Mathematik
Ein Skript für das Berufskolleg

Hermann Maier

1. August 2024

Aktuelle Version sowie Quelldateien unter
https://github.com/hoerm007/MatheSkript_BK1BK2BKFH_BW

QR-Codes erzeugt mit forqrcode.com

Inhaltsverzeichnis

Die folgenden mathematischen Grundkenntnisse sind unabdingbare Voraussetzung zum Verständnis der folgenden Kapitel.

Die Mengenlehre ist ein grundlegendes Teilgebiet der Mathematik. Wir werden uns hier nur mit den für uns relevanten Mengen beschäftigen:

Zahlenmengen

- Die natürlichen Zahlen: $\mathbb{N} =$
  Die Mathematiker können sich nicht einigen, ob die 0 mit eingeschlossen sein soll. Daher wird meist $\mathbb{N}^*$ für die natürlichen Zahlen ohne die 0 verwendet und $\mathbb{N}_0$ für die natürlichen Zahlen mit der 0.
- Die ganzen Zahlen: $\mathbb{Z} =$
  Ergänzt man die natürlichen Zahlen um das Vorzeichen, so erhält man die ganzen Zahlen.
- Die rationalen Zahlen: $\mathbb{Q} =$
  Die rationalen Zahlen enthalten alle Zahlen, die sich als Brüche mit einem Zähler aus den ganzen Zahlen und einem Nenner aus den natürlichen Zahlen (natürlich ohne der 0) darstellen lassen.
- Die reellen Zahlen: $\mathbb{R}$
  In den reellen Zahlen $\mathbb{R}$ liegen „alle“ Zahlen, zumindest alle uns bekannten Zahlen. $\mathbb{R}$ beinhaltet neben $\mathbb{Q}$ auch Zahlen wie $\sqrt{2}$ oder π.

Mengen lassen sich auf verschiedene Arten darstellen. Nehmen wir als Beispiele die Menge aller positiven, geraden Zahlen G und die Menge H aller Zahlen, die größer oder gleich 1 und kleiner 2 sind:

- Aufzählung: $G = \{2; 4; 6; 8; 10; \ldots\}$
- Einschränkung einer übergeordneten Menge $G = \{x \in \mathbb{N} | x \text{ ist gerade}\}$ oder
  $H = \{x \in \mathbb{R} | -1 <= x < 2\}$
- Darstellung als Intervall: $H = [-1; 2)$ Dabei steht die eckige Klammer für ein abgeschlossenes Ende, d.h. die Grenze liegt noch im Intervall und die runde Klammer für ein offenes Intervall, d.h. die Grenze liegt nicht mehr im Intervall.

Liegt eine Zahl in einer Menge, z.B. -2 in $\mathbb{Q}$, so schreibt man $-2 \in \mathbb{Q}$ (Sprich -2 ist Element der rationalen Zahlen).

Die vier Grundrechenarten sollten bereits bekannt sein:

- Addition
- Subtraktion
- Multiplikation
- Division

Reihenfolge von Rechenoperationen:

1.
2.
3.
4.

Für die Addition und Multiplikation gilt jeweils das Kommutativgesetz, d.h. man kann die Reihenfolge der Summanden bzw. Faktoren vertauschen:

Für die Addition und Multiplikation gilt jeweils das Assoziativgesetz, d.h. die Reihenfolge, in der drei Summanden bzw. Faktoren addiert bzw. multipliziert werden, spielt keine Rolle:

Das Distributivgesetz verknüpft die Multiplikation und Addition:

Für das Distributivgesetz lassen sich die Pluszeichen auch durch Minuszeichen sowie die Malzeichen durch Geteiltzeichen ersetzen.

Übung 1 Berechne die folgenden Ausdrücke

a) $3 \cdot 4 - 20 + 2 \cdot 5 =$

b) $20 : (4 \cdot 5 - 16) + 6 =$

c) $(2 + 5) \cdot (6 - 9) =$

d) $(11 - 23) : (2 \cdot 5 + 2) =$

e) $(1 + 2) \cdot 3 \cdot (4 + 5) =$

f) $-2(-5 - 2) - 14 =$

g) $(10 : (-5)) : 2 =$

h) $1 + 2 + 3(-3 - 2 - 1) + 2 \cdot 5 =$

i) $5 \cdot 8 + 4 - 3 \cdot (-4) =$

j) $-3(-2 + 4 \cdot 8 - (2 + 5) + 8) =$

k) $21 : (6 - (4 - 5)) =$

l) $100 : (100 : (5 \cdot 5 - 3(-5 \cdot 5))) =$

m) $(2 + 3 - (12 : 3 - (-1)) \cdot 5) =$

n) $2 \cdot (5 - 3)(15 - 17)(26 : 13)(-1 \cdot 2) =$

o) $-10 \cdot 10 + 5 - 75 + 3 \cdot (-5) =$

p) $100 : (2 \cdot 5(2 - 12)) =$

q) $-2 \cdot (-4 \cdot (-3 \cdot (-1 \cdot (-2 - 1)))) =$

r) $-(1 - (-2 - (-3 - 8))) \cdot (-2) =$

s) $2 \cdot (1 + (1 + (1 + 1 + (-4)))) =$

t) $-2 \cdot 3 \cdot ((8 : 6) : 4) : 2 =$

u) $(6 - 8) \cdot (-4 + 5) \cdot (4 - 7) \cdot (8 - 6) =$

v) $2 + 3 \cdot 4 - 4 \cdot 4 - 22 : 2 + 12 : (-4) =$

w) $4 \cdot (6 \cdot (4 \cdot (4 : 2) : 8) : 3) : 8 =$

x) $-(-2-(4-(5-(-5+6)+4)+3)+8)+10 =$

y) $-(-2 \cdot 4 \cdot (8 - 4) : 8 + 10 \cdot (4 - 5)) =$

z) $1 + 2 \cdot 3 - 4 : 2 + 5 \cdot 3 - 10 : 2 =$

Lösung zu Übung 1

a) $3 \cdot 4 - 20 + 2 \cdot 5 = 2$

b) $20 : (4 \cdot 5 - 16) + 6 = 11$

c) $(2 + 5) \cdot (6 - 9) = -21$

d) $(11 - 23) : (2 \cdot 5 + 1) = -1$

e) $(1 + 2) \cdot 3 \cdot (4 + 5) = 81$

f) $-2(-5 - 2) - 14 = 0$

g) $(10 : (-5)) : 2 = -1$

h) $1 + 2 + 3(-3 - 2 - 1) + 2 \cdot 5 = -5$

i) $5 \cdot 8 + 4 - 3 \cdot (-4) = 56$

j) $-3(-2 + 4 \cdot 8 - (2 + 5) + 8) = -93$

k) $21 : (6 - (4 - 5)) = 3$

l) $100 : (100 : (5 \cdot 5 - 3(-5 \cdot 5))) = 100$

m) $(2 + 3 - (12 : 3 - (-1)) \cdot 5) = -20$

n) $2 \cdot (5 - 3)(15 - 17)(26 : 13)(-1 \cdot 2) = 32$

o) $-10 \cdot 10 + 5 - 75 + 3 \cdot (-5) = -185$

p) $100 : (2 \cdot 5(2 - 12)) = -1$

q) $-2 \cdot (-4 \cdot (-3 \cdot (-1 \cdot (-2 - 1)))) = -72$

r) $-(1 - (-2 - (-3 - 8))) \cdot (-2) = -16$

s) $2 \cdot (1 + (1 + (1 + 1 + (-4)))) = 0$

t) $-2 \cdot 3 \cdot ((8 : 6) : 4) : 2 = -1$

u) $(6 - 8) \cdot (-4 + 5) \cdot (4 - 7) \cdot (8 - 6) = 12$

v) $2 + 3 \cdot 4 - 4 \cdot 4 - 22 : 2 + 12 : (-4) = -7$

w) $4 \cdot (6 \cdot (4 \cdot (4 : 2) : 8) : 3) : 8 = 1$

x) $-(-2-(4-(5-(-5+6)+4)+3)+8)+10 = 3$

y) $-(-2 \cdot 4 \cdot (8 - 4) : 8 + 10 \cdot (4 - 5)) = 14$

z) $1 + 2 \cdot 3 - 4 : 2 + 5 \cdot 3 - 10 : 2 = 15$

Um zwei Brüche zu Addieren/Subtrahieren, müssen zuerst beide Brüche auf den gleichen Nenner gebracht werden (Hauptnenner) und dann die Zähler addiert/subtrahiert werden.

Beispiel:

$$\frac{1}{2}+\frac{2}{3}=$$
$$\frac{7}{4}+\frac{3}{10}=$$
$$\frac{5}{6}-\frac{8}{15}=$$

Um zwei Brüche zu Multiplizieren, werden die Zähler miteinander multipliziert und die Nenner miteinander multipliziert. Innerhalb eines Produkts darf direkt gekürzt werden.

Beispiel:

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}=$$
$$\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}=$$
$$\frac{4}{7}\cdot\frac{21}{6}=$$

Zwei Brüche werden dividiert, indem mit dem Kehrwert multipliziert wird.

Beispiel:

$$\frac{1}{2}:\frac{5}{3}=$$
$$\frac{15}{2}:\frac{21}{4}=$$
$$\frac{7}{30}:\frac{21}{10}=$$

Als Primzahlen bezeichnet man die natürlichen Zahlen größer 1, die nur durch 1 und sich selbst ohne Rest teilbar sind. Die erste Primzahl ist also 2, da 2 nur durch 1 und sich selbst ohne Rest teilbar ist. Die nächste Primzahl ist 3. 4 ist keine Primzahl, da $4 : 2 = 2$ gilt. Die für uns wichtigen Primzahlen sind:

Haben der Zähler und der Nenner eines Bruches einen gemeinsamen Teiler, so kann man den Bruch kürzen. Dabei muss man nur prüfen, ob die Primzahlen jeweils ein Teiler sind. Ist eine Zahl nicht durch 2 teilbar, so kann sie nicht durch $4,\ 6,\ 8,\ ,\ldots$ teilbar sein. Für die ersten drei Primzahlen gibt es dabei einfach zu prüfende Teilbarkeitsregeln:

Beim Kürzen prüft man nun einfach, ob Zähler und Nenner durch 2 teilbar sind. Falls ja, teilt man beide durch 2 und prüft nochmals, bis mindestens einer von beiden nicht mehr durch 2 teilbar ist. Dann führt man das gleiche Verfahren für 3, 5, 7, usw. durch. Dabei muss man sich natürlich nicht fest an diese Reihenfolge halten. Enden z.B. Zähler und Nenner jeweils auf eine 0, so kann man beide direkt mit 10 kürzen.

Beispiel:

$$\frac{72}{60} =$$

$$\frac{280}{700} =$$

$$\frac{300}{126} =$$

Man kann Brüche auch kürzen, bevor man Zähler und Nenner komplett zusammengefasst hat. Dazu muss man jeweils die gleiche Zahl im Zähler und Nenner ausklammern können:

Beispiel:

$$\frac{4+8}{14} =$$

$$\frac{6-9}{3+15} =$$

$$\frac{5x^2+10x-25}{30} =$$

Übung 2 Berechne die folgenden Ausdrücke und kürze soweit wie möglich

a) $\frac{2}{3}+\frac{5}{7}=$

b) $\frac{3}{4}-\frac{10}{3}=$

c) $\frac{11}{25}+\frac{3}{5}=$

d) $\frac{14}{15}-\frac{5}{6}=$

e) $\frac{14}{9}+\frac{7}{18}=$

f) $\frac{14}{15}\cdot\frac{5}{28}=$

g) $\frac{30}{77}\cdot\frac{49}{24}=$

h) $\frac{5}{28}\cdot\frac{8}{7}=$

i) $\frac{12}{25}\cdot\frac{15}{16}=$

j) $\frac{13}{42}:\frac{39}{56}=$

k) $\frac{14}{17}:\frac{28}{5}=$

l) $\frac{9}{16}:\frac{27}{4}=$

m) $\frac{14}{30}:\frac{35}{2}=$

n) $\frac{15}{16}\cdot\frac{56}{25}\cdot\frac{15}{28}=$

o) $\left(\frac{27}{14}+\frac{9}{14}\right)\cdot\frac{14}{9}=$

p) $\frac{3}{2}-\left(\frac{5}{4}+\frac{1}{8}\right)=$

q) $\frac{10}{7}\cdot\left(\frac{2}{5}-\frac{3}{4}\right)=$

r) $\frac{5}{2}-\frac{4}{3}+\frac{7}{6}=$

s) $\frac{17}{3}-\left(\frac{15}{4}:\frac{5}{8}\right)=$

t) $\frac{34}{27}:\left(\frac{5}{9}+\frac{4}{3}\right)=$

u) $\frac{2}{3}-\frac{12}{25}:\frac{36}{35}=$

v) $\frac{64}{81}\cdot\frac{63}{80}+\frac{5}{9}=$

w) $\frac{1}{5}-\left(\frac{2}{3}\cdot\frac{7}{4}\cdot\frac{6}{35}\right)=$

x) $\left(\frac{42}{33}\cdot\frac{11}{35}\right):\left(\frac{84}{55}\cdot\frac{11}{42}\right)=$

y) $\frac{9}{70}\cdot\frac{10}{63}+\frac{5}{7}=$

z) $\frac{15}{14}:\frac{45}{28}-\frac{27}{8}:\frac{9}{4}=$

Lösung zu Übung 2

a) $\frac{29}{21}$
b) $-\frac{31}{12}$
c) $\frac{26}{25}$
d) $\frac{1}{10}$
e) $\frac{35}{18}$
f) $\frac{1}{6}$
g) $\frac{35}{44}$
h) $\frac{10}{49}$
i) $\frac{9}{20}$
j) $\frac{4}{9}$
k) $\frac{5}{34}$
l) $\frac{1}{12}$
m) $\frac{2}{75}$
n) $\frac{9}{8}$
o) 4
p) $\frac{1}{8}$
q) $-\frac{1}{2}$
r) $\frac{7}{3}$
s) $-\frac{29}{7}$
t) $\frac{17}{21}$
u) $\frac{1}{5}$
v) $\frac{53}{45}$
w) 0
x) 1
y) $\frac{36}{49}$
z) $-\frac{5}{6}$

Variablen sind in der Mathematik Platzhalter für Zahlen, deren Wert man nicht kennt. Mit ihrer Hilfe kann man allgemeine Zusammenhänge aufstellen, z.B. lautet der Zusammenhang zwischen der Fläche eines Rechtecks und seinen Seitenlängen:

Flächeninhalt eines Rechtecks

Kennt man zwei der drei Größen, kann man die fehlende berechnen.
Für uns ist nur eines der Potenzgesetze relevant:

Zwei Potenzen mit der gleichen Basis werden multipliziert, indem man die Hochzahlen addiert:

Beispiel:

$x \cdot x^2 \cdot x^3 =$

$x^2(3x^3 + 4x^2 - x) =$

$x(2x^3 - 4x^2 + 2x) - 2x^2(x^2 + 5x + 1) =$

Ausklammern oder Vorklammern kann man Zahlen oder auch Variablen. Beim Ausklammern ändert man den Wert des mathematischen Ausdrucks nicht, sondern lediglich sein Aussehen. Klammert man Variablen aus (im Normalfall x), so ist es in den meisten Fällen nicht sinnvoll die Variable öfter als die kleinste Hochzahl auszuklammern, da dann die Variable im Nenner des Bruches stehen würde. Beim Ausklammern von Variablen wendet man das obige Potenzgesetz rückwärts an.

Beispiel:

$$2x^2 - 4x =$$

$$10x^3 - 5x^2 + 25x =$$

$$27x^4 - 18x^2 =$$

Wir müssen im Normalfall nur so viele x wie möglich vorklammern ohne eine zusätzliche Zahl.

Übung 3 Löse die Klammern auf und fasse soweit wie möglich zusammen

a) $x(x-2) =$

b) $2x(x^2-3x+5) =$

c) $-4x(2x^2-6) =$

d) $x^2(-3x+5) =$

e) $x^3-7x^2(x+1) =$

f) $\frac{2}{3}x(6x^2-3x+5) =$

g) $-\frac{4}{7}x-\frac{3}{2}\left(\frac{4}{5}x^2-\frac{8}{21}x+9\right) =$

h) $\frac{4}{9}x^3(x^2-81x+27) =$

i) $(2x-4)\left(-\frac{3}{4}x^2+\frac{7}{8}x\right) =$

j) $\left(x^2-\frac{2}{3}\right)^2 =$

k) $-10x\left(\frac{4}{5}x^2-\frac{8}{15}x\right) =$

l) $\frac{5}{6}x^3\left(-\frac{7}{15}x^2+2x\right) =$

m) $\left(\frac{5}{3}x+\frac{10}{3}\right)\left(-\frac{6}{5}x^2-\frac{9}{10}x\right) =$

n) $x(-2x^4+3x^3-2x^2+5)+x^5-3x^4+5 =$

o) $\frac{4}{3}x^2(-3x^2+6x-2)+\left(\frac{1}{2}x\right)^2 =$

p) $\frac{1}{4}x^3\left(-\frac{8}{3}x-6\right) =$

q) $\frac{2}{5}x\left(-\frac{15}{8}x^2+10x-\frac{15}{4}\right) =$

r) $-\frac{4}{35}x^3\left(-\frac{15}{8}x-\frac{5}{8}\right) =$

s) $-\frac{8}{15}x^4\left(\frac{9}{4}x^2-x\right) =$

t) $-\frac{7}{8}x\left(\frac{64}{49}x^3+4x^2-8x\right) =$

u) $\frac{14}{15}x^2\left(-\frac{3}{28}x+\frac{30}{7}x^2\right) =$

v) $\frac{5}{7}x\left(-\frac{7}{5}x^2-x\right)^2-\frac{7}{5}x^5-\frac{3}{7}x^3 =$

w) $-\frac{22}{9}x^2\left(-\frac{5}{11}x+3\right)^2+\frac{3}{11}x^4+20x^2 =$

x) $-\frac{20}{21}x^3\left(\frac{3}{4}x^4-3x\right)^2+x^{10} =$

y) $-\frac{7}{3}x^5\left(\frac{18}{35}x+6x^2\right) =$

z) $\frac{15}{14}x^3\left(-\frac{42}{35}x^3-7x^2+\frac{28}{5}\right)-x\left(-\frac{15}{2}x^4-6x^3\right) =$

Übung 4 Klammere so viele x wie möglich vor (ohne, dass x im Nenner eines Bruches benötigt wird)

a) $3x^2-4x =$

b) $-x^2+3x =$

c) $7x^3+3x^2 =$

d) $10x^3-5x =$

e) $x^4-x^2 =$

f) $8x^4-5x^3 =$

g) $3x^4+2x^3-x^2 =$

h) $4x^4+x =$

i) $\frac{1}{3}x^4+x^3 =$

j) $-\frac{2}{5}x^5-\frac{2}{3}x^4 =$

k) $\frac{2}{5}x^6-8x^3 =$

l) $x^4-2x^5+x^6 =$

m) $9x^2-5x+4x^3 =$

n) $3x^7-2x^4+x^2 =$

o) $8x^3+8x =$

p) $\frac{13}{3}x^3-\frac{3}{2}x^2 =$

q) $4x^3-x^2 =$

r) $8x^8-3x^4+x^5 =$

s) $3x+7x^4-8x^6 =$

t) $4x^5-3x^3+x^7 =$

u) $\frac{4}{7}x^3+\frac{8}{9}x^4 =$

v) $x(2x^2+3)-4x^3 =$

w) $x^3-(3x+4x^2) =$

x) $(-2x^4)^2-(3x^2-x)^2 =$

y) $x^2(3x^4+5x^2) =$

z) $x(4x^2+5x) =$

Lösung zu Übung 3

a) $x^2 - 2x$

b) $2x^3 - 6x^2 + 10x$

c) $-8x^3 + 24x$

d) $-3x^3 + 5x^2$

e) $-6x^3 - 7x^2$

f) $4x^3 - 2x^2 + \frac{10}{3}x$

g) $-6\frac{6}{5}x^2 - \frac{27}{2}$

h) $\frac{4}{9}x^5 - 9x^4 + 12x^3$

i) $-\frac{3}{2}x^3 + \frac{19}{4}x^2 - \frac{7}{2}x$

j) $x^4 - \frac{4}{3}x^2 + \frac{4}{9}$

k) $-8x^3 + \frac{16}{3}x^2$

l) $-\frac{7}{18}x^5 + \frac{5}{3}x^4$

m) $-2x^3 - \frac{11}{2}x^2 - 3x$

n) $-x^5 - 2x^3 + 5x + 5$

o) $-4x^4 + 8x^3 - \frac{29}{12}x^2$

p) $-\frac{2}{3}x^4 - \frac{3}{2}x^3$

q) $-\frac{3}{4}x^3 + 4x^2 - \frac{3}{2}x$

r) $\frac{3}{14}x^4 + \frac{1}{14}x^3$

s) $-\frac{6}{5}x^6 + \frac{8}{15}x^5$

t) $-\frac{8}{7}x^4 - \frac{7}{2}x^3 + 7x^2$

u) $4x^4 - \frac{1}{10}x^3$

v) $\frac{56}{5}x^5 + 2x^4 + \frac{2}{7}x^3$

w) $-\frac{23}{99}x^4 + \frac{20}{3}x^3 - 2x^2$

x) $-\frac{15}{28}x^{11} + x^{10} + \frac{30}{7}x^8 - \frac{60}{7}x^5$

y) $-14x^7 - \frac{6}{5}x^6$

z) $-\frac{9}{7}x^6 + \frac{75}{14}x^5 + 6x^4 + 6x^3$

Lösung zu Übung 4

a) $x(3x-4)$
b) $x(-x+3)$
c) $x^2(7x+3)$
d) $x(10x^2-5)$
e) $x^2(x^2-1)$
f) $x^3(8x-5)$
g) $x^2(3x^2+2x-1)$
h) $x(4x^3+1)$
i) $x^3\left(\frac{1}{3}x+1\right)$
j) $x^4\left(-\frac{2}{5}x-\frac{2}{3}\right)$
k) $x^3\left(\frac{2}{5}x^3-8\right)$
l) $x^4(1-2x+x^2)$
m) $x^2(9-5x+4x)$
n) $x^2(3x^5-2x^2+1)$
o) $x(8x^2+8)$
p) $x^2\left(\frac{13}{3}x-\frac{3}{2}\right)$
q) $x^2(4x-1)$
r) $x^4(8x^4-3+x)$
s) $x(3+7x^3-8x^5)$
t) $x^3(4x^2-3+x^4)$
u) $x^3\left(\frac{4}{7}+\frac{8}{9}x\right)$
v) $x(-2x^2+3)$
w) $x(x^2-3-4x)$
x) $x^2(4x^6-9x^2+6x-1)$
y) $x^4(3x^2+5)$
z) $x^2(4x+5)$

1) Brüche im Quadrat: $\left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{2^2}{3^2} = \frac{4}{9} \neq \frac{2}{3}^2 = \frac{4}{3}$
   Der Bruch ist eine andere Schreibweise für ein Geteilt-Zeichen. Da zuerst Potenzen, dann Punktrechnungen durchgeführt werden, wird bei einem Bruch ohne Klammer nur der Zähler potenziert.
2) Quadrat von negativen Zahlen: $(-2)^2 = (-2) \cdot (-2) = 4 \neq -2^2 = -4$
   Zuerst werden Potenzen, dann Strichrechnungen durchgeführt, d.h. wenn man die Klammer weglässt, wird die Zahl zuerst potenziert und dann das Minuszeichen hinzugefügt.
3) Rechnen mit Dezimalzahlen statt Brüchen: In den allermeisten Fällen ist es einfacher mit Brüchen zu rechnen, so lässt sich z.B. folgende Wurzel in Dezimalzahlen nur schwer berechnen, als Bruch dagegen ist die Rechnung simpel:
   $\sqrt{12,25} = \sqrt{\frac{49}{4}} = \frac{\sqrt{49}}{\sqrt{4}} = \frac{7}{2}$

Die Mitternachtsformel oder abc-Formel zum Berechnen der Lösungen einer quadratischen Gleichung ist eine der wichtigsten Lösungsformeln.

Für eine Gleichung der Form

können die Lösungen wie folgt bestimmt werden:

Abhängig von der Diskriminante ($b^2 - 4ac$) hat eine quadratische Gleichung entweder 2 Lösungen (Diskriminante positiv), 1 Lösung (Diskriminante ist 0) oder keine Lösung (Diskriminante negativ).

Beispiel:

1) 2 Lösungen:

$$2x^2 + 6x - 8 = 0$$

2) 1 Lösung:

$$\frac{1}{2}x^2 - 2x + 2 = 0$$

3) Keine Lösungen:

$$-x^2 + 2x - 3 = 0$$

Übung 5 **Löse die folgenden Gleichungen**

a) $x^2 - 3x + 2 = 0$
b) $x^2 + 5x + 6 = 0$
c) $x^2 + 2x - 8 = 0$
d) $2x^2 - 6x - 8 = 0$
e) $x^2 - 8x + 16 = 0$
f) $2x^2 + x + 1 = 0$
g) $\frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{2}x - 6 = 0$
h) $4x^2 + 6x + \frac{9}{4} = 0$
i) $x^2 + \frac{3}{2}x - 1 = 0$
j) $-2x^2 + 4x - 3 = 0$
k) $4x^2 - 11x + 6 = 0$
l) $x^2 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{2} = 0$
m) $-2x^2 - 6x - \frac{9}{4} = 0$
n) $x - 12 + x^2 = 0$
o) $4x^2 - x - \frac{1}{2} = 0$
p) $-2x^2 - 6x - \frac{9}{2} = 0$
q) $3 + 2x + x^2 = 0$
r) $-\frac{1}{4}x^2 + x - 2 = 0$
s) $x^2 - 2x - 2 = 0$
t) $3x^2 - 3x - \frac{3}{2} = 0$
u) $-1x^2 + x = 0$
v) $3x - 2x^2 - 1 = 0$
w) $3x^2 - 2x + 1 = 0$
x) $3x^2 - 4x + \frac{4}{3} = 0$
y) $1 - 4x^2 + 3x = 0$
z) $-2x^2 + \frac{3}{2}x + \frac{1}{4} = 0$

Lösung zu Übung 5

a) $x_1 = 1,\ x_2 = 2$
b) $x_1 = -2,\ x_2 = -3$
c) $x_1 = 2,\ x_2 = -4$
d) $x_1 = 4,\ x_2 = -1$
e) $x_{1/2} = 4$
f) keine Lösungen
g) $x_1 = 4,\ x_2 = -6$
h) $x_{1/2} = -\frac{3}{4}$
i) $x_1 = \frac{1}{2},\ x_2 = -2$
j) keine Lösungen
k) $x_1 = \frac{3}{4},\ x_2 = 2$
l) $x_1 = \frac{1}{2},\ x_2 = -1$
m) $x_{1/2} = -\frac{3}{2}$
n) $x_1 = 3,\ x_2 = -4$
o) $x_1 = \frac{1}{2},\ x_2 = -\frac{1}{4}$
p) $x_{1/2} = -\frac{3}{2}$
q) keine Lösungen
r) keine Lösungen
s) $x_1 = 1 + \sqrt{3},\ x_2 = 1 - \sqrt{3}$
t) $x_1 = \frac{1+\sqrt{3}}{2},\ x_2 = \frac{1-\sqrt{3}}{2}$
u) $x_1 = \frac{-1+\sqrt{5}}{2},\ x_2 = \frac{-1-\sqrt{5}}{2}$
v) $x_1 = 1,\ x_2 = \frac{1}{2}$
w) keine Lösungen
x) $x_{1/2} = \frac{2}{3}$
y) $x_1 = -\frac{1}{4},\ x_2 = 1$
z) $x_1 = \frac{3+\sqrt{17}}{8},\ x_2 = \frac{3-\sqrt{17}}{8}$

Funktion:

Beispiel: $y = 2x$

Schreibweise für Funktionen:

Der Vorteil der neuen Schreibweise ist, dass man Funktionen an Hand des Namens unterscheiden kann. Zudem erlaubt sie uns für x Werte einzusetzen und die zugeordneten y-Werte allgemeiner aufzuschreiben:

Einsetzen von Werten:

Übung 6 **Finde die passenden Paare gleichwertiger Aussagen.**

a) Der Funktionswert an der Stelle 3 ist 4.
b) f von 8 ist 0.
c) $g(x) = 0,5x$
d) $P(-5|1)$ liegt auf dem Schaubild der Funktion.
e) Die Funktion ordnet jedem x das Dreifache des Wertes von x zu.
f) Der Punkt $P(-1|4)$ liegt auf dem Schaubild der Funktion.
g) Die Funktion ordnet der 0 die 5 zu.
h) $f(4) = 3$
i) Der Punkt $Q(0|0)$ liegt auf dem Schaubild der Funktion.

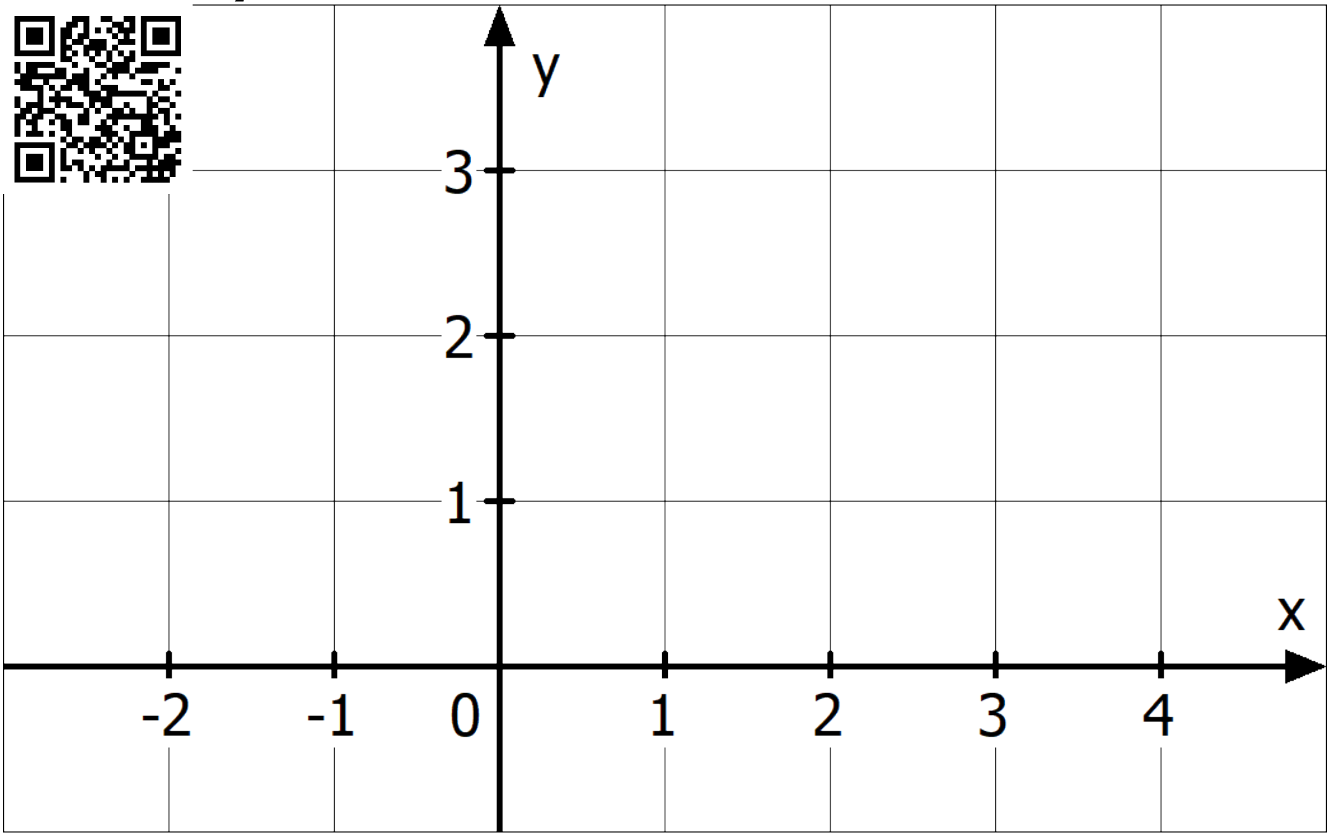
1) $f(-5) = 1$
2) Das Schaubild der Funktion verläuft durch den Ursprung.
3) An der Stelle 4 ist der Funktionswert 3
4) $h(-1) = 4$
5) $f_2(0) = 5$
6) $f(8) = 0$
7) Die Funktionsgleichung lautet $g(x) = 3x$
8) $f(3) = 4$
9) Die Funktion ordnet jedem x den halben Wert als Funktionswert zu.

Lösung zu Übung 6

a) 8)
b) 6)
c) 9)
d) 1)
e) 7)
f) 4)
g) 5)
h) 3)
i) 2)

Alle Funktionen vom Typ $f(x) = mx + b$ werden als lineare Funktionen bezeichnet.

Beispiel: $f(x) = \frac{1}{2}x + 1$



Der y-Achsenabschnitt kann an der y-Achse bei $x = 0$ abgelesen werden. Der y-Achsenabschnitt kann auch immer berechnet werden, indem man $x = 0$ in die Funktion einsetzt:

$$f(0) =$$

Das Schaubild der Funktion schneidet die y-Achse also bei $y =$

Die Steigung kann über das Steigungsdreieck bestimmt werden. Man bestimmt zwei Punkte $P_1(x_1|y_1)$ und $P_2(x_2|y_2)$, durch die das Schaubild verläuft und bestimmt dann das Verhältnis des Unterschieds der y-Werte zum Unterschied der x-Werte:

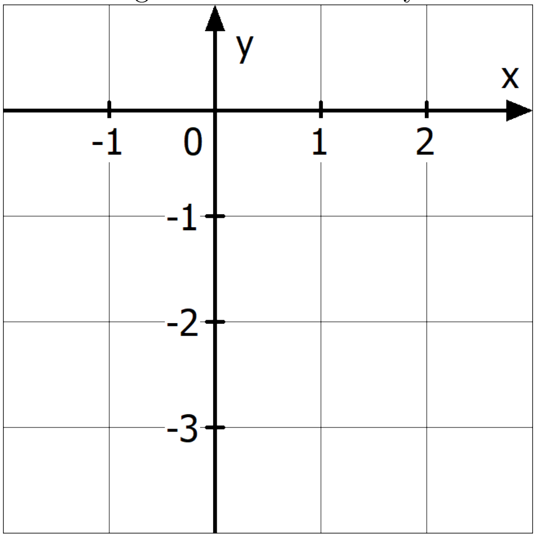
Die beiden Punkte können beliebig gewählt werden (sie dürfen nur nicht identisch sein), d.h. das Steigungsdreieck kann an beliebiger Stelle und beliebig groß gezeichnet werden.

Im Beispiel kann man die beiden Punkte $P_1(-2|0)$ und $P_2(4|3)$ wählen oder auch $P_3(0|1)$ und $P_4(2|2)$:

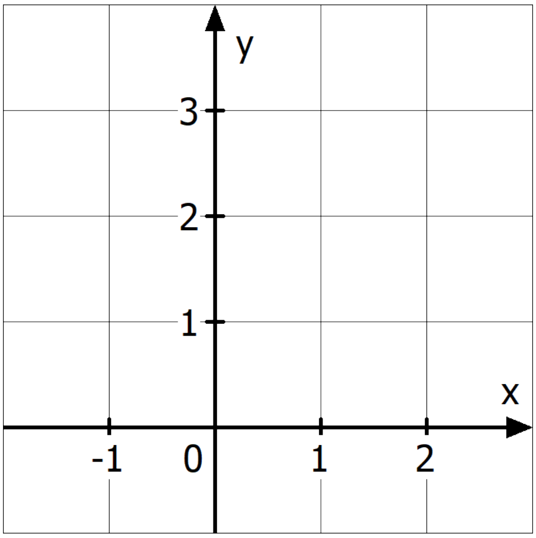
Die beiden Geraden $f(x) = x$ und $g(x) = -x$ nennt man die erste und zweite Winkelhalbierende, da sie jeweils den 90°-Winkel zwischen der x- und y-Achse halbieren.

Übung 7 Zeichne das Schaubild der folgenden Funktionen

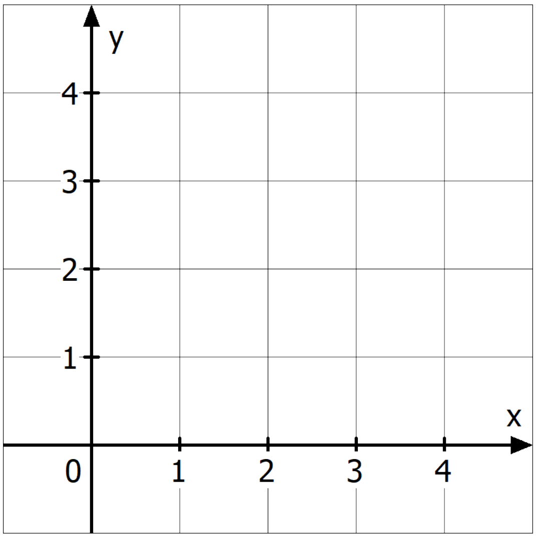
Nutze das ganze Koordinatensystem aus.



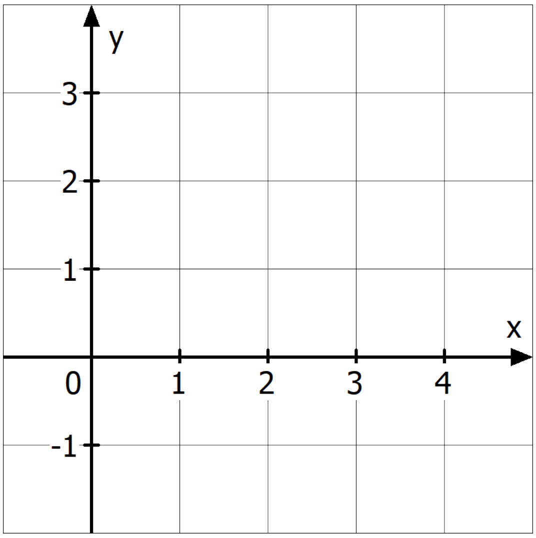
$f_1(x) = 2x - 3$



$f_2(x) = -x + 2$

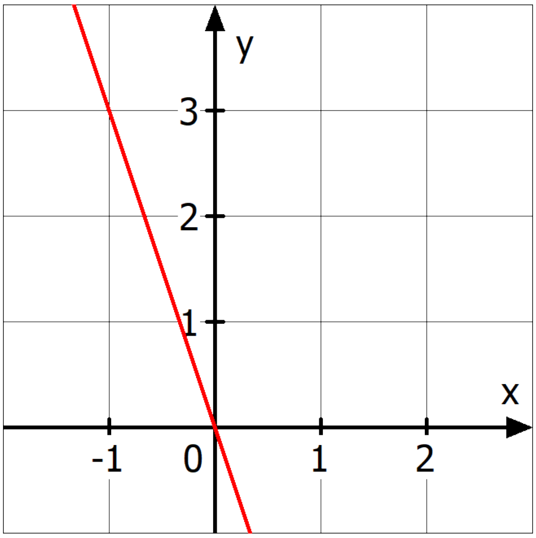


$f_3(x) = \frac{3}{4}x + 1$

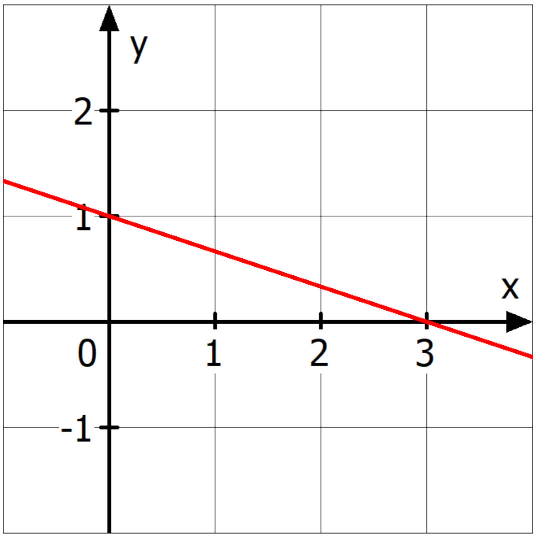


$f_4(x) = -\dfrac{4}{3}x + 3$

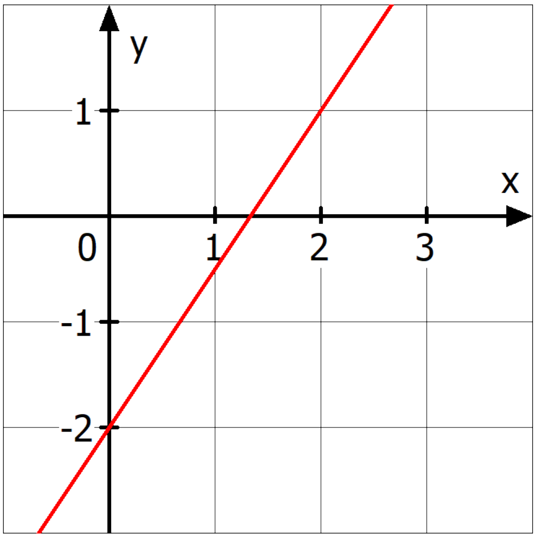
Übung 8 **Bestimme die Funktionsgleichung**



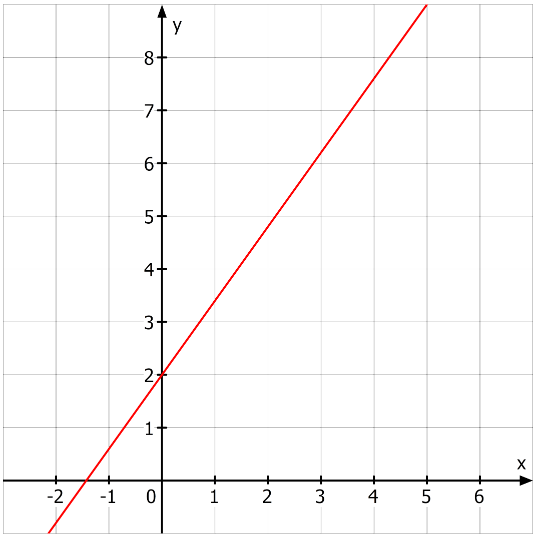
$f_5(x) =$



$f_6(x) =$

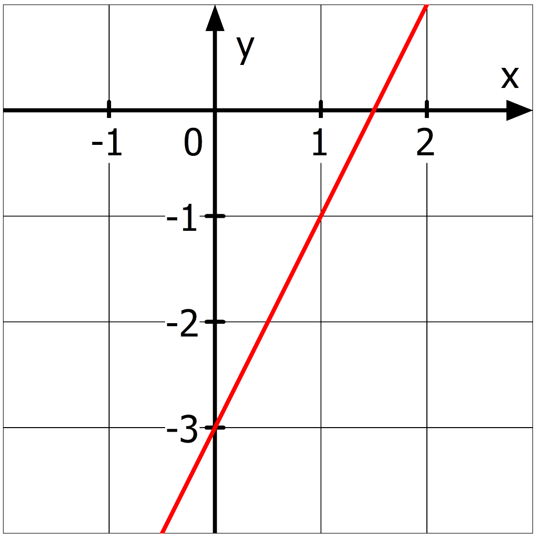


$f_7(x) =$

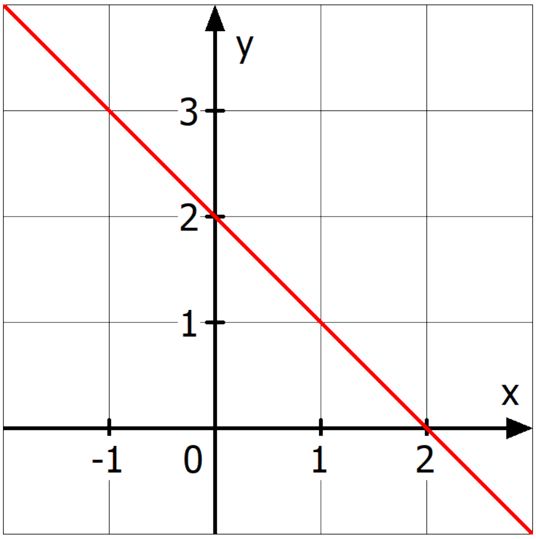


$f_8(x) =$

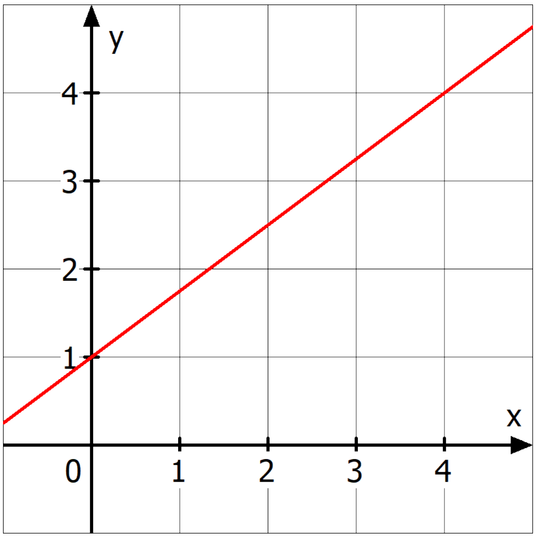
Lösung zu Übung 7



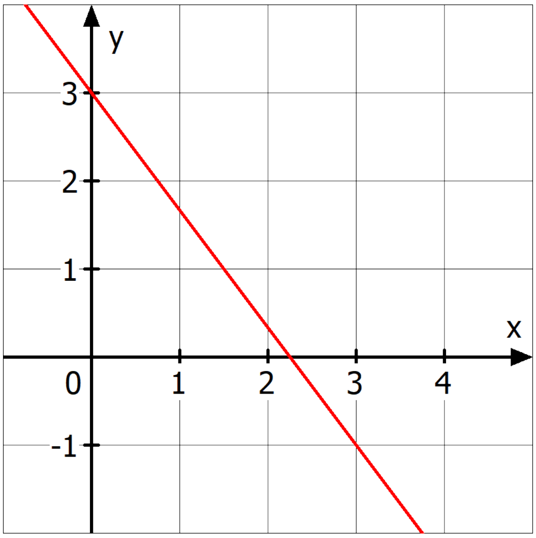
$f_1(x) = 2x - 3$



$f_2(x) = -x + 2$



$f_3(x) = \frac{3}{4}x + 1$



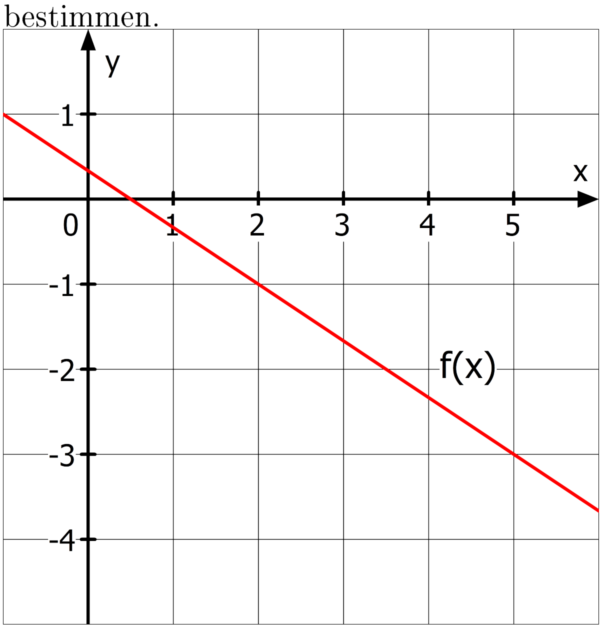
$f_4(x) = -\dfrac{4}{3}x + 3$

Lösung zu Übung 8

$f_5(x) = -3x \qquad f_6(x) = -\frac{1}{3}x + 1 \qquad f_7(x) = \frac{3}{2}x - 2 \qquad f_8(x) = \frac{7}{5}x + 2$

Ein besserer Begriff für Punktprobe wäre Punkteinsetzen. Sind eine Funktion $f(x)$ und ein Punkt $P(x_P|y_P)$ gegeben, so kann man prüfen, ob das Schaubild von $f(x)$ durch den Punkt verläuft, indem man den Punkt einsetzt:

Beispiel:
Gegeben sind die Funktion $f(x) = 2x - 1$ und zwei Punkt $P(2|3)$ sowie $Q(0|4)$.
P :
Der Punkt P liegt also auf dem Schaubild von $f(x)$.
Q :
Der Punkt Q liegt also nicht auf dem Schaubild von $f(x)$.
In den meisten Fällen wird eine Punktprobe verwendet, um Teile einer Funktionsgleichung zu bestimmen.



Im nebenstehenden Beispiel lässt sich die Steigung der Geraden $f(x) = mx + b$ leicht über ein Steigungsdreieck bestimmen: $m = -\frac{2}{3}$. Der y-Achsenabschnitt kann leider nicht exakt abgelesen werden. Wir lesen daher einen beliebigen Punkt ab, z.B. $P(2|-1)$ und führen mit diesem Punkt eine Punktprobe durch:

$$f(2) = -1$$

Übung 9 Prüfe, ob die Punkte auf dem Schaubild der Funktion liegen

a) $f(x) = -x + 2$ $P(2|3)$ und $Q(-2|4)$
b) $g(x) = \frac{4}{5}x - 1$ $R(5|3)$ und $S(10|-1)$

Übung 10 Bestimme die Funktionsgleichung

a) Das Schaubild der Funktion $f(x) = 2x + b$ verläuft durch den Punkt $P(2|3)$.
b) Das Schaubild der Funktion $g(x) = mx - 1$ verläuft durch den Punkt $Q(-2|6)$.
c) Das Schaubild der Funktion $h(x) = mx + b$ verläuft durch die Punkte $R_1(2|3)$ und $R_2(4|-1)$.
d) Das Schaubild der Funktion $i(x) = mx + b$ verläuft durch die Punkte $S_1(-1|-2)$ und $S_2(5|7)$.

Lösung zu Übung 9

a) $f(2) = -2 + 2 = 0 \neq 3$

P liegt nicht auf dem Schaubild von $f(x)$

$f(-2) = -(-2) + 2 = 4$

Q liegt auf dem Schaubild von $f(x)$

b) $g(5) = \frac{4}{5} \cdot 5 - 1 = 3$

R liegt auf dem Schaubild von $g(x)$

$g(10) = \frac{4}{5} \cdot 10 - 1 = 7 \neq -1$

S liegt nicht auf dem Schaubild von $g(x)$

Lösung zu Übung 10

a) Punktprobe mit $P(2|3)$

$$f(2) = 3$$
$$2 \cdot 2) + b = 3 \mid -4$$
$$b = -1$$
$$\Rightarrow f(x) = 2x - 1$$

b) Punktprobe mit $Q(-2|6)$

$$g(-2) = 6$$
$$m \cdot (-2) - 1 = 6 \mid +1$$
$$-2m = 7 \mid (\cdot - \tfrac{1}{2})$$
$$m = -\frac{7}{2}$$
$$\Rightarrow g(x) = -\frac{7}{2}x - 1$$

c) Bestimmen der Steigung m mit Hilfe der Punkte $R_1(2|3)$ und $R_2(4|-1)$:

$$m = \frac{-1-3}{4-2} = -2$$

Punktprobe mit $R_1(2|3)$ (oder R_2)

$$h(2) = 3$$
$$-2 \cdot 2 + b = 3 \mid +4$$
$$b = 7$$
$$\Rightarrow h(x) = -2x + 7$$

d) Bestimmen der Steigung m mit Hilfe der Punkte $S_1(-1|-2)$ und $S_2(5|7)$:

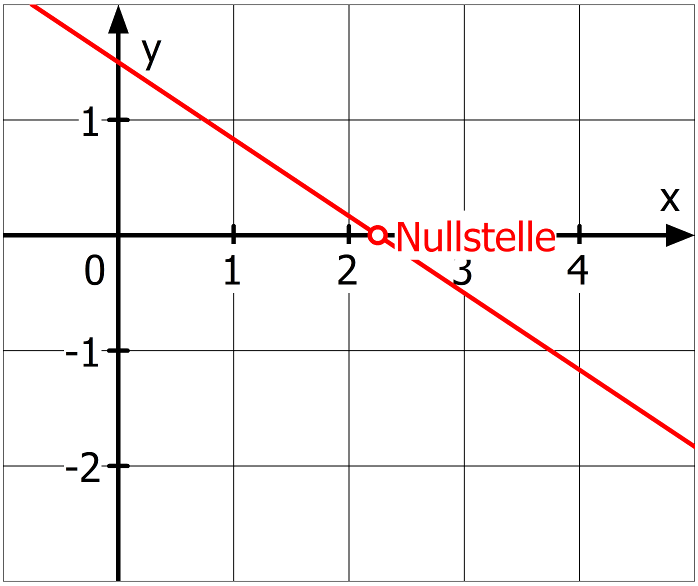
$$m = \frac{7-(-2)}{5-(-1)} = -\frac{3}{2}$$

Punktprobe mit $S_2(5|7)$ (oder S_1)

$$i(5) = 7$$
$$\frac{3}{2} \cdot 5 + b = 7 \mid -\tfrac{15}{2}$$
$$b = -\frac{1}{2}$$
$$\Rightarrow i(x) = \frac{3}{2}x + -\frac{1}{2}$$

In der Mathematik unterscheidet man grundsätzlich zwischen Stellen und Punkten. Stellen sind x-Werte während Punkte einen x-Wert und einen y-Wert haben. Die Nullstellen (abgekürzt NST) sind die Stellen, an denen die Funktion die x-Achse schneidet.Oder anders ausgedrückt, die NST sind die Stellen, an denen der Funktionswert bzw. y-Wert Null ist:

Beispiel:



Gegeben ist die Funktion $f(x) = -\frac{2}{3}x + \frac{3}{2}$. Im Schaubild kann man die Nullstelle ungefähr ablesen: $x_0 \approx 2,2$.

Um den exakten Wert zu erhalten, muss man folgende Gleichung lösen:

Übung 11 **Bestimme die Nullstellen**

a) $f_1(x) = 3x - 9$

b) $f_2(x) = -2x - 10$

c) $f_3(x) = \frac{2}{3}x + 4$

d) $f_4(x) = -\frac{3}{4}x + 12$

e) $f_5(x) = \frac{5}{2}x + \frac{10}{3}$

f) $f_6(x) = -0,5x - 3,2$

g) $f_7(x) = -8 + 2x$

h) $f_8(x) = \frac{5}{7} - \frac{15}{14}x$

i) $f_9(x) = 3(2x - 5)$

j) $f_{10}(x) = \frac{1}{3}(6x - 5) + \frac{5}{6}$

Lösung zu Übung 11

a) $x_0 = 3$

b) $x_0 = -5$

c) $x_0 = -6$

d) $x_0 = 16$

e) $x_0 = -\frac{4}{3}$

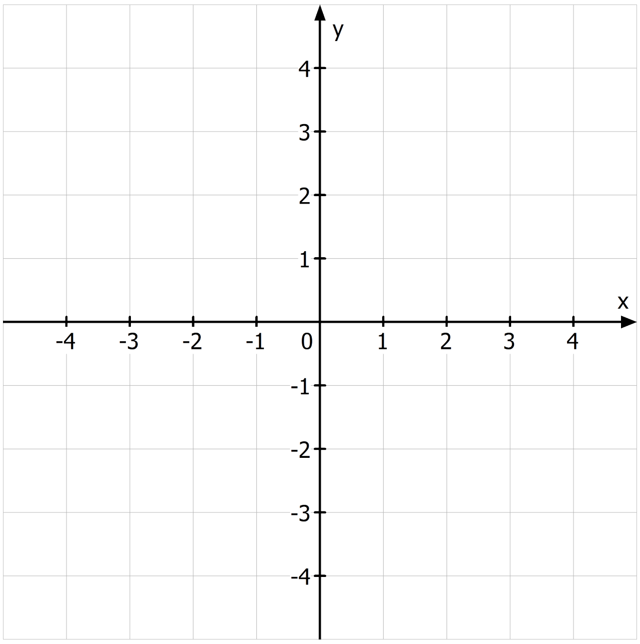
f) $x_0 = -6,4$

g) $x_0 = 4$

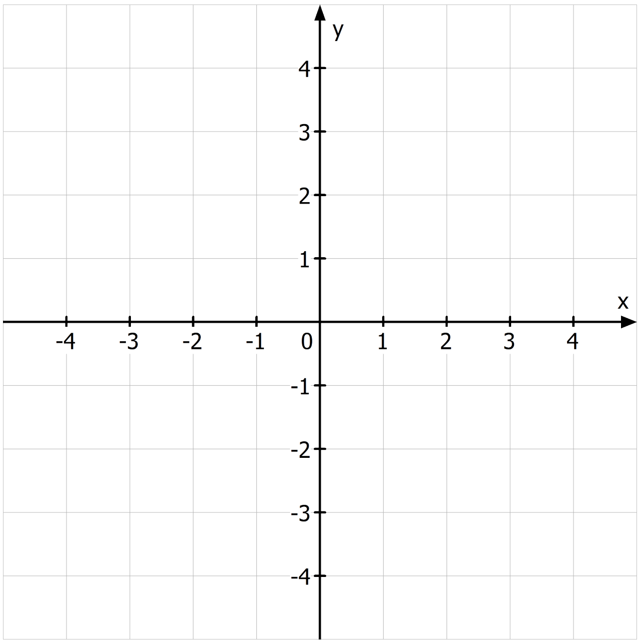
h) $x_0 = \frac{2}{3}$

i) $x_0 = \frac{5}{2}$

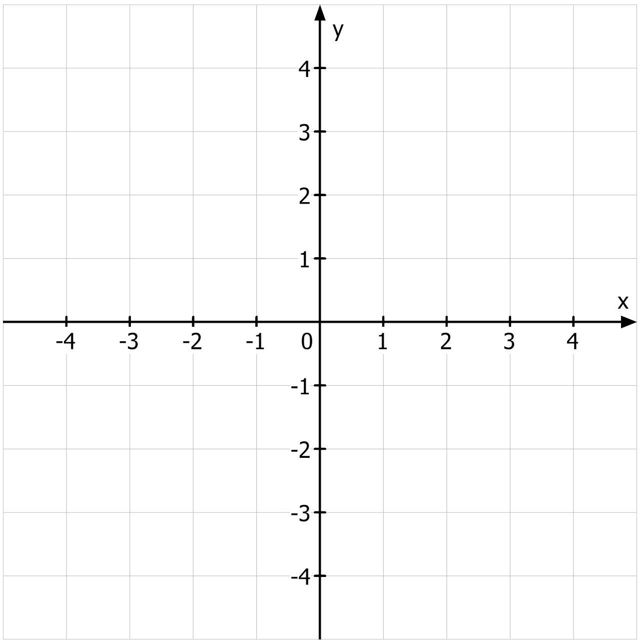
j) $x_0 = \frac{5}{12}$



$f_1(x) = \frac{1}{2}x - 2 \qquad g_1(x) = 0,5x + 1$

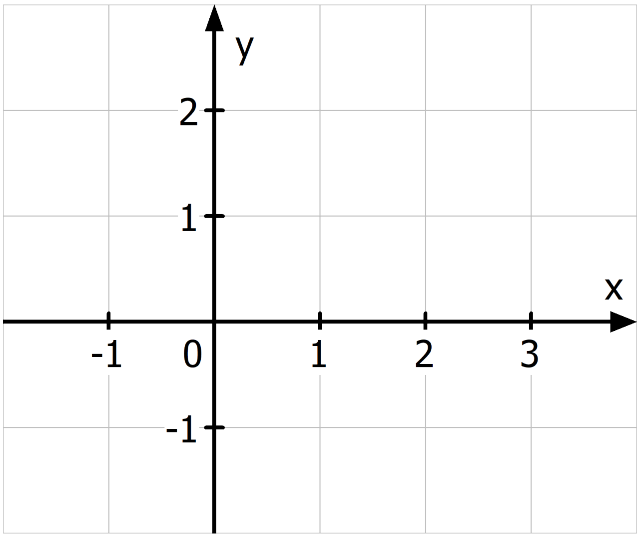


$f_2(x) = -\frac{1}{2}x + 2 \qquad g_2(x) = 2x - 1$



$f_3(x) = \frac{1}{3}x + 2 \qquad g_3(x) = 3x - 3$

Erinnerung: In der Mathematik unterscheidet man grundsätzlich zwischen Stellen und Punkten. Stellen sind x-Werte während Punkte einen x-Wert und einen y-Wert haben. Die Schnittpunkte zweier Funktionen $f(x)$ und $g(x)$ sind alle Punkte, in denen sich die Schaubilder schneiden. Um die Schnittstellen zu erhalten, muss man die Funktionen gleichsetzen:



Im nebenstehenden Beispiel sind die Schaubilder der Funktionen $f(x) = x + 1$ und $g(x) = 3x - 1$ gezeichnet. Der Schnittpunkt lässt sich wie folgt berechnen:

Die Schnittstelle ist also $x = 1$. Um die y-Koordinate zu erhalten, setzt man $x = 1$ entweder in $f(x)$ oder $g(x)$ ein. Zur Demonstration setzen wir die Schnittstelle in beide Funktionen ein:

$$f(1) = 1 + 1 = 2$$

$$g(1) = 3 \cdot 1 - 1 = 2$$

Der Schnittpunkt liegt also bei $P(1|2)$.

Übung 12 **Bestimme jeweils den Schnittpunkt**

a) $f_1(x) = x - 1$ und $g_1(x) = -x + 3$

b) $f_2(x) = -2x + 4$ und $g_2(x) = 0,5x - 1$

c) $f_3(x) = \frac{3}{2}x + \frac{1}{2}$ und $g_3(x) = 4x$

d) $f_4(x) = \frac{4}{5}x + \frac{2}{5}$ und $g_4(x) = -\frac{2}{5}x$

e) $f_5(x) = -\frac{2}{3}x - 15$ und $g_5(x) = 3x - \frac{5}{4}$

f) $f_6(x) = -\frac{5}{8}x$ und $g_6(x) = -\frac{3}{2}x + \frac{1}{2}$

Lösung zu Übung 12

a) $P_1(2|1)$

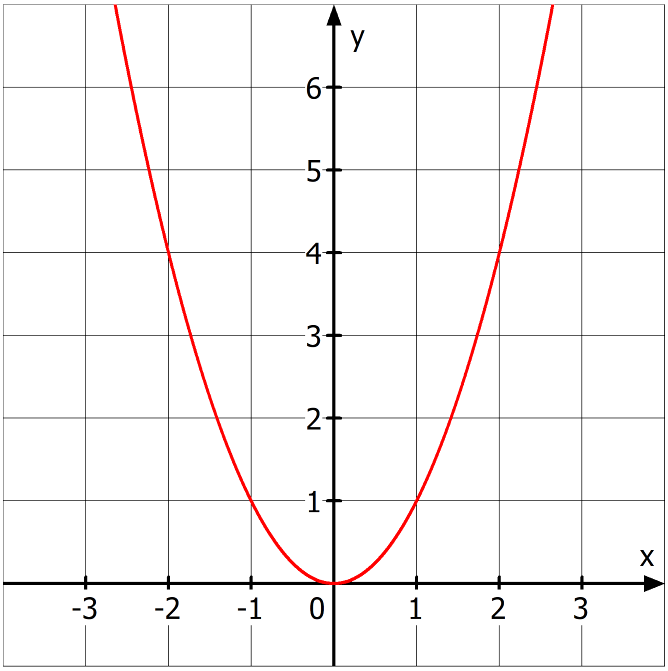
b) $P_2(2|0)$

c) $P_3\left(\frac{1}{5}\middle|\frac{4}{5}\right)$

d) $P_4\left(-\frac{1}{3}\middle|\frac{2}{15}\right)$

e) $P_5\left(-\frac{15}{4}\middle|-\frac{25}{2}\right)$

f) $P_6\left(\frac{4}{7}\middle|-\frac{5}{14}\right)$

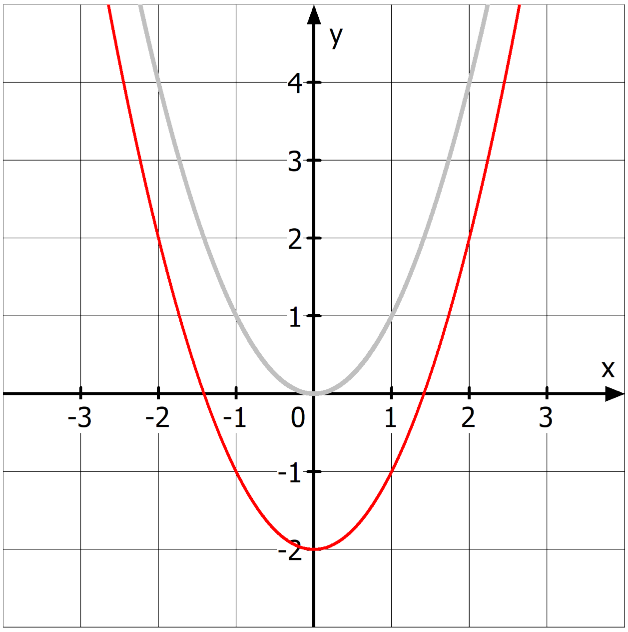


Verschieben in y-Richtung

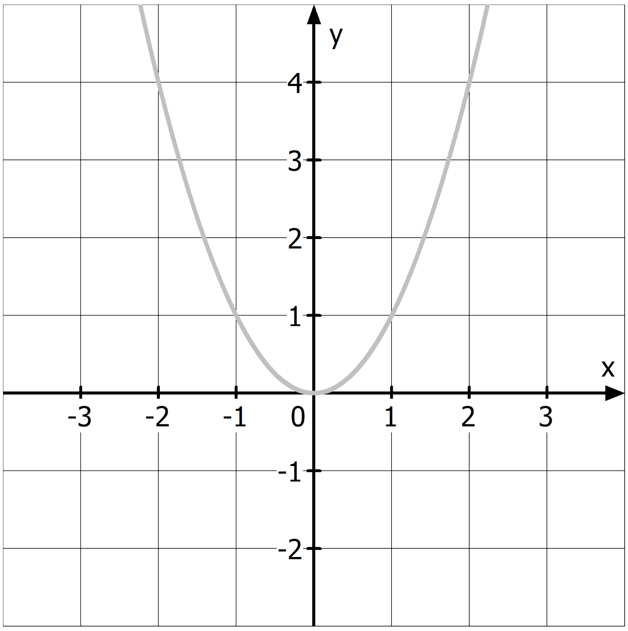
Verschieben in x-Richtung

Strecken und Stauchen in y-Richtung

Scheitelform

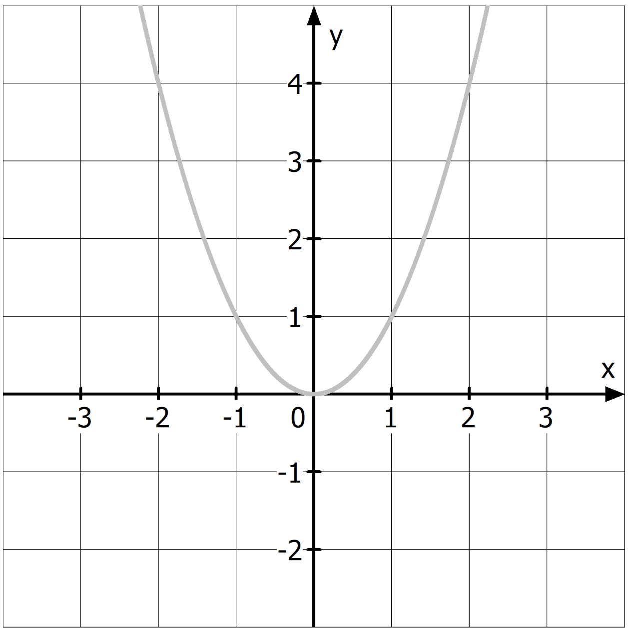


Die Normalparabel wird um 3 Einheiten nach oben verschoben.

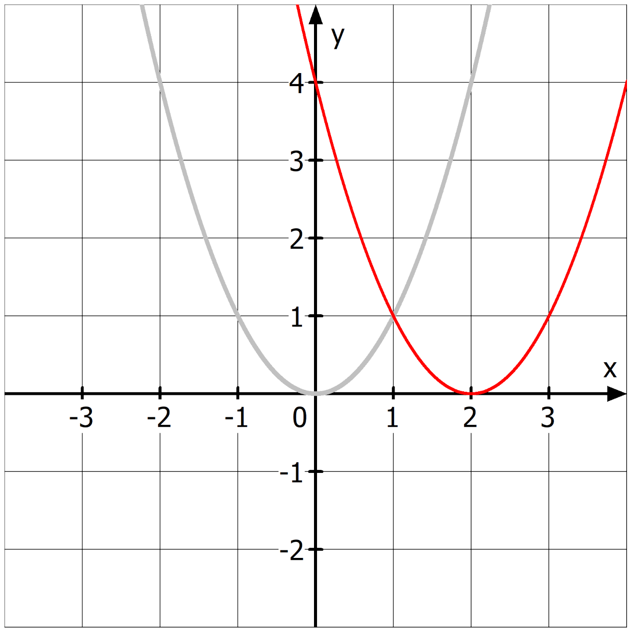


$f(x) = x^2 - 1$

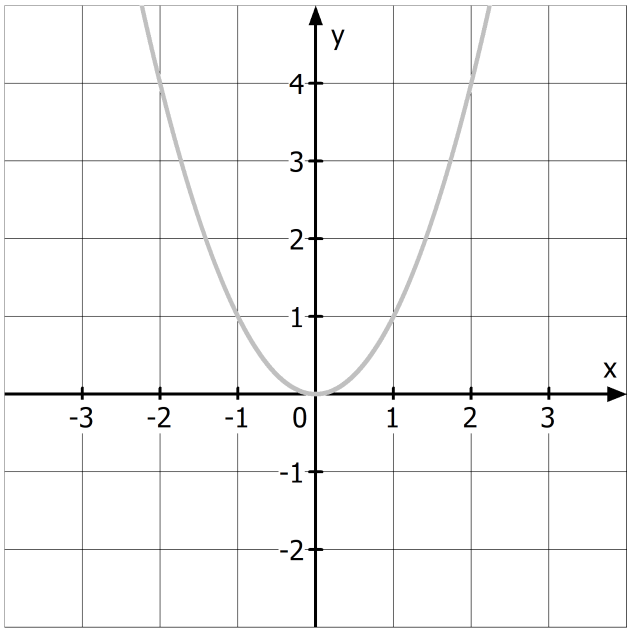
Der Scheitel liegt bei $S(0|-1)$



Verschieben in x-Richtung

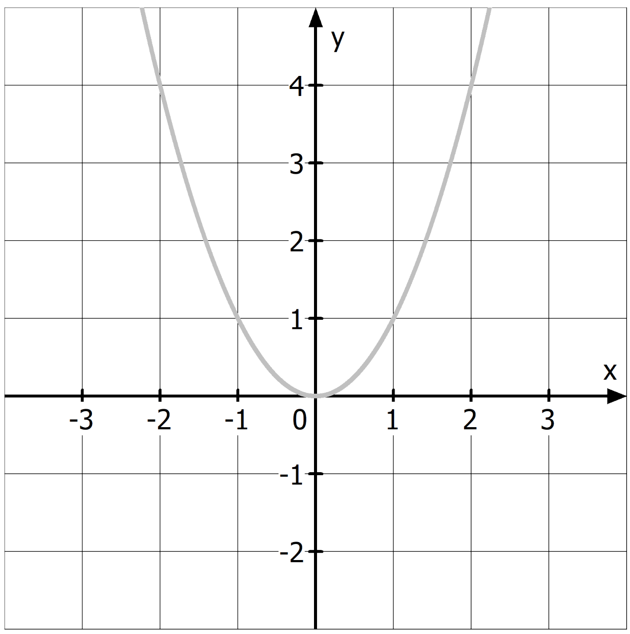


Die Normalparabel wird um 1 Einheit nach links verschoben.

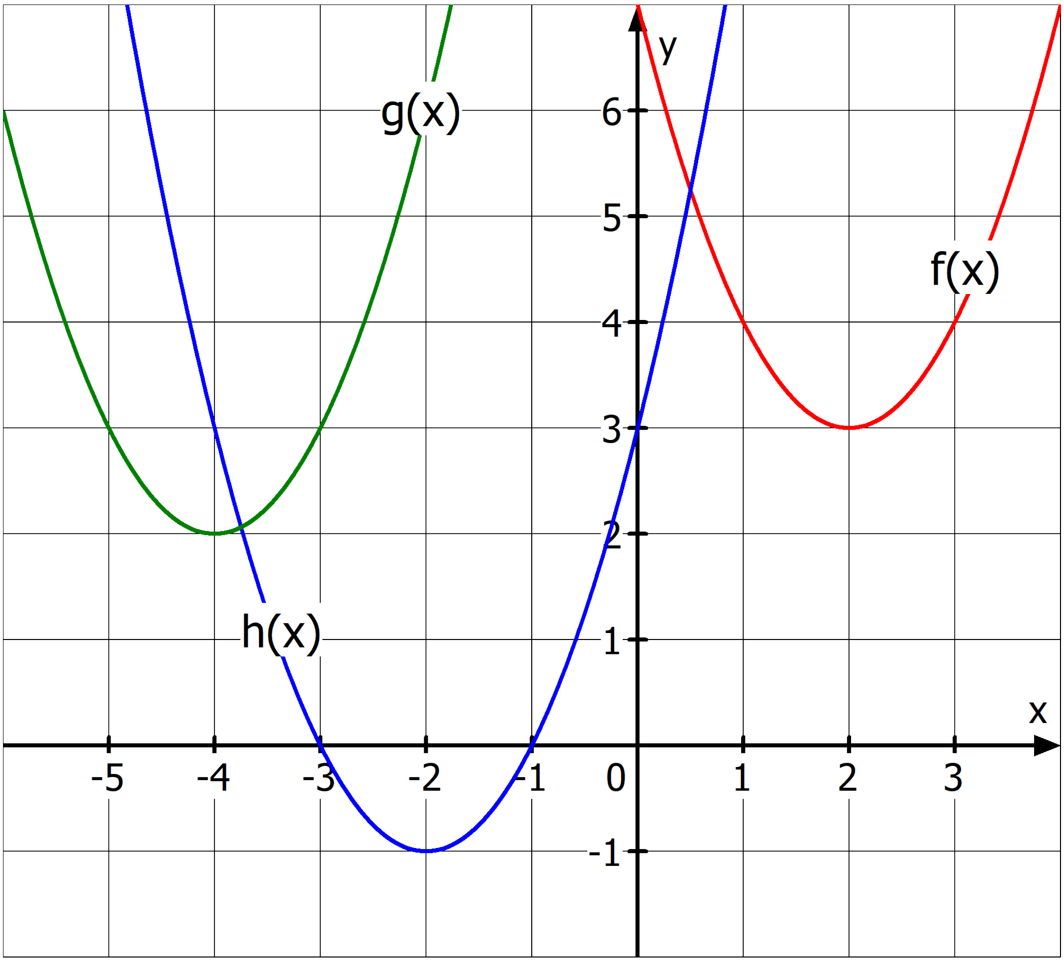


$$f(x) = (x-3)^2$$

Der Scheitel liegt bei $S(3|0)$



Übung 13 **Bestimme jeweils an Hand des Schaubilds die Funktionsgleichung**



Übung 14 **Stelle jeweils die Funktionsgleichung auf und skizziere das Schaubild**

a) Die Normalparabel wird um 5 Einheiten nach links und um 3 Einheiten nach unten verschoben.

b) Die Normalparabel wird um 6 Einheiten nach rechts und um 4 Einheiten nach unten verschoben.

c) Die Normalparabel wird um 1,5 Einheiten nach links und um 2,5 Einheiten nach oben verschoben.

Übung 15 **Beschreibe wie man die Normalparabel verschieben muss und skizziere das Schaubild**

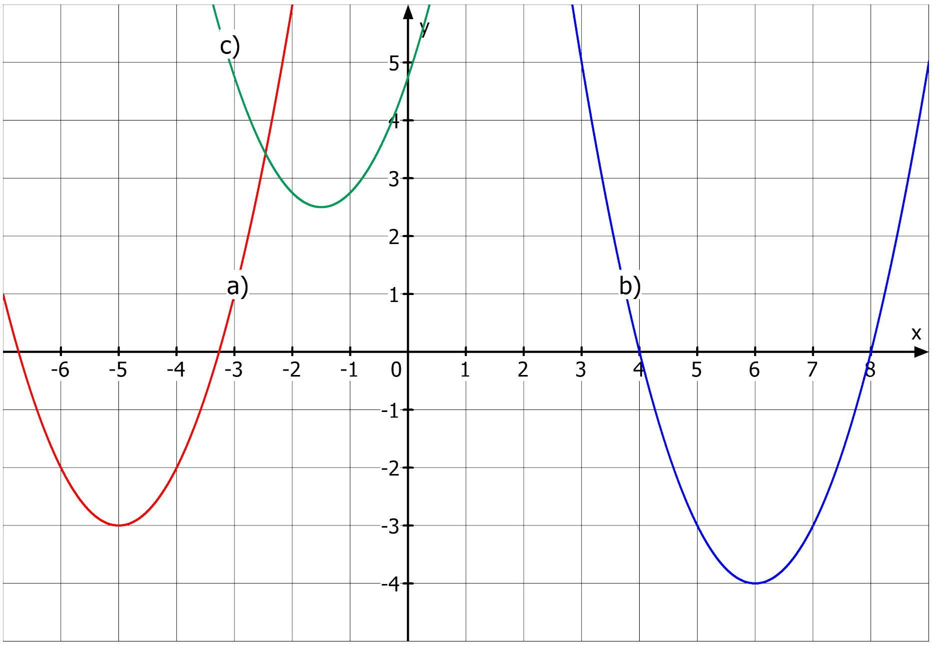
a) $f(x) = (x-3)^2 - 4$ b) $g(x) = (x+4)^2 + 3$ c) $h(x) = \left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{5}{2}$

Übung 16 **Stelle die Funktionsgleichung auf**

a) Das Schaubild von $f(x) = (x-2)^2 + 1$ wird um 3 Einheiten nach links und 4 Einheiten nach oben verschoben.

b) Das Schaubild von $g(x) = (x+3)^2 - 2$ wird um 4 Einheiten nach rechts und 2 Einheiten nach oben verschoben.

