Die folgenden mathematischen Grundkenntnisse sind unabdingbare Voraussetzung zum Verständnis der folgenden Kapitel.

Die Mengenlehre ist ein grundlegendes Teilgebiet der Mathematik. Wir werden uns hier nur mit den nötigen Grundlagen der Mengenlehre beschäftigen. Die für uns relevanten Mengen bestehen aus Zahlen:

Zahlenmengen

- Die natürlichen Zahlen: $\mathbb{N} = \{(0), 1; 2; 3; 4; 5; 6; \ldots\}$
  Die Mathematiker können sich nicht einigen, ob die 0 mit eingeschlossen sein soll. Daher wird meist $\mathbb{N}^*$ für die natürlichen Zahlen ohne die 0 verwendet und $\mathbb{N}_0$ für die natürlichen Zahlen mit der 0.
- Die ganzen Zahlen: $\mathbb{Z} = \{0; 1; -1; 2; -2; 3; -3; 4; -4; \ldots\}$
  Ergänzt man die natürlichen Zahlen um das Vorzeichen, so erhält man die ganzen Zahlen.
- Die rationalen Zahlen: $\mathbb{Q} = \{\frac{n}{m} | n \in \mathbb{Z}, m \in \mathbb{N}\}$
  Die rationalen Zahlen enthalten alle Zahlen, die sich als Brüche mit einem Zähler aus den ganzen Zahlen und einem Nenner aus den natürlichen Zahlen (natürlich ohne der 0) darstellen lassen.
- Die reellen Zahlen: $\mathbb{R}$
  In den reellen Zahlen $\mathbb{R}$ liegen „alle“ Zahlen, zumindest alle uns bekannten Zahlen. $\mathbb{R}$ beinhaltet neben $\mathbb{Q}$ auch Zahlen wie $\sqrt{2}$ oder π.

Mengen lassen sich auf verschiedene Arten darstellen. Nehmen wir als Beispiele die Menge aller positiven, geraden Zahlen G und die Menge H aller Zahlen, die größer oder gleich 1 und kleiner 2 sind:

- Aufzählung: $G = \{2; 4; 6; 8; 10; \ldots\}$
- Einschränkung einer übergeordneten Menge $G = \{x \in \mathbb{N} | x \text{ ist gerade}\}$ oder $H = \{x \in \mathbb{R} | -1 <= x < 2\}$
- Darstellung als Intervall: $H = [-1; 2)$ Dabei steht die eckige Klammer für ein abgeschlossenes Ende, d.h. die Grenze liegt noch im Intervall und die runde Klammer für ein offenes Intervall, d.h. die Grenze liegt nicht mehr im Intervall.

Liegt eine Zahl in einer Menge, z.B. -2 in $\mathbb{Q}$, so schreibt man $-2 \in \mathbb{Q}$ (Sprich -2 ist Element der rationalen Zahlen).

Die vier Grundrechenarten sollten bereits bekannt sein:

- Addition

  $\underbrace{a + b}_{Summe} = c$

  a und b bezeichnet man als Summanden.
- Subtraktion

  $\underbrace{a - b}_{Differenz} = c$
- Multiplikation

  $\underbrace{a \cdot b}_{Produkt} = c$

  a und b bezeichnet man als Faktoren.
- Division

  $\underbrace{a : b}_{Quotient} = c$

  Wir sollten uns das Geteilt-Zeichen abgewöhnen und stattdessen Brüche verwenden: $a : b = \frac{a}{b}$.

Reihenfolge von Rechenoperationen:

1. Klammern
2. Potenzen
3. Punktrechnungen (Mal und Geteilt)
4. Strichrechnungen (Plus und Minus)

Für die Addition und Multiplikation gilt jeweils das Kommutativgesetz, d.h. man kann die Reihenfolge der Summanden bzw. Faktoren vertauschen:

$$a + b = b + a$$
$$a \cdot b = b \cdot a$$

Für die Addition und Multiplikation gilt jeweils das Assoziativgesetz, d.h. die Reihenfolge, in der drei Summanden bzw. Faktoren addiert bzw. multipliziert werden, spielt keine Rolle:

$$(a + b) + c = a + (b + c)$$
$$(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$$

Das Distributivgesetz verknüpft die Multiplikation und Addition:

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$$
$$(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$$

Für das Distributivgesetz lassen sich die Pluszeichen auch durch Minuszeichen sowie die Malzeichen durch Geteiltzeichen ersetzen.

Übung 1 **Berechne die folgenden Ausdrücke**

a) $3 \cdot 4 - 20 + 2 \cdot 5 =$

b) $20 : (4 \cdot 5 - 16) + 6 =$

c) $(2 + 5) \cdot (6 - 9) =$

d) $(11 - 23) : (2 \cdot 5 + 2) =$

e) $(1 + 2) \cdot 3 \cdot (4 + 5) =$

f) $-2\,(-5 - 2) - 14 =$

g) $(10 : (-5)) : 2 =$

h) $1 + 2 + 3\,(-3 - 2 - 1) + 2 \cdot 5 =$

i) $5 \cdot 8 + 4 - 3 \cdot (-4) =$

j) $-3\,(-2 + 4 \cdot 8 - (2 + 5) + 8) =$

k) $21 : (6 - (4 - 5)) =$

l) $100 : (100 : (5 \cdot 5 - 3\,(-5 \cdot 5))) =$

m) $(2 + 3 - (12 : 3 - (-1)) \cdot 5) =$

n) $2 \cdot (5 - 3)\,(15 - 17)\,(26 : 13)\,(-1 \cdot 2) =$

o) $-10 \cdot 10 + 5 - 75 + 3 \cdot (-5) =$

p) $100 : (2 \cdot 5(2 - 12)) =$

q) $-2 \cdot (-4 \cdot (-3 \cdot (-1 \cdot (-2 - 1)))) =$

r) $-(1 - (-2 - (-3 - 8))) \cdot (-2) =$

s) $2 \cdot (1 + (1 + (1 + 1 + (-4)))) =$

t) $-2 \cdot 3 \cdot ((8 : 6) : 4) : 2 =$

u) $(6 - 8) \cdot (-4 + 5) \cdot (4 - 7) \cdot (8 - 6) =$

v) $2 + 3 \cdot 4 - 4 \cdot 4 - 22 : 2 + 12 : (-4) =$

w) $4 \cdot (6 \cdot (4 \cdot (4 : 2) : 8) : 3) : 8 =$

x) $-(-2-(4-(5-(-5+6)+4)+3)+8)+10 =$

y) $-(-2 \cdot 4 \cdot (8 - 4) : 8 + 10 \cdot (4 - 5)) =$

z) $1 + 2 \cdot 3 - 4 : 2 + 5 \cdot 3 - 10 : 2 =$

Um zwei Brüche zu Addieren/Subtrahieren, müssen zuerst beide Brüche auf den gleichen Nenner gebracht werden (Hauptnenner) und dann die Zähler addiert/subtrahiert werden.

Beispiel.

$$\frac{1}{2}+\frac{2}{3}=\frac{3}{6}+\frac{4}{6}=\frac{3+4}{6}=\frac{7}{6}$$
$$\frac{7}{4}+\frac{3}{10}=\frac{35}{20}+\frac{6}{20}=\frac{35+6}{20}=\frac{41}{20}$$
$$\frac{5}{6}-\frac{8}{15}=\frac{25}{30}-\frac{16}{30}=\frac{\cancel{9}^{3}}{\cancel{10}^{10}}=\frac{3}{10}$$

Um zwei Brüche zu Multiplizieren, werden die Zähler miteinander multipliziert und die Nenner miteinander multipliziert. Innerhalb eines Produkts darf direkt gekürzt werden.

Beispiel.

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}=\frac{1\cdot 1}{2\cdot 3}=\frac{1}{6}$$
$$\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}=\frac{1\cdot 2}{2\cdot 3}=\frac{1\cdot\cancel{2}}{\cancel{2}\cdot 3}=\frac{1}{3}$$
$$\frac{4}{7}\cdot\frac{21}{6}=\frac{\cancel{4}^{2}\cdot\cancel{21}^{3}}{\cancel{7}^{1}\cdot\cancel{6}^{3}}=\frac{2\cdot\cancel{3}^{1}}{1\cdot\cancel{3}^{1}}=2$$

Zwei Brüche werden dividiert, indem mit dem Kehrwert multipliziert wird.

Beispiel.

$$\frac{1}{2}:\frac{5}{3}=\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{5}=\frac{3}{10}$$
$$\frac{15}{2}:\frac{21}{4}=\frac{15}{2}\cdot\frac{4}{21}=\frac{\cancel{15}^{5}\cdot\cancel{4}^{2}}{\cancel{21}^{7}\cdot\cancel{3}}=\frac{10}{7}$$
$$\frac{7}{30}:\frac{21}{10}=\frac{7}{30}\cdot\frac{10}{21}=\frac{\cancel{7}^{1}\cdot\cancel{10}^{1}}{\cancel{30}^{3}\cdot\cancel{21}^{3}}=\frac{1}{9}$$

Als Primzahlen bezeichnet man die natürlichen Zahlen größer 1, die nur durch 1 und sich selbst ohne Rest teilbar sind. Die erste Primzahl ist also 2, da 2 nur durch 1 und sich selbst ohne Rest teilbar ist. Die nächste Primzahl ist 3. 4 ist keine Primzahl, da $4 : 2 = 2$ gilt. Die für uns wichtigen Primzahlen sind:

$$\mathbb{P} = \{2,\ 3,\ 5,\ 7,\ 11, \dots\}$$

Haben der Zähler und der Nenner eines Bruches einen gemeinsamen Teiler, so kann man den Bruch kürzen. Dabei muss man nur prüfen, ob die Primzahlen jeweils ein Teiler sind. Ist eine Zahl nicht durch 2 teilbar, so kann sie nicht durch $4,\ 6,\ 8,\ ,\dots$ teilbar sein. Für die ersten drei Primzahlen gibt es dabei einfach zu prüfende Teilbarkeitsregeln:

Eine ganze Zahl ist genau dann durch 2 teilbar, wenn sie gerade ist, d.h. die letzte Ziffer ist eine $0,\ 2,\ 4,\ 6,$ oder 8.

Eine ganze Zahl ist genau dann durch 3 teilbar, wenn die Quersumme (Summe aller Ziffern) durch 3 teilbar ist, z.B. ist 123 durch 3 teilbar, da 1+2+3=6 durch 3 teilbar ist. 563 ist nicht durch 3 teilbar, da 5+6+3=14 nicht durch 3 teilbar ist.

Eine ganze Zahl ist genau dann durch 5 teilbar, wenn die letzte Ziffer eine 0 oder 5 ist.

Beim Kürzen prüft man nun einfach, ob Zähler und Nenner durch 2 teilbar sind. Falls ja, teilt man beide durch 2 und prüft nochmals, bis mindestens einer von beiden nicht mehr durch 2 teilbar ist. Dann führt man das gleiche Verfahren für 3, 5, 7, usw. durch. Dabei muss man sich natürlich nicht fest an diese Reihenfolge halten. Enden z.B. Zähler und Nenner jeweils auf eine 0, so kann man beide direkt mit 10 kürzen.

Beispiel.

$$\frac{72}{60} = \frac{36}{30} = \frac{18}{15} = \frac{12}{15} = \frac{4}{5}$$
$$\frac{280}{700} = \frac{28}{70} = \frac{14}{35} = \frac{2}{5}$$
$$\frac{300}{126} = \frac{150}{63} = \frac{50}{21}$$

Man kann Brüche auch kürzen, bevor man Zähler und Nenner komplett zusammengefasst hat. Dazu muss man jeweils die gleiche Zahl im Zähler und Nenner ausklammern können:

Beispiel.

$$\frac{4+8}{14} = \frac{\cancel{2}(2+4)}{\cancel{2}\cdot 7} = \frac{2+4}{7} = \frac{6}{7}$$
$$\frac{6-9}{3+15} = \frac{\cancel{3}(2-3)}{\cancel{3}(1+5)} = \frac{2-3}{1+5} = -\frac{1}{6}$$
$$\frac{5x^2+10x-25}{30} = \frac{\cancel{5}(x^2+2x-5)}{\cancel{5}\cdot 6} = \frac{x^2+2x-5}{6}$$

Übung 2 **Berechne die folgenden Ausdrücke und kürze soweit wie möglich**

a) $\frac{2}{3}+\frac{5}{7}=$

b) $\frac{3}{4}-\frac{10}{3}=$

c) $\frac{11}{25}+\frac{3}{5}=$

d) $\frac{14}{15}-\frac{5}{6}=$

e) $\frac{14}{9}+\frac{7}{18}=$

f) $\frac{14}{15}\cdot\frac{5}{28}=$

g) $\frac{30}{77}\cdot\frac{49}{24}=$

h) $\frac{5}{28}\cdot\frac{8}{7}=$

i) $\frac{12}{25}\cdot\frac{15}{16}=$

j) $\frac{13}{42}:\frac{39}{56}=$

k) $\frac{14}{17}:\frac{28}{5}=$

l) $\frac{9}{16}:\frac{27}{4}=$

m) $\frac{14}{30}:\frac{35}{2}=$

n) $\frac{15}{16}\cdot\frac{56}{25}\cdot\frac{15}{28}=$

o) $\left(\frac{27}{14}+\frac{9}{14}\right)\cdot\frac{14}{9}=$

p) $\frac{3}{2}-\left(\frac{5}{4}+\frac{1}{8}\right)=$

q) $\frac{10}{7}\cdot\left(\frac{2}{5}-\frac{3}{4}\right)=$

r) $\frac{5}{2}-\frac{4}{3}+\frac{7}{6}=$

s) $\frac{17}{3}-\left(\frac{15}{4}:\frac{5}{8}\right)=$

t) $\frac{34}{27}:\left(\frac{5}{9}+\frac{4}{3}\right)=$

u) $\frac{2}{3}-\frac{12}{25}:\frac{36}{35}=$

v) $\frac{64}{81}\cdot\frac{63}{80}+\frac{5}{9}=$

w) $\frac{1}{5}-\left(\frac{2}{3}\cdot\frac{7}{4}\cdot\frac{6}{35}\right)=$

x) $\left(\frac{42}{33}\cdot\frac{11}{35}\right):\left(\frac{84}{55}\cdot\frac{11}{42}\right)=$

y) $\frac{9}{70}\cdot\frac{10}{63}+\frac{5}{7}=$

z) $\frac{15}{14}:\frac{45}{28}-\frac{27}{8}:\frac{9}{4}=$

Variablen sind in der Mathematik Platzhalter für Zahlen, deren Wert man nicht kennt. Mit ihrer Hilfe kann man allgemeine Zusammenhänge aufstellen, z.B. lautet der Zusammenhang zwischen der Fläche eines Rechtecks und seinen Seitenlängen:

Flächeninhalt eines Rechtecks

$$A = a \cdot b$$

A: Fläche des Rechtecks

a, b: Seitenlängen des Rechtecks

Kennt man zwei der drei Größen, kann man die fehlende berechnen.
Für uns ist nur eines der Potenzgesetze relevant:

Zwei Potenzen mit der gleichen Basis werden multipliziert, indem man die Hochzahlen addiert:

$$x^a \cdot x^b = x^{a+b}$$

Beispiel.

$$x \cdot x^2 \cdot x^3 = x^{1+2} \cdot x^3 = x^3 \cdot x^3 = x^{3+3} = x^6$$
$$x^2(3x^3 + 4x^2 - x) = 3x^{2+3} + 4x^{2+2} - x^{1+2} = 3x^5 + 4x^4 - x^3$$
$$x(2x^3 - 4x^2 + 2x) - 2x^2(x^2 + 5x + 1) = 2x^4 - 4x^3 + 2x^2 - 2x^4 - 10x^3 - 2x^2 = -16x^3$$

Ausklammern oder Vorklammern kann man Zahlen oder auch Variablen. Beim Ausklammern ändert man den Wert des mathematischen Ausdrucks nicht, sondern lediglich sein Aussehen. Klammert man Variablen aus (im Normalfall x), so ist es in den meisten Fällen nicht sinnvoll die Variable öfter als die kleinste Hochzahl auszuklammern, da dann die Variable im Nenner des Bruches stehen würde. Beim Ausklammern von Variablen wendet man das obige Potenzgesetz rückwärts an.

Beispiel.

$$2x^2 - 4x = x(2x - 4) = 2x(x - 2)$$
$$10x^3 - 5x^2 + 25x = x(10x^2 - 5x + 25) = 5x(2x^2 - x + 5)$$
$$27x^4 - 18x^2 = x^2(27x^2 - 18) = 9x^2(3x^2 - 2)$$

Wir müssen im Normalfall nur so viele x wie möglich vorklammern ohne eine zusätzliche Zahl.

Übung 3 Löse die Klammern auf und fasse soweit wie möglich zusammen

a) $x(x-2)=$

b) $2x(x^2-3x+5)=$

c) $-4x(2x^2-6)=$

d) $x^2(-3x+5)=$

e) $x^3-7x^2(x+1)=$

f) $\frac{2}{3}x(6x^2-3x+5)=$

g) $-\frac{4}{7}x-\frac{3}{2}\left(\frac{4}{5}x^2-\frac{8}{21}x+9\right)=$

h) $\frac{4}{9}x^3(x^2-81x+27)=$

i) $(2x-4)\left(-\frac{3}{4}x^2+\frac{7}{8}x\right)=$

j) $\left(x^2-\frac{2}{3}\right)^2=$

k) $-10x\left(\frac{4}{5}x^2-\frac{8}{15}x\right)=$

l) $\frac{5}{6}x^3\left(-\frac{7}{15}x^2+2x\right)=$

m) $\left(\frac{5}{3}x+\frac{10}{3}\right)\left(-\frac{6}{5}x^2-\frac{9}{10}x\right)=$

n) $x(-2x^4+3x^3-2x^2+5)+x^5-3x^4+5=$

o) $\frac{4}{3}x^2(-3x^2+6x-2)+\left(\frac{1}{2}x\right)^2=$

p) $\frac{1}{4}x^3\left(-\frac{8}{3}x-6\right)=$

q) $\frac{2}{5}x\left(-\frac{15}{8}x^2+10x-\frac{15}{4}\right)=$

r) $-\frac{4}{35}x^3\left(-\frac{15}{8}x-\frac{5}{8}\right)=$

s) $-\frac{8}{15}x^4\left(\frac{9}{4}x^2-x\right)=$

t) $-\frac{7}{8}x\left(\frac{64}{49}x^3+4x^2-8x\right)=$

u) $\frac{14}{15}x^2\left(-\frac{3}{28}x+\frac{30}{7}x^2\right)=$

v) $\frac{5}{7}x\left(-\frac{7}{5}x^2-x\right)^2-\frac{7}{5}x^5-\frac{3}{7}x^3=$

w) $-\frac{22}{9}x^2\left(-\frac{5}{11}x+3\right)^2+\frac{3}{11}x^4+20x^2=$

x) $-\frac{20}{21}x^3\left(\frac{3}{4}x^4-3x\right)^2+x^{10}=$

y) $-\frac{7}{3}x^5\left(\frac{18}{35}x+6x^2\right)=$

z) $\frac{15}{14}x^3\left(-\frac{42}{35}x^3-7x^2+\frac{28}{5}\right)-x\left(-\frac{15}{2}x^4-6x^3\right)=$

Übung 4 Klammere so viele x wie möglich vor (ohne, dass x im Nenner eines Bruches benötigt wird)

a) $3x^2-4x=$

b) $-x^2+3x=$

c) $7x^3+3x^2=$

d) $10x^3-5x=$

e) $x^4-x^2=$

f) $8x^4-5x^3=$

g) $3x^4+2x^3-x^2=$

h) $4x^4+x=$

i) $\frac{1}{3}x^4+x^3=$

j) $-\frac{2}{5}x^5-\frac{2}{3}x^4=$

k) $\frac{2}{5}x^6-8x^3=$

l) $x^4-2x^5+x^6=$

m) $9x^2-5x+4x^3=$

n) $3x^7-2x^4+x^2=$

o) $8x^3+8x=$

p) $\frac{13}{3}x^3-\frac{3}{2}x^2=$

q) $4x^3-x^2=$

r) $8x^8-3x^4+x^5=$

s) $3x+7x^4-8x^6=$

t) $4x^5-3x^3+x^7=$

u) $\frac{4}{7}x^3+\frac{8}{9}x^4=$

v) $x(2x^2+3)-4x^3=$

w) $x^3-(3x+4x^2)=$

x) $(-2x^4)^2-(3x^2-x)^2=$

y) $x^2(3x^4+5x^2)=$

z) $x(4x^2+5x)=$

1) Brüche im Quadrat: $\left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{2^2}{3^2} = \frac{4}{9} \neq \frac{2}{3}^2 = \frac{4}{3}$
   Der Bruch ist eine andere Schreibweise für ein Geteilt-Zeichen. Da zuerst Potenzen, dann Punktrechnungen durchgeführt werden, wird bei einem Bruch ohne Klammer nur der Zähler potenziert.
2) Quadrat von negativen Zahlen: $(-2)^2 = (-2) \cdot (-2) = 4 \neq -2^2 = -4$
   Zuerst werden Potenzen, dann Strichrechnungen durchgeführt, d.h. wenn man die Klammer weglässt, wird die Zahl zuerst potenziert und dann das Minuszeichen hinzugefügt.
3) Rechnen mit Dezimalzahlen statt Brüchen: In den allermeisten Fällen ist es einfacher mit Brüchen zu rechnen, so lässt sich z.B. folgende Wurzel in Dezimalzahlen nur schwer berechnen, als Bruch dagegen ist die Rechnung simpel:
   $\sqrt{12,25} = \sqrt{\frac{49}{4}} = \frac{\sqrt{49}}{\sqrt{4}} = \frac{7}{2}$

Die Mitternachtsformel oder *abc*-Formel zum Berechnen der Lösungen einer quadratischen Gleichung ist eine der wichtigsten Lösungsformeln.

