Oft ist der Wert einer Größe von einer anderen Größe abhängig, z.B. ändert sich die Geschwindigkeit eines Autos in Abhängigkeit der Zeit oder die Temperatur ändert sich in Abhängigkeit der Zeit. In der Realität sind die meisten Größen von mehreren Variablen abhängig, so ändert sich die Temperatur nicht nur mit der Zeit, sondern auch mit dem Ort (der selbst wieder dreidimensional ist und somit von drei Größen abhängt). Wir werden uns auf Fälle beschränken, in denen die betrachtete Größe von genau einer anderen Größe abhängt.

> Die Änderungsrate einer Größe bezüglich einer Variablen gibt an, wie stark sich die Größe ändert, wenn man den Wert der Variablen ändert.

In den meisten Beispielen aus dem Alltag betrachtet man die Änderung einer Größe über die Zeit. Betrachten wir als Beispiel den Kurs des DAX:

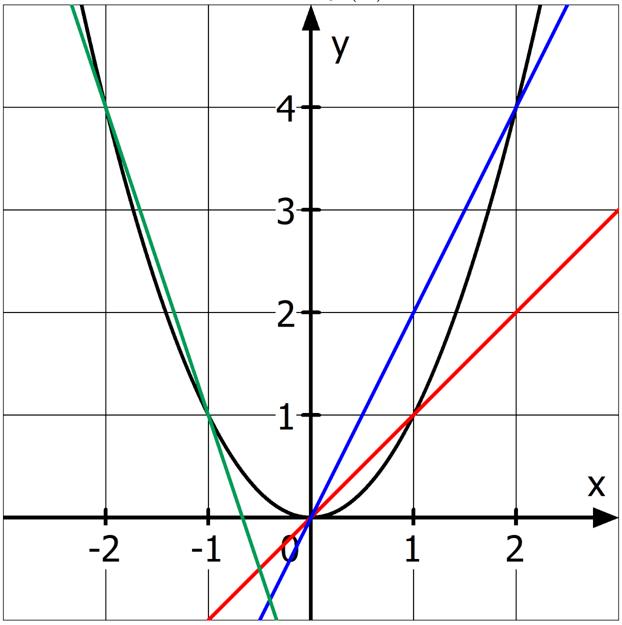
Von Anfang Oktober bis Ende Dezember ist der Kurs von ca. 12.250 Punkten auf ca 14.100 Punkte erhöht. Der Unterschied innerhalb von 3 Monaten beträgt also 1850 Punkte. Die durchschnittliche Änderungsrate oder auch mittlere Änderungsrate entspricht dann $\frac{1850 \text{ Punkte}}{3 \text{ Monate}} \approx 617 \frac{\text{Punkte}}{\text{Monat}}$. Im Mittel ist der DAX also von Anfang Oktober bis Ende Dezember um 617 Punkte pro Monat gestiegen. Würden wir die Achsen des Charts wie üblich mit x-Achse und y-Achse bezeichnen, so lässt sich die mittlere Änderungsrate berechnen, indem man den Unterschied der y-Werte durch den Unterschied der x-Werte teilt.

Die mittlere oder durchschnittliche Änderungsrate einer Funktion $f(x)$ auf dem Intervall $[x_1,\ x_2]$ lässt sich allgemein wie folgt bestimmen:

Mittlere Änderungsrate

$$\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$$

Diesen Ausdruck kennen wir bereits. Sind von einer Geraden zwei Punkte $P_1(x_1|f(x_1))$ und $P_2(x_2|f(x_2))$ gegeben, so bestimmt der obige Ausdruck die Steigung der Geraden. Tatsächlich kann man die mittlere Änderungsrate als durchschnittliche Steigung der Funktion auffassen. Betrachten wir als Beispiel $f(x)=x^2$:



Die mittlere Änderungsrate im Intervall $[0,\ 1]$ entspricht dann der Steigung der Geraden durch die Punkte $P_1(0|f(0)=0)$ und $P_2(1|f(1)=1)$: $\frac{1-0}{1-0}=1$.

Die mittlere Änderungsrate im Intervall $[0,\ 2]$ entspricht:

$\frac{4-0}{2-0}=2$

Die mittlere Änderungsrate im Intervall $[-2,\ -1]$ entspricht:

$\frac{1-4}{-1-(-2)}=-3$

Die mittlere Änderungsrate einer Funktion auf einem Intervall gibt also an, wie weit man im Schnitt nach oben (positive Änderungsrate) oder nach unten (negative Änderungsrate) gehen muss, wenn man einen Schritt nach rechts macht, um vom linken Punkt auf den rechten Punkt zu kommen. Wie die Funktion vor dem Intervall, im Intervall und nach dem Intervall verläuft, spielt für die mittlere Änderungsrate keine Rolle. Es kommt nur auf den Funktionswert am Beginn des Intervalls und am Endes des Intervalls an.

Beispielsweise haben die Funktionen $g(x)=0,75x^2$ und $h(x)=e^{\ln(2)x}$ auf dem Intervall $[0,\ 2]$ die gleiche mittlere Änderungsrate:

Mittlere Änderungsrate von $g(x)$: $\dfrac{g(2)-g(0)}{2-0}=\frac{3}{2}=1,5$

Mittlere Änderungsrate von $h(x)$: $\dfrac{h(2)-h(0)}{2-0}=\frac{4-1}{2}=1,5$

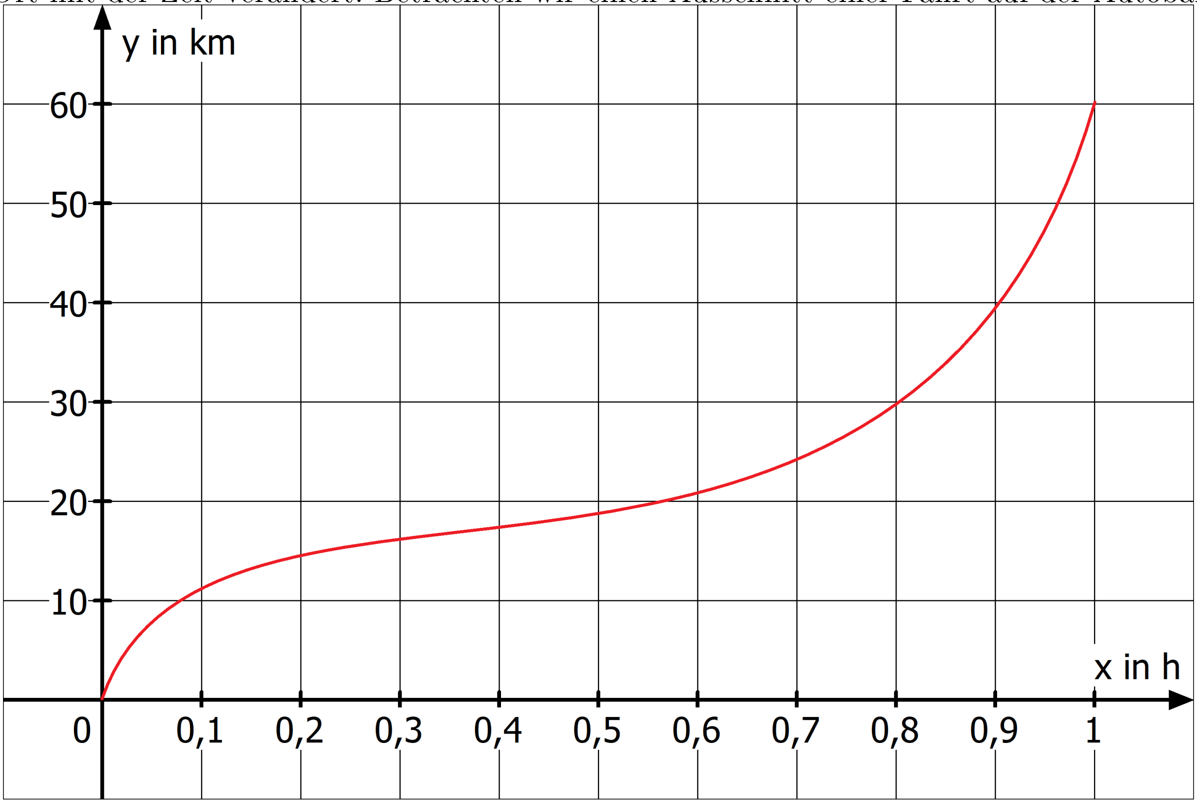
Übung 1 **Bestimme die durchschnittliche Änderungsrate des DAX für folgende Zeiträume jeweils pro Monat.**

a) Von Anfang Oktober bis Ende Februar.
b) Von Anfang Oktober bis Ende Juli.
c) Von Anfang Januar bis Ende Mai.
d) Von Anfang Dezember bis Ende Dezember.