Lösung zu Übung 13

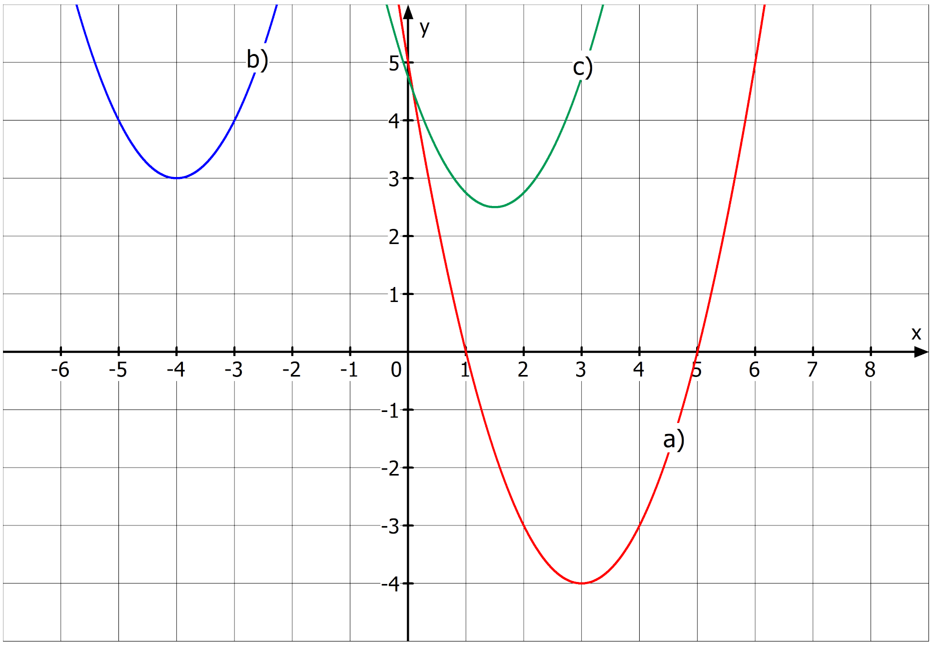


a) $f(x) = (x-2)^2 + 3$ b) $g(x) = (x+4)^2 + 2$ c) $h(x) = (x+2)^2 - 1$

Lösung zu Übung 14

a) $f(x) = (x+5)^2 - 3$ b) $g(x) = (x-6)^2 - 4$ c) $h(x) = (x+1,5)^2 + 2,5$

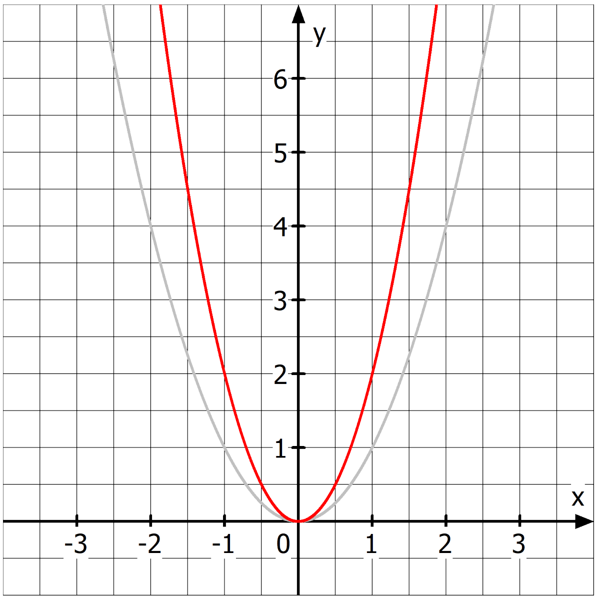
Lösung zu Übung 15



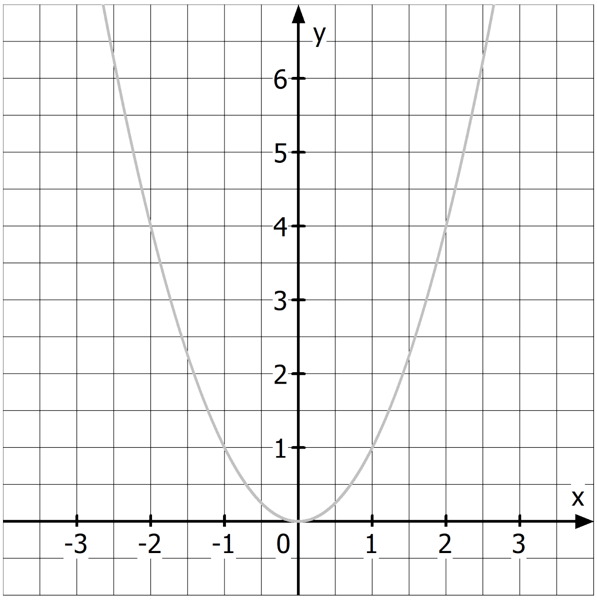
a) Die Normalparabel wird um 3 Einheiten nach rechts und 4 Einheiten nach unten verschoben.
b) Die Normalparabel wird um 4 Einheiten nach links und 3 Einheiten nach oben verschoben.
c) Die Normalparabel wird um 1,5 Einheiten nach rechts und 2,5 Einheiten nach oben verschoben.

Lösung zu Übung 16

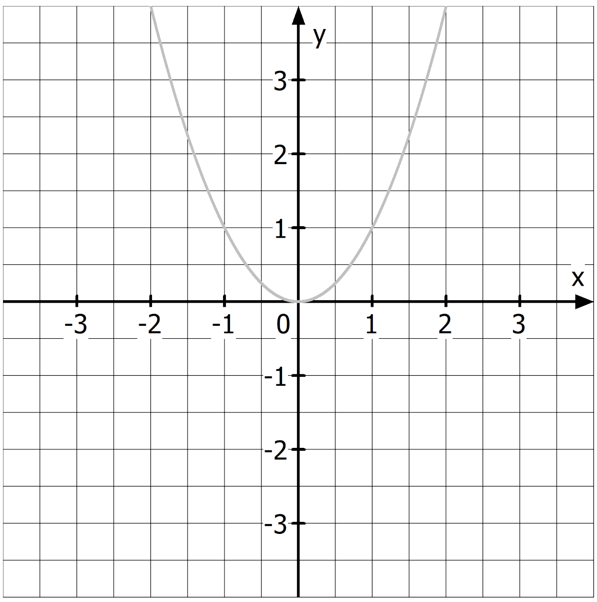
a) $f_v(x) = (x+1)^2 + 5$ b) $g_v(x) = (x-1)^2$



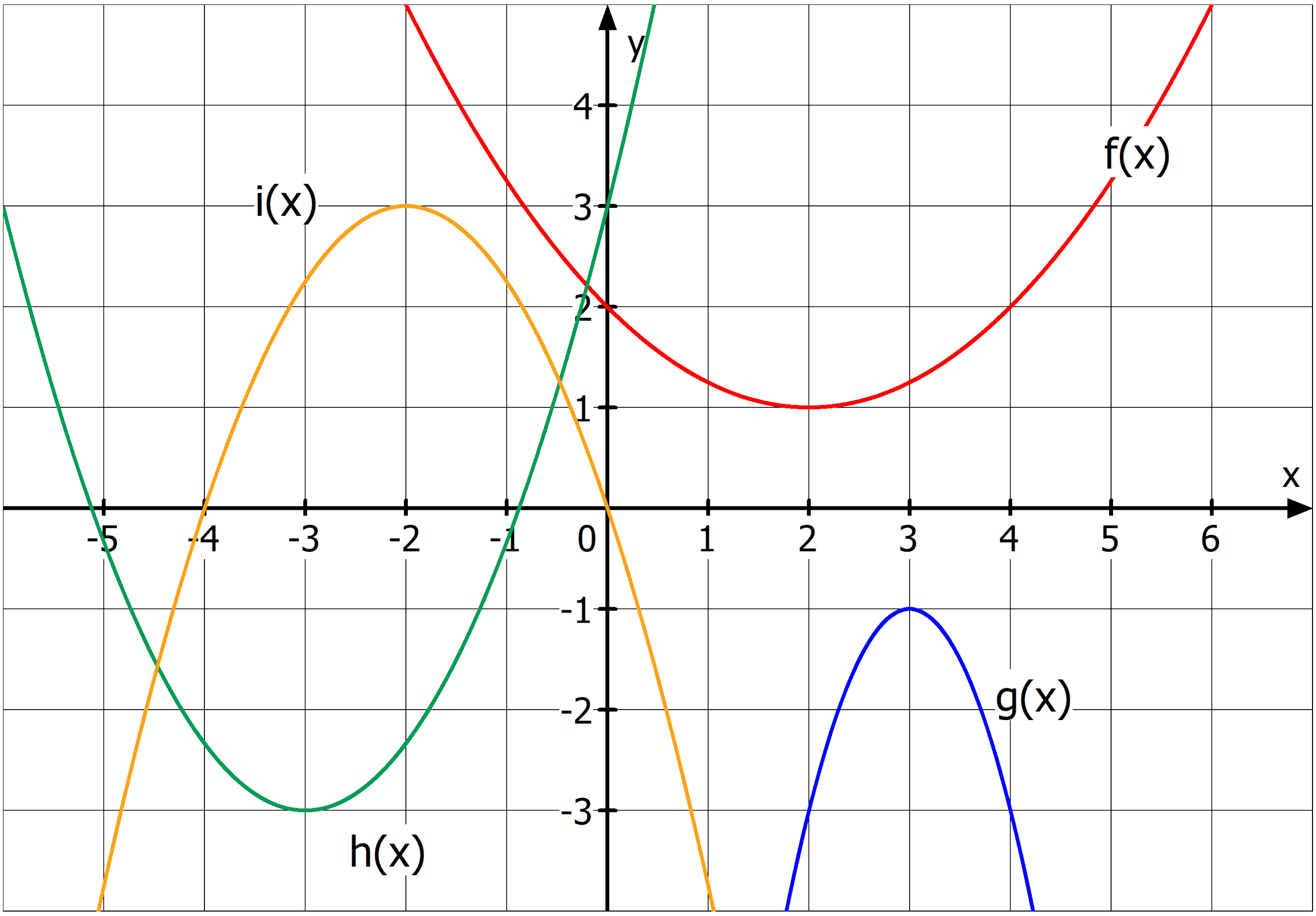
Die Normalparabel wird mit dem Faktor 2 gestaucht oder mit dem Faktor $\frac{1}{2}$ gestreckt.



$$f(x) = -\frac{1}{3}x^2$$



Übung 17 Bestimme jeweils an Hand des Schaubilds die Funktionsgleichung



Übung 18 Stelle jeweils die Funktionsgleichung auf und skizziere das Schaubild

a) Die Normalparabel wird mit dem Faktor 4 gestreckt um 2 Einheiten nach links und um 4 Einheiten nach unten verschoben.

b) Die Normalparabel wird mit dem Faktor 0,5 gestreckt, an der x-Achse gespiegelt, um 1 Einheiten nach rechts und um 2 Einheiten nach unten verschoben.

c) Die Normalparabel wird mit dem Faktor 2 gestreckt, um 2,5 Einheiten nach links, um 3,5 Einheiten nach oben verschoben und zuletzt an der x-Achse gespiegelt.

Übung 19 Beschreibe wie man die jeweilige Parabel aus der Normalparabel erhält.

a) $f(x) = 5(x-1)^2 + 2$ b) $g(x) = -(x+3)^2 - 2,5$ c) $h(x) = -\frac{2}{3}\left(x - \frac{3}{4}\right)^2 + \frac{5}{7}$

Übung 20 Stelle die Funktionsgleichung auf

a) Das Schaubild von $f(x) = 3(x-4)^2 + 2$ wird um 5 Einheiten nach links und 2 Einheiten nach oben verschoben und dann an der x-Achse gespiegelt.

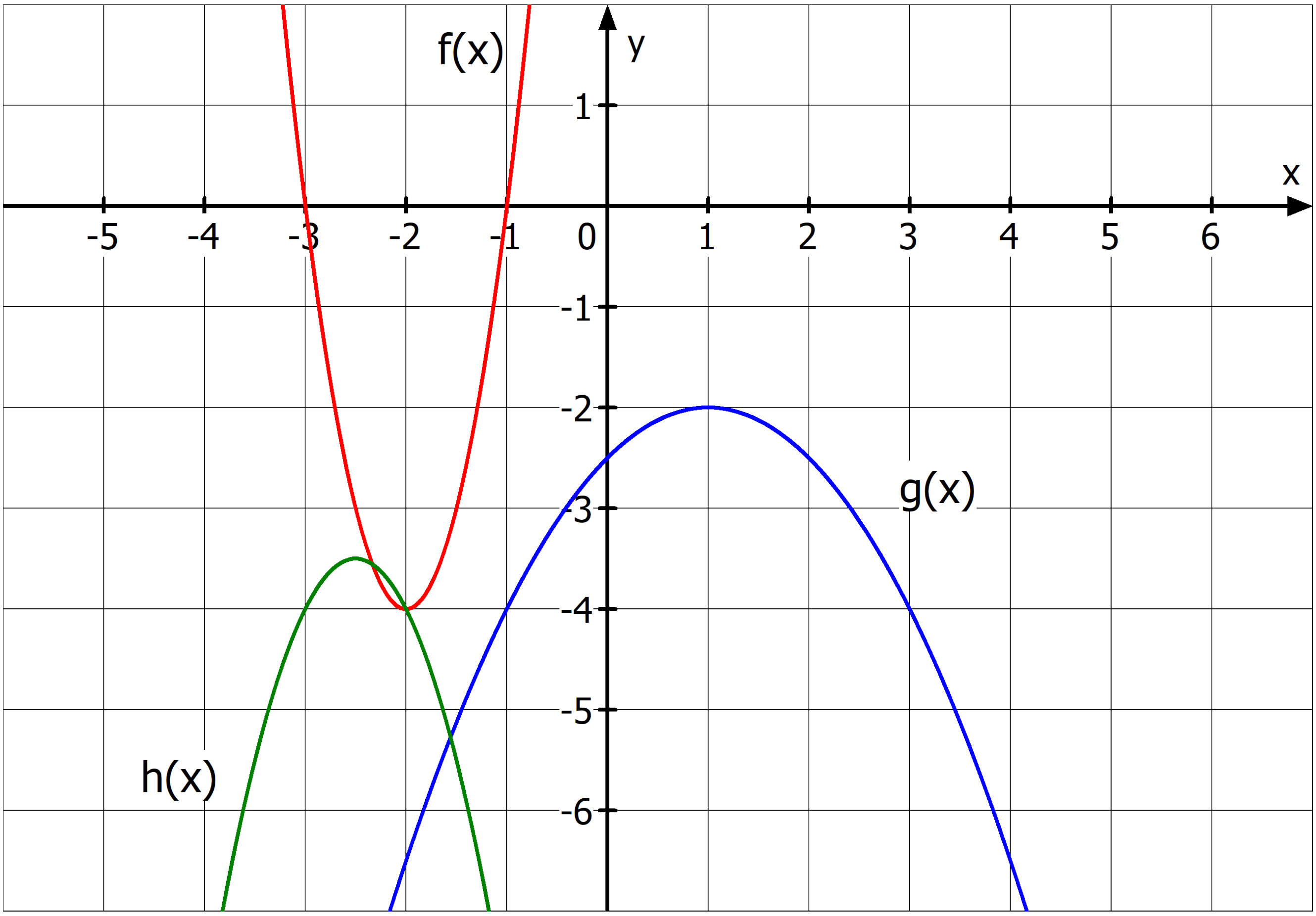
b) Das Schaubild von $g(x) = -(x+2)^2 - 3$ wird um 5 Einheiten nach rechts und 2 Einheiten nach unten verschoben und dann an der y-Achse gespiegelt.

Lösung zu Übung 17

a) $f(x) = \frac{1}{4}(x-2)^2 + 1$ b) $g(x) = -2(x-3)^2 - 1$
c) $h(x) = \frac{2}{3}(x+3)^2 - 3$ d) $i(x) = -\frac{3}{4}(x+2)^2 + 3$

Hinweis: Bestimme x_S und y_S aus der Position des Scheitels. Den Streckfaktor a kann man dann mittels einer Punktprobe bestimmen (nicht den Scheitel als Punkt verwenden).

Lösung zu Übung 18



a) $f(x) = 4(x+2)^2 - 4$ b) $g(x) = -\frac{1}{2}(x-1)^2 - 2$ c) $h(x) = -2(x+2,5)^2 - 3,5$

Lösung zu Übung 19

a) Die Normalparabel wird mit dem Faktor 5 gestreckt, um 1 Einheit nach rechts und 2 Einheiten nach oben verschoben.

b) Die Normalparabel wird an der x-Achse gespiegelt, um 3 Einheiten nach links und 2,5 Einheiten nach unten verschoben.

c) Die Normalparabel wird mit dem Faktor 1,5 gestreckt, an der x-Achse gespiegelt, um 0,75 Einheiten nach rechts und $\frac{5}{7}$ Einheiten nach oben verschoben.

Lösung zu Übung 20

a) $f_v(x) = -3(x+1)^2 - 4$ b) $g_v(x) = -(x+3)^2 - 5$

Hauptform

Liegt die Funktionsgleichung einer quadratischen Funktion in der folgenden Darstellungsform vor, so spricht man von der Hauptform oder Normalform:

- Streckfaktor a:

- Koeffizient b:

- Absolutglied c:

Die Nullstellen einer quadratischen Funktion bzw. die Lösungen einer Gleichung vom Typ

$$ax^2 + bx + c = 0$$

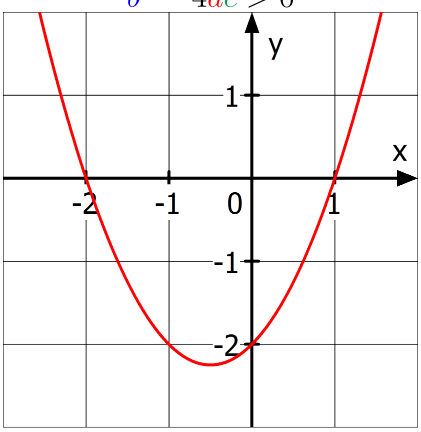
lassen sich mit Hilfe der Mitternachtsformel bestimmen:

Mitternachtsformel

$$x_{1/2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

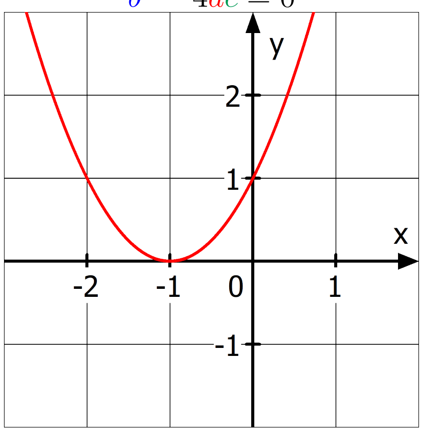
Wie viele Lösungen die Gleichung hat, hängt vom Term unter der Wurzel, der sogenannten Diskriminanten D ab: $D = b^2 - 4ac$

$b^2 - 4ac > 0$



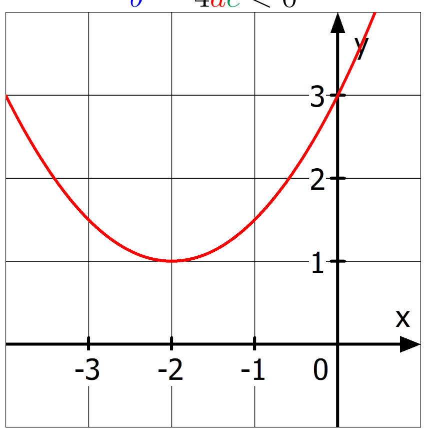
$f_1(x) = x^2 + x - 2$

$b^2 - 4ac = 0$



$f_2(x) = x^2 - 2x + 1$

$b^2 - 4ac < 0$



$f_3(x) = 0,5x^2 - 2x + 3$

Übung 21 Bestimme die Nullstellen

a) $f(x) = x^2 + 3x - 4$
b) $f(x) = x^2 - 4x + 3$
c) $f(x) = \frac{1}{2}x^2 + \frac{5}{2}x + 3$
d) $f(x) = 0,25x^2 + x + 1$
e) $f(x) = -2x^2 + 4x - 4$
f) $f(x) = \frac{1}{3}x^2 - x - 6$
g) $f(x) = 0,1x^2 - 0,2x - 1,5$
h) $f(x) = 2x^2 - 4x - 2$
i) $f(x) = \frac{1}{16}x^2 - \frac{1}{4}x - 2$
j) $f(x) = 0,5x^2 + 2x + 0,5$
k) $f(x) = \frac{2}{3}x^2 + 4x - 18$
l) $f(x) = 0,25x^2 - 1,5x + 1$
m) $f(x) = 4x^2 + 12x + 13$
n) $f(x) = 0,2x^2 - 2x + 5$

Lösung zu Übung 21

a) $x_1 = 1, \quad x_2 = -4$

b) $x_1 = 1, \quad x_2 = 3$

c) $x_1 = -2, \quad x_2 = -3$

d) $x_{1/2} = -2$

e) keine Nullstellen

f) $x_1 = -3, \quad x_2 = 6$

g) $x_1 = -3, \quad x_2 = 5$

h) $x_{1/2} = 1 \pm \sqrt{2}$

i) $x_1 = 8, \quad x_2 = -4$

j) $x_{1/2} = -2 \pm \sqrt{3}$

k) $x_1 = 3, \quad x_2 = -9$

l) $x_{1/2} = 3 \pm \sqrt{5}$

m) keine Nullstellen

n) $x_{1/2} = 5$

Satz vom Nullprodukt/Produktform

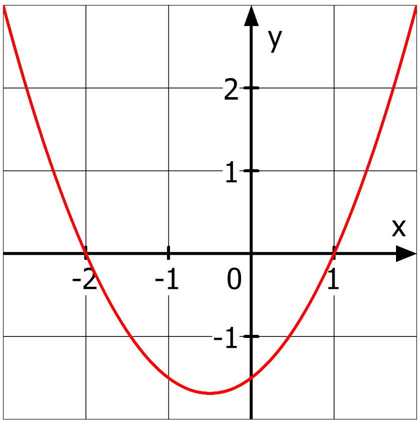
Die Produktform ist nach der Scheitelform und der Hauptform die dritte und letzte Darstellungsform für quadratische Funktionen. Um den Aufbau der Produktform nachvollziehen zu können, muss man den Satz vom Nullprodukt (SvN) kennen.
Das Produkt zweier Zahlen a und b ist genau dann Null, wenn entweder a Null ist oder b Null ist:

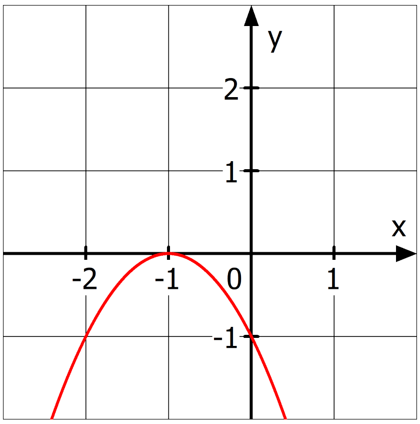
Liegt die Funktionsgleichung einer quadratischen Funktion in der folgenden Form vor, so spricht man von der Produktform:

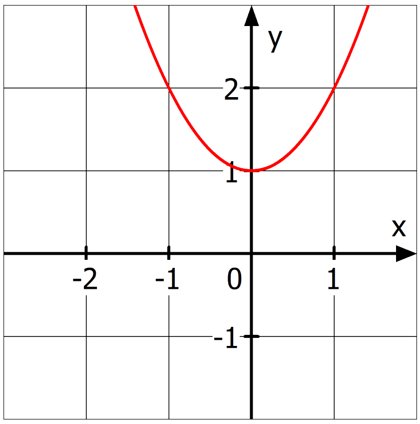
$$f(x) =$$

- Streckfaktor a:

- $x_1,\ x_2$:







$f_1(x) = \frac{3}{4}(x \quad)(x \quad)$ $\qquad$ $f_2(x) = -(x \quad)(x \quad)$ $\qquad$ $f_3(x) = x^2 + 1$

Übung 22 Bestimme die Nullstellen

a) $f(x) = 3(x+2)(x-4)$

b) $f(x) = -2(x+8)(x+6)$

c) $f(x) = 5(x-2)x$

d) $f(x) = -\frac{3}{4}\left(x+\frac{7}{5}\right)\left(x-\frac{4}{3}\right)$

e) $f(x) = \sqrt{3}(x-10)^2$

f) $f(x) = \left(x+\sqrt{2}\right)(x-3,8)$

g) $f(x) = -\left(x-\frac{1}{2}\right)\left(x-\frac{3}{4}\right)$

h) $f(x) = 10\left(x+\frac{8}{5}\right)\left(x-\frac{3}{5}\right)$

i) $f(x) = -9x(x+9)$

j) $f(x) = 1,8(x-2,1)(x-5,9)$

k) $f(x) = -8\left(x-\sqrt{5}\right)\left(x+\sqrt{11}\right)$

l) $f(x) = -\frac{6}{5}(x-2)^2$

m) $f(x) = \sqrt{3}(x-10)(x+8)$

n) $f(x) = -2(x+17)(x+1)$

Übung 23 Bestimme die Nullstellen und skizziere das Schaubild

a) $f(x) = 0,2(x+3)(x-2)$

b) $g(x) = -0,5(x+5)(x+2)$

c) $h(x) = (x+1)^2$

d) $i(x) = -\frac{1}{2}x\left(x-\frac{3}{2}\right)$

Lösung zu Übung 22

a) $x_1 = -2, \quad x_2 = 4$

b) $x_1 = -8, \quad x_2 = -6$

c) $x_1 = 2, \quad x_2 = 0$

d) $x_1 = -\frac{7}{5}, \quad x_2 = \frac{4}{3}$

e) $x_{1/2} = 10$

f) $x_1 = -\sqrt{2}, \quad x_2 = 3,8$

g) $x_1 = \frac{1}{2}, \quad x_2 = \frac{3}{4}$

h) $x_1 = -\frac{8}{5}, \quad x_2 = \frac{3}{5}$

i) $x_1 = 0, \quad x_2 = -9$

j) $x_1 = 2,1, \quad x_2 = 5,9$

k) $x_1 = \sqrt{5}, \quad x_2 = -\sqrt{11}$

l) $x_{1/2} = 2$

m) $x_1 = 10, \quad x_2 = -8$

n) $x_1 = -17, \quad x_2 = -1$

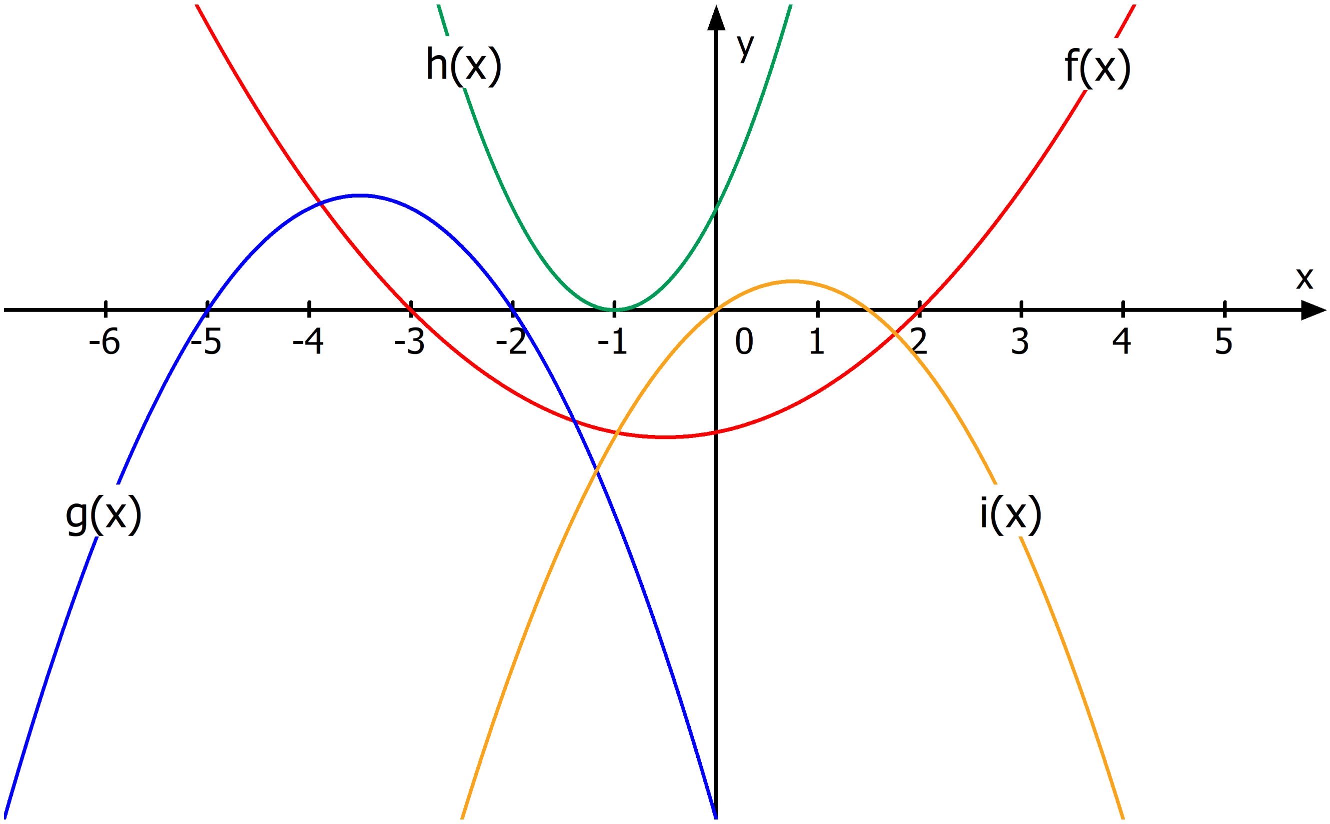
Lösung zu Übung 23

a) $x_1 = -3, \quad x_2 = 2$

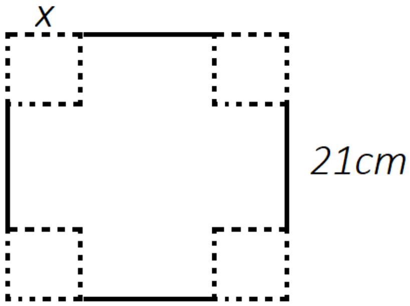
b) $x_1 = -5, \quad x_2 = -2$

c) $x_{1/2} = -1$

d) $x_1 = 0, \quad x_2 = -\frac{3}{2}$



Aus einem quadratischen Stück Pappe der Größe 21cm auf 21cm soll ein oben offener Kasten hergestellt werden. Die Ecken mit der variablen Seitenlänge x sind hierzu entsprechend der Abbildung abzuschneiden und die Seiten an den gepunkteten Linien hochzubiegen.



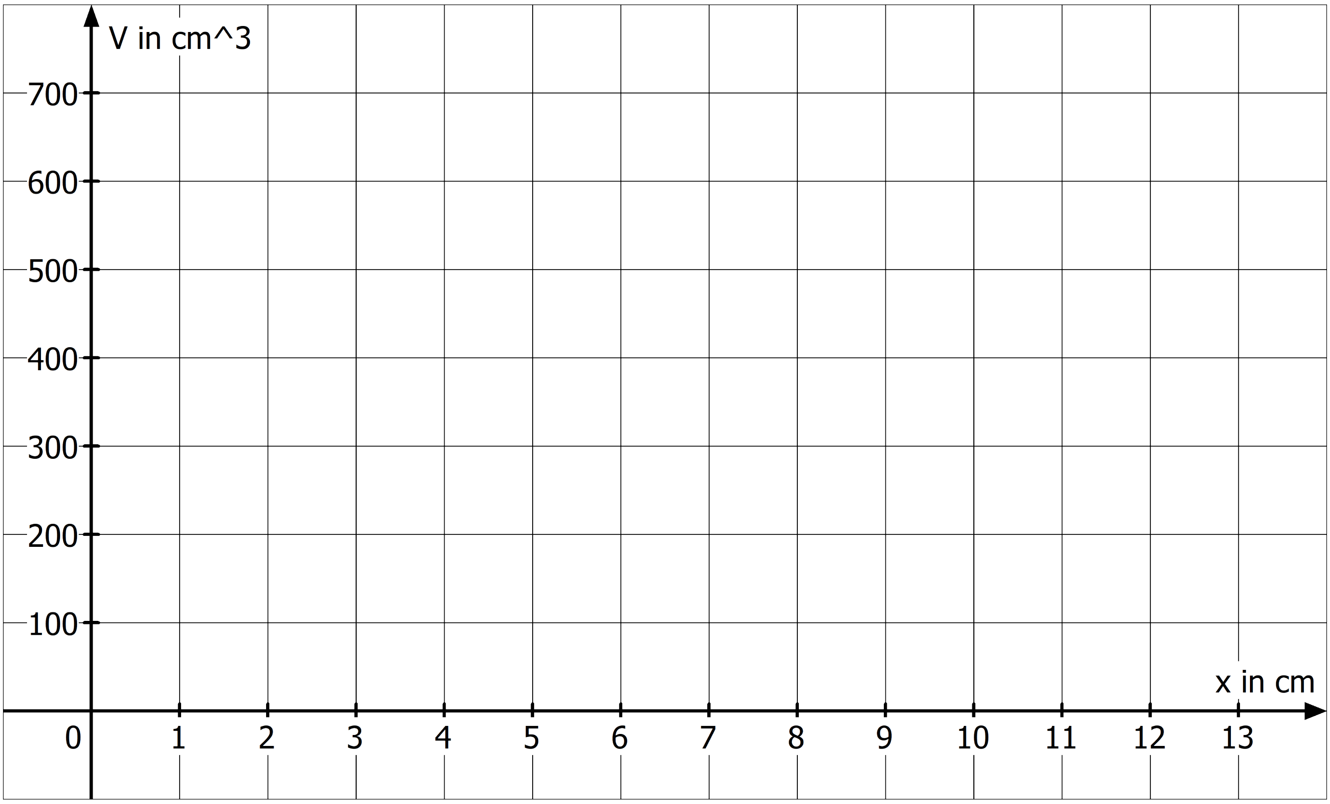
a) Gib drei verschiedene mögliche Abmessungen (Länge, Breite, Höhe) eines solchen Kastens an und berechne jeweils das zugehörige Volumen.

b) Beschreibe das Volumen V des Kastens in Abhängigkeit von der Höhe x mit einer Gleichung.

c) Zeichne das Schaubild der Funktion $V(x)$ im Intervall $0 \leq x \leq 13$ mit Hilfe deines Taschenrechners und einer Wertetabelle.

d) Bestimme eine sinnvolle Definitionsmenge für die Funktion.

e) Für welche Höhe x ist das Volumen des Kastens am größten?



a) Mögliche Beispiele: $V_1 = 5 \cdot (21 - 10)(21 - 10) = 605$
$V_2 = 3 \cdot (21 - 6)(21 - 6) = 675$
$V_3 = 8 \cdot (21 - 16)(21 - 16) = 200$

b) Die Höhe des Kastens entspricht x, während die Länge und Breite jeweils $21-2x$ entsprechen. Damit ergibt sich für das Volumen:
$V(x) = \text{Länge} \cdot \text{Breite} \cdot \text{Höhe} = x \cdot (21 - 2x)(21 - 2x) = x(21 - 2x)^2 = 4x^3 - 42x^2 + 441x$

c) Schaubild der Funktion

d) Die Definitionsmenge D gibt an, welche Werte für x man einsetzen darf. In diesem Fall sollte x größer als Null sein, da sonst kein Kasten entsteht und kleiner als 10,5 sein, da bei $x = 10,5$ die vier Quadrate das komplette Stück Pappe abdecken:
$D =]0; 10,5[$ oder $D = \{x \in \mathbb{R} | 0 < x < 10,5\}$

e) Aus dem Schaubild lässt sich ablesen, dass das maximale Volumen ungefähr bei $x = 3,5$ erreicht wird und damit $V_{max} = V(3,5) = 686$ gilt. Das maximale Volumen lässt sich mit der Ableitung exakt bestimmen, die wir zu einem späteren Zeitpunkt behandeln werden.

Funktionen vom Typ

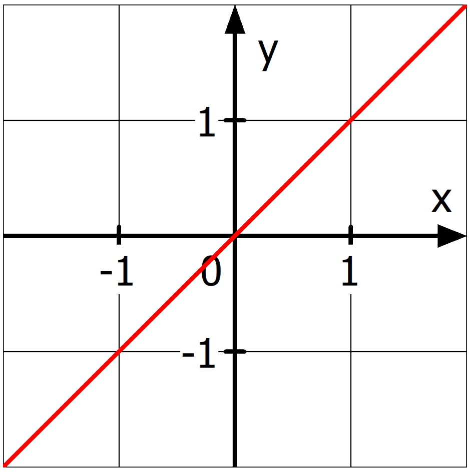
$$f(x) = a \cdot x^n, \quad a \neq 0, \quad n \in \mathbb{N}$$

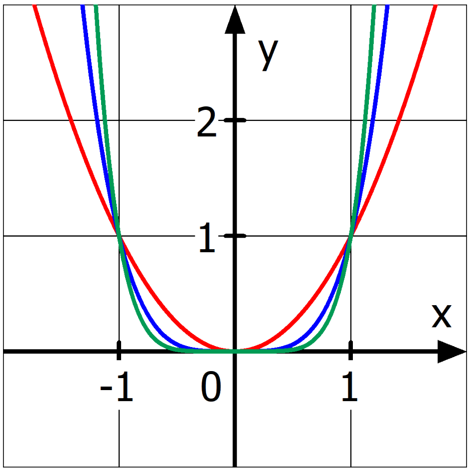
bezeichnen wir als Potenzfunktionen.

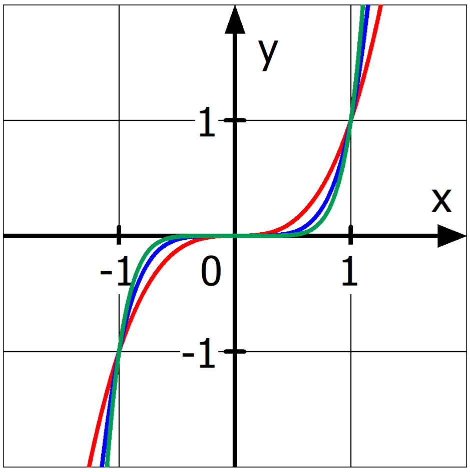
Der Koeffizient a ist der Streckfaktor, wie wir ihn bereits von quadratischen Funktionen kennen.

Die Hochzahl bzw. der Exponent n ist eine natürliche Zahl: $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, \dots\}$

Die Schaubilder der Potenzfunktionen teilen sich in drei verschiedene Formen auf:







Übung 24 **Skizziere das Schaubild, gib die Symmetrie sowie das Verhalten für sehr große/kleine x an.**

a) $f(x) = -x^2$

b) $g(x) = 0,5x^3$

c) $h(x) = 2x^6$

d) $i(x) = -\frac{3}{2}x^5$

e) $j(x) = 0,1x^4$

f) $k(x) = -\frac{3}{5}x^7$

g) $l(x) = -\sqrt{2}x^4$

h) $m(x) = 3x^5$

Lösung zu Übung 24

Relevant ist nur, ob die Hochzahl gerade/ungerade ist sowie das Vorzeichen des Streckfaktors:

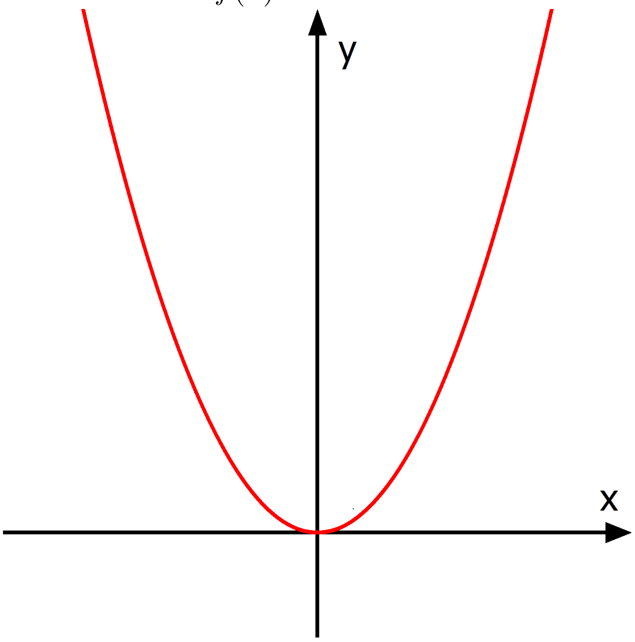
a positiv und n gerade wie $h(x)$ und $j(x)$

Parabelförmig

Achsensymmetrie zur y-Achse

$f(x) \xrightarrow{x \to -\infty} \infty$

$f(x) \xrightarrow{x \to \infty} \infty$



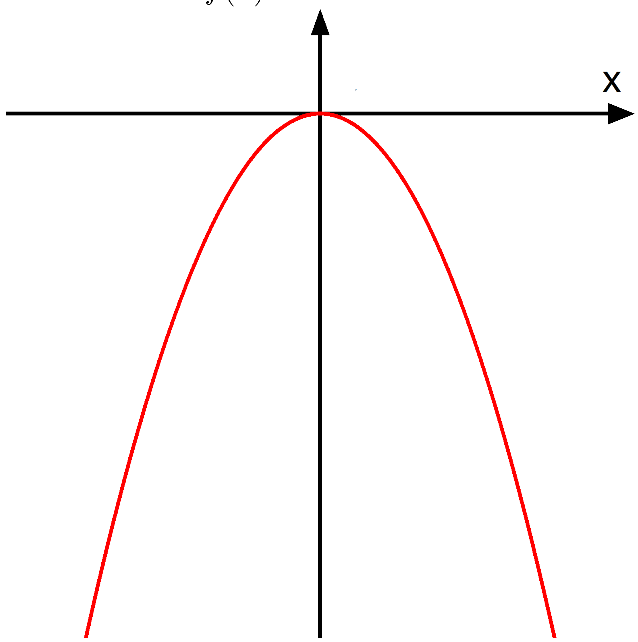
a negativ und n gerade wie $f(x)$ und $l(x)$

Parabelförmig

Achsensymmetrie zur y-Achse

$f(x) \xrightarrow{x \to -\infty} -\infty$

$f(x) \xrightarrow{x \to \infty} -\infty$



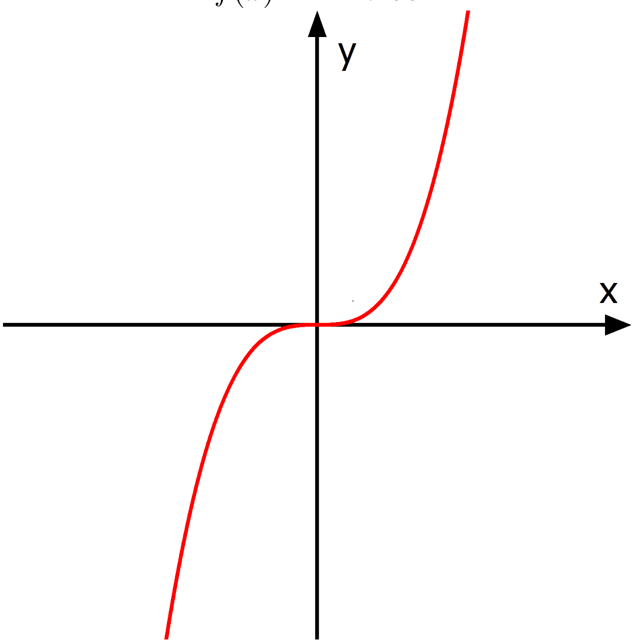
a positiv und n ungerade wie $g(x)$ und $m(x)$

S-förmig

Punktsymmetrie zum Ursprung

$f(x) \xrightarrow{x \to -\infty} -\infty$

$f(x) \xrightarrow{x \to \infty} \infty$



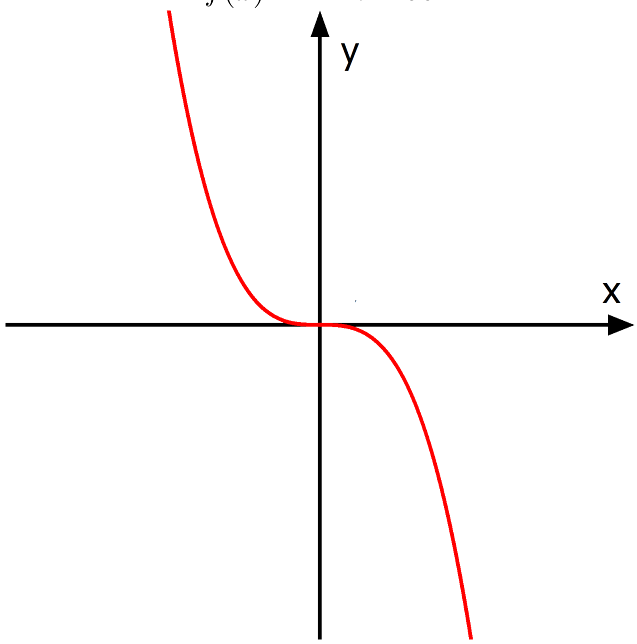
a negativ und n ungerade wie $i(x)$ und $k(x)$

S-förmig

Punktsymmetrie zum Ursprung

$f(x) \xrightarrow{x \to -\infty} \infty$

$f(x) \xrightarrow{x \to \infty} -\infty$



Funktionen, deren Funktionsgleichung man wie folgt darstellen kann, bezeichnet man als ganzrationale Funktionen:

$f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \cdots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0, \quad a_n \neq 0, \quad n \in \mathbb{N}$

Diese Darstellungsform (komplett ausmultipliziert und zusammengefasst) bezeichnet man als Hauptform oder Normalform.

Folgende Begriffe finden für die ganzrationalen Funktionen Verwendung:

Beispiele:

$f(x) = -4x^5 + 3x^4 - \frac{1}{2}x^3 + x - 3$

Grad: 5

Koeffizienten: $a_5 = -4$, $a_4 = 3$, $a_3 = -\frac{1}{2}$, $a_2 = 0$, $a_1 = 1$, $a_0 = -3$

Leitkoeffizient $a_5 = -4$

Absolutglied $a_0 = -3$

$g(x) = x^4 + 2x^3 - 0,5x$

Grad:

Koeffizienten:

Leitkoeffizient

Absolutglied

Übung 25 **Gib den Grad, die Koeffizienten, den Leitkoeffizienten sowie das Absolutglied an.**

a) $f(x) = -6x^3 + 2x - 3$

b) $g(x) = 0,5x^5 - 7x^4 + 2,5x$

c) $h(x) = 2x^6$

d) $i(x) = -\frac{3}{2}x^5 - 8x^4 + x^2 - 1$

e) $j(x) = 0,1x^4 - 12x^3 - x^2 + 8,6x - 3,1$

f) $k(x) = -\frac{3}{5}x^7 + \frac{2}{7}x^6 - \frac{11}{6}x^4 - \frac{12}{5}x$

g) $l(x) = 2x(x^3 - 2x^2 + 5)$

h) $m(x) = -3x^2(x+2)^2$

Lösung zu Übung 25

a) Grad: 3
Koeffizienten: $a_3 = -6$, $a_2 = 0$, $a_1 = 2$, $a_0 = -3$
Leitkoeffizient $a_3 = -6$
Absolutglied $a_0 = -3$

b) Grad: 5
Koeffizienten: $a_5 = 0,5$, $a_4 = -7$, $a_3 = 0$, $a_2 = 0$, $a_1 = 2,5$, $a_0 = 0$
Leitkoeffizient $a_5 = 0,5$
Absolutglied $a_0 = 0$

c) Grad: 6
Koeffizienten: $a_6 = 2$, $a_5 = 0$, $a_4 = 0$, $a_3 = 0$, $a_2 = 0$, $a_1 = 0$, $a_0 = 0$
Leitkoeffizient $a_6 = 2$
Absolutglied $a_0 = 0$

d) Grad: 5
Koeffizienten: $a_5 = -\frac{3}{2}$, $a_4 = -8$, $a_3 = 0$, $a_2 = 1$, $a_1 = 0$, $a_0 = -1$
Leitkoeffizient $a_5 = -\frac{3}{2}$
Absolutglied $a_0 = -1$

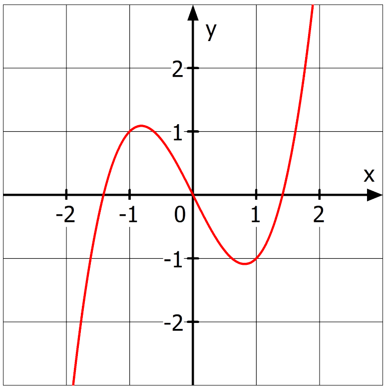
e) Grad: 4
Koeffizienten: $a_4 = 0,1$, $a_3 = -12$, $a_2 = -1$, $a_1 = 8,6$, $a_0 = -3,1$
Leitkoeffizient $a_4 = 0,1$
Absolutglied $a_0 = -3,1$

f) Grad: 7
Koeffizienten: $a_7 = -\frac{3}{5}$, $a_6 = \frac{2}{7}$, $a_5 = 0$, $a_4 = -\frac{11}{6}$, $a_3 = 0$, $a_2 = 0$, $a_1 = -\frac{12}{5}$, $a_0 = 0$
Leitkoeffizient $a_7 = -\frac{3}{5}$
Absolutglied $a_0 = 0$

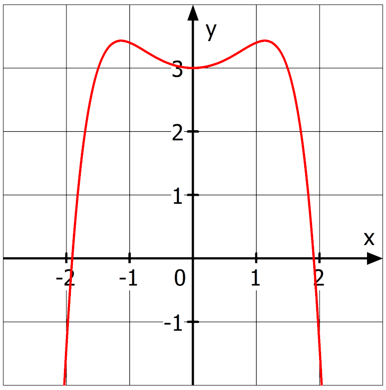
g) $l(x) = 2x(x^3 - 2x^2 + 5) = 2x^4 - 4x^3 + 10x$
Grad: 4
Koeffizienten: $a_4 = 2$, $a_3 = -4$, $a_2 = 0$, $a_1 = 10$, $a_0 = 0$
Leitkoeffizient $a_4 = 2$
Absolutglied $a_0 = 0$

h) $m(x) = -3x^2(x+2)^2$
$= -3x^4 - 12x^3 - 12x^2$
Grad: 4
Koeffizienten: $a_4 = -3$, $a_3 = -12$, $a_2 = -12$,
$a_1 = 0$, $a_0 = 0$
Leitkoeffizient $a_4 = -3$
Absolutglied $a_0 = 0$

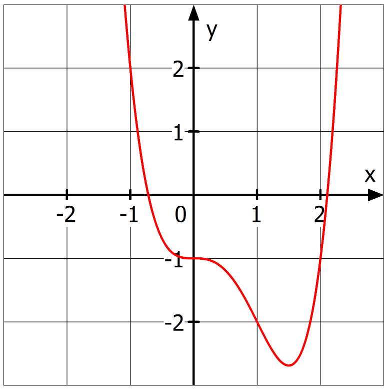
Wir unterscheiden lediglich zwei Arten von Symmetrien, Achsensymmetrie zur y-Achse sowie Punktsymmetrie zum Ursprung.



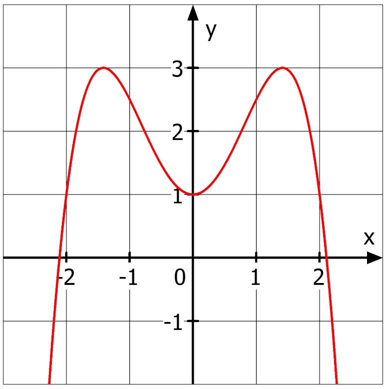
$f_1(x) = x^3 - 2x$



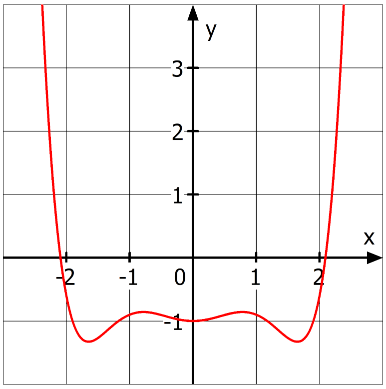
$f_2(x) = -0,1x^6 + 0,5x^2 + 3$



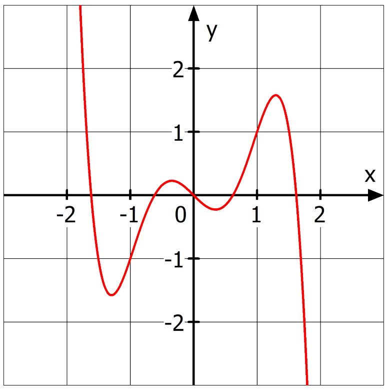
$f_3(x) = x^4 - 2x^3 - 1$



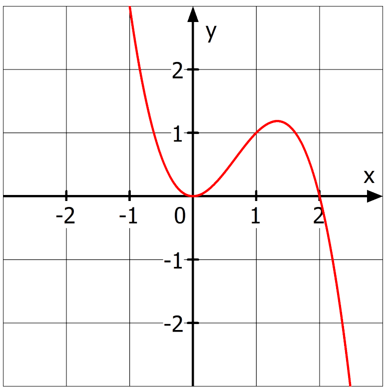
$f_4(x) = -\frac{1}{2}x^4 + 2x^2 + 1$



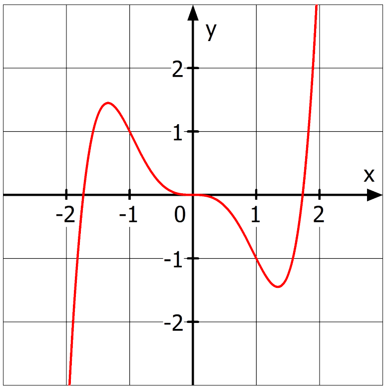
$f_5(x) = \frac{1}{10}x^6 - \frac{1}{2}x^4 + \frac{1}{2}x^2 - 1$



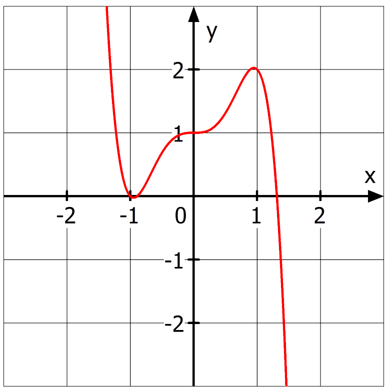
$f_6(x) = -x^5 + 3x^3 - x$



$f_7(x) = -x^3 + 2x^2$



$f_8(x) = \frac{1}{2}x^5 - \frac{3}{2}x^3$



$f_9(x) = -2x^5 + 3x^3 + 1$

Übung 26 Untersuche auf Symmetrie

a) $f(x) = -6x^3 + 2x - 3$

b) $g(x) = 0,5x^5 + x^3 + 2,5x$

c) $h(x) = 2x^6 - 3x^2 + 1$

d) $i(x) = -\frac{3}{2}x^5 - 8x^4 + x^2 - 1$

e) $j(x) = -0,3x^6 - 12x^4 - x^2 - 3,1$

f) $k(x) = -\frac{3}{5}x^7 + \frac{2}{7}x^5 - \frac{11}{6}x^3 - \frac{12}{5}x$

g) $l(x) = -2x^3(x^2 - 2x + 5)$

h) $m(x) = 3x(x-3)^2 + 18x^2$

Lösung zu Übung 26

a) Hochzahlen: 3, 1, 0
Keine der beiden Symmetrien.

b) Hochzahlen: 5, 3, 1
Punktsymmetrie zum Ursprung.

c) Hochzahlen: 6, 2, 0
Achsensymmetrie zur y-Achse

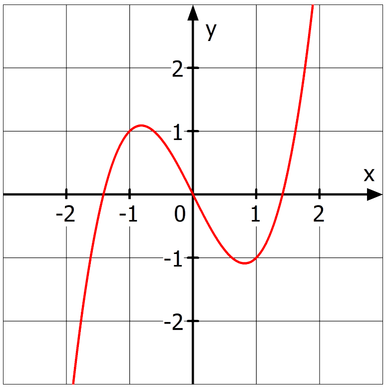
d) Hochzahlen: 5, 4, 2, 0
Keine der beiden Symmetrien.

e) Hochzahlen: 6, 4, 2, 0
Achsensymmetrie zur y-Achse

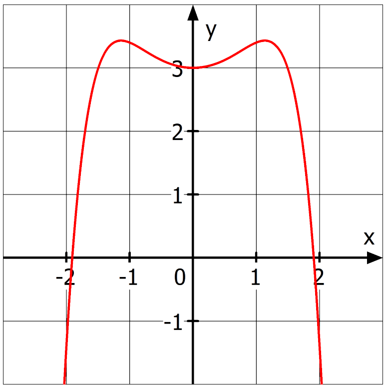
f) Hochzahlen: 7, 5, 3, 1
Punktsymmetrie zum Ursprung.

g) $$\begin{aligned} l(x) &= -2x^3(x^2 - 2x + 5) \\ &= -2x^5 + 4x^4 - 10x^3 \end{aligned}$$
Hochzahlen: 5, 4, 3
Keine der beiden Symmetrien.

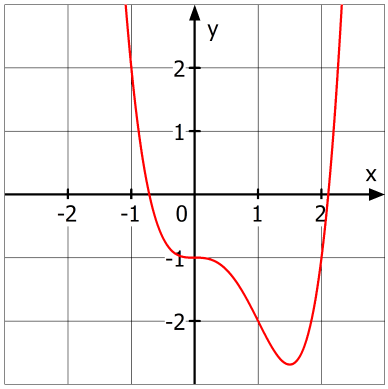
h) $m(x) = 3x(x-3)^2 + 18x^2 = 3x^3 + 27x$
Hochzahlen: 3, 1
Punktsymmetrie zum Ursprung.



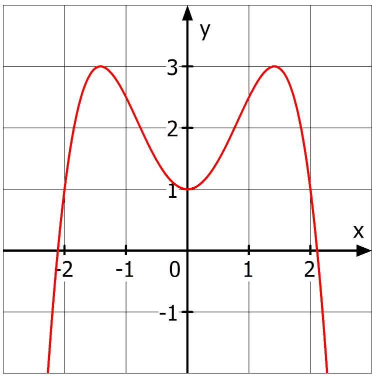
$f_1(x) = x^3 - 2x$



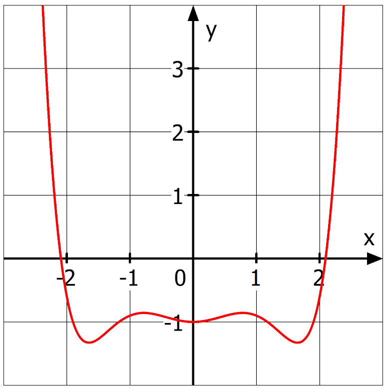
$f_2(x) = -0,1x^6 + 0,5x^2 + 3$



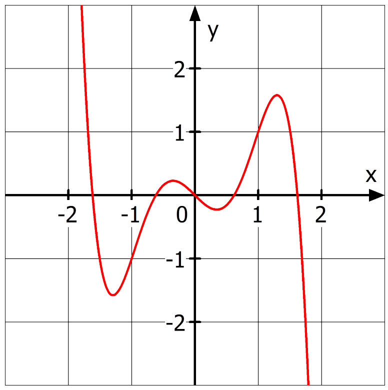
$f_3(x) = x^4 - 2x^3 - 1$



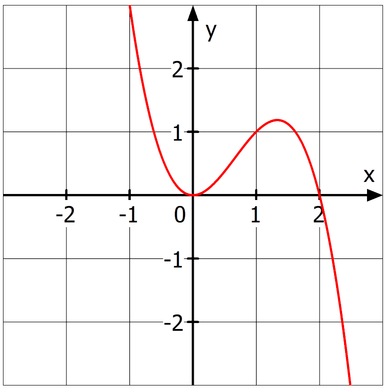
$f_4(x) = -\frac{1}{2}x^4 + 2x^2 + 1$



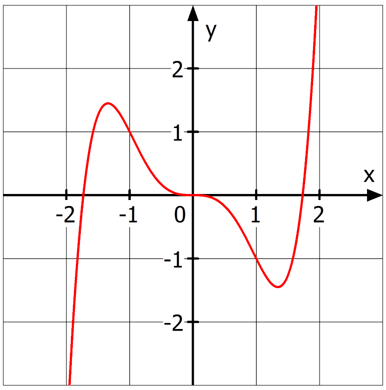
$f_5(x) = \frac{1}{10}x^6 - \frac{1}{2}x^4 + \frac{1}{2}x^2 - 1$



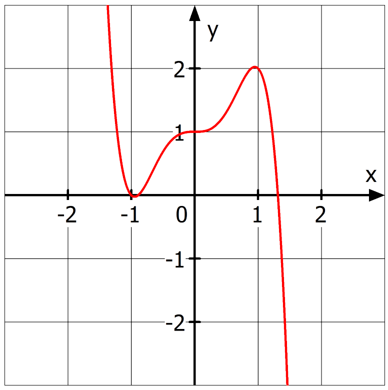
$f_6(x) = -x^5 + 3x^3 - x$



$f_7(x) = -x^3 + 2x^2$



$f_8(x) = \frac{1}{2}x^5 - \frac{3}{2}x^3$



$f_9(x) = -2x^5 + 3x^3 + 1$

Übung 27 Gib das Verhalten für $x \to \pm\infty$ an

a) $f(x) = 3x^3 + 2x - 3$

b) $g(x) = -2,5x^5 + 5x^3 + 2,5x^2$

c) $h(x) = 2x^6 - 3x^2 - 14x + 1$

d) $i(x) = -\frac{3}{5}x^5 + 2x^4 + x^2 - 1$

e) $j(x) = -0,3x^6 - x^4 + 2x^2 - 5,8$

f) $k(x) = -\frac{7}{5}x^7 + \frac{8}{7}x^6 - \frac{11}{6}x^2 - \frac{12}{5}x$

g) $l(x) = x(-x^3 + 2x^2 + 5)$

h) $m(x) = 5x^2(x-1)^2$

Lösung zu Übung 27

a) Verhält sich wie $3x^3$
$f(x) \xrightarrow{x\to-\infty} -\infty$
$f(x) \xrightarrow{x\to\infty} \infty$

b) Verhält sich wie $-2,5x^5$
$g(x) \xrightarrow{x\to-\infty} \infty$
$g(x) \xrightarrow{x\to\infty} -\infty$

c) Verhält sich wie $2x^6$
$h(x) \xrightarrow{x\to-\infty} \infty$
$h(x) \xrightarrow{x\to\infty} \infty$

d) Verhält sich wie $-\frac{3}{5}x^5$
$i(x) \xrightarrow{x\to-\infty} \infty$
$i(x) \xrightarrow{x\to\infty} -\infty$

e) Verhält sich wie $-0,3x^6$
$j(x) \xrightarrow{x\to-\infty} -\infty$
$j(x) \xrightarrow{x\to\infty} -\infty$

f) Verhält sich wie $-\frac{7}{5}x^7$
$k(x) \xrightarrow{x\to-\infty} \infty$
$k(x) \xrightarrow{x\to\infty} -\infty$

g) $l(x) = x(-x^3 + 2x^2 + 5) = -x^4 + 2x^3 + 5x$
Verhält sich wie $-x^4$
$l(x) \xrightarrow{x\to-\infty} -\infty$
$l(x) \xrightarrow{x\to\infty} -\infty$

h) $m(x) = 5x^2(x-1)^2 = 5x^4 - 10x^3 + 5x^2$
Verhält sich wie $5x^4$
$m(x) \xrightarrow{x\to-\infty} \infty$
$m(x) \xrightarrow{x\to\infty} \infty$

Für die meisten ganzrationalen Funktionen lassen sich die Nullstellen nicht exakt bestimmen, es sei denn die Funktionsgleichung hat eine bestimmte Form. Wir werden drei neue Verfahren zum Bestimmen von Nullstellen bzw. Lösen von Gleichungen kennen lernen. Doch zuerst ein wichtiger Satz zur Anzahl der Nullstellen:

0. Mitternachtsformel

Die Mitternachtsformel zum Lösen von quadratischen Gleichungen kennen wir bereits.

1. Nach x^n auflösen und Wurzelziehen

Dieses Verfahren kann nur dann angewendet werden, wenn die Gleichung auf folgende Form gebracht werden kann: $ax^n + b = 0$

Wir lösen nach x^n auf, d.h. x^n steht alleine auf einer Seite. Dann ziehen wir die n-te Wurzel $\sqrt[n]{}$.

Beispiel: Bestimme die Nullstelle der Funktion $f(x) = 2x^3 + 16$.

Zur Anwendung höherer Wurzeln siehe den folgenden Einschub.

2. Möglichst viele x Vorklammern und SvN

Dieses Verfahren kann nur dann angewendet werden, wenn jeder Summand über mindestens ein x verfügt. Wir klammern so viele x wie möglich vor (kleinste Hochzahl) und wenden dann den Satz vom Nullprodukt an.

Beispiel: Bestimme die Nullstelle der Funktion $f(x) = 2x^4 - 10x^3 + 12x^2$.

3. Substitution hin zu einer quadratischen Gleichung

Der Begriff Substitution kommt aus dem Lateinischen und bedeutet Ersetzen oder Austauschen. Dieses Verfahren kann nur dann angewendet werden, wenn der Funktionsterm von der Form $ax^{2n} + bx^n + c$ ist, d.h. es müssen drei Summanden sein, einer ohne x und bei den beiden anderen muss die eine Hochzahl doppelt so groß sein wie die andere Hochzahl.
Wir ersetzen immer das x mit der kleineren Hochzahl durch eine andere Variable, meist z genannt.

Beispiel: Bestimme die Nullstelle der Funktion $f(x) = 2x^4 - 4x^2 - 16$.

Übung 28 Berechne die Nullstellen

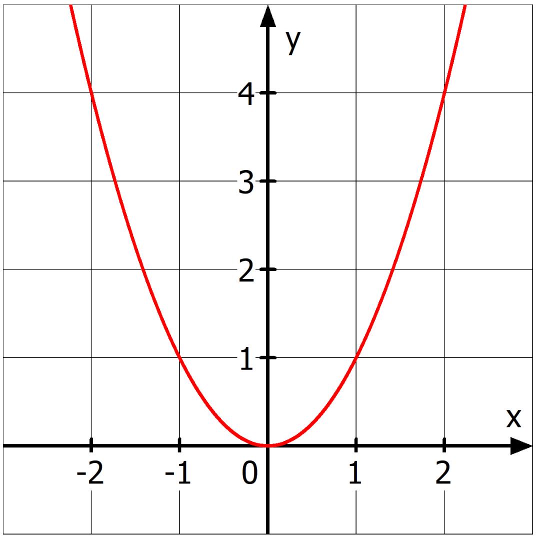
a) $f(x) = x^3 - 2x^2 - 8x$
b) $f(x) = x^4 - 20x^2 + 64$
c) $f(x) = x^4 - 256$
d) $f(x) = \frac{1}{2}x^4 - x^3 - \frac{3}{2}x^2$
e) $f(x) = 2x^4 - 6x^2 - 8$
f) $f(x) = \frac{x^5}{125} + 25$
g) $f(x) = 3x^6 - 27x^3 + 24$
h) $f(x) = 3x^5 - 3x^4 - 18x^3$
i) $f(x) = -2x^4 + 2x^3 - 4x^2$
j) $f(x) = 2x^3 + \frac{27}{4}$
k) $f(x) = 16x^4 - \frac{81}{256}$
l) $f(x) = 125x^3 + 27$
m) $f(x) = \frac{1}{8}x^7 - \frac{19}{8}x^4 - 27x$
n) $f(x) = 0,5x^4 - 5x^3 + 12,5x^2$
o) $f(x) = 3x^4 - 15x^2 + 18$
p) $f(x) = 10x^{10} - 10$
q) $f(x) = 1024 - 243x^5$
r) $f(x) = -x^6 + 7x^3 + 8$
s) $f(x) = \frac{1}{3}x^6 - \frac{1}{60}x^5 - \frac{1}{60}x^4$
t) $f(x) = 8x^6 - 637x^3 + 8000$
u) $f(x) = 4096x^9 + 16774815x^5 - 9834496x$
v) $f(x) = 108x^6 + 697x^3 - 216$
w) $f(x) = 16 - 625x^4$
x) $f(x) = 27x^4 + 6x^2 - 1$
y) $f(x) = 144x^4 - 337x^2 + 144$
z) $f(x) = 4x^6 + 15x^4 - 4x^2$

Lösung zu Übung 28

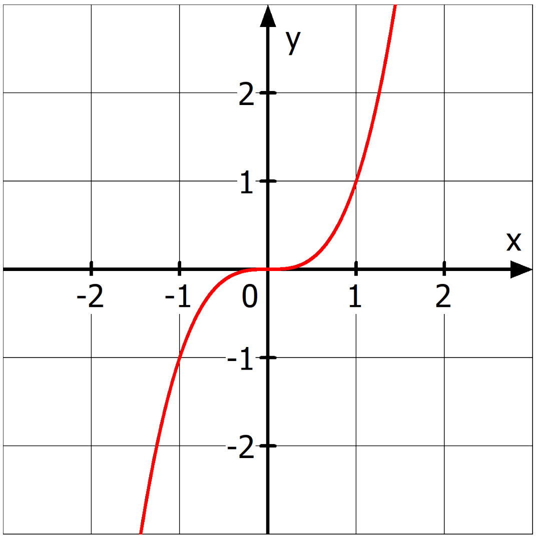
a) $x_1 = 0,\ x_2 = -2,\ x_3 = 4$
b) $x_{1/2} = \pm 2,\ x_{3/4} = \pm 4$
c) $x_{1/2} = \pm 4$
d) $x_1 = 0,\ x_2 = -1,\ x_3 = 3$
e) $x_{1/2} = \pm 2$
f) $x_1 = -5$
g) $x_1 = 1,\ x_2 = 2$
h) $x_1 = 0,\ x_2 = -2,\ x_3 = 3$
i) $x_1 = 0$
j) $x_1 = -\frac{3}{2}$
k) $x_{1/2} = \pm\frac{3}{8}$
l) $x_1 = -\frac{3}{5}$
m) $x_1 = 0,\ x_2 = -2,\ x_3 = 3$
n) $x_1 = 0,\ x_2 = 5$
o) $x_{1/2} = \pm\sqrt{2},\ x_{3/4} = \pm\sqrt{3}$
p) $x_{1/2} = \pm 1$
q) $x_1 = \frac{3}{4}$
r) $x_1 = -1,\ x_2 = 2$
s) $x_1 = 0,\ x_2 = \frac{1}{4},\ x_3 = -\frac{1}{5}$
t) $x_1 = 4,\ x_2 = \frac{5}{2}$
u) $x_1 = 0,\ x_{2/3} = \pm\frac{7}{8}$
v) $x_1 = \frac{2}{3},\ x_2 = -\frac{3}{\sqrt[3]{4}}$
w) $x_{1/2} = \pm\frac{2}{5}$
x) $x_{1/2} = \pm\frac{1}{3}$
y) $x_{1/2} = \pm\frac{3}{4},\ x_{3/4} = \pm\frac{4}{3}$
z) $x_1 = 0,\ x_{2/3} = \pm\frac{1}{2}$

Wir werden Wurzeln zum Lösen von Gleichungen vom Typ $x^n = y$ verwenden, wobei die Hochzahl $n = 2,\ 3,\ 4, \ldots$ eine natürliche Zahl größer gleich 2 ist. Die uns bekannte Wurzel ist eigentlich die zweite Wurzel $\sqrt[2]{y} = \sqrt{y}$. Für jede der möglichen Hochzahlen $2,\ 3,\ 4, \ldots$ ist eine eigene Wurzel definiert, z.B. $\sqrt[3]{y}$. Grob vereinfacht macht die n-te Wurzel das hoch n rückgängig bzw. kehrt es um. Etwas anschaulicher sucht die n-te Wurzel zu einem gegebenen y-Wert den passenden x-Wert im Schaubild von x^n:

Gerade Wurzeln



Ungerade Wurzeln



Hat eine ganzrationale Funktion $f(x)$ vom Grad n genauso viele Nullstellen wie ihr Grad, so kann man sie in der Produktform darstellen:

$f(x) = a(x - x_1)^{n_1}(x - x_2)^{n_2}(x - x_3)^{n_3} \cdots, \quad a \neq 0, \quad n_1,\ n_2,\ n_3, \ldots \in \mathbb{N}$

Wie auch bei der Produktform der quadratischen Funktionen lassen sich die Nullstellen einfach ablesen. Auch der Leitkoeffizient und der Grad lassen sich leicht bestimmen:

Beispiele:

$f(x) = -4(x+3)^2(x+1)^3(x-2)$

NST	VFH
$x_1 = -3$	2
$x_2 = -1$	3
$x_3 = 2$	1

Grad: $2 + 3 + 1 = 6$

Leitkoeffizient $a = -4$

$g(x) = 2(x+4)(x+2)^3x^2(x-3)^2$

NST	VFH
$x_1 = -4$	1
$x_2 = -2$	3
$x_3 = 0$	2
$x_4 = 3$	2

Grad: $1 + 3 + 2 + 2 = 8$

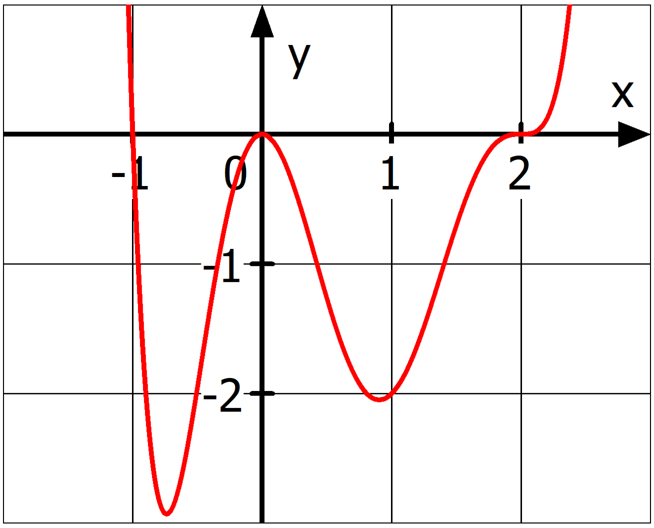
Leitkoeffizient $a = 2$

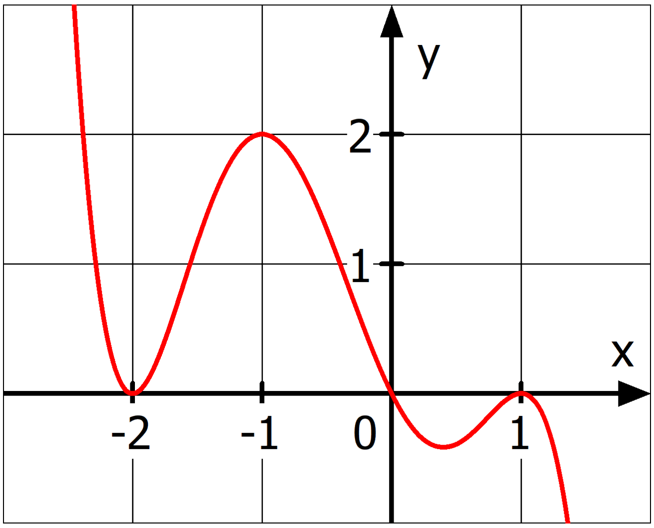
$h(x) = \frac{1}{2}\left(x + \frac{3}{2}\right)^4\left(x + \frac{3}{4}\right)(x-3)^2$

$i(x) = -0,5(x+3,5)^2(x+1,5)^2x(x-3,8)^3$

Wir nutzen die Produktform, um Schaubilder zu skizzieren und um ausgehend vom Schaubild die Funktionsgleichung aufzustellen. Die Vielfachheit der Nullstellen gibt an, wie das Schaubild **in der Nähe** der Nullstelle verläuft.