Für eine Gleichung der Form

$$ax^2 + bx + c = 0, \;\; a \neq 0$$

können die Lösungen wie folgt bestimmt werden:

$$x_{1/2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Abhängig von der Diskriminante ($b^2 - 4ac$) hat eine quadratische Gleichung entweder 2 Lösungen (Diskriminante positiv), 1 Lösung (Diskriminante ist 0) oder keine Lösung (Diskriminante negativ).

Beispiel.

1) 2 Lösungen:

$$2x^2 + 6x - 8 = 0$$
$$x_{1/2} = \frac{-6 \pm \sqrt{6^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-8)}}{2 \cdot 2} = \frac{-6 \pm \sqrt{100}}{4} = \frac{-6 \pm 10}{4}$$
$$\Rightarrow x_1 = 1 \text{ und } x_2 = -4$$

2) 1 Lösung:

$$\frac{1}{2}x^2 - 2x + 2 = 0$$
$$x_{1/2} = \frac{-(-2) \pm \sqrt{(-2)^2 - 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot 2}}{2 \cdot \frac{1}{2}} = 2 \pm \sqrt{0} = 2$$

3) Keine Lösungen:

$$-x^2 + 2x - 3 = 0$$
$$x_{1/2} = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4 \cdot (-1) \cdot (-3)}}{2 \cdot (-1)} = \frac{-2 \pm \sqrt{-8}}{-2} \lightning$$

Das Blitzsymbol $\lightning$ zeigt an, dass die Gleichung keine Lösung hat, weil unter der Wurzel nie eine negative Zahl stehen darf (zumindest in den reellen Zahlen).

Übung 5 Löse die folgenden Gleichungen

a) $x^2 - 3x + 2 = 0$
b) $x^2 + 5x + 6 = 0$
c) $x^2 + 2x - 8 = 0$
d) $2x^2 - 6x - 8 = 0$
e) $x^2 - 8x + 16 = 0$
f) $2x^2 + x + 1 = 0$
g) $\frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{2}x - 6 = 0$
h) $4x^2 + 6x + \frac{9}{4} = 0$
i) $x^2 + \frac{3}{2}x - 1 = 0$
j) $-2x^2 + 4x - 3 = 0$
k) $4x^2 - 11x + 6 = 0$
l) $x^2 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{2} = 0$
m) $-2x^2 - 6x - \frac{9}{4} = 0$
n) $x - 12 + x^2 = 0$
o) $4x^2 - x - \frac{1}{2} = 0$
p) $-2x^2 - 6x - \frac{9}{2} = 0$
q) $3 + 2x + x^2 = 0$
r) $-\frac{1}{4}x^2 + x - 2 = 0$
s) $x^2 - 2x - 2 = 0$
t) $3x^2 - 3x - \frac{3}{2} = 0$
u) $-1x^2 + x = 0$
v) $3x - 2x^2 - 1 = 0$
w) $3x^2 - 2x + 1 = 0$
x) $3x^2 - 4x + \frac{4}{3} = 0$
y) $1 - 4x^2 + 3x = 0$
z) $-2x^2 + 3/2x + \frac{1}{4} = 0$

Lösung zu Übung 1

a) $3 \cdot 4 - 20 + 2 \cdot 5 = 2$

b) $20 : (4 \cdot 5 - 16) + 6 = 11$

c) $(2 + 5) \cdot (6 - 9) = -21$

d) $(11 - 23) : (2 \cdot 5 + 1) = -1$

e) $(1 + 2) \cdot 3 \cdot (4 + 5) = 81$

f) $-2\,(-5 - 2) - 14 = 0$

g) $(10 : (-5)) : 2 = -1$

h) $1 + 2 + 3\,(-3 - 2 - 1) + 2 \cdot 5 = -5$

i) $5 \cdot 8 + 4 - 3 \cdot (-4) = 56$

j) $-3\,(-2 + 4 \cdot 8 - (2 + 5) + 8) = -93$

k) $21 : (6 - (4 - 5)) = 3$

l) $100 : (100 : (5 \cdot 5 - 3\,(-5 \cdot 5))) = 100$

m) $(2 + 3 - (12 : 3 - (-1)) \cdot 5) = -20$

n) $2 \cdot (5 - 3)\,(15 - 17)\,(26 : 13)\,(-1 \cdot 2) = 32$

o) $-10 \cdot 10 + 5 - 75 + 3 \cdot (-5) = -185$

p) $100 : (2 \cdot 5(2 - 12)) = -1$

q) $-2 \cdot (-4 \cdot (-3 \cdot (-1 \cdot (-2 - 1)))) = -72$

r) $-(1 - (-2 - (-3 - 8))) \cdot (-2) = -16$

s) $2 \cdot (1 + (1 + (1 + 1 + (-4)))) = 0$

t) $-2 \cdot 3 \cdot ((8 : 6) : 4) : 2 = -1$

u) $(6 - 8) \cdot (-4 + 5) \cdot (4 - 7) \cdot (8 - 6) = 12$

v) $2 + 3 \cdot 4 - 4 \cdot 4 - 22 : 2 + 12 : (-4) = -7$

w) $4 \cdot (6 \cdot (4 \cdot (4 : 2) : 8) : 3) : 8 = 1$

x) $-(-2 - (4 - (5 - (-5 + 6) + 4) + 3) + 8) + 10 = 3$

y) $-(-2 \cdot 4 \cdot (8 - 4) : 8 + 10 \cdot (4 - 5)) = 14$

z) $1 + 2 \cdot 3 - 4 : 2 + 5 \cdot 3 - 10 : 2 = 15$

Lösung zu Übung 2

a) $\frac{29}{21}$

b) $-\frac{31}{12}$

c) $\frac{26}{25}$

d) $\frac{1}{10}$

e) $\frac{35}{18}$

f) $\frac{1}{6}$

g) $\frac{35}{44}$

h) $\frac{10}{49}$

i) $\frac{9}{20}$

j) $\frac{4}{9}$

k) $\frac{5}{34}$

l) $\frac{1}{12}$

m) $\frac{2}{75}$

n) $\frac{9}{8}$

o) 4

p) $\frac{1}{8}$

q) $-\frac{1}{2}$

r) $\frac{7}{3}$

s) $-\frac{29}{7}$

t) $\frac{17}{21}$

u) $\frac{1}{5}$

v) $\frac{53}{45}$

w) 0

x) 1

y) $\frac{36}{49}$

z) $-\frac{5}{6}$

Lösung zu Übung 3

a) $x^2 - 2x$

b) $2x^3 - 6x^2 + 10x$

c) $-8x^3 + 24x$

d) $-3x^3 + 5x^2$

e) $-6x^3 - 7x^2$

f) $4x^3 - 2x^2 + \frac{10}{3}x$

g) $-6\frac{6}{5}x^2 - \frac{27}{2}$

h) $\frac{4}{9}x^5 - 9x^4 + 12x^3$

i) $-\frac{3}{2}x^3 + \frac{19}{4}x^2 - \frac{7}{2}x$

j) $x^4 - \frac{4}{3}x^2 + \frac{4}{9}$

k) $-8x^3 + \frac{16}{3}x^2$

l) $-\frac{7}{18}x^5 + \frac{5}{3}x^4$

m) $-2x^3 - \frac{11}{2}x^2 - 3x$

n) $-x^5 - 2x^3 + 5x + 5$

o) $-4x^4 + 8x^3 - \frac{29}{12}x^2$

p) $-\frac{2}{3}x^4 - \frac{3}{2}x^3$

q) $-\frac{3}{4}x^3 + 4x^2 - \frac{3}{2}x$

r) $\frac{3}{14}x^4 + \frac{1}{14}x^3$

s) $-\frac{6}{5}x^6 + \frac{8}{15}x^5$

t) $-\frac{8}{7}x^4 - \frac{7}{2}x^3 + 7x^2$

u) $4x^4 - \frac{1}{10}x^3$

v) $\frac{56}{5}x^5 + 2x^4 + \frac{2}{7}x^3$

w) $-\frac{23}{99}x^4 + \frac{20}{3}x^3 - 2x^2$

x) $-\frac{15}{28}x^{11} + x^{10} + \frac{30}{7}x^8 - \frac{60}{7}x^5$

y) $-14x^7 - \frac{6}{5}x^6$

z) $-\frac{9}{7}x^6 + \frac{75}{14}x^5 + 6x^4 + 6x^3$

Lösung zu Übung 4

a) $x\,(3x-4)$
b) $x\,(-x+3)$
c) $x^2\,(7x+3)$
d) $x\,(10x^2-5)$
e) $x^2\,(x^2-1)$
f) $x^3\,(8x-5)$
g) $x^2\,(3x^2+2x-1)$
h) $x\,(4x^3+1)$
i) $x^3\left(\frac{1}{3}x+1\right)$
j) $x^4\left(-\frac{2}{5}x-\frac{2}{3}\right)$
k) $x^3\left(\frac{2}{5}x^3-8\right)$
l) $x^4\,(1-2x+x^2)$
m) $x^2\,(9-5x+4x)$
n) $x^2\,(3x^5-2x^2+1)$
o) $x\,(8x^2+8)$
p) $x^2\left(\frac{13}{3}x-\frac{3}{2}\right)$
q) $x^2\,(4x-1)$
r) $x^4\,(8x^4-3+x)$
s) $x\,(3+7x^3-8x^5)$
t) $x^3\,(4x^2-3+x^4)$
u) $x^3\left(\frac{4}{7}+\frac{8}{9}x\right)$
v) $x\,(-2x^2+3)$
w) $x\,(x^2-3-4x)$
x) $x^2\,(4x^6-9x^2+6x-1)$
y) $x^4\,(3x^2+5)$
z) $x^2\,(4x+5)$

Lösung zu Übung 5

a) $x_1 = 1,\ x_2 = 2$

b) $x_1 = -2,\ x_2 = -3$

c) $x_1 = 2,\ x_2 = -4$

d) $x_1 = 4,\ x_2 = -1$

e) $x_{1/2} = 4$

f) keine Lösungen

g) $x_1 = 4,\ x_2 = -6$

h) $x_{1/2} = -\frac{3}{4}$

i) $x_1 = \frac{1}{2},\ x_2 = -2$

j) keine Lösungen

k) $x_1 = \frac{3}{4},\ x_2 = 2$

l) $x_1 = \frac{1}{2},\ x_2 = -1$

m) $x_{1/2} = -\frac{3}{2}$

n) $x_1 = 3,\ x_2 = -4$

o) $x_1 = \frac{1}{2},\ x_2 = -\frac{1}{4}$

p) $x_{1/2} = -\frac{3}{2}$

q) keine Lösungen

r) keine Lösungen

s) $x_1 = 1 + \sqrt{3},\ x_2 = 1 - \sqrt{3}$

t) $x_1 = \frac{1+\sqrt{3}}{2},\ x_2 = \frac{1-\sqrt{3}}{2}$

u) $x_1 = \frac{-1+\sqrt{5}}{2},\ x_2 = \frac{-1-\sqrt{5}}{2}$

v) $x_1 = 1,\ x_2 = \frac{1}{2}$

w) keine Lösungen

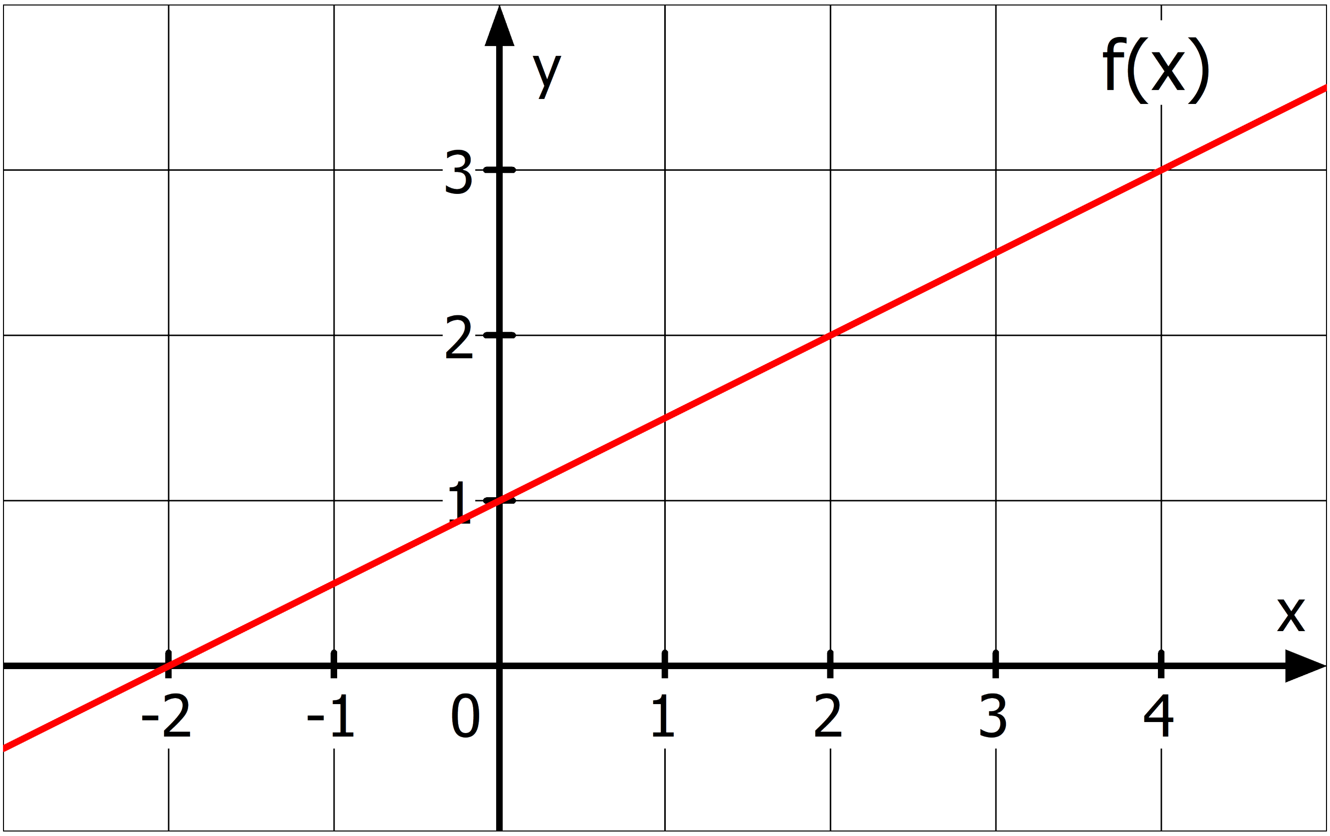
x) $x_{1/2} = \frac{2}{3}$

y) $x_1 = -\frac{1}{4},\ x_2 = 1$

z) $x_1 = \frac{3+\sqrt{17}}{8},\ x_2 = \frac{3-\sqrt{17}}{8}$

Alle Funktionen vom Typ $f(x) = mx + b$ werden als lineare Funktionen bezeichnet.

m: Steigung b: y-Achsenabschnitt



Im obigen Beispiel ist das Schaubild der Funktion $f(x) = \frac{1}{2}x+1$ gezeichnet. Der y-Achsenabschnitt kann an der y-Achse bei $x = 0$ abgelesen werden. Der y-Achsenabschnitt kann auch immer berechnet werden, indem man $x = 0$ in die Funktion einsetzt:

$$f(0) = \frac{1}{2} \cdot 0 + 1 = 0 + 1 = 1$$

Das Schaubild der Funktion schneidet die y-Achse also bei $y = 1$.
Die Steigung kann über das Steigungsdreieck bestimmt werden. Man bestimmt zwei Punkte $P_1(x_1|y_1)$ und $P_2(x_2|y_2)$, durch die das Schaubild verläuft und bestimmt dann das Verhältnis des Unterschieds der y-Werte zum Unterschied der x-Werte:

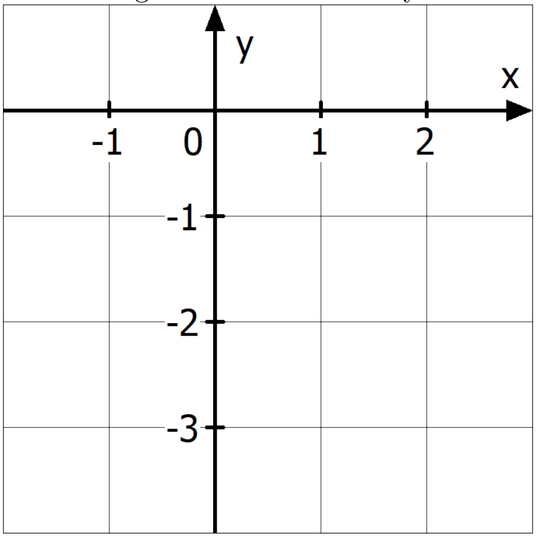
$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

Die beiden Punkte können beliebig gewählt werden (sie dürfen nur nicht identisch sein), d.h. das Steigungsdreieck kann an beliebiger Stelle und beliebig groß gezeichnet werden.
Im Beispiel kann man die beiden Punkte $P_1(-2|0)$ und $P_2(4|3)$ wählen oder auch $P_3(0|1)$ und $P_4(2|2)$:

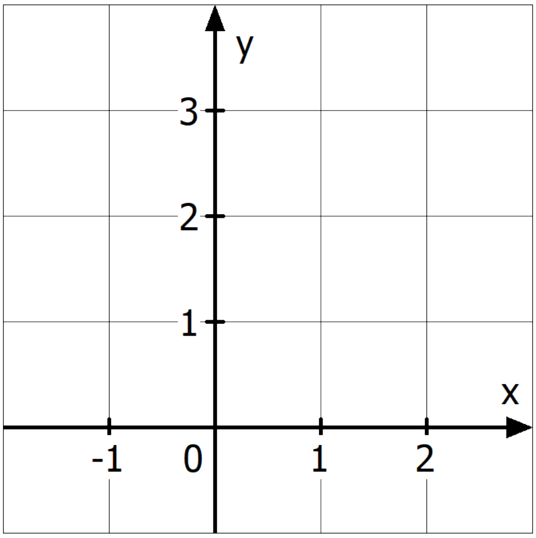
$$m = \frac{3 - 0}{4 - (-2)} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2} \qquad m = \frac{2 - 1}{2 - 0} = \frac{1}{2}$$

Übung 6 **Zeichne das Schaubild der folgenden Funktionen**

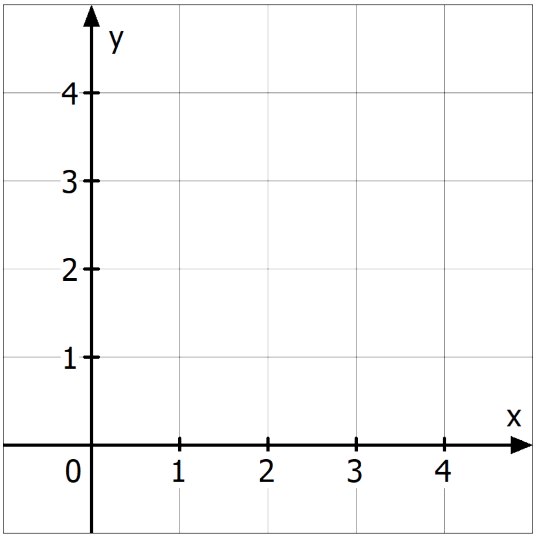
Nutze das ganze Koordinatensystem aus.