Übung 2 **Bestimme jeweils die durchschnittliche Änderungsrate auf den Intervallen $I_1 = [0,\ 2]$ sowie $I_2 = [-2,\ 2]$ und $I_3 = [-1,\ 4]$. Du kannst auf 2 Nachkommastellen runden, falls notwendig.**

a) $f_1(x) = 3x$
b) $f_2(x) = -2x^2$
c) $f_3(x) = x^3 - 2x^2$
d) $f_4(x) = e^x$
e) $f_5(x) = 2e^{3x} - 4$
f) $f_6(x) = -0,1x^3$
g) $f_7(x) = x + 10$
h) $f_8(x) = -e^x + x - 2$
i) $f_9(x) = -\frac{3}{4}x^2 + 3x$

Die Geschwindigkeit ist ein weiteres Beispiel für eine Änderungsrate. Sie gibt an wie stark sich der Ort mit der Zeit verändert. Betrachten wir einen Ausschnitt einer Fahrt auf der Autobahn:



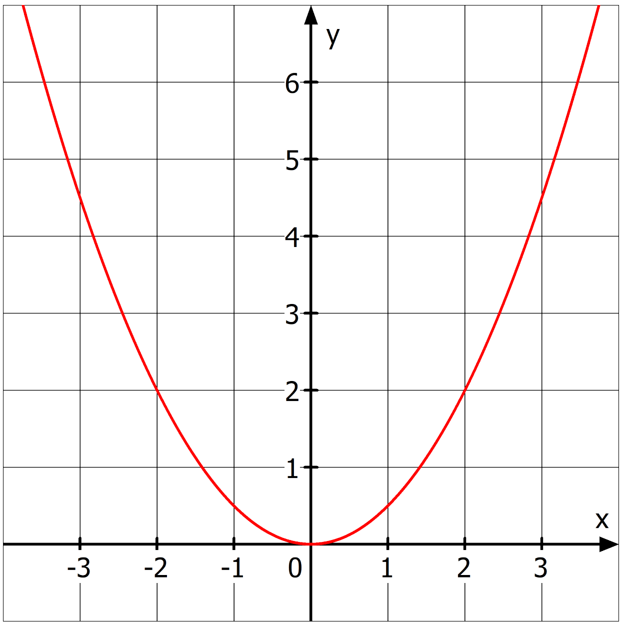
Im obigen Beispiel lässt sich die Durchschnittsgeschwindigkeit in der ersten Stunde wie folgt berechnen: $\frac{60km-0km}{1h-0h} = 60\frac{km}{h}$. Man kann leicht erkennen, dass die momentane Geschwindigkeit (auf dem Tacho angezeigte Geschwindigkeit) nicht gleich bleibt, da die Kurve sonst eine Gerade sein müsste. Doch wie kann man die momentane Geschwindigkeit z.B. nach $0,3h$ bestimmen?

Eine mögliche Schätzung wäre natürlich, dass die Geschwindigkeit ca. $60\frac{km}{h}$ beträgt, doch diese ist eher ungenau. Rein vom Verlauf der Kurve her, muss die Geschwindigkeit kleiner als $60\frac{km}{h}$ sein, da die Kurve bei $0,3h$ relativ flach verläuft. Eine bessere Schätzung würde man erhalten, indem man die Durchschnittsgeschwindigkeit von $0,3h$ bis $1h$ bestimmt: $\frac{60km-17km}{1h-0{,}3h} \approx 61\frac{km}{h}$. Das Auto hatte in den letzten 42 Minuten also eine durchschnittliche Geschwindigkeit von $61\frac{km}{h}$, was eine sogar noch schlechtere Schätzung ist.

Etwas besser wäre es, die rechte Grenze etwas weiter nach links zu schieben, also nicht den Zeitraum von $0,3h$ bis $1h$ zu betrachten, sondern von $0,3h$ bis $0,6h$: $\frac{21km-17km}{0{,}6h-0{,}3h} \approx 13\frac{km}{h}$. Diese Schätzung scheint schon deutlich besser zu sein.

Letztlich bestimmen wir die Steigung einer Geraden mit Hilfe eines Steigungsdreiecks, wobei 2 Ecken des Dreiecks auf dem Schaubild der Funktion liegen. Je näher wir die beiden Ecken zusammenschieben, desto näher liegt das Ergebnis an der momentanen Änderungsrate. Mathematisch kann man die 2 Ecken auf einen Punkt zusammenschieben, um die tatsächliche momentane Änderungsrate zu bestimmen. Grafisch wird aus der Geraden dann eine Tangente (vergleiche Tangenten bei der gegenseitigen Lage von Geraden und Parabel). Im obigen Beispiel hätte die Tangente an der Stelle $0,3h$ eine Steigung von ca. $12\frac{km}{h}$, was der auf dem Tacho angezeigten Geschwindigkeit entsprechen würde.

Die momentane Änderungsrate bzw. Ableitung einer Funktion an einer Stelle x_0 entspricht der Steigung der Tangenten an dieser Stelle. Die Begriffe momentane Änderungsrate, Ableitung und Steigung (kurz für Tangentensteigung) werden meist synonym verwendet.



Wert der Ableitung von $f(x) = 0,5x^2$ grafisch bestimmt:

An der Stelle $x_0 = 1$: Die Tangente an der Stelle $x = 1$ hat eine Steigung von ca. 1, also beträgt die Ableitung 1.

An der Stelle $x_1 = 2$: Die Tangente an der Stelle $x = 2$ hat eine Steigung von ca. 2, also beträgt die Ableitung 2.

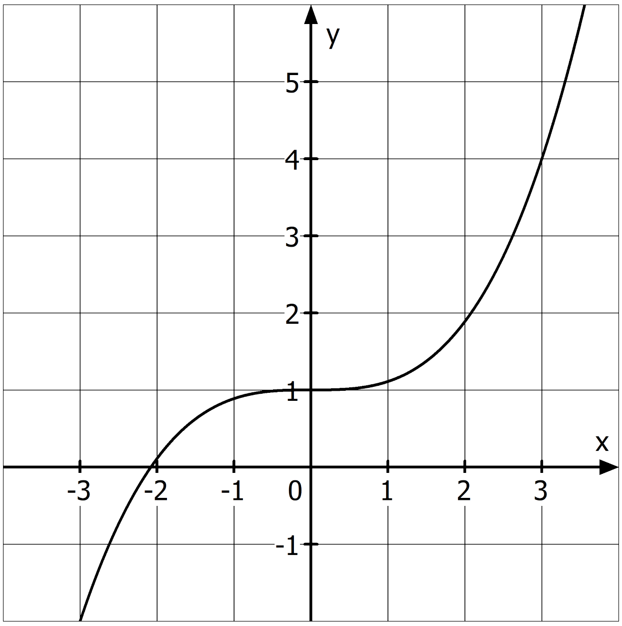
An der Stelle $x_2 = 0$: Die Tangente an der Stelle $x = 0$ hat eine Steigung von 0, also beträgt die Ableitung 0.