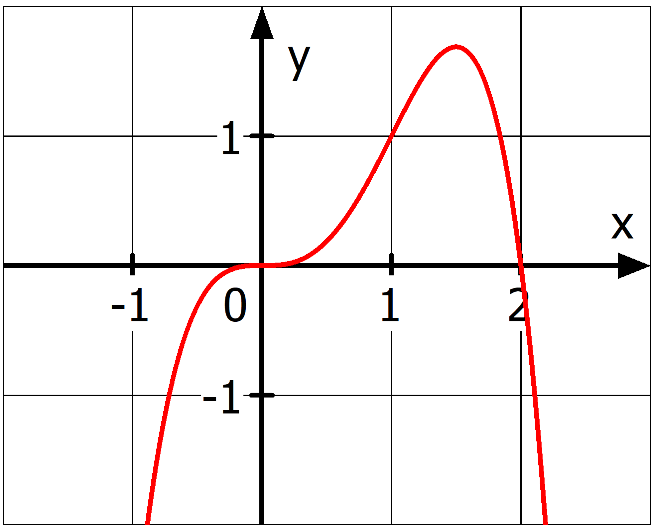
Beispiel 1: $f_1(x) = (x+1)x^2(x-2)^3$





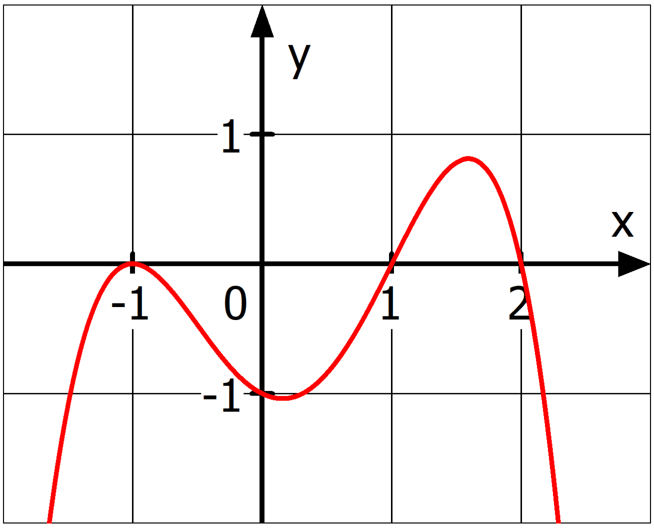
Beispiel 2: $f_2(x) = -0,5(x+2)^2x(x-1)^2$

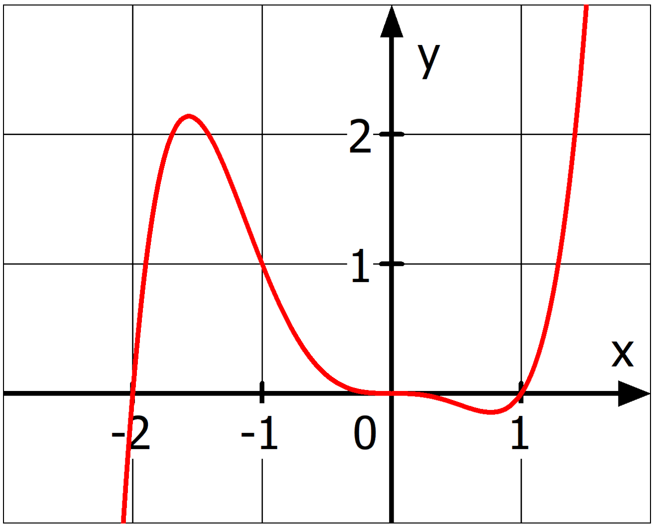
Beispiel 3: $f_3(x) = -x^3(x-2)$



Umgekehrt können wir ausgehend vom Schaubild die Funktionsgleichung aufstellen. Sind keine zusätzlichen Angaben zu den Vielfachheiten der Nullstellen gegeben, so probieren wir immer die kleinste mögliche Vielfachheit aus. Damit lässt sich dann die Funktionsgleichung mit Ausnahme des Leitkoeffizienten bestimmen. Dieser lässt sich mit einer Punktprobe berechnen.

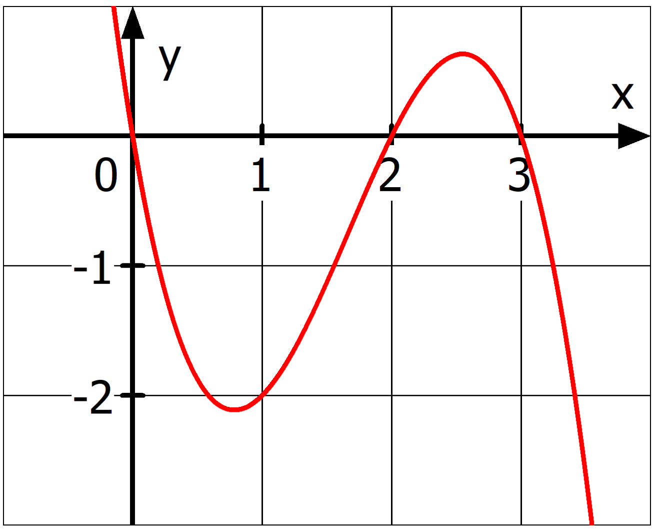
Beispiel 1:





Beispiel 2:

Beispiel 3:



Übung 29 Skizziere das Schaubild

a) $f(x) = 0,1(x+3)^2(x+1)(x-1)^3$

b) $g(x) = -\frac{1}{5}(x+4)(x+3)(x+1)x^2$

c) $h(x) = -(x+1)^3(x-1)^2(x-2)$

d) $i(x) = \frac{1}{3}x^2(x+1)(x-2)(x-3)^2$

e) $j(x) = \frac{1}{5}(x+2)x(x-2)^2$

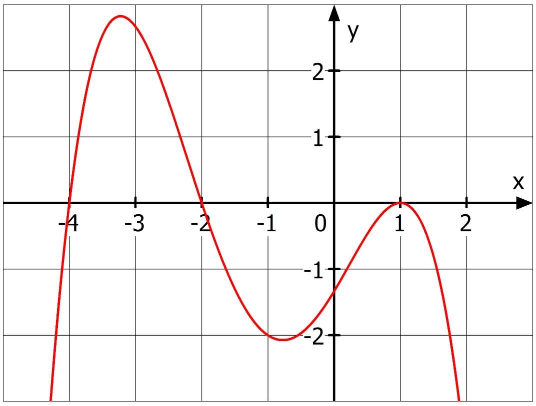
f) $k(x) = -x^3(x-2)^2$

g) $l(x) = \frac{1}{10}(x+4)^2x^2$

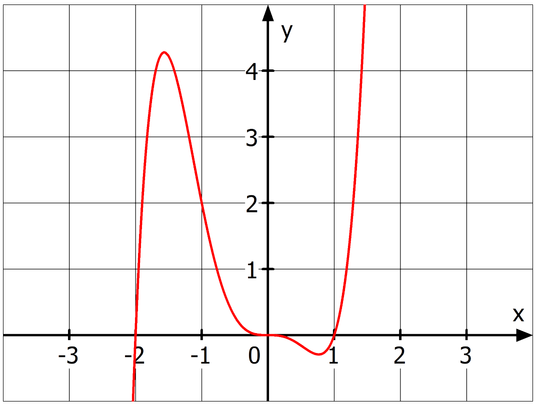
h) $m(x) = -\frac{3}{35}(x+5)(x+4)^2(x+2)x$

Übung 30 Stelle die Funktionsgleichung auf. Verwende jeweils die kleinstmögliche Vielfachheit.

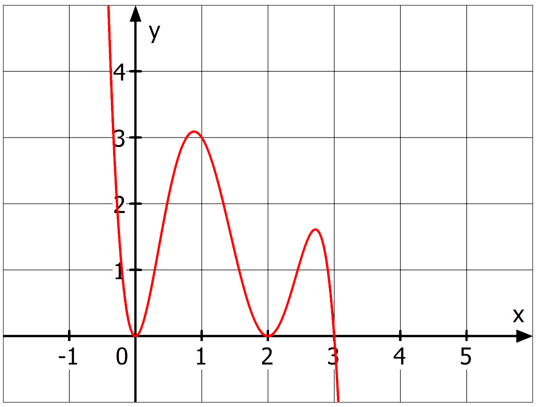
a)



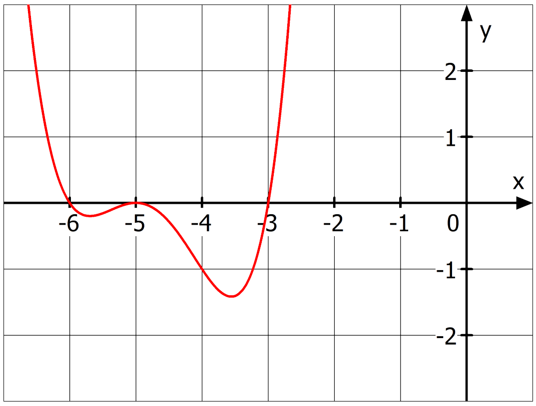
b)



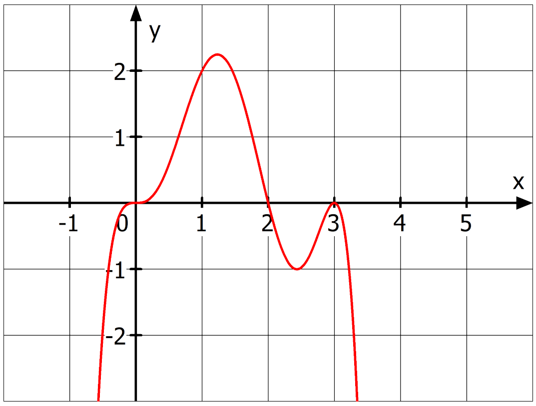
c)



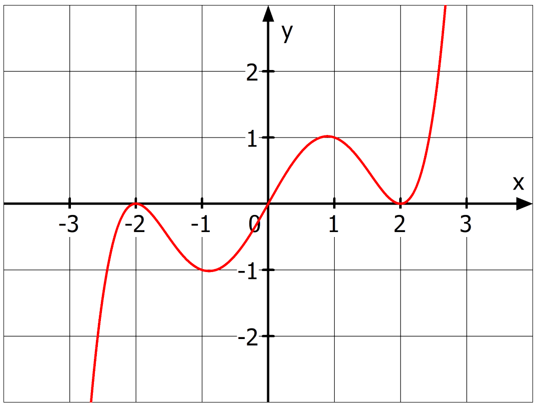
d)



e)

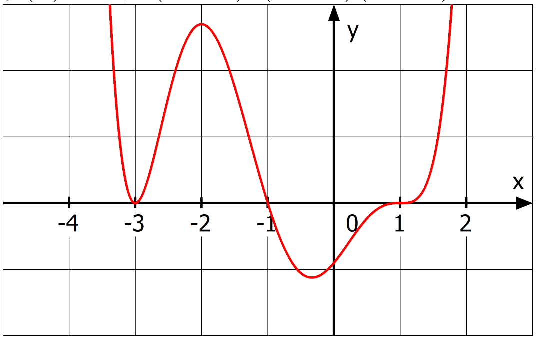


f)

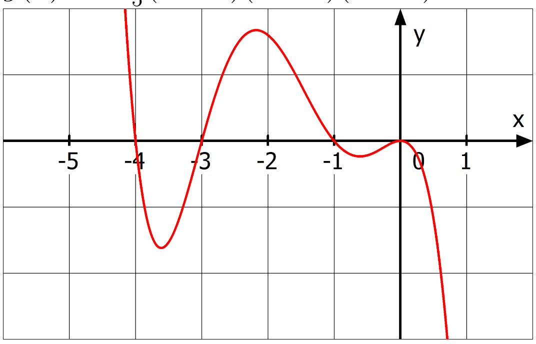


Lösung zu Übung 29

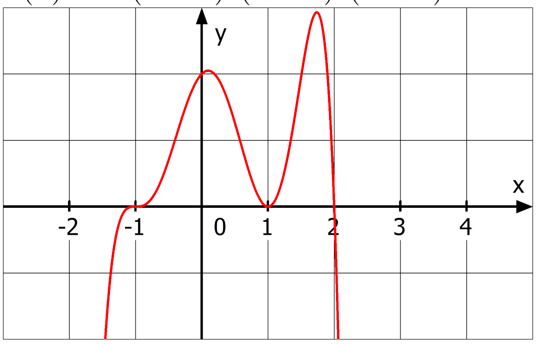
a) $f(x) = 0,1(x+3)^2(x+1)(x-1)^3$



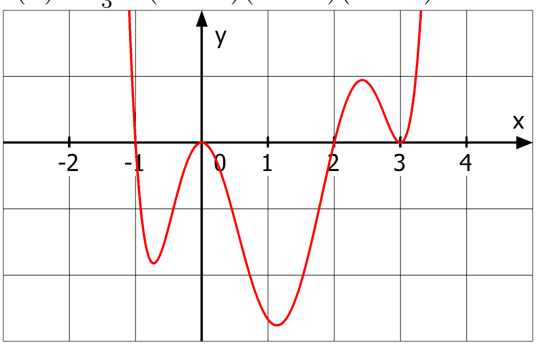
b) $g(x) = -\frac{1}{5}(x+4)(x+3)(x+1)x^2$



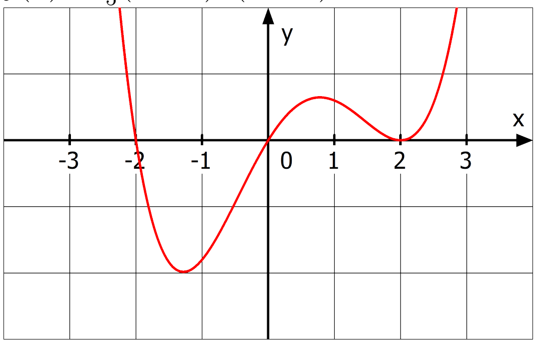
c) $h(x) = -(x+1)^3(x-1)^2(x-2)$



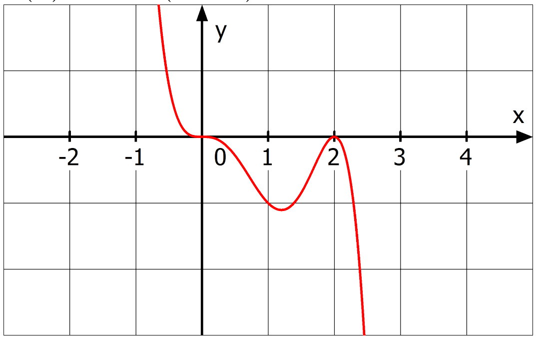
d) $i(x) = \frac{1}{3}x^2(x+1)(x-2)(x-3)^2$



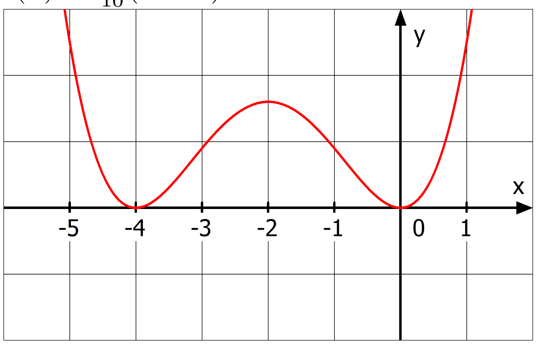
e) $j(x) = \frac{1}{5}(x+2)x(x-2)^2$



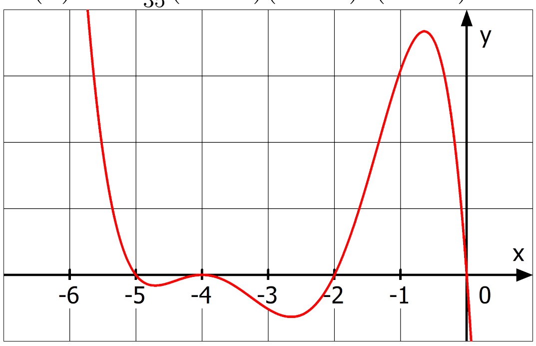
f) $k(x) = -x^3(x-2)^2$



g) $l(x) = \frac{1}{10}(x+4)^2x^2$



h) $m(x) = -\frac{3}{35}(x+5)(x+4)^2(x+2)x$



Lösung zu Übung 30

a) $f_a(x) = -\frac{1}{6}(x+4)(x+2)(x-1)^2$

b) $f_b(x) = (x+2)x^3(x-1)$

c) $f_c(x) = -\frac{3}{2}x^2(x-2)^2(x-3)$

d) $f_d(x) = \frac{1}{2}(x+6)(x+5)^2(x+3)$

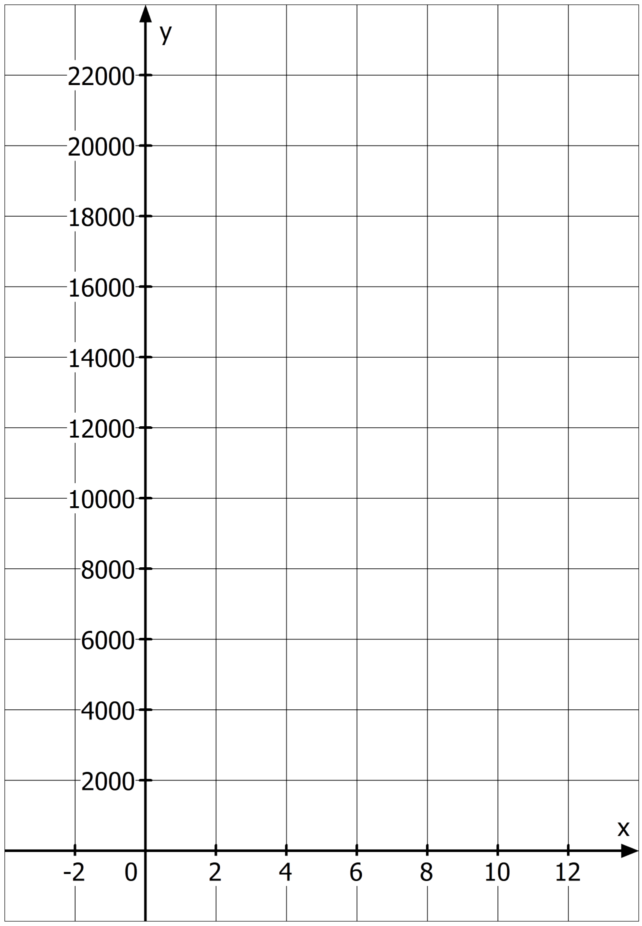
e) $f_e(x) = -\frac{1}{2}x^3(x-2)(x-3)^2$

f) $f_f(x) = \frac{1}{9}(x+2)^2x(x-2)^2$

Die Anzahl der Bakterien in einer Petrischale verdoppelt sich jede Stunde (bis die komplette Schale mit Bakterien bedeckt ist). Zu Beginn sind 10 Bakterien auf der Schale. Vervollständige die Tabelle:

x	0	1	2	3	4	5	6
$f(x)$	10	20					

$$f(x) =$$



Wie viele Bakterien sind nach 20h und nach 100h vorhanden?

Nach wie vielen Stunden waren 8000 Bakterien vorhanden?

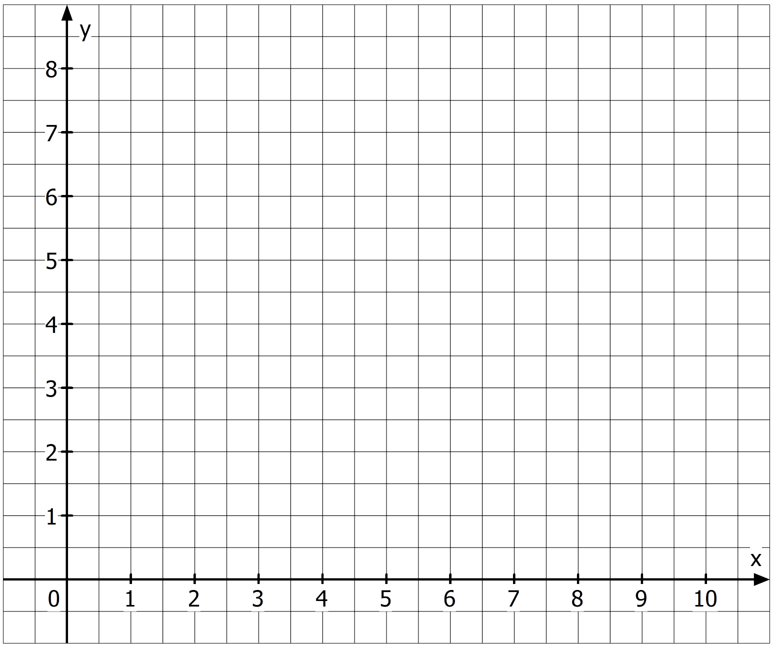
Exponentialfunktionen wie 2^x wachsen sehr schnell. Überlegen wir uns zur Illustration wie lange es dauern würde bis die komplette Erde ($m_{Erde} = 6 \cdot 10^{24} kg$) aus Bakterien bestehen würde, falls sie sich unbegrenzt vermehren könnten. 1.000.000.000.000.000 Bakterien wiegen 1g.

Das Isotop ^{207}Ra hat eine Halbwertszeit von ca. 1s, d.h. dass innerhalb einer Sekunde die Hälfte des radioaktiven Materials in andere Elemente zerfallen ist. Zu Beginn sind 8g Radium vorhanden. Vervollständige die Tabelle:

x	0	1	2	3	4	5	6
$f(x)$	8	4					

$$f(x) =$$

Wie viel g Radium sind nach 10s noch vorhanden, wie viel nach 1min?



Nach wie vielen Sekunden waren noch 0,3g Radium vorhanden?

Wie lange würde es dauern bis die Masse des Radiums die eines Bakteriums entspricht?

Mathematik

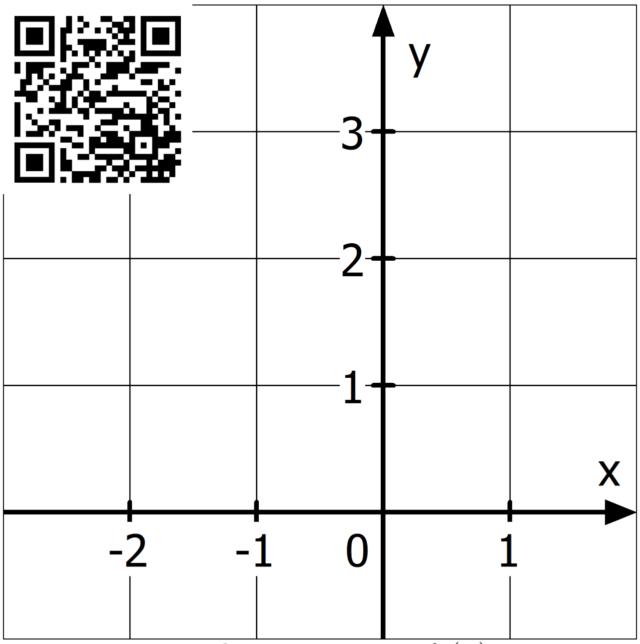
Exponentialfunktionen

Datum

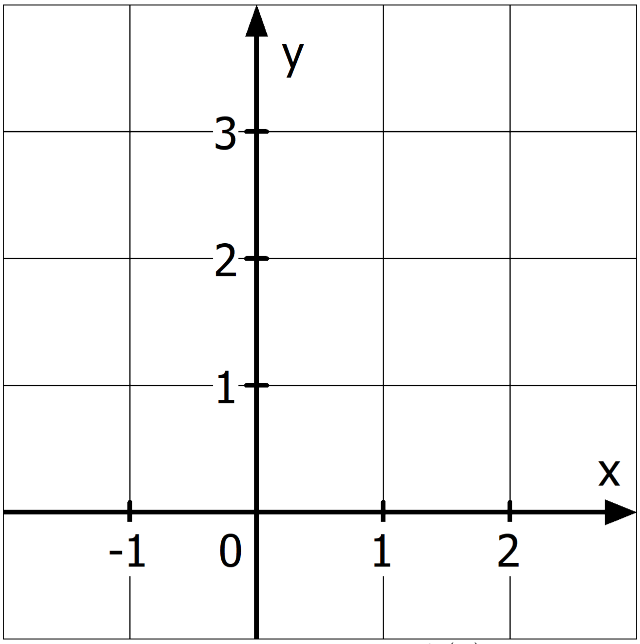
Wir werden im Folgenden als Basis nur die eulersche Zahl $e = 2,71828\ldots$ als Basis verwenden. Man kann jede Exponentialfunktion zur Basis e schreiben, indem man im Exponenten einen zusätzlichen Faktor hinzufügt, z.B. $f(x) = 10 \cdot 2^x = 10 \cdot e^{\ln(2)\cdot x}$. Dabei ist $\ln(2) = \log_e(2)$ der Logarithmus zur Basis e. Diesen werden wir später noch genauer betrachten.

Wie die parabelförmigen und S-förmigen Schaubilder bei den ganzrationalen Funktionen, bilden die folgenden 4 Schaubilder die Grundbausteine, um Schaubilder zu skizzieren.

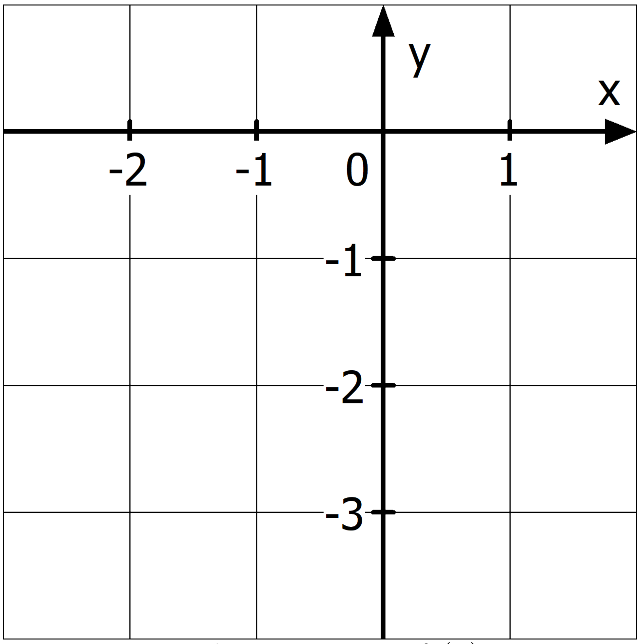
Die Funktion $f(x) = a \cdot e^{k\cdot x}$, $a \neq 0$, $k \neq 0$ nimmt in Abhängigkeit der Vorzeichen von a und k folgende vier Formen an:



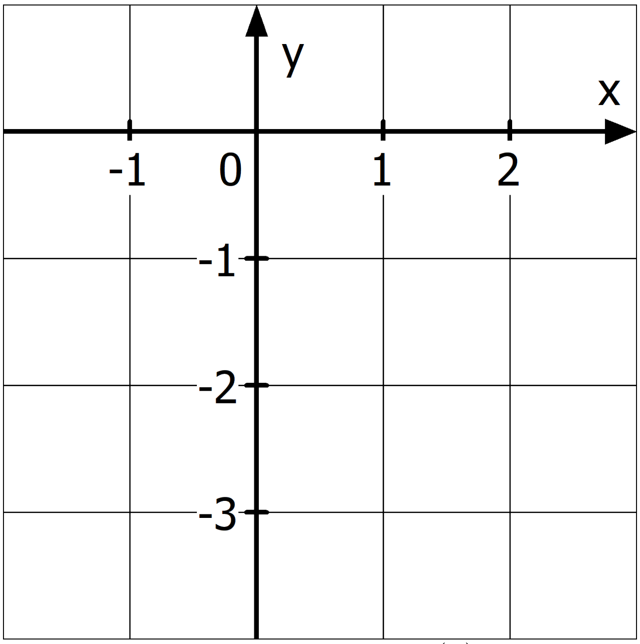
a positiv, k positiv, z.B. $f_1(x) = e^x$



a positiv, k negativ, z.B. $f_2(x) = e^{-x}$



a negativ, k positiv, z.B. $f_3(x) = -e^x$



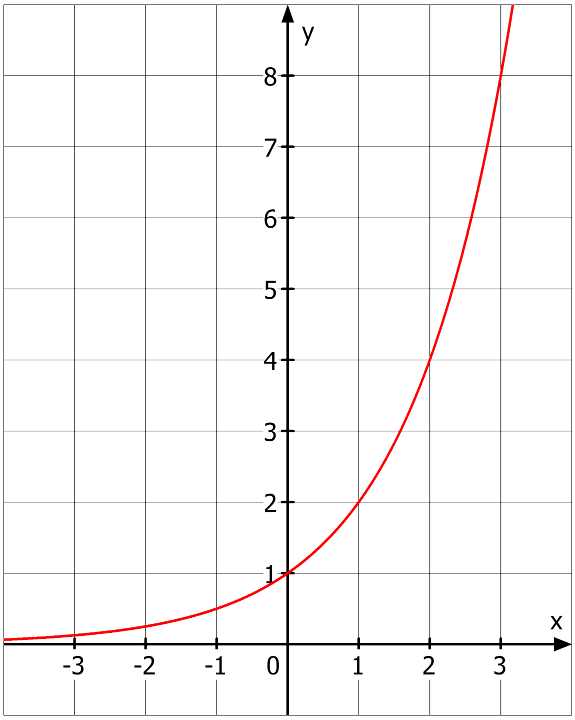
a negativ, k negativ, z.B. $f_4(x) = -e^{-x}$

Wichtiger Funktionswert von e^x:

$$\boldsymbol{e^0 =}$$

Zur Einführung der neuen Begriffe Asymptote und Monotonie betrachten wir als Beispiel $f(x) = e^{\ln(2)\cdot x} = 2^x$:

Asymptote



Verhalten für $x \to \pm\infty$

Monotonie

Übung 31 **Bestimme den y-Achsenabschnitt, skizziere das Schaubild, gib die Asymptote, das Verhalten für $x \to \pm\infty$ und die Monotonie an**

a) $f(x) = e^{2x}$
b) $f(x) = -3e^{\frac{1}{2}x}$
c) $f(x) = -4e^{-2x}$
d) $f(x) = 2e^{-7x}$
e) $f(x) = -\frac{5}{3}e^{x}$
f) $f(x) = 8e^{-3x}$
g) $f(x) = -3e^{-\frac{9}{8}x}$
h) $f(x) = \frac{3}{5}e^{0,2x}$
i) $f(x) = -0,5e^{-3,5x}$
j) $f(x) = -8e^{\frac{1}{10}x}$
k) $f(x) = 2e^{-2x}$
l) $f(x) = -4e^{-7x}$
m) $f(x) = -\frac{5}{7}e^{x}$
n) $f(x) = 6e^{-4x}$
o) $f(x) = -2e^{-8x}$
p) $f(x) = 5,3e^{0,2x}$
q) $f(x) = -\frac{1}{4}e^{-\frac{2}{3}x}$
r) $f(x) = -2e^{0,2x}$
s) $f(x) = 1,8e^{-4x}$
t) $f(x) = 5e^{7x}$
u) $f(x) = -\frac{8}{3}e^{\frac{3}{8}x}$
v) $f(x) = -0,1e^{-0,3x}$
w) $f(x) = 10e^{-4x}$
x) $f(x) = -5e^{6x}$
y) $f(x) = -0,9e^{-1,1x}$
z) $f(x) = \frac{11}{6}e^{\frac{8}{7}x}$

Lösung zu Übung 31

a) $f(x) = e^{2x}$

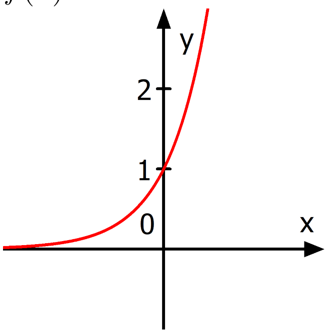
Asymptote $y = 0$

y-Achsenabschnitt: $f(0) = 1$

Monoton wachsend

$f(x) \xrightarrow{x\to-\infty} 0$

$f(x) \xrightarrow{x\to\infty} \infty$



b) $f(x) = -3e^{\frac{1}{2}x}$

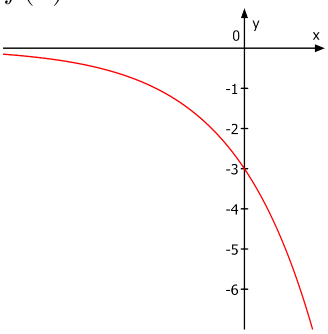
Asymptote $y = 0$

y-Achsenabschnitt: $f(0) = -3$

Monoton fallend

$f(x) \xrightarrow{x\to-\infty} 0$

$f(x) \xrightarrow{x\to\infty} -\infty$



c) $f(x) = -4e^{-2x}$

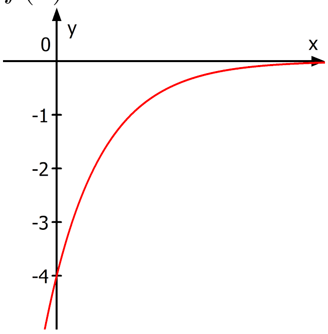
Asymptote $y = 0$

y-Achsenabschnitt: $f(0) = -4$

Monoton wachsend

$f(x) \xrightarrow{x\to-\infty} -\infty$

$f(x) \xrightarrow{x\to\infty} 0$



d) $f(x) = 2e^{-7x}$

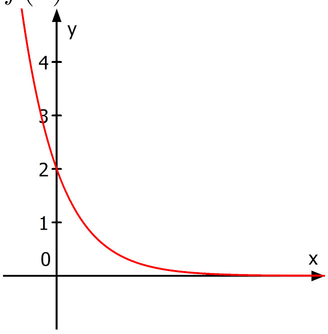
Asymptote $y = 0$

y-Achsenabschnitt: $f(0) = 2$

Monoton fallend

$f(x) \xrightarrow{x\to-\infty} \infty$

$f(x) \xrightarrow{x\to\infty} 0$



e) $f(x) = -\frac{5}{3}e^{x}$

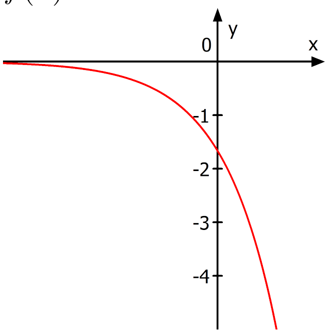
Asymptote $y = 0$

y-Achsenabschnitt: $f(0) = -\frac{5}{3}$

Monoton fallend

$f(x) \xrightarrow{x\to-\infty} 0$

$f(x) \xrightarrow{x\to\infty} -\infty$



f) $f(x) = 8e^{-3x}$

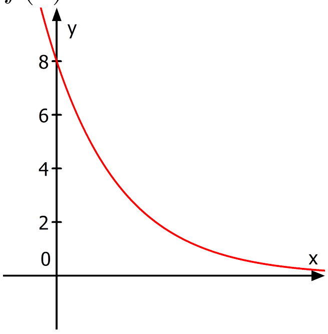
Asymptote $y = 0$

y-Achsenabschnitt: $f(0) = 8$

Monoton fallend

$f(x) \xrightarrow{x\to-\infty} \infty$

$f(x) \xrightarrow{x\to\infty} 0$



g) $f(x) = -3e^{-\frac{9}{8}x}$

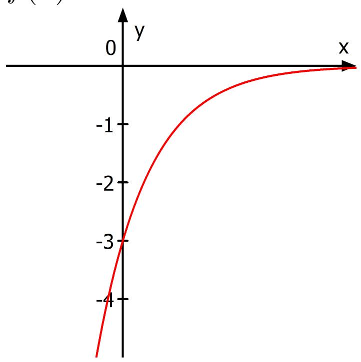
Asymptote $y = 0$

y-Achsenabschnitt: $f(0) = -3$

Monoton wachsend

$f(x) \xrightarrow{x \to -\infty} -\infty$

$f(x) \xrightarrow{x \to \infty} 0$



h) $f(x) = \frac{3}{5}e^{0,2x}$

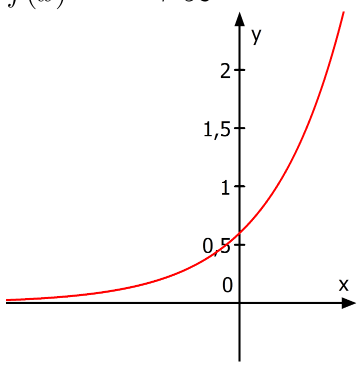
Asymptote $y = 0$

y-Achsenabschnitt: $f(0) = \frac{3}{5}$

Monoton wachsend

$f(x) \xrightarrow{x \to -\infty} 0$

$f(x) \xrightarrow{x \to \infty} \infty$



i) $f(x) = -0,5e^{-3,5x}$

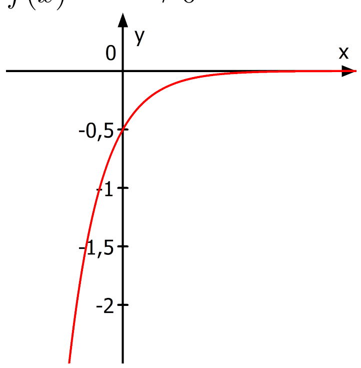
Asymptote $y = 0$

y-Achsenabschnitt: $f(0) = -0,5$

Monoton wachsend

$f(x) \xrightarrow{x \to -\infty} -\infty$

$f(x) \xrightarrow{x \to \infty} 0$



j) $f(x) = -8e^{\frac{1}{10}x}$

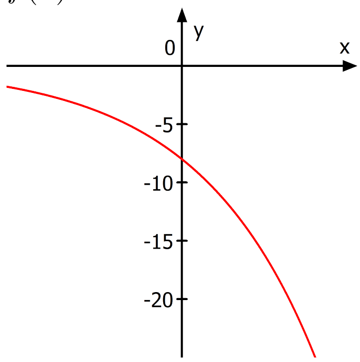
Asymptote $y = 0$

y-Achsenabschnitt: $f(0) = -8$

Monoton fallend

$f(x) \xrightarrow{x \to -\infty} 0$

$f(x) \xrightarrow{x \to \infty} -\infty$



k) $f(x) = 2e^{-2x}$

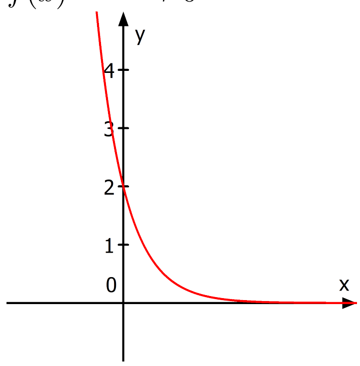
Asymptote $y = 0$

y-Achsenabschnitt: $f(0) = 2$

Monoton fallend

$f(x) \xrightarrow{x \to -\infty} \infty$

$f(x) \xrightarrow{x \to \infty} 0$



l) $f(x) = -4e^{-7x}$

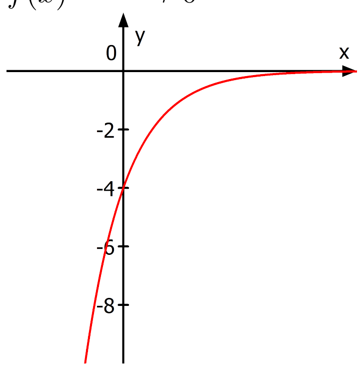
Asymptote $y = 0$

y-Achsenabschnitt: $f(0) = -4$

Monoton wachsend

$f(x) \xrightarrow{x \to -\infty} -\infty$

$f(x) \xrightarrow{x \to \infty} 0$



m) $f(x) = -\frac{5}{7}e^x$

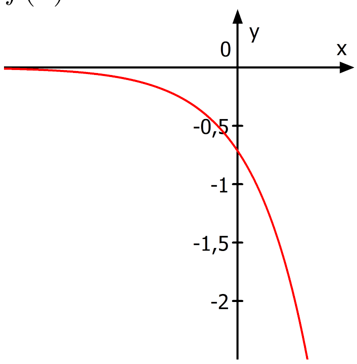
Asymptote $y = 0$

y-Achsenabschnitt: $f(0) = -\frac{5}{7}$

Monoton fallend

$f(x) \xrightarrow{x\to-\infty} 0$

$f(x) \xrightarrow{x\to\infty} -\infty$



p) $f(x) = 5,3e^{0,2x}$

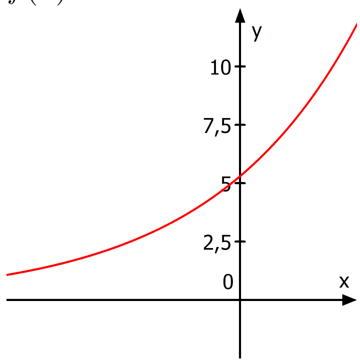
Asymptote $y = 0$

y-Achsenabschnitt: $f(0) = 5,3$

Monoton wachsend

$f(x) \xrightarrow{x\to-\infty} 0$

$f(x) \xrightarrow{x\to\infty} \infty$



n) $f(x) = 6e^{-4x}$

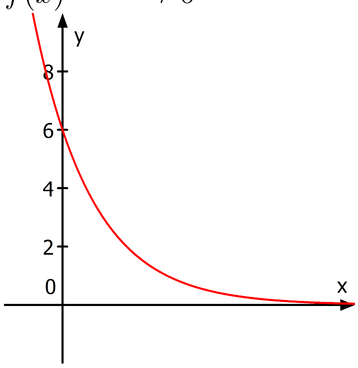
Asymptote $y = 0$

y-Achsenabschnitt: $f(0) = 6$

Monoton fallend

$f(x) \xrightarrow{x\to-\infty} \infty$

$f(x) \xrightarrow{x\to\infty} 0$



q) $f(x) = -\frac{1}{4}e^{-\frac{2}{3}x}$

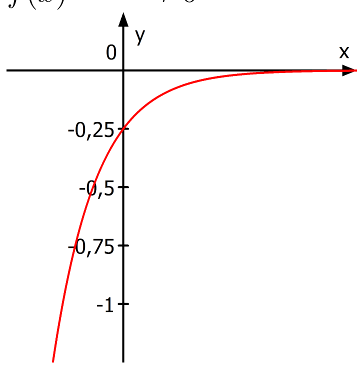
Asymptote $y = 0$

y-Achsenabschnitt: $f(0) = -\frac{1}{4}$

Monoton wachsend

$f(x) \xrightarrow{x\to-\infty} -\infty$

$f(x) \xrightarrow{x\to\infty} 0$



o) $f(x) = -2e^{-8x}$

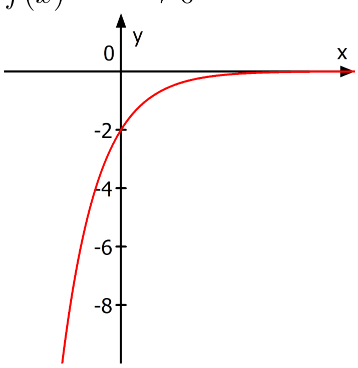
Asymptote $y = 0$

y-Achsenabschnitt: $f(0) = -2$

Monoton wachsend

$f(x) \xrightarrow{x\to-\infty} -\infty$

$f(x) \xrightarrow{x\to\infty} 0$



r) $f(x) = -2e^{0,2x}$

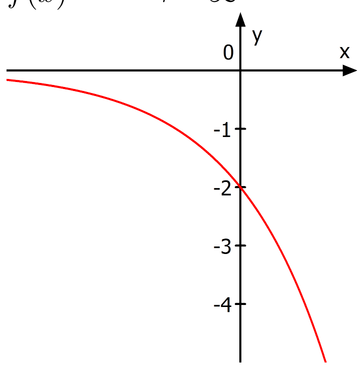
Asymptote $y = 0$

y-Achsenabschnitt: $f(0) = -2$

Monoton fallend

$f(x) \xrightarrow{x\to-\infty} 0$

$f(x) \xrightarrow{x\to\infty} -\infty$



s) $f(x) = 1,8e^{-4x}$

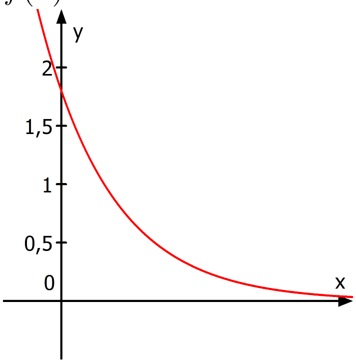
Asymptote $y = 0$

y-Achsenabschnitt: $f(0) = 1,8$

Monoton fallend

$f(x) \xrightarrow{x \to -\infty} \infty$

$f(x) \xrightarrow{x \to \infty} 0$



t) $f(x) = 5e^{7x}$

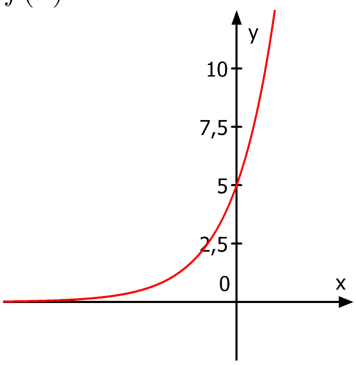
Asymptote $y = 0$

y-Achsenabschnitt: $f(0) = 5$

Monoton wachsend

$f(x) \xrightarrow{x \to -\infty} 0$

$f(x) \xrightarrow{x \to \infty} \infty$



u) $f(x) = -\frac{8}{3}e^{\frac{3}{8}x}$

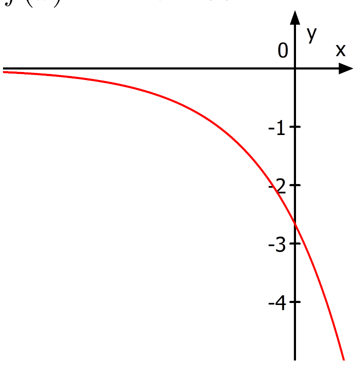
Asymptote $y = 0$

y-Achsenabschnitt: $f(0) = -\frac{8}{3}$

Monoton fallend

$f(x) \xrightarrow{x \to -\infty} 0$

$f(x) \xrightarrow{x \to \infty} -\infty$



v) $f(x) = -0,1^{-0,3x}$

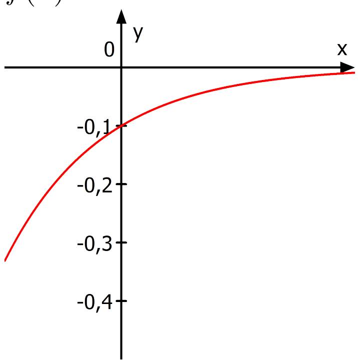
Asymptote $y = 0$

y-Achsenabschnitt: $f(0) = -0,1$

Monoton wachsend

$f(x) \xrightarrow{x \to -\infty} -\infty$

$f(x) \xrightarrow{x \to \infty} 0$



w) $f(x) = 10e^{-4x}$

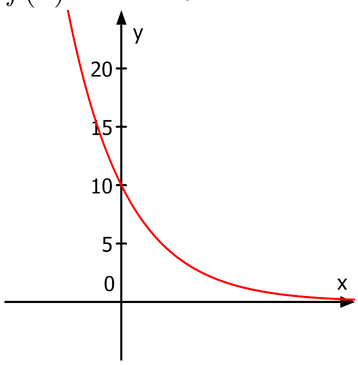
Asymptote $y = 0$

y-Achsenabschnitt: $f(0) = 10$

Monoton fallend

$f(x) \xrightarrow{x \to -\infty} \infty$

$f(x) \xrightarrow{x \to \infty} 0$



x) $f(x) = -5e^{6x}$

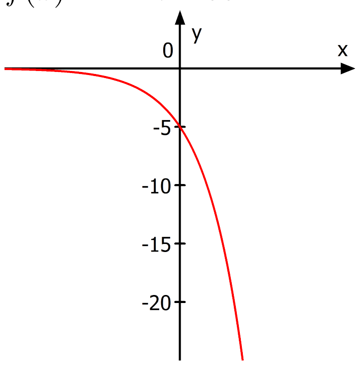
Asymptote $y = 0$

y-Achsenabschnitt: $f(0) = -5$

Monoton fallend

$f(x) \xrightarrow{x \to -\infty} 0$

$f(x) \xrightarrow{x \to \infty} -\infty$



y) $f(x) = -0,9e^{-1,1x}$

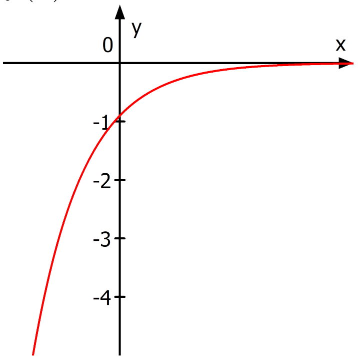
Asymptote $y = 0$

y-Achsenabschnitt: $f(0) = -0,9$

Monoton wachsend

$f(x) \xrightarrow{x \to -\infty} -\infty$

$f(x) \xrightarrow{x \to \infty} 0$



z) $f(x) = \frac{11}{6}e^{\frac{8}{7}x}$

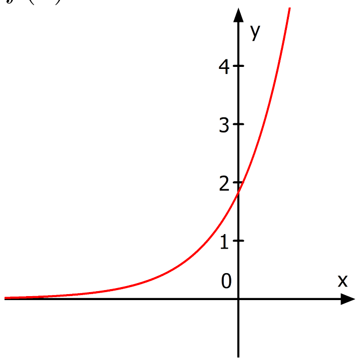
Asymptote $y = 0$

y-Achsenabschnitt: $f(0) = \frac{11}{6}$

Monoton wachsend

$f(x) \xrightarrow{x \to -\infty} 0$

$f(x) \xrightarrow{x \to \infty} \infty$

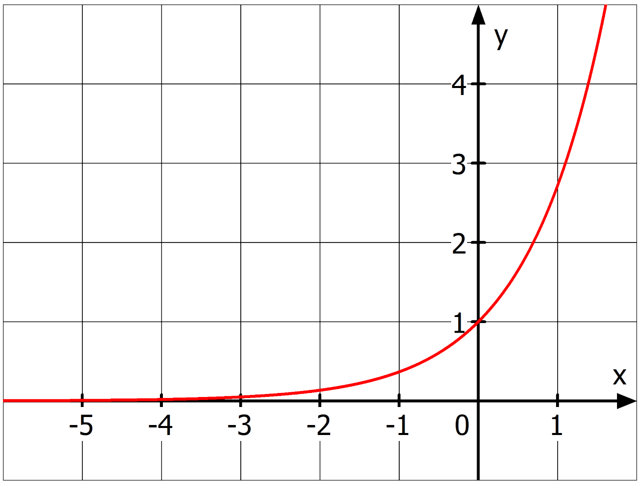


Mathematik

Waagrechte Asymptoten

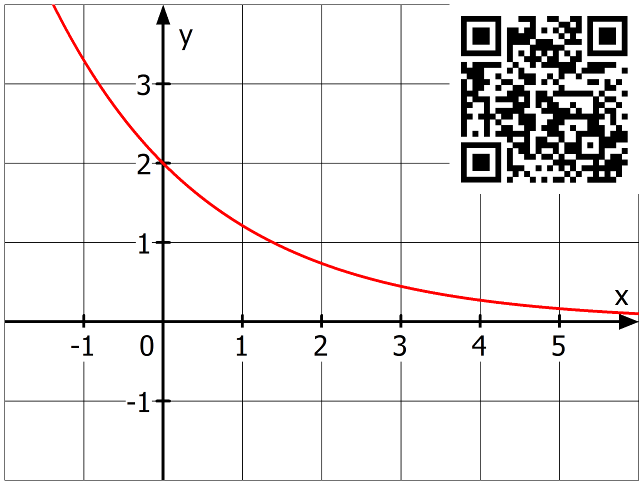
Datum

Jede Funktion vom Typ $f(x) = a \cdot e^{kx}$ hat als Asymptote die x-Achse $y = 0$. Verschiebt man die Funktion nun um b in y-Richtung, so verschiebt sich die Asymptote ebenfalls um b:



$f_1(x) = e^x$ um 2 nach oben verschoben:

$f_2(x) = e^x + 2$ mit Asymptote $y = 2$



$f_3(x) = 2e^{-0,5x}$ um 1 nach unten verschoben:

$f_4(x) = 2e^{-0,5x} - 1$ mit Asymptote $y = -1$

Für viele Aufgabenstellungen ist eine Skizze hilfreich, die sich wie folgt erstellen lässt. Als Beispiel verwenden wir $f(x) = -2e^{\frac{1}{3}x} + 3$:

1) Asymptote ablesen:

   Asymptote

2) y-Achsenabschnitt berechnen:

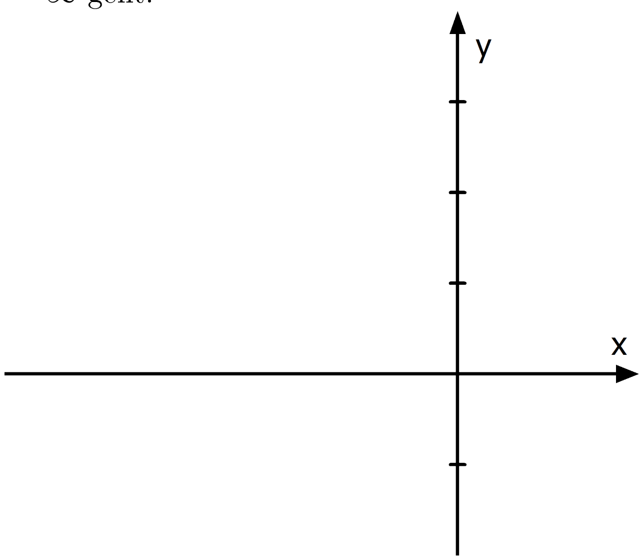
   y-Achsenabschnitt:

3) Form an Hand der Vorzeichen von a und k bestimmen

   Aus $a = -2$ negativ und $k = \frac{1}{3}$ positiv folgt, dass das Schaubild sich nach links von unten der Asymptote nähert und nach rechts gegen $-\infty$ geht.

4) Asymptote ins Koordinatensystem einzeichnen und y-Achsenabschnitt markieren

5) Schaubild der Funktion skizzieren



Übung 32 **Bestimme den y-Achsenabschnitt, skizziere das Schaubild, gib die Asymptote, das Verhalten für $x \to \pm\infty$ und die Monotonie an**

a) $f(x) = e^{-2x} - 3$
b) $f(x) = 2e^{\frac{1}{2}x} + 1$
c) $f(x) = -3e^{2x} + 6$
d) $f(x) = -2e^{-7x} - 1$
e) $f(x) = \frac{5}{2}e^{2x} - 2$
f) $f(x) = -8e^{3x} + 8$
g) $f(x) = 2e^{-\frac{3}{8}x} - 5$
h) $f(x) = -\frac{3}{2}e^{0,2x} + 2$
i) $f(x) = -5e^{-3,5x} + 5$
j) $f(x) = -8e^{0,3x} + 6$
k) $f(x) = 2e^{-2x} + 2$
l) $f(x) = -6 + 4e^{-7x}$
m) $f(x) = 8 - 5e^{x}$
n) $f(x) = -4e^{-2x} - 2$
o) $f(x) = 2e^{-3x} + 4$
p) $f(x) = 5e^{0,2x} - 10$
q) $f(x) = -\frac{1}{4}e^{-\frac{2}{3}x} + \frac{7}{4}$
r) $f(x) = 2e^{-0,2x} + 3,5$
s) $f(x) = e^{-4x} + 3$
t) $f(x) = -4 + 5e^{7x}$
u) $f(x) = \frac{3}{2} - \frac{9}{4}e^{\frac{3}{8}x}$
v) $f(x) = -2(1 + e^{-0,3x})$
w) $f(x) = 5\left(e^{-4x} + \frac{1}{2}\right)$
x) $f(x) = -2(2e^{6x} - 2)$
y) $f(x) = -e^{-1,1x} + 3(e^{-1,1x} - 2)$
z) $f(x) = 4(0,25e^{1,25x} + 2) - 8$

Lösung zu Übung 32

a) $f(x) = e^{-2x} - 3$

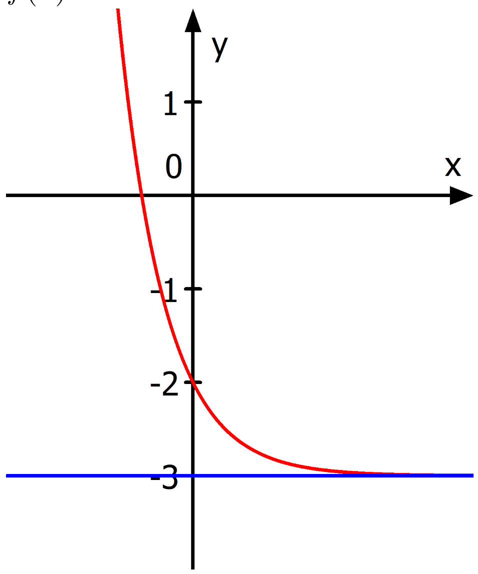
Asymptote $y = -3$

y-Achsenabschnitt: $f(0) = -2$

Monoton fallend

$f(x) \xrightarrow{x\to-\infty} \infty$

$f(x) \xrightarrow{x\to\infty} -3$



c) $f(x) = -3e^{2x} + 6$

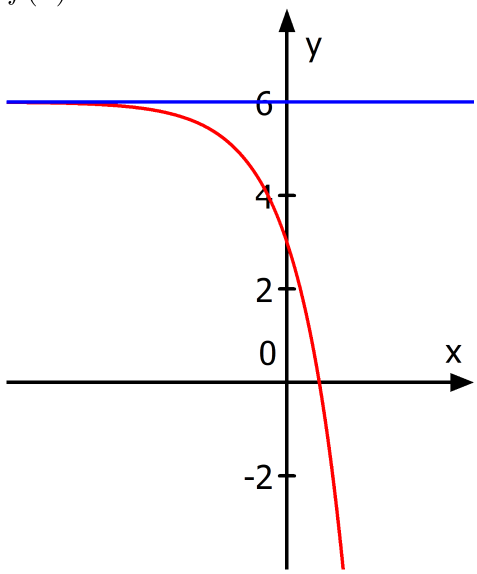
Asymptote $y = 6$

y-Achsenabschnitt: $f(0) = 3$

Monoton fallend

$f(x) \xrightarrow{x\to-\infty} 6$

$f(x) \xrightarrow{x\to\infty} -\infty$



b) $f(x) = 2e^{\frac{1}{2}x} + 1$

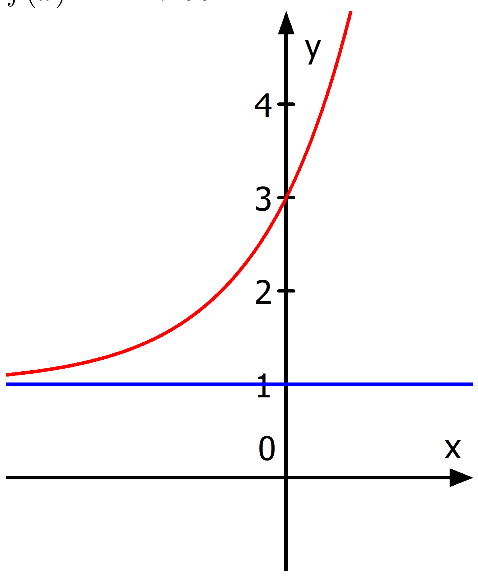
Asymptote $y = 1$

y-Achsenabschnitt: $f(0) = 3$

Monoton wachsend

$f(x) \xrightarrow{x\to-\infty} 1$

$f(x) \xrightarrow{x\to\infty} \infty$



d) $f(x) = -2e^{-7x} - 1$

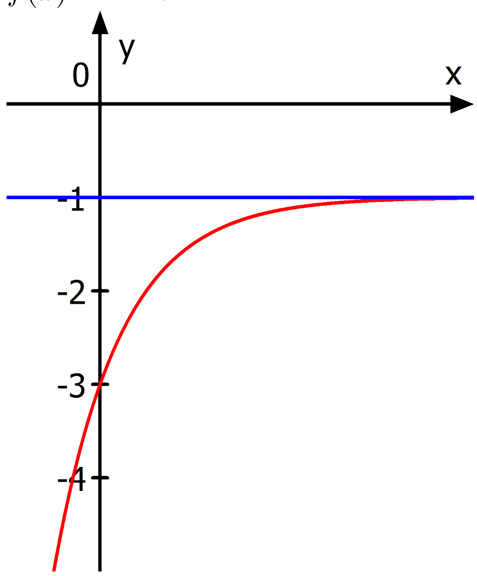
Asymptote $y = -1$

y-Achsenabschnitt: $f(0) = -3$

Monoton wachsend

$f(x) \xrightarrow{x\to-\infty} -\infty$

$f(x) \xrightarrow{x\to\infty} -1$



e) $f(x) = \frac{5}{2}e^{2x} - 2$

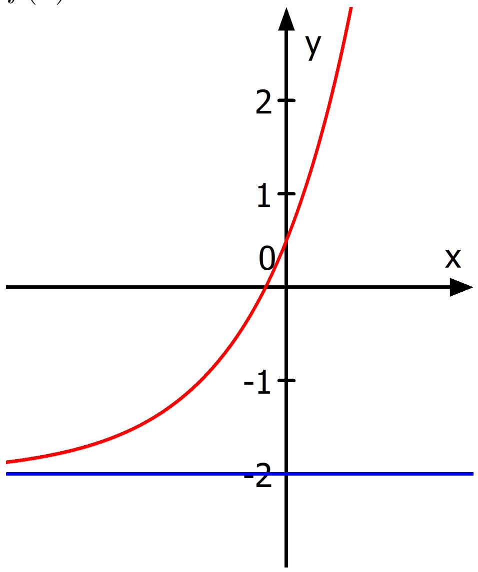
Asymptote $y = -2$

y-Achsenabschnitt: $f(0) = \frac{1}{2}$

Monoton wachsend

$f(x) \xrightarrow{x \to -\infty} -2$

$f(x) \xrightarrow{x \to \infty} \infty$



f) $f(x) = -8e^{3x} + 8$

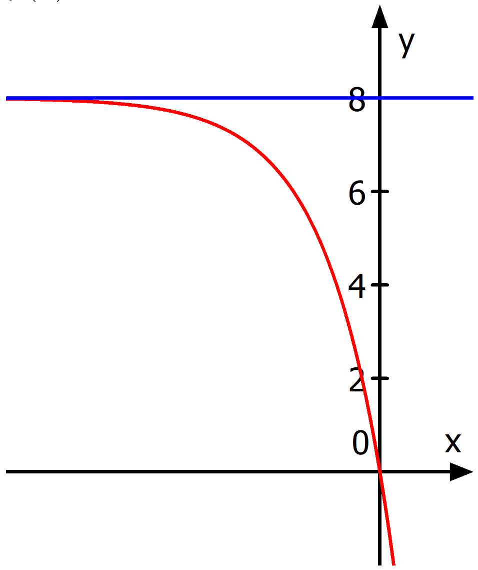
Asymptote $y = 8$

y-Achsenabschnitt: $f(0) = 0$

Monoton fallend

$f(x) \xrightarrow{x \to -\infty} 8$

$f(x) \xrightarrow{x \to \infty} -\infty$



g) $f(x) = 2e^{-\frac{3}{8}x} - 5$

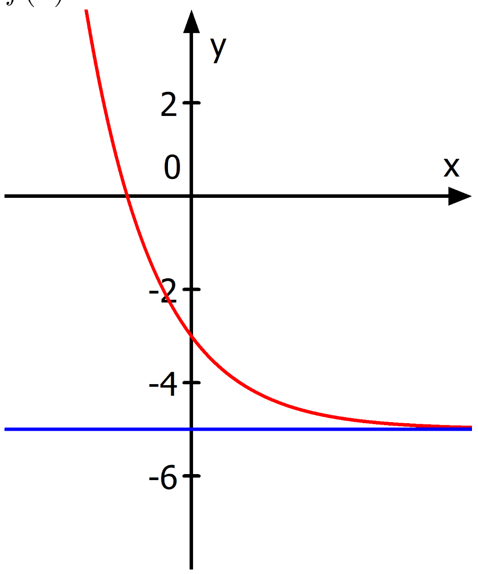
Asymptote $y = -5$

y-Achsenabschnitt: $f(0) = -3$

Monoton fallend

$f(x) \xrightarrow{x \to -\infty} \infty$

$f(x) \xrightarrow{x \to \infty} -5$



h) $f(x) = -\frac{3}{2}e^{0,2x} + 2$

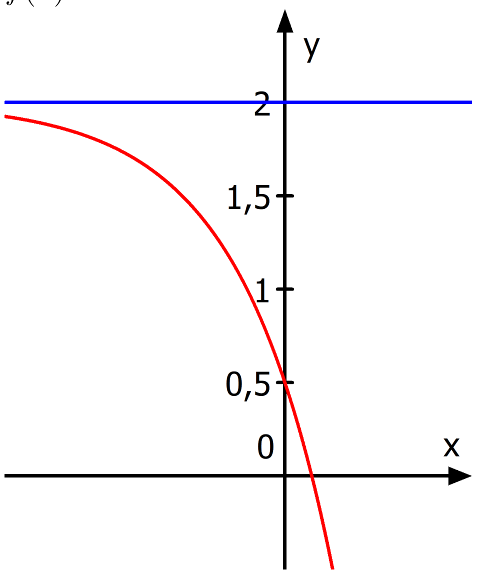
Asymptote $y = 2$

y-Achsenabschnitt: $f(0) = \frac{1}{2}$

Monoton fallend

$f(x) \xrightarrow{x \to -\infty} 2$

$f(x) \xrightarrow{x \to \infty} -\infty$



i) $f(x) = -5e^{-3{,}5x} + 5$

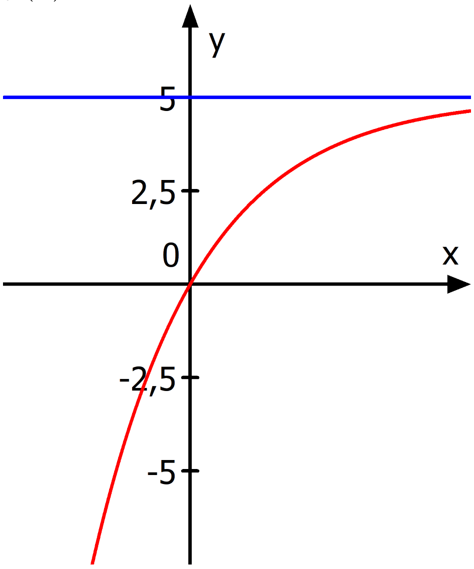
Asymptote $y = 5$

y-Achsenabschnitt: $f(0) = 0$

Monoton wachsend

$f(x) \xrightarrow{x\to-\infty} -\infty$

$f(x) \xrightarrow{x\to\infty} 5$



k) $f(x) = 2e^{-2x} + 2$

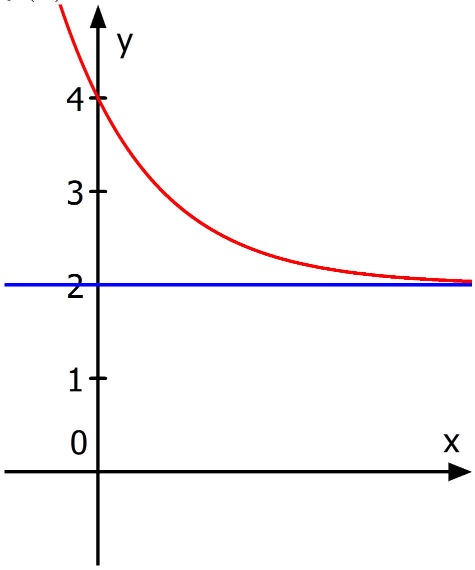
Asymptote $y = 2$

y-Achsenabschnitt: $f(0) = 4$

Monoton fallend

$f(x) \xrightarrow{x\to-\infty} \infty$

$f(x) \xrightarrow{x\to\infty} 2$



j) $f(x) = -8e^{0{,}3x} + 6$

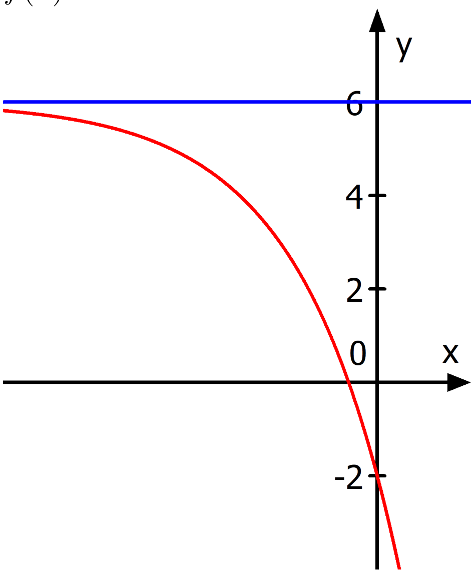
Asymptote $y = 6$

y-Achsenabschnitt: $f(0) = -2$

Monoton fallend

$f(x) \xrightarrow{x\to-\infty} 6$

$f(x) \xrightarrow{x\to\infty} -\infty$



l) $f(x) = -6 + 4e^{-7x}$

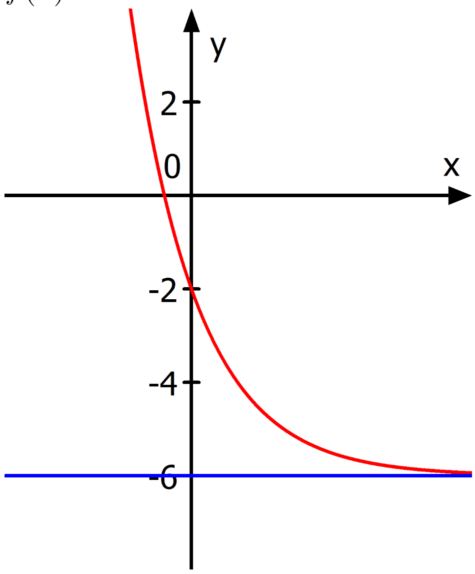
Asymptote $y = -6$

y-Achsenabschnitt: $f(0) = -2$

Monoton fallend

$f(x) \xrightarrow{x\to-\infty} \infty$

$f(x) \xrightarrow{x\to\infty} -6$



m) $f(x) = 8 - 5e^{x}$

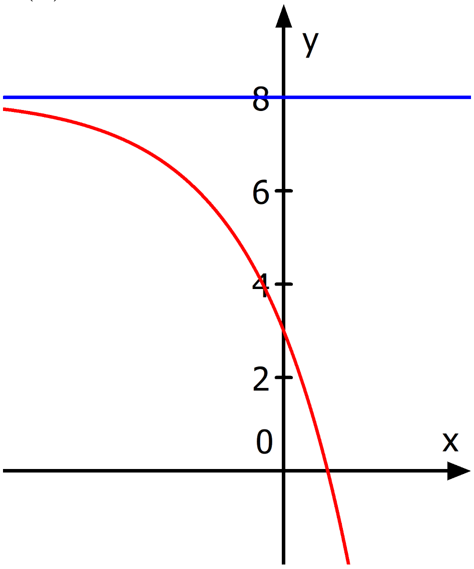
Asymptote $y = 8$

y-Achsenabschnitt: $f(0) = 3$

Monoton fallend

$f(x) \xrightarrow{x \to -\infty} 8$

$f(x) \xrightarrow{x \to \infty} -\infty$



o) $f(x) = 2e^{-3x} + 4$

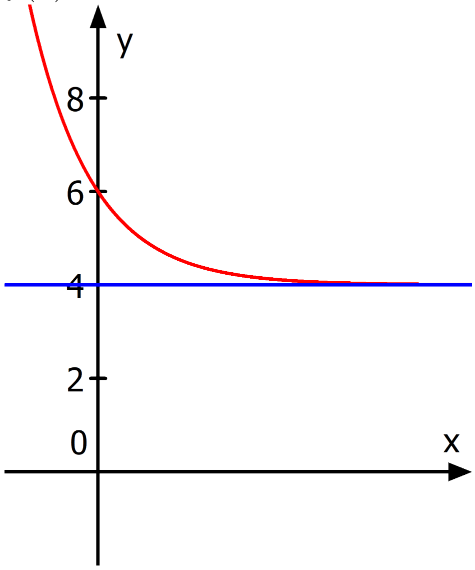
Asymptote $y = 4$

y-Achsenabschnitt: $f(0) = 6$

Monoton fallend

$f(x) \xrightarrow{x \to -\infty} \infty$

$f(x) \xrightarrow{x \to \infty} 4$



n) $f(x) = -4e^{-2x} - 2$

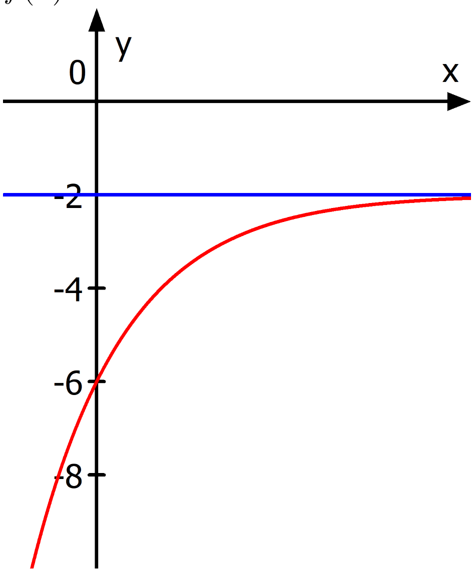
Asymptote $y = -2$

y-Achsenabschnitt: $f(0) = -6$

Monoton wachsend

$f(x) \xrightarrow{x \to -\infty} -\infty$

$f(x) \xrightarrow{x \to \infty} -2$



p) $f(x) = 5e^{0,2x} - 10$

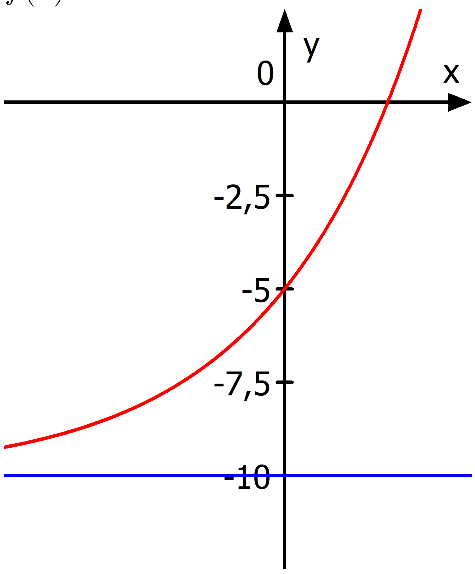
Asymptote $y = -10$

y-Achsenabschnitt: $f(0) = -5$

Monoton wachsend

$f(x) \xrightarrow{x \to -\infty} -10$

$f(x) \xrightarrow{x \to \infty} \infty$



q) $f(x) = -\frac{1}{4}e^{-\frac{2}{3}x} + \frac{7}{4}$

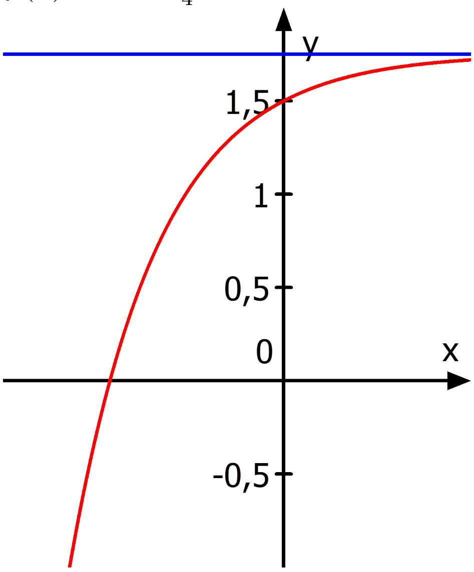
Asymptote $y = \frac{7}{4}$

y-Achsenabschnitt: $f(0) = \frac{3}{2}$

Monoton wachsend

$f(x) \xrightarrow{x\to-\infty} -\infty$

$f(x) \xrightarrow{x\to\infty} \frac{7}{4}$



r) $f(x) = 2e^{-0,2x} + 3,5$

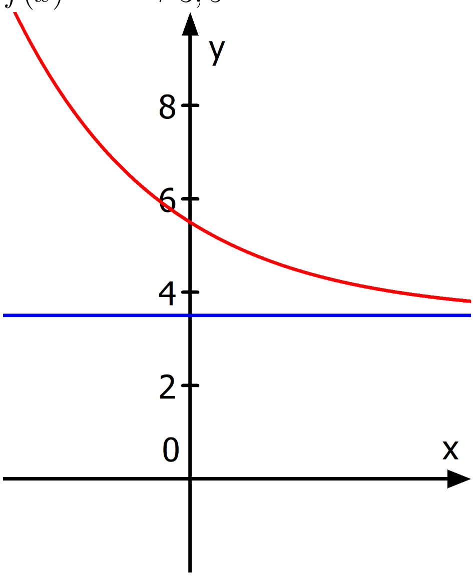
Asymptote $y = 3,5$

y-Achsenabschnitt: $f(0) = 5,5$

Monoton fallend

$f(x) \xrightarrow{x\to-\infty} \infty$

$f(x) \xrightarrow{x\to\infty} 3,5$



s) $f(x) = e^{-4x} + 3$

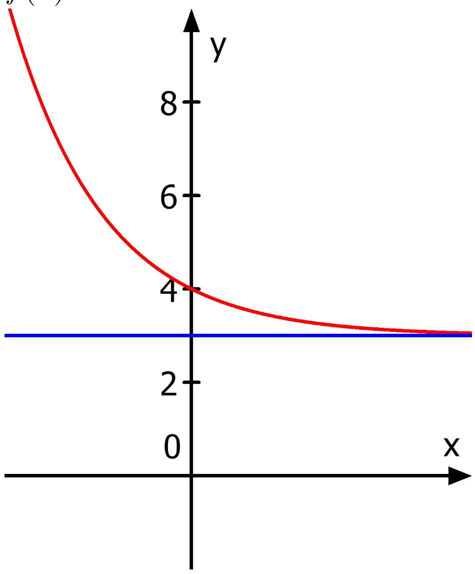
Asymptote $y = 3$

y-Achsenabschnitt: $f(0) = 4$

Monoton fallend

$f(x) \xrightarrow{x\to-\infty} \infty$

$f(x) \xrightarrow{x\to\infty} 3$



t) $f(x) = -4 + 5e^{7x}$

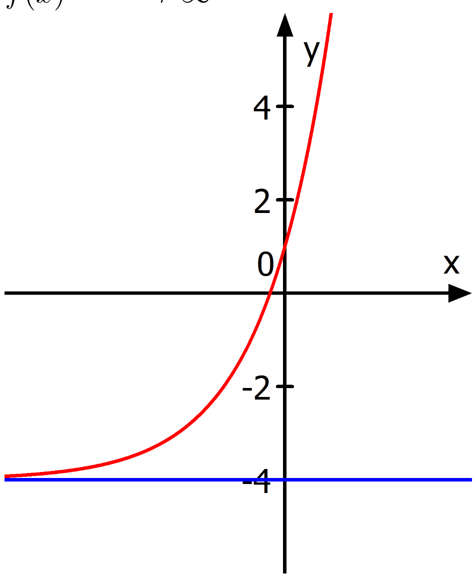
Asymptote $y = -4$

y-Achsenabschnitt: $f(0) = 1$

Monoton wachsend

$f(x) \xrightarrow{x\to-\infty} -4$

$f(x) \xrightarrow{x\to\infty} \infty$



u) $f(x) = \frac{3}{2} - \frac{9}{4}e^{\frac{3}{8}x}$

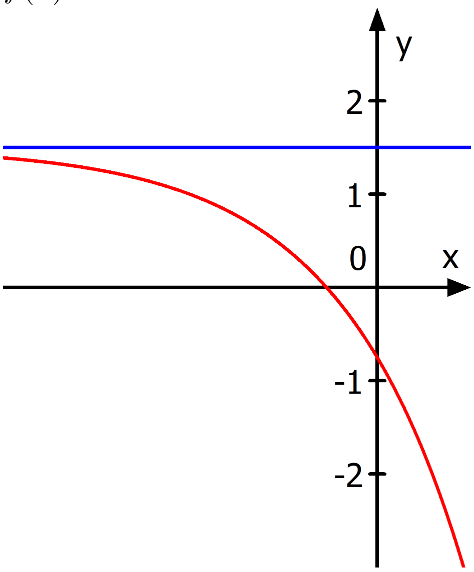
Asymptote $y = \frac{3}{2}$

y-Achsenabschnitt: $f(0) = -\frac{3}{4}$

Monoton fallend

$f(x) \xrightarrow{x \to -\infty} \frac{3}{2}$

$f(x) \xrightarrow{x \to \infty} -\infty$



w) $f(x) = 5\left(e^{-4x} + \frac{1}{2}\right)$

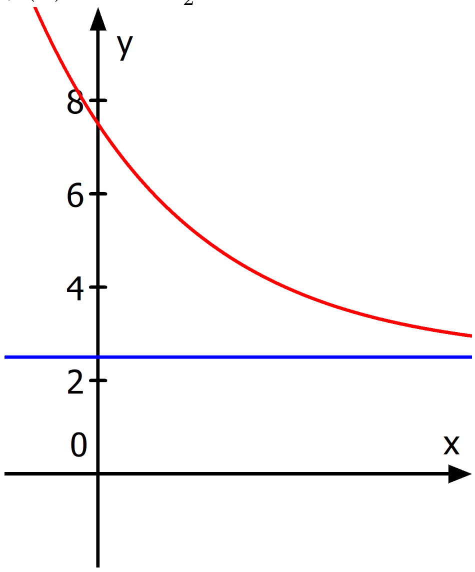
Asymptote $y = \frac{5}{2}$

y-Achsenabschnitt: $f(0) = \frac{15}{2} = 7,5$

Monoton fallend

$f(x) \xrightarrow{x \to -\infty} \infty$

$f(x) \xrightarrow{x \to \infty} \frac{5}{2}$



v) $f(x) = -2(1 + e^{-0,3x})$

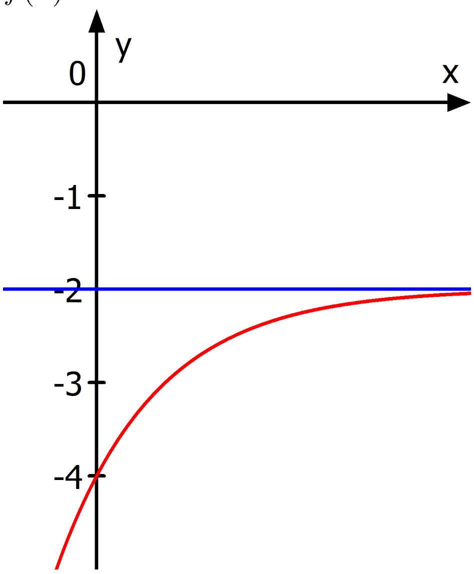
Asymptote $y = -2$

y-Achsenabschnitt: $f(0) = -4$

Monoton wachsend

$f(x) \xrightarrow{x \to -\infty} -\infty$

$f(x) \xrightarrow{x \to \infty} -2$



x) $f(x) = -2(2e^{6x} - 2)$

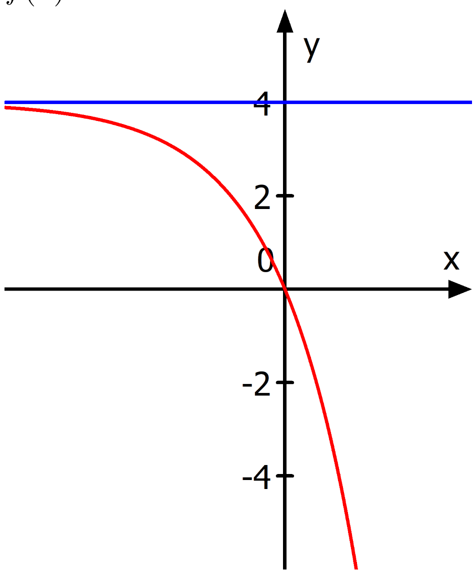
Asymptote $y = 4$

y-Achsenabschnitt: $f(0) = 0$

Monoton fallend

$f(x) \xrightarrow{x \to -\infty} 4$

$f(x) \xrightarrow{x \to \infty} -\infty$



y) $f(x) = -e^{-1,1x} + 3(e^{-1,1x} - 2)$

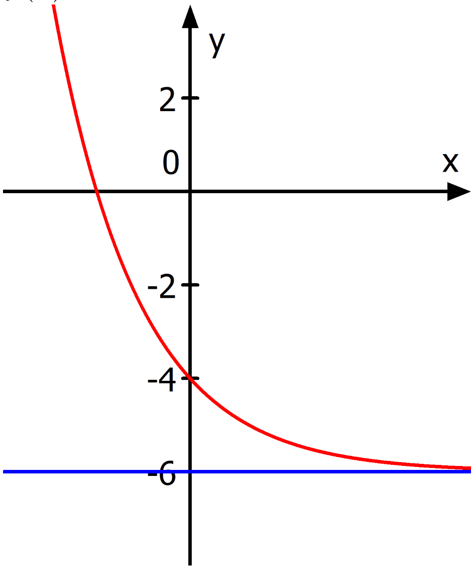
Asymptote $y = -6$

y-Achsenabschnitt: $f(0) = -4$

Monoton fallend

$f(x) \xrightarrow{x \to -\infty} \infty$

$f(x) \xrightarrow{x \to \infty} -6$



z) $f(x) = 4(0,25e^{1,25x} + 2) - 8$

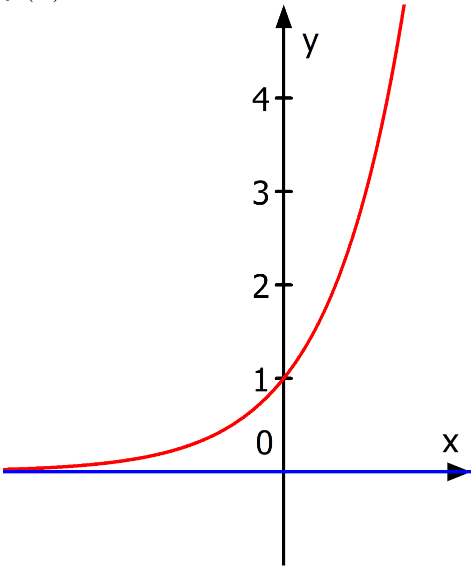
Asymptote $y = 0$

y-Achsenabschnitt: $f(0) = 1$

Monoton wachsend

$f(x) \xrightarrow{x \to -\infty} 0$

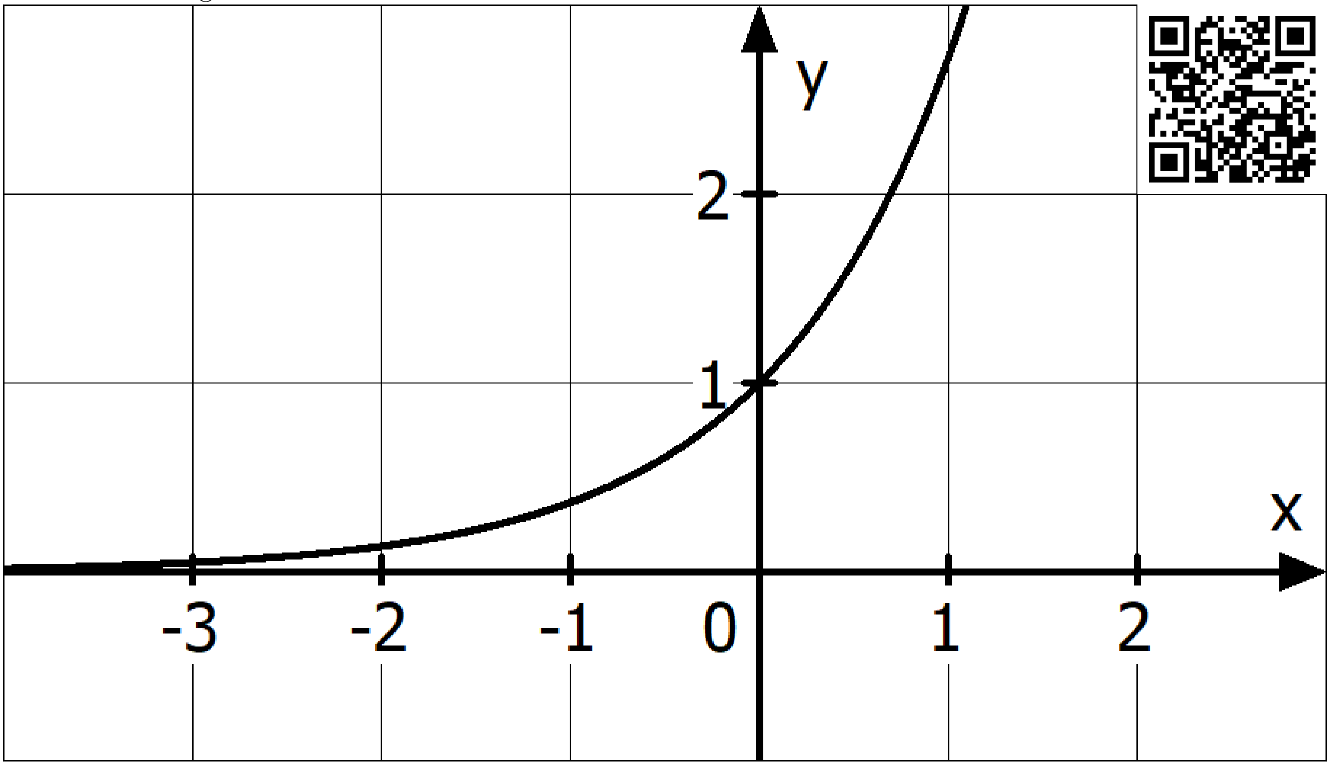
$f(x) \xrightarrow{x \to \infty} \infty$



