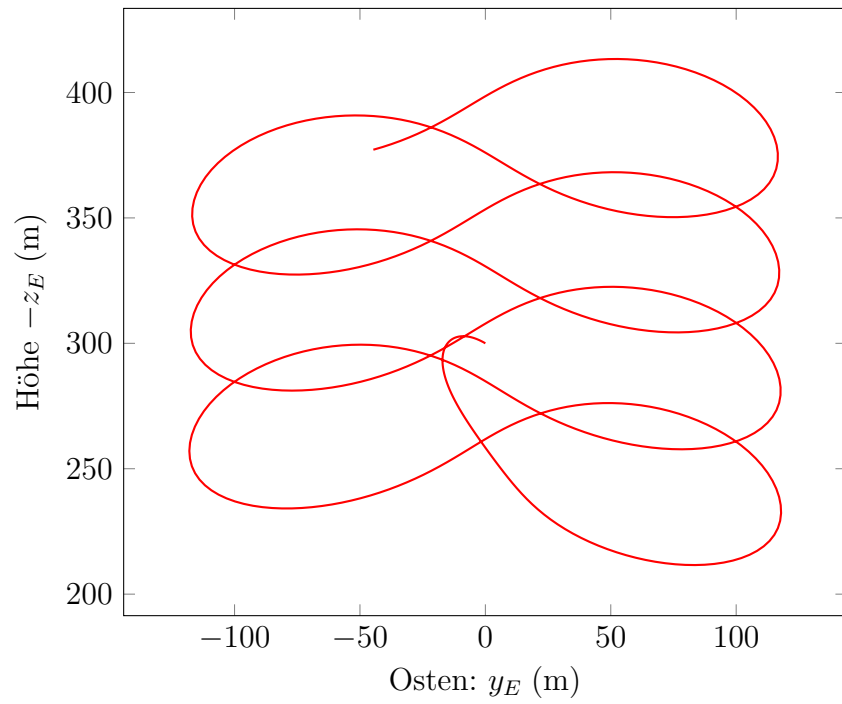


Abbildung 4.4.: Istbahn projiziert in die y_E/z_E -Ebene

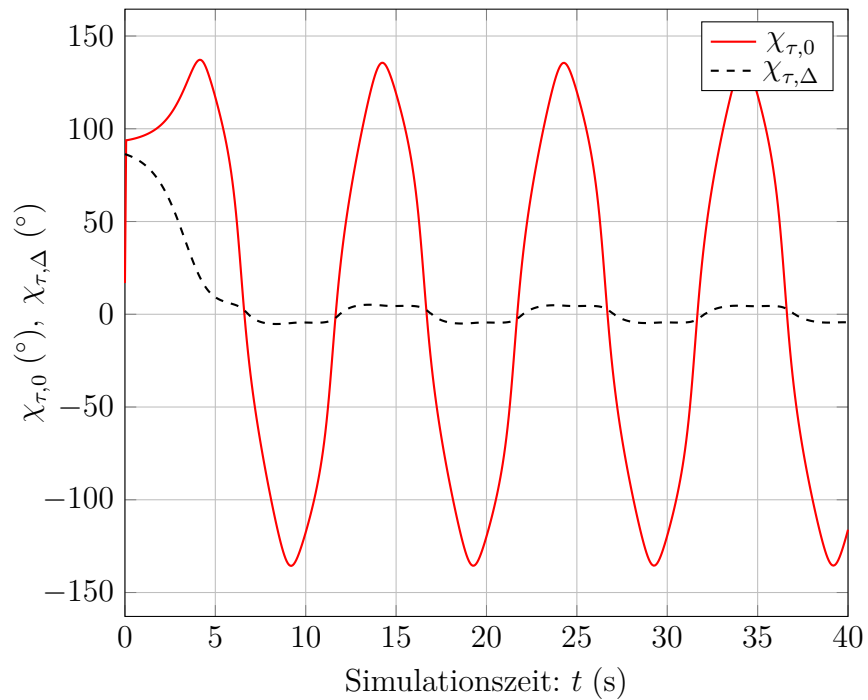


Abbildung 4.5.: Komponenten des Bahnazimuts χ_τ in der Tangentialebene

4.2.2. Diskussion der Seilsimulation

Die getrennte Lösung der zwei gekoppelten dynamischen Systeme der Fluggerätbewegung und des Seilmodells (vgl. Unterabschn. 2.2.2 auf S. 16) kann Probleme bei der Konvergenz hervorrufen. Da beide Systeme nicht im selben Integrationsschritt lösbar sind, divergiert das Gesamtsystem, wenn die Zeitschrittweite Δt der Fluggerätbewegung einen kritischen Wert überschreitet. In der Simulation macht sich dies durch eine Oszillation in der Seilkraft bemerkbar, da eine große Zeitschrittweite eine große Änderung der Segmentlänge \mathcal{S}_z zum vorherigen Integrationsschritt induziert. Dies führt durch die hohe Steifigkeit des Seils zu einer Lastspitze in der Seilkraft, die im nächsten Integrationsschritt wiederum auf das Fluggerät aufgeprägt wird. Die dargestellten Simulationsergebnisse in Abb. 4.6 und 4.7 veranschaulichen diesen Effekt und zeigen, dass die Konvergenz mit einer kleinen und konstanten Zeitschrittweite sichergestellt werden kann. Die Zeitschrittweite der Simulation des Seils wird wie beschrieben konstant gehalten auf $\Delta t_S = 0.01$ s. Gezeigt sind Zeitschriebe der Seilkraft für verschiedene Zeitschrittweiten Δt für Simulationen mit dem kinematischen Ersatzmodell. Die Bewegung des Seils ist durch die Kinematik an der Punktmasse \mathcal{P}_p vorgegeben und die Seilkraft wird durch einen einfachen Proportional-Regler mit dem Sollwert 1 kN folgegeregelt. Ist eine zu große Zeitschrittweite gewählt, kommt es zur Divergenz (vgl. Abb. 4.6).