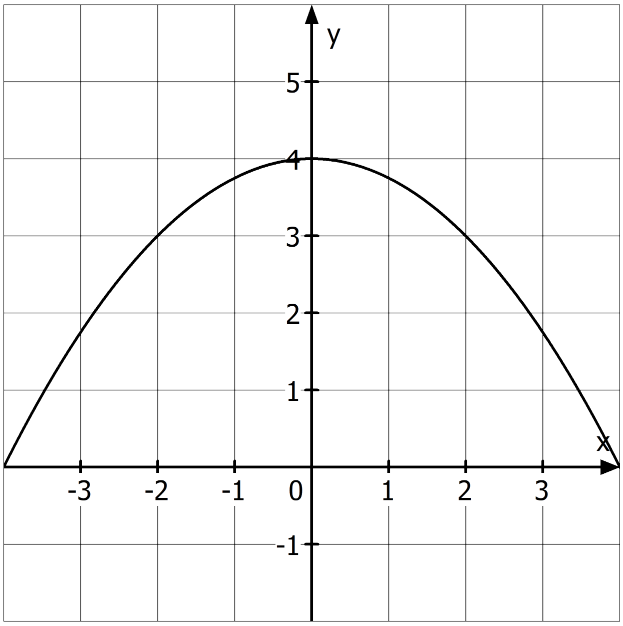
An der Stelle $x_0 = -3$: Die Tangente an der Stelle $x = -3$ hat eine Steigung von ca. -3, also beträgt die Ableitung -3.

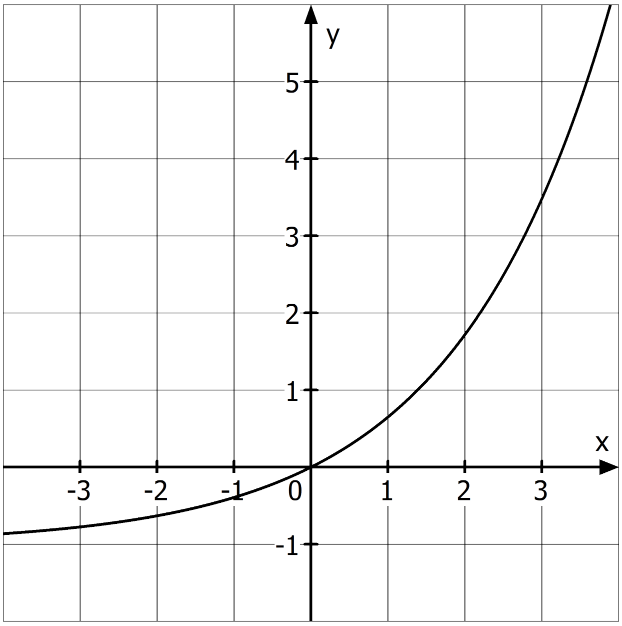
Wir führen als Symbol für die Ableitung $f'(x)$, sprich f Strich von x, ein.
$f'(1) = 2$ (sprich f Strich von 1 gleich 2) bedeutet also, dass die Ableitung von f an der Stelle 1 gleich 2 beträgt. Würde man die Tangente an f an der Stelle 1 zeichnen, so hätte sie eine Steigung von 2.

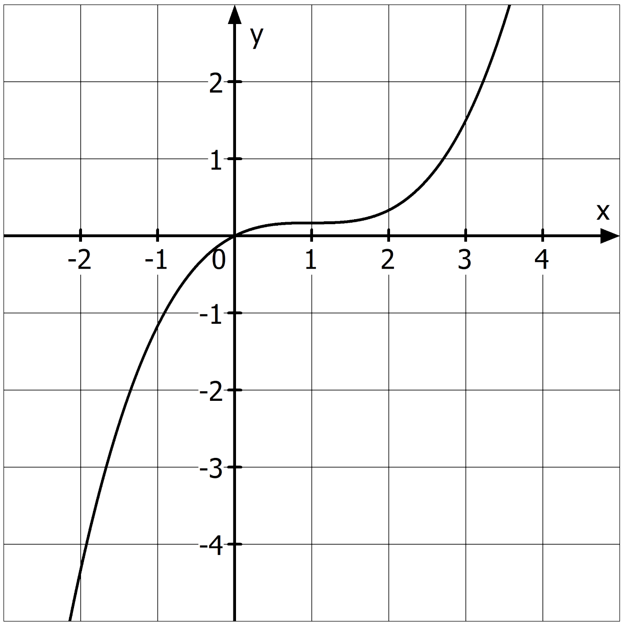
Zusammengefassung: Die momentane Änderungsrate/Ableitung/Steigung einer Funktion gibt also an, wie stark sich die Funktion an einer Stelle ändert (statt innerhalb eines Intervalls wie bei der durchschnittlichen Änderungsrate). Steigt die Funktion, ist die Ableitung positiv, fällt die Funktion ist sie negativ. Je steiler das Schaubild nach oben geht, desto größer ist die Steigung und damit auch die Ableitung. Grafisch lässt sich die Ableitung mit Hilfe der Tangentensteigung abschätzen.

Übung 3 **Schätze jeweils die Ableitung an den Stellen -2, 0, 1 und 3 ab.**







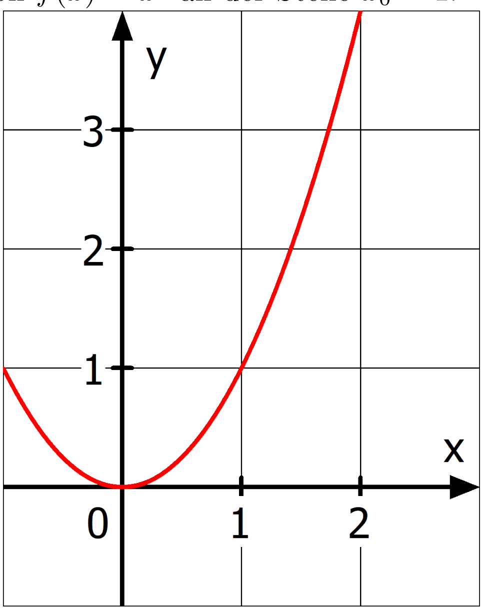


Grafisch kann man die momentane Änderungsrate bzw. Steigung bzw. Ableitung einer Funktion an einer Stelle x_0 abschätzen, indem man die Tangente einzeichnet und ihre Steigung bestimmt. Mathematisch bestimmt man die mittlere Änderungsrate mit Hilfe eines Steigungsdreiecks und schiebt dann die beiden Ecken, die auf der Funktion liegen auf einen Punkt zusammen:

Berechnen der Ableitung:

$$f'(x_0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

Den obigen Ausdruck nennt man Differentialquotient. Die Größe h entspricht der Breite des Steigungsdreiecks. Das *lim*-Zeichen (gesprochen Limes) steht für den Grenzwert. Wir lassen h immer näher gegen 0 gehen. Grob vereinfacht (und streng genommen falsch) wollen wir für h den Wert 0 einsetzen. Dann würden wir aber durch 0 teilen, was nicht definiert ist. Jedoch kann man den Bruch umformen bis man für h tatsächlich 0 einsetzen kann. Betrachten wir als Bsp. die Steigung von $f(x) = x^2$ an der Stelle $x_0 = 1$:



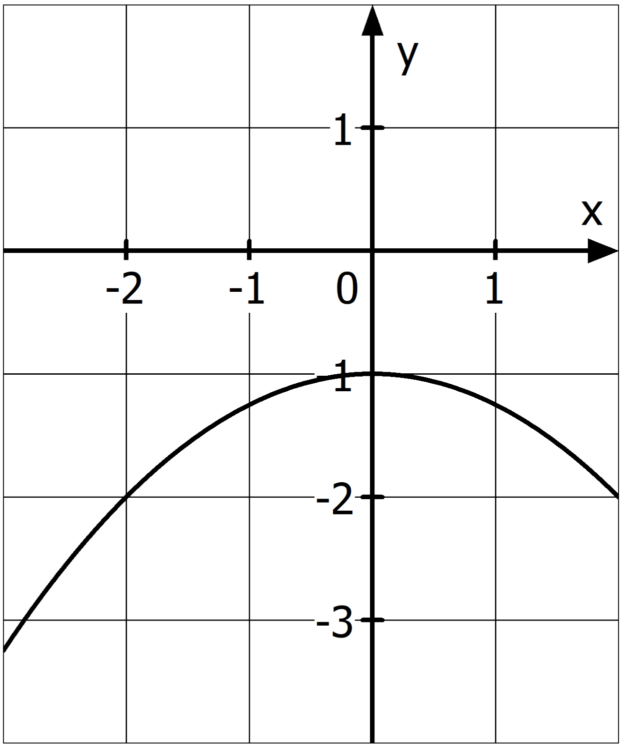
Zeichnet man die Tangente an der Stelle $x_0 = 1$ ein, so scheint die Steigung und damit die Ableitung den Wert 2 zu haben: $f'(1) = 2$

$$\begin{aligned} f'(1) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(1+h)-f(1)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{(1+h)^2-1^2}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{1+2h+h^2-1}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{2h+h^2}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{2+h}{1} = \lim_{h\to 0} 2+h = 2 \end{aligned}$$