Natürlicher Logarithmus

Wie die Wurzel zu x^2 und die dritte Wurzel zu x^3 gibt es auch zu e^x eine Umkehrfunktion. Diese ist der natürliche Logarithmus und als Formelzeichen wird $\ln(y)$ verwendet. Der natürliche Logarithmus gibt zu einem y-Wert den passenden x-Wert an, so dass folgendes gilt:

Mit Hilfe des Schaubilds von e^x überlegen wir uns, welche Werte man in den $ln(y)$ einsetzen darf und welche Ergebnisse man erhält:



- y ist größer 1 bzw. $y > 1$:

- $y = 1$:

- y liegt zwischen 0 und 1 bzw. $0 < y < 1$:

- y ist kleiner gleich 0 bzw. $y \leq 0$:

Es gibt zwar Rechengesetze für Logarithmen, wir werden diese aber nicht betrachten.
Zum Vergleichen von Lösungen kann aber folgendes Gesetz nützlich sein:

Mit Hilfe des natürlichen Logarithmus lassen sich Gleichungen mit Exponentialfunktionen mit Hilfe der gleichen Lösungsmethoden lösen, die wir auch bei ganzrationalen Funktionen bereits angewandt haben:

1) Auflösen und ln anwenden
   Dieses Verfahren kann nur dann angewendet werden, wenn die Gleichung auf folgende Form gebracht werden kann: $ae^{kx} + b = 0$
   Wir lösen nach e^{kx} auf, d.h. e^{kx} steht alleine auf einer Seite. Dann wenden wir den ln auf beiden Seiten an.
   Beispiel: Löse die Gleichung $2e^{3x} - 4 = 0$.

2) Ausklammern und SvN
   Dieses Verfahren wenden wir dann an, wenn jeder Summand über ein $e^{k_i x}$ verfügt. (Die k_i sind dabei paarweise verschieden.) Wir klammern ein $e^{k_i x}$ vor (welches ist egal) und wenden dann den Satz vom Nullprodukt an.
   Beispiel: Löse die Gleichung $2e^{3x} - 4e^{7x} = 0$.
   1. Möglichkeit 2. Möglichkeit

3) Substitution

Dieses Verfahren setzen wir dann ein, wenn die Gleichung auf folgende Form gebracht werden kann: $ae^{2kx} + be^{kx} + c = 0$

Wir substituieren $z = e^{kx}$ und damit $z^2 = e^{2kx}$. Die entstehende quadratische Gleichung lösen wir mit Hilfe der Mitternachtsformel und erhalten dann die Lösungen für x nach einer Rücksubstitution.

Beispiel: Löse die Gleichung $0,5e^{6x} + e^{3x} - 4 = 0$.

Übung 33 Löse folgende Gleichungen

a) $3e^{x} - 9 = 0$

b) $4e^{3x} - 12 = 0$

c) $5e^{4x} - 2e^{x} = 0$

d) $0,5e^{-2x} + e^{-x} - 12 = 0$

e) $3e^{-8x} + 6 = 0$

f) $-\frac{3}{4}e^{-\frac{2}{3}x} + 12 = 0$

g) $e^{8x} - 5e^{4x} + 6 = 0$

h) $-e^{x} + 0,4 = 0$

i) $-10e^{10x} - 13e^{5x} - 4 = 0$

j) $7 - e^{-2x} = 0$

k) $7e^{-4x} - e^{-2x} = 0$

l) $-2e^{-6x} + \frac{13}{2}e^{-3x} - \frac{3}{2} = 0$

m) $5e^{4x} - 10e^{-x} = 0$

n) $0,4e^{4x} + 1,8e^{2x} = 0$

o) $-3e^{4x} + 8e^{-2x} = 0$

p) $e^{2x} + 2e^{x} - 3 = 0$

q) $3e^{3x} + \frac{1}{2}e^{1,5x} - \frac{1}{2} = 0$

r) $e^{5x} - 4e^{\frac{5}{2}x} - 12 = 0$

s) $-\frac{2}{3}e^{4x} - e^{x} = 0$

t) $-0,2e^{0,3x} - 1,4 = 0$

u) $2e^{-2x} + e^{-x} - 6 = 0$

v) $5e^{-6x} = 4$

w) $0,1e^{4x} - e^{x} = 0$

x) $-\frac{1}{9}e^{-0,5x} + \frac{2}{3}e^{-0,25x} = -3$

y) $0,5e^{4x} = e^{x}$

z) $-3e^{x} + 2 = -e^{2x}$

Lösung zu Übung 33

a) $x = \ln(3)$

b) $x = \frac{1}{3}\ln(3)$

c) $x = \frac{1}{3}\ln\left(\frac{2}{5}\right) = -\frac{1}{3}\ln\left(\frac{5}{2}\right)$

d) $x = -\ln(4)$

e) keine Lösung

f) $x = -\frac{3}{2}\ln(16)$

g) $x_1 = \frac{1}{4}\ln(2),\ x_2 = \frac{1}{4}\ln(3)$

h) $x = \ln(0,4)$

i) keine Lösung

j) $x = -\frac{1}{2}\ln(7)$

k) $x = -\frac{1}{2}\ln\left(\frac{1}{7}\right) = \frac{1}{2}\ln(7)$

l) $x_1 = -\frac{1}{3}\ln(3),\ x_2 = -\frac{1}{3}\ln\left(\frac{1}{4}\right)$

m) $x = \frac{1}{5}\ln(2) = -\frac{1}{5}\ln\left(\frac{2}{1}2\right)$

n) $x = 0,5\ln(4,5) = -0,5\ln\left(\frac{2}{9}\right)$

o) $x = \frac{1}{6}\ln\left(\frac{8}{3}\right) = -\frac{1}{6}\ln\left(\frac{3}{8}\right)$

p) $x = 0$

q) $x = \frac{2}{3}\ln\left(\frac{1}{3}\right)$

r) $x = \frac{2}{5}\ln(6)$

s) keine Lösung

t) keine Lösung

u) $x = -\ln\left(\frac{3}{2}\right)$

v) $x = -\frac{1}{6}\ln\left(\frac{4}{5}\right)$

w) $x = \frac{1}{3}\ln(10) = -\frac{1}{3}\ln\left(\frac{1}{10}\right)$

x) $x = -4\ln(9)$

y) $x = \frac{1}{3}\ln(2) = -\frac{1}{3}\ln(0,5)$

z) $x_1 = \ln(2),\ x_2 = 0$

Beim Aufstellen von Funktionsgleichungen vom Typ $f(x) = a \cdot e^{kx} + b$ können wir in den allermeisten Fällen die folgenden Schritte abarbeiten:

1) Asymptote bestimmen, sofern notwendig. Bei Funktionen vom Typ $f(x) = a \cdot e^{kx}$ ist die Asymptote $y = 0$ bereits gegeben.
2) Den Faktor a bestimmen, indem man den y-Achsenabschnitt einsetzt.
3) Den Faktor k mit Hilfe einer weiteren Punktprobe bestimmen.

Beispiel: Von einer Funktion $f(x) = a \cdot e^{kx} + b$ ist bekannt, dass $f(x) \xrightarrow{x \to -\infty} 1$ gilt und dass das Schaubild durch den Ursprung und $A(2|-4)$ verläuft.

Übung 34 Stelle jeweils eine Funktionsgleichung vom passenden Typ auf

a) Das Schaubild von $f_1(x) = ae^{kx}$ verläuft durch die Punkte $A(0|3)$ und $B(2|8)$.

b) Das Schaubild von $f_2(x) = ae^{kx}$ verläuft durch die Punkte $A(0|-1)$ und $B(-2|-5)$.

c) Das Schaubild von $f_3(x) = ae^{kx}$ verläuft durch die Punkte $A(0|5)$ und $B(3|4)$.

d) Das Schaubild von $f_4(x) = ae^{kx}+b$ verläuft durch die Punkte $A(0|5)$ und $B(-1|3)$ und hat die Asymptote $y = 7$.

e) Das Schaubild von $f_5(x) = ae^{kx}+b$ verläuft durch die Punkte $A(0|0)$ und $B(3|-3)$ und hat die Asymptote $y = 3$.

f) Das Schaubild von $f_6(x) = ae^{kx}+b$ verläuft durch die Punkte $A(4|-2)$ und $B(0|3)$ und hat die Asymptote $y = -4$.

g) Von der Funktion $f_7(x) = ae^{kx} + b$ ist das Verhalten bekannt: $f_7(x) \xrightarrow{x\to-\infty} -1$ Zudem ist folgende Wertetabelle gegeben:

x	-5	0
$f_7(x)$	2	8

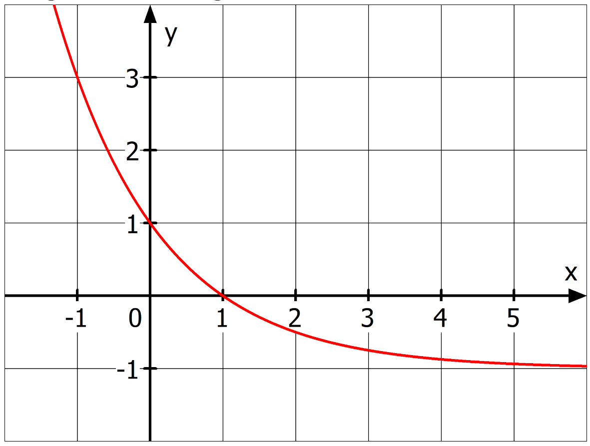
h) Von der Funktion $f_8(x) = ae^{kx} + b$ ist das Verhalten bekannt: $f_8(x) \xrightarrow{x\to-\infty} 2$ Zudem ist folgende Wertetabelle gegeben:

x	-5	0
$f_8(x)$	0	1

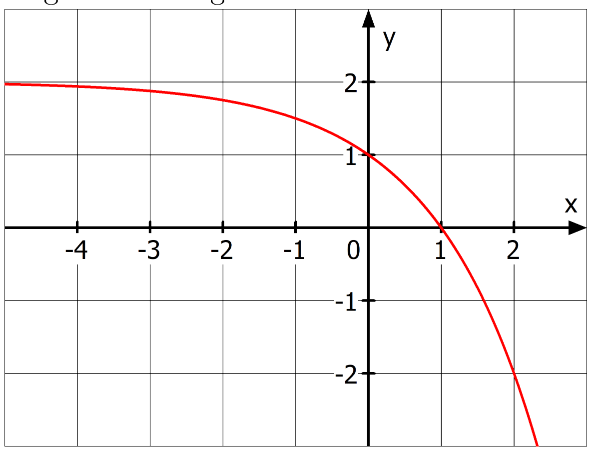
i) Von der Funktion $f_9(x) = ae^{kx} + b$ ist das Verhalten bekannt: $f_9(x) \xrightarrow{x\to-\infty} -4$ Zudem ist folgende Wertetabelle gegeben:

x	0	1
$f_9(x)$	-3	-1

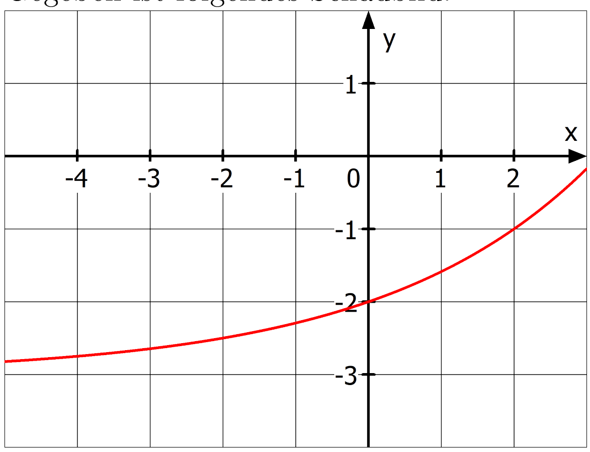
j) Gegeben ist folgendes Schaubild:



k) Gegeben ist folgendes Schaubild:



l) Gegeben ist folgendes Schaubild:



Lösung zu Übung 34

a) $f_1(x) = 3e^{\frac{1}{2}\ln\left(\frac{8}{3}\right)x}$

b) $f_2(x) = -e^{-\frac{1}{2}\ln(5)x}$

c) $f_3(x) = 5e^{\frac{1}{3}\ln\left(\frac{4}{5}\right)x}$

d) $f_4(x) = -2e^{-\ln(2)x} + 7$

e) $f_5(x) = -3e^{\frac{1}{3}\ln(2)x} + 3$

f) $f_6(x) = 7e^{\frac{1}{4}\ln\left(\frac{2}{7}\right)x} - 4$

g) $f_7(x) = 9e^{-\frac{1}{5}\ln\left(\frac{1}{3}\right)x} - 1$

h) $f_8(x) = -e^{-\frac{1}{5}\ln(2)x} + 2$

i) $f_9(x) = e^{\ln(5)x} - 4$

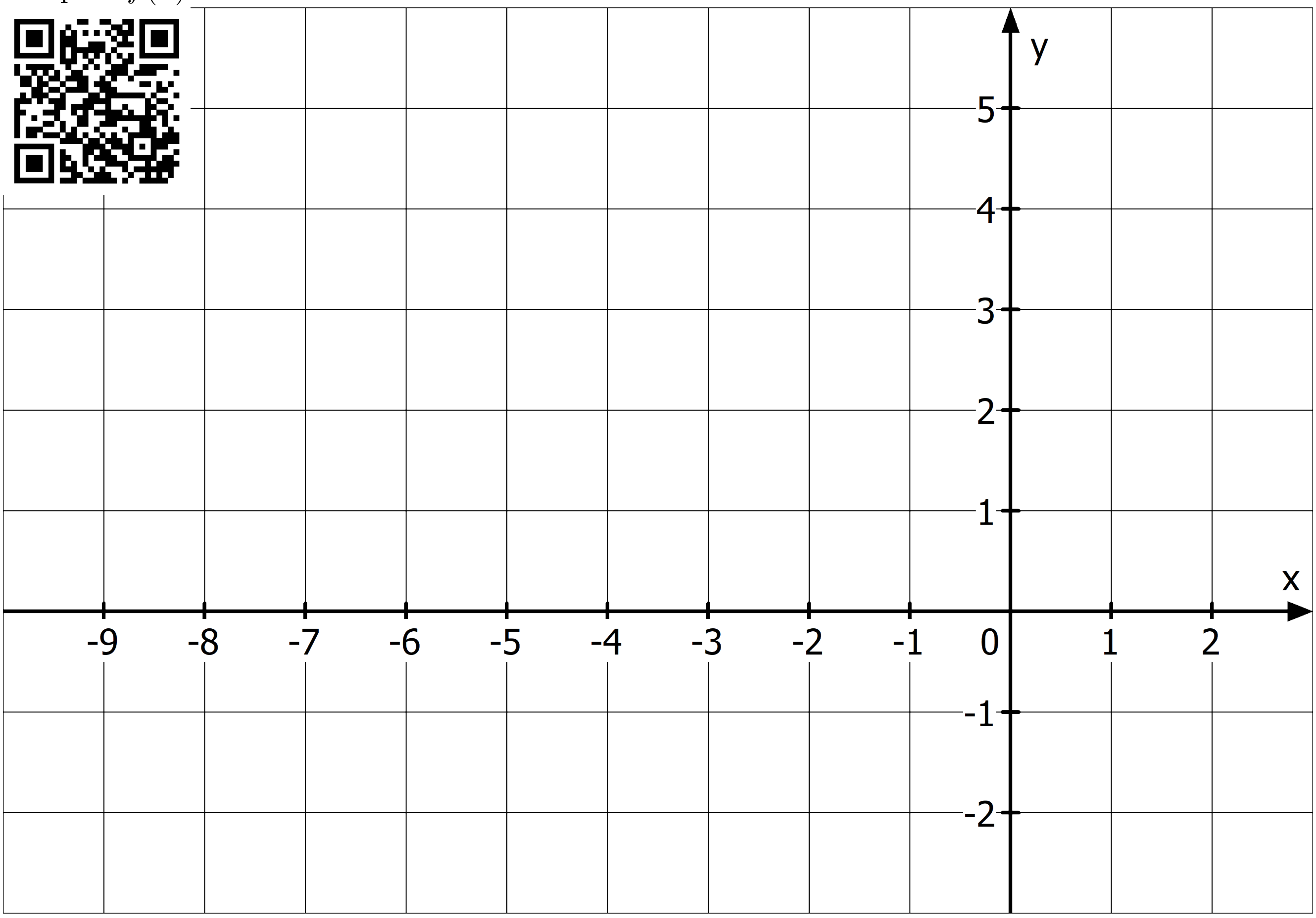
j) $f_{10}(x) = 2e^{-\ln(2)x} - 1$

k) $f_{11}(x) = -e^{-\ln\left(\frac{1}{2}\right)x} + 2$

l) $f_{12}(x) = e^{0{,}5\ln(2)x} - 3$

Funktionen vom Typ $f(x) = a \cdot e^{kx} + mx + b \quad a, k, m \neq 0$ haben eine schiefe Asymptote. Der erste Teil der Funktion $a \cdot e^{kx}$ geht entweder für sehr große x oder sehr kleine x gegen Null. In diese Richtung nähert sich das Schaubild von $f(x)$ der Geraden $mx + b$ beliebig nahe, d.h. $y = mx + b$ ist eine Asymptote von $f(x)$. Da das Schaubild der Asymptoten nicht mehr parallel zur x-Achse verläuft, spricht man von einer schiefen Asymptoten.

Beispiel: $f(x) = 2 \cdot e^{x} - x - 3$



Die Schaubilder von Funktionen vom obigen Typ lassen sich in 3 Bereiche aufteilen:

- In dem Bereich, in dem $a \cdot e^{kx}$ gegen Null geht, folgt die Funktion der Asymptoten. Im Beispiel ist dies für ca. $x < -2$ der Fall.
- In dem Bereich, in dem $a \cdot e^{kx}$ gegen $+\infty$ oder $-\infty$ geht, folgt die Funktion $a \cdot e^{kx}$ Im Beispiel ist dies ab ca. $x > 1$ der Fall.
- Im Übergangsbereich zwischen den beiden Bereichen muss man die beiden Teile mit einem Bogen miteinander verbinden.

Das obige Beispiel hat einen Tiefpunkt bei ca. $x \approx -0,8$. Mit Hilfe der Ableitung werden wir in Zukunft Hoch- und Tiefpunkte berechnen können. Die obige Funktion hat 2 Nullstellen, die man jedoch nicht exakt bestimmen kann.

Gleichungen vom Typ

$$ae^{kx} + mx + b = 0$$

sind im Allgemeinen nicht exakt lösbar. Man kann lediglich die Lösungen auf beliebig viele Nachkommastellen bestimmen.

Übung 35 **Skizziere die Asymptote, den Teil mit ae^{kx} sowie das Schaubild der Funktion.**

a) $f_1(x) = e^{-x} + 2x - 3$

b) $f_2(x) = -e^{-2x} + 0,5x$

c) $f_3(x) = -e^{x} - \frac{2}{3}x + 1$

d) $f_4(x) = -2e^{-x} - 2x + 1$

e) $f_5(x) = 3e^{1,4x} + \frac{3}{4}x - 1$

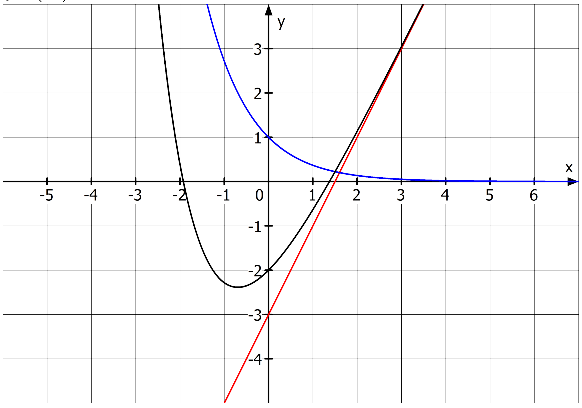
f) $f_6(x) = e^{2x} + 0,4x - 3$

g) $f_7(x) = -3e^{-0,5x} - x$

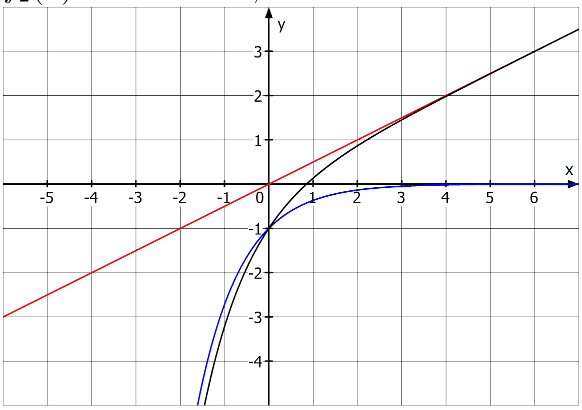
h) $f_8(x) = -2e^{4x} + \frac{4}{3}x + 5$

Lösung zu Übung 35

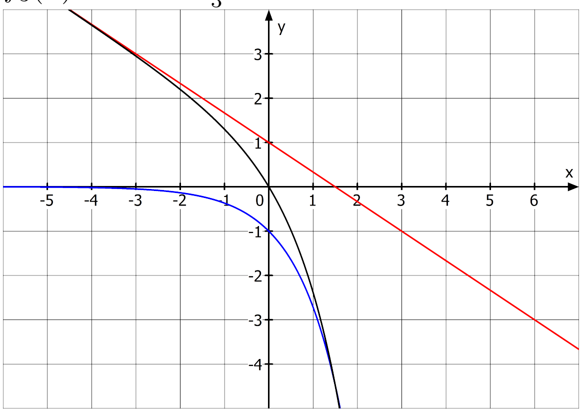
a) $f_1(x) = e^{-x} + 2x - 3$



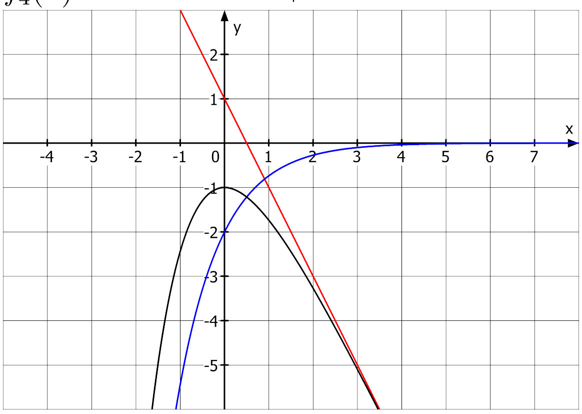
b) $f_2(x) = -e^{-2x} + 0,5x$



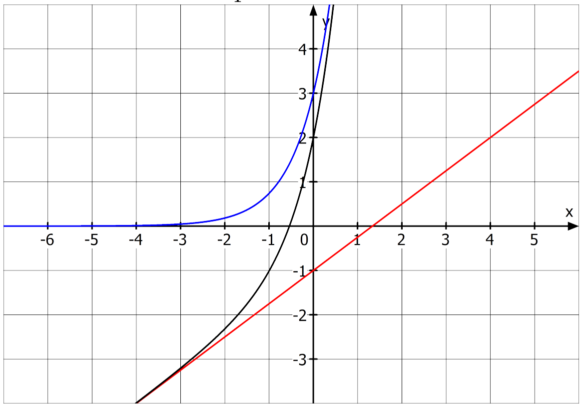
c) $f_3(x) = -e^{x} - \frac{2}{3}x + 1$



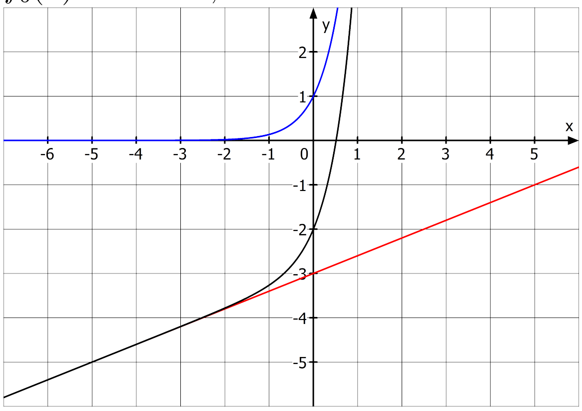
d) $f_4(x) = -2e^{-x} - 2x + 1$



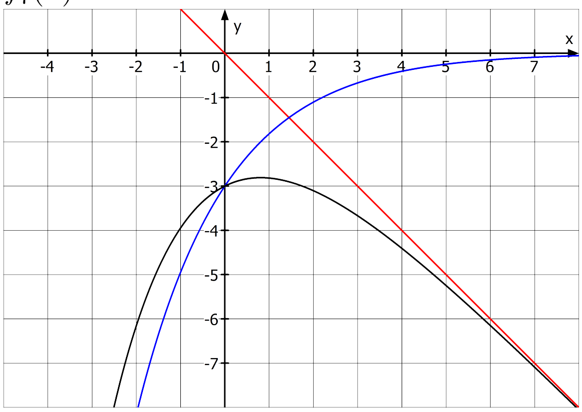
e) $f_5(x) = 3e^{1,4x} + \frac{3}{4}x - 1$



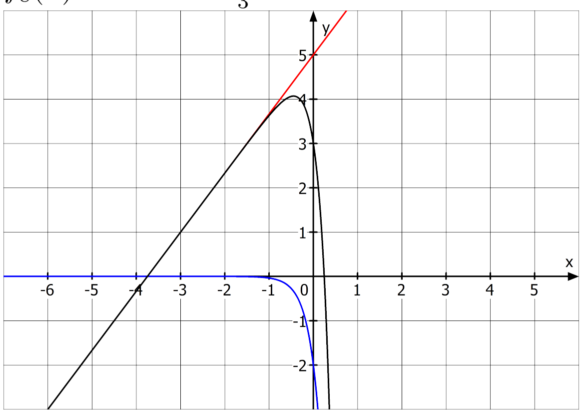
f) $f_6(x) = e^{2x} + 0,4x - 3$



g) $f_7(x) = -3e^{-0,5x} - x$

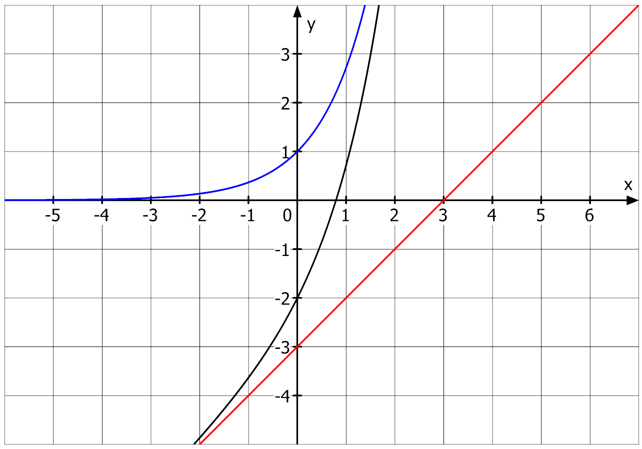


h) $f_8(x) = -2e^{4x} + \frac{4}{3}x + 5$



Wir haben die Behauptung aufgestellt, dass sich Gleichungen vom Typ $ae^{kx} + mx + b = 0$ im Allgemeinen nicht exakt lösen lassen. Im Allgemeinen bedeutet, dass es durchaus Gleichungen dieses Typs gibt, die man exakt lösen kann, aber nicht jede Gleichung ist exakt lösbar. Als Beispiel betrachten wir $f(x) = e^x + x - 3$. Aus dem Schaubild lässt sich entnehmen, dass die Funktion eine Nullstelle im positiven Bereich haben muss. Zeichnet man das Schaubild mit dem Computer, so kann man sogar sagen, dass die Nullstellen zwischen $x = 0$ und $x = 1$ liegen muss. Dies könnte man auch mit dem Taschenrechner und einer Wertetabelle zeigen. Da $f(0) = -2$ und $f(1) \approx 0,72$ gilt, muss mindestens eine Nullstelle in diesem Bereich liegen.

ACHTUNG: Wechseln die Funktionswerte einer Funktion ihr Vorzeichen, so kann man ohne weitere Überlegungen nur sagen, dass mindestens eine Nullstelle im fraglichen Bereich liegen muss, es könnten aber auch mehr Nullstellen sein. Findet kein Vorzeichenwechsel der Funktionswerte statt, kann man keine Aussage treffen. So hat x^2 keinen Vorzeichenwechsel in den Funktionswerten, aber dennoch eine Nullstelle bei $x = 0$.



Um die Nullstelle genauer zu bestimmen, gibt es verschiedene Verfahren wie z.B. das Newton-Verfahren. Wir werden einfach die Wertetabelle des Taschenrechners verwenden. In den Aufgaben ist normalerweise die Lage der Nullstelle bereits grob vorgegeben, z.B. $f(x) = e^x + x - 3$ hat zwischen $x = 0$ und $x = 1$ eine Nullstelle. Bestimme diese auf 2 Nachkommastellen genau. Wir erstellen eine Wertetabelle im Taschenrechner und geben als Startwert $x = 0$ an (als Endwert, soweit notwendig, $x = 1$) und als Schrittweite (oft als step oder Inkrement bezeichnet) $\Delta x = 0,05$ an. Nun prüfen wir, an welcher Stelle der Vorzeichenwechsel stattfindet. Aus $f(0,75) \approx -0,13$ und $f(0,8) \approx 0,03$ folgt, dass die Nullstelle zwischen $x = 0,75$ und $x = 0,8$ liegen muss. Nun verfeinern wir die Wertetabelle mit Start $x = 0,75$ (Ende $x = 0,8$) und Schrittweite $\Delta x = 0,005$ und erhalten aus $f(0,79) \approx -0,007$ und $f(0,795) \approx 0,009$ die ungefähre Lage der Nullstelle als $x_1 \approx 0,79$, da alle Werte zwischen 0,79 und 0,795 beim Runden auf die 2. Nachkommastelle auf 0,79 gerundet werden.

Mit dem gleichen Prinzip lassen sich auch die Nullstellen von Funktionen wie z.B.
$f(x) = x^4 - 2x^3 - 4x + 2$ bestimmen ($x_1 \approx 0,46 \quad x_2 \approx 2,51$).

Übung 36 **Prüfe an Hand deiner Skizze, ob die Funktionen aus Aufg. 35 NST haben und bestimme diese auf 2 Nachkommastellen genau.**

Lösung zu Übung 36

a) $f_1(x) = e^{-x} + 2x - 3$
$x_1 \approx 1,37 \quad x_2 \approx -1,92$

b) $f_2(x) = -e^{-2x} + 0,5x$
$x_1 \approx 0,60$

c) $f_3(x) = -e^{x} - \frac{2}{3}x + 1$
$x_1 = 0$ (Exakte Lösung, da diese NST zufälligerweise exakt bestimmbar ist)

d) $f_4(x) = -2e^{-x} - 2x + 1$
keine Nullstellen

e) $f_5(x) = 3e^{1,4x} + \frac{3}{4}x - 1$
$x_1 \approx -0,54$

f) $f_6(x) = e^{2x} + 0,4x - 3$
$x_1 \approx 0,51$

g) $f_7(x) = -3e^{-0,5x} - x$
keine Nullstellen

h) $f_8(x) = -2e^{4x} + \frac{4}{3}x + 5$
$x_1 \approx -3,75 \quad x_2 \approx 0,24$

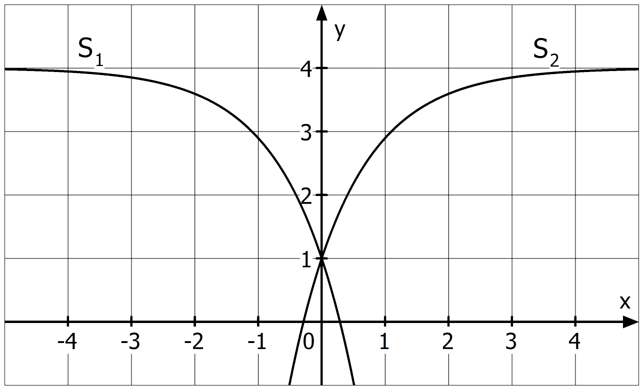
Die folgenden Aufgaben sind Aufgaben aus alten Abschlussprüfungen nachempfunden. Es ist jeweils angegeben, wie viel Zeit in der Abschlussprüfung zur Bearbeitung der Aufgabe zur Verfügung stehen würde.

Übung 37 Zeitansatz 8 min, ohne Taschenrechner

Lösen Sie die Gleichung $e^{2x} - 4e^x = 0$

Übung 38 Zeitansatz 10 min, ohne Taschenrechner

Gegeben ist die Funktion f mit
$f(x) = a \cdot e^{-x} + b,\ x \in \mathbb{R};\ a, b \neq 0$
Begründen Sie, welches der Schaubilder S_1 oder S_2 zur Funktion f gehört.
Bestimmen Sie a und b.



Übung 39 Zeitansatz 20 min, mit Taschenrechner

Die Einwohnerzahl eines Landes wird durch die Funktion f dargestellt mit
$f(x) = a \cdot e^{b \cdot t}$ mit $t \in \mathbb{R};\ a, b \neq 0$
Dabei ist t die Zeit in Jahren, $t = 0$ entspricht dem Jahr 2020 und $f(t)$ gibt die Einwohnerzahl in Millionen zum Zeitpunkt t an.
2020 lebten 85 Millionen Menschen im Land, 2023 waren es 97 Millionen.

a) (6 Minuten) Bestimmen Sie a und b.

Im Folgenden sei $a = 85$ und $b = 0,044$.

b) (8 Minuten) Bestimmen Sie die Bevölkerungszahl im Jahr 2030.
In welchem Jahr betrug die Bevölkerungszahl Drei Viertel der Bevölkerungszahl im Jahr 2020?

c) (6 Minuten) Bestimmen Sie, um wie viel Prozent die Bevölkerung pro Jahr wächst.

Übung 40 Zeitansatz 6 min, mit Taschenrechner

Berechnen Sie die Koordinaten der Achsenschnittpunkte des Schaubildes von $f(x) = -3e^{-0,25x} + 5$

Übung 41 Zeitansatz 10 min, ohne Taschenrechner

Die Funktion g ist gegeben durch $g(x) = 3e^{-x} - 2,\ x \in \mathbb{R}$.
Das Schaubild heißt K_g. Geben Sie die Gleichung der Asymptoten von K_g an und skizzieren Sie K_g.
Gib den Quadranten an, in dem K_g mit den Koordinatenachsen eine Fläche einschließt.

Übung 42 Zeitansatz 6 min, ohne Taschenrechner

Lösen Sie die Gleichung $4e^{-3x} - 8 = 0$

Übung 43 Zeitansatz 26 min, mit Taschenrechner

Eine Grippe verbreitet sich in der Bevölkerung. Die Funktion $g(t) = -90e^{-0{,}014t} + 90,\ t \geq 0$ beschreibt den Anteil der Bevölkerung, die infiziert wurde, in Prozent nach t Tagen, $t = 0$ entspricht dem 3. März 2023.

a) Skizzieren Sie das Schaubild von g.
b) Wie viel Prozent der Bevölkerung werden sich nie infizieren?
c) Ermitteln Sie den Anteil der Bevölkerung, der sich nach 70 Tagen infiziert hat.
d) Zu welchem Zeitpunkt hat sich die Hälfte der Bevölkerung infiziert?

Zeitgleich zum Ausbruch der Grippe wird eine Infektion mit Fußpilz festgestellt, die große Teile der Bevölkerung betrifft, aber leicht behandelbar ist. Die Funktion h mit $h(t) = a \cdot e^{b \cdot t} + 10,\ t \geq 0,\ a, b \neq 0$ beschreibt den Anteil der mit Fußpilz infizierten.

- Zum Zeitpunkt $t = 0$ sind 60% der Bevölkerung mit Fußpilz infiziert.
- Nach 20 Tagen sind die Anteile der Bevölkerung, die mit der Grippe infiziert wurde und die unter Fußpilz leiden, gleich groß.

Bestimmen Sie Werte für a und b.

Übung 44 Zeitansatz 14 min, mit Taschenrechner

Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = 0{,}75e^{0{,}4x} - x + 1{,}25,\ x \in \mathbb{R}$.
Ihr Schaubild ist K_f.

a) Zeichnen Sie K_f für $-3 \leq x \leq 7$.
b) Das Schaubild K_f wird so verschoben, dass es durch den Urpsrung verläuft. Geben Sie einen neuen Funktionsterm $f_v(x)$ an.

Übung 45 Zeitansatz 4 min, ohne Taschenrechner

Weisen Sie nach, dass die Funktion $k(x) = 3e^{4x} + 4x - 6$ zwischen $x = 0$ und $x = 0{,}25$ eine Nullstelle besitzt.

Übung 46 Zeitansatz 10 min, mit Taschenrechner

In einem chemischen Experiment wird eine Flüssigkeit mit Kalilauge titriert. Der pH-Wert der Flüssigkeit wird mit einem Messgerät erfasst durch die Funktion $p(V) = 13{,}5 - 6{,}5e^{-0{,}2V},\ V \geq 0$ beschrieben, dabei ist V das Volumen der hinzugefügten Kalilauge in Millilitern.

a) Geben Sie den Bereich an, den das ph-Wert-Messgerät für diesen Versuch abdecken muss.
b) Bei einem ph-Wert von 10 schlägt ein Indikator um und die Farbe der Flüssigkeit ändert sich. Bestimmen Sie das Volumen der hinzugefügten Kalilauge am Umschlagpunkt.

Übung 47 Zeitansatz 8 min, ohne Taschenrechner

Lösen Sie die Gleichung $e^{-2x} - 4e^{-x} = 0$

Übung 48 Zeitansatz 6 min, ohne Taschenrechner

Lösen Sie die Gleichung $2e^x - 4 = e^x$

Übung 49 Zeitansatz 10 min, mit Taschenrechner

Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = 1,5e^{-0,25x} - 4,\ x \in \mathbb{R}$.
Ihr Schaubild ist K_f.

- Bestimmen Sie die Gleichung der Asymptoten von K_f.
- Zeichnen Sie K_f für $-6 \leq x \leq 8$.
- Wie müsste K_f verschoben werden, sodass das verschobene Schaubild die Asymptote $y_v = 2$ hat?

Übung 50 Zeitansatz 8 min, ohne Taschenrechner

Das Schaubild einer Funktion g wird nacheinander

1. mit dem Faktor 2 in y-Richtung gestreckt
2. um 3 Längeneinheiten in y-Richtung nach unten verschoben.

Es ergibt sich auf diese Weise das Schaubild einer Funktion h mit
$h(x) = 6e^{-2x} + 4$
Geben Sie den Funktionsterm von g an.

Übung 51 Zeitansatz 28 min, mit Taschenrechner

An einem sonnigen Wintertag bereitet das Ehepaar Schmidt 2 Kaffee zu. Eine Person bleibt mit ihrem Kaffee in der Wohnung, die andere setzt sich nach draußen. Die Funktionen T_1 und T_2 beschreiben die Temperatur der beiden Kaffee in °C nach t Minuten nach der Zubereitung des Kaffees:
$T_1(t) = 21 + 68e^{-0,12t}$ und $T_2(t) = -8 + a \cdot e^{-0,12t},\ t \in [0; 20]$
Es gilt $a = 97$.

a) Begründen Sie, warum a den angegebenen Wert haben muss.
b) Zeichnen Sie die Schaubilder beider Funktionen in ein Koordinatensystem.
c) Welche der beiden Funktionen beschreibt die Temperatur des Kaffees in der Wohnung, welche die des Kaffees im Außenbereich. Begründen Sie ihre Wahl.
d) Ab einer Temperatur von 45°C kann der Kaffee getrunken werden. Wie viele Minuten früher kann einer der Ehepartner seinen Kaffee genießen?

Lösung zu Übung 37

$$
\begin{aligned}
e^{2x} - 4e^{x} &= 0 \\
e^{x}(e^{x} - 4) &= 0 \mid \text{SvN } e^{x} = 0 \lightning \text{ oder} \\
e^{x} - 4 &= 0 \mid \ +4 \\
e^{x} &= 4 \mid \ \ln \\
x &= \ln(4)
\end{aligned}
$$

Lösung zu Übung 38

Schaubilder vom Typ $a \cdot e^{kx} + b$ verlaufen für positive k nach links gegen ihre Asymptote und nach rechts gegen $\pm\infty$ (je nach Vorzeichen von a). Für negative k dreht sich dieses Verhalten gerade um. Da für die gegebene Funktion $k = -1$ gilt, muss das Schaubild S_2 das korrekte sein.
Die Asymptote $y = 4$ kann abgelesen werden. Daher gilt $b = 4$.
Aus dem y-Achsenabschnitt $f(0) = 1$ ergibt sich $a + 4 = 1$ und damit $a = -3$.

Lösung zu Übung 39

a) Aus den Angaben 2020, also $t = 0$ lebten 85 Millionen Menschen im Land und 2023, also $t = 3$ lebten 97 Millionen im Land kann man zwei Gleichungen aufstellen:
$f(0) = 85$ also $a = 85$
$f(3) = 97$ also $b = \frac{1}{3}\ln\left(\frac{97}{85}\right)$

b) Im Jahr 2030 ($t = 10$) leben 132 Millionen Menschen im Land, da $f(10) = 85e^{0,044\cdot 10} \approx 132$.
Drei Viertel von 85 Millionen entspricht 63,75 Millionen, da $\frac{3}{4} \cdot 85 = 63,75$.

$$\begin{aligned} f(t) &= 63,75 \\ 85e^{0,044t} &= 63,75 \mid\ :85 \\ e^{0,044t} &= 0,75 \mid\ \ln \\ 0,044t &= \ln(0,75) \mid\ :0,044 \\ t &= \frac{250}{11}\ln(0,75) \\ t &\approx -6,5 \end{aligned}$$

Also betrug die Einwohnerzahl im Jahr 2013 ($2020 - 6,5 = 2013,5$) Drei Viertel der Bevölkerungszahl aus 2020.

c) Bereits bekannt ist $f(0) = 85$. Mit $f(1) = 85e^{0,044} \approx 88,82$ ergibt sich:
$\frac{88,82}{85} \approx 1,045 = 104,5\%$
Die Bevölkerung wächst also jährlich um 4,5%.

Lösung zu Übung 40

Schnittpunkt mit der y-Achse: $f(0) = -3 + 5 = 2$, also $S_y(0|2)$

Schnittpunkt mit der x-Achse:

$$\begin{aligned}
f(x) &= 0 \\
-3e^{-0,25x} + 5 &= 0 \mid -5 \\
-3e^{-0,25x} &= -5 \mid :(-3) \\
e^{-0,25x} &= \frac{5}{3} \mid \ln \\
-0,25x &= \ln\left(\frac{5}{3}\right) \mid \cdot(-4) \\
x &= -4\ln\left(\frac{5}{3}\right)
\end{aligned}$$

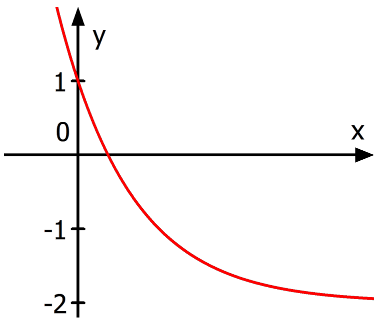
Also ist der Schnittpunkt mit der x-Achse $S_x\big(-4\ln\big(\tfrac{5}{3}\big)\big|0\big)$

Lösung zu Übung 41

Asymptote: $y = -2$

y-Achsenabschnitt für die Skizze: $g(0) = 3 - 2 = 1$

Die Fläche wird im 1. Quadranten eingeschlossen. (Die fast dreieckige Fläche zwischen dem y-Achsenabschnitt, dem Schnittpunkt mit der x-Achse und dem Ursprung.)

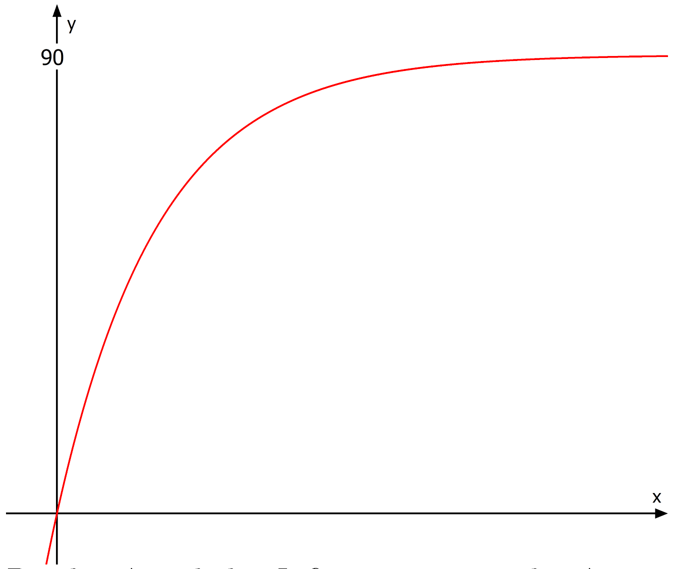


Lösung zu Übung 42

$$\begin{aligned} 4e^{-3x} - 8 &= 0 \mid \; +8 \\ 4e^{-3x} &= 8 \mid \; :4 \\ e^{-3x} &= 2 \mid \; \ln \\ -3x &= \ln(2) \mid \; :(-3) \\ x &= -\frac{\ln(2)}{3} \end{aligned}$$

Lösung zu Übung 43

a) y-Achsenabschnitt: $g(0) = -90 + 90 = 0$



b) Da der Anteil der Infizierten gegen die Asymptote von $y = 90$ strebt, werden sich die verbleibenden 10% nie infizieren.

c) Nach 70 Tagen haben sich ca 56% infiziert, da $g(70) \approx 56$.

d) Die Hälfte der Bevölkerung wird sich nach 58 Tagen, als am 30. April 2023, infiziert haben:

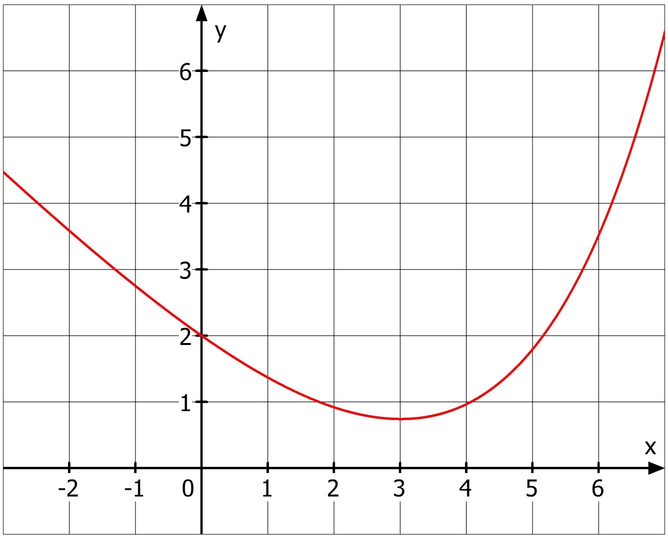
$$g(t) = 50$$
$$-90e^{-0{,}014t} + 90 = 50 \mid -90$$
$$-90e^{-0{,}014t} = -40 \mid :(-90)$$
$$e^{-0{,}014t} = \frac{4}{9} \mid \ln$$
$$-0,014t = \ln\left(\frac{4}{9}\right) \mid :(-0,014)$$
$$t \approx 58$$

Da zu Beginn 60% infiziert sind, ergibt sich $h(0) = 60$, also $a = 60$.
Nach 20 Tagen beträgt der Anteil, der unter der Grippe leidet $g(20) \approx 22$,
also muss auch $h(20) = 22$ gelten:

$$h(20) = 22$$
$$60 \cdot e^{b \cdot 20} = 22 \mid :60$$
$$e^{b \cdot 20} = \frac{11}{30} \mid \ln$$
$$b \cdot 20 = \ln\left(\frac{11}{30}\right) \mid :20$$
$$b = \frac{1}{20}\ln\left(\frac{11}{30}\right)$$

Lösung zu Übung 44

a) Wertetabelle im Taschenrechner verwenden:



b) Verschiebt man das Schaubild nur in y-Richtung, so genügt es das Schaubild um 2 Einheiten nach unten zu schieben:

$f_v(x) = 0,75e^{0,4x} - x - 0,75$

Lösung zu Übung 45

Aus $k(0) = 3 + 0 - 6 = -3 < 0$ und $k(0,25) = 3e + 1 - 6 = 3e - 5 \approx 8,1 - 5 = 3,1 > 0$ folgt auf Grund des Vorzeichenwechsels, dass die Funktion in diesem Intervall mindestens eine Nullstelle haben muss. (Es wurde die Näherung $e \approx 2,7$ verwendet.)

Lösung zu Übung 46

a) Zu Beginn des Experiments liegt der pH-Wert bei $p(0) = 13,5 - 6,5 = 7$ und nähert sich dann der Asymptoten bei $y = 13,5$ an. Das Messgerät muss also den Bereich zwischen 7 und 13,5 abdecken.

b) Die Lösung ergibt sich aus folgender Gleichung

$$\begin{aligned} p(V) &= 10 \\ 13,5 - 6,5e^{-0,2V} &= 10 \mid -13,5 \\ -6,5e^{-0,2V} &= -3,5 \mid :(-6,5) \\ e^{-0,2V} &= \frac{7}{13} \mid \ln \\ -0,2V &= \ln\left(\frac{7}{13}\right) \mid \cdot(-5) \\ V &= -5\ln\left(\frac{7}{13}\right) \\ V &\approx 3,10 \end{aligned}$$

Es müssen also 3,10 mL Kalilauge hinzugefügt werden, um den Umschlagpunkt zu erreichen.

Lösung zu Übung 47

$$\begin{aligned} e^{-2x} - 4e^{-x} &= 0 \\ e^{-x}\left(e^{-x} - 4\right) &= 0 \mid \text{SvN } e^{-x} = 0 ↯ \text{ oder} \\ e^{-x} - 4 &= 0 \mid\ +4 \\ e^{-x} &= 4 \mid\ \ln \\ -x &= \ln(4) \mid\ \cdot(-1) \\ x &= -\ln(4) \end{aligned}$$

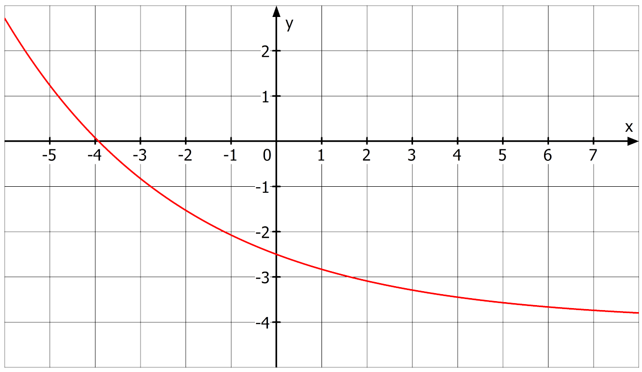
Lösung zu Übung 48

$$2e^x - 4 = e^x \mid -e^x + 4$$
$$e^x = 4 \mid \ln$$
$$x = \ln(4)$$

Lösung zu Übung 49

Die Gleichung der Asymptoten ist $y = -4$. Zum Zeichnen des Schaubildes die Wertetabelle des Taschenrechners verwenden!

Das Schaubild müsste um 6 Einheiten nach oben verschoben werden, damit das verschobene Schaubild die Asymptote $y_v = 2$ hat.



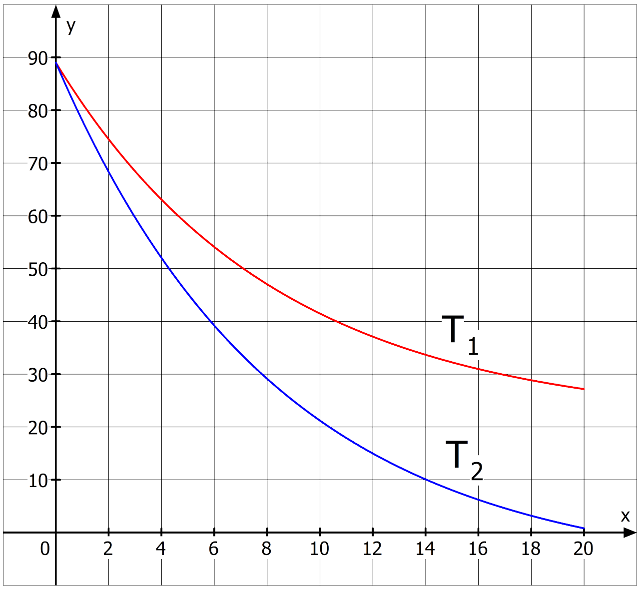
Lösung zu Übung 50

Wir führen die Schritte rückwärts aus:
$6e^{-2x}+4 \xrightarrow{\text{3 Einheiten nach oben}} 6e^{-2x}+7 \xrightarrow{\text{mit Faktor 2 stauchen}} 3e^{-2x}+3,5$
Die gesuchte Funktion ist also $g(x) = 3e^{-2x}+3,5$

Lösung zu Übung 51

a) Die beiden Kaffee haben zum Zeitpunkt $t = 0$ die gleiche Temperatur. Mit $a = 97$ gilt $T_1(0) = 21 + 68 = 89 = -8 + 97 = T_2(0)$

c) T_1 beschreibt die Temperatur des Kaffees in der Wohnung, da dieser langsamer abkühlt und langfristig die Temperatur in der Wohnung von 21°C erreicht (Asymptote ist $y_1 = 21$). Dementsprechend beschreibt T_2 die Temperatur des Kaffees im Außenbereich, da er schneller abkühlt und langfristig eine negative Temperatur von -8°C erreicht.



Wertetabelle des Taschenrechners verwenden!

d) Man muss für beide Funktionen folgende Gleichungen lösen:

$$\begin{aligned} T_1(t) &= 45 \\ 21 + 68e^{-0,12t} &= 45 \mid -21 \\ 68e^{-0,12t} &= 24 \mid :68 \\ e^{-0,12t} &= \frac{6}{17} \mid \ln \\ -0,12t &= \ln\left(\frac{6}{17}\right) \mid :(-0,12) \\ t &\approx 8,68 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} T_2(t) &= 45 \\ -8 + 97e^{-0,12t} &= 45 \mid +8 \\ 97e^{-0,12t} &= 53 \mid :97 \\ e^{-0,12t} &= \frac{53}{97} \mid \ln \\ -0,12t &= \ln\left(\frac{53}{97}\right) \mid :(-0,12) \\ t &\approx 5,04 \end{aligned}$$

Eine Person kann ihren Kaffee also knapp 4 Minuten früher genießen $(8,68 - 5,04 = 3,64)$.

Oft ist der Wert einer Größe von einer anderen Größe abhängig, z.B. ändert sich die Geschwindigkeit eines Autos in Abhängigkeit der Zeit oder die Temperatur ändert sich in Abhängigkeit der Zeit. In der Realität sind die meisten Größen von mehreren Variablen abhängig, so ändert sich die Temperatur nicht nur mit der Zeit, sondern auch mit dem Ort (der selbst wieder dreidimensional ist und somit von drei Größen abhängt). Wir werden uns auf Fälle beschränken, in denen die betrachtete Größe von genau einer anderen Größe abhängt.

In den meisten Beispielen aus dem Alltag betrachtet man die Änderung einer Größe über die Zeit. Betrachten wir als Beispiel den Kurs des DAX:

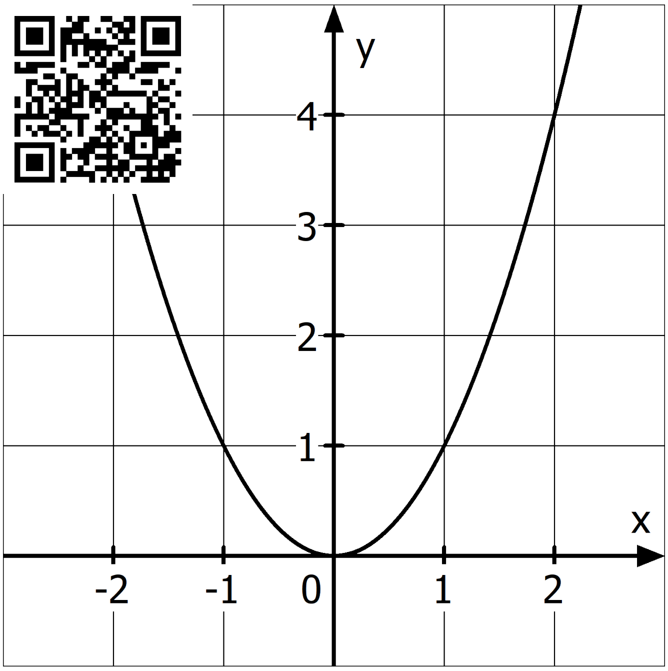
Von Anfang Oktober bis Ende Dezember ist der Kurs von ca. 12.250 Punkten auf ca 14.100 Punkte erhöht. Der Unterschied innerhalb von 3 Monaten beträgt also 1850 Punkte. Die durchschnittliche Änderungsrate oder auch mittlere Änderungsrate entspricht dann $\frac{1850 \text{ Punkte}}{3 \text{ Monate}} \approx 617 \frac{\text{Punkte}}{\text{Monat}}$. Im Mittel ist der DAX also von Anfang Oktober bis Ende Dezember um 617 Punkte pro Monat gestiegen. Würden wir die Achsen des Charts wie üblich mit x-Achse und y-Achse bezeichnen, so lässt sich die mittlere Änderungsrate berechnen, indem man den Unterschied der y-Werte durch den Unterschied der x-Werte teilt.

Änderungsraten

Die mittlere oder durchschnittliche Änderungsrate einer Funktion $f(x)$ auf dem Intervall $[x_1,\ x_2]$ lässt sich allgemein wie folgt bestimmen:

Mittlere Änderungsrate

Diesen Ausdruck kennen wir bereits. Sind von einer Geraden zwei Punkte $P_1(x_1|f(x_1))$ und $P_2(x_2|f(x_2))$ gegeben, so bestimmt der obige Ausdruck die Steigung der Geraden. Tatsächlich kann man die mittlere Änderungsrate als durchschnittliche Steigung der Funktion auffassen. Betrachten wir als Beispiel $f(x) = x^2$:



Die mittlere Änderungsrate im Intervall $[0,\ 1]$ entspricht dann der Steigung der Geraden durch die Punkte $P_1(0|f(0) = 0)$ und $P_2(1|f(1) = 1)$: $\frac{1-0}{1-0} = 1$.

Die mittlere Änderungsrate im Intervall $[0,\ 2]$ entspricht:

Die mittlere Änderungsrate im Intervall $[-1,\ 1,5]$ entspricht:

Die mittlere Änderungsrate einer Funktion auf einem Intervall gibt also an, wie weit man im Schnitt nach oben (positive Änderungsrate) oder nach unten (negative Änderungsrate) gehen muss, wenn man einen Schritt nach rechts macht, um vom linken Punkt auf den rechten Punkt zu kommen. Wie die Funktion vor dem Intervall, im Intervall und nach dem Intervall verläuft, spielt für die mittlere Änderungsrate keine Rolle. Es kommt nur auf den Funktionswert am Beginn des Intervalls und am Endes des Intervalls an.

Beispielsweise haben die Funktionen $g(x) = 0,75x^2$ und $h(x) = e^{\ln(2)x}$ auf dem Intervall $[0,\ 2]$ die gleiche mittlere Änderungsrate:

Mittlere Änderungsrate von $g(x)$: $\dfrac{g(2) - g(0)}{2 - 0} = \frac{3}{2} = 1,5$

Mittlere Änderungsrate von $h(x)$: $\dfrac{h(2) - h(0)}{2 - 0} = \frac{4-1}{2} = 1,5$

Übung 52 **Bestimme die durchschnittliche Änderungsrate des DAX für folgende Zeiträume jeweils pro Monat.**

a) Von Anfang Oktober bis Ende Februar.

b) Von Anfang Oktober bis Ende Juli.

c) Von Anfang Januar bis Ende Mai.

d) Von Anfang Dezember bis Ende Dezember.

Übung 53 **Bestimme jeweils die durchschnittliche Änderungsrate auf den Intervallen $I_1 = [0,\ 2]$ sowie $I_2 = [-2,\ 2]$ und $I_3 = [-1,\ 4]$. Du kannst auf 2 Nachkommastellen runden, falls notwendig.**

a) $f_1(x) = 3x$

b) $f_2(x) = -2x^2$

c) $f_3(x) = x^3 - 2x^2$

d) $f_4(x) = e^x$

e) $f_5(x) = 2e^{3x} - 4$

f) $f_6(x) = -0,1x^3$

g) $f_7(x) = x + 10$

h) $f_8(x) = -e^x + x - 2$

i) $f_9(x) = -\frac{3}{4}x^2 + 3x$

Lösung zu Übung 52

a) Von Anfang Oktober bis Ende Februar.
$\frac{15.200\text{ Punkte}-12.250\text{ Punkte}}{5\text{ Monate}} = 590\frac{\text{Punkte}}{\text{Monat}}$

b) Von Anfang Oktober bis Ende Juli.
$\frac{16.100\text{ Punkte}-12.250\text{ Punkte}}{10\text{ Monate}} = 385\frac{\text{Punkte}}{\text{Monat}}$

c) Von Anfang Januar bis Ende Mai.
$\frac{15.750\text{ Punkte}-14.000\text{ Punkte}}{5\text{ Monate}} = 350\frac{\text{Punkte}}{\text{Monat}}$

d) Von Anfang Dezember bis Ende Dezember.
$\frac{14.000\text{ Punkte}-14.400\text{ Punkte}}{1\text{ Monat}} = -400\frac{\text{Punkte}}{\text{Monat}}$
Die mittlere Änderungsrate ist negativ, da der Kurs gefallen ist.

Lösung zu Übung 53

a) $f_1(x) = 3x$
mittlere Änderungsrate auf $I_1 = [0,\ 2]$: $\frac{6-0}{2-0} = 3$
mittlere Änderungsrate auf $I_2 = [-2,\ 2]$: $\frac{6-(-6)}{2-(-2)} = 3$
mittlere Änderungsrate auf $I_3 = [-1,\ 4]$: $\frac{12-(-3)}{4-(-1)} = 3$
Anmerkung: Da es sich um eine Gerade handelt, ist die mittlere Änderungsrate immer gleich der Steigung der Geraden.

b) $f_2(x) = -2x^2$
mittlere Änderungsrate auf $I_1 = [0,\ 2]$: $\frac{-8-0}{2-0} = -4$
mittlere Änderungsrate auf $I_2 = [-2,\ 2]$: $\frac{-8-(-8)}{2-(-2)} = 0$
mittlere Änderungsrate auf $I_3 = [-1,\ 4]$: $\frac{-32-(-2)}{4-(-1)} = -6$

c) $f_3(x) = x^3 - 2x^2$
mittlere Änderungsrate auf $I_1 = [0,\ 2]$: $\frac{0-0}{2-0} = 0$
mittlere Änderungsrate auf $I_2 = [-2,\ 2]$: $\frac{0-(-16)}{2-(-2)} = 4$
mittlere Änderungsrate auf $I_3 = [-1,\ 4]$: $\frac{32-(-3)}{4-(-1)} = 7$

d) $f_4(x) = e^x$
mittlere Änderungsrate auf $I_1 = [0,\ 2]$: $\frac{7{,}39-1}{2-0} = 3,19$
mittlere Änderungsrate auf $I_2 = [-2,\ 2]$: $\frac{7{,}39-0{,}14}{2-(-2)} = 1,81$
mittlere Änderungsrate auf $I_3 = [-1,\ 4]$: $\frac{54{,}60-0{,}37}{4-(-1)} = 10,85$

e) $f_5(x) = 2e^{3x} - 4$
mittlere Änderungsrate auf $I_1 = [0,\ 2]$: $\frac{802{,}86-(-2)}{2-0} = 402,43$
mittlere Änderungsrate auf $I_2 = [-2,\ 2]$: $\frac{802{,}86-(-4{,}00)}{2-(-2)} = 201,71$
mittlere Änderungsrate auf $I_3 = [-1,\ 4]$: $\frac{325.505{,}58-(-3{,}90)}{4-(-1)} = 65.101,90$

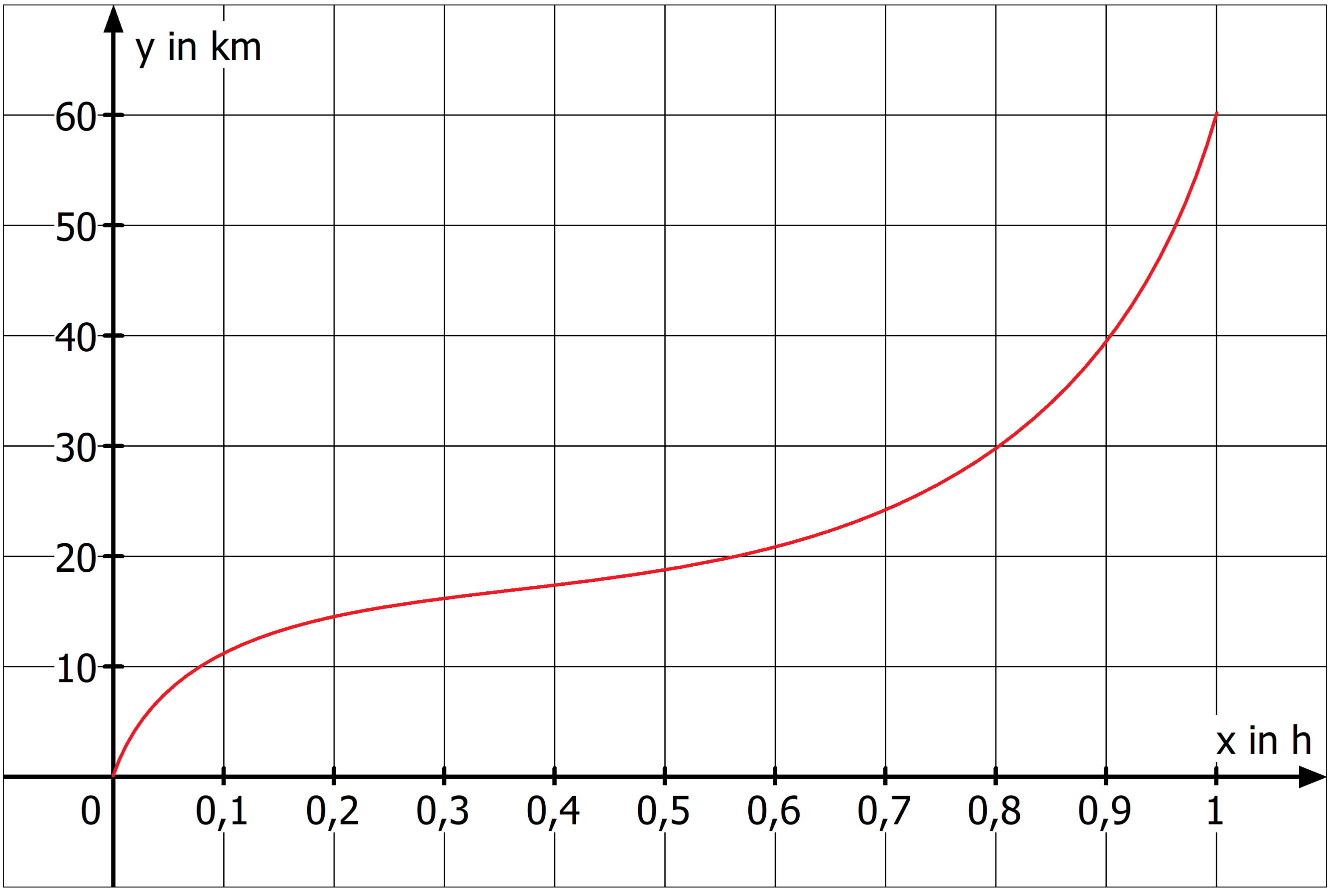
f) $f_6(x) = -0,1x^3$
mittlere Änderungsrate auf $I_1 = [0,\ 2]$: $\frac{-0{,}8-0}{2-0} = -0,4$
mittlere Änderungsrate auf $I_2 = [-2,\ 2]$: $\frac{-0{,}8-0{,}8}{2-(-2)} = -0,4$
mittlere Änderungsrate auf $I_3 = [-1,\ 4]$: $\frac{-6{,}4-0{,}1}{4-(-1)} = -1,3$

g) $f_7(x) = x + 10$
mittlere Änderungsrate auf $I_1 = [0,\ 2]$: $\frac{12-10}{2-0} = 1$
mittlere Änderungsrate auf $I_2 = [-2,\ 2]$: $\frac{12-8}{2-(-2)} = 1$
mittlere Änderungsrate auf $I_3 = [-1,\ 4]$: $\frac{14-9}{4-(-1)} = 1$
Auch hier entspricht die Steigung der mittleren Änderungsraten.