Eine Reduktion der Zeitschrittweite auf $\Delta t = 0.01$ s führt auf ein stabiles System (vgl. Abb. 4.7). Das Einschwingverhalten zu Beginn der Simulation resultiert aus den definierten Anfangswerten des Seils. Die beschriebene lineare Verteilung der Punktmassen entlang der Seillänge und die Aufprägung einer linear verteilten Anfangsgeschwindigkeit führt nicht zu einem Kräftegleichgewicht. Offensichtlich bedingt bereits das „Durchhängen“ des Seils aufgrund von Gewichtskraft und Luftwiderstand eine Abweichung von dieser vereinfachten Annahme.

Eine Erhöhung der Zeitschrittweite zur Berechnung der Seildynamik Δt_S (nicht abgebildet) führt zu einer längeren Einschwingzeit. Eine Sensitivität bezüglich der Divergenz wie bei der Erhöhung der Zeitschrittweite des expliziten Löses kann nicht demonstriert werden.

In Unterabschn. 2.1.3 auf S. 10 wurden Vorfaktoren für die verminderte Drucksteifigkeit und Dämpfungskraft eingeführt. Diese Faktoren besitzen keine werkstofftechnische Grundlage, sondern werden zur Sicherstellung der Konvergenz benötigt. Besonders wenn die Drucksteifigkeit zu null gesetzt wird, entstehen starke Oszillationen in der Seilkraft.

4.2. Simulation mit kinematischem Ersatzmodell

Über die werkstofftechnische Modellierungsqualität dieser Faktoren kann keine Aussage getroffen werden.

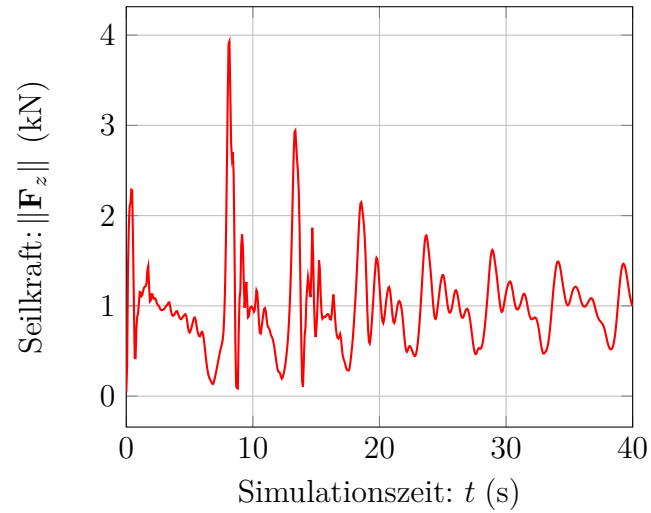


Abbildung 4.6.: Simulation mit kinematischem Ersatzmodell und $\Delta t = 0.05$ s