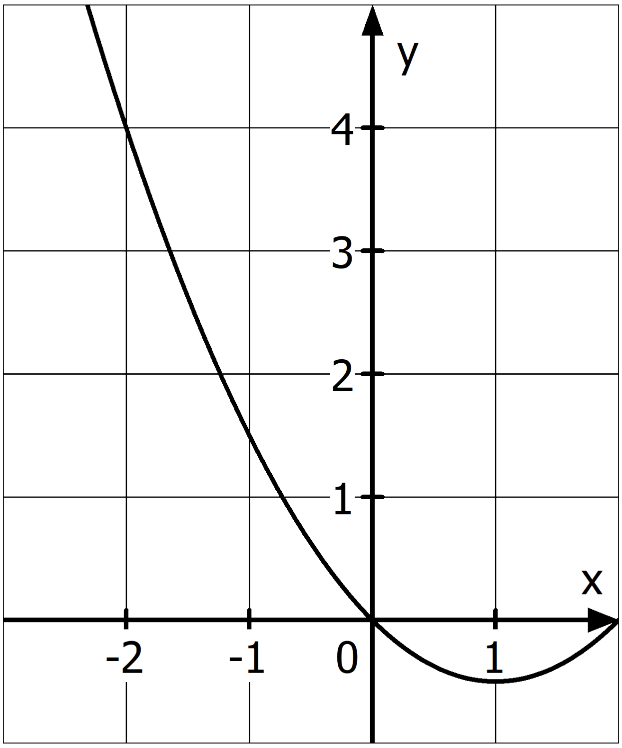
Mit Hilfe des Differentialquotienten kann man also die Werte der Ableitung exakt berechnen. Dazu schreibt man den Quotienten aus und formt den Bruch dann so lange um bis man für h den Wert 0 einsetzen kann ohne, dass man durch 0 teilen würde.
Bestimmen wir nun noch die Ableitung von x^2 an der Stelle $x_0 = -0,5$:

$$\begin{aligned} f'(-0,5) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(-0,5+h)-f(-0,5)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{(-0,5+h)^2-(-0,5)^2}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{0,25-h+h^2-0,25}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{-h+h^2}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{-1+h}{1} = \lim_{h\to 0} -1+h = -1 \end{aligned}$$

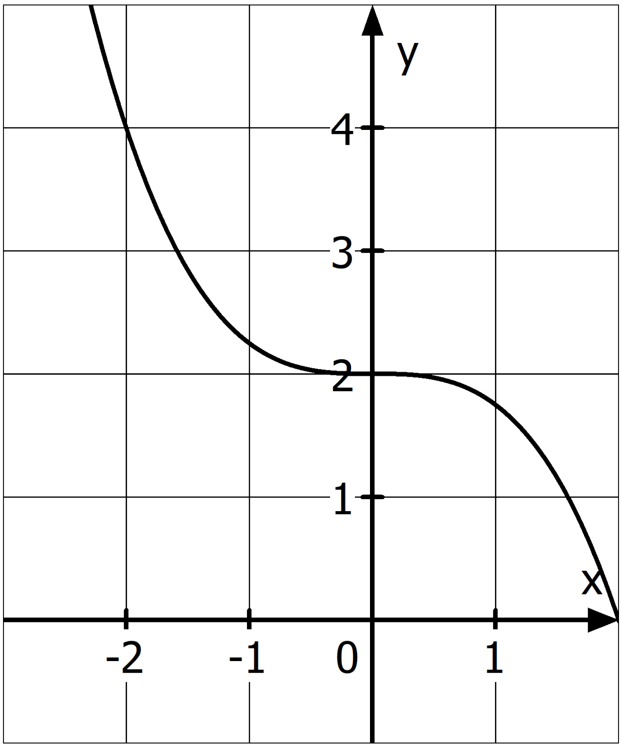
Übung 4 **Schätze jeweils die Ableitung an den Stellen -2 und 1 ab und berechne den Wert dann exakt.**



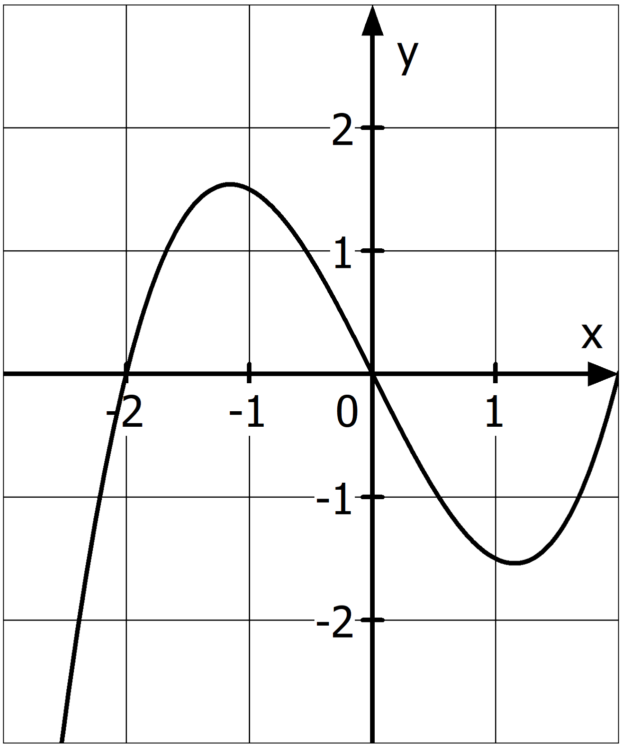
$f(x) = -0,25x^2 - 1$



$f(x) = 0,5x^2 - x$



$f(x) = -0,25x^3 + 2$



$f(x) = 0,5x^3 - 2x$

Es ist mühsam die Ableitung für einzelne Stellen mit Hilfe des Differenzialquotienten zu bestimmen. Statt erst einen Wert für x_0 einzusetzen und dann die momentane Änderungsrate zu bestimmen, können wir das Vorgehen umdrehen und erst die momentane Änderungsrate bestimmen und dann Werte einsetzen:

$$\begin{aligned} f(x) &= x^2 \\ f'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^2-x^2}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{x^2+2hx+h^2-x^2}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{2hx+h^2}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} 2x+h \\ &= 2x \end{aligned}$$

Die Ableitung von $f(x) = x^2$ ist also $f'(x) = 2x$. Wir haben bereits gezeigt, dass die Ableitung an der Stelle $x_0 = 1$ den Wert 2 haben muss. Tatsächlich ergibt sich $f'(1) = 2 \cdot 1 = 2$.