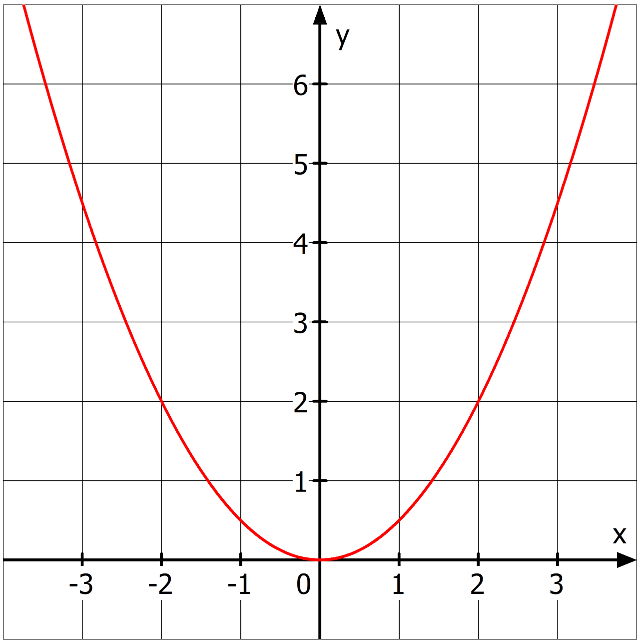
h) $f_8(x) = -e^x + x - 2$
mittlere Änderungsrate auf $I_1 = [0,\ 2]$: $\frac{-7{,}39-(-3)}{2-0} = -2,19$
mittlere Änderungsrate auf $I_2 = [-2,\ 2]$: $\frac{-7{,}39-(-4{,}14)}{2-(-2)} = -0,81$
mittlere Änderungsrate auf $I_3 = [-1,\ 4]$: $\frac{-52{,}60-(-3{,}37)}{4-(-1)} = -9,85$

i) $f_9(x) = -\frac{3}{4}x^2 + 3x$
mittlere Änderungsrate auf $I_1 = [0,\ 2]$: $\frac{3-0}{2-0} = 1,5$
mittlere Änderungsrate auf $I_2 = [-2,\ 2]$: $\frac{3-(-9)}{2-(-2)} = 3$
mittlere Änderungsrate auf $I_3 = [-1,\ 4]$: $\frac{0-(-3{,}75)}{4-(-1)} = 0,75$

Die Geschwindigkeit ist ein weiteres Beispiel für eine Änderungsrate. Sie gibt an wie stark sich der Ort mit der Zeit verändert. Betrachten wir einen Ausschnitt einer Fahrt auf der Autobahn:



Im obigen Beispiel lässt sich die Durchschnittsgeschwindigkeit in der ersten Stunde wie folgt berechnen: $\frac{60km-0km}{1h-0h} = 60\frac{km}{h}$. Man kann leicht erkennen, dass die momentane Geschwindigkeit (auf dem Tacho angezeigte Geschwindigkeit) nicht gleich bleibt, da die Kurve sonst eine Gerade sein müsste. Doch wie kann man die momentane Geschwindigkeit z.B. nach $0,3h$ bestimmen?
Rein vom Verlauf der Kurve her, muss die Geschwindigkeit kleiner als $60\frac{km}{h}$ sein, da die Kurve bei $0,3h$ relativ flach verläuft. Eine bessere Schätzung würde man erhalten, indem man die Durchschnittsgeschwindigkeit von $0,3h$ bis $1h$ bestimmt: $\frac{60km-17km}{1h-0,3h} \approx 61\frac{km}{h}$. Das Auto hatte in den letzten 42 Minuten also eine durchschnittliche Geschwindigkeit von $61\frac{km}{h}$, was eine sogar noch schlechtere Schätzung ist.
Etwas besser wäre es, die rechte Grenze etwas weiter nach links zu schieben, also nicht den Zeitraum von $0,3h$ bis $1h$ zu betrachten, sondern von $0,3h$ bis $0,6h$: $\frac{21km-17km}{0,6h-0,3h} \approx 13\frac{km}{h}$. Diese Schätzung scheint schon deutlich besser zu sein.
Letztlich bestimmen wir die Steigung einer Geraden mit Hilfe eines Steigungsdreiecks, wobei 2 Ecken des Dreiecks auf dem Schaubild der Funktion liegen. Je näher wir die beiden Ecken zusammenschieben, desto näher liegt das Ergebnis an der momentanen Änderungsrate. Mathematisch kann man die 2 Ecken auf einen Punkt zusammenschieben, um die tatsächliche momentane Änderungsrate zu bestimmen. Grafisch wird aus der Geraden dann eine Tangente (vergleiche Tangenten bei der gegenseitigen Lage von Geraden und Parabel). Im obigen Beispiel hätte die Tangente an der Stelle $0,3h$ eine Steigung von ca. $12\frac{km}{h}$, was der auf dem Tacho angezeigten Geschwindigkeit entsprechen würde.



Wert der Ableitung von $f(x) = 0,5x^2$ grafisch bestimmt:

An der Stelle $x_0 = 1$: Die Tangente an der Stelle $x = 1$ hat eine Steigung von ca. 1, also beträgt die Ableitung 1.

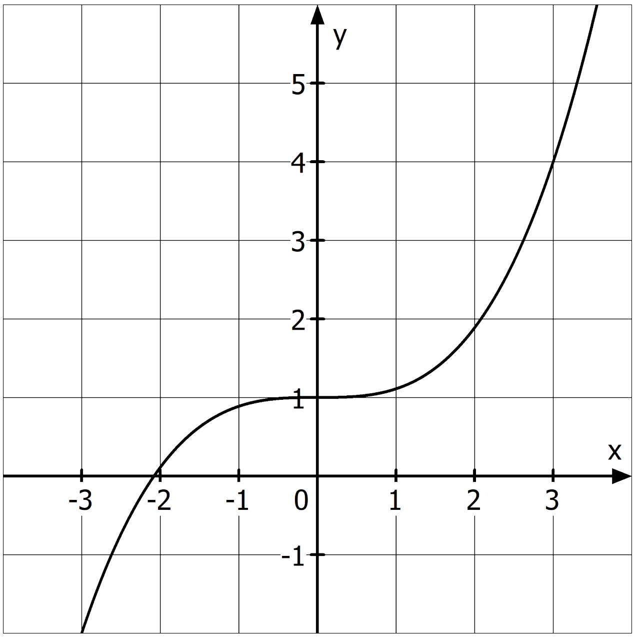
An der Stelle $x_1 = 2$:

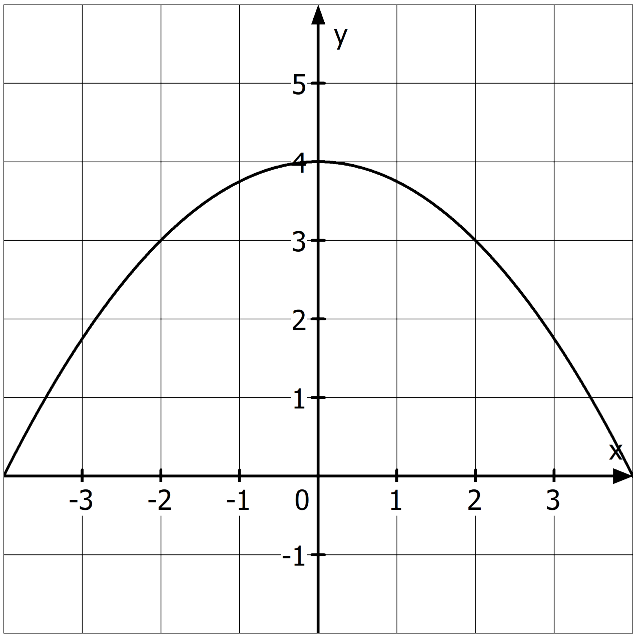
An der Stelle $x_2 = 0$:

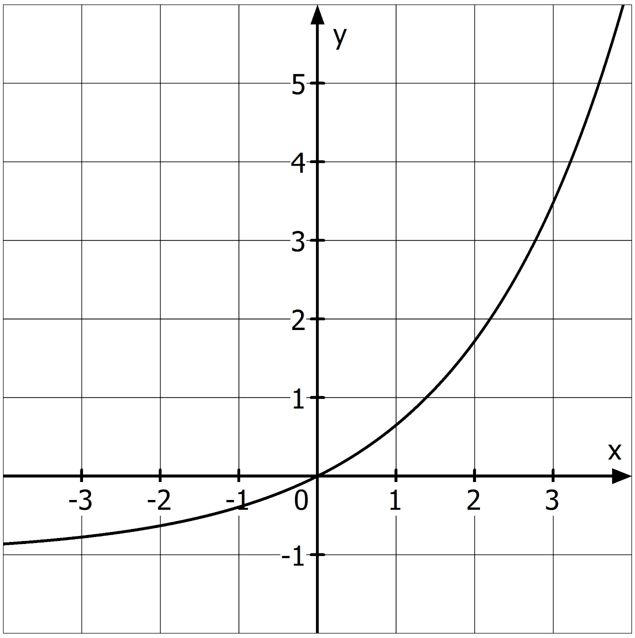
An der Stelle $x_0 = -3$:

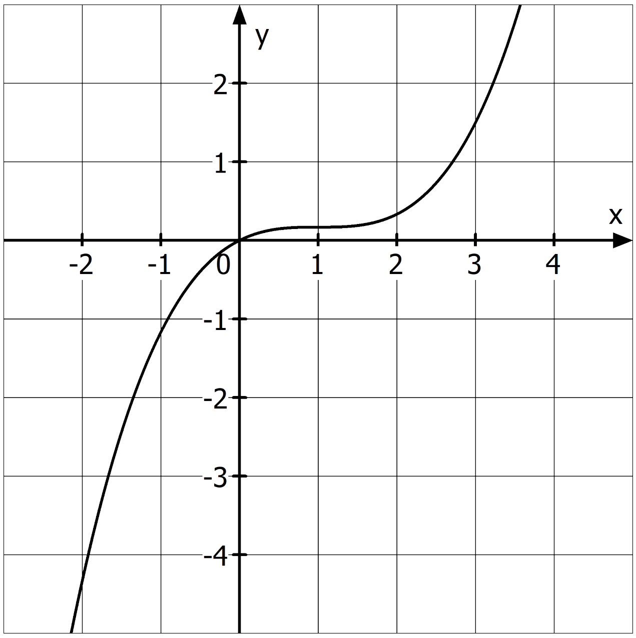
Zusammengefassung: Die momentane Änderungsrate/Ableitung/Steigung einer Funktion gibt also an, wie stark sich die Funktion an einer Stelle ändert (statt innerhalb eines Intervalls wie bei der durchschnittlichen Änderungsrate). Steigt die Funktion, ist die Ableitung positiv, fällt die Funktion ist sie negativ. Je steiler das Schaubild nach oben geht, desto größer ist die Steigung und damit auch die Ableitung. Grafisch lässt sich die Ableitung mit Hilfe der Tangentensteigung abschätzen.

Übung 54 **Schätze jeweils die Ableitung an den Stellen -2, 0, 1 und 3 ab.**

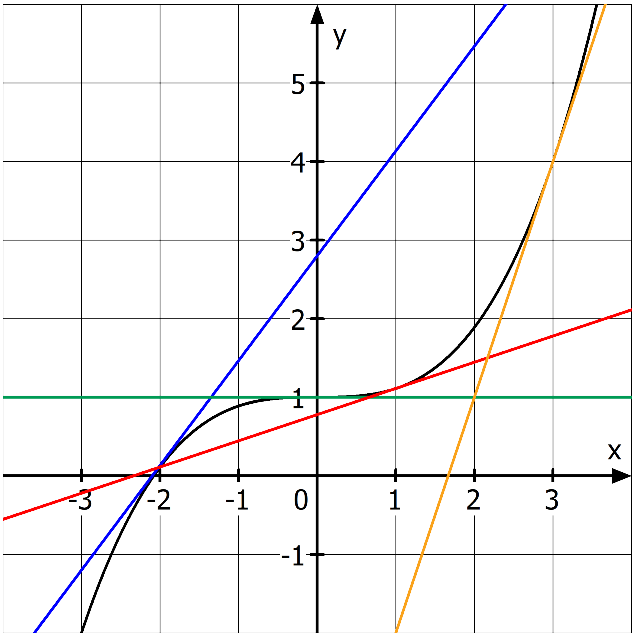








Lösung zu Übung 54

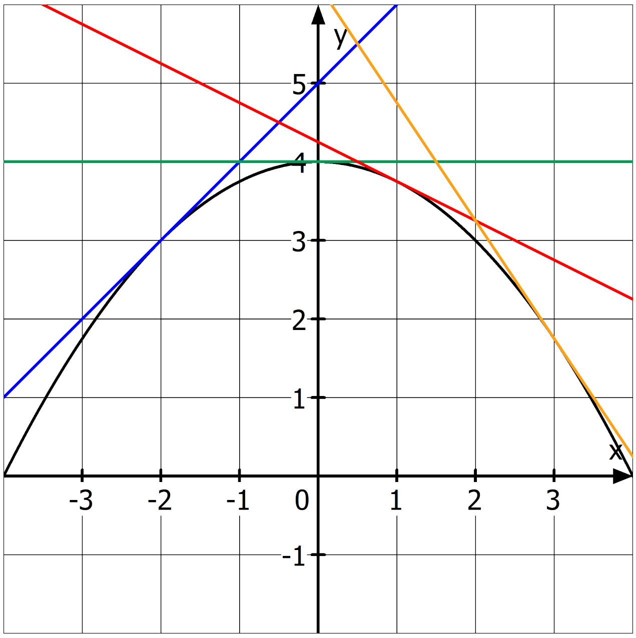


$f'(-2) \approx -\frac{8}{3}$

$f'(0) \approx 0$

$f'(1) \approx \frac{1}{3}$

$f'(3) \approx 3$

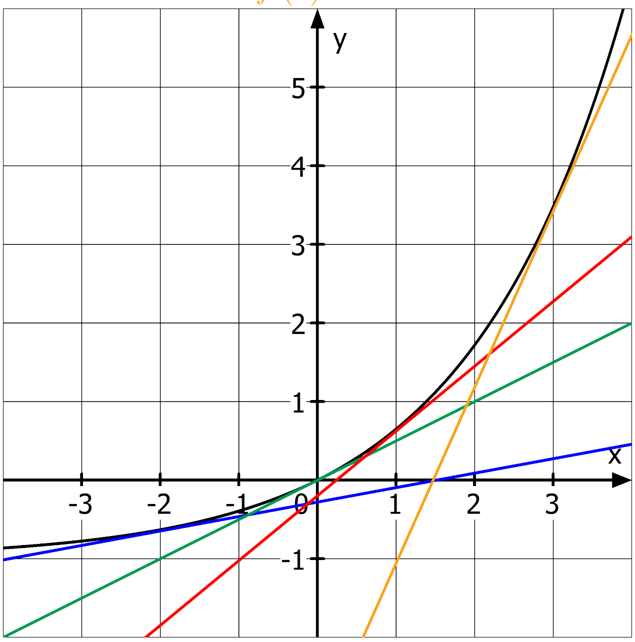


$f'(-2) \approx 1$

$f'(0) \approx 0$

$f'(1) \approx -0,5$

$f'(3) \approx -1,5$

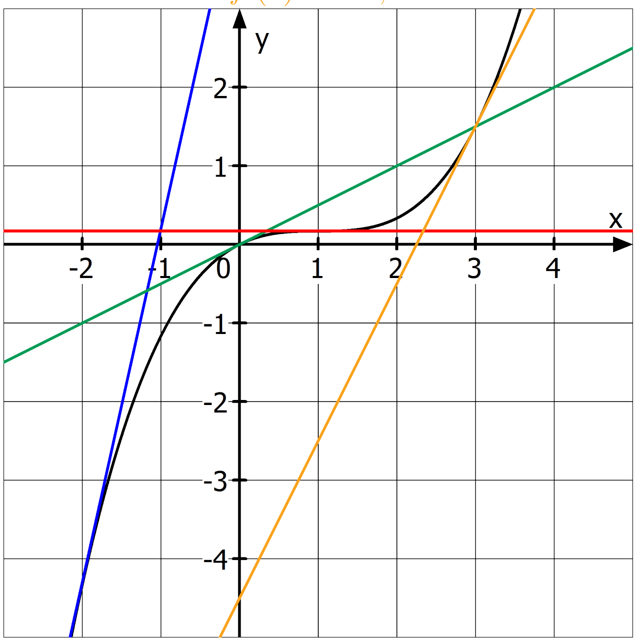


$f'(-2) \approx 0,2$

$f'(0) \approx 0,5$

$f'(1) \approx 0,8$

$f'(3) \approx 2,25$



$f'(-2) \approx 4,5$

$f'(0) \approx 0,5$

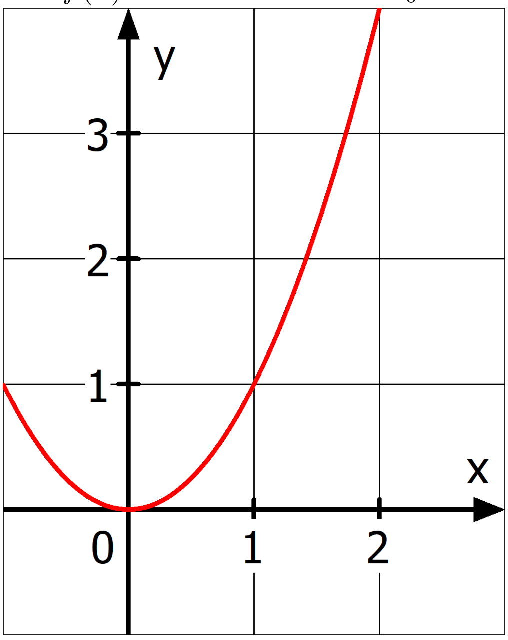
$f'(1) \approx 0$

$f'(3) \approx 2$

Grafisch kann man die momentane Änderungsrate bzw. Steigung bzw. Ableitung einer Funktion an einer Stelle x_0 abschätzen, indem man die Tangente einzeichnet und ihre Steigung bestimmt. Mathematisch bestimmt man die mittlere Änderungsrate mit Hilfe eines Steigungsdreiecks und schiebt dann die beiden Ecken, die auf der Funktion liegen auf einen Punkt zusammen:

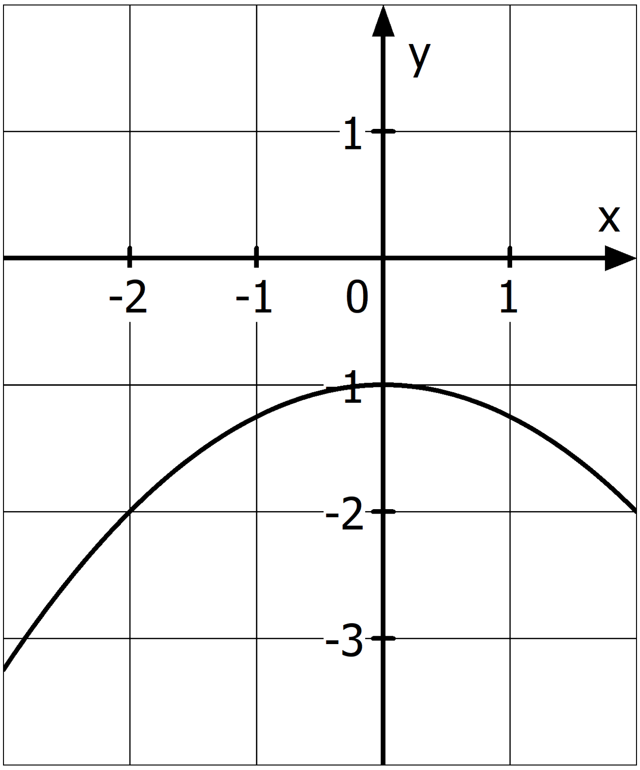
Berechnen der Ableitung:

Den obigen Ausdruck nennt man Differentialquotient. Die Größe h entspricht der Breite des Steigungsdreiecks. Das *lim*-Zeichen (gesprochen Limes) steht für den Grenzwert. Wir lassen h immer näher gegen 0 gehen. Grob vereinfacht (und streng genommen falsch) wollen wir für h den Wert 0 einsetzen. Dann würden wir aber durch 0 teilen, was nicht definiert ist. Jedoch kann man den Bruch umformen bis man für h tatsächlich 0 einsetzen kann. Betrachten wir als Bsp. die Steigung von $f(x) = x^2$ an der Stelle $x_0 = 1$:

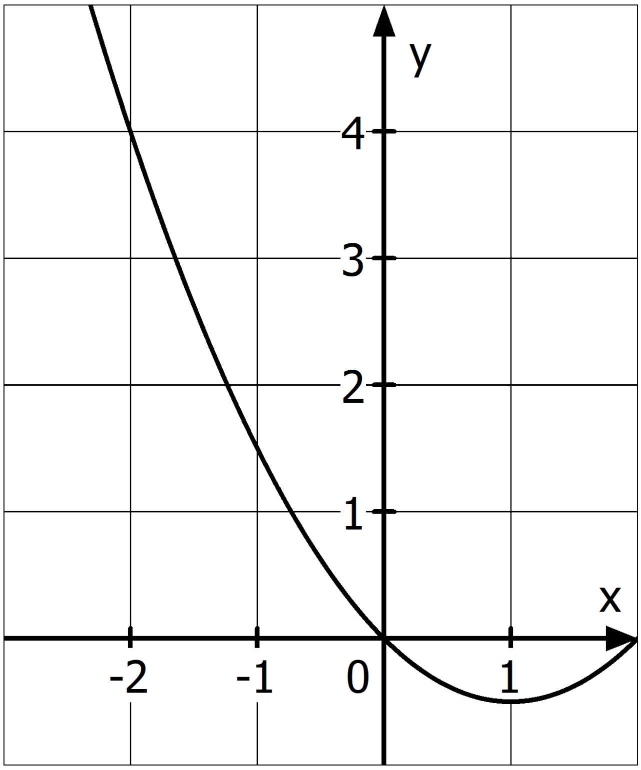


Mit Hilfe des Differentialquotienten kann man also die Werte der Ableitung exakt berechnen. Dazu schreibt man den Quotienten aus und formt den Bruch dann so lange um bis man für h den Wert 0 einsetzen kann ohne, dass man durch 0 teilen würde.
Bestimmen wir nun noch die Ableitung von x^2 an der Stelle $x_0 = -0,5$:

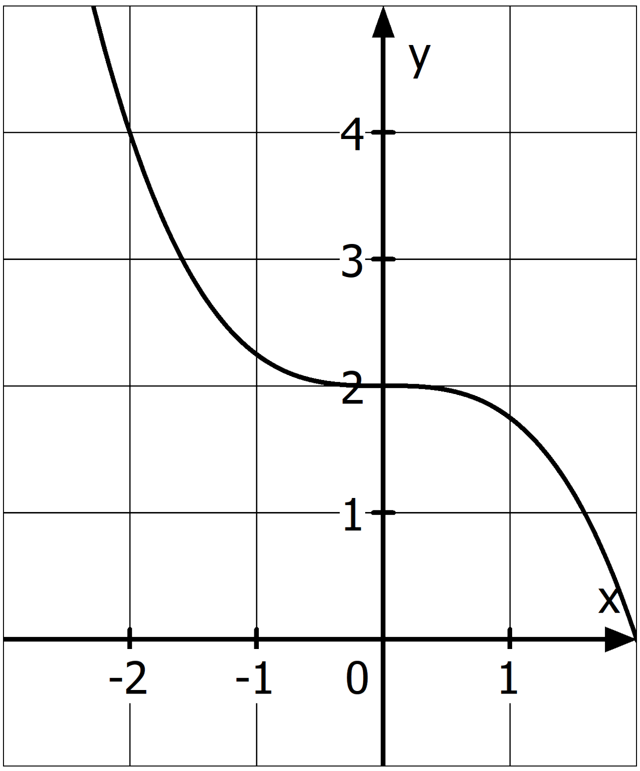
Übung 55 **Schätze jeweils die Ableitung an den Stellen -2 und 1 ab und berechne den Wert dann exakt.**



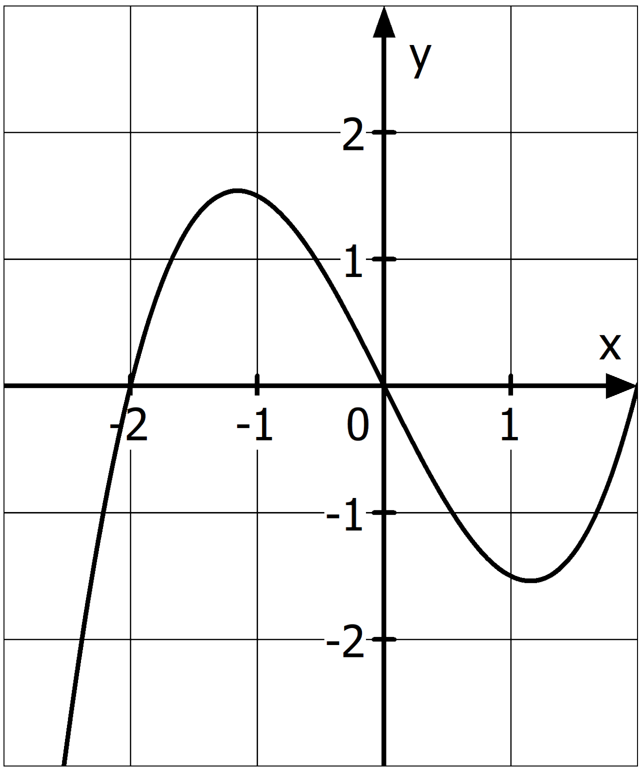
$f(x) = -0,25x^2 - 1$



$f(x) = 0,5x^2 - x$

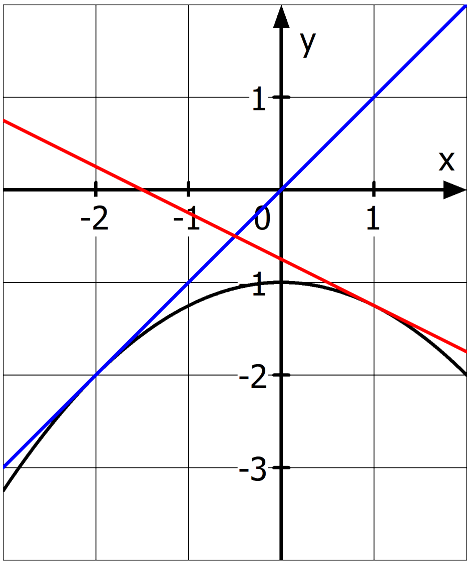


$f(x) = -0,25x^3 + 2$



$f(x) = 0,5x^3 - 2x$

Lösung zu Übung 55

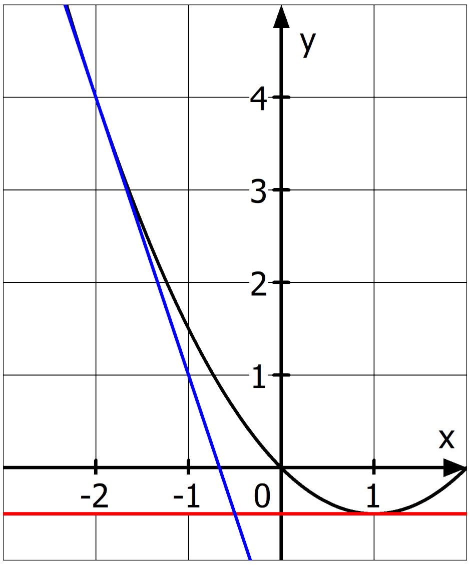


$f(x) = -0,25x^2 - 1$

Schätzung: $f'(-2) \approx 1$ und $f'(1) \approx -0,5$

Berechnung:

$$f'(-2) = \lim_{h\to 0} \frac{f(-2+h) - f(-2)}{h}$$
$$= \lim_{h\to 0} \frac{-0,25(-2+h)^2 - 1 - (-0,25(-2)^2 - 1)}{h}$$
$$= \lim_{h\to 0} 1 - 0,25h = 1$$
$$f'(1) = \lim_{h\to 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h}$$
$$= \lim_{h\to 0} \frac{-0,25(1+h)^2 - 1 - (-0,25 \cdot 1^2 - 1)}{h}$$
$$= \lim_{h\to 0} -0,5 - 0,25h = -0,5$$

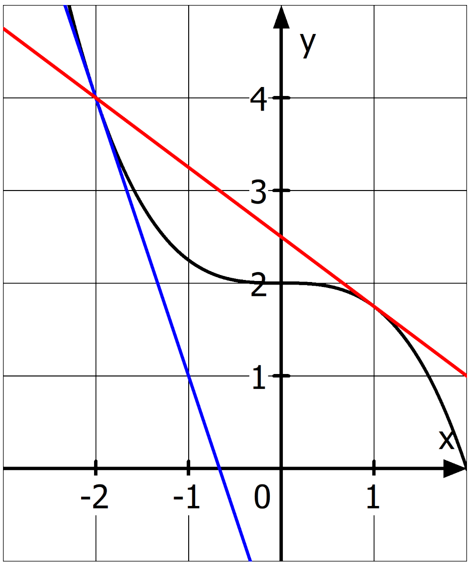


$f(x) = 0,5x^2 - x$

Schätzung: $f'(-2) \approx -3$ und $f'(1) \approx 0$

Berechnung:

$$f'(-2) = \lim_{h\to 0} \frac{f(-2+h) - f(-2)}{h}$$
$$= \lim_{h\to 0} \frac{0,5(-2+h)^2 - (-2+h) - (0,5(-2)^2 - (-2))}{h}$$
$$= \lim_{h\to 0} -3 + 0,5h = -3$$
$$f'(1) = \lim_{h\to 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h}$$
$$= \lim_{h\to 0} \frac{0,5(1+h)^2 - (1+h) - (0,5 \cdot 1^2 - 1)}{h}$$
$$= \lim_{h\to 0} 0,5h = 0$$

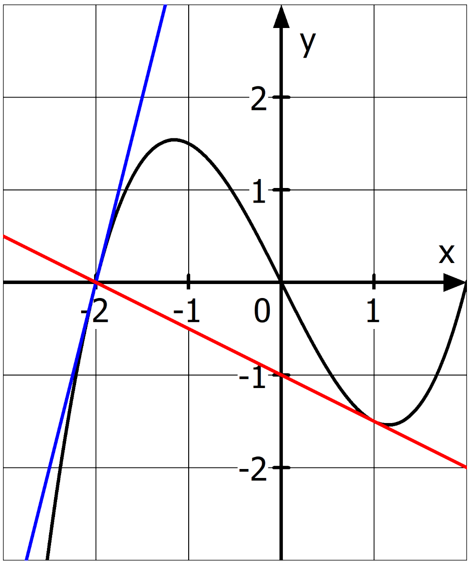


$f(x) = -0,25x^3 + 2$

Schätzung: $f'(-2) \approx -3$ und $f'(1) \approx -0,75$

Berechnung:

$$f'(-2) = \lim_{h\to 0} \frac{f(-2+h) - f(-2)}{h}$$
$$= \lim_{h\to 0} \frac{-0,25(-2+h)^3 + 2 - (-0,25(-2)^3 + 2)}{h}$$
$$= \lim_{h\to 0} -3 + 1,5h - 0,25h^2 = -3$$
$$f'(1) = \lim_{h\to 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h}$$
$$= \lim_{h\to 0} \frac{-0,25(1+h)^3 + 2 - (-0,25 \cdot 1^3 + 2)}{h}$$
$$= \lim_{h\to 0} -0,75 - 0,75h - 0,25h^2 = -0,75$$



$f(x) = 0,5x^3 - 2x$

Schätzung: $f'(-2) \approx 4$ und $f'(1) \approx -0,5$

Berechnung:

$$f'(-2) = \lim_{h \to 0} \frac{f(-2+h) - f(-2)}{h}$$
$$= \lim_{h \to 0} \frac{0,5(-2+h)^3 - 2(-2+h) - (0,5(-2)^3 - 2(-2))}{h}$$
$$= \lim_{h \to 0} 4 - 3h + 0,5h^2 = 4$$
$$f'(1) = \lim_{h \to 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h}$$
$$= \lim_{h \to 0} \frac{0,5(1+h)^3 - 2(1+h) - (0,5 \cdot 1^3 - 2 \cdot 1)}{h}$$
$$= \lim_{h \to 0} -0,5 + 1,5h + 0,5h^2 = -0,5$$

Es ist mühsam die Ableitung für einzelne Stellen mit Hilfe des Differenzialquotienten zu bestimmen. Statt erst einen Wert für x_0 einzusetzen und dann die momentane Änderungsrate zu bestimmen, können wir das Vorgehen umdrehen und erst die momentane Änderungsrate bestimmen und dann Werte einsetzen:

$f(x) = x^2$

$f'(x) =$

Übung 56 **Berechne jeweils allgemein die Ableitung $f'(x)$**

a) $f_1(x) = 2x^2$
b) $f_2(x) = -x^2$
c) $f_3(x) = x$
d) $f_4(x) = 3x - 4$
e) $f_5(x) = x^2 + 1$
f) $f_6(x) = x^2 + x$
g) $f_7(x) = \frac{2}{3}x^2 - \frac{1}{2}$
h) $f_8(x) = 5$
i) $f_9(x) = -x + 7$
j) $f_{10}(x) = \frac{2}{3} - 5x^2$
k) $f_{11}(x) = 3x^2 - 5x$
l) $f_{12}(x) = -0,5x^2 + 0,1x - 9$
m) $f_{13}(x) = -4$
n) $f_{14}(x) = 9 - 4x$
o) $f_{15}(x) = 8x - 4x^2$
p) $f_{16}(x) = x^3$

Lösung zu Übung 56

a) $f_1(x) = 4x$
b) $f_2(x) = -2x$
c) $f_3(x) = 1$
d) $f_4(x) = 3$
e) $f_5(x) = 2x$
f) $f_6(x) = 2x + 1$
g) $f_7(x) = \frac{4}{3}x$
h) $f_8(x) = 0$
i) $f_9(x) = -1$
j) $f_{10}(x) = -10x$
k) $f_{11}(x) = 6x - 5$
l) $f_{12}(x) = -x + 0,1$
m) $f_{13}(x) = 0$
n) $f_{14}(x) = -4$
o) $f_{15}(x) = -8x + 8$
p) $f_{16}(x) = 3x^2$

Es ist mühsam die Ableitung für einzelne Stellen mit Hilfe des Differenzialquotienten zu bestimmen. Statt erst einen Wert für x_0 einzusetzen und dann die momentane Änderungsrate zu bestimmen, können wir das Vorgehen umdrehen und erst die momentane Änderungsrate bestimmen und dann Werte einsetzen:

$f(x) = x^2$

$f'(x) =$

Übung 57 **Berechne jeweils allgemein die Ableitung $f'(x)$**

a) $f_1(x) = 2x^2$
b) $f_2(x) = -x^2$
c) $f_3(x) = x$
d) $f_4(x) = 3x - 4$
e) $f_5(x) = x^2 + 1$
f) $f_6(x) = x^2 + x$
g) $f_7(x) = \frac{2}{3}x^2 - \frac{1}{2}$
h) $f_8(x) = 5$
i) $f_9(x) = -x + 7$
j) $f_{10}(x) = \frac{2}{3} - 5x^2$
k) $f_{11}(x) = 3x^2 - 5x$
l) $f_{12}(x) = -0,5x^2 + 0,1x - 9$
m) $f_{13}(x) = -4$
n) $f_{14}(x) = 9 - 4x$
o) $f_{15}(x) = 8x - 4x^2$
p) $f_{16}(x) = x^3$

Lösung zu Übung 57

a) $f_1(x) = 4x$

b) $f_2(x) = -2x$

c) $f_3(x) = 1$

d) $f_4(x) = 3$

e) $f_5(x) = 2x$

f) $f_6(x) = 2x + 1$

g) $f_7(x) = \frac{4}{3}x$

h) $f_8(x) = 0$

i) $f_9(x) = -1$

j) $f_{10}(x) = -10x$

k) $f_{11}(x) = 6x - 5$

l) $f_{12}(x) = -x + 0,1$

m) $f_{13}(x) = 0$

n) $f_{14}(x) = -4$

o) $f_{15}(x) = -8x + 8$

p) $f_{16}(x) = 3x^2$

Wir kennen nun die Ableitung der Normalparabel. Es scheint naheliegend, dass die Ableitungen von $2x^2,\ 3x^2,\ -x^2$ und ähnlichen Funktionen eine zu x^2 ähnliche Ableitung haben. Wir berechnen die Ableitung von $f_a(x) = ax^2$:

$f_a(x) = ax^2$

$f_a'(x) =$

Tatsächlich lässt sich ganz allgemein zeigen, dass die Ableitung einer Funktion und einem Faktor $af(x)$ gleich dem gleichen Faktor mal der Ableitung ist: $(af(x))' = af'(x)$:

$g(x) = af(x)$

$g'(x) =$

Faktorregel:

Auch mit Hilfe der Faktorregel müssen wir die Ableitung von Funktionen wie x^2, x^3, $x^4, \ldots$ mit Hilfe des Differentialquotienten bestimmen. Glücklicherweise können wir die Ableitung dieser Funktionen sehr einfach mit Hilfe der Potenzregel berechnen. Dazu bestimmen wir die Ableitung einer Funktion $f(x) = x^n$:

$f(x) = x^n$

$f'(x) =$

Wir haben also eine Regel gefunden um alle Funktionen vom Typ $f(x) = x^n$ abzuleiten. Verbunden mit der Faktorregel ergibt sich:

$f(x) = ax^n$
$f'(x) =$

Potenzregel:

Übung 58 Berechne jeweils allgemein die Ableitung $f'(x)$

a) $f_1(x) = x^3$
b) $f_2(x) = x^4$
c) $f_3(x) = x^5$
d) $f_4(x) = -2x^3$
e) $f_5(x) = 5x^4$
f) $f_6(x) = \frac{2}{3}x^6$
g) $f_7(x) = \frac{1}{2}x^4$
h) $f_8(x) = 4x$
i) $f_9(x) = 0.5x^6$
j) $f_{10}(x) = \frac{2}{3}x^9$
k) $f_{11}(x) = \frac{3}{8}x^4$
l) $f_{12}(x) = -3x^{11}$
m) $f_{13}(x) = \frac{x^3}{6}$
n) $f_{14}(x) = x^5 \cdot 7$
o) $f_{15}(x) = -0,2x^8$
p) $f_{16}(x) = \frac{5}{99}x^{99}$

Lösung zu Übung 58

a) $f_1'(x) = 3x^2$
b) $f_2'(x) = 4x^3$
c) $f_3'(x) = 5x^4$
d) $f_4'(x) = -6x^2$
e) $f_5'(x) = 20x^3$
f) $f_6'(x) = 4x^5$
g) $f_7'(x) = 2x^3$
h) $f_8'(x) = 4$
i) $f_9'(x) = 3x^5$
j) $f_{10}'(x) = 6x^8$
k) $f_{11}'(x) = \frac{3}{2}x^3$
l) $f_{12}'(x) = -33x^{10}$
m) $f_{13}'(x) = \frac{1}{2}x^2$
n) $f_{14}'(x) = 35x^4$
o) $f_{15}'(x) = -1,6x^7$
p) $f_{16}'(x) = 5x^{98}$

Wir wissen nun wie man Potenzfunktionen ableiten kann. Ganzrationale Funktionen sind jedoch oft eine Summe aus mehreren Potenzfunktionen. Ganzrationale Funktionen lassen sich einfach ableiten mit Hilfe der Summenregel. Dazu leiten wir die Summe aus zwei Funktionen allgemein ab:

$$k(x) = f(x) + g(x)$$

$$k'(x) =$$

Die Summenregel gibt vor, wie man Funktionen ableiten kann, die aus einer Summe bestehen:

$$k(x) = f(x) + g(x)$$
$$k'(x) =$$

Summenregel:

Übung 59 **Berechne jeweils allgemein die Ableitung $f'(x)$**

a) $f_1(x) = 2x^3 - 4x$

b) $f_2(x) = 2x^4 + 4$

c) $f_3(x) = 2x^3 - x^2 + 7x$

d) $f_4(x) = 4x^2 - 8$

e) $f_5(x) = 3x^4 + x^3 - 8x$

f) $f_6(x) = \frac{5}{6}x^3 + 5x^2$

g) $f_7(x) = -\frac{3}{2}x^4 + x^3 - 2x$

h) $f_8(x) = 4x^4 + 3x^3 - 2x^2$

i) $f_9(x) = 1.5x^4 - 2,3x^2 + 5$

j) $f_{10}(x) = -\frac{3}{4}x^2 + 2x$

k) $f_{11}(x) = \frac{2}{3}x^4 - \frac{8}{3}x^2$

l) $f_{12}(x) = -\frac{5}{33}x^{11} + \frac{4}{81}x^9$

m) $f_{13}(x) = \frac{x^4}{6} + \frac{3x^2}{8}$

n) $f_{14}(x) = x(2x^2 - 4x)$

o) $f_{15}(x) = (x+1)^2$

p) $f_{16}(x) = (x+3)(x-4)$

Lösung zu Übung 59

a) $f_1'(x) = 6x^2 - 4$

b) $f_2'(x) = 8x^3$

c) $f_3'(x) = 6x^2 - 2x + 7$

d) $f_4'(x) = 8x$

e) $f_5'(x) = 12x^3 + 3x^2 - 8$

f) $f_6'(x) = \frac{5}{2}x^2 + 10x$

g) $f_7'(x) = -6x^3 + 3x^2 - 2$

h) $f_8'(x) = 16x^3 + 9x^2 - 4x$

i) $f_9'(x) = 6x^3 - 4,6x$

j) $f_{10}'(x) = -\frac{3}{2}x + 2$

k) $f_{11}'(x) = \frac{8}{3}x^3 - \frac{16}{3}x$

l) $f_{12}'(x) = -\frac{5}{3}x^{10} + \frac{4}{9}x^8$

m) $f_{13}'(x) = \frac{2}{3}x^3 + \frac{3}{4}x$

n) $f_{14}'(x) = 6x^2 - 8x$

o) $f_{15}'(x) = 2x + 2$

p) $f_{16}'(x) = 2x - 1$

Anmerkung: Bei n), o) und p) muss man zuerst ausmultiplizieren bevor man ableiten kann

Die Faktor- und Summenregel gelten analog auch für e-Funktionen. Funktionen vom Typ $f(x) = ae^{kx}$ lassen sich wie folgt ableiten:

$f(x) = a \cdot e^{kx}$

$f'(x) =$

Ableitung von e-Funktionen:

Übung 60 Berechne jeweils allgemein die Ableitung $f'(x)$

a) $f_1(x) = e^x$

b) $f_2(x) = -e^{-x} + e^x$

c) $f_3(x) = e^{-x} + 2$

d) $f_4(x) = 3e^{0,5x} + 2e^x$

e) $f_5(x) = -4e^{\frac{3}{5}x} + 2e^{\frac{1}{4}x}$

f) $f_6(x) = e^{-\frac{7}{8}x} + 2e^{-\frac{1}{2}x}$

g) $f_7(x) = -e^{3x} - 2e^x + 5$

h) $f_8(x) = 0,5e^{4x} - 2e^{2x} + e^x$

i) $f_9(x) = 3e^{-2x} - e^{-x}$

j) $f_{10}(x) = \frac{1}{4}e^{\frac{2}{5}x} + 4x$

k) $f_{11}(x) = -3e^{-\frac{7}{6}x} + 2e^{0,5x}$

l) $f_{12}(x) = 5e^{\frac{3}{8}x} + \frac{7}{3}e^{0,25x}$

m) $f_{13}(x) = 10e^{-\frac{17}{3}x} + 5e^{-5x}$

n) $f_{14}(x) = -\frac{3}{2}e^{-\frac{7}{6}x} + e^{-x}$

o) $f_{15}(x) = 3e^x - 4e$

p) $f_{16}(x) = 3e^x - e^{3x}$

Lösung zu Übung 60

a) $f_1'(x) = e^x$

b) $f_2'(x) = e^{-x} + e^x$

c) $f_3'(x) = -e^{-x}$

d) $f_4'(x) = 1,5e^{0,5x} + 2e^x$

e) $f_5'(x) = -\frac{12}{5}e^{\frac{3}{5}x} + \frac{1}{2}e^{\frac{1}{4}x}$

f) $f_6'(x) = -\frac{7}{8}e^{-\frac{7}{8}x} - e^{-\frac{1}{2}x}$

g) $f_7'(x) = -3e^{3x} - 2e^x$

h) $f_8'(x) = 2e^{4x} - 4e^{2x} + e^x$

i) $f_9'(x) = -6e^{-2x} + e^{-x}$

j) $f_{10}'(x) = \frac{1}{10}e^{\frac{2}{5}x} + 4$

k) $f_{11}'(x) = \frac{7}{2}e^{-\frac{7}{6}x} + e^{0,5x}$

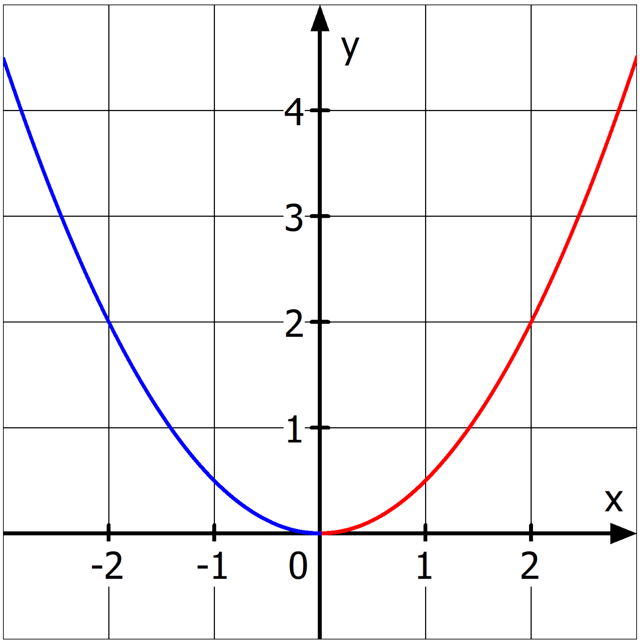
l) $f_{12}'(x) = \frac{15}{8}e^{\frac{3}{8}x} + \frac{7}{12}e^{0,25x}$

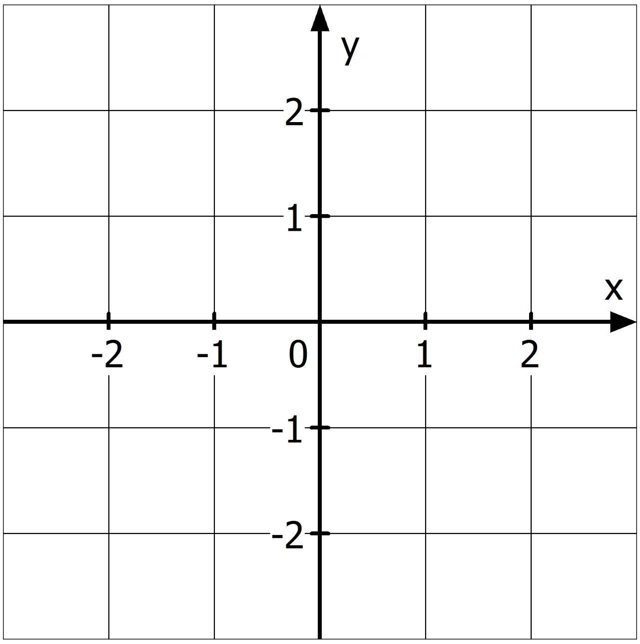
m) $f_{13}'(x) = -\frac{170}{3}e^{-\frac{17}{3}x} - 25e^{-5x}$

n) $f_{14}'(x) = \frac{7}{4}e^{-\frac{7}{6}x} - e^{-x}$

o) $f_{15}'(x) = 3e^x$ (e ohne x fällt weg)

p) $f_{16}'(x) = 3e^x - 3e^{3x}$



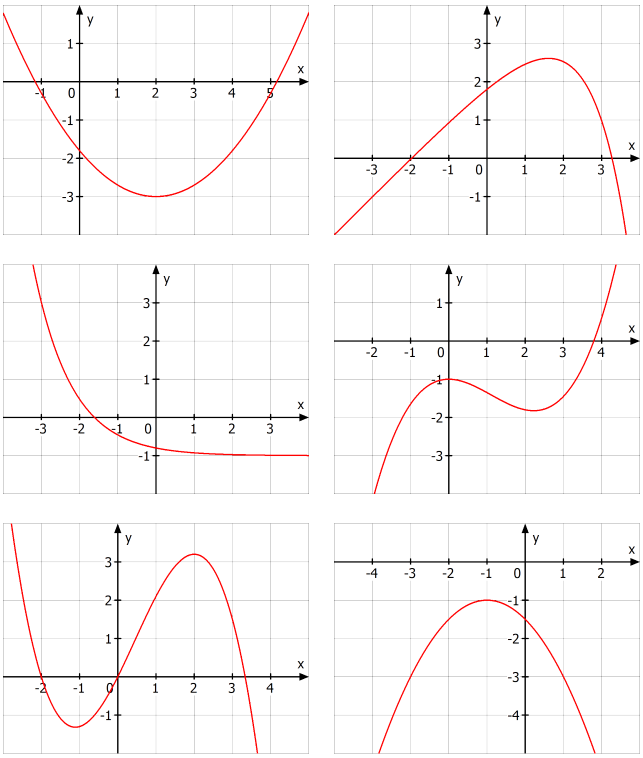


$f(x) = 0,5x^2$ $\qquad$ $f'(x) =$

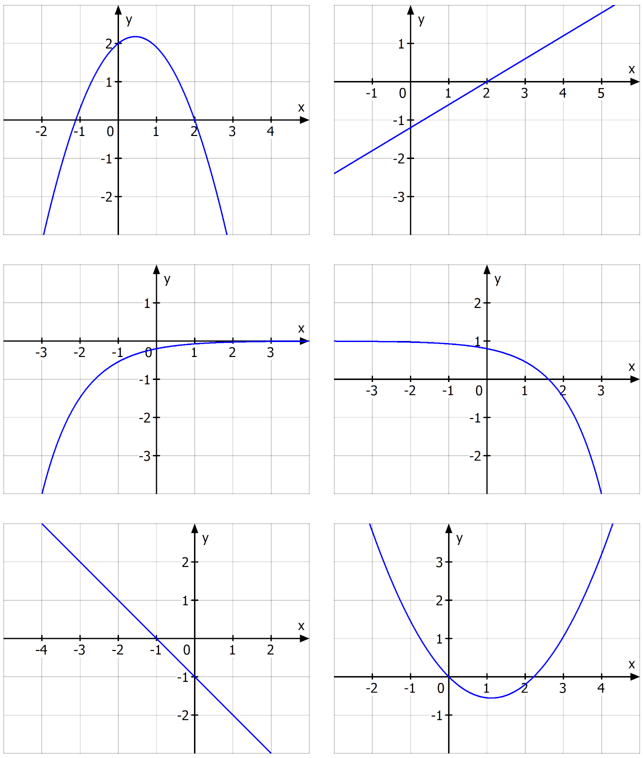
Das Schaubild von $f(x) = x^2$ fällt für $x < 0$, d.h. alle Tangenten in diesem Bereich haben eine negative Steigung und damit ist die Ableitung negativ. Analog gilt für $x > 0$, dass das Schaubild steigt und damit die Ableitung positiv ist.

Übung 61 **Markiere jeweils in welchen Bereichen das Schaubild der Funktionen steigt bzw. fällt, die Ableitungen negativ bzw. positiv sind und ordne dann die Schaubilder der Funktioinen den passenden Schaubildern der Ableitungen zu.**

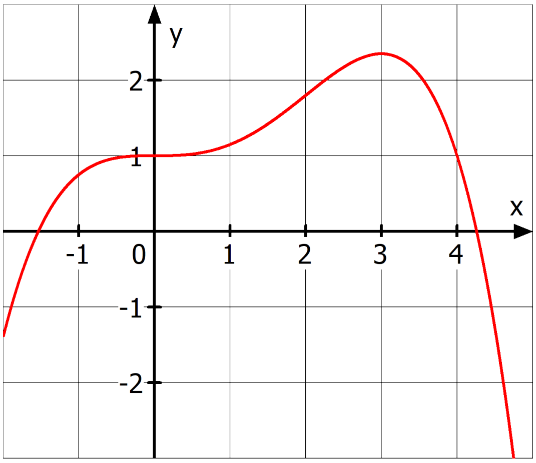
Funktionen

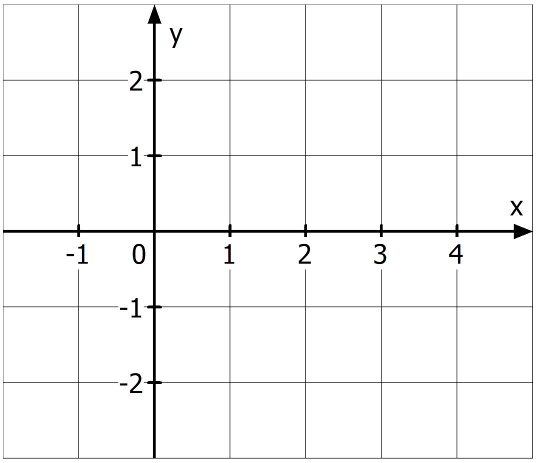


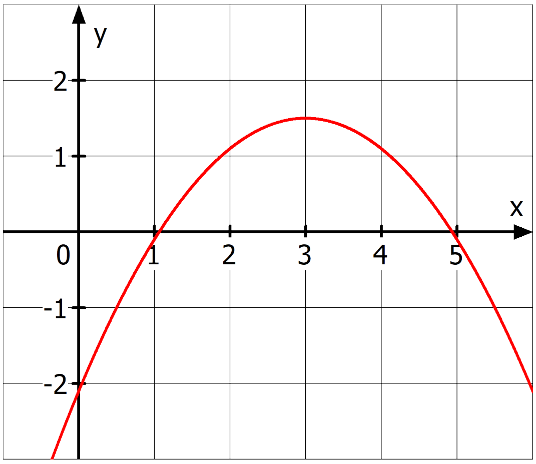
Ableitungen

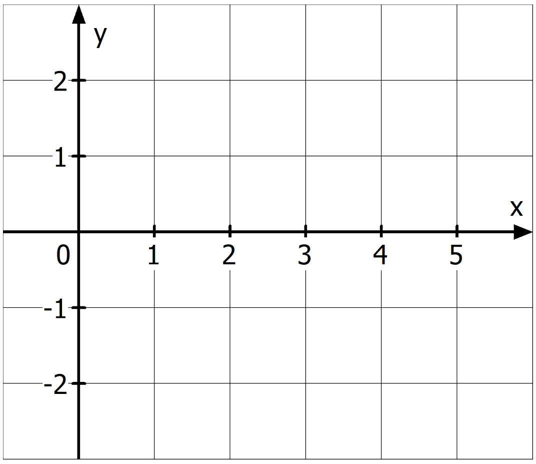


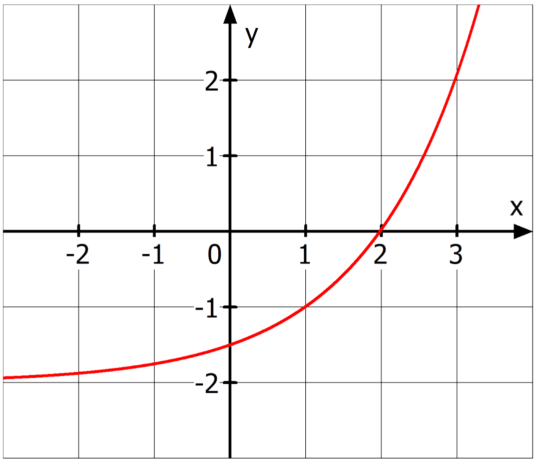
Übung 62 **Skizziere jeweils die Ableitungsfunktion.**

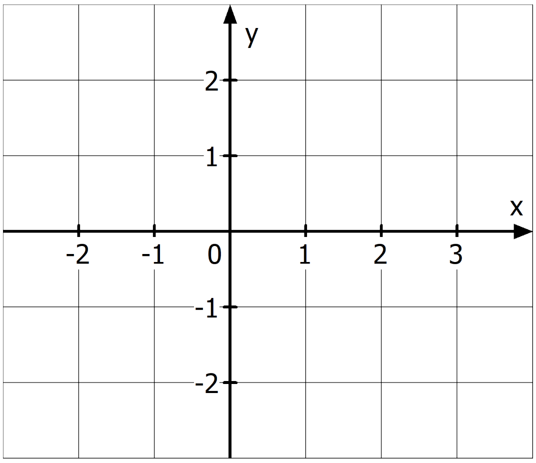


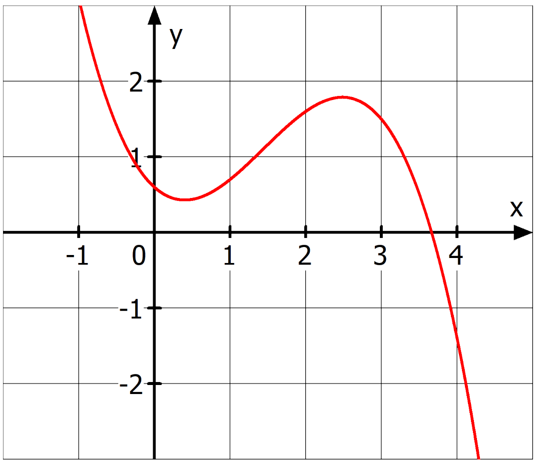


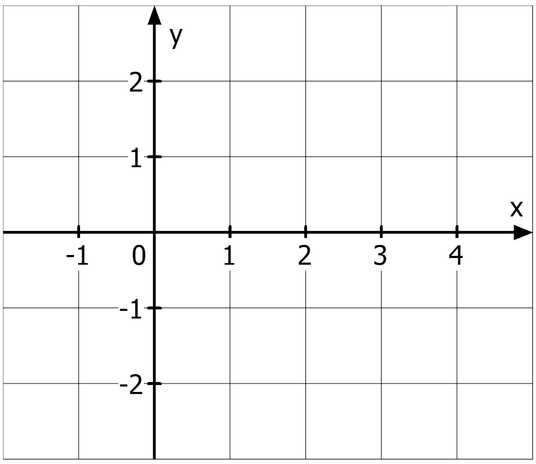






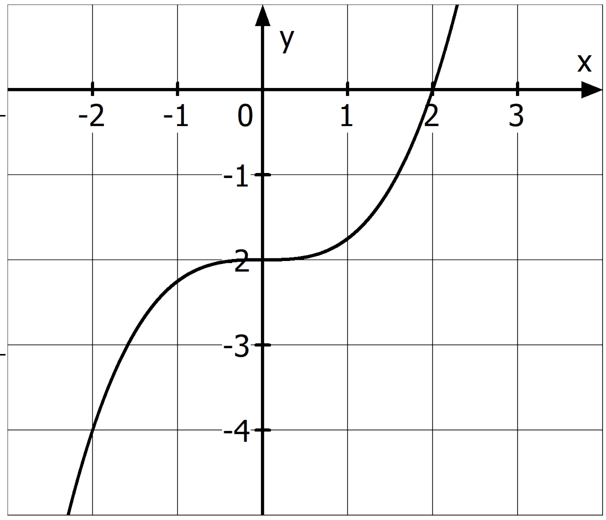






Übung 63 **Zu sehen ist das Schaubild der Ableitung $f'(x)$ einer Funktion $f(x)$ mit dem Schaubild K_f. Die Ableitungsfunktion hat den Grad 3. Kreuze die Aussagen an, die wahr sein müssen.**

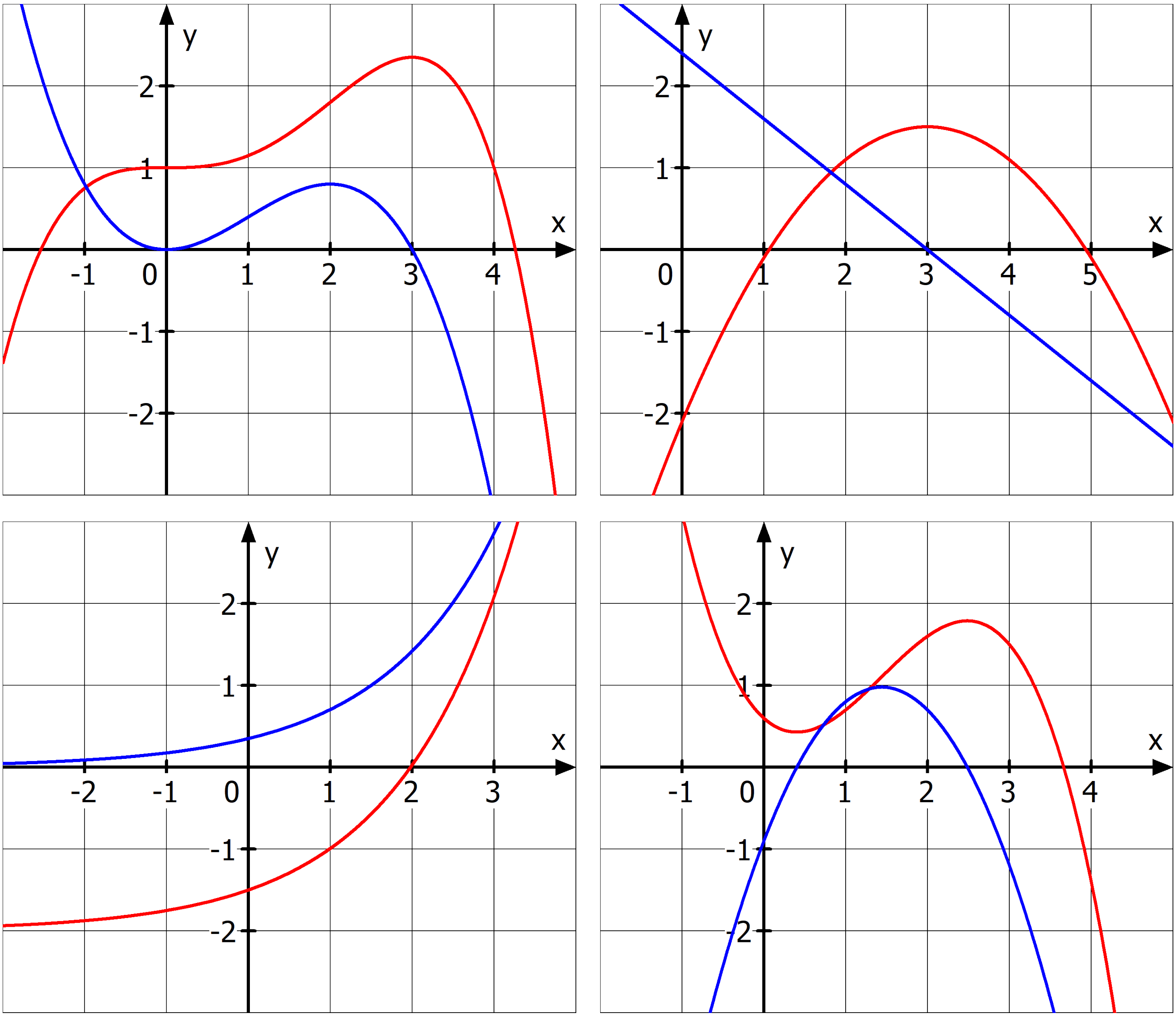
- ☐ K_f hat bei $x = 0$ eine waagrechte Tangente
- ☐ K_f hat mindestens eine Nullstelle
- ☐ K_f hat genau einen x-Wert, an dem die Tangente waagrecht ist.
- ☐ K_f hat auch positive Funktionswerte
- ☐ Es gilt $f(-2) > f(-1)$
- ☐ Es gilt $f(x) > 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$
- ☐ K_f hat einen kleinsten Funktionswert (Tiefpunkt)



Lösung zu Übung 61

Funktionen		Ableitungen	
$f(x)$	$j(x)$	$h'(x)$	$f'(x)$
$g(x)$	$k(x)$	$g'(x)$	$j'(x)$
$h(x)$	$l(x)$	$l'(x)$	$k'(x)$

Lösung zu Übung 62



Hinweis: Grundsätzlich muss die Ableitung positiv sein, wenn die Funktion steigt bzw. negativ, wenn die Funktion fällt. Zusätzlich kann man an ein paar Stellen mit Hilfe der Tangente den Wert der Ableitung schätzen.

Lösung zu Übung 63

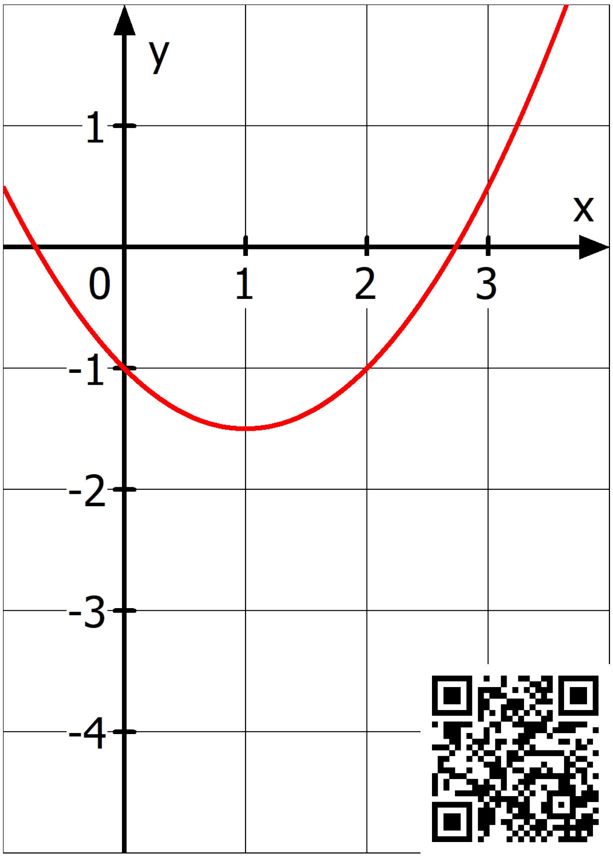
- ☐ K_f hat bei $x = 0$ eine waagrechte Tangente
  Da $f'(0) = -2 \neq 0$ gilt, ist die Tangente fallend mit Steigung -2 und nicht waagrecht (Steigung 0).
- ☐ K_f hat mindestens eine Nullstelle
  Da die Ableitung den Grad 3 hat, hat $f(x)$ den Grad 4. Funktionen vom Grad 4 können NST haben, müssen aber nicht, daher ist die Aussage nicht immer wahr.
- ✓ K_f hat genau einen x-Wert, an dem die Tangente waagrecht ist.
  Die Ableitung hat genau eine NST.
- ✓ K_f hat auch positive Funktionswerte
  Da $f'(x) \xrightarrow{x\to\infty} \infty$ gilt, steigt K_f ab $x = 2$ immer steiler und muss daher auch irgendwann in den positiven Bereich gehen.
- ✓ Es gilt $f(-2) > f(-1)$
  Da die Ableitung im Bereich von $x = -2$ bis $x = -1$ negativ ist, fällt K_f in diesem Bereich, d.h. die Funktionswerte links sind größer als die rechts.
- ☐ Es gilt $f(x) > 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$
  Wir können K_f beliebig in y-Richtung verschieben ohne die Ableitung zu ändern, d.h. dass K_f auch negative Funktionswerte bzw. NST haben kann.
- ✓ K_f hat einen kleinsten Funktionswert (Tiefpunkt)
  Für $x < 2$ ist die Ableitung negativ, d.h. K_f fällt. Für $x > 2$ ist die Ableitung positiv, d.h. K_f steigt. Daraus folgt, dass bei $x = 2$ der Funktionswert am kleinsten ist und K_f einen Tiefpunkt hat.

Damit eine Gerade $g(x) = mx + b$ eine Tangente an der Stelle x_0 an das Schaubild einer Funktion $f(x)$ ist, müssen 2 Bedingungen erfüllt sein:

Beispiel: Bestimme die Tangente an die Funktion $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - x - 1$ an der Stelle $x_0 = 2$.

1. Gleiche Steigungen an der Stelle $x_0 = 2$:

2. Gleiche Funktionswerte an der Stelle $x_0 = 2$:



Übung 64 Bestimme jeweils die Tangentengleichung.

a) $f(x) = x^2 + 3$ an der Stelle $x_0 = 1$

b) $f(x) = -2x^2 + x$ an der Stelle $x_0 = -2$

c) $f(x) = x^3 - 4$ an der Stelle $x_0 = -1$

d) $f(x) = 2x^2 - 2x$ an der Stelle $x_0 = 0$

e) $f(x) = 0,25x^4 - x^2$ an der Stelle $x_0 = 3$

f) $f(x) = x^2 - 2x + 4$ an der Stelle $x_0 = -3$

g) $f(x) = x^3 - x^2 + x$ an der Stelle $x_0 = 3$

h) $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x + 3$ an der Stelle $x_0 = 2$

i) $f(x) = e^x$ an der Stelle $x_0 = \ln(2)$

j) $f(x) = -3e^{2x}$ an der Stelle $x_0 = \ln\left(\frac{1}{2}\right)$

k) $f(x) = \frac{3}{8}x^4 - \frac{3}{4}x^2 - x$ an der Stelle $x_0 = -1$

l) $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - 5x + 6$ an der Stelle $x_0 = 6$

m) $f(x) = -3e^{2x}$ an der Stelle $x_0 = \ln(3)$

n) $f(x) = \frac{3}{2}e^{0,5x} - 3$ an der Stelle $x_0 = \ln(9)$

o) $f(x) = -\frac{3}{16}x^4 + \frac{5}{12}x^3 + \frac{3}{4}x$ an der Stelle $x_0 = -2$

Lösung zu Übung 64

a) $g(x) = 2x + 2$
b) $g(x) = 9x + 8$
c) $g(x) = 3x - 2$
d) $g(x) = -2x$
e) $g(x) = 21x - \frac{207}{4}$
f) $g(x) = -8x + 5$
g) $g(x) = 22x - 45$
h) $g(x) = 3x - \frac{7}{3}$
i) $g(x) = 2x + 2 - 2\ln(2)$
j) $g(x) = -\frac{3}{2}x - \frac{3}{4} - \frac{3}{2}\ln(2)$
k) $g(x) = -\frac{61}{6}x - \frac{29}{4}$
l) $g(x) = x - 12$
m) $g(x) = -54x - 27 + 54\ln(3)$
n) $g(x) = \frac{9}{4}x + \frac{3}{2} - \frac{9}{4}\ln(9)$
o) $g(x) = \frac{47}{4}x + \frac{47}{3}$

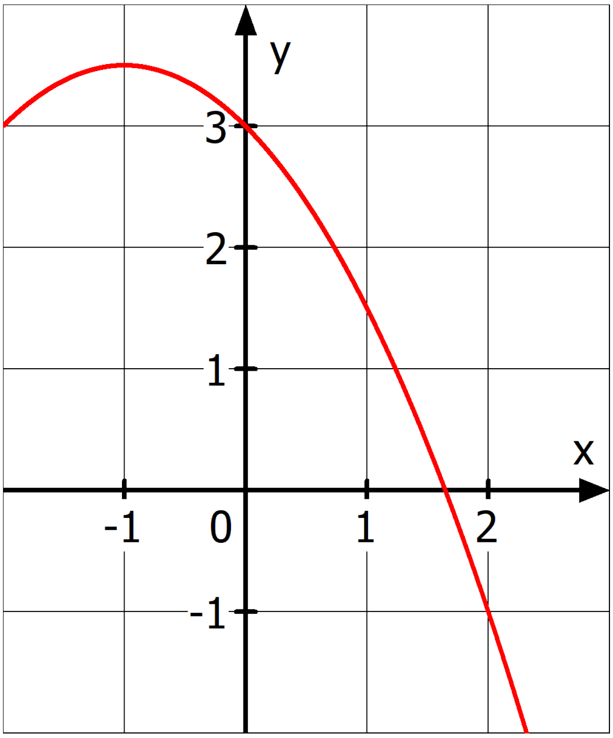
Normalengleichungen

Eine Normale an eine Funktion ist eng mit der Tangenten verwandt. Während eine Tangente am Berührpunkt die gleiche Steigung wie die Funktion hat, schneidet eine Normale die Funktion senkrecht. Damit eine Gerade $n(x) = mx + b$ eine Normale an der Stelle x_0 an das Schaubild einer Funktion $f(x)$ ist, müssen 2 Bedingungen erfüllt sein:

Beispiel: Bestimme die Normale an die Funktion $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 - x + 3$ an der Stelle $x_0 = 1$.

1. Produkt der Steigungen muss -1 ergeben:

2. Gleiche Funktionswerte an der Stelle $x_0 = 1$:



Übung 65 Bestimme jeweils die Normalengleichung.

a) $f(x) = -x^2 + 1$ an der Stelle $x_0 = -1$
b) $f(x) = -1,5x^2 + x$ an der Stelle $x_0 = 2$
c) $f(x) = x^3 + 2$ an der Stelle $x_0 = 1$
d) $f(x) = -2x^2 + 2x$ an der Stelle $x_0 = 0$
e) $f(x) = -0,25x^4 + 9x$ an der Stelle $x_0 = -3$
f) $f(x) = \frac{3}{2}x^2 - 2x + 1$ an der Stelle $x_0 = -3$
g) $f(x) = x^3 - 2x^2 + x$ an der Stelle $x_0 = \frac{2}{3}$
h) $f(x) = \frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{2}x + 3$ an der Stelle $x_0 = 1$
i) $f(x) = e^x$ an der Stelle $x_0 = -\ln(2)$
j) $f(x) = 3e^{-2x}$ an der Stelle $x_0 = \ln(3)$
k) $f(x) = \frac{5}{8}x^4 - \frac{5}{4}x^2 - x$ an der Stelle $x_0 = -1$
l) $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - 3x + 5$ an der Stelle $x_0 = -6$
m) $f(x) = 2e^{-3x}$ an der Stelle $x_0 = 0$
n) $f(x) = -\frac{3}{2}e^{0,5x} - 3$ an der Stelle $x_0 = \ln(16)$
o) $f(x) = -\frac{5}{16}x^4 + \frac{7}{12}x^3 + \frac{3}{4}x$ an der Stelle $x_0 = -1$

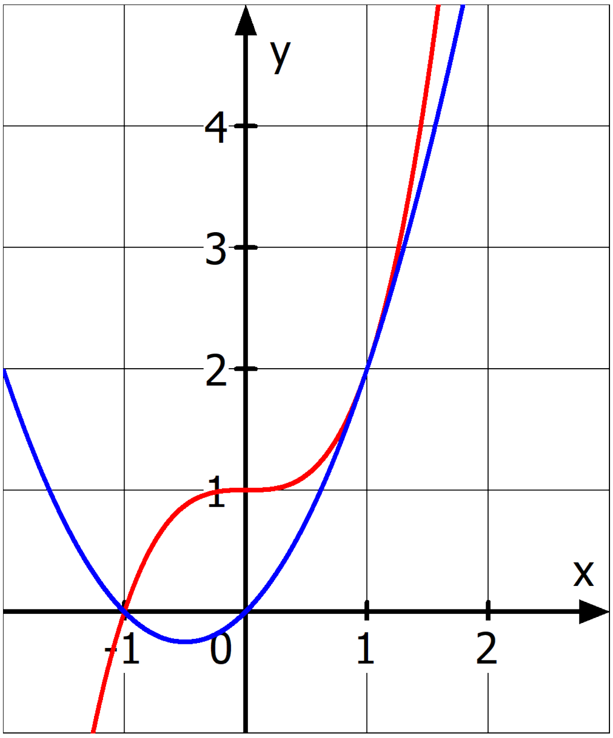
Lösung zu Übung 65

a) $n(x) = -\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$
b) $n(x) = \frac{1}{5}x - \frac{22}{5}$
c) $n(x) = -\frac{1}{3}x + \frac{10}{3}$
d) $n(x) = -\frac{1}{2}x$
e) $n(x) = -\frac{1}{36}x - \frac{142}{3}$
f) $n(x) = \frac{1}{11}x + \frac{457}{22}$
g) $n(x) = 3x - \frac{52}{27}$
h) $n(x) = -2x + \frac{8}{3}$
i) $n(x) = -2x + \frac{1}{2} - \ln(4)$
j) $n(x) = \frac{3}{2}x + \frac{1}{3} - \frac{3}{2}\ln(3)$
k) $n(x) = x + \frac{11}{8}$
l) $n(x) = \frac{1}{9}x + \frac{125}{3}$
m) $n(x) = \frac{1}{6}x + 2$
n) $n(x) = \frac{1}{3}x - 9 - \frac{1}{3}\ln(16)$
o) $n(x) = \frac{15}{4}x - \frac{153}{80}$

Das Berühren zweier Funktionen $f(x)$ und $g(x)$ ist die Erweiterung der Tangente auf beliebige Funktionen. Eine Tangente ist eine Gerade, die eine Funktion an einer Stelle berührt. Man kann statt einer Geraden aber eine beliebige Funktion wählen. Die beiden Bedingungen, die erfüllt sein müssen, damit sich zwei Funktionen an einer Stelle x_0 berühren, bleiben aber die gleichen:

Beispiel: Zeige, dass sich die beiden Funktionen $f(x) = x^3 + 1$ und $g(x) = x^2 + x$ in genau einem Punkt berühren.