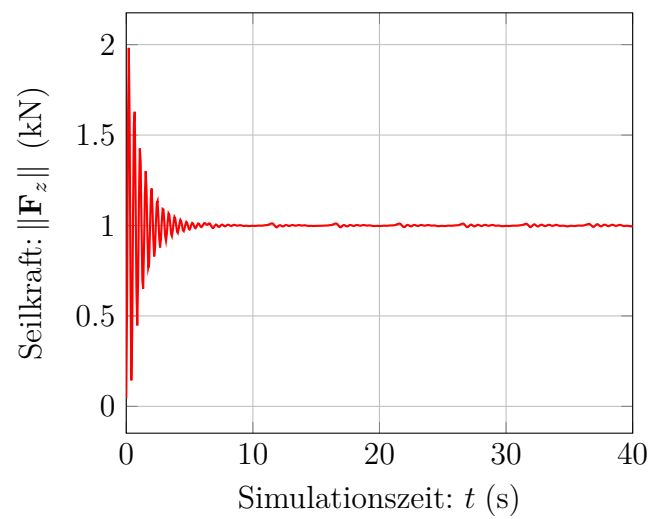


Abbildung 4.7.: Simulation mit kinematischem Ersatzmodell und $\Delta t = 0.01$ s

4.3. SiL-Simulation

Das Institut für Flugmechanik und Flugregelung (iFR) der Universität Stuttgart betreibt eine MATLAB SIMULINK[®] Simulationsumgebung für unbemannte Luftfahrzeuge, mit der nach erfolgreichen SiL- und HiL¹-Simulationen in kurzer Zeit flugfähige Autopiloten generiert werden können. Als Referenzmodell ist die Bormatec[®] Maja hinterlegt, die auch für Flugtests zur Verfügung steht. Die in Kap. 3 vorgestellte Bahnführung wird in diese SiL-Simulationsumgebung integriert.

Das Fluggerät befindet sich zu Beginn der Simulation in 300 m Höhe mit einer Bahngeschwindigkeit von 25 m/s und ist nach Norden orientiert. Es wird eine Elevation von 70° definiert. Das Windmodell ist deaktiviert. Alle relevanten Parameter für die Simulation sind in Tab. 4.3 zusammengefasst.

Tabelle 4.3.: Parameter für SiL-Simulation

Parameter	Größe	Wert	Einheit
Maja Abflugmasse	m	4.2	kg
Maja Spannweite	b	2.2	m
Kommandierte Bahngeschwindigkeit	${}_k v_{soll}$	25	m/s
Elevation	ϵ	70	°
Halbe Ausdehnung der Lemniskate im Flug	a_p	150	m
Verstärkungsfaktor in E/A-Linearisierung	k_δ	6.5	-
Kommandierter Abstand vom Usprung	r_{soll}	300	m
Verstärkungsfaktor für Höhenregelung	k_h	-0.03	-
Windgeschwindigkeit	v_w	0	m/s
Simulationszeit	t	150	s

4.3.1. Höhenregelung

Da keine Zwangsbedingung durch ein Seilmodell besteht, führt die Flugsimulation trotz der Vorgabe $\|\mathbf{v}_{k,r}\| = 0$ zu einem vertikalen Abdriften des Fluggeräts von der kommandierten Sollbahn. Dies stellt kein fehlerhaftes Verhalten dar, sondern folgert aus der Tatsache, dass die Bahnführung für gefesselten Flug ohne Folgeregulierung einer Solllhöhe entworfen ist. Um unter dem dargestellten Szenario trotzdem einen Flug auf einem konstanten Orbit zu gewährleisten, wird der kommandierte Bahnneigungswinkel γ_{soll} um die

¹Hardware-In-The-Loop

Rückführung der Sollhöhe h_{soll} erweitert. Durch die Projektion der Lemniskate auf die Einheitskugel ist die Sollhöhe nicht konstant, jedoch von einem konstanten Abstand zum Koordinatenursprung r_{soll} abhängig:

$$h_{soll}(s) = \mathbf{e}_z^T \boldsymbol{\Gamma}(s) r_{soll} . \quad (4.3)$$

Der Istwert der Flughöhe ergibt sich aus dem Positionsvektor der Fluggeräts:

$$h = \mathbf{e}_z^T \mathbf{p} . \quad (4.4)$$

Damit kann ein einfacher Höhenregler entworfen werden:

$$\gamma_h = k_h (h - h_{soll}) \quad (4.5)$$

mit dem skalaren Verstärkungsfaktor k_h . Der kommandierte Bahnneigungswinkel für ungefesselten Flug $\bar{\gamma}_{soll}$ ergibt sich damit zu:

$$\bar{\gamma}_{soll} = \gamma_{soll} + \gamma_h . \quad (4.6)$$

4.3.2. Simulationsergebnisse

Die Simulationsergebnisse sind in den Abb. 4.8 - 4.11 gezeigt. Die Sollbahn wird trotz der entgegengesetzten Orientierung sicher angesteuert. Erwartungsgemäß ergibt sich eine größere Ablage von der Sollbahn im Vergleich zur Simulation mit dem kinematischen Ersatzmodell. Die Basisregelung der Simulationsumgebung - bestehend aus einem linearen Mehrgrößenregler - gewährleistet trotz der Elevation von 70° einen stabilen Flug mit gutem Folgeverhalten. Ein Flug im Zenit bei $\epsilon = 90^\circ$ stellt geringere Anforderungen an den Autopiloten und wird hier deshalb nicht zusätzlich aufgeführt. Der Verstärkungsfaktor k_δ stellt unter den gegebenen Voraussetzungen einen guten Kompromiss aus minimaler Ablage und Stabilität dar. Die weiterentwickelten Größen für den Bahnazimut und die Azimutänderung des Regelkreises zeigen auch in der SiL-Simulation das erwartete Verhalten (vgl. Abb. 4.10).

4. Simulation

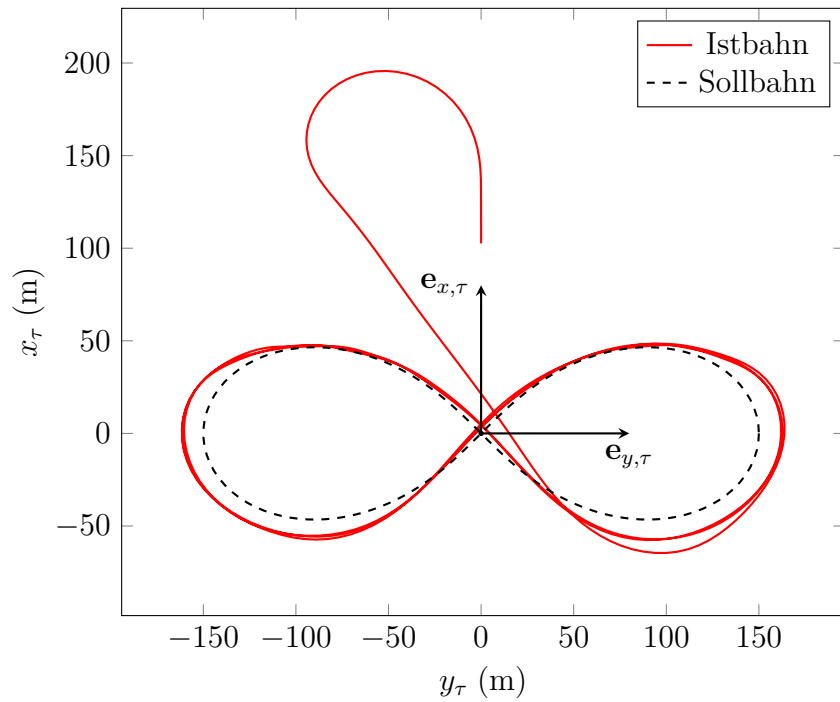


Abbildung 4.8.: Soll- und Istbahn projiziert in die Tangentialebene

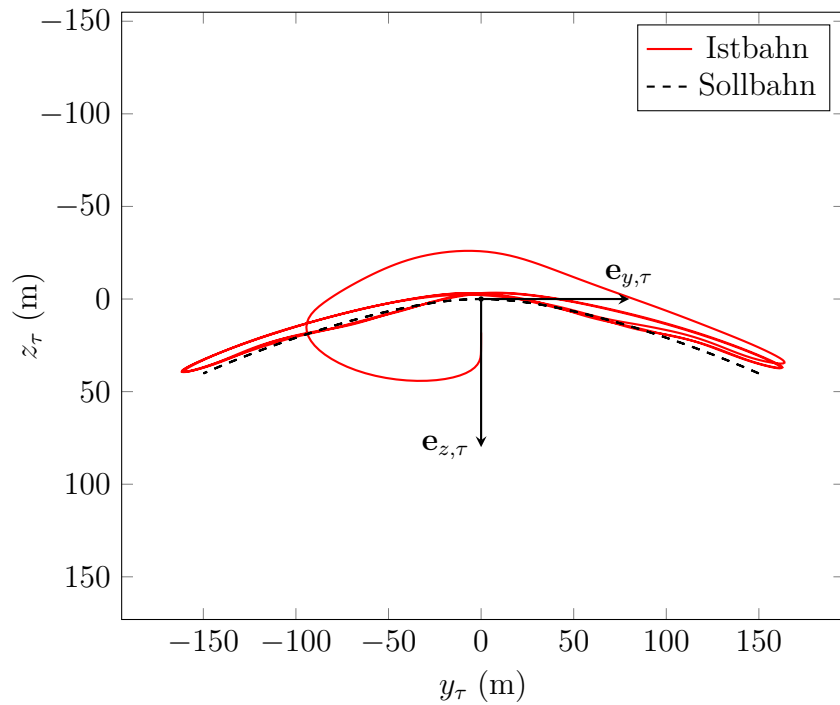


Abbildung 4.9.: Soll- und Istbahn projiziert in die y_τ/z_τ -Ebene

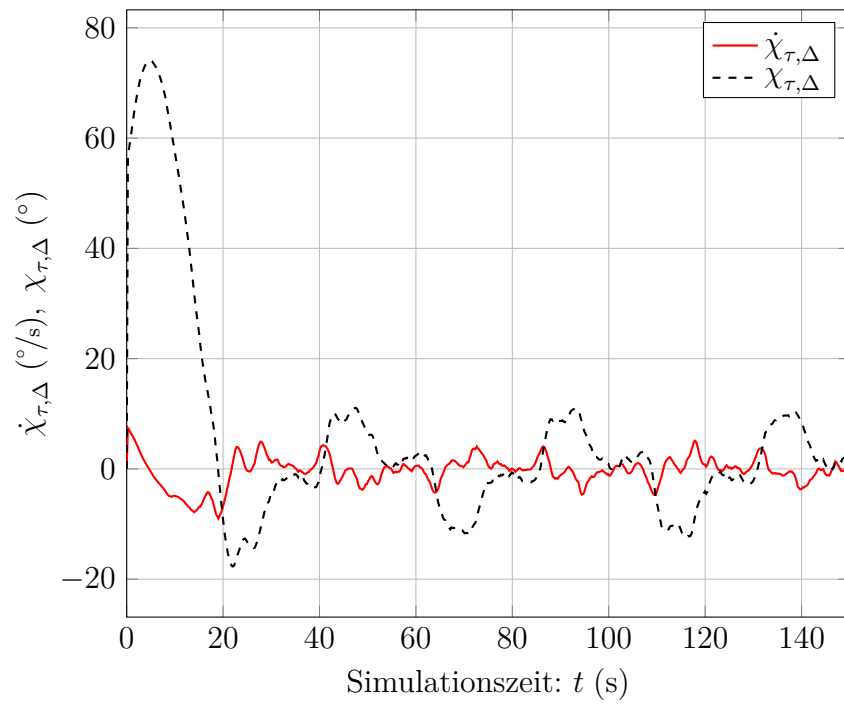


Abbildung 4.10.: Bahnazimut und Azimutänderung des Regelkreises

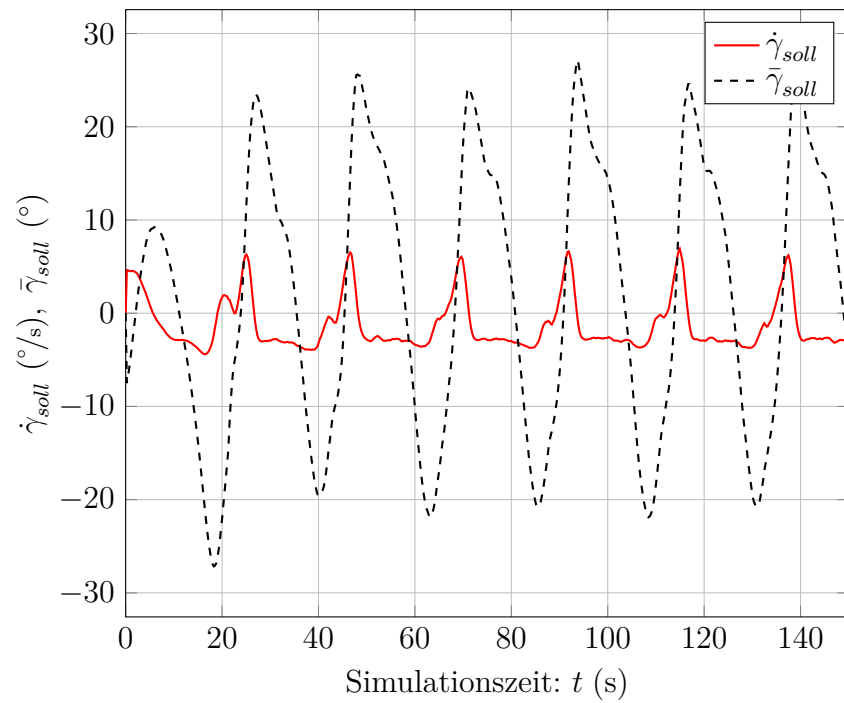


Abbildung 4.11.: Bahnazimut und Azimutänderung des Regelkreises

5. Zusammenfassung und Ausblick