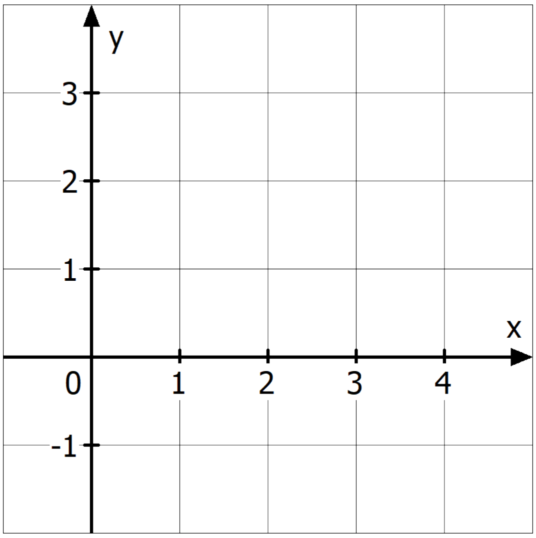
$f_1(x) = 2x - 3$



$f_2(x) = -x + 2$

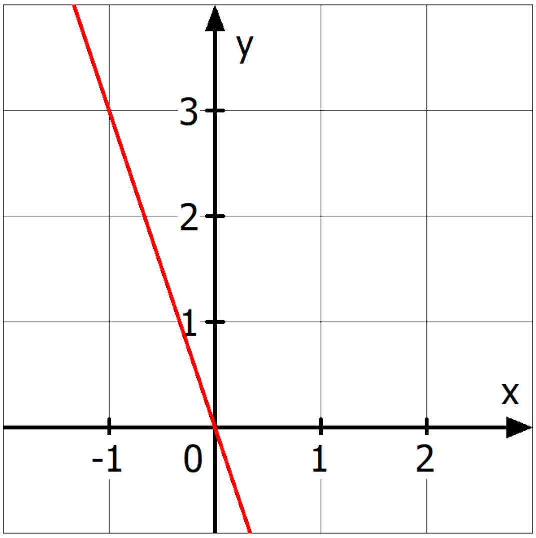


$f_3(x) = \frac{3}{4}x + 1$

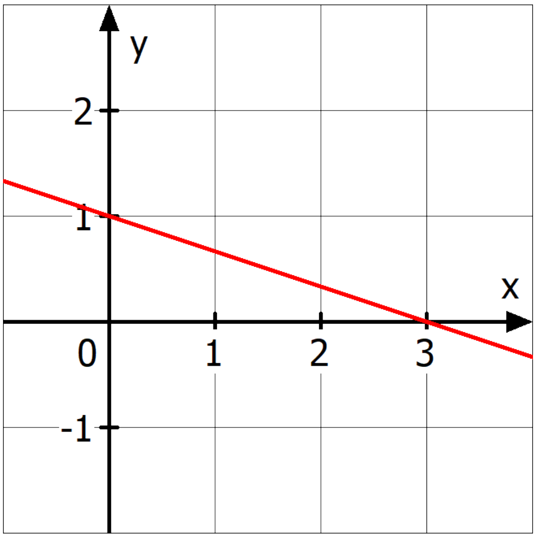


$f_4(x) = -\dfrac{4}{3}x + 3$

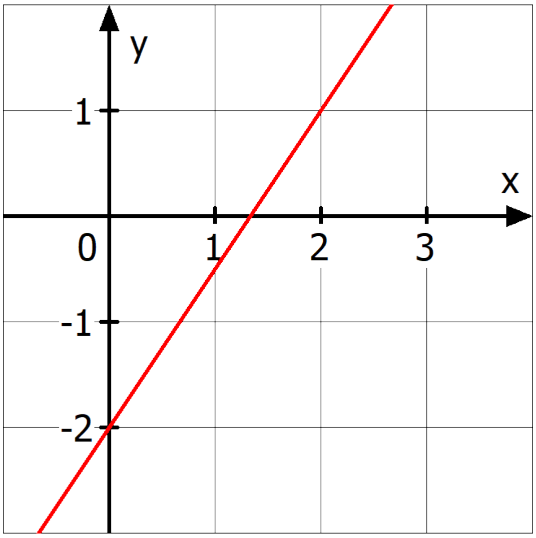
Übung 7 Bestimme die Funktionsgleichung



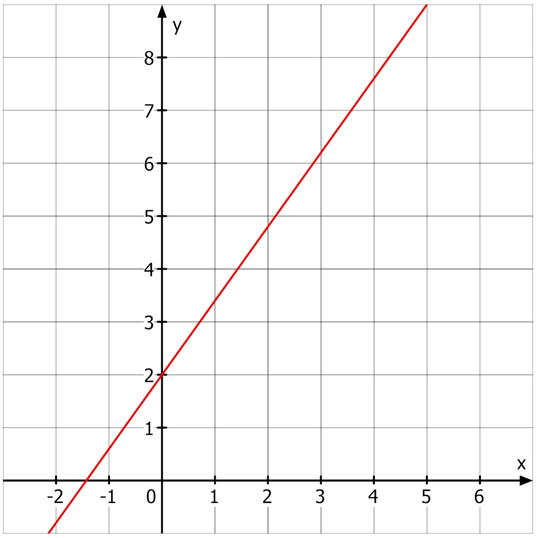
$f_5(x) =$



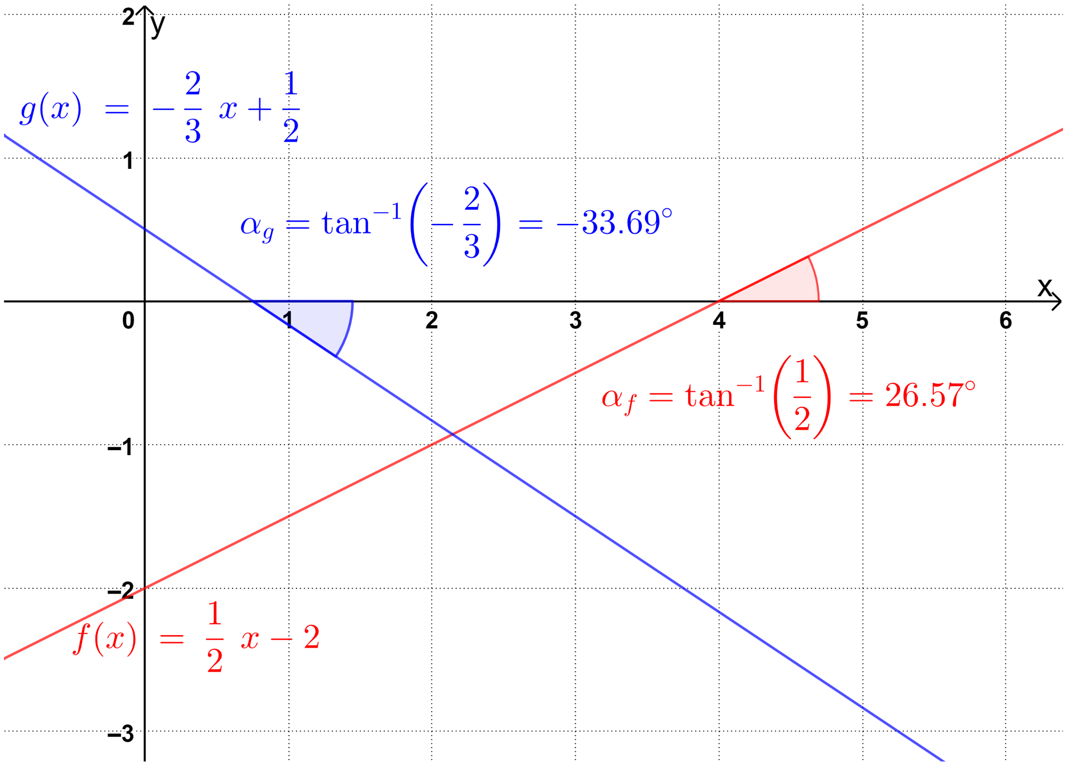
$f_6(x) =$



$f_7(x) =$



$f_8(x) =$



Der Winkel zwischen der x-Achse und der Funktion wird als Steigungswinkel α bezeichnet. Man muss also immer an der x-Achse mit dem Messen des Winkels beginnen. Misst man den Winkel gegen den Uhrzeigersinn, so ist der Winkel positiv (siehe $f(x)$ im Beispiel), misst man im Uhrzeigersinn, so ist der Winkel positiv (siehe $g(x)$ im Beispiel). Zwischen der Steigung m und dem Steigungswinkel α gibt es folgenden Zusammenhang:

$$m = \tan(\alpha) \quad \text{und} \quad \alpha = \tan^{-1}(m)$$

ACHTUNG: Der Taschenrechner muss auf Gradmaß (degree bzw. deg) eingestellt sein.

Übung 8 **Zeichne das Schaubild, miss den Steigungswinkel und vergleiche den Wert mit dem rechnerisch exakten.**

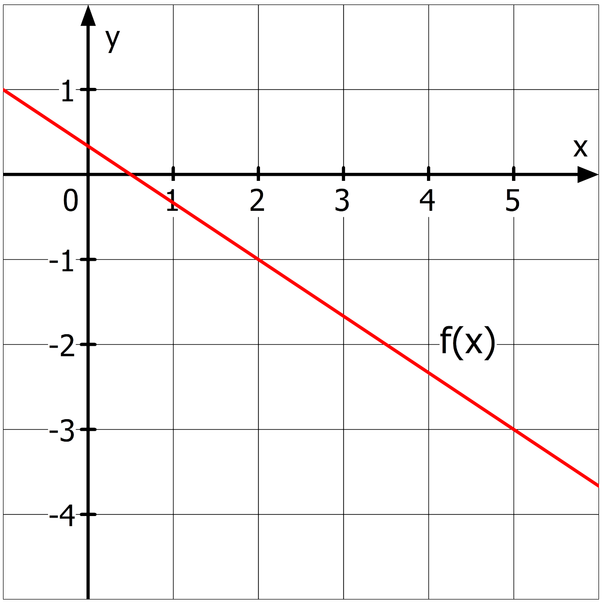
$f(x) = x - 2 \qquad g(x) = 2,5x - 3 \qquad h(x) = -\frac{3}{4}x + 2 \qquad i(x) = -1,5x - 1$

Ein besserer Begriff für Punktprobe wäre Punkteinsetzen. Sind eine Funktion $f(x)$ und ein Punkt $P(x_P|y_P)$ gegeben, so kann man prüfen, ob das Schaubild von $f(x)$ durch den Punkt verläuft, indem man den Punkt einsetzt:

$$f(x_P) \stackrel{?}{=} y_P$$

Beispiel. Gegeben sind die Funktion $f(x) = 2x - 1$ und zwei Punkt $P(2|3)$ sowie $Q(0|4)$.
$P: \ f(2) = 2 \cdot 2 - 1 = 4 - 1 = 3 = 3$
Der Punkt P liegt also auf dem Schaubild von $f(x)$.
$Q: \ f(0) = 2 \cdot 0 - 1 = 0 - 1 = -1 \neq 4$
Der Punkt Q liegt also nicht auf dem Schaubild von $f(x)$.

In den meisten Fällen wird eine Punktprobe verwendet, um Teile einer Funktionsgleichung zu bestimmen.



Im nebenstehenden Beispiel lässt sich die Steigung der Geraden $f(x) = mx + b$ leicht über ein Steigungsdreieck bestimmen: $m = -\frac{2}{3}$. Der y-Achsenabschnitt kann leider nicht exakt abgelesen werden. Wir lesen daher einen beliebigen Punkt ab, z.B. $P(2|-1)$ und führen mit diesem Punkt eine Punktprobe durch:

$$\begin{aligned} f(2) &= -1 \\ -\frac{2}{3} \cdot 2 + b &= -1 \quad \Big| + \frac{4}{3} \\ b &= \frac{1}{3} \end{aligned}$$

Übung 9 Prüfe, ob die Punkte auf dem Schaubild der Funktion liegen

a) $f(x) = -x + 2$ $\quad P(2|3)$ und $Q(-2|4)$
b) $g(x) = \frac{4}{5}x - 1$ $\quad R(5|3)$ und $S(10|-1)$

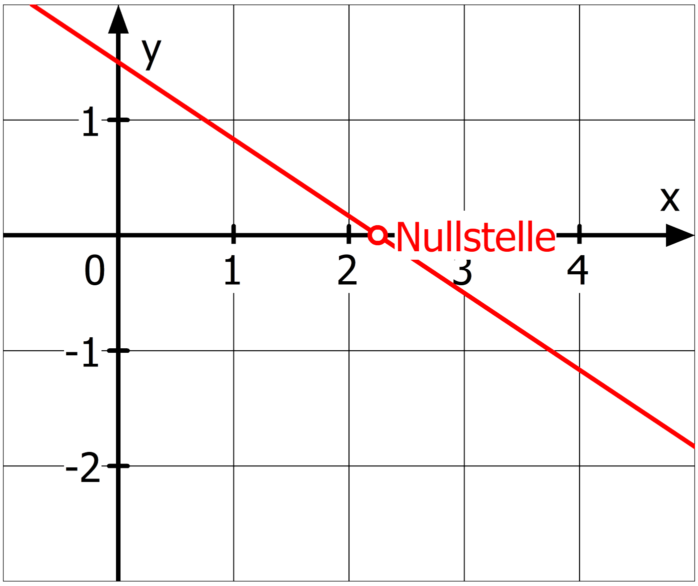
Übung 10 Bestimme die Funktionsgleichung

a) Das Schaubild der Funktion $f(x) = 2x + b$ verläuft durch den Punkt $P(2|3)$.
b) Das Schaubild der Funktion $g(x) = mx - 1$ verläuft durch den Punkt $Q(-2|6)$.
c) Das Schaubild der Funktion $h(x) = mx + b$ verläuft durch die Punkte $R_1(2|3)$ und $R_2(4|-1)$.
d) Das Schaubild der Funktion $i(x) = mx + b$ verläuft durch die Punkte $S_1(-1|-2)$ und $S_2(5|7)$.

In der Mathematik unterscheidet man grundsätzlich zwischen Stellen und Punkten. Stellen sind x-Werte während Punkte einen x-Wert und einen y-Wert haben. Die Nullstellen (abgekürzt NST) sind die Stellen, an denen die Funktion die x-Achse schneidet.Oder anders ausgedrückt, die NST sind die Stellen, an denen der Funktionswert bzw. y-Wert Null ist:

$$f(x) = 0$$

Beispiel.



Gegeben ist die Funktion $f(x) = -\frac{2}{3}x + \frac{3}{2}$. Im Schaubild kann man die Nullstelle ungefähr ablesen: $x_0 \approx 2,2$.

Um den exakten Wert zu erhalten, muss man folgende Gleichung lösen:

$$f(x) = 0$$

$$-\tfrac{2}{3}x + \tfrac{3}{2} = 0 \mid -\frac{3}{2}$$

$$-\tfrac{2}{3}x = -\tfrac{3}{2} \mid \cdot \left(-\frac{3}{2}\right)$$

$$\Rightarrow x_0 = \tfrac{9}{4} = 2,25$$

Übung 11 **Bestimme die Nullstellen**

a) $f_1(x) = 3x - 9$

b) $f_2(x) = -2x - 10$

c) $f_3(x) = \frac{2}{3}x + 4$

d) $f_4(x) = -\frac{3}{4}x + 12$

e) $f_5(x) = \frac{5}{2}x + \frac{10}{3}$

f) $f_6(x) = -0,5x - 3,2$

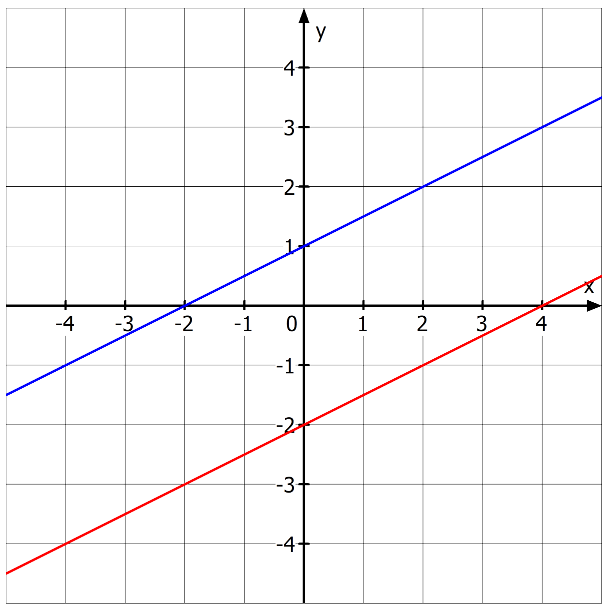
g) $f_7(x) = -8 + 2x$

h) $f_8(x) = \frac{5}{7} - \frac{15}{14}x$

i) $f_9(x) = 3(2x - 5)$

j) $f_{10}(x) = \frac{1}{3}(6x - 5) + \frac{5}{6}$

Parallele Geraden

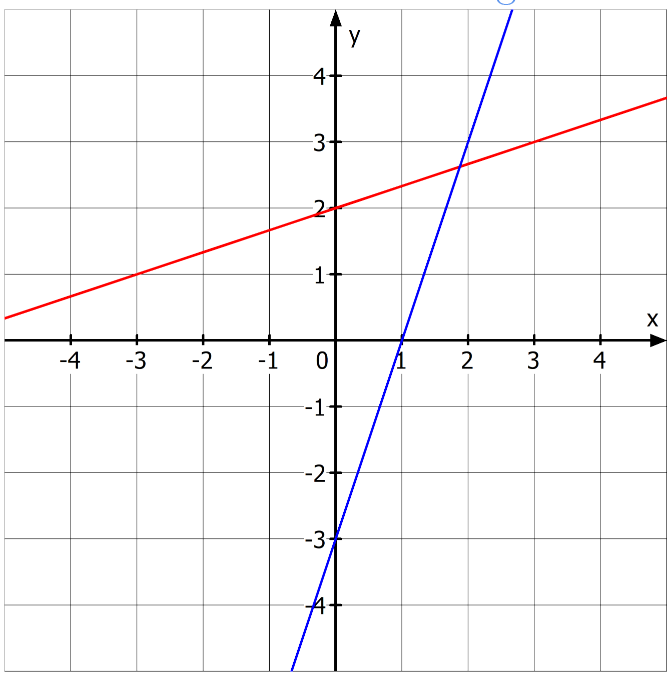


$f_1(x) = \frac{1}{2}x - 2 \qquad g_1(x) = 0,5x + 1$

$$m_f = m_g$$

Die beiden Geraden haben die gleiche Steigung. Solche Paare von Geraden nennt man parallele Geraden. Sie haben keinen Schnittpunkt, d.h. die Gleichung $f(x) = g(x)$ hat keine Lösungen. Paralle Geraden, die auch den gleichen y-Achsenabschnitt haben, nennt man identische Geraden. In diesem Fall ist jedes x eine Lösung der Gleichung $f(x) = g(x)$.

keine besondere Lage

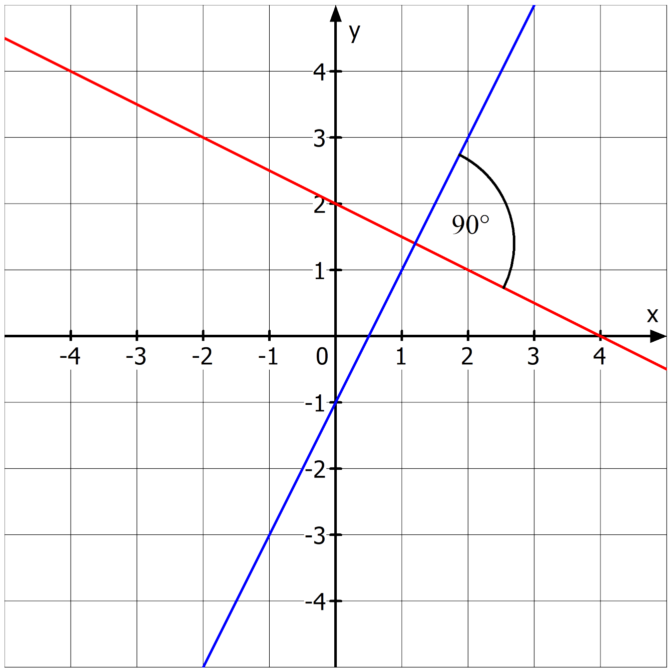


$f_3(x) = \frac{1}{3}x + 2 \qquad g_3(x) = 3x - 3$

$$m_f \neq m_g \text{ und } m_f \cdot m_g \neq -1$$

Die beiden Geraden sind weder parallel noch orthogonal, d.h. sie haben keine besondere Lage zueinander..