1. Die Steigungen müssen gleich sein:



2. Gleiche Funktionswerte:

Übung 66 Bestimme jeweils den Berührpunkt der beiden Funktionen.

a) $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x^2$ und $g(x) = -x^2 + 9x - 18$

b) $f(x) = x^2 - 2x + 1$ und $g(x) = -x^2 + 6x - 7$

c) $f(x) = \frac{1}{2}x^2 + 4x + \frac{1}{2}$ und $g(x) = x^3 - 2$

d) $f(x) = x^2 + 2x - 13$ und $g(x) = 2x^2 - 4x - 4$

e) $f(x) = \frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{6}x^2 - x$ und $g(x) = -3x^2 - 13,5x - 16,5$

f) $f(x) = x^5 - x^3 + 2$ und $g(x) = x^3 - x + 2$ Hinweis: 2 Berührpunkte

g) $f(x) = -x^3 + x + 1,5$ und $g(x) = -x^2 + x + 1,5$

h) $f(x) = -2e^{-x} + 2$ und $g(x) = \frac{1}{2}e^x$

i) $f(x) = -\frac{1}{7}e^{-x} + 1$ und $g(x) = 7e^x + 1$

j) $f(x) = -\frac{1}{e^2}e^{-x}$ und $g(x) = e^x - \frac{2}{e}$

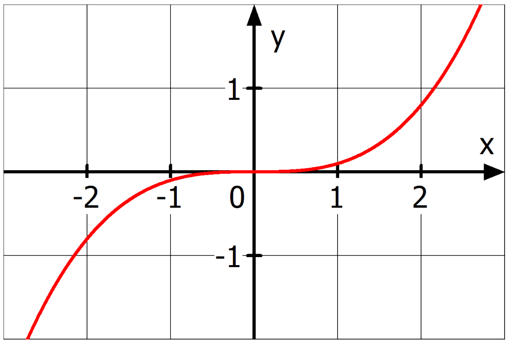
Lösung zu Übung 66

a) $P(3|0)$
b) $P(2|1)$
c) $P(-1|-3)$
d) $P(3|2)$
e) $P(-3|-3)$
f) $P(1|2)$ und $Q(-1|2)$
g) $P(0|1,5)$
h) $P(\ln(2)|1)$
i) $P(-2|0)$
j) $P\left(-1|-\frac{1}{e}\right)$

Die Begriffe positive/negative Steigung bzw. steigende/fallende Funktion haben wir bereits intuitiv verwendet. Jetzt wollen wir diese mathematisch definieren.

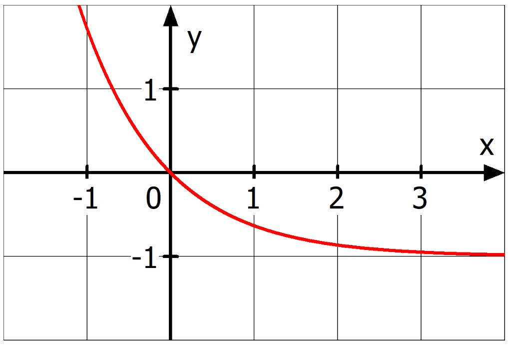
Monoton wachsende Funktionen:

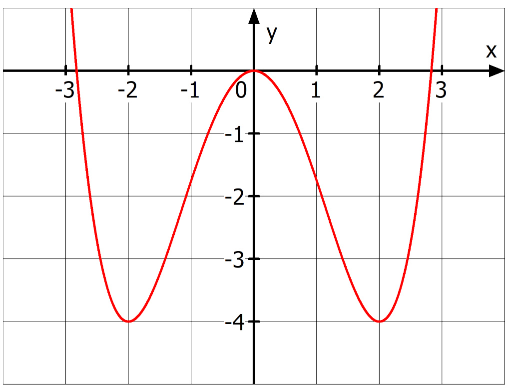
Beispiel: $f(x) = \frac{1}{10}x^3$



Monoton fallende Funktionen:

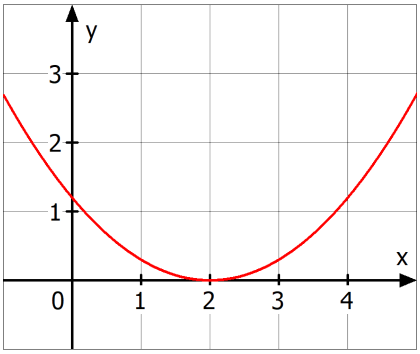
Beispiel: $f(x) = e^{-x} - 1$

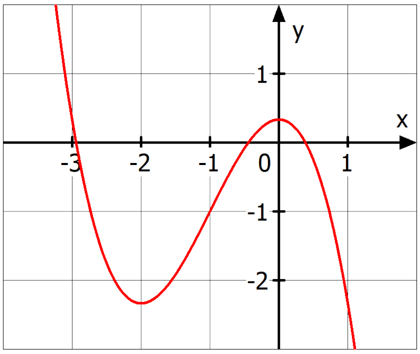


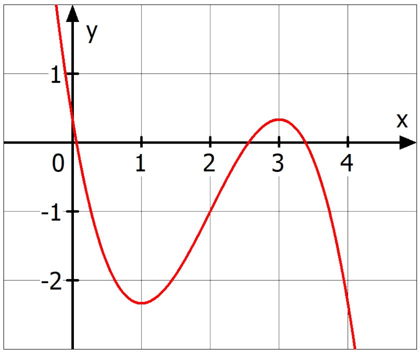


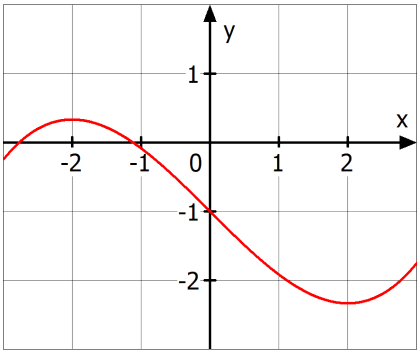
Monotonie kann auch für Intervalle definiert werden:
Die Funktion $f(x) = \frac{1}{4}x^4 - 2x^2$ hat folgende Monotonieintervalle:

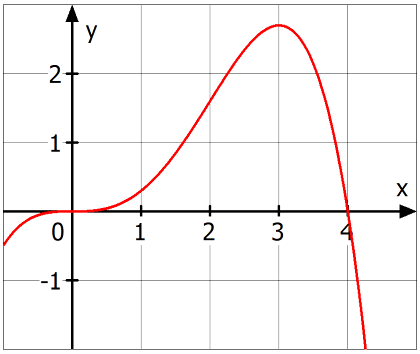
Übung 67 Bestimme die Monotonieintervalle.

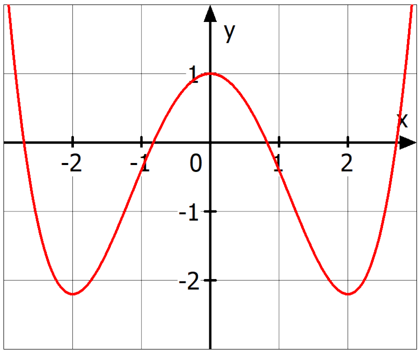


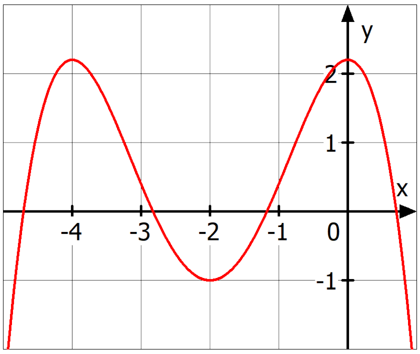


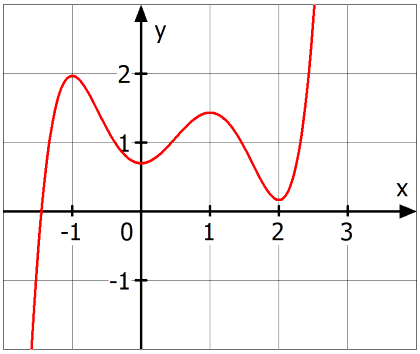


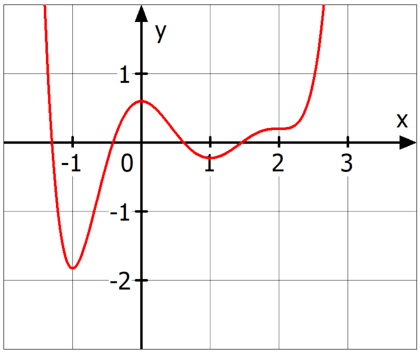












Lösung zu Übung 67

Monoton fallend auf $]-\infty;2]$ Monoton steigend auf $[2;\infty[$	Monoton fallend auf $]-\infty;-2]$ und $[0;\infty[$ Monoton steigend auf $[-2;0]$	Monoton fallend auf $]-\infty;1]$ und $[3;\infty[$ Monoton steigend auf $[1;3]$
Monoton fallend auf $[-2;2]$ Monoton steigend auf $]-\infty;-2]$ und $[2;\infty[$	Monoton fallend auf $[3;\infty[$ Monoton steigend auf $]-\infty;3]$	Monoton fallend auf $]-\infty;-2]$ und $[1;2]$ Monoton steigend auf $[-2;0]$ und $[2;\infty[$
Monoton fallend auf $[-4;-2]$ und $[0;\infty[$ Monoton steigend auf $]-\infty;-4]$ und $[-2;0]$	Monoton fallend auf $[-1;0]$ und $[1;2]$ Monoton steigend auf $]-\infty;-1]$, $[0;1]$ und $[1;\infty[$	Monoton fallend auf $]-\infty;-1]$ und $[0;1]$ Monoton steigend auf $[-1;0]$ und $[1;\infty[$

Die Ableitung einer Funktion ist selbst eine Funktion und kann als solche nochmals abgeleitet werden. Man spricht dann von der zweiten Ableitung, die man nochmals zur dritten Ableitung ableiten kann. Im Prinzip kann man eine Funktion unendlich oft ableiten. Wir werden nur die erste bis dritte Ableitung benötigen. Die Ableitung der Ableitung gibt die Steigung der Ableitung an, z.B. ist die erste Ableitung des Orts die Geschwindigkeit, die angibt wie schnell sich der Ort ändert. Die Ableitung der Geschwindigkeit ist die Beschleunigung, die angibt wie schnell sich die Geschwindigkeit ändert.

- Funktion:
- Erste Ableitung:
- Zweite Ableitung:
- Dritte Ableitung:

Übung 68 **Bestimme jeweils die erste, zweite und dritte Ableitung.**

a) $f_1(x) = 3x^4 - 2x^3 + x^2 - 4$
b) $f_2(x) = -\frac{1}{12}x^4 + \frac{2}{9}x^3 + x$
c) $f_3(x) = \frac{7}{40}x^6 - \frac{9}{8}x^4 + \frac{3}{10}x^2$
d) $f_4(x) = 4e^{-2x} + 5x - 3$
e) $f_5(x) = -\frac{5}{12}x^6 - \frac{3}{2}x^3 - \frac{3}{7}x$
f) $f_6(x) = 2x^2 - x + 5$
g) $f_7(x) = -\frac{3}{28}x^7 - \frac{5}{4}x^4 + \frac{3}{10}x - 8$
h) $f_8(x) = \frac{1}{25}e^{5x} - x + 8$
i) $f_9(x) = -\frac{15}{8}x^4 + \frac{3}{4}x^2$
j) $f_{10}(x) = 1,25x^4 - 0,2x^3 + x$
k) $f_{11}(x) = -0,1x^5 + 0,3x^4 + x^3$
l) $f_{12}(x) = 12e^{\frac{1}{2}x} + \frac{3}{2}x + 7$
m) $f_{13}(x) = \frac{5}{36}x^3 - \frac{15}{4}x^2 + x + 5$
n) $f_{14}(x) = -\frac{1}{24}x^4 - \frac{7}{6}x^3 + 2x^2 + 5$
o) $f_{15}(x) = \frac{15}{14}x^7 - \frac{8}{15}x^5 + \frac{3}{4}x^3$
p) $f_{16}(x) = e^{-x} - 3$
q) $f_{17}(x) = -\frac{2}{5}x^4 - \frac{5}{9}x^3 + \frac{7}{2}x^2$
r) $f_{18}(x) = \frac{14}{15}x^5 + \frac{2}{15}x^3 + \frac{2}{7}x$
s) $f_{19}(x) = 0,2x^6 - 0,1x^4 + 0,5x^2$
t) $f_{20}(x) = -e^x - x$

Lösung zu Übung 68

a) $f_1'(x) = 12x^3 - 6x^2 + 2x$
$f_1''(x) = 36x^2 - 12x + 2$
$f_1'''(x) = 72x - 12$

b) $f_2'(x) = -\frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{3}x^2 + 1$
$f_2''(x) = -x^2 + \frac{4}{3}x$
$f_2'''(x) = -2x + \frac{4}{3}$

c) $f_3'(x) = \frac{21}{20}x^5 - \frac{9}{2}x^3 + \frac{3}{5}x$
$f_3''(x) = \frac{21}{4}x^4 - \frac{27}{2}x^2 + \frac{3}{5}$
$f_3'''(x) = 21x^3 - 27x$

d) $f_4'(x) = -8e^{-2x} + 5$
$f_4''(x) = 16e^{-2x}$
$f_4'''(x) = -32e^{-2x}$

e) $f_5'(x) = -\frac{5}{2}x^5 - \frac{9}{2}x^2 - \frac{3}{7}$
$f_5''(x) = -\frac{25}{2}x^4 - 9x$
$f_5'''(x) = -50x^3 - 9$

f) $f_6'(x) = 4x - 1$
$f_6''(x) = 4$
$f_6'''(x) = 0$

g) $f_7'(x) = -\frac{3}{4}x^6 - 5x^3 + \frac{3}{10}$
$f_7''(x) = -\frac{9}{2}x^5 - 15x^2$
$f_7'''(x) = -\frac{45}{2}x^4 - 30x$

h) $f_8'(x) = \frac{1}{5}e^{5x} - 1$
$f_8''(x) = e^{5x}$
$f_8'''(x) = 5e^{5x}$

i) $f_9'(x) = -\frac{15}{2}x^3 + \frac{3}{2}x$
$f_9''(x) = -\frac{45}{2}x^2 + \frac{3}{2}$
$f_9'''(x) = -45x$

j) $f_{10}'(x) = 5x^3 - 0,6x^2 + 1$
$f_{10}''(x) = 15x^2 - 0,8x$
$f_{10}'''(x) = 30x - 0,8$

k) $f_{11}'(x) = -0,5x^4 + 1,2x^3 + 3x^2$
$f_{11}''(x) = -2x^3 + 3,6x^2 + 6x$
$f_{11}'''(x) = -6x^2 + 7,2x + 6$

l) $f_{12}'(x) = 6e^{\frac{1}{2}x} + \frac{3}{2}$
$f_{12}''(x) = 3e^{\frac{1}{2}x}$
$f_{12}'''(x) = \frac{3}{2}e^{\frac{1}{2}x}$

m) $f_{13}'(x) = \frac{5}{12}x^2 - \frac{15}{2}x + 1$
$f_{13}''(x) = \frac{5}{6}x - \frac{15}{2}$
$f_{13}'''(x) = \frac{5}{6}$

n) $f'_{14}(x) = -\frac{1}{6}x^3 - \frac{7}{2}x^2 + 4x$
$f''_{14}(x) = -\frac{1}{2}x^2 - 7x + 4$
$f'''_{14}(x) = -x - 7$

o) $f'_{15}(x) = \frac{15}{2}x^6 - \frac{8}{3}x^4 + \frac{9}{4}x^2$
$f''_{15}(x) = 45x^5 - \frac{32}{3}x^3 + \frac{9}{2}x$
$f'''_{15}(x) = 225x^4 - 32x^2 + \frac{9}{2}$

p) $f'_{16}(x) = -e^{-x}$
$f''_{16}(x) = e^{-x}$
$f'''_{16}(x) = -e^{-x}$

q) $f'_{17}(x) = -\frac{8}{5}x^3 - \frac{5}{3}x^2 + 7x$
$f''_{17}(x) = -\frac{24}{5}x^2 - \frac{10}{3}x + 7$
$f'''_{17}(x) = -\frac{48}{5}x - \frac{10}{3}$

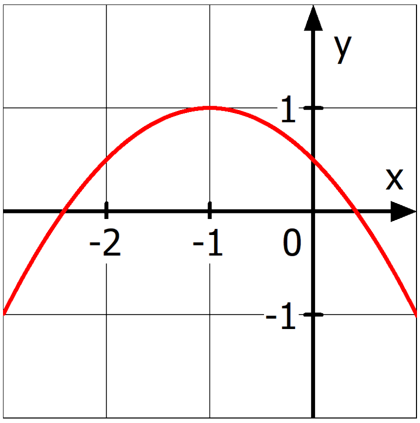
r) $f'_{18}(x) = \frac{14}{3}x^4 + \frac{2}{5}x^2 + \frac{2}{7}$
$f''_{18}(x) = \frac{56}{3}x^3 + \frac{4}{5}x$
$f'''_{18}(x) = 56x^2 + \frac{4}{5}$

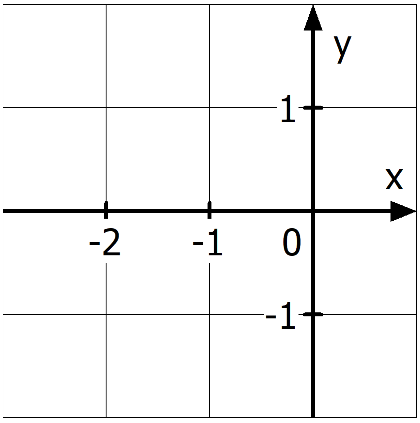
s) $f'_{19}(x) = 1,2x^5 - 0,4x^3 + x$
$f''_{19}(x) = 6x^4 - 1,2x^2 + 1$
$f'''_{19}(x) = 24x^3 - 2,4x$

t) $f'_{20}(x) = -e^x - 1$
$f''_{20}(x) = -e^x$
$f'''_{20}(x) = -e^x$

Hochpunkt

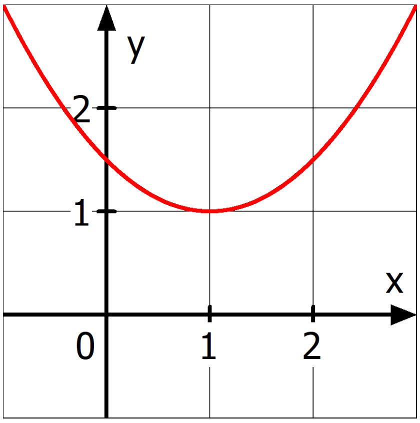
Ein Hochpunkt hat den größten Funktionswert in seiner Umgebung.

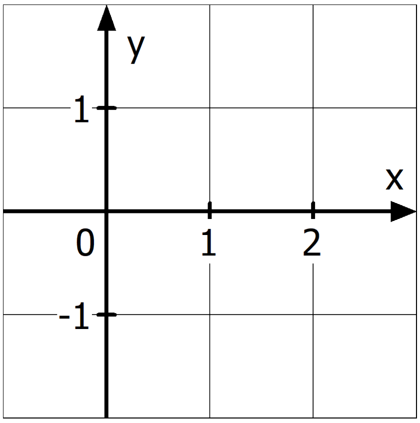




Tiefpunkt

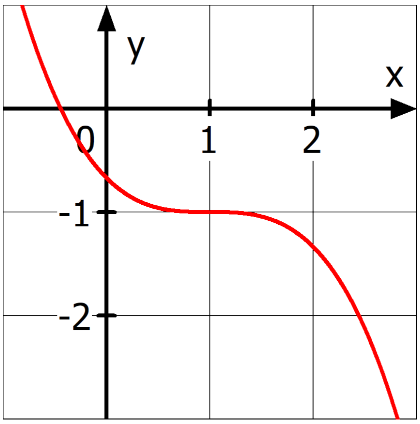
Ein Tiefpunkt hat den kleinsten Funktionswert in seiner Umgebung.

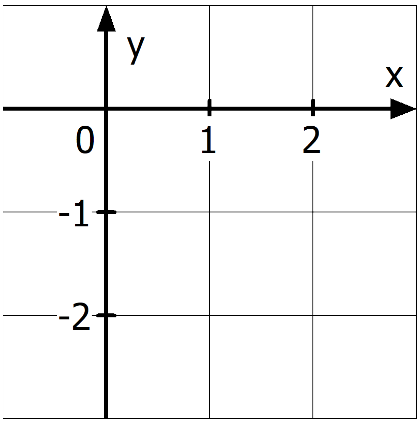




Sattelpunkt

Ein Sattelpunkt ist kein Extrempunkt, jedoch ist die Ableitung am Sattelpunkt ebenfalls Null.



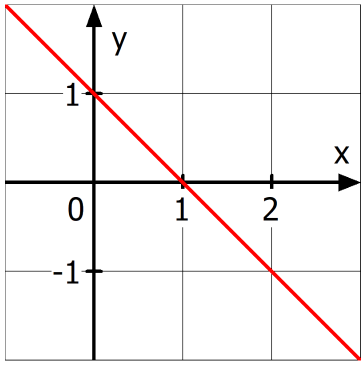


Mathematik **# *Extrempunkte*** *Datum*

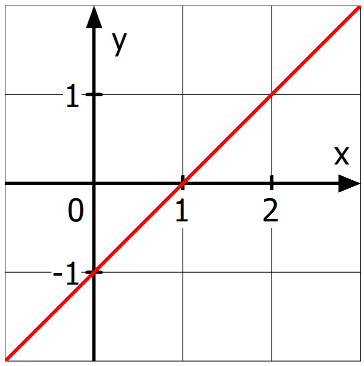
Hochpunkt HP	Tiefpunkt TP	Sattelpunkt SP

Eine Möglichkeit auf den VZW der Ableitung zu prüfen ist die zweite Ableitung $f''(x)$:
Ist x_0 eine NST der ersten Ableitung $f'(x_0) = 0$ so gilt:

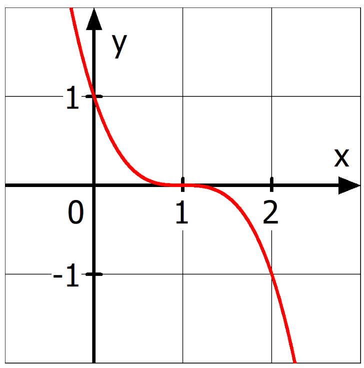
$f''(x_0) < 0$:

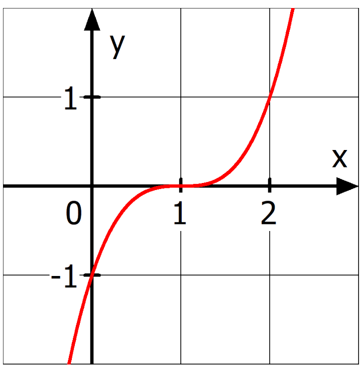


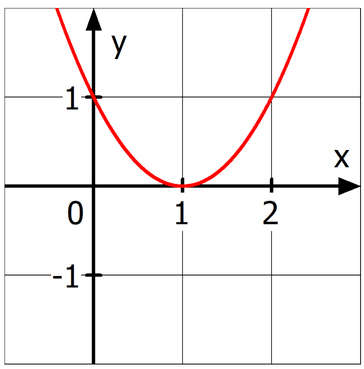
$f''(x_0) > 0$:

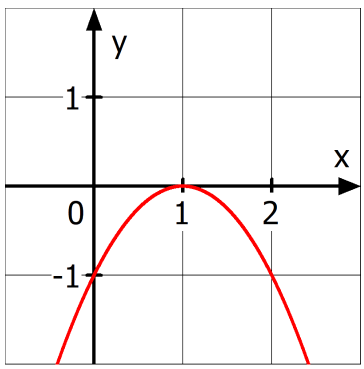


$f''(x_0) = 0$:









Übung 69 Bestimme die Extrem- und Sattelpunkte.

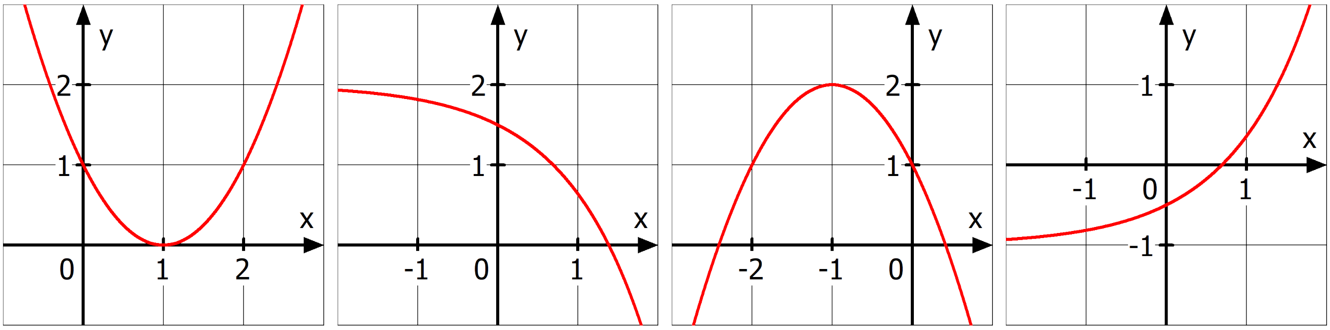
a) $f_1(x) = -x^2 + 2x + 1$
b) $f_2(x) = 2,5x^2 - 5x - 0,5$
c) $f_3(x) = \frac{1}{3}x^3 - x^2 - \frac{3}{2}$
d) $f_4(x) = \frac{2}{3}x^3 - 3x^2 + 4x$
e) $f_5(x) = -\frac{1}{30}x^3 - \frac{1}{10}x^2 + \frac{3}{10}x + 1$
f) $f_6(x) = -\frac{1}{6}x^3 - \frac{3}{2}x^2 - \frac{9}{2}x$
g) $f_7(x) = x^3 - 3x + 3$
h) $f_8(x) = 2x^3 + 3x^2 - 4,4x - 3$
i) $f_9(x) = x^3 + 12x^2 + 48x + 64$
j) $f_{10}(x) = -\frac{1}{24}x^3 + 2x + 2$
k) $f_{11}(x) = \frac{1}{4}x^4 + \frac{5}{3}x^3 + 3x^2$
l) $f_{12}(x) = -1,5x^4 - 4x^3 - 4$
m) $f_{13}(x) = \frac{1}{\ln(2)}e^{\ln(2)x} - 2x + 1$
n) $f_{14}(x) = \frac{1}{20}x^5 - \frac{1}{4}x^3 - x$
o) $f_{15}(x) = -0,075x^5 + 1,25x^3 - 3,375x + 1,6$
p) $f_{16}(x) = \frac{32}{7}x^7 + 7x^4 - 4x$
q) $f_{17}(x) = \frac{1}{3}e^x - 4x$
r) $f_{18}(x) = -\frac{1}{4}e^{-4x} - \frac{1}{2}x + 2$
s) $f_{19}(x) = 4x^3 - 18x^2 + 27x$
t) $f_{20}(x) = 2e^{-\frac{1}{2}x} + \frac{5}{2}x - 4$
u) $f_{21}(x) = -\frac{4}{3}x^3 + 6x^2 + 7x + \frac{1}{6}$
v) $f_{22}(x) = \frac{1}{6}x^6 + x$
w) $f_{23}(x) = \frac{1}{15}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + 10x + \frac{1}{3}$
x) $f_{24}(x) = 8x^3 - 36x^2 + 54x - 43$
y) $f_{25}(x) = \frac{1}{5}x^5 + \frac{4}{3}x^3 - 5x + \frac{8}{15}$
z) $f_{26}(x) = -4e^{2x} + x + 2$

Lösung zu Übung 69

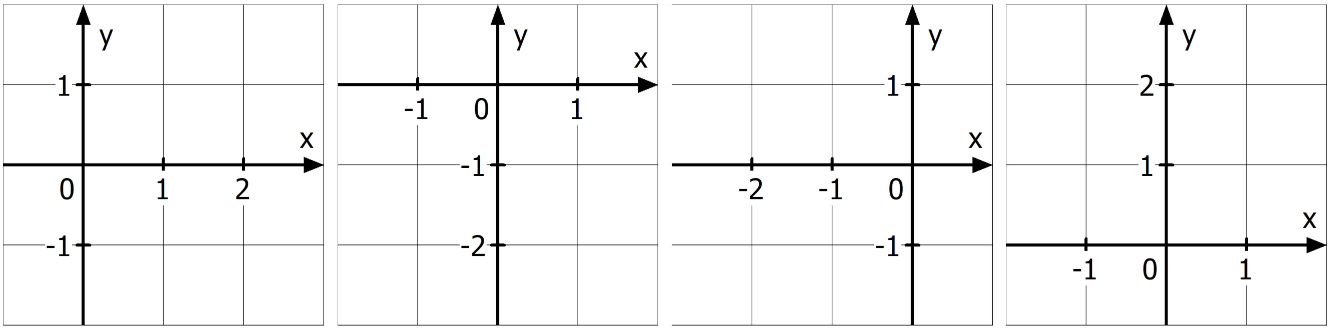
a) $f_1(x): \; H(1|2)$
b) $f_2(x): \; T(1|-3)$
c) $f_3(x): \; H(0|-\frac{3}{2}), \; T(2|-\frac{17}{6})$
d) $f_4(x): \; H(1|\frac{5}{3}), \; T(2|\frac{4}{3})$
e) $f_5(x): \; T(-3|\frac{1}{10}), \; H(1|\frac{7}{6})$
f) $f_6(x): \; S(-3|\frac{9}{2})$
g) $f_7(x): \; H(-1|5), \; T(1|1)$
h) $f_8(x): \; H(-1,5|3,75), \; T(0,5|-4,25)$
i) $f_9(x): \; S(-4|0)$
j) $f_{10}(x): \; T(-4|-\frac{10}{3}), \; H(4|\frac{22}{3})$
k) $f_{11}(x): \; T_1(-3|\frac{9}{4}), \; H(-2|\frac{8}{3}), \; T_2(0|0)$
l) $f_{12}(x): \; H(-2|4), \; S(0|-4)$
m) $f_{13}(x): \; T(1|\frac{2}{\ln(2)}-1)$
n) $f_{14}(x): \; H(-2|\frac{12}{5}), \; T(2|-\frac{12}{5})$
o) $f_{15}(x): \; H_1(-1|3,8), \; H_2(3|7), \; T_1(-3|-3,8), \; T_2(1|-0,6)$
p) $f_{16}(x): \; H(-1|\frac{45}{7}), \; T(\frac{1}{2}|-\frac{171}{112})$
q) $f_{17}(x): \; T(\ln(12)|4-4\ln(12))$
r) $f_{18}(x): \; H(\frac{1}{4}\ln(2)|\frac{18}{5}-\frac{1}{8}\ln(2) \approx 1,79)$
s) $f_{19}(x): \; S(\frac{3}{2}|\frac{27}{2})$
t) $f_{20}(x): \; T\big(-2\ln\big(\frac{5}{2}\big)|1-5\ln(5)+\ln(32) \approx -3,58\big)$
u) $f_{21}(x): \; H\big(\frac{7}{2}|41\big)$
v) $f_{22}(x): \; T(-1|-\frac{5}{6})$
w) $f_{23}(x): \; H\big(5|\frac{127}{6}\big), \; T(10|17)$
x) $f_{24}(x): \; S\big(\frac{3}{2}|-16\big)$
y) $f_{25}(x): \; H(-1|4), \; T(\big(1|-\frac{44}{15}\big)$
z) $f_{26}(x): \; H\big(-\frac{3}{2}\ln(2)|\frac{3}{2}-\frac{3}{2}\ln(2) \approx 4,89\big)$

Krümmung

Wenn man sich das Schaubild als Straße aus der Vogelperspektive vorstellt, die man von links nach rechts befährt, kann man Linkskurven und Rechtskurven unterscheiden. Markiere die Links- und Rechtskurven in den folgenden Schaubildern jeweils mit verschiedenen Farben und skizziere dann die Schaubilder der Ableitungsfunktionen.



Schaubilder der Ableitungen:



Zusammenhang Krümmung und erste Ableitung:

Zusammenhang Krümmung und zweite Ableitung:

Zeige mit Hilfe der zweiten Ableitung, dass

1. das Schaubild von $f(x) = x^2$ überall linksgekrümmt ist.
2. das Schaubild von $g(x) = -e^{-2x} - 1$ überall rechtsgekrümmt ist.
3. das Schaubild von $h(x) = x^3 - 3x + 1$ für $x < 0$ eine Rechtskurve und für $x > 0$ eine Linkskurve vollführt.

Übung 70 **Gib mit Hilfe der zweiten Ableitung die Intervalle an, in denen das Schaubild eine Links- bzw. Rechtskurve hat.**

a) $f_1(x) = x^3 - 3x^2 - 5x + 8$
b) $f_2(x) = 0,5e^{-2x} + 3x - 4$
c) $f_3(x) = -\frac{2}{3}x^3 + \frac{5}{4}x^2 + 2x - 3$
d) $f_4(x) = \frac{1}{12}x^4 - 2x^2 + 5x - 7$
e) $f_5(x) = -3e^{2x} - 3x + 8$
f) $f_6(x) = -x^3 - 9x^2 - 5x + 6$
g) $f_7(x) = -e^{-x} + x$
h) $f_8(x) = 0,5x^4 - x^3 - 18x^2$
i) $f_9(x) = -\frac{1}{2}x^4 + 7x^3 - 36x^2 + 2x - 8$
j) $f_{10}(x) = -\frac{1}{3}x^4 - \frac{2}{3}x^3 + 40x^2 - 10x + 86$

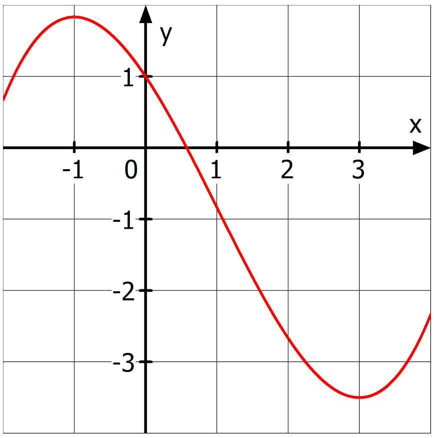
Lösung zu Übung 70

a) $f_1(x)$: RK für $x < 1$, LK für $x > 1$
b) $f_2(x)$: LK für alle $x \in \mathbb{R}$
c) $f_3(x)$: LK für $x < 2,5$, RK für $x > 2,5$
d) $f_4(x)$: LK für $x < -2$, RK für $-2 < x < 2$, LK für $x > 2$
e) $f_5(x)$: RK für alle $x \in \mathbb{R}$
f) $f_6(x)$: LK für $x < -3$, RK für $x > -3$
g) $f_7(x)$: RK für alle $x \in \mathbb{R}$
h) $f_8(x)$: LK für $x < -2$, RK für $-2 < x < 3$, LK für $x > 3$
i) $f_9(x)$: RK für $x < 3$, LK für $3 < x < 4$, RK für $x > 4$
j) $f_{10}(x)$: RK für $x < -5$, LK für $-4 < x < 4$, RK für $x > 4$

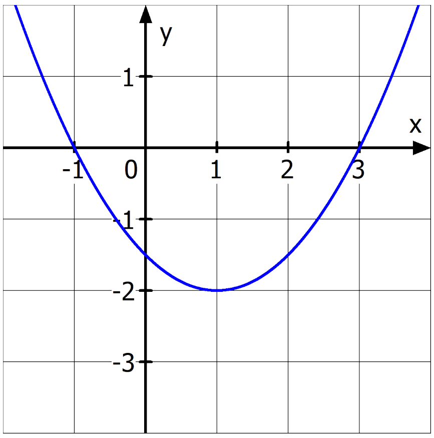
Wendepunkte

Als Wendepunkte bezeichnet man die Punkte des Schaubilds einer Funktion an denen die Krümmung wechselt, also das Schaubild von einer Linkskurve in eine Rechtskurve übergeht oder umgekehrt. Anders ausgedrückt, das Schaubild einer Funktion hat genau dann einen Wendepunkt, wenn die zweite Ableitung eine Nullstelle mit Vorzeichenwechsel hat.
Die folgenden drei Aussagen sind äquivalent:

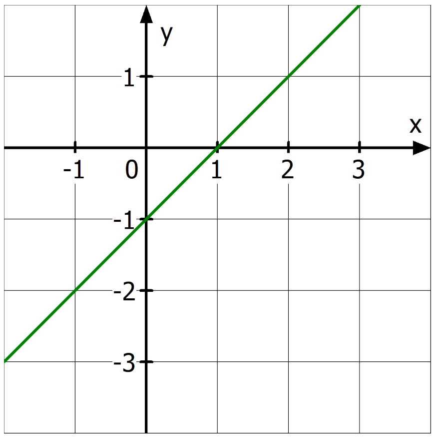
Beispiel:



$f(x) = \frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{2}x^2 - \frac{3}{2}x + 1$



$f'(x) = \frac{1}{2}x^2 - x - \frac{3}{2}$



$f''(x) = x - 1$

Wendetangente:

Die Wendetangente im obigen Beispiel berührt das Schaubild im Wendepunkt bei $W\left(1|f(1) = -\frac{5}{6}\right)$ mit der Steigung $m_t = f'(1) = -2$. Der y-Achsenabschnitt ergibt sich aus $m_t \cdot x_0 + b = f(x_0)$

$$-2 \cdot 1 + b = -\frac{5}{6} \mid +2$$

$$b = \frac{7}{6}$$

Die Wendetangente hat also die Gleichung $t_W(x) = -2x + \frac{7}{6}$

Übung 71 Bestimme die Wendepunkte.

a) $f_1(x) = x^3 + 3x^2 + 3x - 9$

b) $f_2(x) = 0,5x^3 - 1,5x^2 + 5$

c) $f_3(x) = -\frac{2}{3}x^3 + 4x^2 - 4x - 3$

d) $f_4(x) = -\frac{1}{36}x^3 + \frac{7}{24}x^2 - 8x - \frac{55}{144}$

e) $f_5(x) = \frac{5}{12}x^4 + \frac{5}{6}x^3 - 5x^2 + x - 3$

f) $f_6(x) = -\frac{1}{2}x^4 - x^3 + \frac{45}{4}x^2 + 2x - \frac{13}{32}$

g) $f_7(x) = 2x^4 + 16x^3 - 128x$

Lösung zu Übung 71

a) $f_1(x):\ W(-1|-10)$

b) $f_2(x):\ W(1|4)$

c) $f_3(x):\ W\left(2|-\frac{1}{3}\right)$

d) $f_4(x):\ W\left(\frac{7}{2}|-26\right)$

e) $f_5(x):\ W_1(-2|-25),\ W_2\left(1|-\frac{23}{4}\right)$

f) $f_6(x):\ W_1\left(-\frac{5}{2}|61\right),\ W_2\left(\frac{3}{2}|22\right)$

g) $f_7(x):\ W_1(0|0),\ W_2(-4|0)$

Angabe	**Gleichung**
Punkt (x-Wert und y-Wert)	
Extrempunkt oder Sattelpunkt bei x_0	
Wendestelle bei x_0	
Steigung m an der Stelle x_0	
Nullstellen	
Symmetrieeigenschaften: 1. Achsensymmetrie zur y-Achse 2. Punktsymmetrie zum Ursprung	
Asymptote b bzw. $mx + b$ für eine waagrechte oder schiefe Asymptote	

Übung 72 Bestimme jeweils die Funktionsgleichung.

a) Das Schaubild der ganzrationalen Funktion $f_1(x)$ vierten Grades hat den y-Achsenabschnitt 3, ist achsensymmetrisch zur y-Achse hat bei $H(2|4)$ einen Hochpunkt.

b) Das Schaubild der ganzrationalen Funktion $f_2(x)$ dritten Grades berührt die x-Achse bei $x = 3$, schneidet die x-Achse bei $x = -1$ und verläuft durch den Punkt $P(1|4)$

c) Das Schaubild der ganzrationalen Funktion $f_3(x)$ dritten Grades ist punktsymmetrisch zum Ursprung und hat den Tiefpunkt $T(2|-8)$.

d) Das Schaubild der ganzrationalen Funktion $f_4(x)$ dritten Grades hat im Wendepunkt $W(0|-1)$ die Steigung -2 und eine Nullstelle bei $x_0 = 3$.

Lösung zu Übung 72

a) $f_1(x) = -\frac{1}{16}x^4 + \frac{1}{2}x^2 + 3$

b) $f_2(x) = 0,5(x+1)(x-3)^2$

c) $f_3(x) = 0,5x^3 - 6x$

d) $f_4(x) = \frac{7}{27}x^3 - 2x - 1$

Eine lineare Gleichung besteht aus einer oder mehreren Unbekannten, die jeweils nur mit der Hochzahl 1 vorkommen. Zudem dürfen keine Produkte von mehreren Unbekannten vorkommen, z.B. ist $2x - 5y = 3$ eine lineare Gleichung mit den Unbekannten x und y. Dagegen sind $-3x^2 + 5y = 0$ oder $-3x \cdot y = 2$ keine linearen Gleichungen.
Unter einem linearen Gleichungssystem (LGS) versteht man mehrere lineare Gleichungen, in denen die gleichen Unbekannten vorkommen, z.B.

$$\begin{aligned} 2x + y &= 3 \\ -x + 3y &= -5 \end{aligned}$$

Das LGS hat die Lösung $x = 2$ und $y = -1$, da diese Werte beide Gleichungen gleichzeitig erfüllen:
$2 \cdot 2 - 1 = 3$ und $-2 + 3 \cdot (-1) = -5$

Wir betrachten lineare Gleichungssysteme, die aus 3 Unbekannten und 3 Gleichungen bestehen. Unsere Überlegungen lassen sich aber auch auf Gleichungssysteme mit 4 Unbekannten und 4 Gleichungen usw. übertragen.
Zum Lösen linearer Gleichungssysteme verwenden wir das gaußsche Eliminationsverfahren. Mit Hilfe von **elementaren Umformungen** bringen wir das LGS in die **obere Dreiecksform**.

Matrixform
Zur Übersichtlichkeit und um Schreibarbeit zu sparen, verwenden wir die Matrixform. Dazu schreiben wir nur die Koeffizienten vor den Unbekannten in eine Matrix und ersetzen die Gleichzeichen durch eine vertikale Linie. Betrachten wir folgendes Beispiel:

$$\begin{aligned} 5x + 3z &= -1 \\ 2x - 2y + 4z &= -2 \\ -2x + y - 2z &= 0 \end{aligned}$$

in
Matrixform

Elementare Umformungen: Es gibt 3 elementare Umformungen. Diese ändern das Gleichungssystem, aber nicht die Lösung:

1. **Vertauschen zweier Zeilen:**

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 5 & 0 & 3 & -1 \\ 2 & -2 & 4 & -2 \\ -2 & 1 & -2 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} ① \leftrightarrow ③ \\ \\ \\ \end{array}$$

2. **Multiplizieren einer Zeile mit einer Zahl ungleich Null:**

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 1 & -2 & 0 \\ 2 & -2 & 4 & -2 \\ 5 & 0 & 3 & -1 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ | \cdot 0,4 \end{array}$$

3. **Addition einer einer Zeile zu einer anderen:**

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 1 & -2 & 0 \\ 2 & -2 & 4 & -2 \\ 2 & 0 & 1,2 & -0,4 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ | + ① \\ | + ① \end{array}$$

In unserem Beispiel haben wir nun beinahe die obere Dreiecksform erreicht:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & -0,8 & -0,4 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ \mid +\,(2) \end{array}$$

Die **obere Dreiecksform** ist erreicht, wenn nur noch im oberen Dreieck Zahlen ungleich Null stehen:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 1,2 & -2,4 \end{array}\right)$$

Im unteren, blau markierten Dreieck stehen nur noch Nullen. Nur im oberen, rot markierten Dreieck stehen noch Zahlen ungleich Null. ACHTUNG: Im roten Dreieck dürfen auch Nullen stehen.

Die Lösung des LGS lässt sich von der oberen Dreiecksform aus leicht durch Rückwärtsauflösen bestimmen. Dazu gehen wir die Zeilen von unten nach oben, also rückwärts durch:

- Dritte Zeile:

- Zweite Zeile:

- Erste Zeile:

Hinweis: Üblicherweise kombiniert man die beiden elementaren Umformungen der Multiplikation einer Zeile mit einer Zahl und der Addition einer Zeile zu einer anderen, z.B.:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 1 & -2 & 0 \\ 2 & -2 & 4 & -2 \\ 5 & 0 & 3 & -1 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ \mid +\,2,5 \cdot (1) \end{array}$$

Zum Lösen eines LGS mit Hilfe des gaußschen Eliminationsverfahrens führt man also immer folgende Schritte aus:

1. **Aufstellen der Matrixform.**
2. **Durch elementare Umformungen die Matrix auf die obere Dreiecksform bringen.**
3. **Durch Rückwärtsauflösen die Lösung des LGS bestimmen.**

Übung 73 Bestimme die Lösung der folgenden LGS.

a)
$$\begin{aligned} x + y + z &= 5 \\ -y + 3z &= 2 \\ 2z &= 6 \end{aligned}$$

c)
$$\begin{aligned} 5x + y + z &= 1 \\ y + z &= 6 \\ -3y + 9z &= -6 \end{aligned}$$

e)
$$\begin{aligned} 4x + 2y - 2z &= 2 \\ 3x - y + 2z &= 7 \\ -x + y - 2z &= -5 \end{aligned}$$

b)
$$\begin{aligned} x + y \quad &= 0 \\ 3y + 2z &= 0 \\ -2z &= -6 \end{aligned}$$

d)
$$\begin{aligned} 2x - 2y + z &= 2 \\ 2y - z &= 10 \\ 3y + z &= 5 \end{aligned}$$

f)
$$\begin{aligned} -x - y + z &= -7 \\ 2x + y + z &= -1 \\ 5x - y - 6z &= 2 \end{aligned}$$

Die LGS bisher haben alle genau eine Lösung. Ein LGS kann aber auch keine Lösung haben oder sogar unendlich viele Lösungen. Die 3 möglichen Fälle (genau eine Lösung, keine Lösung, unendlich viele Lösungen) lassen sich an Hand der letzten Zeile in der Matrixform unterscheiden, **nachdem** diese auf die Zeilenstufenform gebracht wurde:

Beispiel 1: keine Lösung

$$\begin{aligned} x + 2y + 3z &= 4 \\ 2x + 3y + 5z &= 0 \\ x + \ \ y + 2z &= 2 \end{aligned} \quad \rightarrow \quad \begin{array}{l} \\ | -2 \cdot ① \\ | -1 \cdot ① \end{array} \qquad \begin{array}{l} \\ \\ | -1 \cdot ② \end{array}$$

$\rightarrow$

Die letzte Zeile steht ausgeschrieben für

Da diese Gleichung niemals erfüllt werden kann, egal welche Werte man für x, y und z einsetzt, hat dieses LGS keine Lösung.

Beispiel 2: unendlich viele Lösungen

$$\begin{aligned} 2x - y + 3z &= \ \ -6 \\ 4x + y - 2z &= \ \ \ \ \ 0 \\ 8x - y + 4z &= -12 \end{aligned} \quad \rightarrow \quad \begin{array}{l} \\ | -2 \cdot ① \\ | -4 \cdot ① \end{array} \quad \rightarrow \quad \begin{array}{l} \\ \\ | -1 \cdot ② \end{array}$$

$\rightarrow$

Die letzte Zeile steht ausgeschrieben für

Diese Gleichung ist immer erfüllt, egal welche Werte man für x, y und z einsetzt. Wir lassen z als Variable stehen und bestimmen die Lösungen für x und y in Abhängigkeit von z:

2. Zeile: $3y - 8z = 12$

1. Zeile:

$$2x - y + 3z = -6$$

Das LGS hat also die Lösungen $x = -\frac{1}{6}z - 1$, $y = \frac{8}{3}z + 4$ und $z = z$, wobei z eine beliebige Zahl ist. Beispiele möglicher Lösungen wären $x = 0,\ y = -12,\ z = -6$ oder $x = -3,\ y = 36,\ z = 12$

Übung 74 **Prüfe, ob die folgenden LGS keine, eine oder unendliche viele Lösungen haben und gib diese gegebenenfalls an.**

a)
$$\begin{aligned} 3x - 2y - 3z &= -5 \\ -5x + 2y + 3z &= 9 \\ -10x + 4y + 6z &= -18 \end{aligned}$$

d)
$$\begin{aligned} x + 2y - 5z &= 7 \\ 5x + y - z &= 11 \\ -3x + 3y - 9z &= 3 \end{aligned}$$

g)
$$\begin{aligned} -3x + y + z &= -15 \\ 5x - 3y + 3z &= 23 \\ -4x + y + 2z &= -20 \end{aligned}$$

b)
$$\begin{aligned} 5x - 4y - 5z &= 16 \\ 3x - y + z &= 0 \\ -x + 2y - z &= -6 \end{aligned}$$

e)
$$\begin{aligned} 2x - 4y + z &= 6 \\ 4x + 4y - z &= 0 \\ x - y + 2z &= 9 \end{aligned}$$

h)
$$\begin{aligned} 4x + 2y &= 2 \\ -5x - 3y - 4z &= 4 \\ 2x - 8z &= -2 \end{aligned}$$

c)
$$\begin{aligned} 4x - 4y - z &= 1 \\ 2x - 3y - z &= 4 \\ 14x - 17y - 5z &= 14 \end{aligned}$$

f)
$$\begin{aligned} -5x - 4y + 7z &= 12 \\ -x - y + 2z &= 2 \\ 2x + y - z &= 6 \end{aligned}$$

i)
$$\begin{aligned} 2x - 2y - 3z &= -2 \\ -4x + 5y + 4z &= 15 \\ 2x - y - 5z &= 9 \end{aligned}$$

Lösung zu Übung 73

a) $x = -5,\ y = 7,\ z = 3$

b) $x = 2,\ y = -2,\ z = 3$

c) $x = -1,\ y = 5,\ z = 1$

d) $x = 6,\ y = 3,\ z = -4$

e) $x = 1,\ y = 2,\ z = 3$

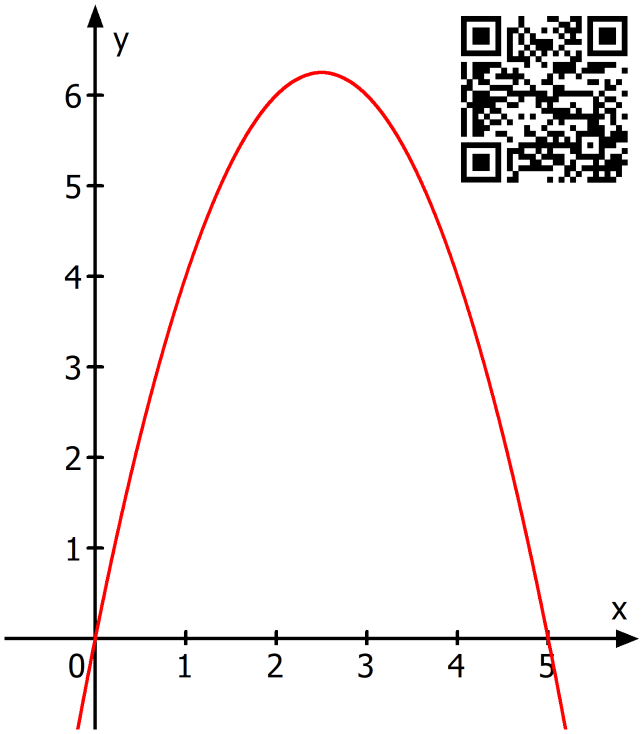
f) $x = -2,\ y = 6,\ z = -3$

Lösung zu Übung 74

a) keine Lösung
b) genau eine Lösung: $x = -1,\ y = -4,\ z = -1$
c) unendlich viele Lösungen: $x = -\frac{z}{4} - \frac{13}{4},\ y = -\frac{z}{2} - \frac{7}{2},\ z = z$
d) unendlich viele Lösungen: $x = -\frac{z}{3} - \frac{5}{3},\ y = \frac{8z}{3} + \frac{8}{3},\ z = z$
e) genau eine Lösung: $x = 1,\ y = 0,\ z = 4$
f) keine Lösung
g) genau eine Lösung: $x = 4,\ y = -2,\ z = -1$
h) keine Lösung
i) unendlich viele Lösungen: $x = \frac{7z}{2} + 10,\ y = 2z + 11,\ z = z$

Bei Optimierungsaufgaben muss für eine Größe wie die Fläche eines Rechtecks oder Dreiecks die Länge einer Verbindungslinie das Optimum, also das Maximum/Minimum gefunden werden. Dazu müssen die folgenden Schritte durchgeführt werden (Je nach Aufgabenstellung sind nicht immer alle Schritte notwendig), die wir an Hand folgenden Beispiels näher betrachten werden:

Gegeben ist die Funktion $f(x) = -x^2 + 5x$. Sei $P(u|v)$ ein Punkt auf dem Graphen von f mit $0 \leq u \leq 5$. Der Ursprung, der Punkt P und der Punkt $Q(u|0)$ begrenzen ein Dreieck. Welchen Flächeninhalt A kann dieses Dreieck maximal annehmen?



1. **Skizze**

2. **Zielfunktion aufstellen**

3. **Extremstellen der Zielfunktion bestimmen**

4. **Antwort erstellen**

Übung 75

Gegeben ist die Funktion $f(x) = -x^2 + 4x$. Sei $P(u|v)$ ein Punkt auf dem Graphen von f mit $0 \leq u \leq 4$. Der Ursprung, der Punkt P und der Punkt $Q(u|0)$ begrenzen ein Dreieck. Welchen Flächeninhalt A kann dieses Dreieck maximal haben?

Übung 76

Gegeben ist die Funktion $f(x) = -x^2 + 12$. Berechne die Koordinaten der Eckpunkte desjenigen Rechtecks oberhalb der x-Achse, dessen Flächeninhalt maximal ist, wenn eine Seite des Rechtecks auf der x-Achse liegt und 2 Eckpunkte auf dem Schaubild von f liegen. Gib den maximalen Flächeninhalt an.

Übung 77

Die Graphen zu den beiden Funktionen mit $f(x) = x^2$ und $g(x) = -x^2 + 6$ schließen eine Fläche ein. In diese Fläche wird ein Rechteck so gelegt, dass die Rechteckseiten parallel zu den Koordinatenachsen verlaufen. Berechne die Koordinaten der Eckpunkte desjenigen Rechtecks, dessen Flächeninhalt maximal ist, und gib den maximalen Flächeninhalt an.

Übung 78

Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = (x - 3)^2$. Betrachtet werden sollen alle achsenparallelen Rechtecke mit dem Ursprung als einen Eckpunkt und einem Punkt des Graphen als gegenüber liegendem Eckpunkt für $0 \leq x \leq 3$. Berechne die Koordinaten der Eckpunkte desjenigen Rechtecks, dessen Flächeninhalt maximal ist, und gib den maximalen Flächeninhalt an.

Übung 79

Der Graph zu der Funktion mit $f(x) = -kx^2 + 12,\ k > 0$ und die x-Achse schließen eine Fläche ein. In diese Fläche wird ein Rechteck so gelegt, dass die Rechteckseiten parallel zu den Koordinatenachsen verlaufen. Berechne die Koordinaten der Eckpunkte desjenigen Rechtecks, dessen Flächeninhalt maximal ist in Abhängigkeit von k, und gib den maximalen Flächeninhalt an.

Lösung zu Übung 75

Zielfunktion

$A(u) = \frac{1}{2}u \cdot f(u) = -\frac{1}{2}u^3 + u^2$

Extremstellen der Zielfunktion

$A'(u) = -\frac{3}{2}u^2 + 4u$

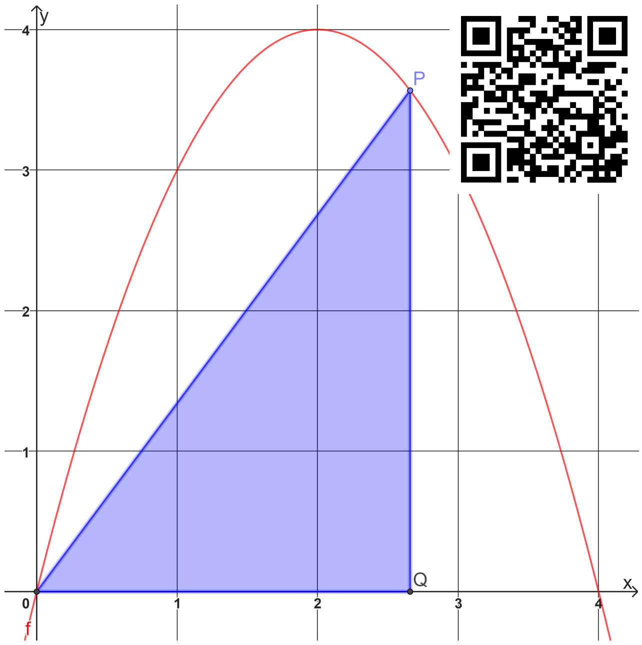
$A''(u) = -3u + 4$

$A'(u) = 0$ liefert $u_1 = 0$ und $u_2 = \frac{8}{3}$

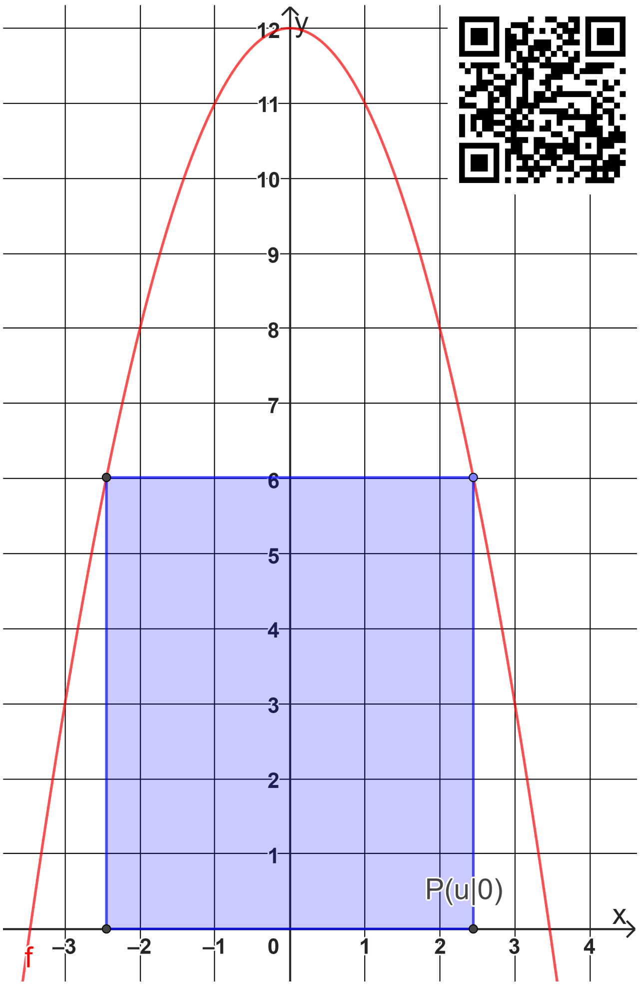
Mit $A''(0) = 4 > 0$ liegt bei u_1 ein Tiefpunkt und mit $A''\left(\frac{8}{3}\right) = -4 < 0$ liegt bei u_2 ein Hochpunkt.

Antwort erstellen

Der maximale Flächeninhalt beträgt $A\left(\frac{8}{3}\right) = \frac{128}{27}$



Lösung zu Übung 76



Zielfunktion

$A(u) = 2u \cdot f(u) = -2u^3 + 24u$ für $0 \leq u \leq \sqrt{12}$

Die Einschränkung für u ergibt sich aus der Tatsache, dass für negative u die Werte der Zielfunktion negativ werden und für $u > \sqrt{12}$ liegt das Rechteck nicht mehr oberhalb der x-Achse.

Extremstellen der Zielfunktion

$A'(u) = -6u^2 + 24$

$A''(u) = -12u$

$A'(u) = 0$ liefert $u_1 = 2$ und $u_2 = -2$. Dabei liegt u_2 nicht mehr im erlaubten Bereich und kann ignoriert werden.

Mit $A''(2) = -24 < 0$ liegt bei u_1 ein Hochpunkt.

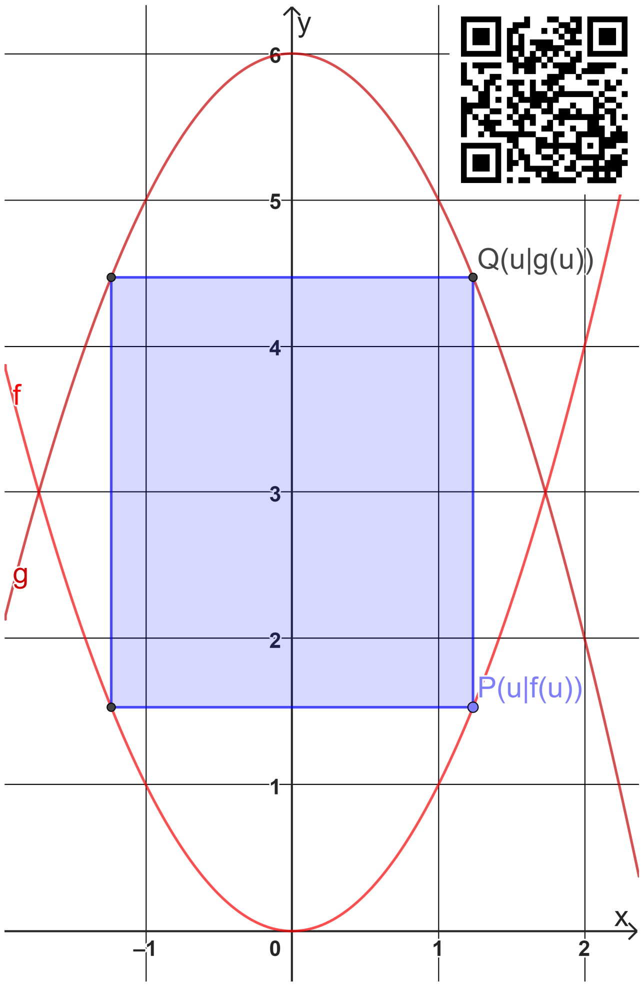
Antwort erstellen

Der maximale Flächeninhalt beträgt $A(2) = 32$.

Die Eckpunkte sind dann

$A(2|0),\ B(2|f(2) = 8),\ C(-2|8),\ D(-2|0)$.

Lösung zu Übung 77



Zielfunktion

$A(u) = 2u \cdot (g(u) - f(u)) = -4u^3 + 12u$ für $0 \leq u \leq \sqrt{3}$

Die Einschränkung für u ergibt sich aus der Tatsache, dass für negative u die Werte der Zielfunktion negativ werden und für $u > \sqrt{3}$ liegt das Rechteck nicht mehr zwischen den beiden Funktionen.

Extremstellen der Zielfunktion

$A'(u) = -12u^2 + 12$

$A''(u) = -24u$

$A'(u) = 0$ liefert $u_1 = 1$ und $u_2 = -1$. Dabei liegt u_2 nicht mehr im erlaubten Bereich und kann ignoriert werden.

Mit $A''(1) = -24 < 0$ liegt bei u_1 ein Hochpunkt.

Antwort erstellen

Der maximale Flächeninhalt beträgt $A(1) = 8$.
Die Eckpunkte sind dann$A(1|f(1) = 1)$, $B(1|g(1) = 5),\ C(-1|5),\ D(-1|1)$.

Lösung zu Übung 78

Zielfunktion

$A(u) = u \cdot f(u) = u^3 - 6u^2 + 9u$

Extremstellen der Zielfunktion

$A'(u) = 3u^2 - 12u + 9$

$A''(u) = 6u - 12$

$A'(u) = 0$ liefert $u_1 = 3$ und $u_2 = 1$.

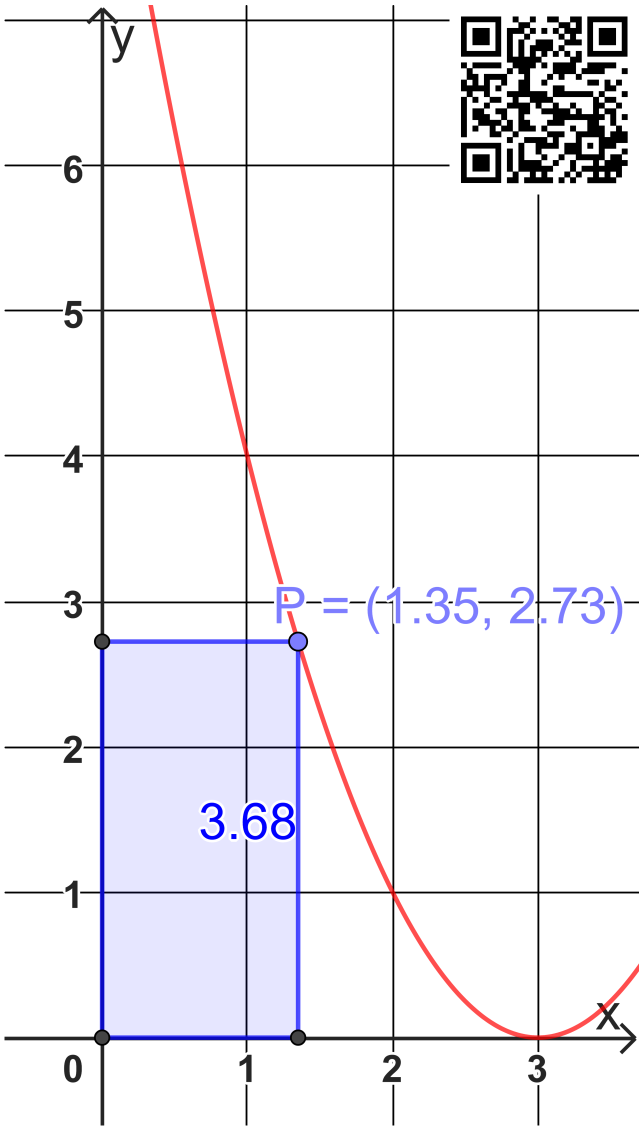
Mit $A''(u_1) = 6 > 0$ liegt bei u_1 ein Tiefpunkt.

Mit $A''(u_2) = -6 < 0$ liegt bei u_2 ein Hochpunkt.

Antwort erstellen

Der maximale Flächeninhalt beträgt $A(u_2) = 4$.

Die Eckpunkte sind dann $A(0|0)$, $B(1|0)$, $C(1|f(u_2) = 4)$, $D(0|4)$.



Lösung zu Übung 79

Zielfunktion

$A(u) = 2u \cdot f(u) = -2ku^3 + 24u$ für $0 \leq u \leq \frac{\sqrt{12}}{k}$

Die Einschränkung für u ergibt sich aus der Tatsache, dass für negative u die Werte der Zielfunktion negativ werden und für $u > \frac{\sqrt{12}}{k}$ liegt das Rechteck nicht mehr innerhalb der angegebenen Fläche.

Extremstellen der Zielfunktion

$A'(u) = -6ku^2 + 24$

$A''(u) = -12ku$

$A'(u) = 0$ liefert $u_{1/2} = \pm\frac{2}{\sqrt{k}}$.

Die negative Lösung liegt nicht im erlaubten Bereich und kann ignoriert werden.

Mit $A''\left(\frac{2}{\sqrt{k}}\right) = -24\sqrt{5} < 0$ liegt bei der positiven Lösung ein Hochpunkt.

Antwort erstellen

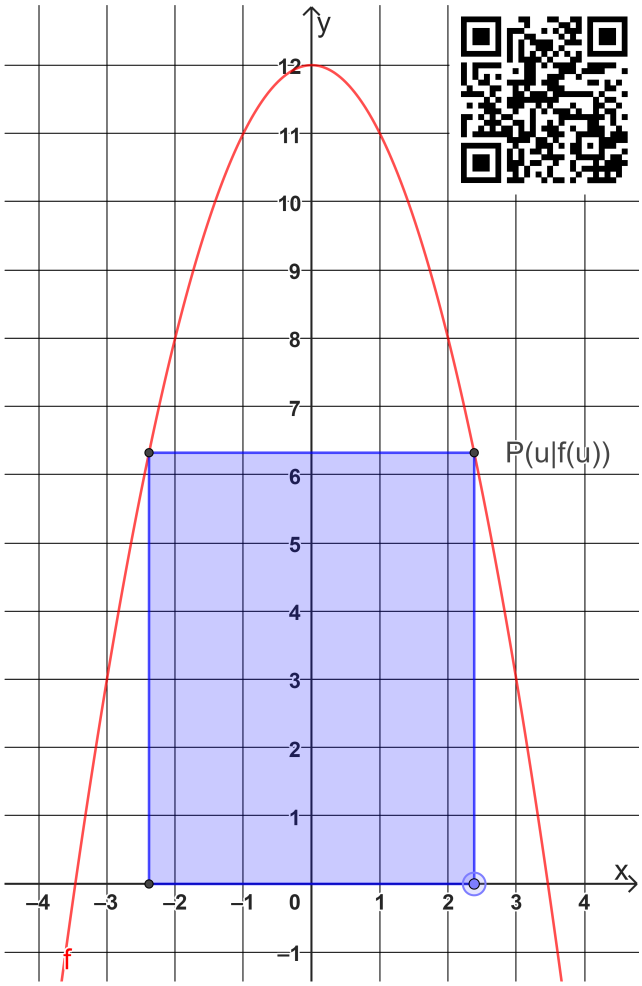
Der maximale Flächeninhalt beträgt

$A\left(\frac{2}{\sqrt{k}}\right) = \frac{32}{\sqrt{k}}$.

Die Eckpunkte sind dann

$A\left(\frac{2}{\sqrt{k}}\middle|0\right)$, $B\left(\frac{2}{\sqrt{k}}\middle|f\left(\frac{2}{\sqrt{k}}\right) = 8\right)$,

$C\left(-\frac{2}{\sqrt{k}}\middle|8\right)$, $D\left(-\frac{2}{\sqrt{k}}\middle|0\right)$.