Übung 5 **Berechne jeweils allgemein die Ableitung** $f'(x)$

a) $f_1(x) = 2x^2$
b) $f_2(x) = -x^2$
c) $f_3(x) = x$
d) $f_4(x) = 3x - 4$
e) $f_5(x) = x^2 + 1$
f) $f_6(x) = x^2 + x$
g) $f_7(x) = \frac{2}{3}x^2 - \frac{1}{2}$
h) $f_8(x) = 5$
i) $f_9(x) = -x + 7$
j) $f_{10}(x) = \frac{2}{3} - 5x^2$
k) $f_{11}(x) = 3x^2 - 5x$
l) $f_{12}(x) = -0,5x^2 + 0,1x - 9$
m) $f_{13}(x) = -4$
n) $f_{14}(x) = 9 - 4x$
o) $f_{15}(x) = 8x - 4x^2$
p) $f_{16}(x) = x^3$

Es ist mühsam die Ableitung für einzelne Stellen mit Hilfe des Differenzialquotienten zu bestimmen. Statt erst einen Wert für x_0 einzusetzen und dann die momentane Änderungsrate zu bestimmen, können wir das Vorgehen umdrehen und erst die momentane Änderungsrate bestimmen und dann Werte einsetzen:

$$\begin{aligned} f(x) &= x^2 \\ f'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^2-x^2}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{x^2+2hx+h^2-x^2}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{2hx+h^2}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} 2x+h \\ &= 2x \end{aligned}$$

Die Ableitung von $f(x) = x^2$ ist also $f'(x) = 2x$. Wir haben bereits gezeigt, dass die Ableitung an der Stelle $x_0 = 1$ den Wert 2 haben muss. Tatsächlich ergibt sich $f'(1) = 2\cdot 1 = 2$.

Übung 6 Berechne jeweils allgemein die Ableitung $f'(x)$

a) $f_1(x) = 2x^2$
b) $f_2(x) = -x^2$
c) $f_3(x) = x$
d) $f_4(x) = 3x - 4$
e) $f_5(x) = x^2 + 1$
f) $f_6(x) = x^2 + x$
g) $f_7(x) = \frac{2}{3}x^2 - \frac{1}{2}$
h) $f_8(x) = 5$
i) $f_9(x) = -x + 7$
j) $f_{10}(x) = \frac{2}{3} - 5x^2$
k) $f_{11}(x) = 3x^2 - 5x$
l) $f_{12}(x) = -0,5x^2 + 0,1x - 9$
m) $f_{13}(x) = -4$
n) $f_{14}(x) = 9 - 4x$
o) $f_{15}(x) = 8x - 4x^2$
p) $f_{16}(x) = x^3$

Wir kennen nun die Ableitung der Normalparabel. Es scheint naheliegend, dass die Ableitungen von $2x^2$, $3x^2$, $-x^2$ und ähnlichen Funktionen eine zu x^2 ähnliche Ableitung haben. Wir berechnen die Ableitung von $f_a(x) = ax^2$:

$$\begin{aligned} f_a(x) &= ax^2 \\ f_a'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{f_a(x+h) - f_a(x)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{a(x+h)^2 - ax^2}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{ax^2 + a2hx + ah^2 - ax^2}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{a2hx + ah^2}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} a2x + ah \\ &= a2x \end{aligned}$$

$f(x) = x^2$ und $f_a(x) = ax^2$ unterscheiden sich nur durch den Faktor a. Das gleiche Verhalten zeigen die Ableitungen. $f'(x) = 2x$ und $f_a'(x) = a2x$ unterscheiden sich ebenfalls nur durch den Faktor a.

Tatsächlich lässt sich ganz allgemein zeigen, dass die Ableitung einer Funktion und einem Faktor $af(x)$ gleich dem gleichen Faktor mal der Ableitung ist: $(af(x))' = af'(x)$:

$$\begin{aligned} g(x) &= af(x) \\ g'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{af(x+h) - af(x)}{h} \\ &= a \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \\ &= af'(x) \end{aligned}$$

Faktorregel:
Die Ableitung von $af(x)$ ist $af'(x)$.

Auch mit Hilfe der Faktorregel müssen wir die Ableitung von Funktionen wie x^2, x^3, $x^4, \ldots$ mit Hilfe des Differentialquotienten bestimmen. Glücklicherweise können wir die Ableitung dieser Funktionen sehr einfach mit Hilfe der Potenzregel berechnen. Dazu bestimmen wir die Ableitung einer Funktion $f(x) = x^n$:

$$\begin{aligned} f(x) &= x^n \\ f'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^n - x^n}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{x^n + nx^{n-1}h + \mathcal{O}(h^2) - x^n}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{nx^{n-1}h + \mathcal{O}(h^2)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} nx^{n-1} + \mathcal{O}(h) \\ &= nx^{n-1} \end{aligned}$$

Der Ausdruck $\mathcal{O}(h^2)$ steht für eine Summe, bei der jeder Summand mindestens ein h^2 beinhaltet. Der interessierte Leser sei an die Binomialkoeffizienten verwiesen. Kürzt man diese Summe mit h, so bleibt eine Summe übrig, die in jedem Summanden mindestens ein h hat: $\mathcal{O}(h)$. Diese Summe wird 0, wenn man h gegen 0 gehen lässt.

Wir haben also eine Regel gefunden um alle Funktionen vom Typ $f(x) = x^n$ abzuleiten. Verbunden mit der Faktorregel ergibt sich:

$$\begin{aligned} f(x) &= ax^n \\ f'(x) &= anx^{n-1} \end{aligned}$$

Potenzregel:
Eine Potenzfunktion vom Typ $f(x) = ax^n$ leitet man ab, indem man die Funktion mit der Hochzahl n multipliziert und dann die Hochzahl um 1 verringert: $f'(x) = anx^{n-1}$

Übung 7 **Berechne jeweils allgemein die Ableitung** $f'(x)$

a) $f_1(x) = x^3$
b) $f_2(x) = x^4$
c) $f_3(x) = x^5$
d) $f_4(x) = -2x^3$
e) $f_5(x) = 5x^4$
f) $f_6(x) = \frac{2}{3}x^6$
g) $f_7(x) = \frac{1}{2}x^4$
h) $f_8(x) = 4x$
i) $f_9(x) = 0.5x^6$
j) $f_{10}(x) = \frac{2}{3}x^9$
k) $f_{11}(x) = \frac{3}{8}x^4$
l) $f_{12}(x) = -3x^{11}$
m) $f_{13}(x) = \frac{x^3}{6}$
n) $f_{14}(x) = x^5 \cdot 7$
o) $f_{15}(x) = -0,2x^8$
p) $f_{16}(x) = \frac{5}{99}x^{99}$

Wir wissen nun wie man Potenzfunktionen ableiten kann. Ganzrationale Funktionen sind jedoch oft eine Summe aus mehreren Potenzfunktionen. Ganzrationale Funktionen lassen sich einfach ableiten mit Hilfe der Summenregel. Dazu leiten wir die Summe aus zwei Funktionen allgemein ab:

$$\begin{aligned}
k(x) &= f(x) + g(x) \\
k'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) + g(x+h) - (f(x) + g(x)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) + g(x+h) - f(x) - g(x}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x) + g(x+h) - g(x)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} + \lim_{h\to 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h} \\
&= f'(x) + g'(x)
\end{aligned}$$

Die Summenregel gibt vor, wie man Funktionen ableiten kann, die aus einer Summe bestehen:

$$\begin{aligned}
k(x) &= f(x) + g(x) \\
k'(x) &= f'(x) + g'(x)
\end{aligned}$$

Summenregel:
Besteht eine Funktion aus mehreren Summanden, so kann man die einzelnen Summanden nacheinander ableiten.