Senkrechte Geraden



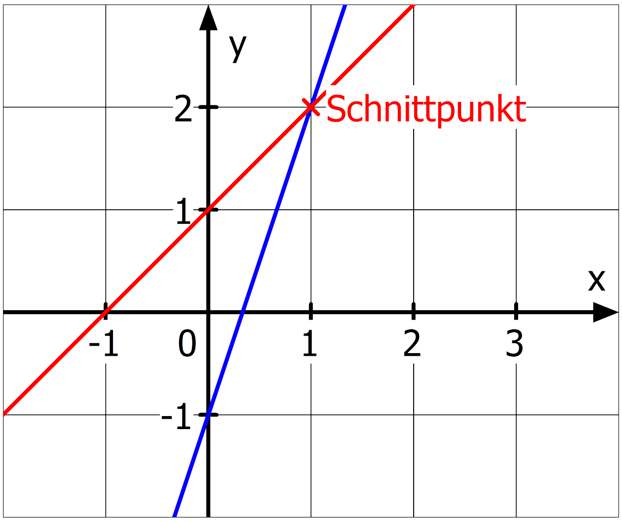
$f_2(x) = -\frac{1}{2}x + 2 \qquad g_2(x) = 2x - 1$

$$m_f \cdot m_g = -1$$

Die beiden Geraden schneiden sich in einem rechten Winkel. Solche Paare von Geraden stehen orthogonal bzw. normal zueinander.

Erinnerung: In der Mathematik unterscheidet man grundsätzlich zwischen Stellen und Punkten. Stellen sind x-Werte während Punkte einen x-Wert und einen y-Wert haben. Die Schnittpunkte zweier Funktionen $f(x)$ und $g(x)$ sind alle Punkte, in denen sich die Schaubilder schneiden. Um die Schnittstellen zu erhalten, muss man die Funktionen gleichsetzen:

$$f(x) = g(x)$$



Im nebenstehenden Beispiel sind die Schaubilder der Funktionen $f(x) = x + 1$ und $g(x) = 3x - 1$ gezeichnet. Der Schnittpunkt lässt sich wie folgt berechnen:

$$\begin{aligned} f(x) &= g(x) \\ x + 1 &= 3x - 1 \mid -3x - 1 \\ -2x &= -2 \mid \cdot \left(-\tfrac{1}{2}\right) \\ x &= 1 \end{aligned}$$

Die Schnittstelle ist also $x = 1$. Um die y-Koordinate zu erhalten, setzt man $x = 1$ entweder in $f(x)$ oder $g(x)$ ein. Zur Demonstration setzen wir die Schnittstelle in beide Funktionen ein:

$$\begin{aligned} f(1) &= 1 + 1 = 2 \\ g(1) &= 3 \cdot 1 - 1 = 2 \end{aligned}$$

Der Schnittpunkt liegt also bei $P(1|2)$.

Übung 12 — Bestimme jeweils den Schnittpunkt

a) $f_1(x) = x - 1$ und $g_1(x) = -x + 3$

b) $f_2(x) = -2x + 4$ und $g_2(x) = 0,5x - 1$

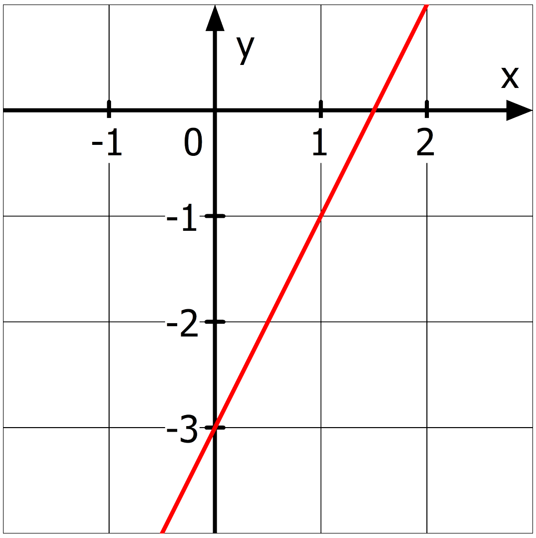
c) $f_3(x) = \frac{3}{2}x + \frac{1}{2}$ und $g_3(x) = 4x$

d) $f_4(x) = \frac{4}{5}x + \frac{2}{5}$ und $g_4(x) = -\frac{2}{5}x$

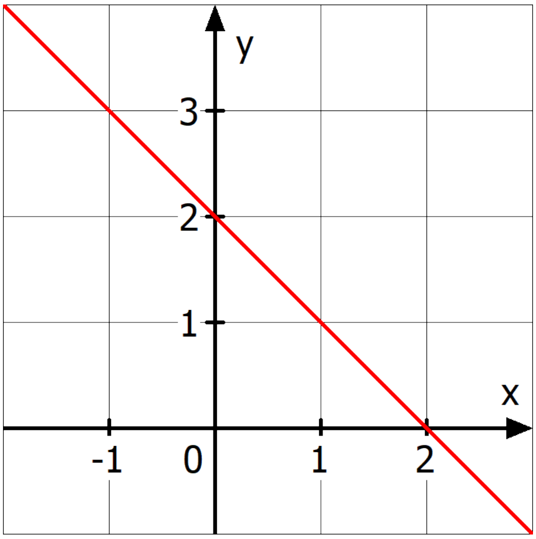
e) $f_5(x) = -\frac{2}{3}x - 15$ und $g_5(x) = 3x - \frac{5}{4}$

f) $f_6(x) = -\frac{5}{8}x$ und $g_6(x) = -\frac{3}{2}x + \frac{1}{2}$

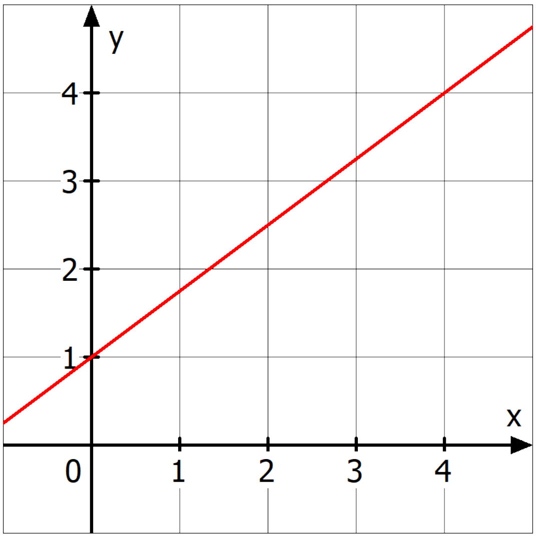
Lösung zu Übung 6



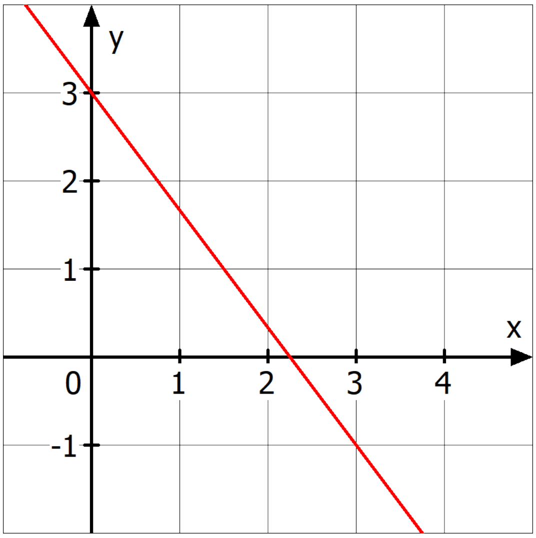
$f_1(x) = 2x - 3$



$f_2(x) = -x + 2$



$f_3(x) = \frac{3}{4}x + 1$

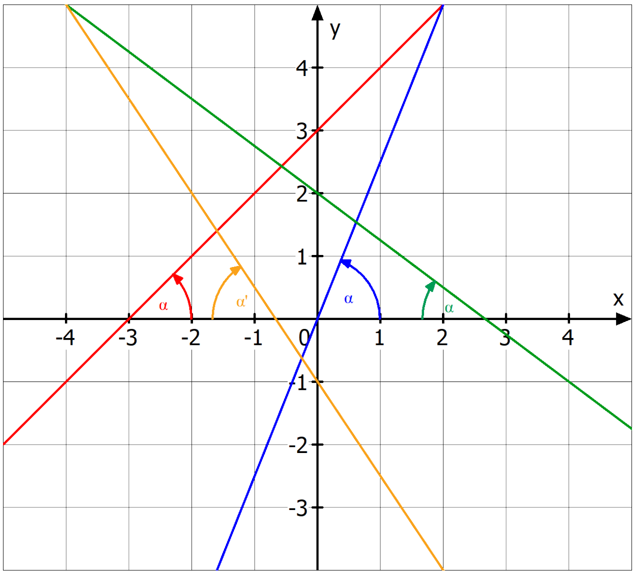


$f_4(x) = -\dfrac{4}{3}x + 3$

Lösung zu Übung 7

$f_5(x) = -3x \qquad f_6(x) = -\frac{1}{3}x + 1 \qquad f_7(x) = \frac{3}{2}x - 2 \qquad f_8(x) = \frac{7}{5}x + 2$

Lösung zu Übung 8



$\alpha_f = \tan^{-1}(1) = 45°$

$\alpha_g = \tan^{-1}(2,5) = 68,20°$

$\alpha_h = \tan^{-1}\left(-\frac{3}{4}\right) = -36,87°$

$\alpha_i = \tan^{-1}(-1,5) = -56,31°$

Lösung zu Übung 9

a) $f(2) = -2 + 2 = 0 \neq 3$

P liegt nicht auf dem Schaubild von $f(x)$

$f(-2) = -(-2) + 2 = 4$

Q liegt auf dem Schaubild von $f(x)$

b) $g(5) = \frac{4}{5} \cdot 5 - 1 = 3$

R liegt auf dem Schaubild von $g(x)$

$g(10) = \frac{4}{5} \cdot 10 - 1 = 7 \neq -1$

S liegt nicht auf dem Schaubild von $g(x)$

Lösung zu Übung 10

a) Punktprobe mit $P(2|3)$

$$
\begin{aligned}
f(2) &= 3\\
2\cdot 2) + b &= 3 \mid -4\\
b &= -1\\
\Rightarrow f(x) &= 2x-1
\end{aligned}
$$

b) Punktprobe mit $Q(-2|6)$

$$
\begin{aligned}
g(-2) &= 6\\
m\cdot(-2)-1 &= 6 \mid +1\\
-2m &= 7 \mid \left(\cdot -\tfrac{1}{2}\right)\\
m &= -\frac{7}{2}\\
\Rightarrow g(x) &= -\frac{7}{2}x-1
\end{aligned}
$$

c) Bestimmen der Steigung m mit Hilfe der Punkte $R_1(2|3)$ und $R_2(4|-1)$:

$$m = \frac{-1-3}{4-2} = -\frac{1}{2}$$

Punktprobe mit $R_1(2|3)$ (oder R_2)

$$
\begin{aligned}
h(2) &= 3\\
-\frac{1}{2}\cdot 2 + b &= 3 \mid +1\\
b &= 4\\
\Rightarrow h(x) &= -\frac{1}{2}x+4
\end{aligned}
$$

d) Bestimmen der Steigung m mit Hilfe der Punkte $S_1(-1|-2)$ und $S_2(5|7)$:

$$m = \frac{7-(-2)}{5-(-1)} = -\frac{3}{2}$$

Punktprobe mit $S_2(5|7)$ (oder S_1)

$$
\begin{aligned}
i(5) &= 7\\
\frac{3}{2}\cdot 5 + b &= 7 \mid -\tfrac{15}{2}\\
b &= -\frac{1}{2}\\
\Rightarrow i(x) &= \frac{3}{2}x + -\frac{1}{2}
\end{aligned}
$$

Lösung zu Übung 11

a) $x_0 = 3$

b) $x_0 = -5$

c) $x_0 = -6$

d) $x_0 = 16$

e) $x_0 = -\frac{4}{3}$

f) $x_0 = -6,4$

g) $x_0 = 4$

h) $x_0 = -\frac{2}{3}$

i) $x_0 = \frac{5}{2}$

j) $x_0 = \frac{5}{12}$

Lösung zu Übung 12

a) $P_1\left(2|1\right)$

b) $P_2\left(2|0\right)$

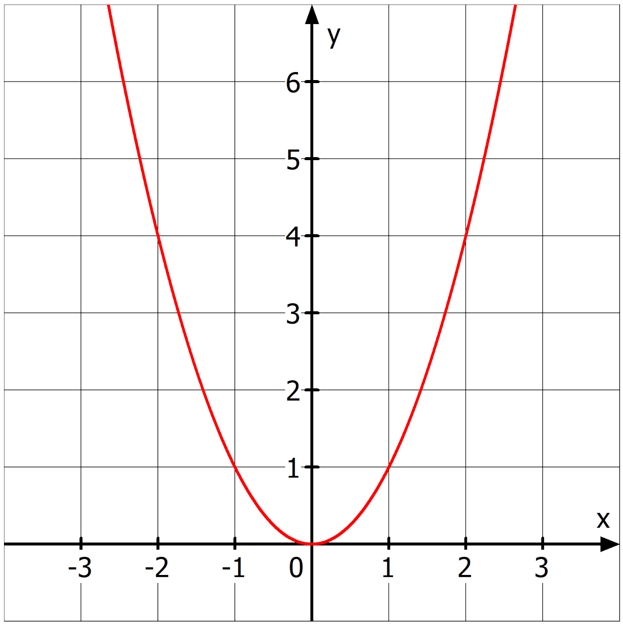
c) $P_3\left(\frac{1}{5}|\frac{4}{5}\right)$

d) $P_4\left(-\frac{1}{3}|-\frac{2}{15}\right)$

e) $P_5\left(-\frac{15}{4}|-\frac{25}{2}\right)$

f) $P_6\left(\frac{4}{7}|-\frac{5}{14}\right)$

Das Schaubild der Funktion
$f(x) = x^2$
bezeichnet man als Normalparabel.



Verschieben in y-Richtung

$$f(x) = x^2 + y_S$$

Für $y_S > 0$ wird die Parabel nach oben verschoben, für $y_S < 0$ wird die Parabel nach unten verschoben.

Verschieben in x-Richtung

$$f(x) = (x - x_S)^2$$

Für $x_S > 0$ wird die Parabel nach rechts verschoben, für $x_S < 0$ wird die Parabel nach links verschoben.

Strecken und Stauchen

$$f(x) = a \cdot x^2$$

Für $a > 1$ wird die Parabel gestreckt, sie erscheint dann schmäler.
Für $0 < a < 1$ wird die Parabel gestaucht, sie erscheint dann breiter.
Für negative a wird die Parabel zusätzlich nach unten geklappt.

Scheitelform

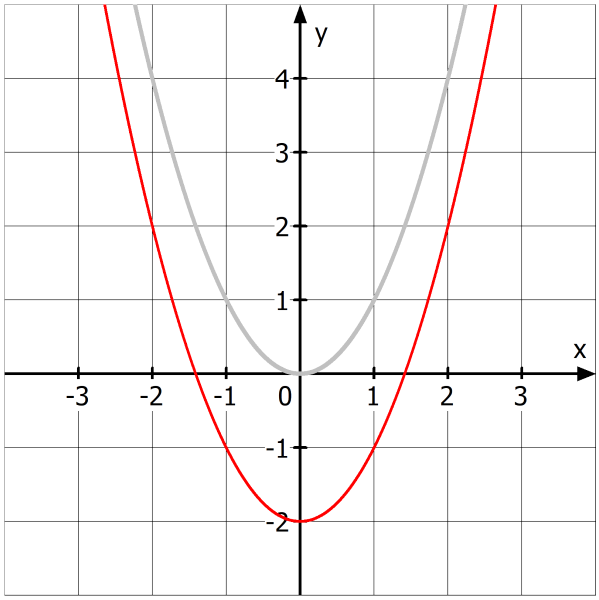
$$f(x) = a \cdot (x - x_S)^2 + y_S$$

Man kann die Parabel gleichzeitig in x-Richtung und y-Richtung verschieben sowie strecken oder stauchen. Man erhält so die Scheitelform. Liegt die Funktionsgleichung einer Parabel in der Scheitelform vor, so kann man den Scheitel $S\,(x_S|y_S)$ direkt ablesen.

Die Normalparabel wird um 2 Einheiten nach unten verschoben.

$f(x) = x^2 - 2$

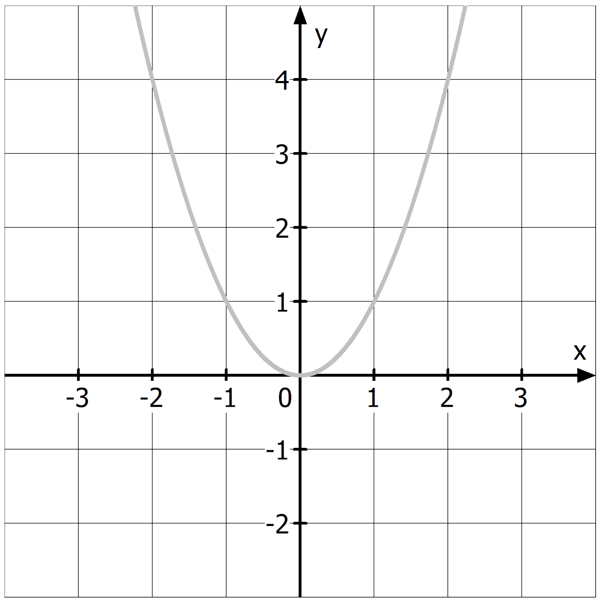
Der Scheitel liegt bei $S\,(0|-2)$



Die Normalparabel wird um 3 Einheiten nach oben verschoben.

$f(x) = x^2 + 3$

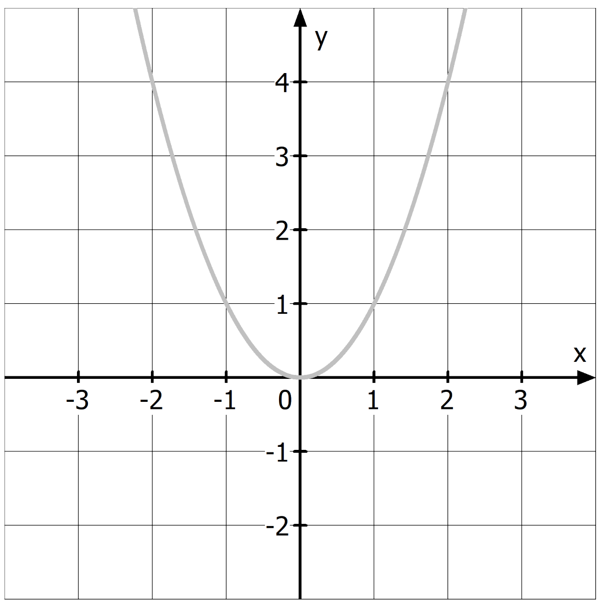
Der Scheitel liegt bei $S\,(0|3)$



Die Normalparabel wird um 2 Einheiten nach unten verschoben.