So wie wir die Ableitung mit einem Strich markiert haben, bezeichnet man die Stammfunktion normalerweise mit einem Großbuchstaben. Eine Funktion $F(x)$ heißt Stammfunktion von $f(x)$, wenn die Ableitung von $F(x)$ gleich der Funktion $f(x)$ ist:

ACHTUNG: Es gibt unendlich viele Stammfunktionen zu einer Funktion $f(x)$:

So sind z.B. die Funktionen $F_1(x) = x^3$ und $F_2(x) = x^3 + 1$ beide Stammfunktionen zur Funktion $f(x) = 3x^2$ und $F(x) = x^3 + c,\ c \in \mathbb{R}$ sind alle möglichen Stammfunktionen.
Nach der Summenregel beim Ableiten können wir auch Stammfunktionen summanden-weise bestimmen. Wir benötigen also nur jeweils eine Regel zum Bestimmen der Stammfunktion von ax^n und ae^{kx}:

$f(x) = ax^n$ $\qquad$ $g(x) = ae^{kx}$

$F(x) =$ $\qquad$ $G(x) =$

Die Regeln zum Bilden der Stammfunktion sind also die gleichen wie zum Bilden der Ableitung nur rückwärts. Die Ableitung von ax^n bestimmt man, indem man 1. mit der Hochzahl multipliziert und 2. die Hochzahl um Eins verringert. Die Stammfunktion bildet man, indem man 1. die Hochzahl um Eins vergrößert und 2. durch die neue Hochzahl dividiert. Für e^{kx} sind die Regeln noch einfacher. Zum Ableiten multipliziert man mit dem Faktor k, zum Bilden der Stammfunktion dividiert man durch k.
Beispiel: Bestimme alle Stammfunktionen

$f(x) = 5x^4 - 6x^3 + \dfrac{3}{2}x^2 - x + 2$ $\qquad$ $g(x) = 4e^{3x} - 2e^{0,5x} + e^{-x}$

$F(x) =$ $\qquad$ $G(x) =$

Übung 80 **Bestimme jeweils eine Stammfunktion.**

a) $f_1(x) = 3x^4 - 2x^3 + x^2 - 4$
b) $f_2(x) = -6x^3 - 8x^2 + 1$
c) $f_3(x) = -x^4 - x^3 + x$
d) $f_4(x) = 6x^5 + 5x^4 + 3x^2 + 2x$
e) $f_5(x) = \frac{4}{3}x^3 - \frac{6}{5}x^2 + \frac{1}{2}$
f) $f_6(x) = \frac{10}{9}x^4 + \frac{3}{2}x^2 - \frac{4}{3}x$
g) $f_7(x) = -\frac{14}{11}x^6 + \frac{3}{5}x^5 - \frac{8}{7}x^3 + \frac{2}{7}x$
h) $f_8(x) = -\frac{15}{8}x^4 + \frac{7}{2}x^3 - \frac{9}{5}x^2 + \frac{6}{7}x$
i) $f_9(x) = e^x - e^{-x}$
j) $f_{10}(x) = e^{2x} - 4e^{3x}$
k) $f_{11}(x) = -\frac{3}{2}e^{3x} + \frac{8}{7}e^{4x}$
l) $f_{12}(x) = e^{\frac{1}{2}x} - e^{\frac{3}{2}x}$
m) $f_{13}(x) = \frac{4}{5}e^{-\frac{5}{8}x}$

Übung 81 **Bestimme jeweils alle Stammfunktionen.**

a) $f_1(x) = -2x^5 - 2x^4 - x^3 + 1$
b) $f_2(x) = -3x^2 + 2x + 1$
c) $f_3(x) = 10x^4 - x^2 - x$
d) $f_4(x) = 7x^6 + 4x^3 + 2x^2 + 1$
e) $f_5(x) = \frac{3}{5}x^4 - \frac{6}{7}x^3 + \frac{7}{2}$
f) $f_6(x) = \frac{14}{9}x^3 + \frac{15}{2}x^2 - \frac{8}{3}x$
g) $f_7(x) = -\frac{18}{11}x^5 + \frac{35}{8}x^4 - \frac{8}{9}x^3 + \frac{2}{7}x^2$
h) $f_8(x) = -\frac{42}{81}x^5 + \frac{9}{7}x^4 - \frac{9}{2}x^2 - \frac{8}{7}x$
i) $f_9(x) = 4e^x - 2e^{-x}$
j) $f_{10}(x) = e^{-\frac{2}{3}x} - 4e^{\frac{9}{5}x}$
k) $f_{11}(x) = -\frac{5}{7}e^{-15x} + \frac{12}{7}e^{-4x}$
l) $f_{12}(x) = \frac{2}{5}e^{\frac{5}{2}x} - e^{\frac{7}{2}x}$
m) $f_{13}(x) = \frac{4}{9}e^{-\frac{6}{7}x}$

Übung 82 **Bestimme jeweils die Stammfunktion, deren Schaubild durch den angegebenen Punkt P verläuft.**

a) $f_1(x) = \frac{4}{3}x^3 - 4x + 1,\ P(-3|4)$
b) $f_2(x) = 2x^3 - \frac{18}{5}x^2 + \frac{2}{3},\ P(2|1)$
c) $f_3(x) = 5x^4 - 40x^3 + 21x^2 + 20x,\ P(-1|8)$
d) $f_4(x) = 4x^6 - 0,5x^4 - 2x + 1,\ P(1|0)$
e) $f_5(x) = 6x^2 - 20x + 3,\ P(5|25)$
f) $f_6(x) = 2,4x^3 + 0,8x - 5,\ P(2|3)$
g) $f_7(x) = 7,2x^2 - 3,6x - 3,8,\ P(-1|0)$
h) $f_8(x) = 2x,\ P(10|101)$
i) $f_9(x) = 6e^{2x},\ P(0|1)$
j) $f_{10}(x) = 1,5e^{-3x},\ P(-\frac{2}{3}\ln(2)|-1)$
k) $f_{11}(x) = 0,5e^{0,5x} - 2,\ P(2|0)$
l) $f_{12}(x) = -\frac{3}{8}e^{\frac{1}{4}x} + 2,\ P(4|8)$

Lösung zu Übung 80

a) $F_1(x) = \frac{3}{5}x^5 - \frac{1}{2}x^4 + \frac{1}{3}x^3 - 4x$

b) $F_2(x) = -\frac{3}{2}x^4 - \frac{8}{3}x^3 + x + 1$

c) $F_3(x) = -\frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{2}x^2 - 10$

d) $F_4(x) = x^6 + x^5 + x^3 + x^2 + 8$

e) $F_5(x) = \frac{1}{3}x^4 - \frac{2}{5}x^3 + \frac{1}{2}x + 7$

f) $F_6(x) = \frac{2}{9}x^5 + \frac{1}{2}x^3 - \frac{2}{3}x^2$

g) $F_7(x) = -\frac{2}{11}x^7 + \frac{1}{10}x^6 - \frac{2}{7}x^4 + \frac{1}{7}x^2 - \frac{1}{2}$

h) $F_8(x) = -\frac{3}{8}x^5 + \frac{7}{8}x^4 - \frac{3}{5}x^3 + \frac{3}{7}x^2$

i) $F_9(x) = e^x + e^{-x} + e$

j) $F_{10}(x) = \frac{1}{2}e^{2x} - \frac{4}{3}e^{3x}$

k) $F_{11}(x) = -\frac{1}{2}e^{3x} + \frac{2}{7}e^{4x} - \frac{5}{7}$

l) $F_{12}(x) = 2e^{\frac{1}{2}x} - \frac{2}{3}e^{\frac{3}{2}x}$

m) $F_{13}(x) = -\frac{32}{25}e^{-\frac{5}{8}x} - 100$

Lösung zu Übung 81

a) $f_1(x) = -\frac{1}{3}x^6 - \frac{2}{5}x^5 - \frac{1}{4}x^4 + x + c,\ c \in \mathbb{R}$

b) $f_2(x) = -x^3 + x^2 + x + c,\ c \in \mathbb{R}$

c) $f_3(x) = 2x^5 - \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + c,\ c \in \mathbb{R}$

d) $f_4(x) = x^7 + x^4 + \frac{2}{3}x^2 + x + c,\ c \in \mathbb{R}$

e) $f_5(x) = \frac{3}{25}x^5 - \frac{3}{14}x^4 + \frac{7}{2}x + c,\ c \in \mathbb{R}$

f) $f_6(x) = \frac{7}{18}x^4 + \frac{5}{2}x^3 - \frac{4}{3}x^2 + c,\ c \in \mathbb{R}$

g) $f_7(x) = -\frac{3}{11}x^6 + \frac{7}{8}x^5 - \frac{2}{9}x^4 + \frac{2}{21}x^3 + c,\ c \in \mathbb{R}$

h) $f_8(x) = -\frac{7}{81}x^6 + \frac{9}{35}x^5 - \frac{3}{2}x^3 - \frac{4}{7}x^2 + c,\ c \in \mathbb{R}$

i) $f_9(x) = 4e^x + 2e^{-x} + c,\ c \in \mathbb{R}$

j) $f_{10}(x) = -\frac{3}{2}e^{-\frac{2}{3}x} - \frac{20}{9}e^{\frac{9}{5}x} + c,\ c \in \mathbb{R}$

k) $f_{11}(x) = \frac{1}{21}e^{-15x} - \frac{3}{7}e^{-4x} + c,\ c \in \mathbb{R}$

l) $f_{12}(x) = \frac{4}{25}e^{\frac{5}{2}x} - \frac{2}{7}e^{\frac{7}{2}x} + c,\ c \in \mathbb{R}$

m) $f_{13}(x) = -\frac{14}{27}e^{-\frac{6}{7}x} + c,\ c \in \mathbb{R}$

Lösung zu Übung 82

a) $F_1(x) = \frac{1}{3}x^4 - 2x^2 + x - 2$
b) $F_2(x) = \frac{1}{2}x^4 - \frac{6}{5}x^3 + \frac{2}{3}x + \frac{19}{15}$
c) $F_3(x) = x^5 - 10x^4 + 7x^3 + 10x^2 + 16$
d) $F_4(x) = \frac{1}{7}x^7 - \frac{1}{10}x^5 - x^2 + x - \frac{33}{70}$
e) $F_5(x) = 2x^3 - 10x^2 + 3x + 10$
f) $F_6(x) = 0,6x^4 + 0,4x^2 - 5x + 1,8$
g) $F_7(x) = 2,4x^3 - 1,8x^2 - 3,8x + 0,4$
h) $F_8(x) = x^2 + 1$
i) $F_9(x) = 3e^{2x} - 2$
j) $F_{10}(x) = -0,5e^{-3x} + 1$
k) $F_{11}(x) = e^{0,5x} - 2x + 4 - e$
l) $F_{12}(x) = -\frac{3}{2}e^{\frac{1}{4}x} + 2x + \frac{3}{2}e$

Das (bestimmte) Integral von $f(x)$ zwischen $x = a$ und $x = b$ mit $a < b$ wird wie folgt aufgeschrieben:

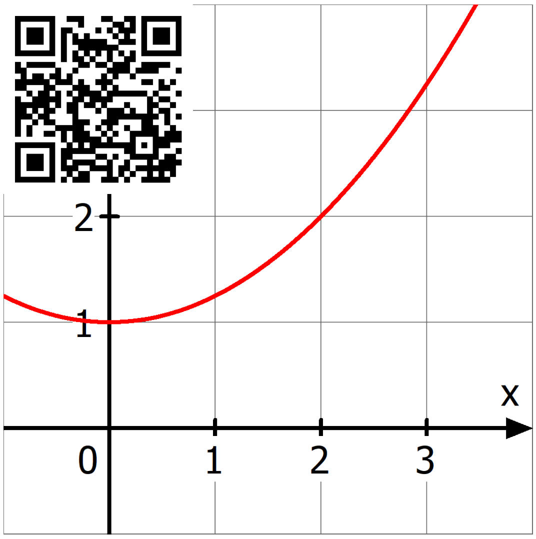
- a:
- b:
- $f(x)$:
- $\mathrm{d}x$:

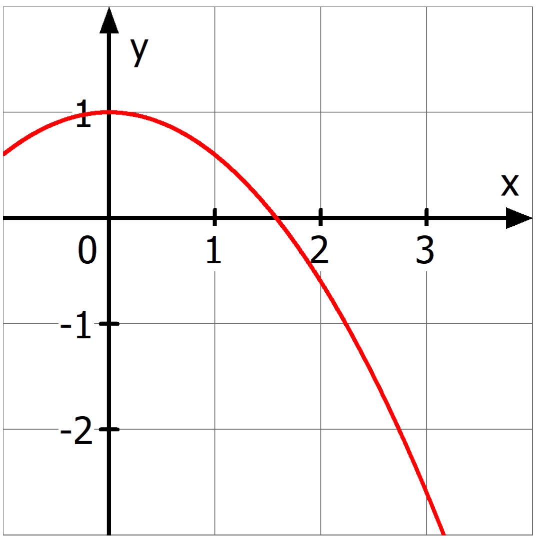
Betrachten wir die Funktion $f(x) = \frac{1}{4}x^2 + 1$.

$$\int_0^1 \frac{1}{4}x^2 + 1 \ \mathrm{d}x \approx$$

$$\int_1^3 \frac{1}{4}x^2 + 1 \ \mathrm{d}x \approx$$

$$\int_0^3 \frac{1}{4}x^2 + 1 \ \mathrm{d}x \approx$$





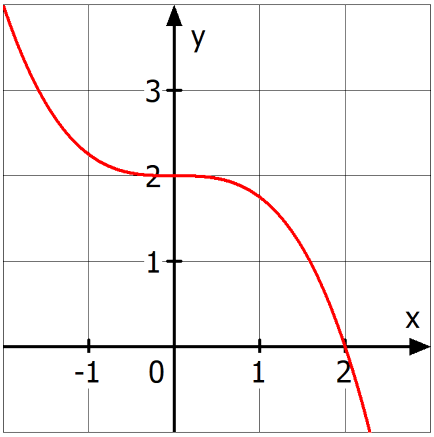
Als zweites Beispiel betrachten wir die Funktion $f(x) = -\frac{2}{5}x^2 + 1$.

$$\int_0^3 -\frac{2}{5}x^2 + 1 \ \mathrm{d}x \approx$$

$$\int_1^2 -\frac{2}{5}x^2 + 1 \ \mathrm{d}x \approx$$

$$\int_2^3 -\frac{2}{5}x^2 + 1 \ \mathrm{d}x \approx$$

Übung 83 Schätze jeweils den Wert der Integrale zwischen der unteren Grenze a und der oberen Grenze b an Hand des Schaubilds der Funktion ab.

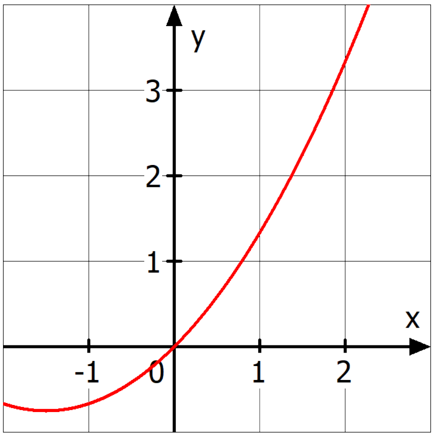


$f(x) = -\frac{1}{4}x^3 + 2$

a) $a = -1$ und $b = 2$

b) $a = -1$ und $b = 1$

c) $a = 0$ und $b = 2$

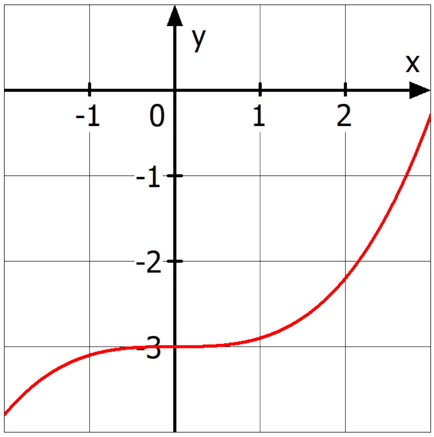


$f(x) = \frac{1}{3}x^2 + x$

d) $a = -1$ und $b = 2$

e) $a = -1$ und $b = 1$

f) $a = 0$ und $b = 2$

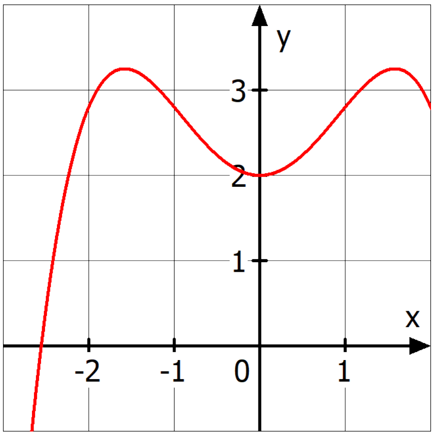


$f(x) = \frac{1}{10}x^3 - 3$

g) $a = -1$ und $b = 2$

h) $a = -1$ und $b = 1$

i) $a = 0$ und $b = 2$

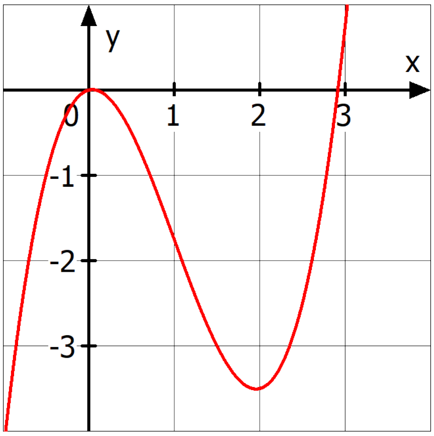


$f(x) = -\frac{1}{5}x^4 + x^2 + 2$

j) $a = -2$ und $b = 0$

k) $a = -2$ und $b = 1$

l) $a = -1$ und $b = 1$

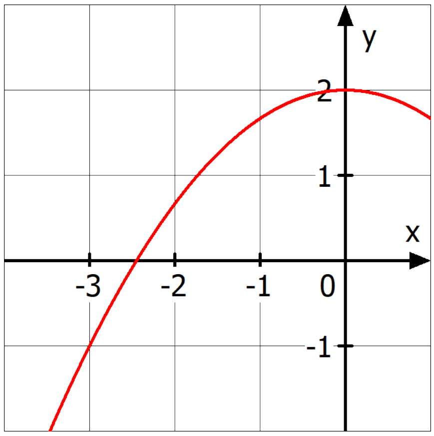


$f(x) = x^3 - 3x^2 + \frac{1}{4}x$

m) $a = 0$ und $b = 1$

n) $a = 0$ und $b = 2$

o) $a = 0$ und $b = 3$



$f(x) = -\frac{1}{3}x^2 + 2$

p) $a = -3$ und $b = 0$

q) $a = -2$ und $b = 0$

r) $a = -3$ und $b = -2$

Lösung zu Übung 83

a) $\int\limits_{-1}^{2} -\frac{1}{4}x^3 + 2 \; \mathrm{d}x \approx 5,1$

b) $\int\limits_{-1}^{1} -\frac{1}{4}x^3 + 2 \; \mathrm{d}x \approx 4$

c) $\int\limits_{0}^{2} -\frac{1}{4}x^3 + 2 \; \mathrm{d}x \approx 3$

d) $\int\limits_{-1}^{2} \frac{1}{3}x^2 + x \; \mathrm{d}x \approx 2,5$

e) $\int\limits_{-1}^{1} \frac{1}{3}x^2 + x \; \mathrm{d}x \approx 0,2$

f) $\int\limits_{0}^{2} \frac{1}{3}x^2 + x \; \mathrm{d}x \approx 2,9$

g) $\int\limits_{-1}^{2} \frac{1}{10}x^3 - 3 \; \mathrm{d}x \approx -8,6$

h) $\int\limits_{-1}^{1} \frac{1}{10}x^3 - 3 \; \mathrm{d}x \approx -6$

i) $\int\limits_{0}^{2} \frac{1}{10}x^3 - 3 \; \mathrm{d}x \approx -5,6$

j) $\int\limits_{-2}^{0} -\frac{1}{5}x^4 + x^2 + 2 \; \mathrm{d}x \approx 5,4$

k) $\int\limits_{-2}^{1} -\frac{1}{5}x^4 + x^2 + 2 \; \mathrm{d}x \approx 7,7$

l) $\int\limits_{-1}^{1} -\frac{1}{5}x^4 + x^2 + 2 \; \mathrm{d}x \approx 4,6$

m) $\int\limits_{0}^{1} x^3 - 3x^2 + \frac{1}{4}x \; \mathrm{d}x \approx -0,6$

n) $\int\limits_{0}^{2} x^3 - 3x^2 + \frac{1}{4}x \; \mathrm{d}x \approx -3,5$

o) $\int\limits_{0}^{3} x^3 - 3x^2 + \frac{1}{4}x \; \mathrm{d}x \approx -5,6$

p) $\int\limits_{-3}^{0} -\frac{1}{3}x^2 + 2 \; \mathrm{d}x \approx 3$

q) $\int\limits_{-2}^{0} -\frac{1}{3}x^2 + 2 \; \mathrm{d}x \approx 3,1$

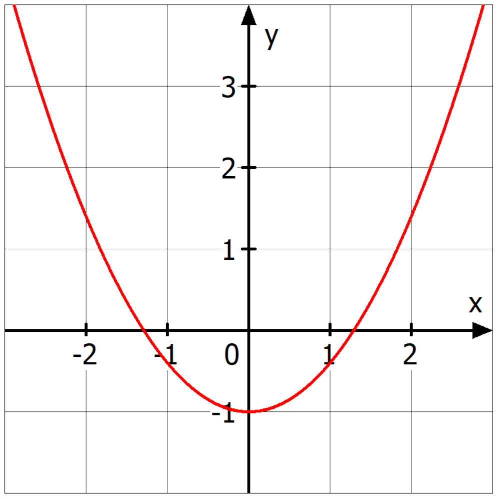
r) $\int\limits_{-3}^{-2} -\frac{1}{3}x^2 + 2 \; \mathrm{d}x \approx -0,1$

Der Wert eines bestimmten Integrals lässt sich mit Hilfe des Hauptsatzes der Differenzial- und Integralrechnung bestimmen:

Hauptsatz der Differenzial- und Integralrechnung

Berechnen wir als Beispiel den Wert folgenden Integrals:

$$\int_{-1}^{2} \frac{3}{5}x^2 - 1 \, dx$$



Das Ergebnis ist unabhängig von der verwendeten Stammfunktion:

$$\int_{-1}^{2} \frac{3}{5}x^2 - 1 \, dx$$

Übung 84 Berechne die Werte, der in Aufgabe 83 abgeschätzen Integrale, exakt.

Übung 85 Berechne die Werte der folgenden Integrale:

a) $\int_{0}^{3} 6x^2 - 4 \, dx$

b) $\int_{0}^{1} x^3 - 6x^2 + 2 \, dx$

c) $\int_{0}^{2} \frac{1}{2}x^4 - \frac{3}{2}x^2 + x \, dx$

d) $\int_{0}^{\ln(2)} e^x \, dx$

e) $\int_{0}^{2\ln(2)} -2e^{3x} \, dx$

f) $\int_{-1}^{2} \frac{2}{3}x^2 - 6x + 2 \, dx$

g) $\int_{1}^{3} 10x^4 - 9x^3 + 4x \, dx$

h) $\int_{0}^{3} 2x^2 - 4x \, dx$

i) $\int_{-\ln(2)}^{0} -\frac{3}{2}e^{-2x} \, dx$

j) $\int_{-2\ln(3)}^{2\ln(2)} -4e^{\frac{1}{2}x} \, dx$

Lösung zu Übung 84

a) $\int\limits_{-1}^{2} -\frac{1}{4}x^3 + 2 \, \mathrm{d}x = \frac{81}{16}$

b) $\int\limits_{-1}^{1} -\frac{1}{4}x^3 + 2 \, \mathrm{d}x = 4$

c) $\int\limits_{0}^{2} -\frac{1}{4}x^3 + 2 \, \mathrm{d}x = 3$

d) $\int\limits_{-1}^{2} \frac{1}{3}x^2 + x \, \mathrm{d}x = \frac{5}{2}$

e) $\int\limits_{-1}^{1} \frac{1}{3}x^2 + x \, \mathrm{d}x = \frac{2}{9}$

f) $\int\limits_{0}^{2} \frac{1}{3}x^2 + x \, \mathrm{d}x = \frac{26}{9}$

g) $\int\limits_{-1}^{2} \frac{1}{10}x^3 - 3 \, \mathrm{d}x = -\frac{69}{8}$

h) $\int\limits_{-1}^{1} \frac{1}{10}x^3 - 3 \, \mathrm{d}x = -6$

i) $\int\limits_{0}^{2} \frac{1}{10}x^3 - 3 \, \mathrm{d}x = -\frac{28}{5}$

j) $\int\limits_{-2}^{0} -\frac{1}{5}x^4 + x^2 + 2 \, \mathrm{d}x = \frac{404}{75}$

k) $\int\limits_{-2}^{1} -\frac{1}{5}x^4 + x^2 + 2 \, \mathrm{d}x = \frac{192}{25}$

l) $\int\limits_{-1}^{1} -\frac{1}{5}x^4 + x^2 + 2 \, \mathrm{d}x = \frac{344}{75}$

m) $\int\limits_{0}^{1} x^3 - 3x^2 + \frac{1}{4}x \, \mathrm{d}x = -\frac{5}{8}$

n) $\int\limits_{0}^{2} x^3 - 3x^2 + \frac{1}{4}x \, \mathrm{d}x = -\frac{7}{2}$

o) $\int\limits_{0}^{3} x^3 - 3x^2 + \frac{1}{4}x \, \mathrm{d}x = -\frac{45}{8}$

p) $\int\limits_{-3}^{0} -\frac{1}{3}x^2 + 2 \, \mathrm{d}x = 3$

q) $\int\limits_{-2}^{0} -\frac{1}{3}x^2 + 2 \, \mathrm{d}x = \frac{28}{9}$

r) $\int\limits_{-3}^{-2} -\frac{1}{3}x^2 + 2 \, \mathrm{d}x = -\frac{1}{9}$

Lösung zu Übung 85

a) $\int\limits_{0}^{3} 6x^2 - 4 \, \mathrm{d}x = 42$

b) $\int\limits_{0}^{1} x^3 - 6x^2 + 2 \, \mathrm{d}x = \frac{1}{4}$

c) $\int\limits_{0}^{2} \frac{1}{2}x^4 - \frac{3}{2}x^2 + x \, \mathrm{d}x = \frac{6}{5}$

d) $\int\limits_{0}^{\ln(2)} e^x \, \mathrm{d}x = 1$

e) $\int\limits_{0}^{2\ln(2)} -2e^{3x} \, \mathrm{d}x = -42$

f) $\int\limits_{-1}^{2} \frac{2}{3}x^2 - 6x + 2 \, \mathrm{d}x = -1$

g) $\int\limits_{1}^{3} 10x^4 - 9x^3 + 4x \, \mathrm{d}x = 320$

h) $\int\limits_{0}^{3} 2x^2 - 4x \, \mathrm{d}x = 0$

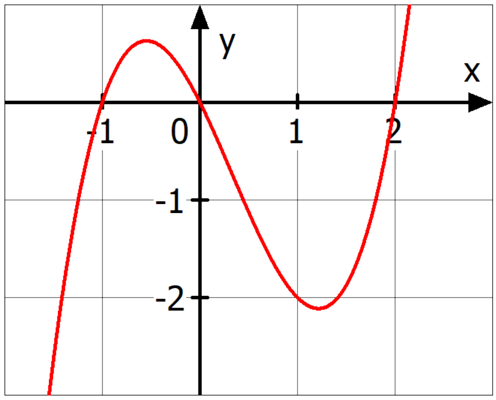
i) $\int\limits_{-\ln(2)}^{0} -\frac{3}{2}e^{-2x} \, \mathrm{d}x = -\frac{9}{4}$

j) $\int\limits_{-2\ln(3)}^{2\ln(2)} -4e^{\frac{1}{2}x} \, \mathrm{d}x = -\frac{40}{3}$

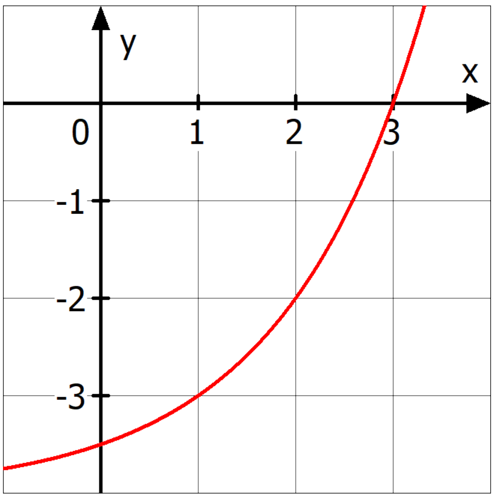
Eine häufig vorkommende Aufgabenstellung beginnt mit "Bestimme die Fläche, die...". Solche Aufgabenstellungen lassen sich mit Hilfe von Integralen lösen.

Flächenberechnung

Berechnen wir als Beispiel die von der Funktion $f(x) = x^3 - x^2 - 2x$ und der x-Achse eingeschlossenen Fläche:



Bestimme die von der Funktion $f(x) = \frac{1}{2}e^{\ln(2)x} - 4$, der x-Achse und der y-Achse eingeschlossene Fläche:



Übung 86 Berechne jeweils die von der Funktion und der x-Achse eingeschlossene Fläche.

a) $f(x) = x^3 + 2x^2 - 8x$
b) $f(x) = -\frac{1}{3}x^3 + x^2 + 6x$
c) $f(x) = x^4 + x^2 - 2$
d) $f(x) = -2x^3 - 4x^2 + 6x$
e) $f(x) = -4x^3 - 12x^2 + 40x$
f) $f(x) = 2x^3 - 11x^2 + 12x$
g) $f(x) = -x^6 + 7x^3 + 8$
h) $f(x) = -2x^4 - 3,5x^2 + 18$
i) $f(x) = 1,5x^4 - 7,5x^2 + 6$
j) $f(x) = \frac{5}{3}x^7 - \frac{37}{3}x^4 - \frac{40}{3}x$

Übung 87 Berechne jeweils die von der Funktion und den Koordinatenachsen eingeschlossene Fläche.

a) $f(x) = 8e^{2x} - 4$
b) $f(x) = -3e^{0,5x} + 5$
c) $f(x) = -5e^{\frac{1}{4}x} + 1$
d) $f(x) = -3e^{\frac{3}{5}x} + 8$
e) $f(x) = \frac{7}{4}e^{\frac{2}{7}x} - 6$
f) $f(x) = -4e^{-2x} + 0,1$
g) $f(x) = -3e^{-x} + 5$
h) $f(x) = -e^{\frac{1}{3}x} + 0,5$
i) $f(x) = 3e^{0,2x} - 9$
j) $f(x) = -2e^{0,1x} + 1$

Lösung zu Übung 86

a) $\int\limits_{-4}^{0} x^3 + 2x^2 - 8x \;\mathrm{d}x - \int\limits_{0}^{2} x^3 + 2x^2 - 8x \;\mathrm{d} = \frac{128}{3} + \frac{20}{3} = \frac{148}{3}$

b) $-\int\limits_{-3}^{0} -\frac{1}{3}x^3 + x^2 + 6x \;\mathrm{d}x + \int\limits_{0}^{6} -\frac{1}{3}x^3 + x^2 + 6x \;\mathrm{d}x = \frac{45}{4} + 72 = \frac{333}{4}$

c) $-\int\limits_{-1}^{1} x^4 + x^2 - 2 \;\mathrm{d}x = \frac{44}{15}$

d) $-\int\limits_{-3}^{0} -2x^3 - 4x^2 + 6x \;\mathrm{d}x + \int\limits_{0}^{1} -2x^3 - 4x^2 + 6x \;\mathrm{d}x = \frac{45}{2} + \frac{7}{6} = \frac{71}{3}$

e) $-\int\limits_{-5}^{0} -4x^3 - 12x^2 + 40x \;\mathrm{d}x + \int\limits_{0}^{2} -4x^3 - 12x^2 + 40x \;\mathrm{d}x = 375 + 32 = 407$

f) $\int\limits_{0}^{\frac{3}{2}} 2x^3 - 11x^2 + 12x \;\mathrm{d}x - \int\limits_{\frac{3}{2}}^{4} 2x^3 - 11x^2 + 12x \;\mathrm{d}x = \frac{117}{32} + \frac{1375}{96} = \frac{863}{48}$

g) $-\int\limits_{-1}^{2} -x^6 + 7x^3 + 8 \;\mathrm{d}x = \frac{891}{28}$

h) $-\int\limits_{-1{,}5}^{1{,}5} -2x^4 - 3,5x^2 + 18 \;\mathrm{d}x = 40,05$

i) $-\int\limits_{-2}^{-1} 1,5x^4 - 7,5x^2 + 6 \;\mathrm{d}x + \int\limits_{-1}^{1} 1,5x^4 - 7,5x^2 + 6 \;\mathrm{d}x - \int\limits_{1}^{2} 1,5x^4 - 7,5x^2 + 6 \;\mathrm{d}x = 2,2 + 7,6 + 2,2 = 12$

j) $\int\limits_{-1}^{0} \frac{5}{3}x^7 - \frac{37}{3}x^4 - \frac{40}{3}x \;\mathrm{d}x - \int\limits_{0}^{2} \frac{5}{3}x^7 - \frac{37}{3}x^4 - \frac{40}{3}x \;\mathrm{d}x = \frac{33}{8} + 48 = \frac{417}{8}$

Lösung zu Übung 87

a) $-\int\limits_{\frac{\ln(2)}{2}}^{0} 8e^{2x} - 4 \, dx = 2 - 2\ln(2) \approx 0,61$

b) $\int\limits_{-2\ln\left(\frac{5}{3}\right)}^{0} -3e^{0,5x} + 5 \, dx = 4 - 10\ln\left(\frac{5}{3}\right) \approx 1,11$

c) $-\int\limits_{4\ln\left(\frac{1}{5}\right)}^{0} -5e^{\frac{1}{4}x} + 1 \, dx = 16 + 4\ln\left(\frac{1}{5}\right) \approx 9,56$

d) $\int\limits_{0}^{\frac{5}{3}\ln\left(\frac{8}{3}\right)} -3e^{\frac{3}{5}x} + 8 \, dx = -\frac{28}{3} + \frac{40}{3}\ln\left(\frac{8}{3}\right) \approx 3,74$

e) $-\int\limits_{0}^{\frac{7}{2}\ln\left(\frac{24}{7}\right)} \frac{7}{4}e^{\frac{2}{7}x} - 6 \, dx = -\frac{119}{8} + 21\ln\left(\frac{24}{7}\right) \approx 11,00$

f) $-\int\limits_{0}^{-0,5\ln(0,025x)} -4e^{-2x} + 0,1 \, dx = 1,95 + 0,05\ln(0,025) \approx 1,77$

g) $\int\limits_{-\ln\left(\frac{5}{3}\right)}^{0} -3e^{-x} + 5 \, dx = -2 + 5\ln\left(\frac{5}{3}\right) \approx 0,55$

h) $\int\limits_{3\ln(0,5)}^{0} -e^{\frac{1}{3}x} + 0,5 \, dx = 1,5 + 1,5\ln(0,5) \approx 0,46$

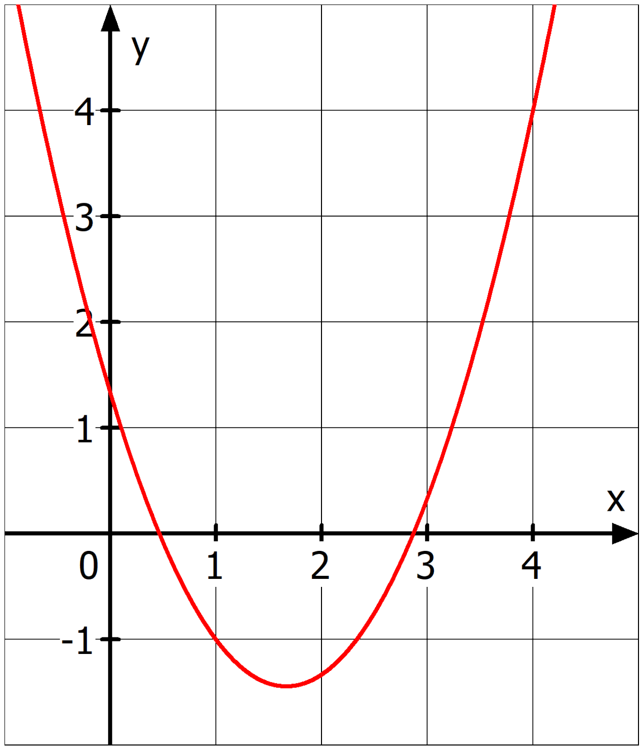
i) $-\int\limits_{0}^{5\ln(3)} 3e^{0,2x} - 9 \, dx = -30 + 45\ln(3) \approx 19,44$

j) $-\int\limits_{10\ln(0,5)}^{0} -2e^{0,1x} + 1 \, dx = 10 + 10\ln(0,5) \approx 3,07$

Eine des Öfteren vorkommende Aufgabenstellung beinhaltet das grafische Abschätzen oder das Berechnen einer Integrationsgrenze. Bei diesem Aufgabentyp ist in der Regel die obere Integrationsgrenze gesucht.

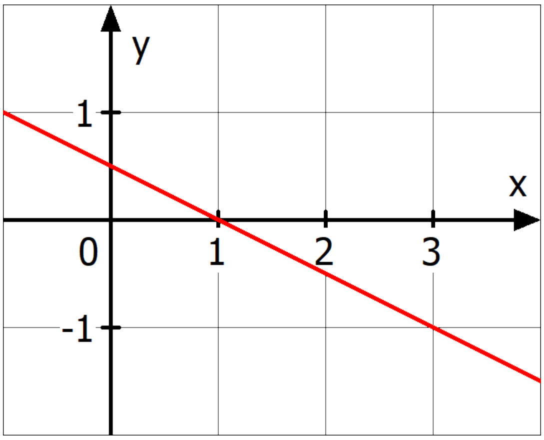
Beispiel: Gegeben ist das Schaubild der Funktion $f(x)$. Gesucht sind zwei Lösungen $u > 0$, so dass $\int\limits_0^u f(x)\ \mathrm{d}x = 0$ gilt:

Grafische Abschätzung:

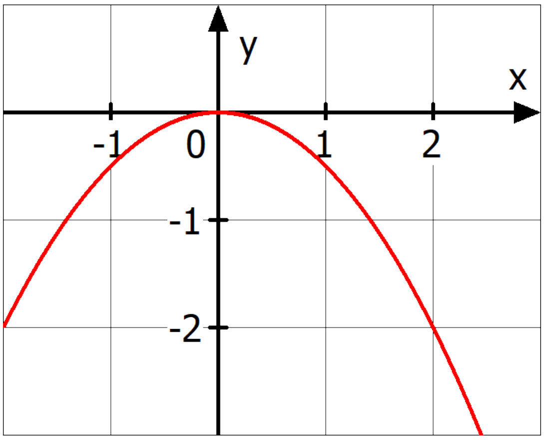


Ist die Funktionsgleichung bekannt, so kann man die Lösung auch berechnen. Im Beispiel ist $f(x) = x^2 - \frac{10}{3}x + \frac{4}{3}$:

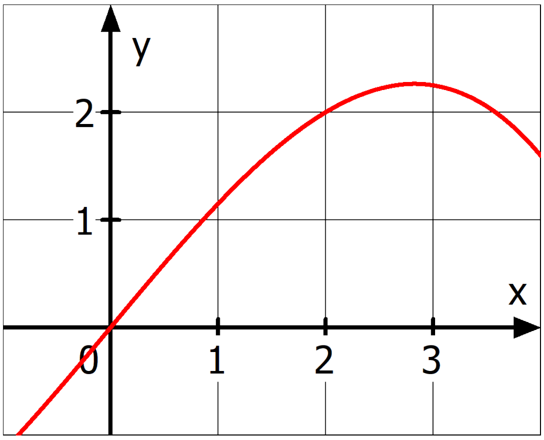
Übung 88 Schätze jeweils ein u graphisch ab und berechne dann die Lösung. Das gesuchte u soll immer größer als die untere Grenze sein:



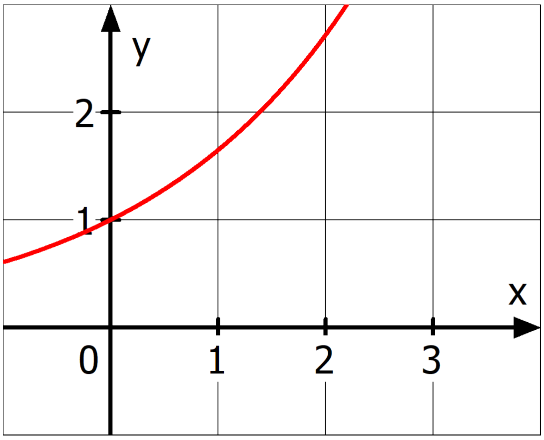
$$\int_0^u -\tfrac{1}{2}x + \tfrac{1}{2}\ \mathrm{d}x = -1$$



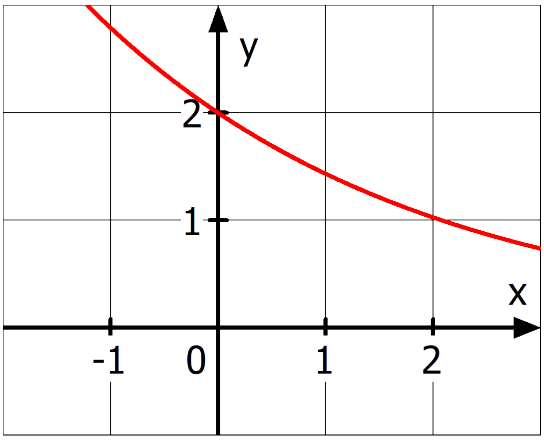
$$\int_{-1}^u -0,5x^2\ \mathrm{d}x = -1,5$$



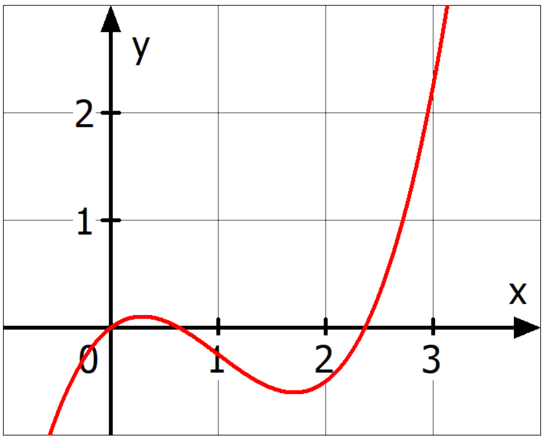
$$\int_0^u -\tfrac{1}{20}x^3 + \tfrac{6}{5}x\ \mathrm{d}x = 2,2$$



$$\int_0^u e^{0,5x}\ \mathrm{d}x = 4$$



$$\int_{-1}^u 2e^{-\frac{1}{3}x}\ \mathrm{d}x = 5$$



$$\int_0^u \tfrac{1}{2}x^3 - \tfrac{3}{2}x^2 + \tfrac{3}{4}x\ \mathrm{d}x = 0$$

Finde 2 verschiedene $u > 0$.

Lösung zu Übung 88

Die grafisch abgeschätzten Lösungen sollten jeweils bis auf $\pm 0,3$ mit den berechneten Lösungen übereinstimmen. Lösungen in Klammer lösen zwar die Gleichung, sind aber nicht größer als die untere Grenze.

$$\int_0^u -\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}\,\mathrm{d}x = -1$$

$$u_1 = 1 + \sqrt{5} \approx 3,24 \left(\text{und } u_2 = 1 - \sqrt{5}\right)$$

$$\int_{-1}^u -0,5x^2\,\mathrm{d}x = -1,5$$

$$u_1 = 2$$

$$\int_0^u -\tfrac{1}{20}x^3 + \tfrac{6}{5}x\,\mathrm{d}x = 2,2$$

$$u_1 = 2, u_2 = \sqrt{44} \left(\text{und } u_3 = -2,\ u_4 = -\sqrt{44}\right)$$

$$\int_0^u e^{0,5x}\,\mathrm{d}x = 4$$

$$u_1 = 2\ln(3)$$

$$\int_{-1}^u 2e^{-\frac{1}{3}x}\,\mathrm{d}x = 5$$

$$u_1 = -3\ln\left(e^{\frac{1}{3}} - \frac{5}{6}\right)$$

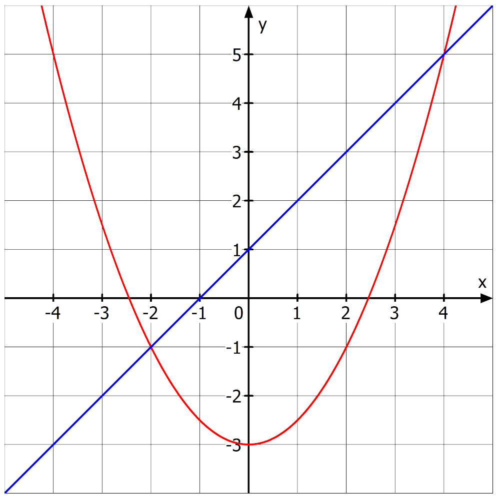
$$\int_0^u \frac{1}{2}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + \tfrac{3}{4}x\,\mathrm{d}x = 0$$

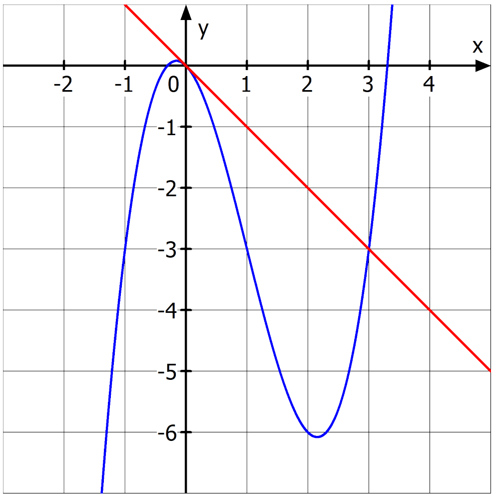
$$u_1 = 1,\ u_2 = 3\ (\text{und } u_3 = 0)$$

Fläche zwischen 2 Funktionen $f(x)$ und $g(x)$:

Beispiele:

Bestimme den Flächeninhalt, der zwischen $f(x) = x + 1$ und $g(x) = 0,5x^2 - 3$ eingeschlossenen Fläche.





Bestimme den Flächeninhalt, der zwischen $f(x) = x^3 - 3x^2 - x$ und $g(x) = -x$ eingeschlossenen Fläche.

Übung 89 Bestimme jeweils die zwischen den beiden Funktionen eingeschlossene Fläche.

a) $f(x) = -2x$ und $g(x) = x^2 - x - 2$

b) $f(x) = -\frac{1}{4}x^2 + 4$ und $g(x) = -x + 1$

c) $f(x) = 3$ und $g(x) = x^3 - 2x^2 - 3x + 3$

d) $f(x) = 2x^2 - 12x + 15$ und $g(x) = -x^2 + 6x - 9$

e) $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - 4x - 1$ und $g(x) = -2x - 1$

f) $f(x) = -2x + 2$ und $g(x) = \frac{1}{4}x^3 - \frac{1}{4}x^2 - \frac{7}{2}x + 2$

Lösung zu Übung 89

a) $\int_{-2}^{1} -2x - \left(x^2 - x - 2\right) \,\mathrm{d}x = 4,5$

b) $\int_{-2}^{6} -\frac{1}{4}x^2 + 4 - (-x + 1) \,\mathrm{d}x = \frac{64}{3}$

c) $\int_{-1}^{0} x^3 - 2x^2 - 3x + 3 - (3) \,\mathrm{d}x + \int_{0}^{3} 3 - \left(x^3 - 2x^2 - 3x + 3\right) \,\mathrm{d}x = \frac{7}{12} + \frac{45}{4} = \frac{71}{6}$

d) $\int_{2}^{4} -x^2 + 6x - 9 - \left(2x^2 - 12x + 15\right) \,\mathrm{d}x = 4$

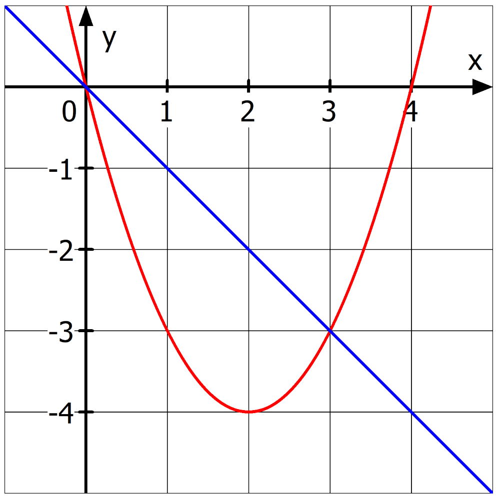
e) $\int_{0}^{4} -2x - 1 - \left(\frac{1}{2}x^2 - 4x - 1\right) \,\mathrm{d}x = \frac{16}{3}$

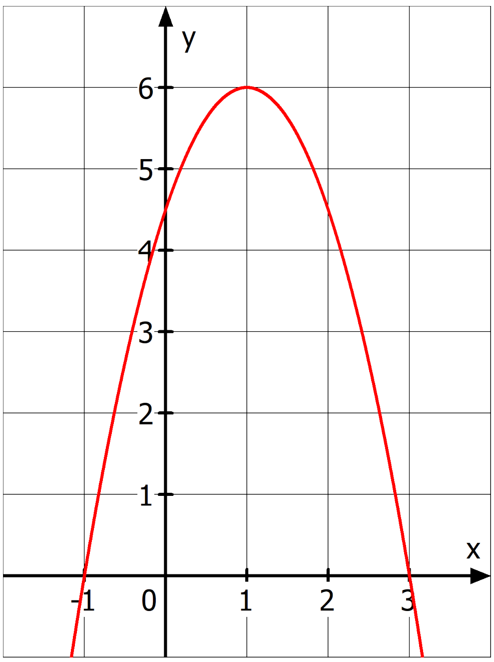
f) $\int_{-2}^{0} \frac{1}{4}x^3 - \frac{1}{4}x^2 - \frac{7}{2}x + 2 - (-2x + 2) \,\mathrm{d}x + \int_{0}^{3} -2x + 2 - \left(\frac{1}{4}x^3 - \frac{1}{4}x^2 - \frac{7}{2}x + 2\right) \,\mathrm{d}x = \frac{4}{3} + \frac{63}{16} = \frac{253}{48}$

Verhältnis von Flächen:

Beispiele:

Zeige, dass die Gerade $g(x) = -x$ die von der x-Achse und der Funktion $f(x) = x^2 - 4x$ eingeschlossene Fläche A im Verhältnis 27 : 37 teilt:



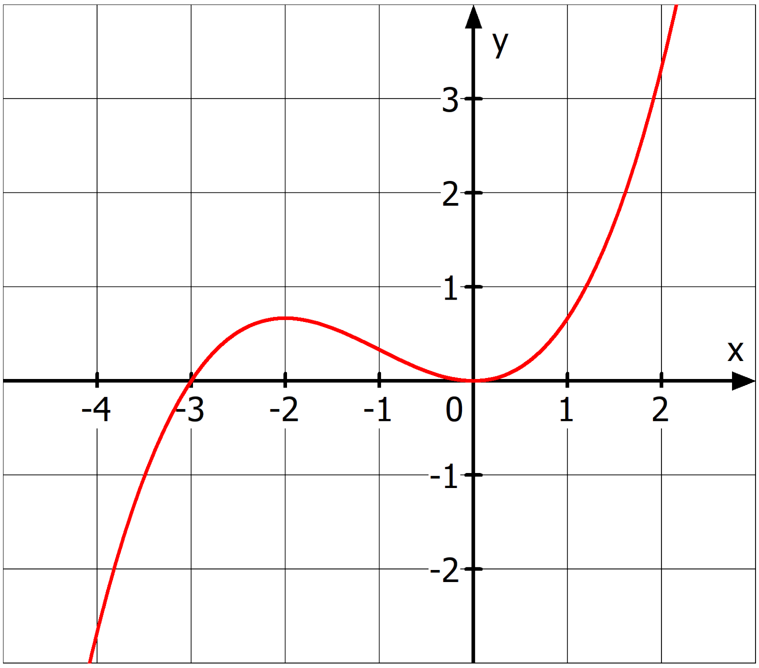


Bestimme in welchem Verhältnis die y-Achse die von $f(x) = -1,5x^2 + 3x + 4,5$ und der $x-$Achse eingeschlossenen Fläche teilt.

Übung 90 Gegeben sind die Gerade $x = 1$ und die Funktion $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 3x$, ihr Schaubild sei K_f Die Fläche A sei die von K_f und der x-Achse eingeschlossene Fläche.

a) Zeichne K_f und die Gerade $x = 1$ in ein Koordinatensystem.
b) Zeige, dass die Gerade $x = 1$ die Fläche A im Verhältnis 2:25 teilt.

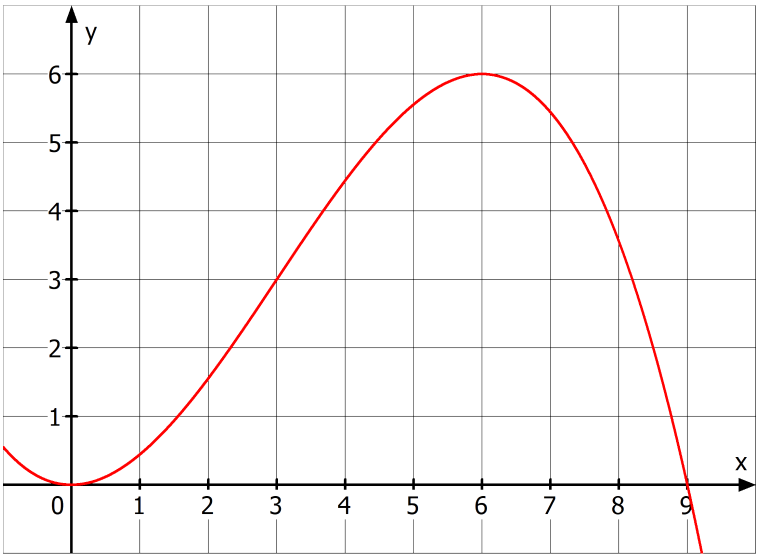
Übung 91 Gegeben sind die Funktion $g(x) = \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{2}x^2$ und ihr Schaubild K_g.



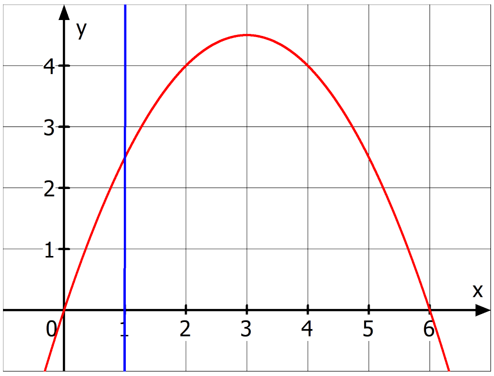
a) K_g, die x-Achse und die Gerade $x = -4$ schließen 2 Flächen ein. Zeige, dass diese gleich groß sind.
b) K_g, die x-Achse und die Gerade $x = 2$ schließen 2 Flächen ein. Zeige, dass diese im Verhältnis 16:9 stehen.

Übung 92 Gegeben sind die Funktion $h(x) = -\frac{1}{18}x^3 + \frac{1}{2}x^2$ und ihr Schaubild K_h.

a) Zeige, dass die von K_h und der x-Achse eingeschlossene Fläche A den Flächeninhalt $\frac{243}{8}$ hat.
b) Zeichne die Gerade $i(x) = -\frac{1}{2}x + \frac{9}{2}$ ein. Der Schnittpunkt der Geraden $i(x)$ mit K_h ist $S(3|3)$.
Zeige, dass die Gerade die Fläche A im Verhältnis 16:11 teilt.



Lösung zu Übung 90



Die zwei Teilflächen lassen sich z.B. wie folgt bestimmen:

Flächeninhalt der linken der beiden Teilflächen:.

$$A_1 = \int_0^1 -\frac{1}{2}x^2 + 3x \, \mathrm{d}x = \frac{4}{3}$$

Flächeninhalt der rechten der beiden Teilflächen:.

$$A_2 = -\int_1^6 -\frac{1}{2}x^2 + 3x \, \mathrm{d}x = \frac{50}{3}$$

Damit teilt die Gerade $x = 1$ die Fläche zwischen der Funktion und der x-Achse im Verhältnis $\frac{A_1}{A_2} = \frac{2}{25}$.

Lösung zu Übung 91

a) Berechnen der beiden Flächen:

$$-\int_{-4}^{-3} \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{2}x^2 \,\mathrm{d}x = \frac{9}{8}$$

$$\int_{-3}^{0} \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{2}x^2 \,\mathrm{d}x = \frac{9}{8}$$

Die beiden Flächen haben also beide den gleichen Flächeninhalt von $\frac{9}{8}$.

b) Berechnen der beiden Flächen:

$$\int_{-3}^{0} \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{2}x^2 \,\mathrm{d}x = \frac{9}{8}$$

$$\int_{0}^{2} \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{2}x^2 \,\mathrm{d}x = 2$$

Die beiden Flächen stehen also im Verhältnis $\dfrac{2}{9/8} = \dfrac{16}{9}$.

Lösung zu Übung 92

a) Berechnen die Fläche A:

$$A = \int_0^9 -\frac{1}{18}x^3 + \frac{1}{2}x^2 \, \mathrm{d}x = \frac{243}{8}$$

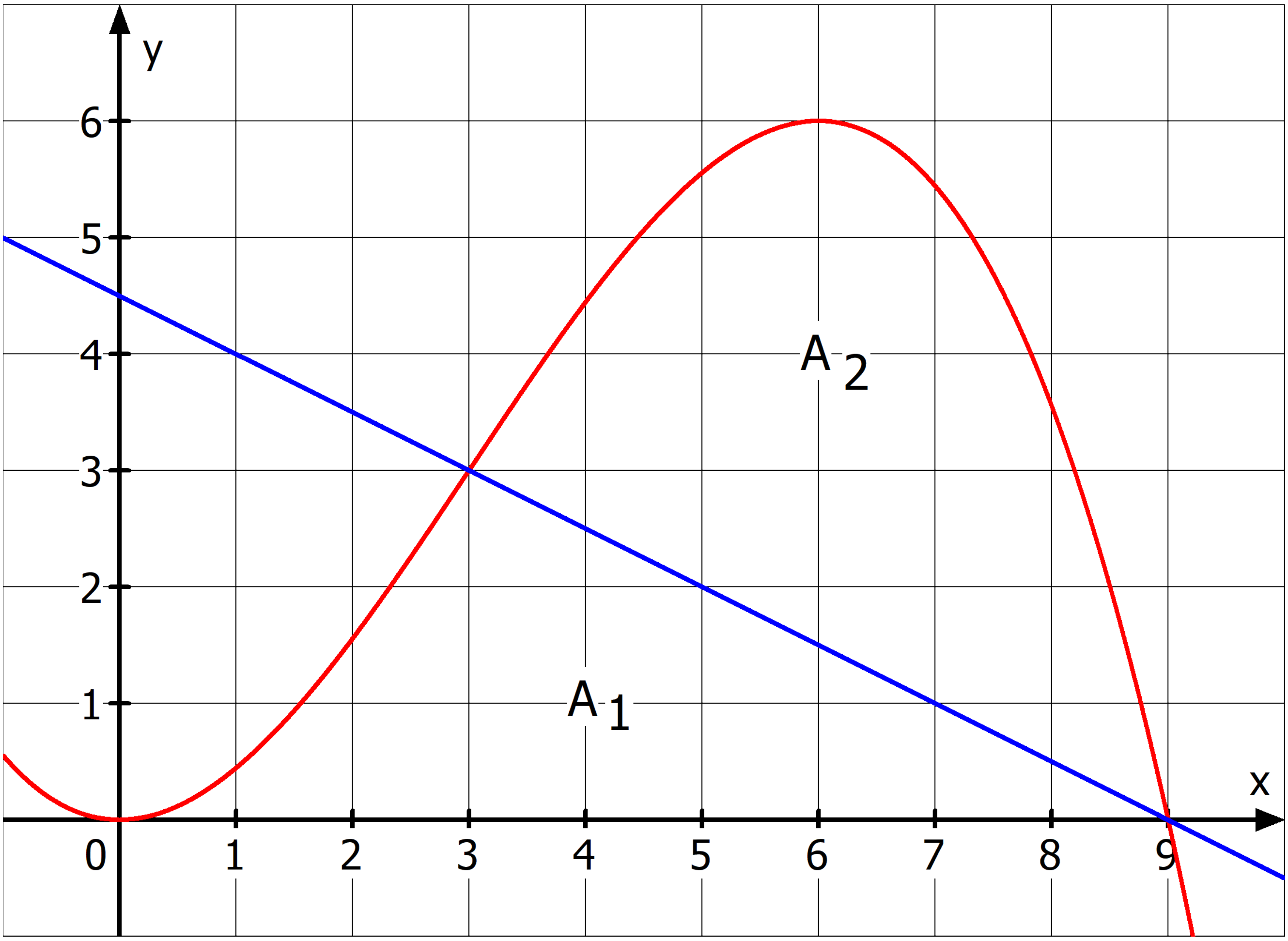
b) Berechnen der beiden Flächen:

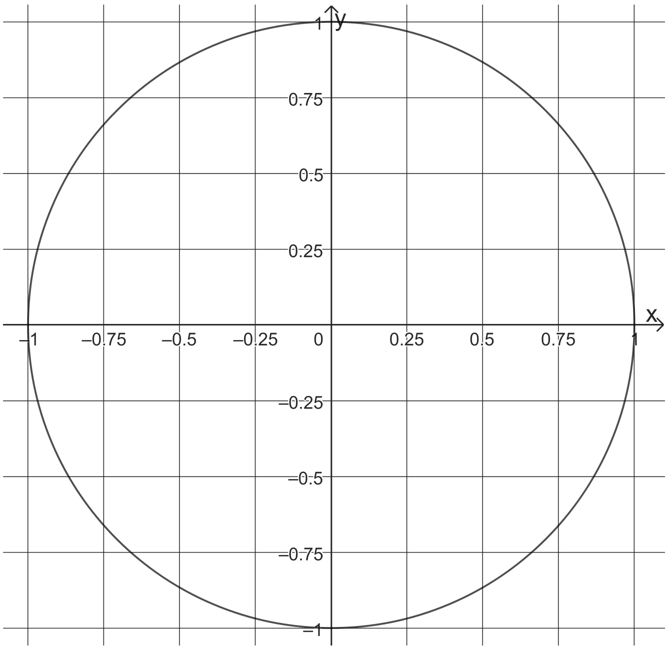
$$A_2 = \int_3^9 -\frac{1}{18}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - \left(-\frac{1}{2}x + \frac{9}{2}\right) \mathrm{d}x = 18$$

Die Fläche A_1 ergibt sich dann aus

$$A_1 = A - A_2 = \frac{243}{8} - 18 = \frac{99}{8}$$

Die Gerade teilt die Fläche A also im Verhältnis $\dfrac{A_2}{A_1} = \dfrac{18}{99/8} = \dfrac{16}{11}$





Um das Bogenmaß und später die Sinus- und Cosinusfunktion zu definieren, verwenden wir den Einheitskreis, also einen Kreis mit dem Radius 1. Im Bogenmaß wird der Winkel durch die Länge des entsprechenden Kreisbogens im Einheitskreis angegeben.

Konvertieren von Bogenmaß in Gradmaß und umgekehrt:

Übung 93

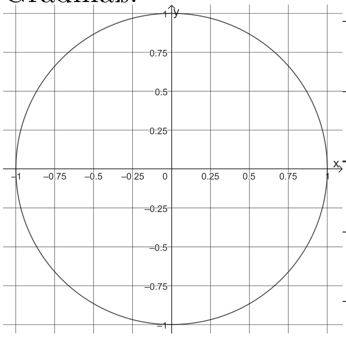
Bestimme jeweils das Grad- bzw. Bogenmaß.

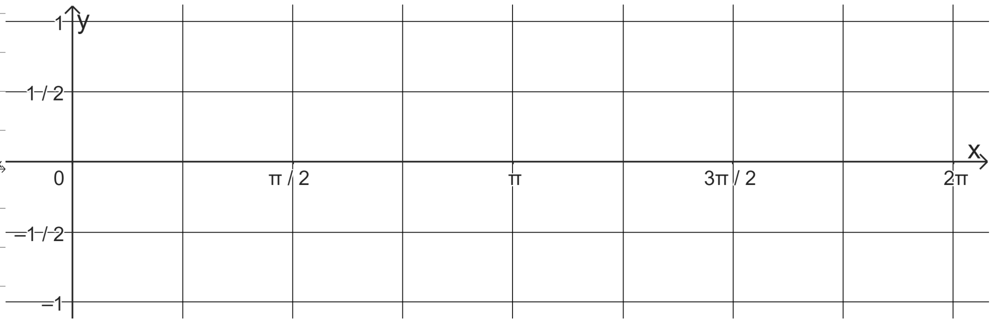
a) $\alpha = 30° =$
b) $\beta = 270° =$
c) $\gamma = 178° =$
d) $\delta = -15° =$
e) $\epsilon = 0° =$
f) $\varphi = 385° =$
g) $\eta = 720° =$
h) $\theta = -95° =$
i) $\kappa = \frac{\pi}{2} =$
j) $\lambda = \frac{7}{3}\pi =$
k) $\mu = -\pi =$
l) $\xi = 5\pi =$
m) $\rho = \frac{18\pi}{11} =$

Lösung zu Übung 93

a) $\alpha = 30° = \frac{1}{6}\pi$
b) $\beta = 270° = \frac{3}{2}\pi$
c) $\gamma = 178° = \frac{89}{90}\pi$
d) $\delta = -15° = -\frac{1}{12}\pi$
e) $\epsilon = 0° = 0$
f) $\varphi = 385° = \frac{77}{36}\pi$
g) $\eta = 720° = 4\pi$
h) $\theta = -95° = -\frac{19}{36}\pi$
i) $\kappa = \frac{\pi}{2} = 90°$
j) $\lambda = \frac{7}{3}\pi = 420°$
k) $\mu = -\pi = -180°$
l) $\xi = 5\pi = 900°$
m) $\rho = \frac{18\pi}{11} = \frac{3240}{11}° \approx 294,54°$

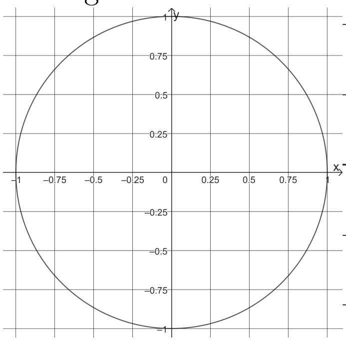
Wie beim Bogenmaß beginnen wir beim Punkt $P(1|0)$ mit dem Bogenmaß $b = 0$ bzw. $\alpha = 0°$ im Gradmaß.

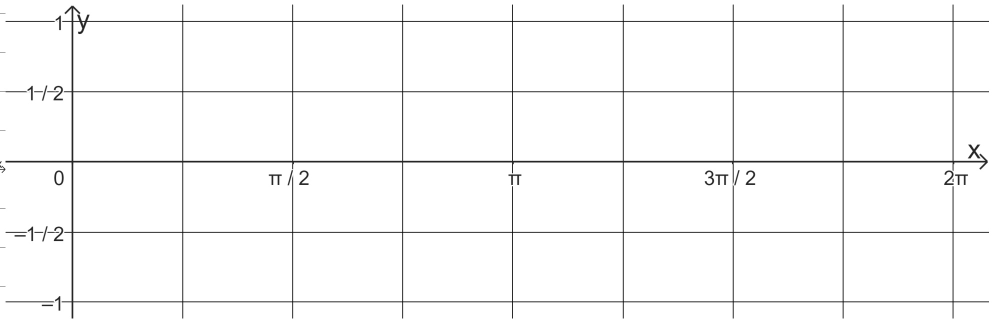




Definition der Sinusfunktion

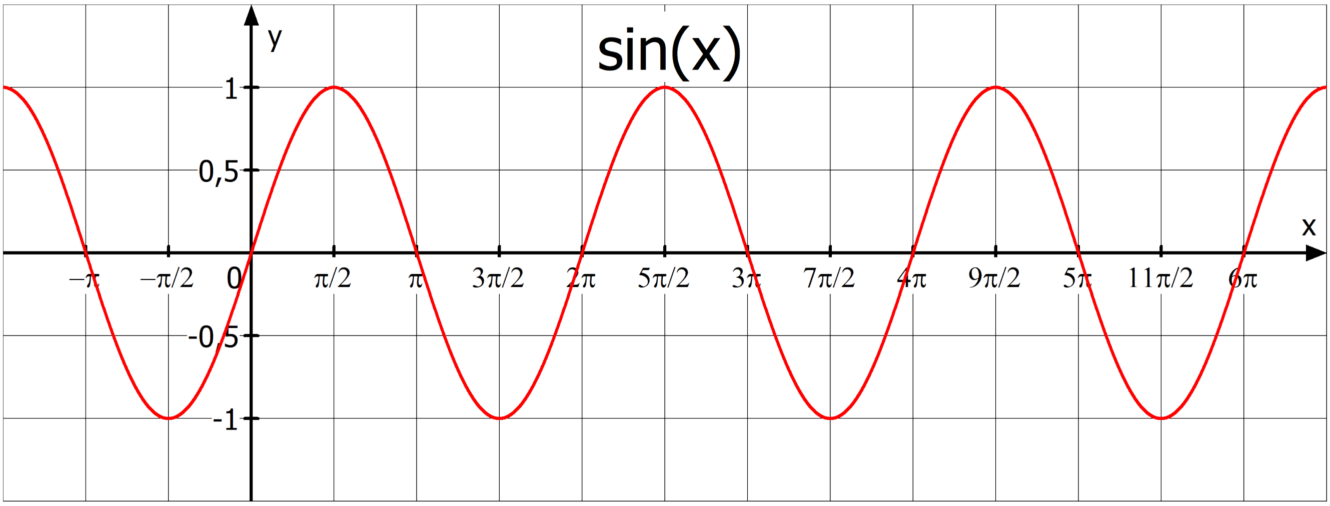
Analog kann man die Cosinusfunktion definieren:

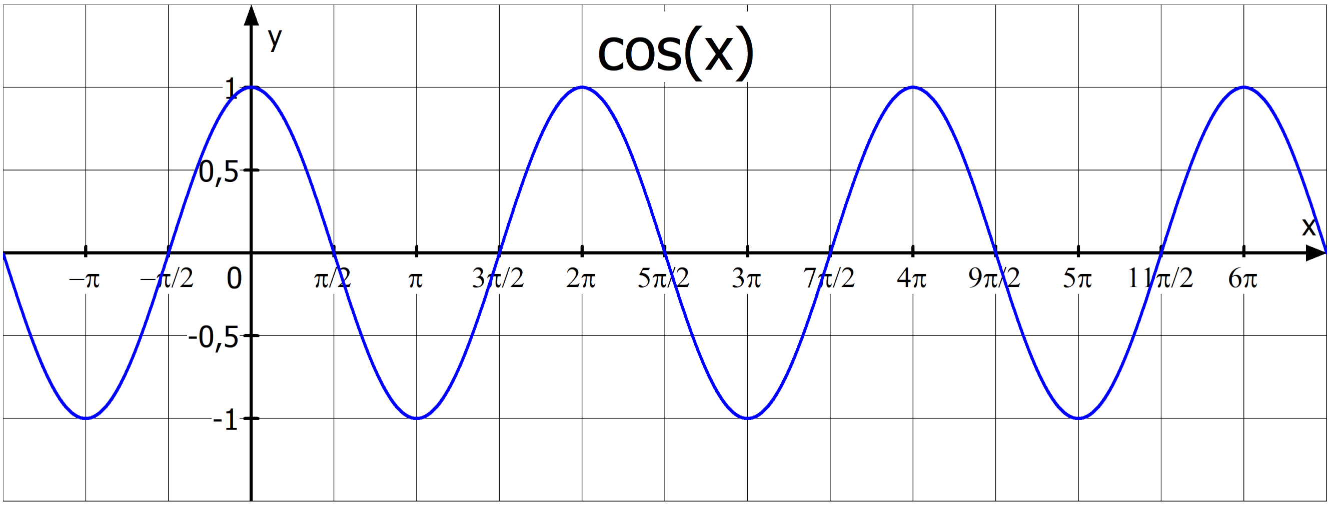




Definition der Cosinusfunktion

Periode:





Folgende Begriffe/Eigenschaften benötigen wir:

- Periode p:

- Mittelwert d:

- Amplitude a:

Hinweis: Wenn wir die beiden Funktionen verschieben sowie in x- und y-Richtung strecken und stauchen werden, so werden sich auch die Periode, Mittelwert und Amplitude ändern.

Bestimmen der Nullstellen:
Die Nullstellen sind an sich nicht schwer zu bestimmen. Das Problem ist, dass es unendlich viele Nullstellen gibt. Will man alle Nullstellen aufschreiben, so braucht man eine neue Notation. Das gleiche Problem ergibt sich bei den Maxima, Minima und Wendestellen.

Notation für unendlich viele Stellen:
Erinnerung: Die ganzen Zahlen sind wie folgt definiert: $\mathbb{Z} = \{0,\ 1,\ -1,\ 2,\ -2,\ 3,\ -3, \ldots\}$

Übung 94

a) Gib die Amplitude a, die Periode b und den Mittelwert d von $\sin x$ und $\cos x$ an und erkläre die Begriffe in eigenen Worten.
b) Gib die Symmetrie des Schaubilds von $\sin x$ und $\cos x$ an.
c) Gib alle Nullstellen von $\cos x$ an.
d) Gib alle Stellen an, an denen $\sin x$ bzw. $\cos x$ Hochpunkte haben.
e) Gib alle Stellen an, an denen $\sin x$ bzw. $\cos x$ Tiefpunkte haben.
f) Gib alle Stellen an, an denen $\sin x$ bzw. $\cos x$ Wendepunkte haben.

Lösung zu Übung 94

a) Die Amplitude beträgt für beide Funktionen $a = 1$.
Die Periode beträgt für beide Funktionen $p = 2\pi$.
Der Mittelwert beträgt für beide Funktionen $d = 0$.

b) Das Schaubild von $\sin x$ ist punktsymmetrisch zum Ursprung. Das Schaubild von $\cos x$ ist achsensymmetrisch zur y-Achse.

c) Nullstellen von $\cos x$: $x_k = \frac{\pi}{2} + k \cdot \pi,\ k \in \mathbb{Z}$

d) Stellen, an denen $\sin x$ Hochpunkte hat: $x_k = \frac{\pi}{2} + k \cdot 2\pi,\ k \in \mathbb{Z}$
Stellen, an denen $\cos x$ Hochpunkte hat: $x_k = 0 + k \cdot 2\pi,\ k \in \mathbb{Z}$

e) Stellen, an denen $\sin x$ Tiefpunkte hat: $x_k = \frac{3\pi}{2} + k \cdot 2\pi,\ k \in \mathbb{Z}$
Stellen, an denen $\cos x$ Tiefpunkte hat: $x_k = \pi + k \cdot 2\pi,\ k \in \mathbb{Z}$

f) Stellen, an denen $\sin x$ Wendepunkte hat: $x_k = 0 + k \cdot \pi,\ k \in \mathbb{Z}$
Stellen, an denen $\cos x$ Wendepunkte hat: $x_k = \frac{\pi}{2} + k \cdot \pi,\ k \in \mathbb{Z}$

Die allgemeine Sinusfunktion bzw. Cosinusfunktion sind gegeben durch:

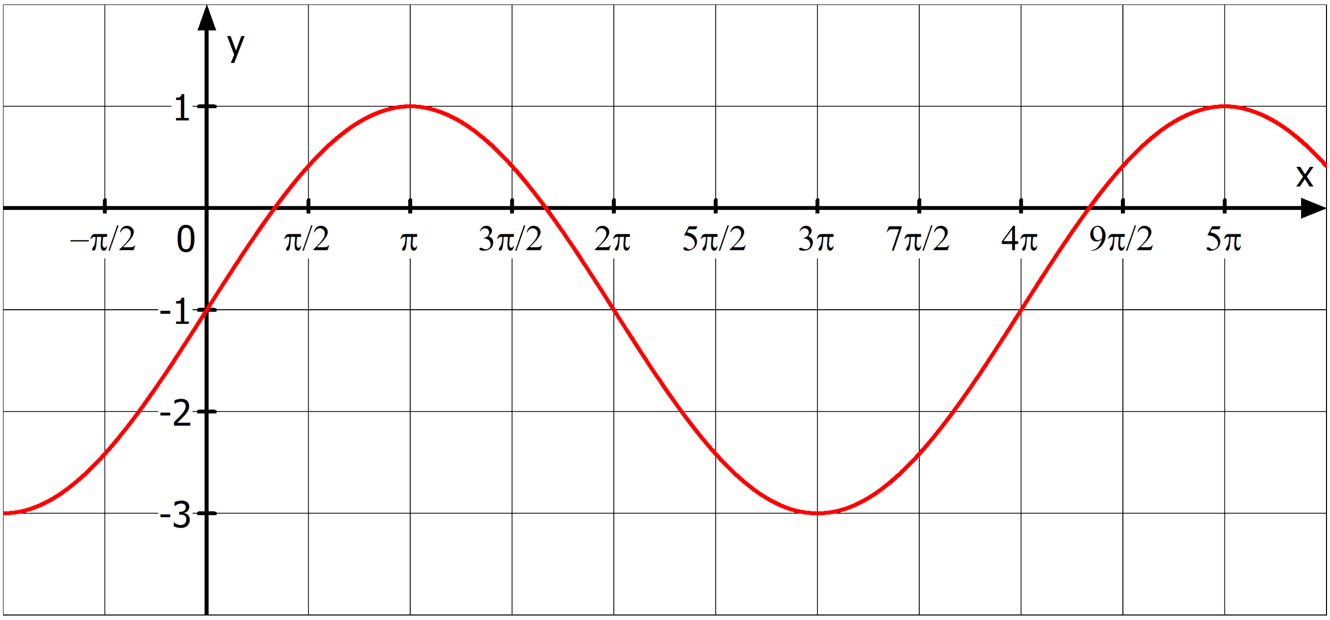
$$f(x) = a\sin(bx) + d \qquad g(x) = a\cos(bx) + d$$

- a:

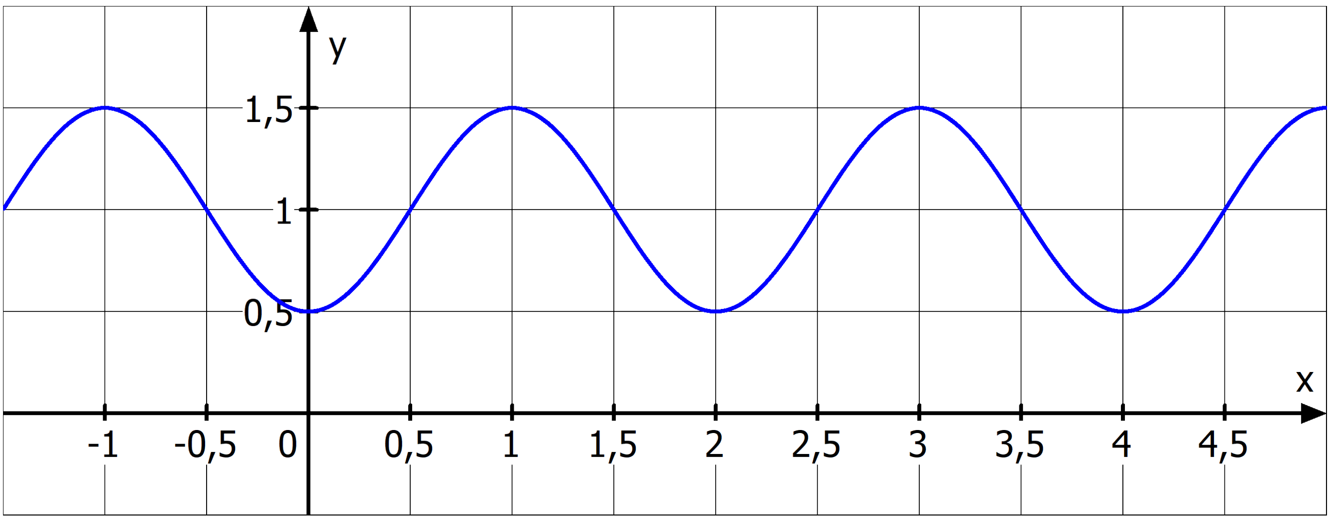
- d:

- b:

Beispiel: $f(x) = 2\sin(0,5x) - 1$



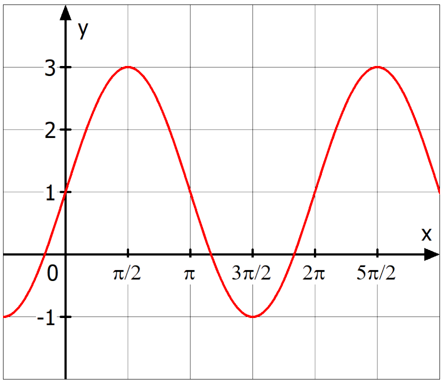
Beispiel: $g(x) = -0,5\cos(\pi x) + 1$

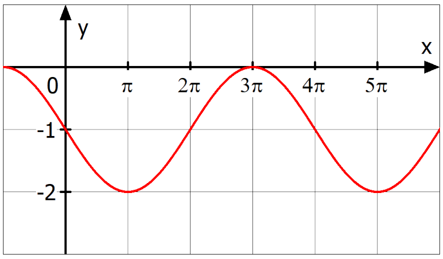


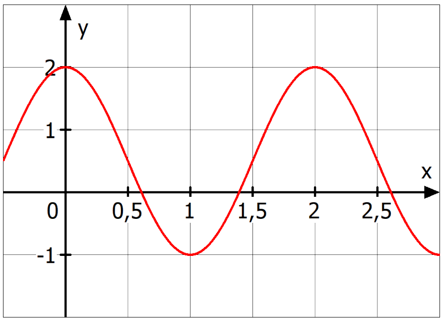
Übung 95 Gib jeweils die Amplitude, die Periode und den Mittelwert an. Skizziere dann das Schaubild so, dass mindestens eine Periode zu sehen ist.

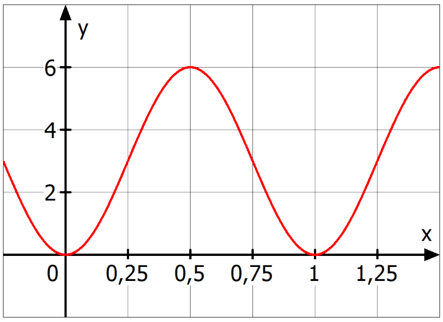
a) $f_1(x) = -2\sin(3x) - 4$
b) $f_2(x) = 1,5\sin(4x) - 2$
c) $f_3(x) = -3\cos(0,5x) + 1$
d) $f_4(x) = \cos\left(\frac{1}{3}x\right)$
e) $f_5(x) = -\sin\left(\frac{1}{2}x\right) - 1$
f) $f_6(x) = 3\sin\left(\frac{2}{3}x\right) + 3$
g) $f_7(x) = 4\cos\left(\frac{3}{4}x\right) + 2$
h) $f_8(x) = 2,5\sin(\pi x) - 1$
i) $f_9(x) = -\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right) + 2$
j) $f_{10}(x) = -4\sin(2\pi x) - 1$
k) $f_{11}(x) = -2,5\cos(4\pi x) + 3,5$
l) $f_{12}(x) = 3\cos(1,5x) + 2$
m) $f_{13}(x) = 0,5\sin(0,5\pi x) + 1,5$
n) $f_{14}(x) = -5\sin(4\pi x) - 3$
o) $f_{15}(x) = 3\cos(x) + 2$
p) $f_{16}(x) = -2\sin(2x)$
q) $f_{17}(x) = 2,5\sin(2x) - 3,5$
r) $f_{18}(x) = 3,5\cos\left(\frac{2}{3}\pi x\right) + 2$
s) $f_{19}(x) = 5\cos(x) - 4$
t) $f_{20}(x) = -6\cos(2\pi x) + 10$

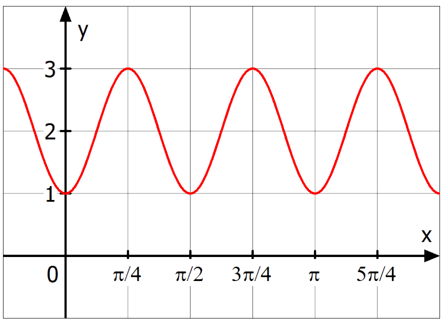
Übung 96 Stelle jeweils die Funktionsgleichung vom Typ $a \cdot \sin(bx) + d$ oder $a \cdot \cos(bx) + d$ auf.