Übung 8 **Berechne jeweils allgemein die Ableitung** $f'(x)$

a) $f_1(x) = 2x^3 - 4x$
b) $f_2(x) = 2x^4 + 4$
c) $f_3(x) = 2x^3 - x^2 + 7x$
d) $f_4(x) = 4x^2 - 8$
e) $f_5(x) = 3x^4 + x^3 - 8x$
f) $f_6(x) = \frac{5}{6}x^3 + 5x^2$
g) $f_7(x) = -\frac{3}{2}x^4 + x^3 - 2x$
h) $f_8(x) = 4x^4 + 3x^3 - 2x^2$
i) $f_9(x) = 1.5x^4 - 2,3x^2 + 5$
j) $f_{10}(x) = -\frac{3}{4}x^2 + 2x$
k) $f_{11}(x) = \frac{2}{3}x^4 - \frac{8}{3}x^2$
l) $f_{12}(x) = -\frac{5}{33}x^{11} + \frac{4}{81}x^9$
m) $f_{13}(x) = \frac{x^4}{6} + \frac{3x^2}{8}$
n) $f_{14}(x) = x(2x^2 - 4x)$
o) $f_{15}(x) = (x+1)^2$
p) $f_{16}(x) = (x+3)(x-4)$

Lösung zu Übung 1

a) Von Anfang Oktober bis Ende Februar.
$\frac{15.200\text{ Punkte}-12.250\text{ Punkte}}{5\text{ Monate}} = 590\frac{\text{Punkte}}{\text{Monat}}$

b) Von Anfang Oktober bis Ende Juli.
$\frac{16.100\text{ Punkte}-12.250\text{ Punkte}}{10\text{ Monate}} = 385\frac{\text{Punkte}}{\text{Monat}}$

c) Von Anfang Januar bis Ende Mai.
$\frac{15.750\text{ Punkte}-14.000\text{ Punkte}}{5\text{ Monate}} = 350\frac{\text{Punkte}}{\text{Monat}}$

d) Von Anfang Dezember bis Ende Dezember.
$\frac{14.000\text{ Punkte}-14.400\text{ Punkte}}{1\text{ Monat}} = -400\frac{\text{Punkte}}{\text{Monat}}$
Die mittlere Änderungsrate ist negativ, da der Kurs gefallen ist.

Lösung zu Übung 2

a) $f_1(x) = 3x$
mittlere Änderungsrate auf $I_1 = [0,\ 2]$: $\frac{6-0}{2-0} = 3$
mittlere Änderungsrate auf $I_2 = [-2,\ 2]$: $\frac{6-(-6)}{2-(-2)} = 3$
mittlere Änderungsrate auf $I_3 = [-1,\ 4]$: $\frac{12-(-3)}{4-(-1)} = 3$
Anmerkung: Da es sich um eine Gerade handelt, ist die mittlere Änderungsrate immer gleich der Steigung der Geraden.

b) $f_2(x) = -2x^2$
mittlere Änderungsrate auf $I_1 = [0,\ 2]$: $\frac{-8-0}{2-0} = -4$
mittlere Änderungsrate auf $I_2 = [-2,\ 2]$: $\frac{-8-(-8)}{2-(-2)} = 0$
mittlere Änderungsrate auf $I_3 = [-1,\ 4]$: $\frac{-32-(-2)}{4-(-1)} = -6$

c) $f_3(x) = x^3 - 2x^2$
mittlere Änderungsrate auf $I_1 = [0,\ 2]$: $\frac{0-0}{2-0} = 0$
mittlere Änderungsrate auf $I_2 = [-2,\ 2]$: $\frac{0-(-16)}{2-(-2)} = 4$
mittlere Änderungsrate auf $I_3 = [-1,\ 4]$: $\frac{32-(-3)}{4-(-1)} = 7$

d) $f_4(x) = e^x$
mittlere Änderungsrate auf $I_1 = [0,\ 2]$: $\frac{7{,}39-1}{2-0} = 3{,}19$
mittlere Änderungsrate auf $I_2 = [-2,\ 2]$: $\frac{7{,}39-0{,}14}{2-(-2)} = 1{,}81$
mittlere Änderungsrate auf $I_3 = [-1,\ 4]$: $\frac{54{,}60-0{,}37}{4-(-1)} = 10{,}85$

e) $f_5(x) = 2e^{3x} - 4$
mittlere Änderungsrate auf $I_1 = [0,\ 2]$: $\frac{802{,}86-(-2)}{2-0} = 402{,}43$
mittlere Änderungsrate auf $I_2 = [-2,\ 2]$: $\frac{802{,}86-(-4{,}00)}{2-(-2)} = 201{,}71$
mittlere Änderungsrate auf $I_3 = [-1,\ 4]$: $\frac{325.505{,}58-(-3{,}90)}{4-(-1)} = 65.101{,}90$

f) $f_6(x) = -0{,}1x^3$
mittlere Änderungsrate auf $I_1 = [0,\ 2]$: $\frac{-0{,}8-0}{2-0} = -0{,}4$
mittlere Änderungsrate auf $I_2 = [-2,\ 2]$: $\frac{-0{,}8-0{,}8}{2-(-2)} = -0{,}4$
mittlere Änderungsrate auf $I_3 = [-1,\ 4]$: $\frac{-6{,}4-0{,}1}{4-(-1)} = -1{,}3$

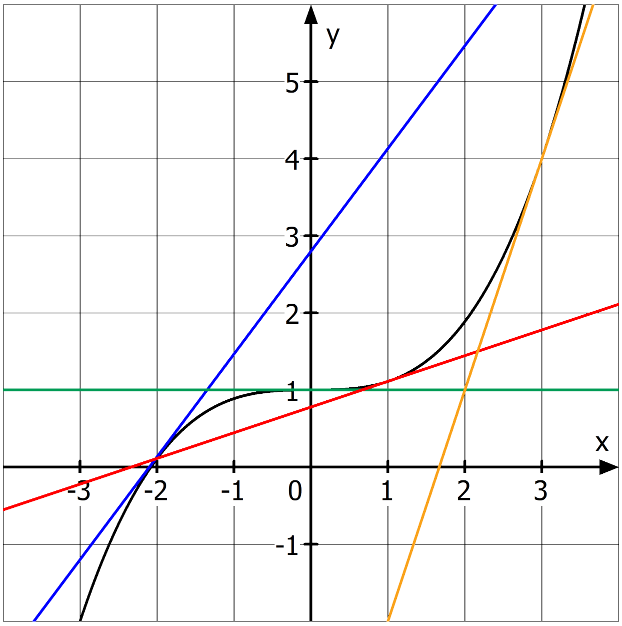
g) $f_7(x) = x + 10$
mittlere Änderungsrate auf $I_1 = [0,\ 2]$: $\frac{12-10}{2-0} = 1$
mittlere Änderungsrate auf $I_2 = [-2,\ 2]$: $\frac{12-8}{2-(-2)} = 1$
mittlere Änderungsrate auf $I_3 = [-1,\ 4]$: $\frac{14-9}{4-(-1)} = 1$
Auch hier hätte man die mittleren Änderungsraten direkt aus der Steigung bestimmen können.

h) $f_8(x) = -e^x + x - 2$
mittlere Änderungsrate auf $I_1 = [0,\ 2]$: $\frac{-7{,}39-(-3)}{2-0} = -2{,}19$

mittlere Änderungsrate auf $I_2 = [-2,\ 2]$: $\frac{-7{,}39-(-4{,}14)}{2-(-2)} = -0,81$
mittlere Änderungsrate auf $I_3 = [-1,\ 4]$: $\frac{-52{,}60-(-3{,}37)}{4-(-1)} = -9,85$

i) $f_9(x) = -\frac{3}{4}x^2 + 3x$
mittlere Änderungsrate auf $I_1 = [0,\ 2]$: $\frac{3-0}{2-0} = 1,5$
mittlere Änderungsrate auf $I_2 = [-2,\ 2]$: $\frac{3-(-9)}{2-(-2)} = 3$
mittlere Änderungsrate auf $I_3 = [-1,\ 4]$: $\frac{0-(-3{,}75)}{4-(-1)} = 0,75$