$f(x) = x^2 - 2$

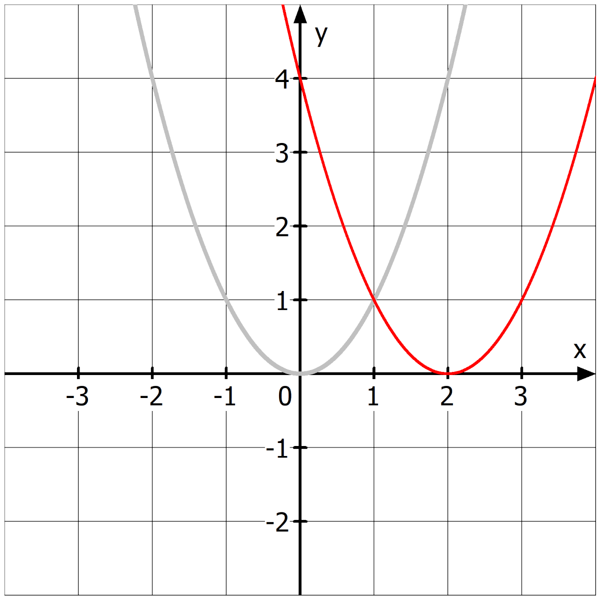
Der Scheitel liegt bei $S\,(0|-2)$



Die Normalparabel wird um 2 Einheiten nach rechts verschoben.

$$f(x) = (x-2)^2$$

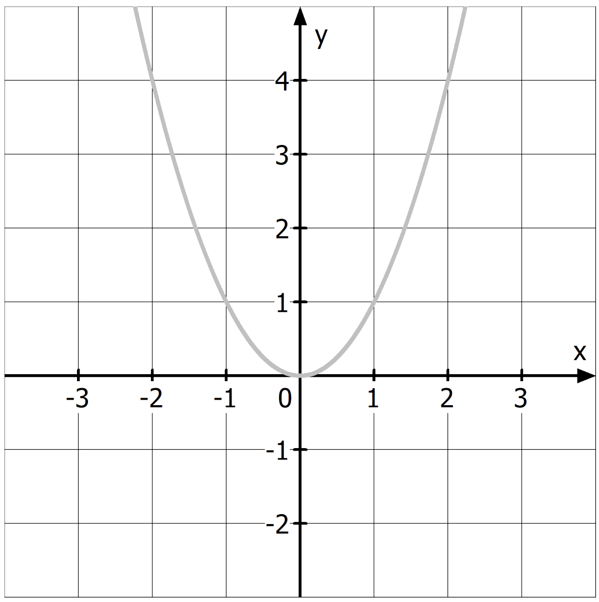
Der Scheitel liegt bei $S\,(-2|0)$



Die Normalparabel wird um 1 Einheit nach links verschoben.

$$f(x) = (x+1)^2$$

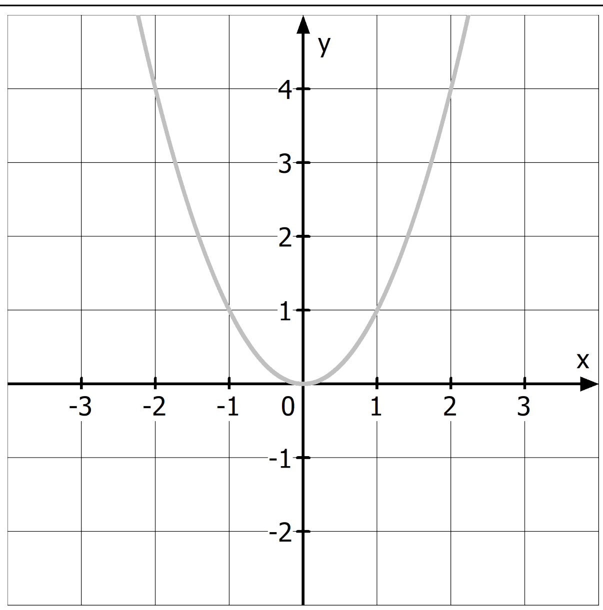
Der Scheitel liegt bei $S\,(-1|0)$



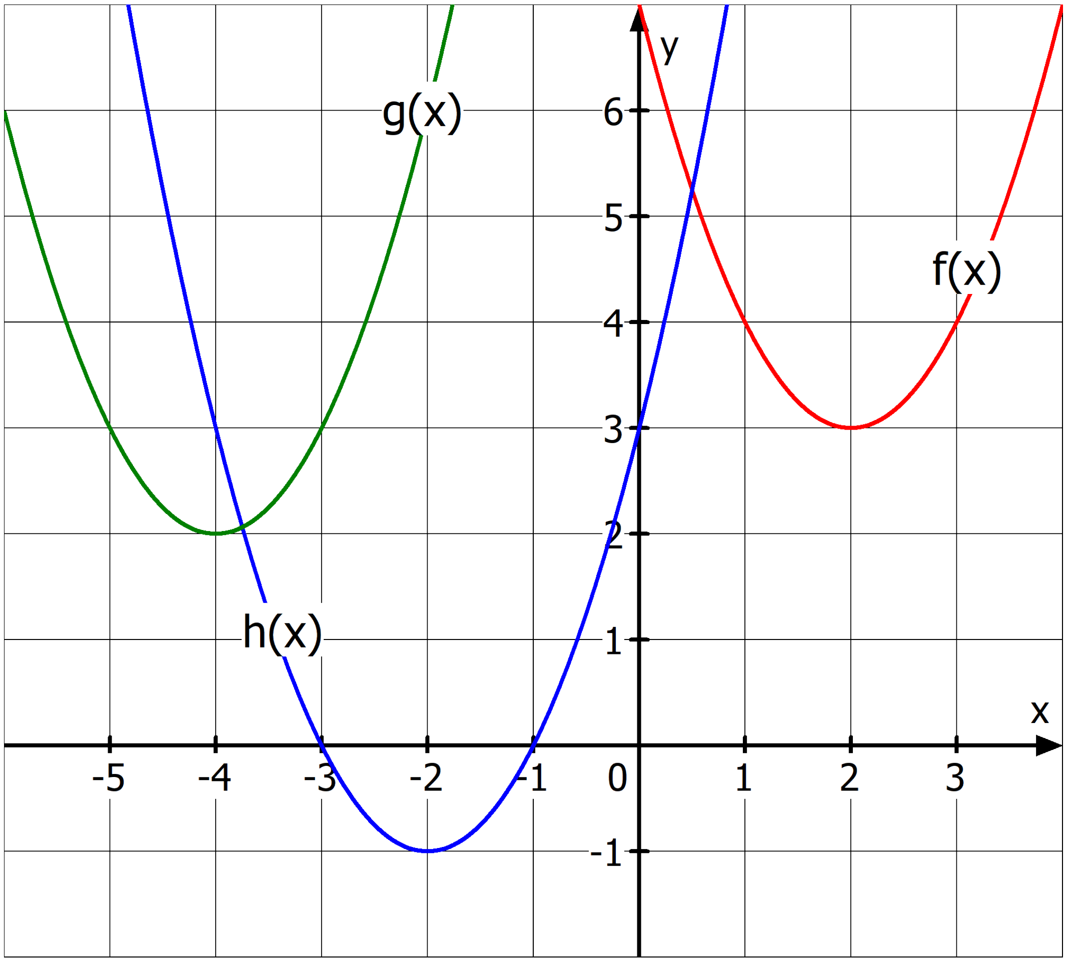
Die Normalparabel wird um 3 Einheiten nach rechts verschoben.

$$f(x) = (x-3)^2$$

Der Scheitel liegt bei $S\,(3|0)$



Übung 13 Bestimme jeweils an Hand des Schaubilds die Funktionsgleichung



Übung 14 Stelle jeweils die Funktionsgleichung auf und skizziere das Schaubild

a) Die Normalparabel wird um 5 Einheiten nach links und um 3 Einheiten nach unten verschoben.

b) Die Normalparabel wird um 6 Einheiten nach rechts und um 4 Einheiten nach unten verschoben.

c) Die Normalparabel wird um 1,5 Einheiten nach links und um 2,5 Einheiten nach oben verschoben.

Übung 15 Beschreibe wie man die Normalparabel verschieben muss und skizziere das Schaubild

a) $f(x) = (x-3)^2 - 4$ b) $g(x) = (x+4)^2 + 3$ c) $h(x) = \left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{5}{2}$

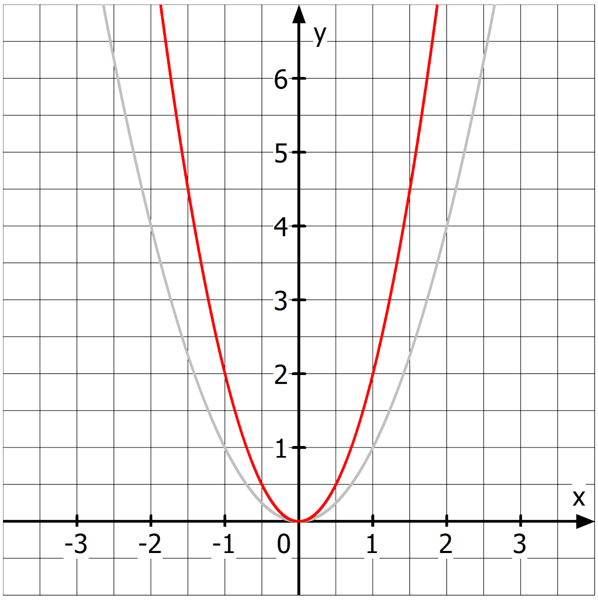
Übung 16 Stelle die Funktionsgleichung auf

a) Das Schaubild von $f(x) = (x-2)^2 + 1$ wird um 3 Einheiten nach links und 4 Einheiten nach oben verschoben.

b) Das Schaubild von $g(x) = (x+3)^2 - 2$ wird um 4 Einheiten nach rechts und 2 Einheiten nach oben verschoben.

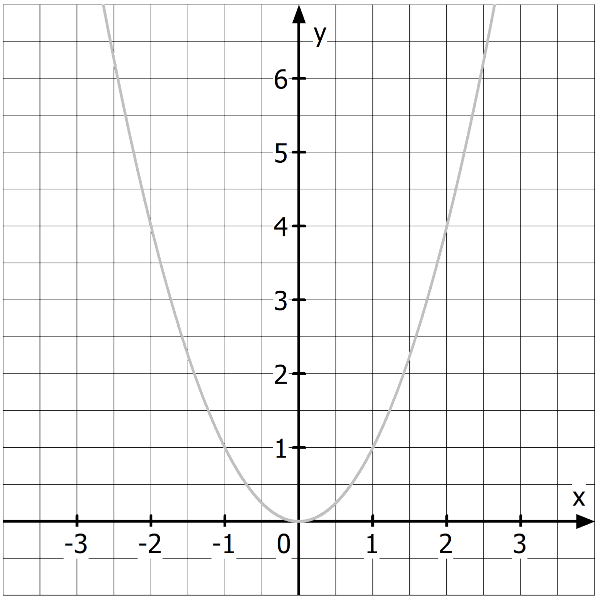
Die Normalparabel wird mit dem Faktor 2 gestreckt.

$$f(x) = 2x^2$$



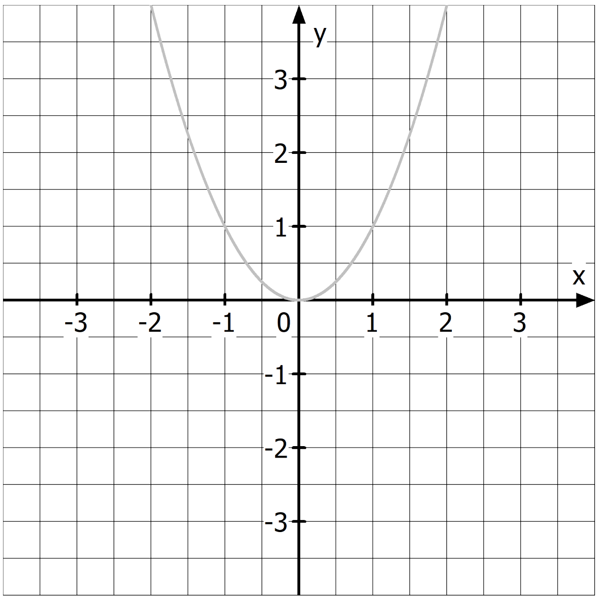
Die Normalparabel wird mit dem Faktor 2 gestaucht oder mit dem Faktor $\frac{1}{2}$ gestreckt.

$$f(x) = \frac{1}{2}x^2$$

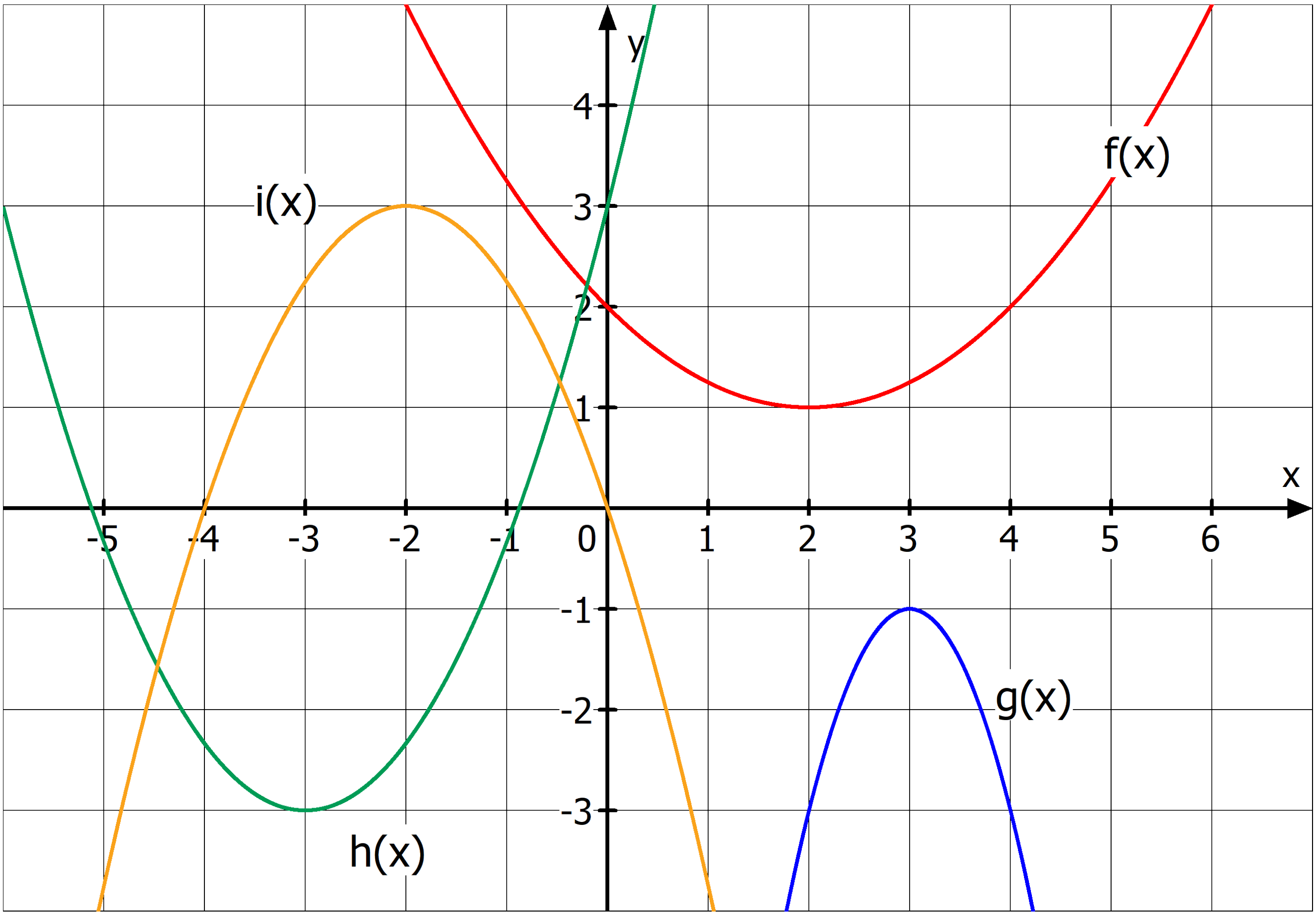


Die Normalparabel wird am Scheitel nach unten geklappt und mit dem Faktor 3 gestaucht oder mit dem Faktor $\frac{1}{3}$ gestreckt.

$$f(x) = -\frac{1}{3}x^2$$



Übung 17 Bestimme jeweils an Hand des Schaubilds die Funktionsgleichung



Übung 18 Stelle jeweils die Funktionsgleichung auf und skizziere das Schaubild

a) Die Normalparabel wird mit dem Faktor 4 gestreckt um 2 Einheiten nach links und um 4 Einheiten nach unten verschoben.

b) Die Normalparabel wird mit dem Faktor 0,5 gestreckt, an der x-Achse gespiegelt, um 1 Einheiten nach rechts und um 2 Einheiten nach unten verschoben.

c) Die Normalparabel wird mit dem Faktor 2 gestreckt, um 2,5 Einheiten nach links, um 3,5 Einheiten nach oben verschoben und zuletzt an der x-Achse gespiegelt.

Übung 19 Beschreibe wie man die jeweilige Parabel aus der Normalparabel erhält.

a) $f(x) = 5(x-1)^2 + 2$ b) $g(x) = -(x+3)^2 - 2,5$ c) $h(x) = -\frac{2}{3}\left(x - \frac{3}{4}\right)^2 + \frac{5}{7}$

Übung 20 Stelle die Funktionsgleichung auf

a) Das Schaubild von $f(x) = 3(x-4)^2 + 2$ wird um 5 Einheiten nach links und 2 Einheiten nach oben verschoben und dann an der x-Achse gespiegelt.

b) Das Schaubild von $g(x) = -(x+2)^2 - 3$ wird um 5 Einheiten nach rechts und 2 Einheiten nach unten verschoben und dann an der y-Achse gespiegelt.

Liegt die Funktionsgleichung einer quadratischen Funktion in der folgenden Darstellungsform vor, so spricht man von der Hauptform oder Normalform:

$$f(x) = ax^2 + bx + c, \quad a \neq 0$$

- Streckfaktor a: Gibt an, ob die Parabel schmaler ($-1 < a < 1$) oder breiter ($a < -1$ oder $a > 1$) als die Normalparabel ist und ob die Parabel nach oben (a positiv) oder nach unten (a negativ) geöffnet ist.

- Koeffizient b: Verschiebt die Parabel gleichzeitig in x-Richtung und x-Richtung.

- Absolutglied c: Gibt den y-Achsenabschnitt an ($f(0) = a \cdot 0^2 + b \cdot 0 + c = c$).