Es wurde ein Seilmodell entwickelt, das neben dem linear-elastischen Verhalten auch den Luftwiderstand berücksichtigt. Letzterer ist mit großen Unsicherheiten behaftet und sollte für weiterführende Entwicklungen bezüglich dem instationären Verhalten weiter untersucht werden. Die Lösung des implizit formulierten Differentialgleichungssystems konnte in Verbindung mit der Anregung des Seils in Form der Fluggerätbewegung in expliziter Form erfolgreich demonstriert werden. Aus Sicht der Laufzeit ist der aufgezeigte Ansatz allerdings kritisch, da durch die Kombination von implizitem und explizitem Löser ein hoher Rechenaufwand entsteht. Ist die Realisierung von einer Echtzeitsimulation von Interesse, so muss von diesem Ansatz eher abgeraten werden. Eine effizientere Berechnung böte die explizite Implementierung des Seilmodells über den Lagrange-Formalismus mit starren Stabsegmenten [31]. Diese Veröffentlichung berücksichtigt aber nicht das linear-elastische Verhalten.

Die entwickelte Bahnführung berechnet Bahnwinkel und deren zeitliche Änderungen im erdfesten System und kann so mit konventionellen Autopiloten verwendet werden. Als Sollbahn wurde die Lemniskate von Bernoulli ausgewählt. Der modulare Aufbau ermöglicht aber den einfachen Austausch und die Verwendung anderer Bahnkurven. So bietet die Lemniskate von Booth für einen weiten Bereich an Parametern geringere Krümmungsspitzen und könnte damit vorteilhaft sein [27]. Die Bahnführung konnte im Bereich der Regelung der Ablage auf Basis von stetigen Funktionen für die Ablage und deren zeitliche Änderung erfolgreich weiterentwickelt werden. Die Simulation mit einem kinematischen Ersatzmodell und die SiL-Simulation mit einem Starrkörpermodell demonstrieren erfolgreich die Funktionalität.