Lösung zu Übung 3

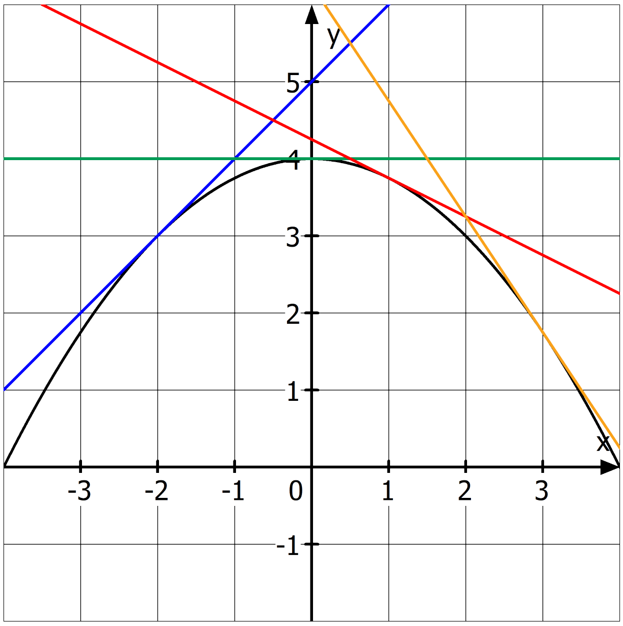


$f'(-2) \approx -\frac{8}{3}$

$f'(0) \approx 0$

$f'(1) \approx \frac{1}{3}$

$f'(3) \approx 9$

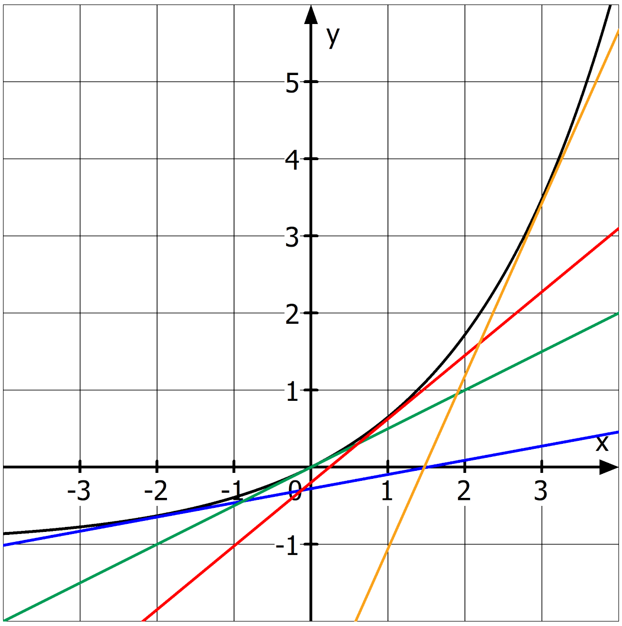


$f'(-2) \approx 1$

$f'(0) \approx 0$

$f'(1) \approx -0,5$

$f'(3) \approx -1,5$

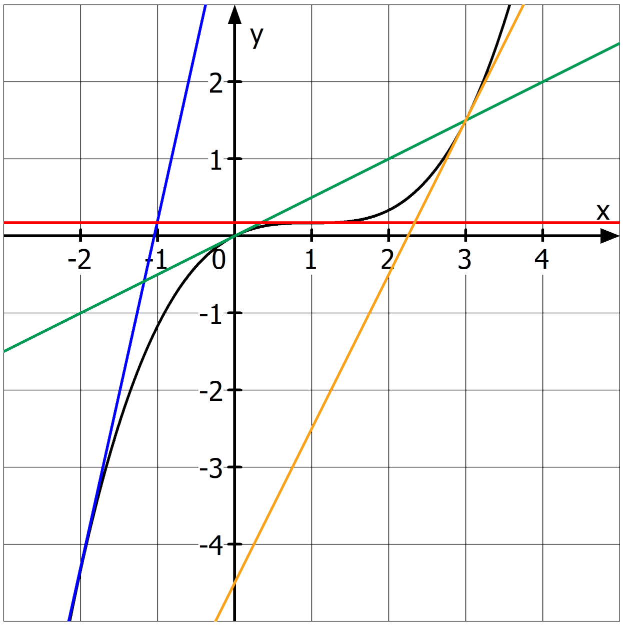


$f'(-2) \approx 0,2$

$f'(0) \approx 0,5$

$f'(1) \approx 0,8$

$f'(3) \approx 2,25$



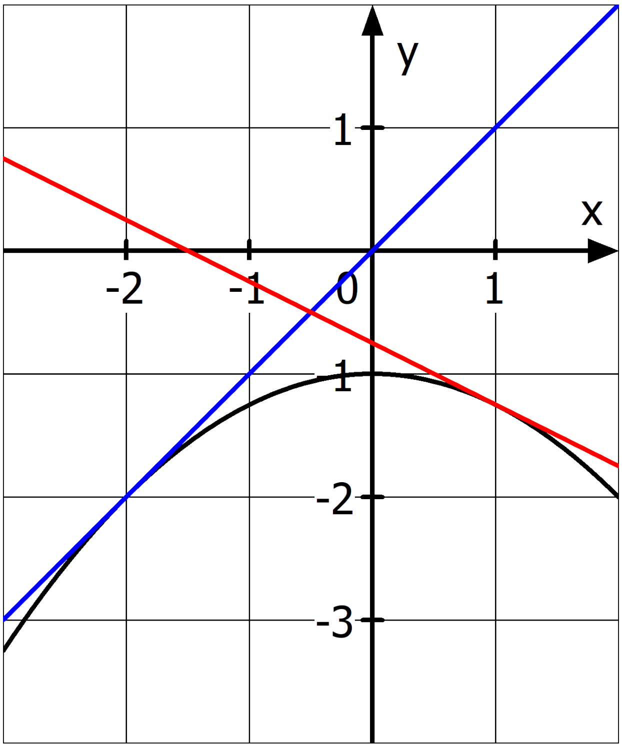
$f'(-2) \approx 4,5$

$f'(0) \approx 0,5$

$f'(1) \approx 0$

$f'(3) \approx 2$

Lösung zu Übung 4

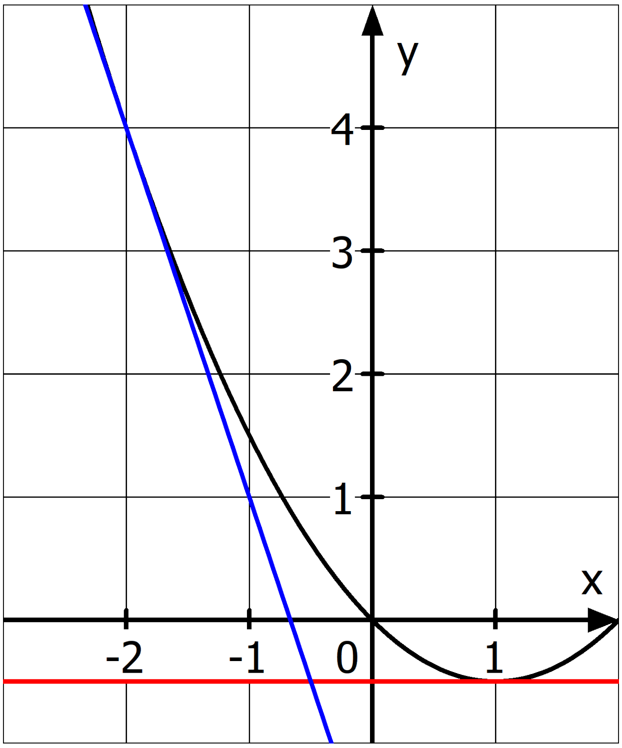


$f(x) = -0,25x^2 - 1$

Schätzung: $f'(-2) \approx 1$ und $f'(1) \approx -0,5$

Berechnung:

$$\begin{aligned}
f'(-2) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(-2+h) - f(-2)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{-0,25(-2+h)^2 - 1 - (-0,25(-2)^2 - 1)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} 1 - 0,25h = 1 \\
f'(1) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{-0,25(1+h)^2 - 1 - (-0,25 \cdot 1^2 - 1)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} -0,5 - 0,25h = -0,5
\end{aligned}$$