Die Nullstellen einer quadratischen Funktion bzw. die Lösungen einer Gleichung vom Typ

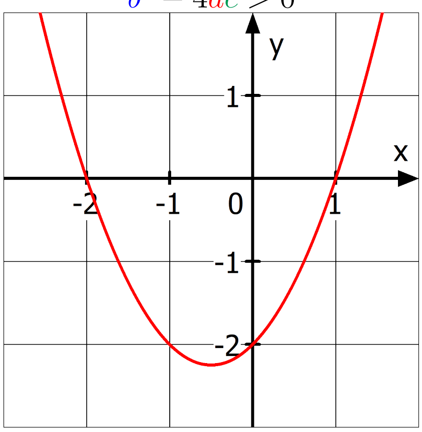
$$ax^2 + bx + c = 0$$

lassen sich mit Hilfe der **Mitternachtsformel** bestimmen:

$$x_{1/2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Wie viele Lösungen die Gleichung hat, hängt vom Term unter der Wurzel, der sogenannten Diskriminanten D ab: $D = b^2 - 4ac$

$b^2 - 4ac > 0$



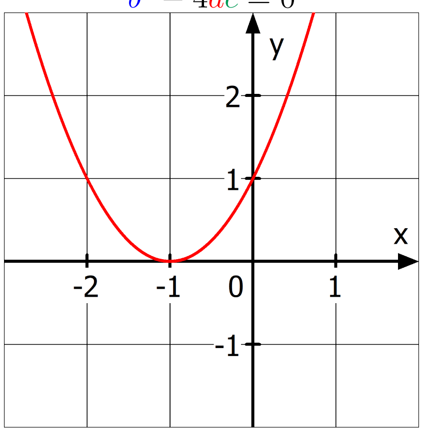
$f_1(x) = x^2 + x - 2$

$x^2 + x - 2 = 0$

$$x_{1/2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-2)}}{2 \cdot 1} = \frac{-1 \pm 3}{2}$$

$x_1 = -2 \quad x_2 = 1$

$b^2 - 4ac = 0$

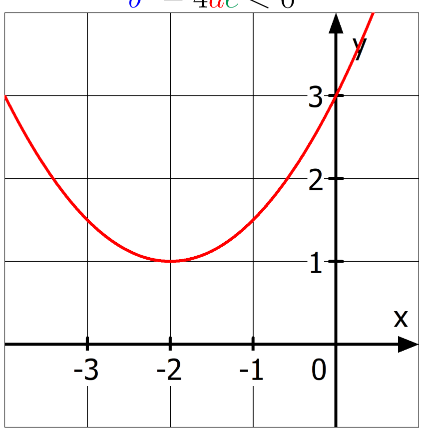


$f_2(x) = x^2 - 2x + 1$

$x^2 + 2x + 1 = 0$

$$x_{1/2} = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1}}{2 \cdot 1} = \frac{-2 \pm 0}{2} = -1$$

$b^2 - 4ac < 0$



$f_3(x) = 0,5x^2 - 2x + 3$

$0,5x^2 + 2x + 3 = 0$

$$x_{1/2} = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4 \cdot 0,5 \cdot 3}}{2 \cdot 0,5} = -2 \pm \sqrt{-2} \quad \lightning$$

Übung 21 Bestimme die Nullstellen

a) $f(x) = x^2 + 3x - 4$

b) $f(x) = x^2 - 4x + 3$

c) $f(x) = \frac{1}{2}x^2 + \frac{5}{2}x + 3$

d) $f(x) = 0,25x^2 + x + 1$

e) $f(x) = -2x^2 + 4x - 4$

f) $f(x) = \frac{1}{3}x^2 - x - 6$

g) $f(x) = 0,1x^2 - 0,2 - x - 1,5$

h) $f(x) = 2x^2 - 4x - 2$

i) $f(x) = \frac{1}{16}x^2 - \frac{1}{4}x - 2$

j) $f(x) = 0,5x^2 + 2x + 0,5$

k) $f(x) = \frac{2}{3}x^2 + 4x - 18$

l) $f(x) = 0,25x^2 - 1,5x + 1$

m) $f(x) = 4x^2 + 12x + 13$

n) $f(x) = 0,2x^2 - 2x + 5$

Satz vom Nullprodukt/Produktform

Die Produktform ist nach der Scheitelform und der Hauptform die dritte und letzte Darstellungsform für quadratische Funktionen. Um den Aufbau der Produktform nachvollziehen zu können, muss man den Satz vom Nullprodukt (SvN) kennen.
Das Produkt zweier Zahlen a und b ist genau dann Null, wenn entweder a Null ist oder b Null ist:

$$a \cdot b = 0 \quad \Leftrightarrow \quad a = 0 \text{ oder } b = 0$$

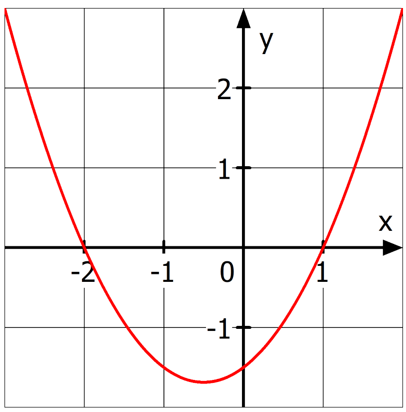
Liegt die Funktionsgleichung einer quadratischen Funktion in der folgenden Form vor, so spricht man von der Produktform:

$$f(x) = a \cdot (x - x_1)(x - x_2), \quad a \neq 0$$

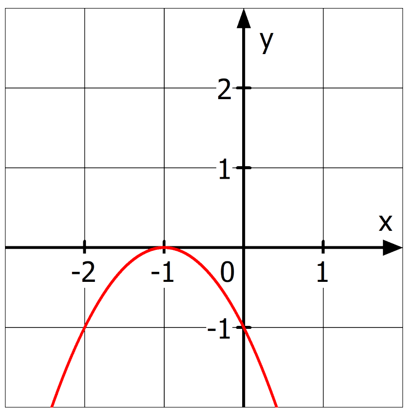
- Streckfaktor a: Streckt die Parabel in y-Richtung.

- $x_1,\ x_2$: Nullstellen der Parabel. Setzt man für x den Wert x_1 oder x_2 ein, so nimmt jeweils eine der beiden Klammern den Wert 0 an. Gemäß SvN wird dann der gesamte Funktionswert Null.

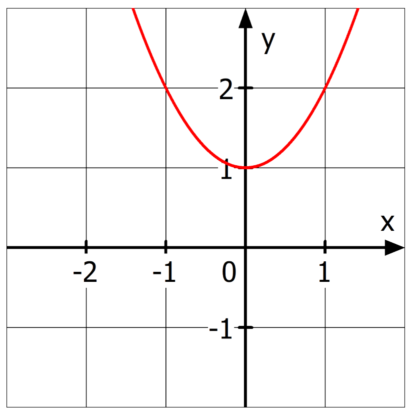
ACHTUNG: Die Produktform kann nur dann aufgestellt werden, wenn die quadratsche Funktion mindestens eine (doppelte) Nullstelle hat.



$f_1(x) = \frac{3}{4}(x + 2)(x - 1)$
Nullstellen: $x_1 = -2, \quad x_2 = 1$



$f_2(x) = -(x + 1)(x + 1)$
$= -(x + 1)^2$
Nullstellen: $x_{1/2} = -1$
Doppelte Nullstelle



$f_3(x) = x^2 + 1$
Keine Nullstellen, daher keine Produktform möglich.

Übung 22 Bestimme die Nullstellen

a) $f(x) = 3\,(x+2)\,(x-4)$
b) $f(x) = -2\,(x+8)\,(x+6)$
c) $f(x) = 5\,(x-2)\,x$
d) $f(x) = -\frac{3}{4}\left(x+\frac{7}{5}\right)\left(x-\frac{4}{3}\right)$
e) $f(x) = \sqrt{3}\,(x-10)^2$
f) $f(x) = \left(x+\sqrt{2}\right)(x-3,8)$
g) $f(x) = -\left(x-\frac{1}{2}\right)\left(x-\frac{3}{4}\right)$
h) $f(x) = 10\left(x+\frac{8}{5}\right)\left(x-\frac{3}{5}\right)$
i) $f(x) = -9x\,(x+9)$
j) $f(x) = 1,8\,(x-2,1)\,(x-5,9)$
k) $f(x) = -8\left(x-\sqrt{5}\right)\left(x+\sqrt{11}\right)$
l) $f(x) = -\frac{6}{5}\,(x-2)^2$
m) $f(x) = \sqrt{3}\,(x-10)\,(x+8)$
n) $f(x) = -2\,(x+17)\,(x+1)$

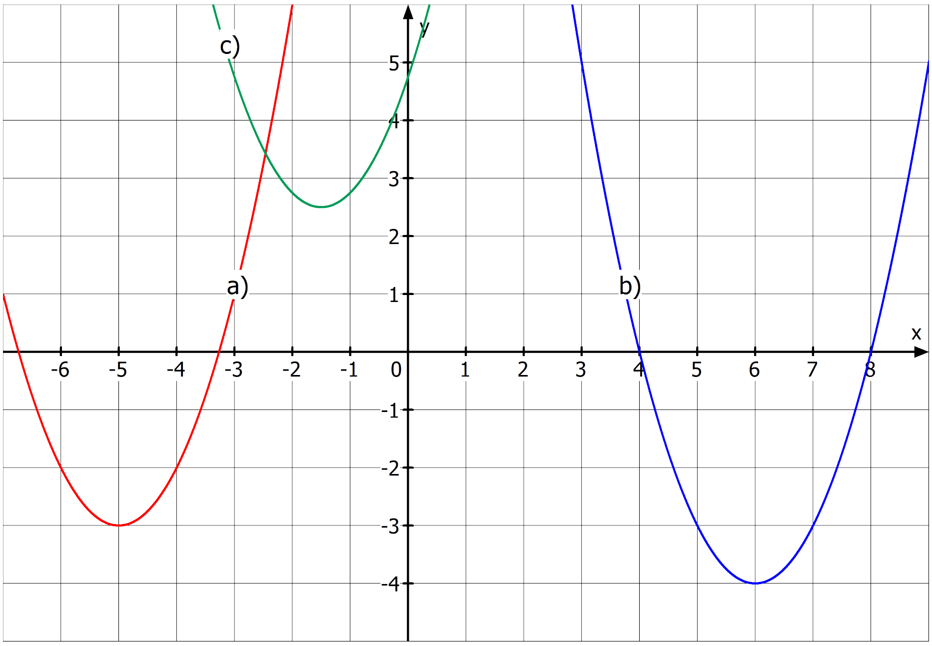
Übung 23 Bestimme die Nullstellen und skizziere das Schaubild

a) $f(x) = 0,2\,(x+3)\,(x-2)$
b) $g(x) = -0,5\,(x+5)\,(x+2)$
c) $h(x) = (x+1)^2$
d) $i(x) = -\frac{1}{2}x\left(x-\frac{3}{2}\right)$

Lösung zu Übung 13

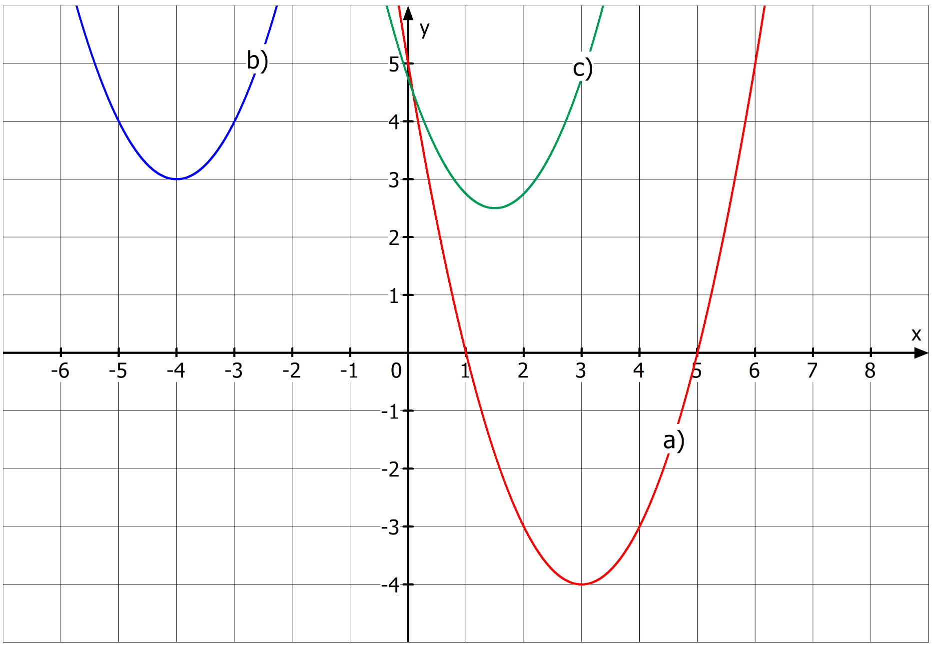
a) $f(x) = (x+5)^2 - 3$ b) $g(x) = (x-6)^2 - 4$ c) $h(x) = (x+1,5)^2 + 2,5$

Lösung zu Übung 14



a) $f(x) = (x-2)^2 + 3$ b) $g(x) = (x+4)^2 + 2$ c) $h(x) = (x+2)^2 - 1$

Lösung zu Übung 15



a) Die Normalparabel wird um 3 Einheiten nach rechts und 4 Einheiten nach unten verschoben.

b) Die Normalparabel wird um 4 Einheiten nach links und 3 Einheiten nach oben verschoben.

c) Die Normalparabel wird um 1,5 Einheiten nach rechts und 2,5 Einheiten nach oben verschoben.

Lösung zu Übung 16

a) $f_v(x) = (x+1)^2 + 5$ b) $g_v(x) = (x-1)^2$

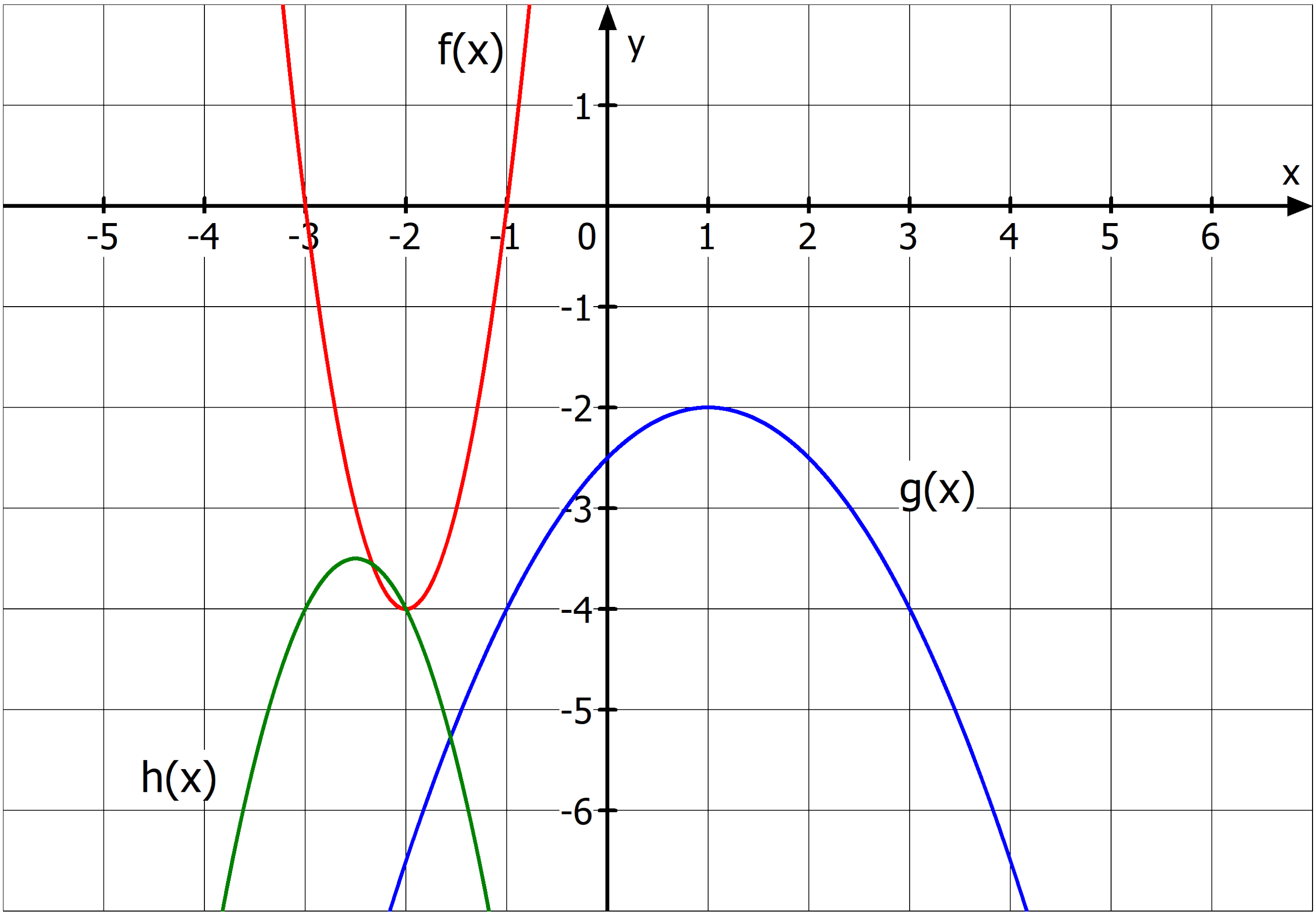
Lösung zu Übung 17

a) $f(x) = \frac{1}{4}\left(x-2\right)^2 + 1$ b) $g(x) = -2\left(x-3\right)^2 - 1$

c) $h(x) = \frac{2}{3}\left(x+3\right)^2 - 3$ d) $i(x) = -\frac{3}{4}\left(x+2\right)^2 + 3$

Hinweis: Bestimme x_S und y_S aus der Position des Scheitels. Den Streckfaktor a kann man dann mittels einer Punktprobe bestimmen (nicht den Scheitel als Punkt verwenden).

Lösung zu Übung 18



a) $f(x) = 4\,(x+2)^2 - 4$ b) $g(x) = -\frac{1}{2}\,(x-1)^2 - 2$ c) $h(x) = -2\,(x+2,5)^2 - 3,5$

Lösung zu Übung 19

a) Die Normalparabel wird mit dem Faktor 5 gestreckt, um 1 Einheit nach rechts und 2 Einheiten nach oben verschoben.

b) Die Normalparabel wird an der x-Achse gespiegelt, um 3 Einheiten nach links und 2,5 Einheiten nach unten verschoben.

c) Die Normalparabel wird mit dem Faktor 1,5 gestreckt, an der x-Achse gespiegelt, um 0,75 Einheiten nach rechts und $\frac{5}{7}$ Einheiten nach oben verschoben.

Lösung zu Übung 20

a) $f_v(x) = -3\,(x+1)^2 - 4$ b) $g_v(x) = -\,(x+3)^2 - 5$

Lösung zu Übung 21

a) $x_1 = 1, \quad x_2 = -4$

b) $x_1 = 1, \quad x_2 = 3$

c) $x_1 = -2, \quad x_2 = -3$

d) $x_{1/2} = -2$

e) keine Nullstellen

f) $x_1 = -3, \quad x_2 = 6$

g) $x_1 = -3, \quad x_2 = 5$

h) $x_{1/2} = 1 \pm \sqrt{2}$

i) $x_1 = 8, \quad x_2 = -4$

j) $x_{1/2} = -2 \pm \sqrt{3}$

k) $x_1 = 3, \quad x_2 = -9$

l) $x_{1/2} = 3 \pm \sqrt{5}$

m) keine Nullstellen

n) $x_{1/2} = 5$

Lösung zu Übung 22

a) $x_1 = -2, \quad x_2 = 4$

b) $x_1 = -8, \quad x_2 = -6$

c) $x_1 = 2, \quad x_2 = 0$

d) $x_1 = -\frac{7}{5}, \quad x_2 = \frac{4}{3}$

e) $x_{1/2} = 10$

f) $x_1 = -\sqrt{2}, \quad x_2 = 3,8$

g) $x_1 = \frac{1}{2}, \quad x_2 = \frac{3}{4}$

h) $x_1 = -\frac{8}{5}, \quad x_2 = \frac{3}{5}$

i) $x_1 = 0, \quad x_2 = -9$

j) $x_1 = 2,1, \quad x_2 = 5,9$

k) $x_1 = \sqrt{5}, \quad x_2 = -\sqrt{11}$

l) $x_{1/2} = 2$

m) $x_1 = 10, \quad x_2 = -8$

n) $x_1 = -17, \quad x_2 = -1$

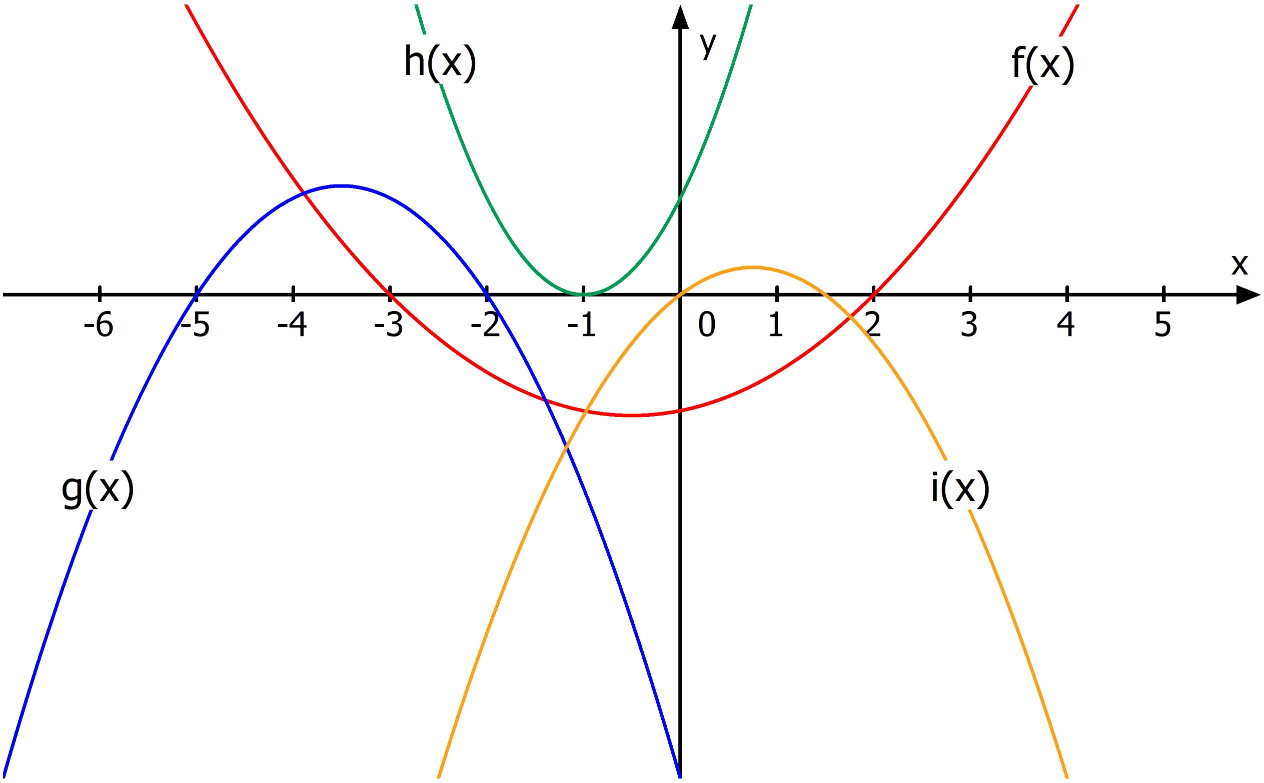
Lösung zu Übung 23

a) $x_1 = -3, \quad x_2 = 2$

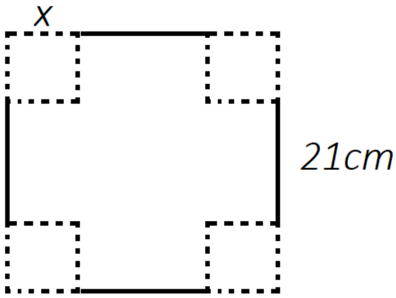
b) $x_1 = -5, \quad x_2 = -2$

c) $x_{1/2} = -1$

d) $x_1 = 0, \quad x_2 = -\frac{3}{2}$



Aus einem quadratischen Stück Pappe der Größe 21cm auf 21cm soll ein oben offener Kasten hergestellt werden. Die Ecken mit der variablen Seitenlänge x sind hierzu entsprechend der Abbildung abzuschneiden und die Seiten an den gepunkteten Linien hochzubiegen.