Eine gefesselte SiL-Simulation konnte mit dem Seilmodell und den angegebenen Seilparametern nicht demonstriert werden, da die Simulation bereits bei geringer Seilkraft (≈ 25 N) instabil wurde. Gründe hierfür könnten die implementierte lineare Basisregelung oder die Anfangswerte der Seilsimulation sein. Die Untersuchung dieser Phänomene liegt allerdings außerhalb des inhaltlich gesteckten Rahmens dieser Arbeit.

5. Zusammenfassung und Ausblick

A. Vektortransformation

Drehungen eines Vektors sind lineare Abbildungen und können deshalb mit Matrizen beschrieben werden. Dabei werden aktive und passive Drehungen unterschieden. Eine aktive Drehung rotiert einen Vektor in einem gegebenen Koordinatensystem, während eine passive Drehung das Koordinatensystem selbst rotiert. Eine Drehung um den kanonischen Einheitsvektor \mathbf{e}_x mit dem Winkel κ kann mit der allgemeinen Drehmatrix:

$$\mathbf{T}_x(\kappa) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \kappa & \sin \kappa \\ 0 & -\sin \kappa & \cos \kappa \end{bmatrix} \quad (\text{A.1})$$

angegeben werden. Drehungen um \mathbf{e}_y und \mathbf{e}_z führen analog auf die Drehmatrizen:

$$\mathbf{T}_y(\kappa) = \begin{bmatrix} \cos \kappa & 0 & -\sin \kappa \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \kappa & 0 & \cos \kappa \end{bmatrix} \quad (\text{A.2})$$

$$\mathbf{T}_z(\kappa) = \begin{bmatrix} \cos \kappa & \sin \kappa & 0 \\ -\sin \kappa & \cos \kappa & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (\text{A.3})$$

Für eine aktive Drehung bedarf es der Inversen einer Drehmatrix, die wegen der Orthogonalität aller Drehmatrizen der Transponierten entspricht. Die Transposition führt auch zum Wechsel der Bezugssysteme. Aus der Matrix ${}_1\mathbf{T}_2$, die eine Transformation von System 2 in System 1 beschreibt, wird so ${}_1\mathbf{T}_2^T = {}_2\mathbf{T}_1$.