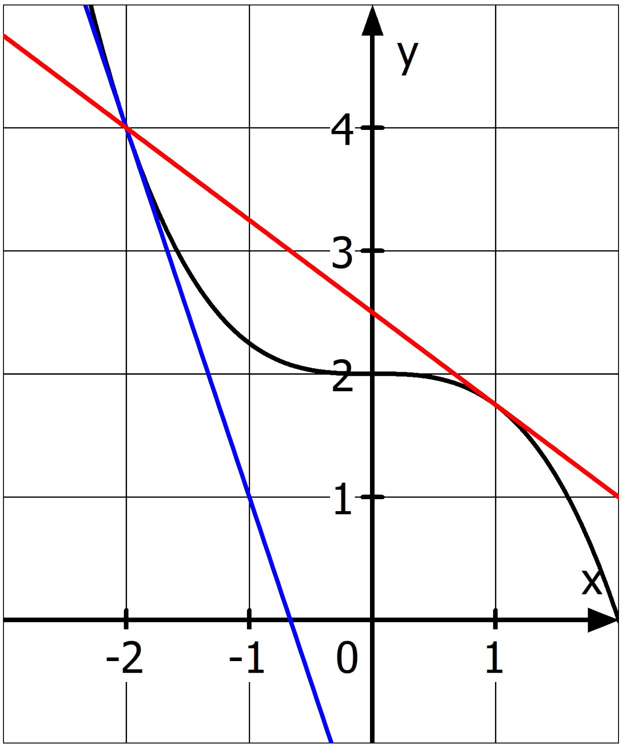


$f(x) = 0,5x^2 - x$

Schätzung: $f'(-2) \approx -3$ und $f'(1) \approx 0$

Berechnung:

$$\begin{aligned}
f'(-2) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(-2+h) - f(-2)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{0,5(-2+h)^2 - (-2+h) - (0,5(-2)^2 - (-2))}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} -3 + 0,5h = -3 \\
f'(1) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{0,5(1+h)^2 - (1+h) - (0,5 \cdot 1^2 - 1)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} 0,5h = 0
\end{aligned}$$

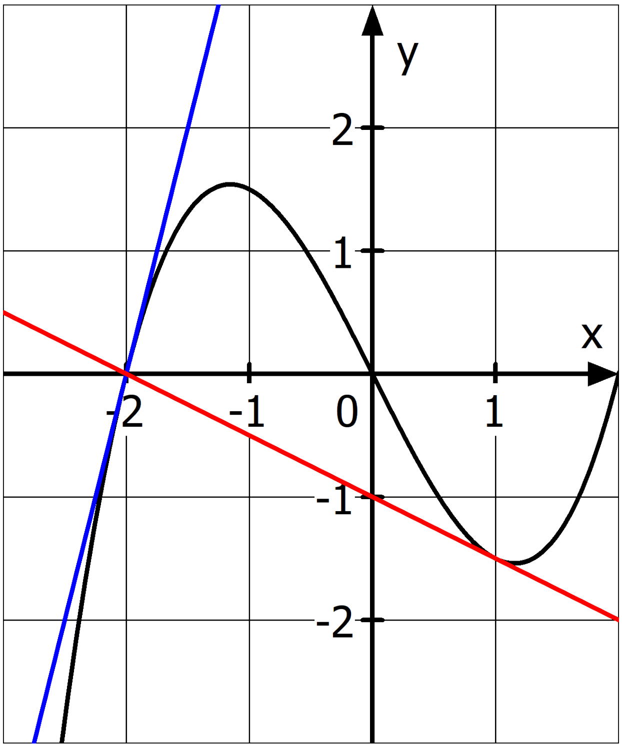


$f(x) = -0,25x^3 + 2$

Schätzung: $f'(-2) \approx -3$ und $f'(1) \approx -0,75$

Berechnung:

$$f'(-2) = \lim_{h\to 0} \frac{f(-2+h) - f(-2)}{h}$$
$$= \lim_{h\to 0} \frac{-0,25(-2+h)^3 + 2 - (-0,25(-2)^3 + 2)}{h}$$
$$= \lim_{h\to 0} -3 + 1,5h - 0,25h^2 = -3$$
$$f'(1) = \lim_{h\to 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h}$$
$$= \lim_{h\to 0} \frac{-0,25(1+h)^3 + 2 - (-0,25 \cdot 1^3 + 2)}{h}$$
$$= \lim_{h\to 0} -0,75 - 0,75h - 0,25h^2 = -0,75$$



$f(x) = 0,5x^3 - 2x$

Schätzung: $f'(-2) \approx 4$ und $f'(1) \approx -0,5$

Berechnung:

$$f'(-2) = \lim_{h\to 0} \frac{f(-2+h) - f(-2)}{h}$$
$$= \lim_{h\to 0} \frac{0,5(-2+h)^3 - 2(-2+h) - (0,5(-2)^3 - 2(-2))}{h}$$
$$= \lim_{h\to 0} 4 - 3h + 0,5h^2 = 4$$
$$f'(1) = \lim_{h\to 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h}$$
$$= \lim_{h\to 0} \frac{0,5(1+h)^3 - 2(1+h) - (0,5 \cdot 1^3 - 2 \cdot 1)}{h}$$
$$= \lim_{h\to 0} -0,5 + 1,5h + 0,5h^2 = -0,5$$

Lösung zu Übung 6

a) $f_1(x) = 4x$

b) $f_2(x) = -2x$

c) $f_3(x) = 1$

d) $f_4(x) = 3$

e) $f_5(x) = 2x$

f) $f_6(x) = 2x + 1$

g) $f_7(x) = \frac{4}{3}x$

h) $f_8(x) = 0$

i) $f_9(x) = -1$

j) $f_{10}(x) = -10x$

k) $f_{11}(x) = 6x - 5$

l) $f_{12}(x) = -x + 0,1$

m) $f_{13}(x) = 0$

n) $f_{14}(x) = -4$

o) $f_{15}(x) = -8x + 8$

p) $f_{16}(x) = 3x^2$

Lösung zu Übung 6

a) $f_1(x) = 4x$

b) $f_2(x) = -2x$

c) $f_3(x) = 1$

d) $f_4(x) = 3$

e) $f_5(x) = 2x$

f) $f_6(x) = 2x + 1$

g) $f_7(x) = \frac{4}{3}x$

h) $f_8(x) = 0$

i) $f_9(x) = -1$

j) $f_{10}(x) = -10x$

k) $f_{11}(x) = 6x - 5$

l) $f_{12}(x) = -x + 0,1$

m) $f_{13}(x) = 0$

n) $f_{14}(x) = -4$

o) $f_{15}(x) = -8x + 8$

p) $f_{16}(x) = 3x^2$

Lösung zu Übung 7

a) $f_1'(x) = 3x^2$
b) $f_2'(x) = 4x^3$
c) $f_3'(x) = 5x^4$
d) $f_4'(x) = -6x^2$
e) $f_5'(x) = 20x^3$
f) $f_6'(x) = 4x^5$
g) $f_7'(x) = 2x^3$
h) $f_8'(x) = 4$
i) $f_9'(x) = 3x^5$
j) $f_{10}'(x) = 6x^8$
k) $f_{11}'(x) = \frac{3}{2}x^3$
l) $f_{12}'(x) = -33x^{10}$
m) $f_{13}'(x) = \frac{1}{2}x^2$
n) $f_{14}'(x) = 35x^4$
o) $f_{15}'(x) = -1,6x^7$
p) $f_{16}'(x) = 5x^{98}$

Lösung zu Übung 8

a) $f_1'(x) = 6x^2 - 4$

b) $f_2'(x) = 8x^3$

c) $f_3'(x) = 6x^2 - 2x + 7$

d) $f_4'(x) = 8x$

e) $f_5'(x) = 12x^3 + 3x^2 - 8$

f) $f_6'(x) = \frac{5}{2}x^2 + 10x$

g) $f_7'(x) = -6x^3 + 3x^2 - 2$

h) $f_8'(x) = 16x^3 + 9x^2 - 4x$

i) $f_9'(x) = 6x^3 - 4,6x$

j) $f_{10}'(x) = -\frac{3}{2}x + 2$

k) $f_{11}'(x) = \frac{8}{3}x^3 - \frac{16}{3}x$

l) $f_{12}'(x) = -\frac{5}{3}x^{10} + \frac{4}{9}x^8$

m) $f_{13}'(x) = \frac{2}{3}x^3 + \frac{3}{4}x$

n) $f_{14}'(x) = 6x^2 - 8x$

o) $f_{15}'(x) = 2x + 2$

p) $f_{16}'(x) = 2x - 1$

Anmerkung: Bei n), o) und p) muss man zuerst ausmultiplizieren bevor man ableiten kann