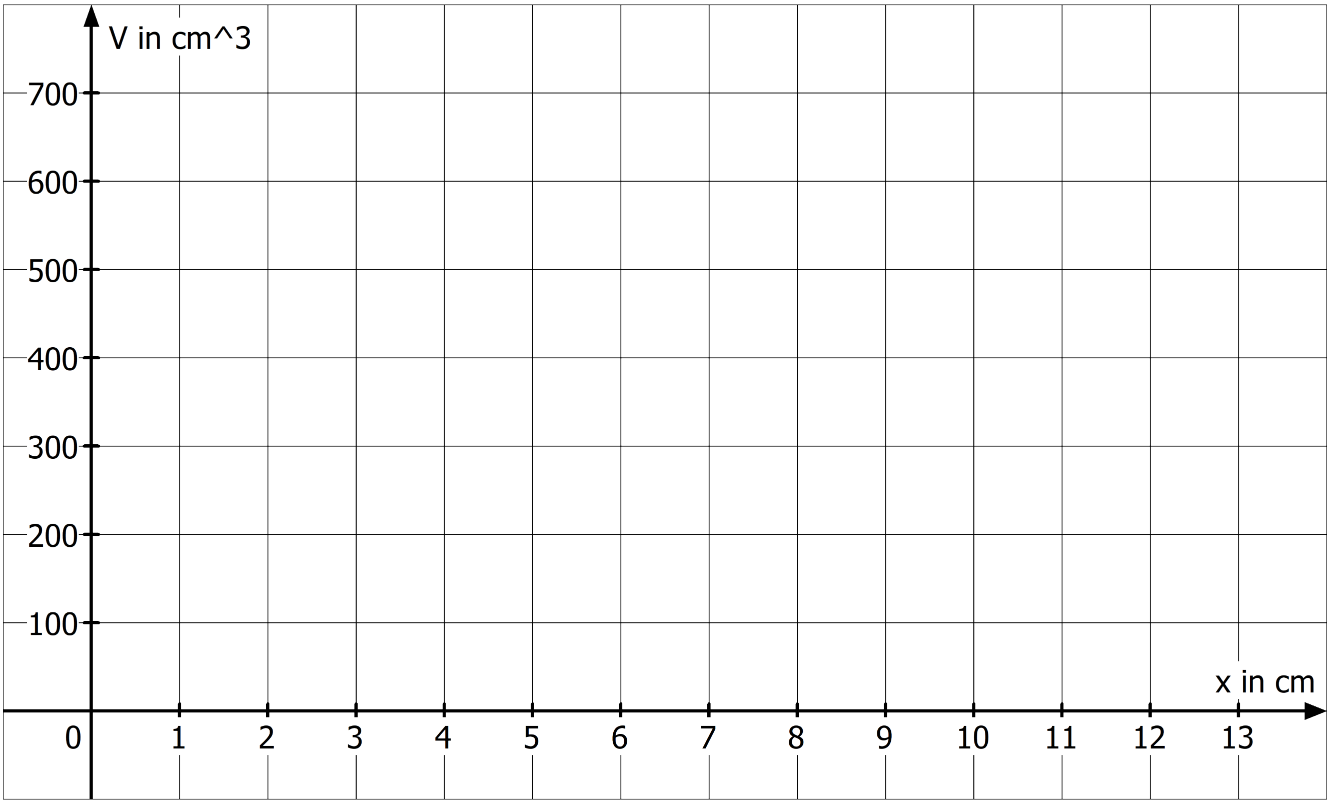
a) Gib drei verschiedene mögliche Abmessungen (Länge, Breite, Höhe) eines solchen Kastens an und berechne jeweils das zugehörige Volumen.

b) Beschreibe das Volumen V des Kastens in Abhängigkeit von der Höhe x mit einer Gleichung.

c) Zeichne das Schaubild der Funktion $V(x)$ im Intervall $0 \leq x \leq 13$ mit Hilfe deines Taschenrechners und einer Wertetabelle.

d) Bestimme eine sinnvolle Definitionsmenge für die Funktion.

e) Für welche Höhe x ist das Volumen des Kastens am größten?



a) Mögliche Beispiele: $V_1 = 5 \cdot (21 - 10)\,(21 - 10) = 605$
$V_2 = 3 \cdot (21 - 6)\,(21 - 6) = 675$
$V_3 = 8 \cdot (21 - 16)\,(21 - 16) = 200$

b) Die Höhe des Kastens entspricht x, während die Länge und Breite jeweils $21-2x$ entsprechen. Damit ergibt sich für das Volumen:
$V(x) = \text{Länge} \cdot \text{Breite} \cdot \text{Höhe} = x \cdot (21 - 2x)\,(21 - 2x) = x\,(21 - 2x)^2 = 4x^3 - 42x^2 + 441x$

c) Schaubild der Funktion

d) Die Definitionsmenge D gibt an, welche Werte für x man einsetzen darf. In diesem Fall sollte x größer als Null sein, da sonst kein Kasten entsteht und kleiner als $10,5$ sein, da bei $x = 10,5$ die vier Quadrate das komplette Stück Pappe abdecken:
$D =]0; 10,5[$ oder $D = \{x \in \mathbb{R} | 0 < x < 10,5\}$

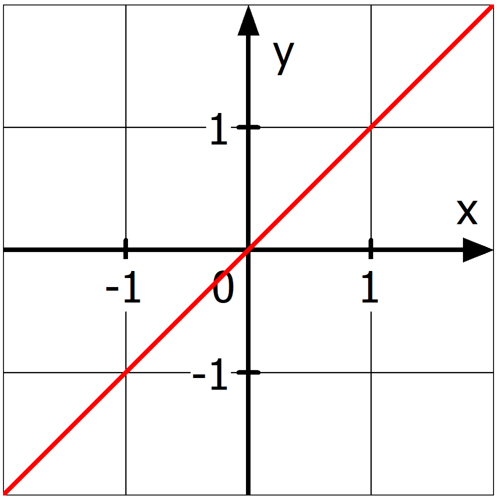
e) Aus dem Schaubild lässt sich ablesen, dass das maximale Volumen ungefähr bei $x = 3,5$ erreicht wird und damit $V_{max} = V(3,5) = 686$ gilt. Das maximale Volumen lässt sich mit der Ableitung exakt bestimmen, die wir zu einem späteren Zeitpunkt behandeln werden.

Funktionen vom Typ

$$f(x) = a \cdot x^n, \quad a \neq 0, \quad n \in \mathbb{N}$$

bezeichnen wir als Potenzfunktionen.
Der Koeffizient a ist der Streckfaktor, wie wir ihn bereits von quadratischen Funktionen kennen.
Die Hochzahl bzw. der Exponent n ist eine natürliche Zahl: $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, \dots\}$
Die Schaubilder der Potenzfunktionen teilen sich in drei verschiedene Formen auf:

Für $n = 1$ ergibt sich eine Gerade.



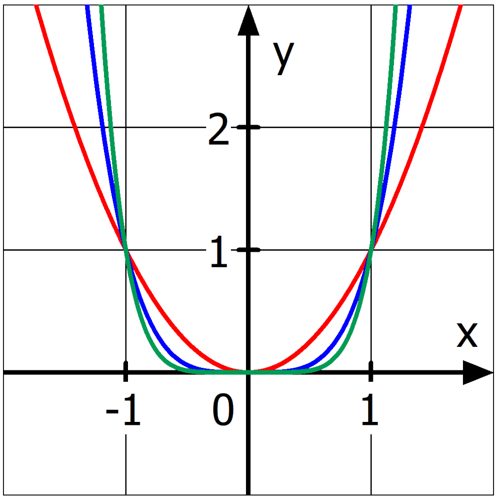
Gerade Hochzahlen: $x^2, \ x^4, \ x^6, \ \dots$

Parabelförmig

Achsensymmetrie zur y-Achse

$$f(x) \xrightarrow{x \to -\infty} \infty$$

$$f(x) \xrightarrow{x \to \infty} \infty$$



Ungerade Hochzahlen (größer 1):

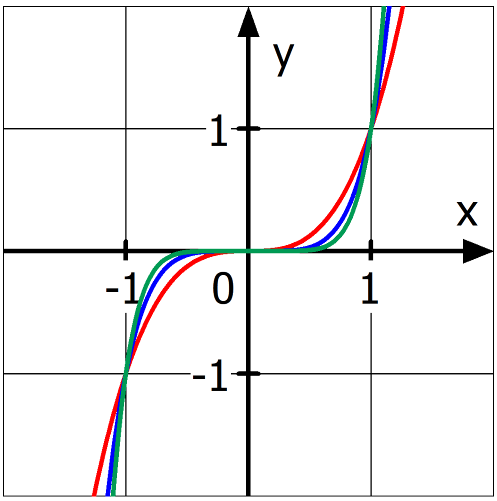
$x^3, \ x^5, \ x^7, \ \dots$

S-förmig

Punktsymmetrie zum Ursprung

$$f(x) \xrightarrow{x \to -\infty} -\infty$$

$$f(x) \xrightarrow{x \to \infty} \infty$$



Übung 24 **Skizziere das Schaubild, gib die Symmetrie sowie das Verhalten für sehr große/kleine x an.**

a) $f(x) = -x^2$

b) $g(x) = 0,5x^3$

c) $h(x) = 2x^6$

d) $i(x) = -\frac{3}{2}x^5$

e) $j(x) = 0,1x^4$

f) $k(x) = -\frac{3}{5}x^7$

g) $l(x) = -\sqrt{2}x^4$

h) $m(x) = 3x^5$

Funktionen, deren Funktionsgleichung man wie folgt darstellen kann, bezeichnet man als ganzrationale Funktionen:

$f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \cdots + a_2x^2 + a_1x + a_0, \quad a_n \neq 0, \quad n \in \mathbb{N}$

Diese Darstellungsform (komplett ausmultipliziert und zusammengefasst) bezeichnet man als Hauptform oder Normalform.

Folgende Begriffe finden für die ganzrationalen Funktionen Verwendung:

- n: Grad der Funktion (größte Hochzahl)
- $a_n,\ a_{n-1},\ a_{n-2}, \ldots,\ a_2,\ a_1,\ a_0$: Koeffizienten
- a_n: Leitkoeffizient (Koeffizient, der vor dem x mit der größten Hochzahl steht)
- a_0: Absolutglied (immer der Koeffizient, der ohne x alleine steht)

Beispiele:

$f(x) = -4x^5 + 3x^4 - \frac{1}{2}x^3 + x - 3$
Grad: 5
Koeffizienten: $a_5 = -4$, $a_4 = 3$, $a_3 = -\frac{1}{2}$, $a_2 = 0$, $a_1 = 1$, $a_0 = -3$
Leitkoeffizient $a_5 = -4$
Absolutglied $a_0 = -3$

$g(x) = x^4 + 2x^3 - 0,5x$
Grad: 4
Koeffizienten: $a_4 = 1$, $a_3 = 2$, $a_2 = 0$, $a_1 = -0,5$, $a_0 = 0$
Leitkoeffizient $a_4 = 1$
Absolutglied $a_0 = 0$

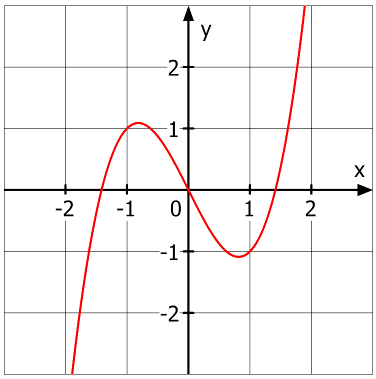
Übung 25 **Gib den Grad, die Koeffizienten, den Leitkoeffizienten sowie das Absolutglied an.**

a) $f(x) = -6x^3 + 2x - 3$
b) $g(x) = 0,5x^5 - 7x^4 + 2,5x$
c) $h(x) = 2x^6$
d) $i(x) = -\frac{3}{2}x^5 - 8x^4 + x^2 - 1$
e) $j(x) = 0,1x^4 - 12x^3 - x^2 + 8,6x - 3,1$
f) $k(x) = -\frac{3}{5}x^7 + \frac{2}{7}x^6 - \frac{11}{6}x^4 - \frac{12}{5}x$
g) $l(x) = 2x\left(x^3 - 2x^2 + 5\right)$
h) $m(x) = -3x^2\left(x + 2\right)^2$

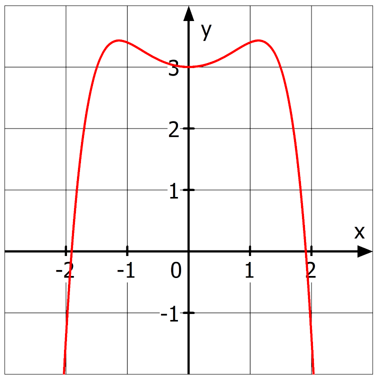
Symmetrie

Wir unterscheiden lediglich zwei Arten von Symmetrien, Achsensymmetrie zur y-Achse sowie Punktsymmetrie zum Ursprung.

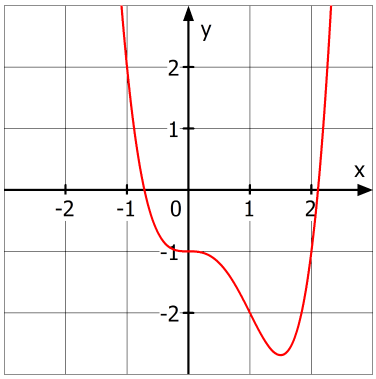
> Das Schaubild einer ganzrationalen Funktion ist…
> …achsensymmetrisch zur y-Achse, wenn alle Hochzahlen gerade oder Null sind.
> …punksymmetrisch zum Ursprung, wenn alle Hochzahlen ungerade sind.
> …weder achsensymmetrisch zur y-Achse noch punktsymmetrisch zum Ursprung, wenn die Hochzahlen eine Mischung aus geraden Hochzahlen oder Null und ungeraden Hochzahlen sind.



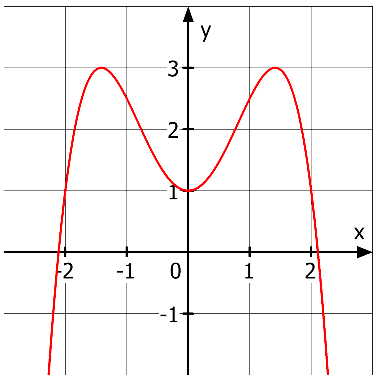
$f_1(x) = x^3 - 2x$



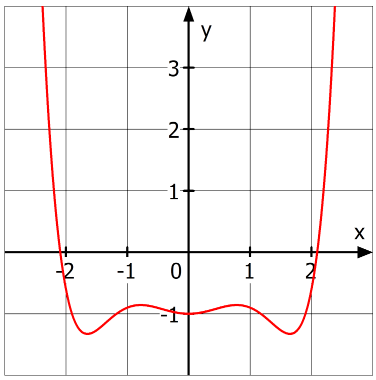
$f_2(x) = -0,1x^6 + 0,5x^2 + 3$



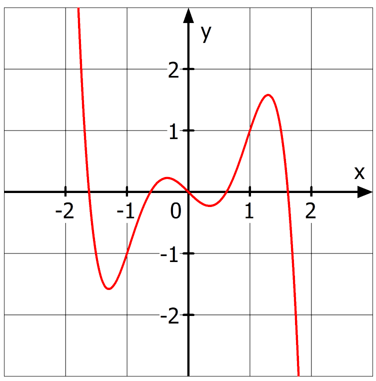
$f_3(x) = x^4 - 2x^3 - 1$



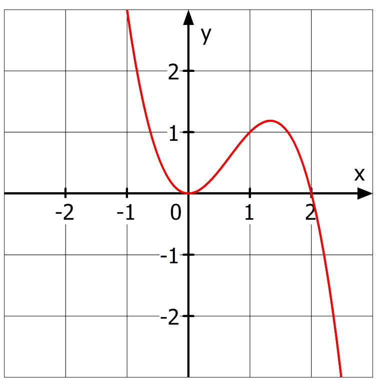
$f_4(x) = -\frac{1}{2}x^4 + 2x^2 + 1$



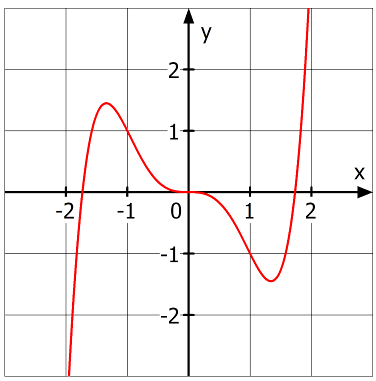
$f_5(x) = \frac{1}{10}x^6 - \frac{1}{2}x^4 + \frac{1}{2}x^2 - 1$



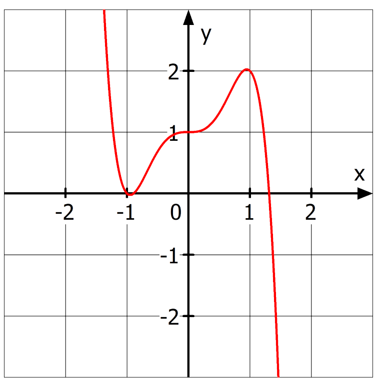
$f_6(x) = -x^5 + 3x^3 - x$



$f_7(x) = -x^3 + 2x^2$



$f_8(x) = \frac{1}{2}x^5 - \frac{3}{2}x^3$



$f_9(x) = -2x^5 + 3x^3 + 1$

Die Schaubilder von $f_2(x)$, $f_4(x)$ und $f_5(x)$ sind achsensymmetrisch zur y-Achse.
Die Schaubilder von $f_1(x)$, $f_6(x)$ und $f_8(x)$ sind punktsymmetrisch zum Ursprung.
Die Schaubilder von $f_3(x)$, $f_7(x)$ und $f_9(x)$ haben keine der beiden Symmetrien.