Neben der Komposition aus allgemeinen Drehmatrizen kann eine Transformationsmatrix auch aus den kanonischen Einheitsvektoren des rotierten Systems, dargestellt im ursprünglichen System, hergeleitet werden. Für eine beispielhafte Rotation eines Vektors

A. Vektortransformation

\mathbf{v} vom System 1 in das Systems 2 ergibt sich:

$${}_2\mathbf{v} = \begin{bmatrix} {}_1\mathbf{e}_{x,2} & {}_1\mathbf{e}_{y,2} & {}_1\mathbf{e}_{z,2} \end{bmatrix} {}_1\mathbf{v} = {}_2\mathbf{T}_{11}^\top {}_1\mathbf{v}. \quad (\text{A.4})$$

Zur Verdeutlichung, dass beispielsweise der kanonische Einheitsvektor in x -Richtung des Systems 2 im System 1 ausgedrückt ist, wird die Doppelindizierung ${}_1\mathbf{e}_{x,2}$ gewählt. Die Basisvektoren des rotierten Systems werden bei der Abbildung entsprechend mit den Komponenten des Vektors ${}_1\mathbf{v}$ multipliziert bzw. aufaddiert und ergeben den rotierten Vektor ${}_2\mathbf{v}$ - stellen also eine aktive Drehung dar. Wie oben beschrieben kann eine passive Drehung aus der Transposition der Transformationsmatrix für die aktive Drehung gewonnen werden. Aus der oben beschriebenen Matrix wird damit entsprechend:

$${}_2\mathbf{T}_1 = \begin{bmatrix} {}_1\mathbf{e}_{x,2} & {}_1\mathbf{e}_{y,2} & {}_1\mathbf{e}_{z,2} \end{bmatrix}^\top. \quad (\text{A.5})$$

B. Rotationsformel nach Rodrigues

Die Transformation der Tangente \mathbf{t}_Γ entlang der Geodäte δ zur projizierten Position des Fluggeräts wird mit \mathbf{t} bezeichnet und kann mit der Rotationsformel nach Rodrigues [16]:

$$\mathbf{t} = \mathbf{t}_\Gamma \cos \delta + (\mathbf{k} \times \mathbf{t}_\Gamma) \sin \delta + \mathbf{k}(\mathbf{k} \cdot \mathbf{t}_\Gamma)(1 - \cos \delta) \quad (\text{B.1})$$

und der normierten Rotationsachse $\mathbf{k} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}_\perp / \|\mathbf{r} \times \mathbf{p}_\perp\|$ allgemein berechnet werden. Für $s = s^*$ vereinfacht sich die obige Gleichung zu $\mathbf{t} = \mathbf{t}_\Gamma$.

Literaturverzeichnis

- [1] ARCHER, C. L. ; CALDEIRA, K. : Global assessment of high-altitude wind power. In: *Energies* 2 (2009), Nr. 2, S. 307–319
- [2] BAAYEN, J. H. ; OCKELS, W. J.: Tracking control with adaption of kites. In: *IET control theory & applications* 6 (2012), Nr. 2, S. 182–191
- [3] BOOTH, J. : *A Treatise on Some New Geometrical Methods....* Bd. 1. Longmans, Green, Reader, and Dyer, 1873
- [4] CHERUBINI, A. ; PAPINI, A. ; VERTECHY, R. ; FONTANA, M. : Airborne Wind Energy Systems: A review of the technologies. In: *Renewable and Sustainable Energy Reviews* 51 (2015), S. 1461–1476
- [5] CUNDY, H. M.: 89.23 The lemniscate of Bernoulli. In: *The Mathematical Gazette* 89 (2005), Nr. 514, S. 89–93
- [6] DIEHL, M. : Airborne wind energy: Basic concepts and physical foundations. In: *Airborne wind energy*. Springer, 2013, S. 3–22
- [7] DIRECTORATE-GENERAL FOR RESEARCH AND INNOVATION (EUROPEAN COMMISSION) AND ECORYS: Study on challenges in the commercialisation of airborne wind energy systems. In: *EU publications* (2018)
- [8] DUNKER, S. : Tether and bridle line drag in airborne wind energy applications. In: *Airborne Wind Energy*. Springer, 2018, S. 29–56
- [9] EBERHARDT, B. ; ETZMUSS, O. ; HAUTH, M. : Implicit-explicit schemes for fast animation with particle systems. In: *Computer Animation and Simulation 2000*. Springer, 2000, S. 137–151
- [10] ERHARD, M. ; STRAUCH, H. : Control of towing kites for seagoing vessels. In: *IEEE Transactions on Control Systems Technology* 21 (2012), Nr. 5, S. 1629–1640
- [11] ERHARD, M. ; STRAUCH, H. : Theory and experimental validation of a simple comprehensible model of tethered kite dynamics used for controller design. In: *Airborne wind energy*. Springer, 2013, S. 141–165