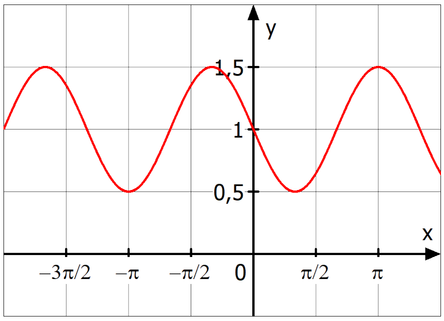
a)


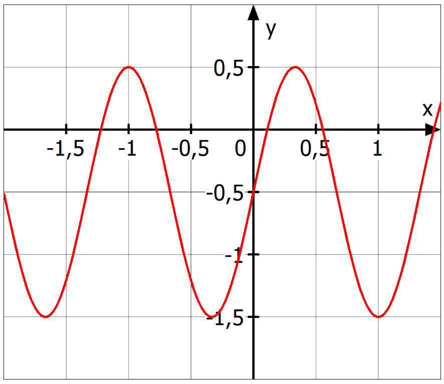
b)


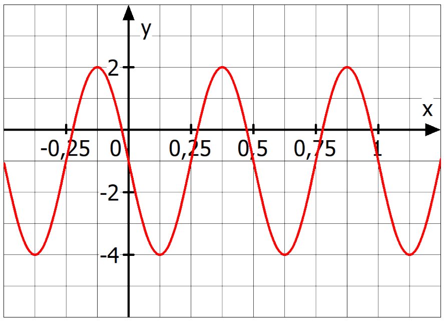
c)


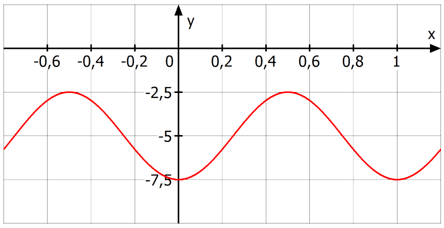
d)


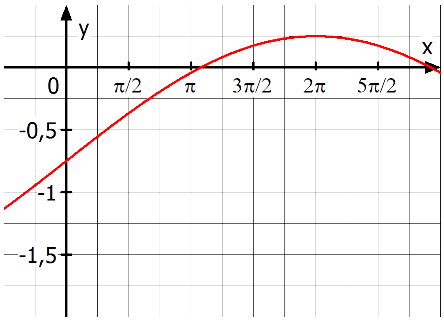
e)


f)


g)


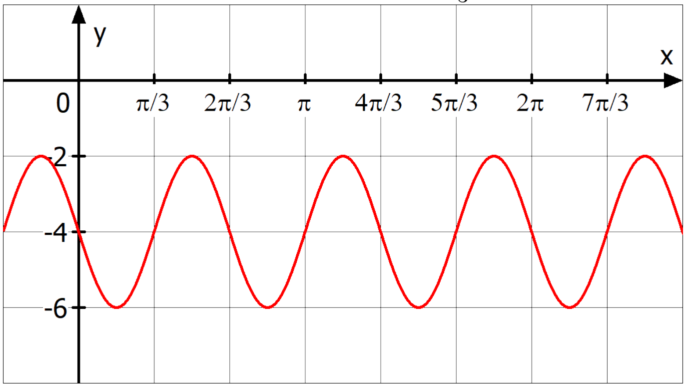
h)


i)


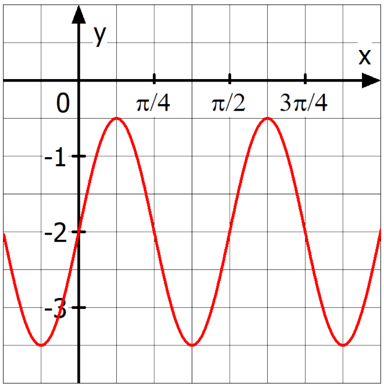
j)


Lösung zu Übung 95

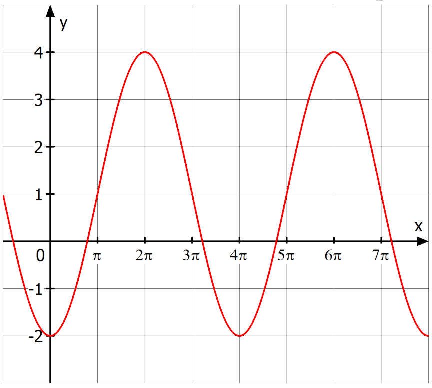
a) Amplitude $a_1 = 2$, Periode $p_1 = \frac{2\pi}{3}$, Mittelwert $d_1 = -4$



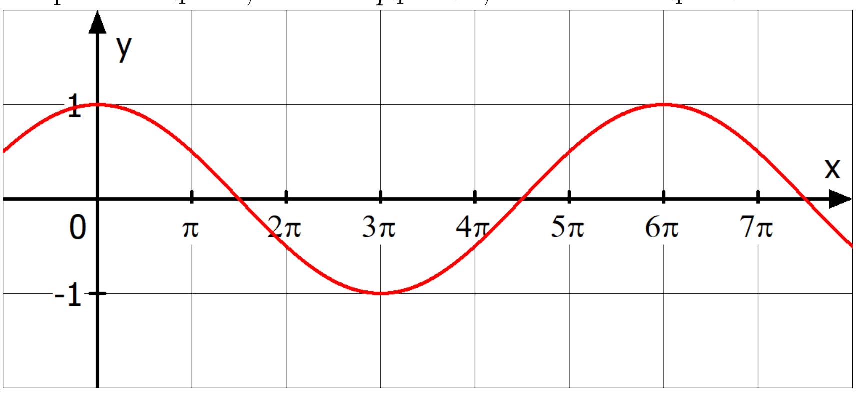
b) Amplitude $a_2 = 1,5$, Periode $p_2 = \frac{\pi}{2}$, Mittelwert $d_2 = -2$



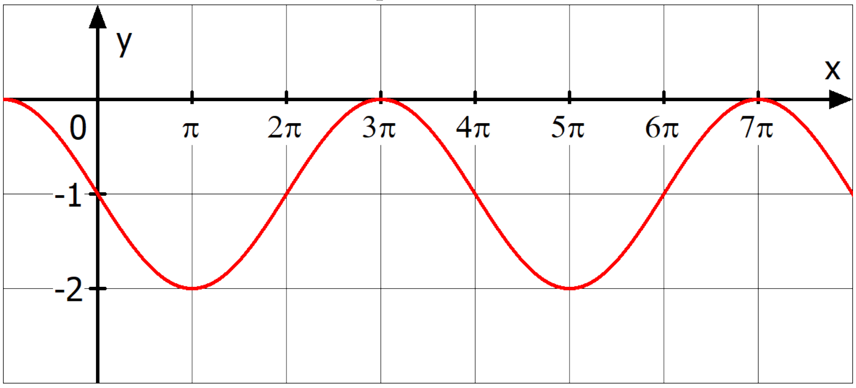
c) Amplitude $a_3 = 3$, Periode $p_3 = 4\pi$, Mittelwert $d_3 = 1$



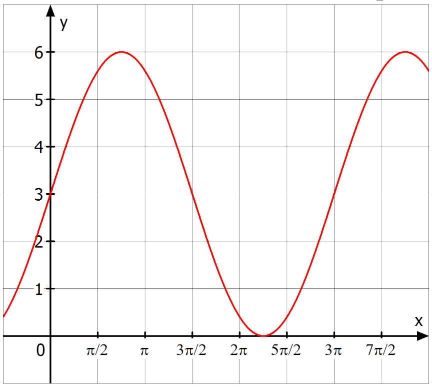
d) Amplitude $a_4 = 1$, Periode $p_4 = 6\pi$, Mittelwert $d_4 = 0$



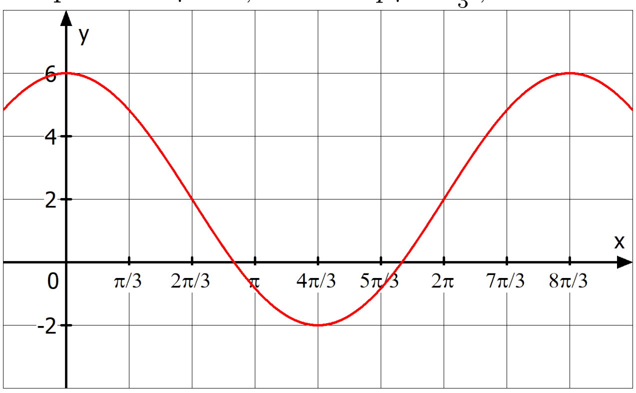
e) Amplitude $a_5 = 1$, Periode $p_5 = 4\pi$, Mittelwert $d_5 = -1$



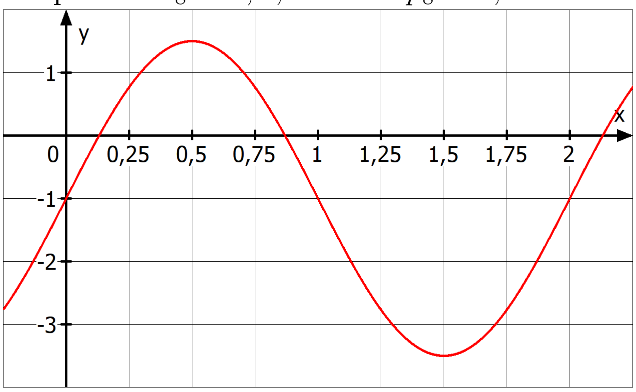
f) Amplitude $a_6 = 3$, Periode $p_6 = 3\pi$, Mittelwert $d_6 = 3$



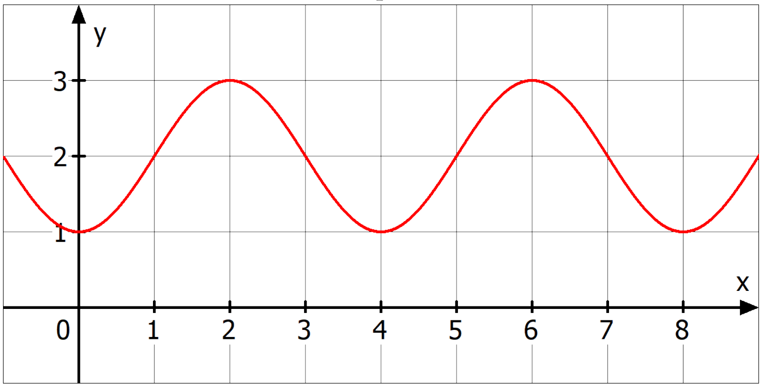
g) Amplitude $a_7 = 4$, Periode $p_7 = \frac{8\pi}{3}$, Mittelwert $d_7 = 2$



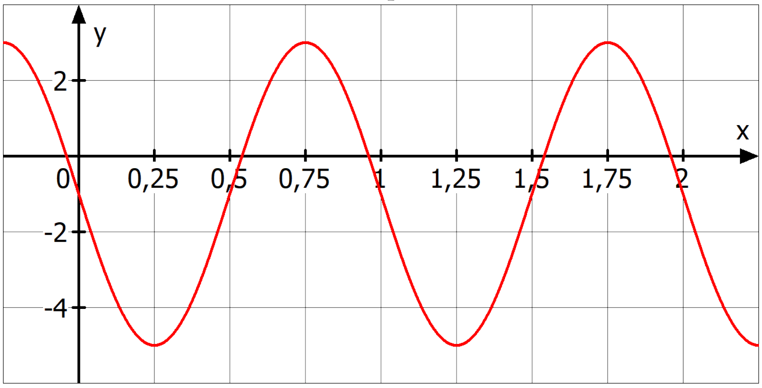
h) Amplitude $a_8 = 2,5$, Periode $p_8 = 2$, Mittelwert $d_8 = -1$



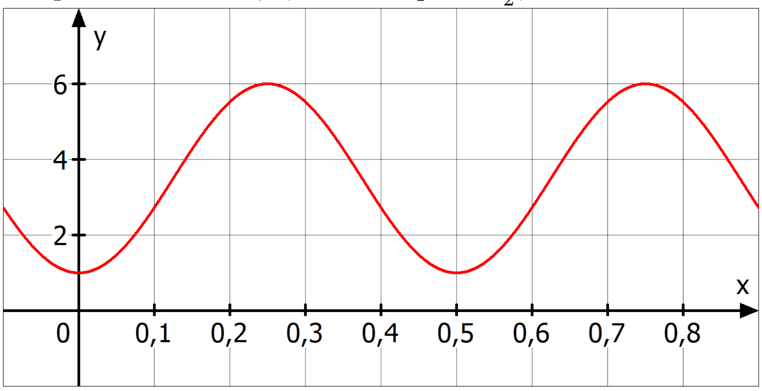
i) Amplitude $a_9 = 1$, Periode $p_9 = 4$, Mittelwert $d_9 = 2$



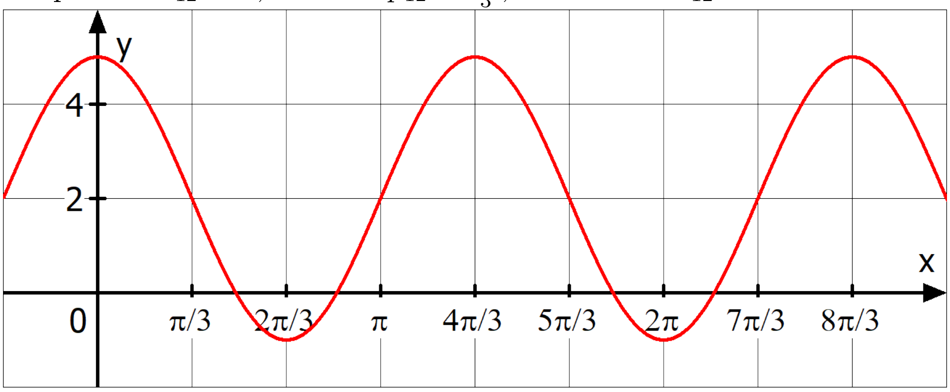
j) Amplitude $a_{10} = 4$, Periode $p_{10} = 1$, Mittelwert $d_{10} = -1$



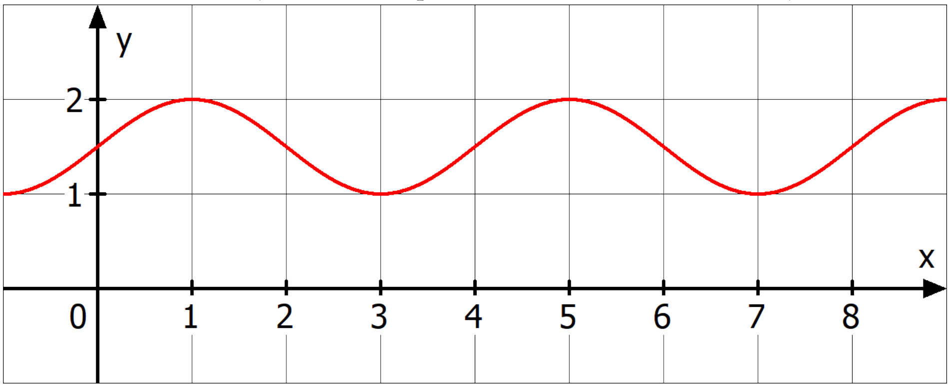
k) Amplitude $a_{11} = 2,5$, Periode $p_{11} = \frac{1}{2}$, Mittelwert $d_{11} = 3,5$



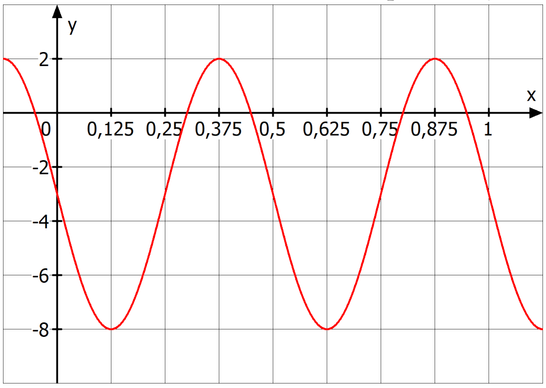
l) Amplitude $a_{12} = 3$, Periode $p_{12} = \frac{4\pi}{3}$, Mittelwert $d_{12} = 2$



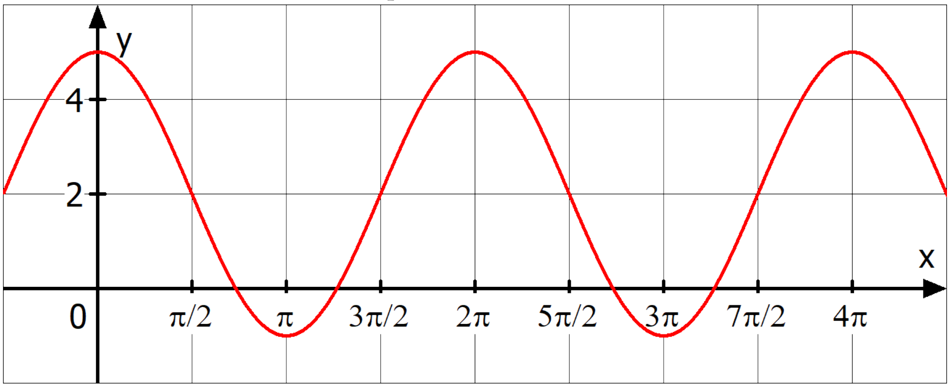
m) Amplitude $a_{13} = 0,5$, Periode $p_{13} = 4$, Mittelwert $d_{13} = 1,5$



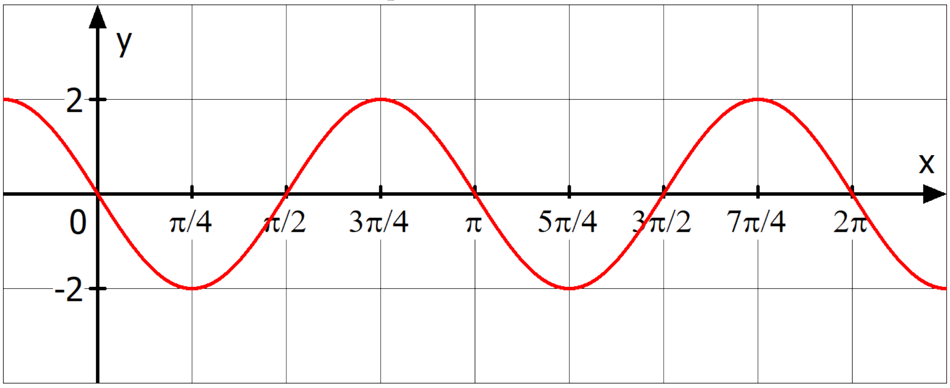
n) Amplitude $a_{14} = 5$, Periode $p_{14} = 0,5$, Mittelwert $d_{14} = -3$



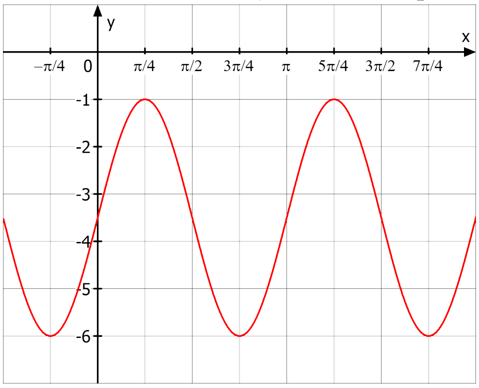
o) Amplitude $a_{15} = 3$, Periode $p_{15} = 2\pi$, Mittelwert $d_{15} = 2$



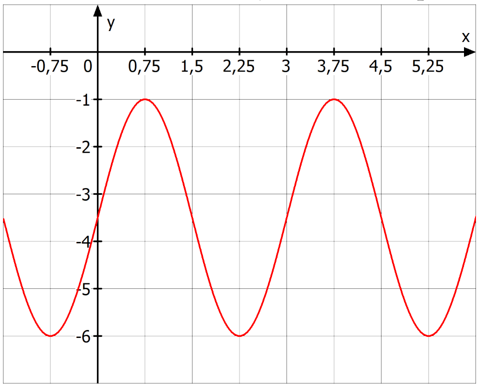
p) Amplitude $a_{16} = 2$, Periode $p_{16} = \pi$, Mittelwert $d_{16} = 0$



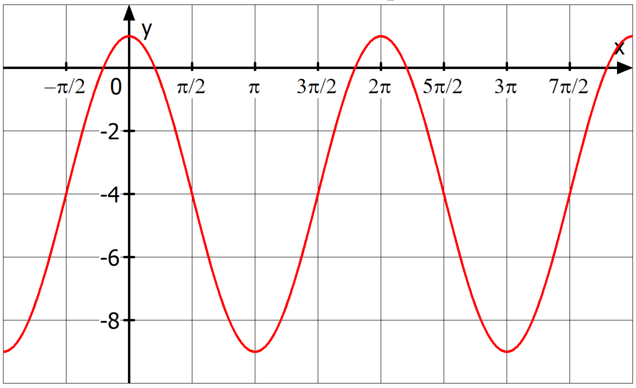
q) Amplitude $a_{17} = 2,5$, Periode $p_{17} = \pi$, Mittelwert $d_{17} = -3,5$



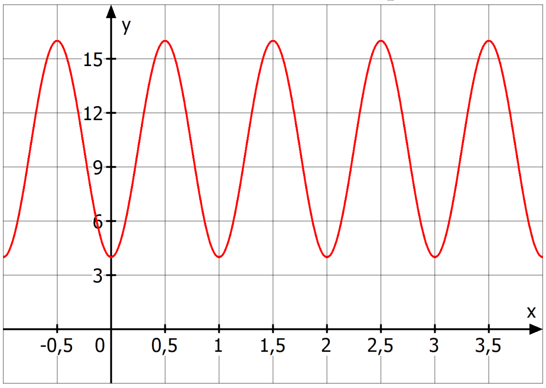
r) Amplitude $a_{18} = 3,5$, Periode $p_{18} = 3$, Mittelwert $d_{18} = 2$



s) Amplitude $a_{19} = 5$, Periode $p_{19} = 2\pi$, Mittelwert $d_{19} = -4$



t) Amplitude $a_{20} = 6$, Periode $p_{20} = 1$, Mittelwert $d_{20} = 10$



Lösung zu Übung 96

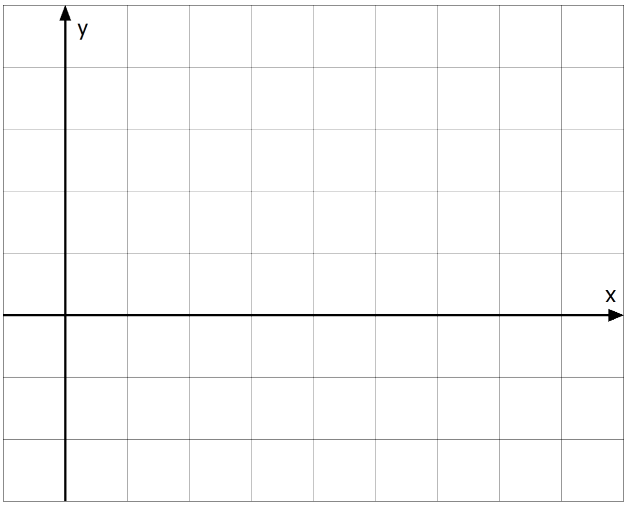
a) $f_1(x) = 2\sin(x) + 1$
b) $f_2(x) = -\sin\left(\frac{1}{2}x\right) - 1$
c) $f_3(x) = 1,5\cos(\pi x) + 0,5$
d) $f_4(x) = -3\cos(2\pi x) + 3$
e) $f_5(x) = -\cos(4x) + 2$
f) $f_6(x) = -0,5\sin\left(\frac{3}{2}x\right) + 1$
g) $f_7(x) = \sin\left(\frac{3\pi}{2}x\right) - 0,5$
h) $f_8(x) = -3\sin(4\pi x) - 1$
i) $f_9(x) = -2,5\cos(2\pi x) - 5$
j) $f_{10}(x) = \sin\left(\frac{1}{4}x\right) - 0,75$

Das Standardverfahren zum Bestimmen von Extrem- und Wendepunkten über das Bestimmen der Nullstellen der ersten und zweiten Ableitung (mit Vorzeichenwechsel) kann auch bei trigonometrischen Funktionen der Form $a\sin(bx)+d$ oder $a\cos(bx)+d$ angewendet werden. Dazu macht man sich folgende Eigenschaften zu Nutze:

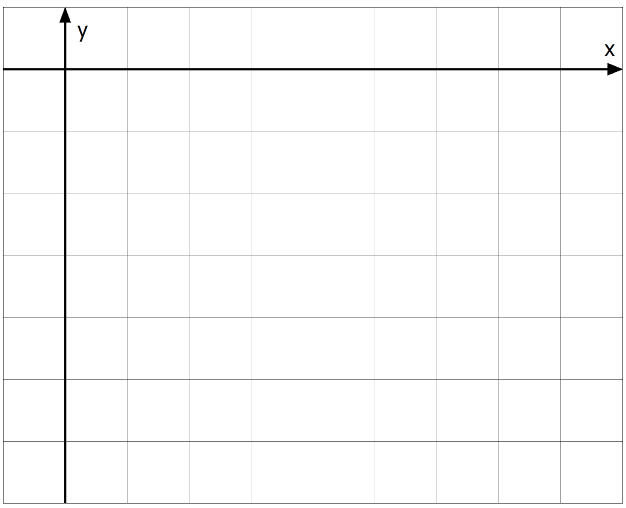
1. Abstand auf der x-Achse:

2. y-Werte:

Mit Hilfe einer Skizze lassen sich so die Extrem- und Wendepunkte leicht bestimmen. Bsp. 1: Bestimme die Extrem- und Wendepunkte der Funktion $f(x) = 3\sin(\pi x) + 1$.



Bsp. 2: Bestimme die Extrem- und Wendepunkte der Funktion $f(x) = -\cos(0,5x) - 2$.



Übung 97 Bestimme jeweils alle Hoch-, Tief- und Wendepunkte:

a) $f(x) = -3\sin(2x) + \frac{3}{2}$
b) $f(x) = 4\sin(2\pi x) - 1$
c) $f(x) = \cos(0,5x)$
d) $f(x) = -\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right) - 1$
e) $f(x) = 4\sin(3\pi x) + 2$
f) $f(x) = 0,5\cos(5x) + 3$
g) $f(x) = -5\sin\left(\frac{2}{3}x\right) - 3$
h) $f(x) = -1,5\cos\left(\frac{5}{4}x\right) - 2,5$
i) $f(x) = 5\sin(\pi x)$
j) $f(x) = 4\sin\left(\frac{3\pi}{2}x\right) - 1$
k) $f(x) = \frac{1}{3}\cos(2x) - \frac{1}{8}$
l) $f(x) = -0,4\sin(6\pi x) + 1,6$
m) $f(x) = 0,5\cos\left(\frac{\pi}{6}x\right) + 0,6$
n) $f(x) = -3\cos(0,2x) + 2$
o) $f(x) = \frac{1}{7}\cos(\pi x) - \frac{1}{5}$
p) $f(x) = -6\sin\left(\frac{1}{\pi}x\right) - 3$
q) $f(x) = 2\sin(2,5x) - 4$
r) $f(x) = 4\cos(8x) + \sqrt{2}$
s) $f(x) = -3\cos\left(\frac{5\pi}{8}x\right) - \frac{1}{4}$
t) $f(x) = -4\sin(3x) + 6$
u) $f(x) = 4\cos\left(\frac{3\pi}{4}x\right) - 12$
v) $f(x) = 2\sin(6x) + 2$
w) $f(x) = -\frac{3}{4}\cos\left(\frac{3}{8}x\right) + \frac{1}{8}$
x) $f(x) = -\frac{25}{13}\sin(5\pi x) - \frac{5}{2}$
y) $f(x) = \frac{5}{3}\sin\left(\frac{5\pi}{3}x\right) + \frac{8}{3}$
z) $f(x) = -\frac{9}{4}\cos\left(\frac{1}{3}x\right) - 1$

Lösung zu Übung 97

a) Hochpunkte: $H_k\left(\frac{3\pi}{4} + \pi k \middle| \frac{9}{2}\right),\ k \in \mathbb{Z}$
Tiefpunkte: $T_k\left(\frac{\pi}{4} + \pi k \middle| -\frac{3}{2}\right)$
Wendepunkte: $W_k\left(\frac{\pi}{2}k \middle| \frac{3}{2}\right)$

b) Hochpunkte: $H_k\left(\frac{1}{4} + k \middle| 3\right),\ k \in \mathbb{Z}$
Tiefpunkte: $T_k\left(\frac{3}{4} + k \middle| -5\right)$
Wendepunkte: $W_k\left(\frac{k}{2} \middle| -1\right)$

c) Hochpunkte: $H_k(4\pi k|1),\ k \in \mathbb{Z}$
Tiefpunkte: $T_k(2\pi + 4\pi k|-1)$
Wendepunkte: $W_k(\pi + 2\pi k|0)$

d) Hochpunkte: $H_k(3 + 4k|0),\ k \in \mathbb{Z}$
Tiefpunkte: $T_k(4k|-2)$
Wendepunkte: $W_k(1 + 2k|-1)$

e) Hochpunkte: $H_k\left(\frac{1}{6} + \frac{2}{3}k \middle| 6\right),\ k \in \mathbb{Z}$
Tiefpunkte: $T_k\left(\frac{1}{2} + \frac{2}{3}k \middle| -2\right)$
Wendepunkte: $W_k\left(\frac{k}{3} \middle| 2\right)$

f) Hochpunkte: $H_k\left(\frac{2}{5}\pi k \middle| 3,5\right),\ k \in \mathbb{Z}$
Tiefpunkte: $T_k\left(\frac{1}{5}\pi + \frac{2}{5}\pi k \middle| 2,5\right)$
Wendepunkte: $W_k\left(\frac{\pi}{10} + \frac{\pi}{5}k \middle| 3\right)$

g) Hochpunkte: $H_k\left(\frac{9}{4}\pi + 3\pi k \middle| 2\right),\ k \in \mathbb{Z}$
Tiefpunkte: $T_k\left(\frac{3}{4}\pi + 3\pi k \middle| -8\right)$
Wendepunkte: $W_k\left(\frac{3}{2}\pi k \middle| -3\right)$

h) Hochpunkte: $H_k\left(\frac{4}{5}\pi + \frac{8}{5}\pi k \middle| -1\right),\ k \in \mathbb{Z}$
Tiefpunkte: $T_k\left(\frac{8}{5}\pi k \middle| -4\right)$
Wendepunkte: $W_k\left(\frac{2}{5}\pi + \frac{4}{5}\pi k \middle| -2,5\right)$

i) Hochpunkte: $H_k(0,5 + 2k|5),\ k \in \mathbb{Z}$
Tiefpunkte: $T_k(1,5 + 2k|-5)$
Wendepunkte: $W_k(k|0)$

j) Hochpunkte: $H_k\left(\frac{1}{3} + \frac{4}{3}k \middle| 3\right),\ k \in \mathbb{Z}$
Tiefpunkte: $T_k\left(1 + \frac{4}{3}k \middle| -5\right)$
Wendepunkte: $W_k\left(\frac{2}{3}k \middle| -1\right)$

k) Hochpunkte: $H_k\left(\pi k \middle| \frac{5}{24}\right),\ k \in \mathbb{Z}$
Tiefpunkte: $T_k\left(\frac{\pi}{2} + \pi k \middle| -\frac{11}{24}\right)$
Wendepunkte: $W_k\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}k \middle| -\frac{1}{8}\right)$

l) Hochpunkte: $H_k\left(\frac{1}{12} + \frac{1}{3}k \middle| 2\right),\ k \in \mathbb{Z}$
Tiefpunkte: $T_k\left(\frac{1}{4} + \frac{1}{3}k \middle| 1,2\right)$
Wendepunkte: $W_k\left(\frac{1}{6}k \middle| 1,6\right)$

m) Hochpunkte: $H_k(12k|1,1),\ k \in \mathbb{Z}$
Tiefpunkte: $T_k(6 + 12k|0,1)$
Wendepunkte: $W_k(3 + 6k|0,6)$

n) Hochpunkte: $H_k(5\pi + 10\pi k|5),\ k \in \mathbb{Z}$
Tiefpunkte: $T_k(10\pi k|-1)$
Wendepunkte: $W_k\left(\frac{5}{2}\pi + 5\pi k\middle|2\right)$

o) Hochpunkte: $H_k\left(2k\middle|-\frac{2}{35}\right),\ k \in \mathbb{Z}$
Tiefpunkte: $T_k\left(1 + 2k\middle|-\frac{12}{35}\right)$
Wendepunkte: $W_k\left(\frac{1}{2} + k\middle|-\frac{1}{5}\right)$

p) Hochpunkte: $H_k\left(\frac{3\pi^2}{2} + 2\pi^2 k\middle|3\right),\ k \in \mathbb{Z}$
Tiefpunkte: $T_k\left(\frac{\pi^2}{2} + 2\pi^2 k\middle|-9\right)$
Wendepunkte: $W_k(\pi^2 k|-3)$

q) Hochpunkte: $H_k\left(\frac{\pi}{5} + \frac{4\pi}{5}k\middle|-2\right),\ k \in \mathbb{Z}$
Tiefpunkte: $T_k\left(\frac{3\pi}{5} + \frac{4\pi}{5}k\middle|-6\right)$
Wendepunkte: $W_k\left(\frac{2}{5}\pi k\middle|-4\right)$

r) Hochpunkte: $H_k\left(\frac{\pi}{4}k\middle|\sqrt{2} + 4\right),\ k \in \mathbb{Z}$
Tiefpunkte: $T_k\left(\frac{\pi}{8} + \frac{\pi}{4}k\middle|\sqrt{2} - 4\right)$
Wendepunkte: $W_k\left(\frac{\pi}{16} + \frac{\pi}{8}k\middle|\sqrt{2}\right)$

s) Hochpunkte: $H_k\left(\frac{8}{5} + \frac{16}{5}k\middle|\frac{11}{4}\right),\ k \in \mathbb{Z}$
Tiefpunkte: $T_k\left(\frac{16}{5}k\middle|-\frac{13}{4}\right)$
Wendepunkte: $W_k\left(\frac{12}{5} + \frac{8}{5}k\middle|-\frac{1}{4}\right)$

t) Hochpunkte: $H_k\left(\frac{\pi}{2} + \frac{2\pi}{3}k\middle|10\right),\ k \in \mathbb{Z}$
Tiefpunkte: $T_k\left(\frac{\pi}{6} + \frac{2\pi}{3}k\middle|2\right)$
Wendepunkte: $W_k\left(\frac{\pi}{3}k\middle|6\right)$

u) Hochpunkte: $H_k\left(\frac{8}{3}k\middle|-8\right),\ k \in \mathbb{Z}$
Tiefpunkte: $T_k\left(\frac{4}{3} + \frac{8}{3}k\middle|-16\right)$
Wendepunkte: $W_k\left(\frac{2}{3} + \frac{4}{3}k\middle|-12\right)$

v) Hochpunkte: $H_k\left(\frac{\pi}{12} + \frac{\pi}{3}k\middle|4\right),\ k \in \mathbb{Z}$
Tiefpunkte: $T_k\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{3}k\middle|0\right)$
Wendepunkte: $W_k\left(\frac{\pi}{6}k\middle|2\right)$

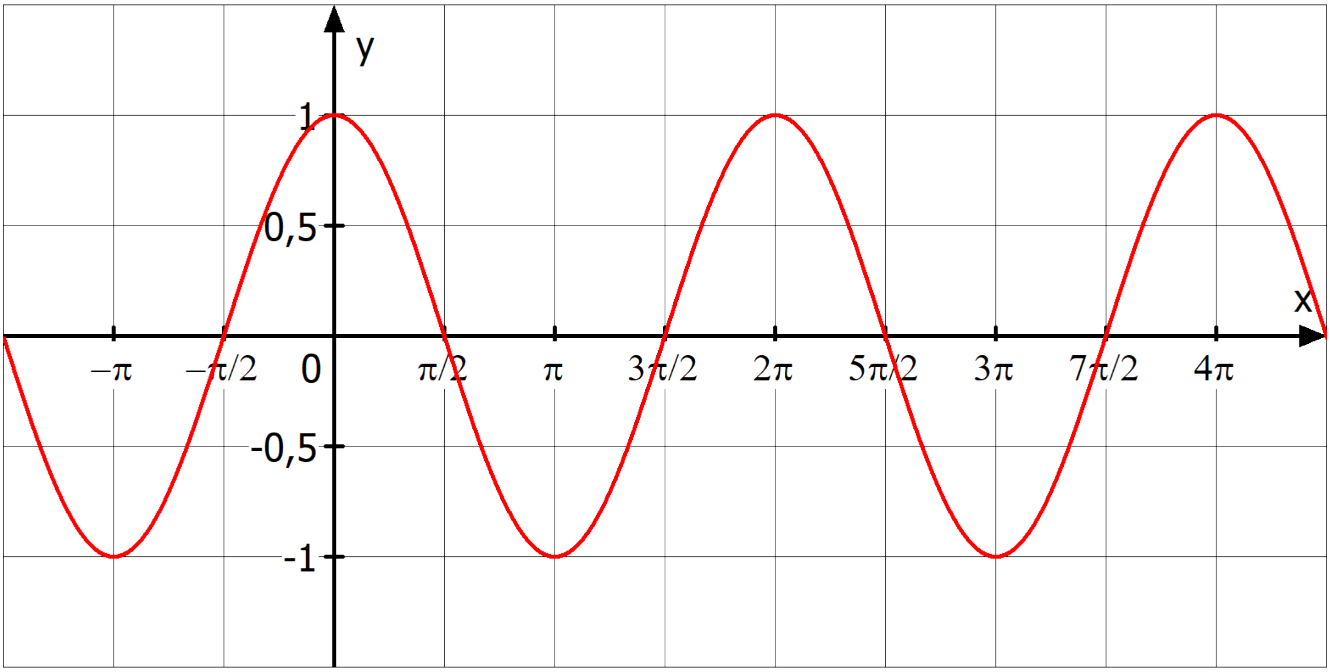
w) Hochpunkte: $H_k\left(\frac{8}{3}\pi + \frac{16}{3}\pi k\middle|\frac{7}{8}\right),\ k \in \mathbb{Z}$
Tiefpunkte: $T_k\left(\frac{16}{3}\pi k\middle|-\frac{5}{8}\right)$
Wendepunkte: $W_k\left(\frac{4}{3}\pi\frac{8}{3}\pi k\middle|\frac{1}{8}\right)$

x) Hochpunkte: $H_k\left(\frac{3}{10} + \frac{2}{5}k\middle|-\frac{15}{26}\right),\ k \in \mathbb{Z}$
Tiefpunkte: $T_k\left(\frac{1}{10} + \frac{2}{5}k\middle|-\frac{115}{26}\right)$
Wendepunkte: $W_k\left(\frac{1}{5}k\middle|-\frac{5}{2}\right)$

y) Hochpunkte: $H_k\left(\frac{3}{10} + \frac{6}{5}k\middle|\frac{13}{3}\right),\ k \in \mathbb{Z}$
Tiefpunkte: $T_k\left(\frac{9}{10} + \frac{6}{5}k\middle|1\right)$
Wendepunkte: $W_k\left(\frac{3}{5}k\middle|\frac{8}{3}\right)$

z) Hochpunkte: $H_k\left(3\pi + 6\pi k\middle|\frac{5}{4}\right),\ k \in \mathbb{Z}$
Tiefpunkte: $T_k\left(6\pi k\middle|-\frac{13}{4}\right)$
Wendepunkte: $W_k\left(\frac{3}{2}\pi + 3\pi k\middle|-1\right)$

Wir erinnern uns, dass wir Gleichungen der Form $x^n = r$ oder $e^x = r$ durch das Anwenden der passenden Umkehrfunktion lösen können, für e^x der natürliche Logarithmus ($\ln(y)$) und für x^n die n-te Wurzel. Entsprechend gibt es auch für die Sinus- und Cosinusfunktion passende Umkehrfunktionen. Betrachten wir das Beispiel: $2\cos(x) = 1,5$



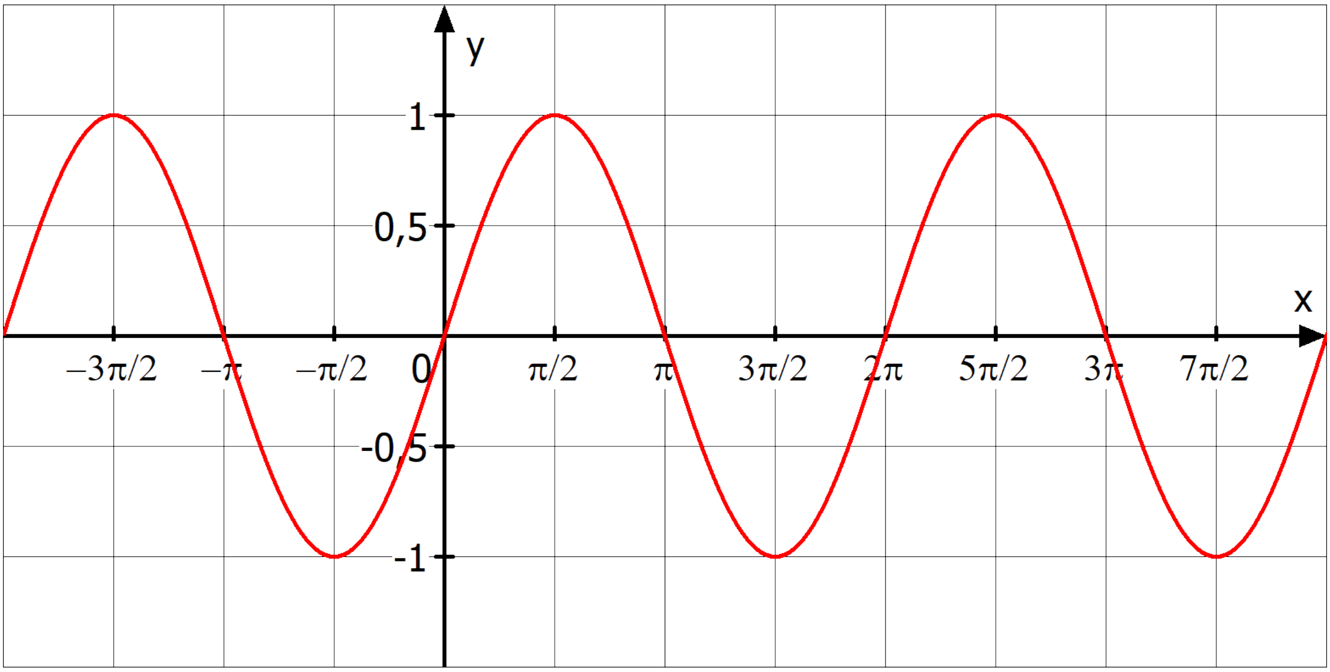
1. Gleichung zu $\cos(x) = r$ umformen

2. Erste Lösung mit Hilfe der Umkehrfunktion $\cos^{-1}$ bestimmen

3. Zweite Lösung aus Symmetrie bestimmen

4. Alle Lösungen bestimmen

Das gleiche Vorgehen kann zum Lösen von Gleichungen der Form $\sin(x) = r$ verwendet werden: Betrachten wir das Beispiel $4\sin(x) = 2$



1. Gleichung zu $\sin(x) = r$ umformen

2. Erste Lösung mit Hilfe der Umkehrfunktion $\sin^{-1}$ bestimmen

3. Zweite Lösung aus Symmetrie bestimmen

4. Alle Lösungen bestimmen

Übung 98 Bestimme jeweils alle Lösungen:

a) $\sin(x) = -\frac{1}{2}$
b) $-2\sin(x) = \sqrt{2}$
c) $\cos(x) = \frac{\sqrt{3}}{2}$
d) $3\cos(x) = -2$
e) $\sin(x) = 2$
f) $2\cos(x) + 1 = 3$
g) $\sin(x) = 0$
h) $-\cos(x) - 2 = -1,7$
i) $5\sin(x) = 1$
j) $3\sin(x) = -1$
k) $4\cos(x) = -2\sqrt{2}$
l) $\frac{2}{3}\cos(x) = \frac{1}{6}$
m) $-\sin(x) - 1,5 = -1,1$
n) $0,5\cos(x) = 0,6$
o) $2\cos(x) + 2 = \frac{3}{2}$
p) $-\frac{7}{5}\cos(x) - \frac{1}{5} = \frac{1}{10}$
q) $-5\sin(x) - 2 = 2$
r) $\sin(x) + 3 = -3,1$
s) $-2\cos(x) - \frac{1}{2} = -1$
t) $-4\sin(x) + 6 = -9$
u) $\cos(x) - 10 = -10,8$
v) $-5\sin(x) + 10 = -10$
w) $-\frac{7}{8}\cos(x) + \frac{1}{4} = \frac{3}{8}$
x) $-\frac{3}{2}\sin(x) - \frac{5}{2} = -\frac{20}{9}$
y) $\frac{4}{3}\sin(x) + \frac{8}{3} = \frac{5}{3}$
z) $\frac{8}{3}\cos(x) - 1 = 0$

Lösung zu Übung 98

a) $x_k = -\frac{\pi}{6} + 2\pi k$ oder $x_k = \frac{7\pi}{6} + 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z}$
b) $x_k = -\frac{\pi}{4} + 2\pi k$ oder $x_k = \frac{5\pi}{4} + 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z}$
c) $x_k = \pm\frac{\pi}{6} + 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z}$
d) $x_k = \pm\cos^{-1}\left(-\frac{2}{3}\right) + 2\pi k \approx \pm 2,30 + 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z}$
e) keine Lösungen
f) $x_k = 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z}$
g) $x_k = 2\pi k$ oder $x_k = \pi + 2\pi k = \pi k,\ k \in \mathbb{Z}$
h) $x_k = \pm\cos^{-1}(-0,3) + 2\pi k \approx \pm 1,88 + 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z}$
i) $x_k = \sin^{-1}\left(\frac{1}{5}\right) + 2\pi k \approx 0,20 + 2\pi k$ oder $x_k = \pi - \sin^{-1}\left(\frac{1}{5}\right) + 2\pi k \approx 2,94 + 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z}$
j) $x_k = \sin^{-1}\left(-\frac{1}{3}\right) + 2\pi k \approx -0,34 + 2\pi k$ oder $x_k = \pi - \sin^{-1}\left(-\frac{1}{3}\right) + 2\pi k \approx 3,48 + 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z}$
k) $x_k = \pm\frac{3\pi}{4} + 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z}$
l) $x_k = \pm\cos^{-1}\left(\frac{1}{4}\right) + 2\pi k \approx \pm 1,32 + 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z}$
m) $x_k = \sin^{-1}\left(-\frac{2}{5}\right) + 2\pi k \approx -0,41 + 2\pi k$ oder $x_k = \pi - \sin^{-1}\left(-\frac{2}{5}\right) + 2\pi k \approx 3,55 + 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z}$
n) keine Lösungen
o) $x_k = \pm\cos^{-1}\left(-\frac{1}{4}\right) + 2\pi k \approx \pm 1,82 + 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z}$
p) $x_k = \pm\cos^{-1}\left(-\frac{3}{14}\right) + 2\pi k \approx \pm 1,79 + 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z}$
q) $x_k = \sin^{-1}\left(-\frac{4}{5}\right) + 2\pi k \approx -0,93 + 2\pi k$ oder $x_k = \pi - \sin^{-1}\left(-\frac{4}{5}\right) + 2\pi k \approx 4,07 + 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z}$
r) $x_k = \sin^{-1}(-0,1) + 2\pi k \approx -0,10 + 2\pi k$ oder $x_k = \pi - \sin^{-1}(-0,1) + 2\pi k \approx 3,24 + 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z}$
s) $x_k = \pm\cos^{-1}\left(\frac{1}{4}\right) + 2\pi k \approx \pm 1,32 + 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z}$
t) keine Lösungen
u) $x_k = \pm\cos^{-1}(-0,8) + 2\pi k \approx \pm 2,50 + 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z}$
v) keine Lösungen
w) $x_k = \pm\cos^{-1}\left(-\frac{1}{7}\right) + 2\pi k \approx \pm 1,71 + 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z}$
x) $x_k = \sin^{-1}\left(-\frac{5}{27}\right) + 2\pi k \approx -0,19 + 2\pi k$ oder $x_k = \pi - \sin^{-1}\left(-\frac{5}{27}\right) + 2\pi k \approx 3,33 + 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z}$
y) $x_k = \sin^{-1}\left(-\frac{3}{4}\right) + 2\pi k \approx -0,85 + 2\pi k$ oder $x_k = \pi - \sin^{-1}\left(-\frac{3}{4}\right) + 2\pi k \approx 3,99 + 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z}$
z) $x_k = \pm\cos^{-1}\left(\frac{3}{8}\right) + 2\pi k \approx \pm 1,19 + 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z}$

Wir können Gleichungen der Form $\cos(bx) = r$ bzw. $\sin(bx) = r$ lösen, indem wir die gleichen Schritte durchführen wie beim Lösen von Gleichungen der Form $\cos(x) = r$ bzw. $\sin(x) = r$. Es sind lediglich zwei Extraschritte notwendig:

Beispiel: $2\cos(\pi x) - \sqrt{2} = 0$

1. Gleichung zu $\cos(bx) = r$ umformen
2. Substitution $bx = z$
3. Erste Lösung mit $\cos^{-1}$ bestimmen
4. Zweite Lösung für z aus Symmetrie
5. Alle Lösungen bestimmen
6. Rücksubstitution

Beispiel: $4\sin(0,25x) - 1 = 1$

1. Gleichung zu $\sin(bx) = r$ umformen
2. Substitution $bx = z$
3. Erste Lösung mit $\sin^{-1}$ bestimmen
4. Zweite Lösung für z aus Symmetrie
5. Alle Lösungen bestimmen
6. Rücksubstitution

Übung 99 Bestimme jeweils alle Lösungen:

a) $-3\sin(2x) = \frac{3}{2}$
b) $4\sin(2\pi x) = 1 + \sqrt{5}$
c) $\cos(0,5x) = \frac{1}{2}$
d) $\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right) = -1$
e) $4\sin(3\pi x) = -1$
f) $0,5\cos(5x) + 2 = 3$
g) $-5\sin\left(\frac{2}{3}x\right) = 3$
h) $\cos\left(\frac{5}{4}x\right) - 3 = -2,5$
i) $5\sin(3\pi x) = 0$
j) $4\sin\left(\frac{3\pi}{2}x\right) = 1$
k) $\frac{1}{3}\cos(2x) = -\frac{1}{8}$
l) $-\sin(6\pi x) + 1,6 = 1,3$
m) $0,5\cos\left(\frac{\pi}{6}x\right) = 0,6$
n) $-3\cos(0,2x) + 2 = \frac{3}{2}$
o) $-\frac{1}{7}\cos(\pi x) - \frac{1}{5} = -\frac{1}{10}$
p) $-6\sin\left(\frac{1}{\pi}x\right) - 3 = 1$
q) $2\sin(2,5x) - 4 = -3,1$
r) $4\cos(8x) = -2\sqrt{2}$
s) $3\cos\left(\frac{5\pi}{8}x\right) - \frac{1}{4} = -1$
t) $4\sin(3x) + 6 = -10$
u) $4\cos\left(\frac{3\pi}{4}x\right) - 12 = -10,8$
v) $2\sin(6x) + 2 = 2$
w) $-\frac{3}{4}\cos\left(\frac{3}{8}x\right) + \frac{1}{8} = \frac{1}{2}$
x) $-\frac{25}{13}\sin(5\pi x) - \frac{5}{2} = -\frac{5}{7}$
y) $\frac{5}{3}\sin\left(\frac{5\pi}{3}x\right) + \frac{8}{3} = \frac{5}{3}$
z) $-\frac{9}{4}\cos\left(\frac{1}{3}x\right) - 1 = 0$

Lösung zu Übung 99

a) $x_k = -\frac{\pi}{12} + \pi k$ oder $x_k = \frac{7\pi}{12} + \pi k,\ k \in \mathbb{Z}$

b) $x_k = -\frac{1}{20} + k$ oder $x_k = \frac{7}{20} + k,\ k \in \mathbb{Z}$

c) $x_k = \pm\frac{2\pi}{3} + 4\pi k,\ k \in \mathbb{Z}$

d) $x_k = \pm 2 + 4k,\ k \in \mathbb{Z}$

e) $x_k = \frac{1}{3\pi}\sin^{-1}\!\left(-\frac{1}{4}\right) + \frac{2}{3}k \approx -0,03 + \frac{2}{3}k$ oder $x_k = \frac{1}{3} - \frac{1}{3\pi}\sin^{-1}\!\left(-\frac{1}{4}\right) + \frac{2}{3}k \approx 0,36 + \frac{2}{3}k,\ k \in \mathbb{Z}$

f) keine Lösungen

g) $x_k = \frac{3}{2}\sin^{-1}\!\left(-\frac{3}{5}\right) + 3\pi k \approx -0,97 + 3\pi k$ oder $x_k = \frac{3\pi}{2} - \frac{3}{2}\sin^{-1}\!\left(-\frac{3}{5}\right) + 3\pi k \approx 5,68 + 3\pi k,\ k \in \mathbb{Z}$

h) $x_k = \pm\frac{4\pi}{15} + \frac{8}{5}\pi k,\ k \in \mathbb{Z}$

i) $x_k = \frac{2}{3}k$ oder $x_k = \frac{1}{2} + \frac{2}{3}k,\ k \in \mathbb{Z}$

j) $x_k = \frac{2}{3\pi}\sin^{-1}\!\left(\frac{1}{4}\right) + \frac{4}{3}k \approx 0,05 + \frac{4}{3}k$ oder $x_k = \frac{2}{3} - \frac{2}{3\pi}\sin^{-1}\!\left(\frac{1}{4}\right) + \frac{4}{3}k \approx 0,61 + \frac{4}{3}k,\ k \in \mathbb{Z}$

k) $x_k = \pm\frac{1}{2}\cos^{-1}\!\left(-\frac{3}{8}\right) + \pi k \approx \pm 0,98 + \pi k,\ k \in \mathbb{Z}$

l) $x_k = \frac{1}{6\pi}\sin^{-1}(0,3) + \frac{1}{3}k \approx 0,02 + \frac{1}{3}k$ oder $x_k = \frac{1}{6} - \frac{1}{6\pi}\sin^{-1}(0,3) + \frac{1}{3}k \approx 0,15 + \frac{1}{3}k,\ k \in \mathbb{Z}$

m) keine Lösungen

n) $x_k = \pm 5\cos^{-1}\!\left(\frac{1}{6}\right) + 10\pi k \approx \pm 7,02 + 10\pi k,\ k \in \mathbb{Z}$

o) $x_k = \pm\frac{1}{\pi}\cos^{-1}\!\left(-\frac{7}{10}\right) + 2k \approx \pm 0,75 + 2k,\ k \in \mathbb{Z}$

p) $x_k = \pi\sin^{-1}\!\left(\frac{2}{3}\right) + 2\pi^2 k \approx 2,29 + 2\pi^2 k$ oder $x_k = \pi^2 - \pi\sin^{-1}\!\left(\frac{2}{3}\right) + 2\pi^2 k \approx 7,58 + 2\pi^2 k,\ k \in \mathbb{Z}$

q) $x_k = 0,4\sin^{-1}(0,45) + 0,8\pi k \approx 0,19 + 0,8\pi k$ oder
$x_k = 0,4\pi - 0,4\sin^{-1}(0,45) + 0,8\pi k \approx 1,07 + 0,8\pi k,\ k \in \mathbb{Z}$

r) $x_k = \pm\frac{3\pi}{32} + \frac{\pi}{4}k,\ k \in \mathbb{Z}$

s) $x_k = \pm\frac{8}{5\pi}\cos^{-1}\!\left(-\frac{1}{4}\right) + \frac{16}{5}k \approx \pm 0,93 + \frac{16}{5}k,\ k \in \mathbb{Z}$

t) keine Lösungen

u) $x_k = \pm\frac{4}{3\pi}\cos^{-1}\!\left(\frac{3}{10}\right) + \frac{8}{3}k \approx \pm 0,54 + \frac{8}{3}k,\ k \in \mathbb{Z}$

v) $x_k = \frac{\pi}{3}k$ oder $x_k = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{3}k,\ k \in \mathbb{Z}$

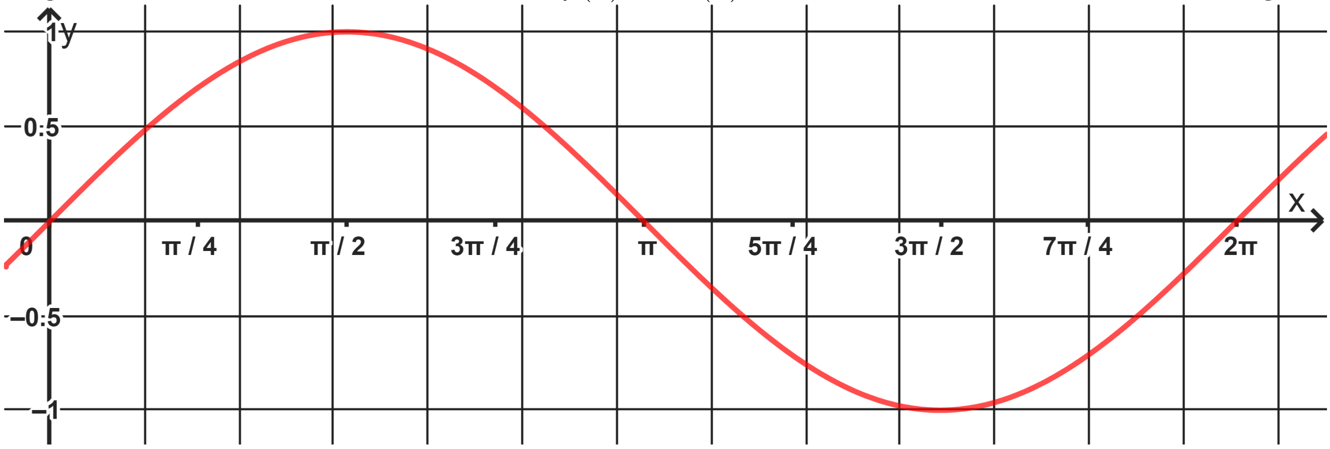
w) $x_k = \pm\frac{16}{9}\pi + \frac{16}{3}\pi k,\ k \in \mathbb{Z}$

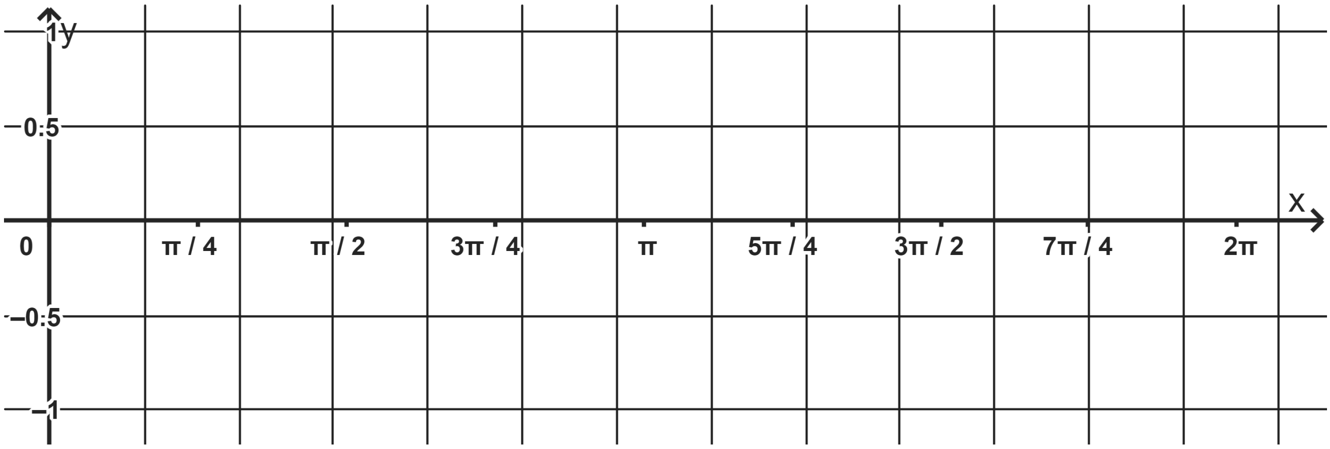
x) $x_k = \frac{1}{5\pi}\sin^{-1}\!\left(-\frac{13}{14}\right) + \frac{2}{5}k \approx -0,08 + \frac{2}{5}k$ oder $x_k = \frac{1}{5} - \frac{1}{5\pi}\sin^{-1}\!\left(-\frac{13}{14}\right) + \frac{2}{5}k \approx 0,28 + \frac{2}{5}k,\ k \in \mathbb{Z}$

y) $x_k = \frac{3}{5\pi}\sin^{-1}\!\left(-\frac{3}{5}\right) + \frac{6}{5}k \approx -0,12 + \frac{6}{5}k$ oder $x_k = \frac{6}{5} - \frac{3}{5\pi}\sin^{-1}\!\left(-\frac{3}{5}\right) + \frac{6}{5}k \approx 1,32 + \frac{6}{5}k,\ k \in \mathbb{Z}$

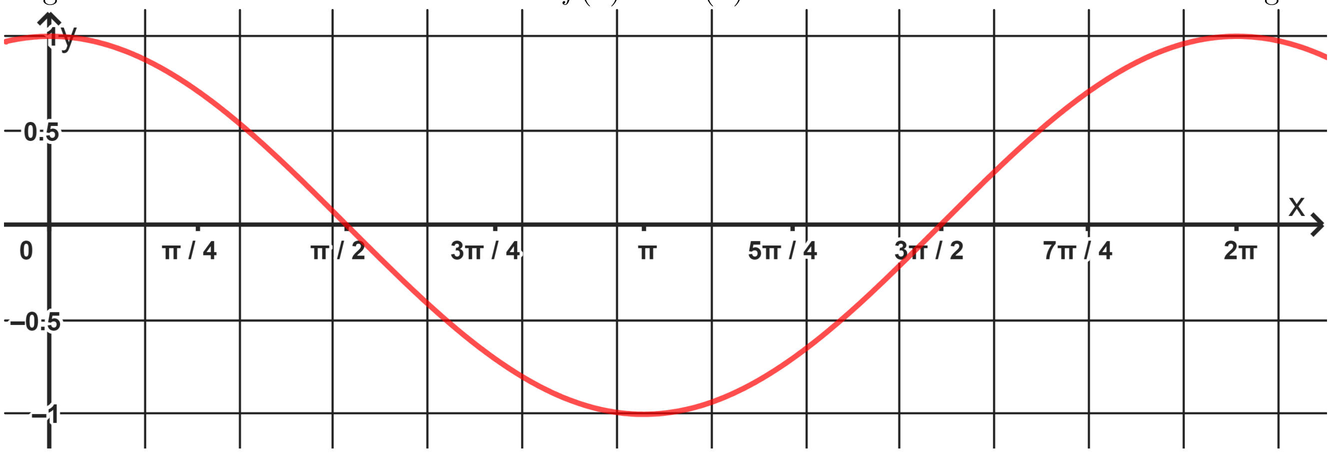
z) $x_k = \pm 3\cos^{-1}\!\left(-\frac{4}{9}\right) + 6\pi k \approx \pm 6,09 + 6\pi k,\ k \in \mathbb{Z}$

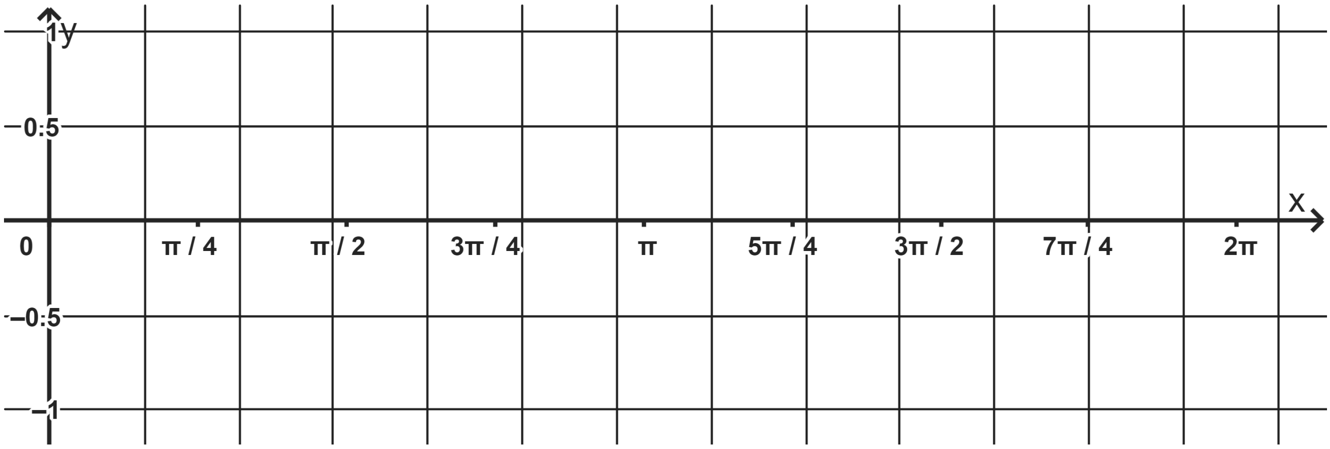
Gegeben ist das Schaubild der Funktion $f(x) = \sin(x)$. Skizziere das Schaubild der Ableitung.





Gegeben ist das Schaubild der Funktion $f(x) = \cos(x)$. Skizziere das Schaubild der Ableitung.





Ableitungsregeln für Sinus und Cosinus

$f(x) = a \cdot \sin(bx)$ $\qquad$ $g(x) = a \cdot \cos(bx)$

Beispiele:

$f_1(x) = 2 \cdot \sin(3x)$ $\qquad$ $g_1(x) = 4 \cdot \cos(0,5x)$

$f_1'(x) =$ $\qquad$ $g_1'(x) =$

$f_2(x) = -\dfrac{1}{2} \cdot \sin(\pi x)$ $\qquad$ $g_2(x) = -\cos(x)$

$f_2'(x) =$ $\qquad$ $g_2'(x) =$

Übung 100

Bestimme jeweils die erste und zweite Ableitung

a) $f_1(x) = -3\sin(2x)$
b) $f_2(x) = 4\sin(2\pi x)$
c) $f_3(x) = \cos(0,5x)$
d) $f_4(x) = \cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)$
e) $f_5(x) = 4\sin(3\pi x)$
f) $f_6(x) = 0,5\cos(5x) + 2$
g) $f_7(x) = -5\sin\left(\frac{2}{3}x\right)$
h) $f_8(x) = \cos\left(\frac{5}{4}x\right) - 3$
i) $f_9(x) = 5\sin(3\pi x)$
j) $f_{10}(x) = 4\sin\left(\frac{3\pi}{2}x\right)$
k) $f_{11}(x) = \frac{1}{3}\cos(2x)$
l) $f_{12}(x) = -\sin(6\pi x) + 1,6$
m) $f_{13}(x) = 0,5\cos\left(\frac{\pi}{6}x\right)$
n) $f_{14}(x) = -3\cos(0,2x) + 2$
o) $f_{15}(x) = -\frac{1}{7}\cos(\pi x) - \frac{1}{5}$
p) $f_{16}(x) = -6\sin\left(\frac{1}{\pi}x\right) - 3$
q) $f_{17}(x) = 2\sin(2,5x) - 4$
r) $f_{18}(x) = 4\cos(8x)$
s) $f_{19}(x) = 3\cos\left(\frac{5\pi}{8}x\right) - \frac{1}{4}$
t) $f_{20}(x) = 4\sin(3x) + 6$
u) $f_{21}(x) = 4\cos\left(\frac{3\pi}{4}x\right) - 12$
v) $f_{22}(x) = 2\sin(6x) + 2$
w) $f_{23}(x) = -\frac{3}{4}\cos\left(\frac{3}{8}x\right) + \frac{1}{8}$
x) $f_{24}(x) = -\frac{13}{25}\sin(5\pi x) - \frac{5}{2}$
y) $f_{25}(x) = \frac{6}{35}\sin\left(\frac{5\pi}{3}x\right) + \frac{8}{3}$
z) $f_{26}(x) = -\frac{9}{4}\cos\left(\frac{1}{3}x\right) - 1$

Lösung zu Übung 100

a) $f_1'(x) = -6\cos(2x)$
$f_1''(x) = 12\sin(2x)$

b) $f_2'(x) = 8\pi\cos(2\pi x)$
$f_2''(x) = -16\pi^2\sin(2\pi x)$

c) $f_3'(x) = -0,5\sin(0,5x)$
$f_3''(x) = -0,25\cos(0,5x)$

d) $f_4'(x) = -\frac{\pi}{2}\sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)$
$f_4''(x) = -\frac{\pi^2}{4}\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)$

e) $f_5'(x) = 12\pi\cos(3\pi x)$
$f_5''(x) = -36\pi^2\sin(3\pi x)$

f) $f_6'(x) = -2,5\sin(5x)$
$f_6''(x) = -12,5\cos(5x)$

g) $f_7'(x) = -\frac{10}{3}\cos\left(\frac{2}{3}x\right)$
$f_7''(x) = \frac{20}{9}\sin\left(\frac{2}{3}x\right)$

h) $f_8'(x) = -\frac{5}{4}\sin\left(\frac{5}{4}x\right)$
$f_8''(x) = -\frac{25}{16}\cos\left(\frac{5}{4}x\right)$

i) $f_9'(x) = 15\pi\cos(3\pi x)$
$f_9''(x) = -45\pi^2\sin(3\pi x)$

j) $f_{10}'(x) = 6\pi\cos\left(\frac{3\pi}{2}x\right)$
$f_{10}''(x) = -9\pi^2\sin\left(\frac{3\pi}{2}x\right)$

k) $f_{11}'(x) = -\frac{2}{3}\sin(2x)$
$f_{11}''(x) = -\frac{4}{3}\cos(2x)$

l) $f_{12}'(x) = -6\pi\cos(6\pi x)$
$f_{12}''(x) = 36\pi^2\sin(6\pi x)$

m) $f_{13}'(x) = -\frac{\pi}{12}\sin\left(\frac{\pi}{6}x\right)$
$f_{13}''(x) = -\frac{\pi^2}{72}\cos\left(\frac{\pi}{6}x\right)$

n) $f_{14}'(x) = 0,6\sin(0,2x)$
$f_{14}''(x) = 0,12\cos(0,2x)$

o) $f_{15}'(x) = \frac{\pi}{7}\sin(\pi x)$
$f_{15}''(x) = \frac{\pi^2}{7}\cos(\pi x)$

p) $f_{16}'(x) = -\frac{6}{\pi}\cos\left(\frac{1}{\pi}x\right)$
$f_{16}''(x) = \frac{6}{\pi^2}\sin\left(\frac{1}{\pi}x\right)$

q) $f_{17}'(x) = 5\cos(2,5x)$
$f_{17}''(x) = -12,5\sin(2,5x)$

r) $f_{18}'(x) = -32\sin(8x)$
$f_{18}''(x) = -256\cos(8x)$

s) $f_{19}'(x) = -\frac{15\pi}{8}\sin\left(\frac{5\pi}{8}x\right)$
$f_{19}''(x) = -\frac{75\pi^2}{64}\cos\left(\frac{5\pi}{8}x\right)$

t) $f_{20}'(x) = 12\cos(3x)$
$f_{20}''(x) = -36\sin(3x)$

u) $f_{21}'(x) = -3\pi\sin\left(\frac{3\pi}{4}x\right)$
$f_{21}''(x) = -\frac{9\pi^2}{4}\cos\left(\frac{3\pi}{4}x\right)$

v) $f_{22}'(x) = 12\cos(6x)$
$f_{22}''(x) = -72\sin(6x)$

w) $f_{23}'(x) = \frac{9}{32}\sin\left(\frac{3}{8}x\right)$
$f_{23}''(x) = \frac{27}{256}\cos\left(\frac{3}{8}x\right)$

x) $f_{24}'(x) = -\frac{13\pi}{5}\cos(5\pi x)$
$f_{24}''(x) = 13\pi^2\sin(5\pi x)$

y) $f_{25}'(x) = \frac{2\pi}{7}\cos\left(\frac{5\pi}{3}x\right)$
$f_{25}''(x) = -\frac{10\pi^2}{21}\sin\left(\frac{5\pi}{3}x\right)$

z) $f_{26}'(x) = \frac{3}{4}\sin\left(\frac{1}{3}x\right)$
$f_{26}''(x) = \frac{1}{4}\cos\left(\frac{1}{3}x\right)$

Regeln zum Bilden der Stammfunktion für Sinus und Cosinus

$f(x) = a \cdot \sin(bx)$ $g(x) = a \cdot \cos(bx)$

Beispiele:

$f_1(x) = 2 \cdot \sin(3x)$ $g_1(x) = 4 \cdot \cos(0,5x)$

$F_1(x) =$ $G_1(x) =$

$f_2(x) = -\frac{1}{2} \cdot \sin(\pi x)$ $g_2(x) = -\cos(x)$

$F_2(x) =$ $G_2(x) =$

Übung 101

Bestimme jeweils eine Stammfunktion

a) $f_1(x) = -3\sin(2x)$
b) $f_2(x) = 4\pi\sin(2\pi x)$
c) $f_3(x) = \cos(0,5x)$
d) $f_4(x) = -2\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)$
e) $f_5(x) = 4\pi\sin(3\pi x)$
f) $f_6(x) = 0,5\cos(5x) + 2$
g) $f_7(x) = -4\sin\left(\frac{2}{3}x\right)$
h) $f_8(x) = \cos\left(\frac{5}{4}x\right) - 3$
i) $f_9(x) = 5\sin(3\pi x)$
j) $f_{10}(x) = \frac{3}{4}\sin\left(\frac{3\pi}{2}x\right)$
k) $f_{11}(x) = \frac{1}{3}\cos(2x)$
l) $f_{12}(x) = -\sin(6\pi x) + 1,6$
m) $f_{13}(x) = 0,5\cos\left(\frac{\pi}{6}x\right)$
n) $f_{14}(x) = -3\cos(0,2x) + 2$
o) $f_{15}(x) = -\frac{1}{7}\cos(\pi x) - \frac{1}{5}$
p) $f_{16}(x) = -6\sin\left(\frac{1}{\pi}x\right) - 3$
q) $f_{17}(x) = 2\sin(2,5x) - 4$
r) $f_{18}(x) = 4\cos(8x)$
s) $f_{19}(x) = -3\cos\left(\frac{5\pi}{8}x\right) - \frac{1}{4}$
t) $f_{20}(x) = -4\sin(3x) + 6$
u) $f_{21}(x) = 4\cos\left(\frac{3\pi}{4}x\right) - 12$
v) $f_{22}(x) = 2\sin(6x) + 2$
w) $f_{23}(x) = -\frac{3}{4}\cos\left(\frac{3}{8}x\right) + \frac{1}{8}$
x) $f_{24}(x) = -\frac{10}{11}\sin(5\pi x) - \frac{5}{2}$
y) $f_{25}(x) = \frac{15}{7}\sin\left(\frac{5\pi}{3}x\right) + \frac{8}{3}$
z) $f_{26}(x) = -\frac{9}{4}\cos\left(\frac{1}{3}x\right) - 1$

Lösung zu Übung 101

Für alle Stammfunktionen wurde die Integrationskonstante Null gewählt ($c = 0$).

a) $F_1(x) = \frac{3}{2}\cos(2x)$

b) $F_2(x) = -2\cos(2\pi x)$

c) $F_3(x) = 2\sin(0,5x)$

d) $F_4(x) = -\frac{4}{\pi}\sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)$

e) $F_5(x) = -\frac{4}{3}\cos(3\pi x)$

f) $F_6(x) = 0,1\sin(5x) + 2x$

g) $F_7(x) = 6\cos\left(\frac{2}{3}x\right)$

h) $F_8(x) = \frac{4}{5}\sin\left(\frac{5}{4}x\right) - 3x$

i) $F_9(x) = -\frac{5}{3\pi}\cos(3\pi x)$

j) $F_{10}(x) = -\frac{1}{2\pi}\cos\left(\frac{3\pi}{2}x\right)$

k) $F_{11}(x) = \frac{1}{6}\sin(2x)$

l) $F_{12}(x) = \frac{1}{6\pi}\cos(6\pi x) + 1,6x$

m) $F_{13}(x) = \frac{3}{\pi}\sin\left(\frac{\pi}{6}x\right)$

n) $F_{14}(x) = -15\sin(0,2x) + 2x$

o) $F_{15}(x) = -\frac{1}{7\pi}\sin(\pi x) - \frac{1}{5}x$

p) $F_{16}(x) = 6\pi\cos\left(\frac{1}{\pi}x\right) - 3x$

q) $F_{17}(x) = -\frac{4}{5}\cos(2,5x) - 4x$

r) $F_{18}(x) = 0,5\sin(8x)$

s) $F_{19}(x) = -\frac{24}{5\pi}\cos\left(\frac{5\pi}{8}x\right) - \frac{1}{4}x$

t) $F_{20}(x) = \frac{4}{3}\cos(3x) + 6x$

u) $F_{21}(x) = \frac{16}{3\pi}\sin\left(\frac{3\pi}{4}x\right) - 12x$

v) $F_{22}(x) = -\frac{1}{3}\cos(6x) + 2x$

w) $F_{23}(x) = -2\cos\left(\frac{3}{8}x\right) + \frac{1}{8}x$

x) $F_{24}(x) = \frac{2}{11\pi}\cos(5\pi x) - \frac{5}{2}x$

y) $F_{25}(x) = -\frac{9}{7\pi}\cos\left(\frac{5\pi}{3}x\right) + \frac{8}{3}x$

z) $F_{26}(x) = -\frac{27}{4}\sin\left(\frac{1}{3}x\right) - x$