- [12] FAGIANO, L. ; NOVARA, C. : Automatic crosswind flight of tethered wings for airborne wind energy: a direct data-driven approach. In: *IFAC Proceedings Volumes* 47 (2014), Nr. 3, S. 4927–4932
- [13] FECHNER, U. ; VLUGT, R. van d. ; SCHREUDER, E. ; SCHMEHL, R. : Dynamic model of a pumping kite power system. In: *Renewable Energy* 83 (2015), S. 705–716
- [14] FICHTER, W. ; GRIMM, W. : *Flugmechanik*. Shaker Verlag, 2009
- [15] GOOGLE LLC: *Google Scholar*. <https://scholar.google.de/>, Abruf: 29.06.2020
- [16] GRAY, J. J.: Olinde Rodrigues’ paper of 1840 on transformation groups. In: *Archive for History of Exact Sciences* (1980), S. 375–385
- [17] HAFTENDORN, D. : *Kurven erkunden und verstehen: Mit GeoGebra und anderen Werkzeugen*. Springer-Verlag, 2016
- [18] HOUSKA, B. ; DIEHL, M. : Optimal control of towing kites. In: *Proceedings of the 45th IEEE Conference on Decision and Control* IEEE, 2006, S. 2693–2697
- [19] HOUSKA, B. ; DIEHL, M. : Optimal control for power generating kites. In: *2007 European Control Conference (ECC)* IEEE, 2007, S. 3560–3567
- [20] JEHLE, C. ; SCHMEHL, R. : Applied tracking control for kite power systems. In: *Journal of Guidance, Control, and Dynamics* 37 (2014), Nr. 4, S. 1211–1222
- [21] KARPFFINGER, C. : *Höhere Mathematik in Rezepten: Begriffe, Sätze und zahlreiche Beispiele in kurzen Lerneinheiten*. Springer-Verlag, 2013
- [22] LI, H. ; OLINGER, D. J. ; DEMETRIOU, M. A.: Control of an airborne wind energy system using an aircraft dynamics model. In: *2015 American Control Conference (ACC)* IEEE, 2015, S. 2389–2394
- [23] LI, H. ; OLINGER, D. J. ; DEMETRIOU, M. A.: Attitude tracking control of a groundgen airborne wind energy system. In: *2016 American Control Conference (ACC)* IEEE, 2016, S. 4095–4100
- [24] LICITRA, G. ; KOENEMANN, J. ; BÜRGER, A. ; WILLIAMS, P. ; RUITERKAMP, R. ; DIEHL, M. : Performance assessment of a rigid wing Airborne Wind Energy pumping system. In: *Energy* 173 (2019), S. 569–585
- [25] LINSKENS, H. ; MOOIJ, E. : Tether dynamics analysis and guidance and control design for active space-debris removal. In: *Journal of Guidance, Control, and Dynamics* (2016), S. 1232–1243
- [26] LOYD, M. L.: Crosswind kite power (for large-scale wind power production). In: *Journal of energy* 4 (1980), Nr. 3, S. 106–111

- [27] RAPP, S. ; SCHMEHL, R. ; OLAND, E. ; HAAS, T. : Cascaded Pumping Cycle Control for Rigid Wing Airborne Wind Energy Systems. In: *Journal of Guidance, Control, and Dynamics* 42 (2019), Nr. 11, S. 2456–2473
- [28] RAPP, S. ; SCHMEHL, R. ; OLAND, E. ; SMIDT, S. ; HAAS, T. ; MEYERS, J. : A Modular Control Architecture for Airborne Wind Energy Systems. In: *AIAA Scitech 2019 Forum*, 2019, S. 1419
- [29] ROPES, G. : *Gleistein Ropes*. <https://www.gleistein.com/de/technische-daten-chemiefasern/>, Abruf: 18.05.2020
- [30] SALARI, M. E. ; COLEMAN, J. ; TOAL, D. : Airborne wind energy—A review. In: *3rd International Congress on Energy Efficiency and Energy Related Materials (ENEFM2015)* Springer, 2017, S. 81–92
- [31] SÁNCHEZ-ARRIAGA, G. ; PASTOR-RODRÍGUEZ, A. ; SANJURJO-RIVO, M. ; SCHMEHL, R. : A lagrangian flight simulator for airborne wind energy systems. In: *Applied Mathematical Modelling* 69 (2019), S. 665–684
- [32] SIEBERLING, S. : Flight guidance and control of a tethered glider in an airborne wind energy application. In: *Advances in Aerospace Guidance, Navigation and Control*. Springer, 2013, S. 337–351
- [33] ZANON, M. ; GROS, S. ; DIEHL, M. : Model predictive control of rigid-airfoil airborne wind energy systems. In: *Airborne wind energy*. Springer, 2013, S. 219–233