Übung 26 Untersuche auf Symmetrie

a) $f(x) = -6x^3 + 2x - 3$

b) $g(x) = 0,5x^5 + x^3 + 2,5x$

c) $h(x) = 2x^6 - 3x^2 + 1$

d) $i(x) = -\frac{3}{2}x^5 - 8x^4 + x^2 - 1$

e) $j(x) = -0,3x^6 - 12x^4 - x^2 - 3,1$

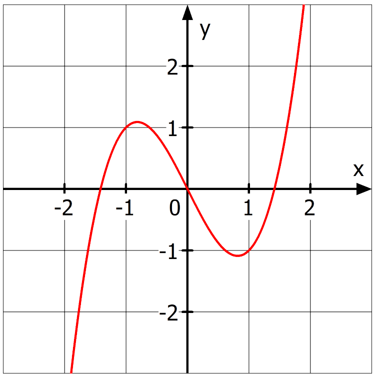
f) $k(x) = -\frac{3}{5}x^7 + \frac{2}{7}x^5 - \frac{11}{6}x^3 - \frac{12}{5}x$

g) $l(x) = -2x^3\left(x^2 - 2x + 5\right)$

h) $m(x) = 3x\left(x - 3\right)^2 + 18x^2$

Verhalten für $x \to \pm\infty$

> Eine ganzrationale Funktion $f(x)$ verhält sich für sehr große bzw. sehr kleine x wie
> Leitkoeffizient $\cdot\, x^{\text{Grad}}$

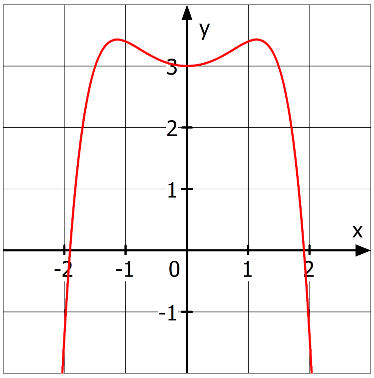


$f_1(x) = x^3 - 2x$

$f_1(x) \xrightarrow{x\to-\infty} -\infty$

$f_1(x) \xrightarrow{x\to\infty} \infty$

Verhält sich wie x^3

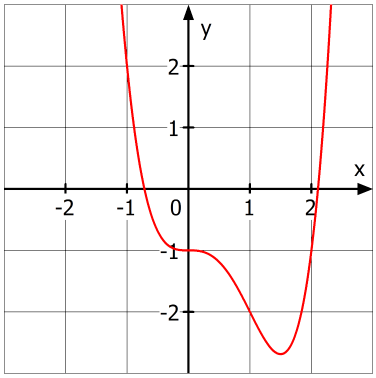


$f_2(x) = -0,1x^6 + 0,5x^2 + 3$

$f_2(x) \xrightarrow{x\to-\infty} -\infty$

$f_2(x) \xrightarrow{x\to\infty} -\infty$

Verhält sich wie $-0,1x^6$

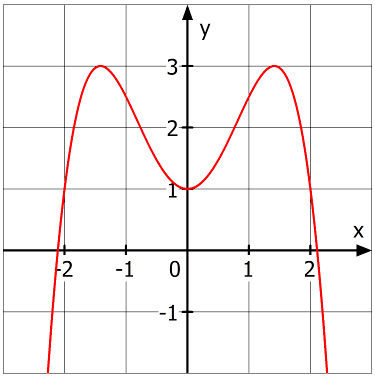


$f_3(x) = x^4 - 2x^3 - 1$

$f_3(x) \xrightarrow{x\to-\infty} \infty$

$f_3(x) \xrightarrow{x\to\infty} \infty$

Verhält sich wie x^4

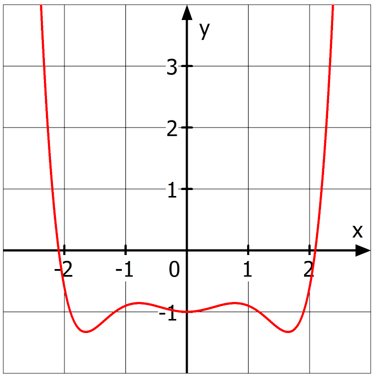


$f_4(x) = -\frac{1}{2}x^4 + 2x^2 + 1$

$f_4(x) \xrightarrow{x\to-\infty} -\infty$

$f_4(x) \xrightarrow{x\to\infty} -\infty$

Verhält sich wie $-\frac{1}{2}x^4$

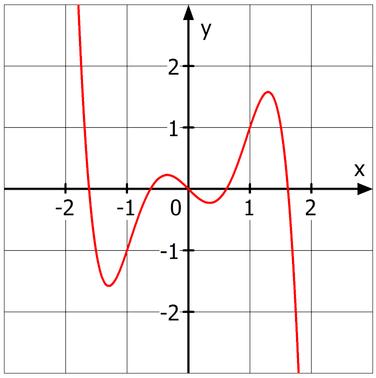


$f_5(x) = \frac{1}{10}x^6 - \frac{1}{2}x^4 + \frac{1}{2}x^2 - 1$

$f_5(x) \xrightarrow{x\to-\infty} \infty$

$f_5(x) \xrightarrow{x\to\infty} \infty$

Verhält sich wie $\frac{1}{10}x^6$

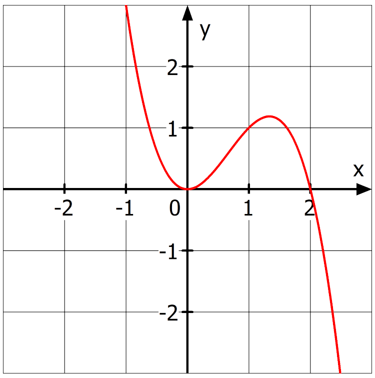


$f_6(x) = -x^5 + 3x^3 - x$

$f_6(x) \xrightarrow{x\to-\infty} \infty$

$f_6(x) \xrightarrow{x\to\infty} -\infty$

Verhält sich wie $-x^5$

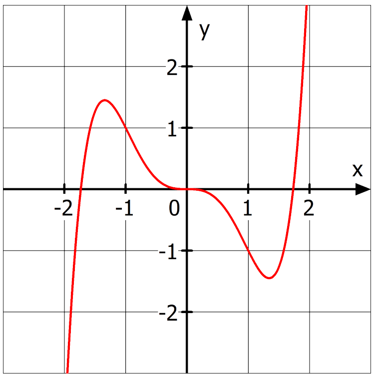


$f_7(x) = -x^3 + 2x^2$

$f_7(x) \xrightarrow{x\to-\infty} \infty$

$f_7(x) \xrightarrow{x\to\infty} -\infty$

Verhält sich wie $-x^3$

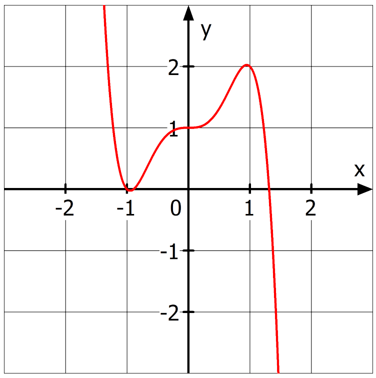


$f_8(x) = \frac{1}{2}x^5 - \frac{3}{2}x^3$

$f_8(x) \xrightarrow{x\to-\infty} -\infty$

$f_8(x) \xrightarrow{x\to\infty} \infty$

Verhält sich wie $\frac{1}{2}x^5$



$f_9(x) = -2x^5 + 3x^3 + 1$

$f_9(x) \xrightarrow{x\to-\infty} \infty$

$f_9(x) \xrightarrow{x\to\infty} -\infty$

Verhält sich wie $-2x^5$

Übung 27 Gib das Verhalten für $x \to \pm\infty$ an

a) $f(x) = 3x^3 + 2x - 3$

b) $g(x) = -2,5x^5 + 5x^3 + 2,5x^2$

c) $h(x) = 2x^6 - 3x^2 - 14x + 1$

d) $i(x) = -\frac{3}{5}x^5 + 2x^4 + x^2 - 1$

e) $j(x) = -0,3x^6 - x^4 + 2x^2 - 5,8$

f) $k(x) = -\frac{7}{5}x^7 + \frac{8}{7}x^6 - \frac{11}{6}x^2 - \frac{12}{5}x$

g) $l(x) = x\left(-x^3 + 2x^2 + 5\right)$

h) $m(x) = 5x^2\left(x - 1\right)^2$

Für die meisten ganzrationalen Funktionen lassen sich die Nullstellen nicht exakt bestimmen, es sei denn die Funktionsgleichung hat eine bestimmte Form. Wir werden drei neue Verfahren zum Bestimmen von Nullstellen bzw. Lösen von Gleichungen kennen lernen. Doch zuerst ein wichtiger Satz zur Anzahl der Nullstellen:

Eine ganzrationale Funktion $f(x)$ vom Grad n hat **maximal** n Nullstellen.

0. Mitternachtsformel

Die Mitternachtsformel zum Lösen von quadratischen Gleichungen kennen wir bereits.

1. Nach x^n auflösen und Wurzelziehen

Dieses Verfahren kann nur dann angewendet werden, wenn die Gleichung auf folgende Form gebracht werden kann: $ax^n + b = 0$

Wir lösen nach x^n auf, d.h. x^n steht alleine auf einer Seite. Dann ziehen wir die n-te Wurzel $\sqrt[n]{}$.

Beispiel: Bestimme die Nullstelle der Funktion $f(x) = 2x^3 + 16$.

$$\begin{aligned} 2x^3 + 16 &= 0 \mid -16 \\ 2x^3 &= -16 \mid :2 \\ x^3 &= -8 \mid \sqrt[3]{} \\ x &= \sqrt[3]{-8} \\ x_1 &= -2 \end{aligned}$$

Zur Anwendung höherer Wurzeln siehe den folgenden Einschub.

2. Möglichst viele x Vorklammern und SvN

Dieses Verfahren kann nur dann angewendet werden, wenn jeder Summand über mindestens ein x verfügt. Wir klammern so viele x wie möglich vor (kleinste Hochzahl) und wenden dann den Satz vom Nullprodukt an.

Beispiel: Bestimme die Nullstelle der Funktion $f(x) = 2x^4 - 10x^3 + 12x^2$.

$$\begin{aligned} 2x^4 - 10x^3 + 12x^2 &= 0 \\ x^2\left(2x^2 - 10x + 12\right) &= 0 \\ \text{SvN: Entweder } x_1 = 0 \text{ oder } 2x^2 - 10x + 12 &= 0 \\ x_{2/3} = \frac{10 \pm \sqrt{100 - 4 \cdot 2 \cdot 12}}{2 \cdot 2} &= \frac{10 \pm 2}{4} \\ x_2 = 2, \quad x_3 &= 3 \end{aligned}$$

3. Substitution hin zu einer quadratischen Gleichung

Der Begriff Substitution kommt aus dem Lateinischen und bedeutet Ersetzen oder Austauschen. Dieses Verfahren kann nur dann angewendet werden, wenn der Funktionsterm von der Form $ax^{2n} + bx^n + c$ ist, d.h. es müssen drei Summanden sein, einer ohne x und bei den beiden anderen muss die eine Hochzahl doppelt so groß sein wie die andere Hochzahl.

Wir ersetzen immer das x mit der kleineren Hochzahl durch eine andere Variable, meist z genannt.

Beispiel: Bestimme die Nullstelle der Funktion $f(x) = 2x^4 - 4x^2 - 16$.

$$2x^4 - 4x^2 - 16 = 0 \mid \text{Sub. } x^2 = z$$

$$2z^2 - 4z - 16 = 0$$

$$z_{1/2} = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 4 \cdot 2 \cdot (-16)}}{2 \cdot 2} = \frac{4 \pm 12}{4}$$

$$z_1 = 4, \quad z_2 = -2$$

$$\text{Rücksub.: } z_1: \ x^2 = 4 \mid \sqrt{\ } \qquad z_2: \ x^2 = -2 \ ↯$$

$$x_{1/2} = \pm 2$$

Übung 28 Berechne die Nullstellen

a) $f(x) = x^3 - 2x^2 - 8x$

b) $f(x) = x^4 - 20x^2 + 64$

c) $f(x) = x^4 - 256$

d) $f(x) = \frac{1}{2}x^4 - x^3 - \frac{3}{2}x^2$

e) $f(x) = 2x^4 - 6x^2 - 8$

f) $f(x) = \frac{x^5}{125} + 25$

g) $f(x) = 3x^6 - 27x^3 + 24$

h) $f(x) = 3x^5 - 3x^4 - 18x^3$

i) $f(x) = -2x^4 + 2x^3 - 4x^2$

j) $f(x) = 2x^3 + \frac{27}{4}$

k) $f(x) = 16x^4 - \frac{81}{256}$

l) $f(x) = 125x^3 + 27$

m) $f(x) = \frac{1}{8}x^7 - \frac{19}{8}x^4 - 27x$

n) $f(x) = 0,5x^4 - 5x^3 + 12,5x^2$

o) $f(x) = 3x^4 - 15x^2 + 18$

p) $f(x) = 10x^{10} - 10$

q) $f(x) = 1024 - 243x^5$

r) $f(x) = -x^6 + 7x^3 + 8$

s) $f(x) = \frac{1}{3}x^6 - \frac{1}{60}x^5 - \frac{1}{60}x^4$

t) $f(x) = 8x^6 - 637x^3 + 8000$

u) $f(x) = 4096x^9 + 16774815x^5 - 9834496x$

v) $f(x) = 108x^6 + 697x^3 - 216$

w) $f(x) = 16 - 625x^4$

x) $f(x) = 27x^4 + 6x^2 - 1$

y) $f(x) = 144x^4 - 337x^2 + 144$

z) $f(x) = 4x^6 + 15x^4 - 4x^2$

Hat eine ganzrationale Funktion $f(x)$ vom Grad n genauso viele Nullstellen wie ihr Grad, so kann man sie in der Produktform darstellen:
$f(x) = a\,(x - x_1)^{n_1}\,(x - x_2)^{n_2}\,(x - x_3)^{n_3}\cdots, \quad a \neq 0, \quad n_1,\ n_2,\ n_3, \ldots \in \mathbb{N}$
Wie auch bei der Produktform der quadratischen Funktionen lassen sich die Nullstellen einfach ablesen. Auch der Leitkoeffizient und der Grad lassen sich leicht bestimmen:

- $x_1,\ x_2,\ x_3, \ldots$: Nullstellen der Funktion
- $n_1,\ n_2,\ n_3, \ldots$: Zu den Nullstellen gehörige Vielfachheiten (VFH) der Nullstellen
- a: Leitkoeffizient
- $n_1 + n_2 + n_3 + \cdots$: Die Summe der Vielfachheiten der Nullstellen (oder Anzahl der Nullstellen) entspricht dem Grad der Funktion

Beispiele:

$f(x) = -4\,(x+3)^2\,(x+1)^3\,(x-2)$

NST	VFH
$x_1 = -3$	2
$x_2 = -1$	3
$x_3 = 2$	1

Grad: $2 + 3 + 1 = 6$
Leitkoeffizient $a = -4$

$g(x) = 2\,(x+4)\,(x+2)^3\,x^2\,(x-3)^2$

NST	VFH
$x_1 = -4$	1
$x_2 = -2$	3
$x_3 = 0$	2
$x_4 = 3$	2

Grad: $1 + 3 + 2 + 2 = 8$
Leitkoeffizient $a = 2$

$h(x) = \frac{1}{2}\left(x + \frac{3}{2}\right)^4 \left(x + \frac{3}{4}\right)(x-3)^2$

NST	VFH
$x_1 = -\frac{3}{2}$	4
$x_2 = -\frac{3}{4}$	1
$x_3 = 3$	2

Grad: $4 + 1 + 2 = 7$
Leitkoeffizient $a = \frac{1}{2}$

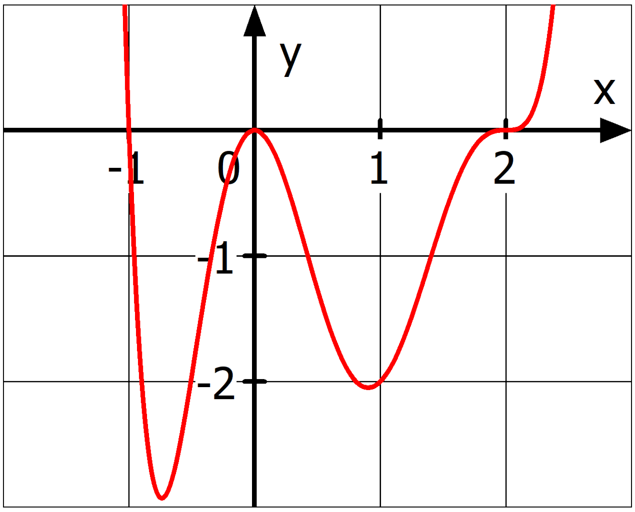
$i(x) = -0,5\,(x+3,5)^2\,(x+1,5)^2\,x\,(x-3,8)^3$

NST	VFH
$x_1 = -3,5$	2
$x_2 = -1,5$	2
$x_3 = 0$	1
$x_4 = 3,8$	3

Grad: $2 + 2 + 1 + 3 = 8$
Leitkoeffizient $a = -0,5$

Produktform

Wir nutzen die Produktform, um Schaubilder zu skizzieren und um ausgehend vom Schaubild die Funktionsgleichung aufzustellen. Die Vielfachheit der Nullstellen gibt an, wie das Schaubild **in der Nähe** der Nullstelle verläuft.

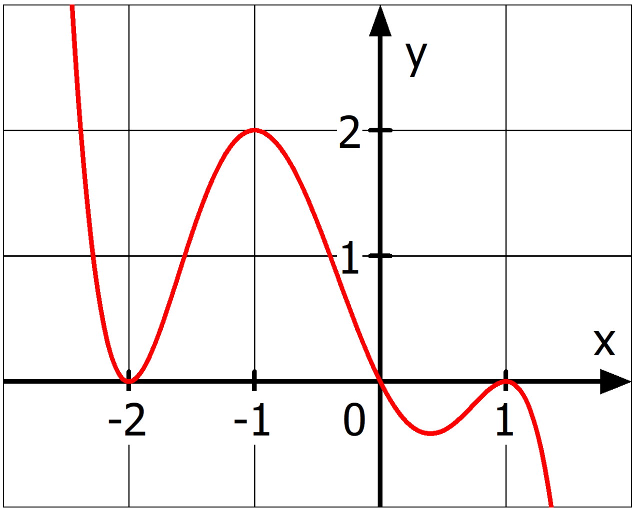


Beispiel 1: $f_1(x) = (x+1)x^2(x-2)^3$

NST	VFH	Verlauf
$x_1 = -1$	1	wie Gerade
$x_2 = 0$	2	Parabelförmig
$x_3 = 2$	3	S-förmig

Grad: $1+2+3=6$

Leitkoeffizient $a=1$

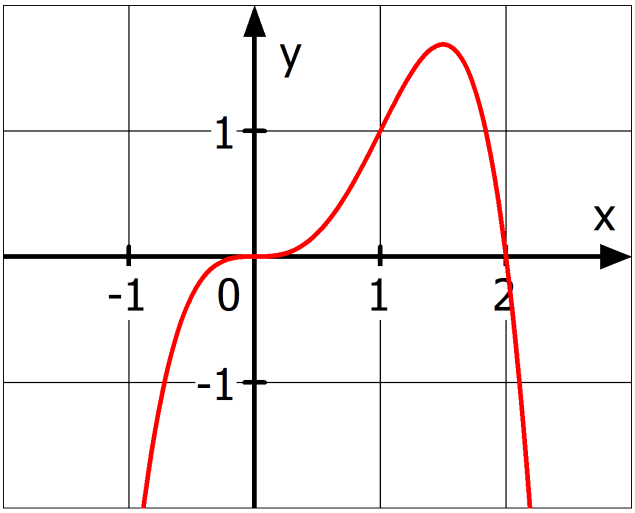


Beispiel 2: $f_2(x) = -0,5(x+2)^2x(x-1)^2$

NST	VFH	Verlauf
$x_1 = -2$	2	Parabelförmig
$x_2 = 0$	1	wie Gerade
$x_3 = 1$	3	Parabelförmig

Grad: $2+1+2=2$

Leitkoeffizient $a=-0,5$



Beispiel 3: $f_3(x) = -x^3(x-2)$

NST	VFH	Verlauf
$x_1 = 0$	1	S-förmig
$x_2 = 2$	2	wie Gerade

Grad: $3+1=4$

Leitkoeffizient $a=-1$

Umgekehrt können wir ausgehend vom Schaubild die Funktionsgleichung aufstellen. Sind keine zusätzlichen Angaben zu den Vielfachheiten der Nullstellen gegeben, so probieren wir immer die kleinste mögliche Vielfachheit aus. Damit lässt sich dann die Funktionsgleichung mit Ausnahme des Leitkoeffizienten bestimmen. Dieser lässt sich mit einer Punktprobe berechnen.

Beispiel 1:

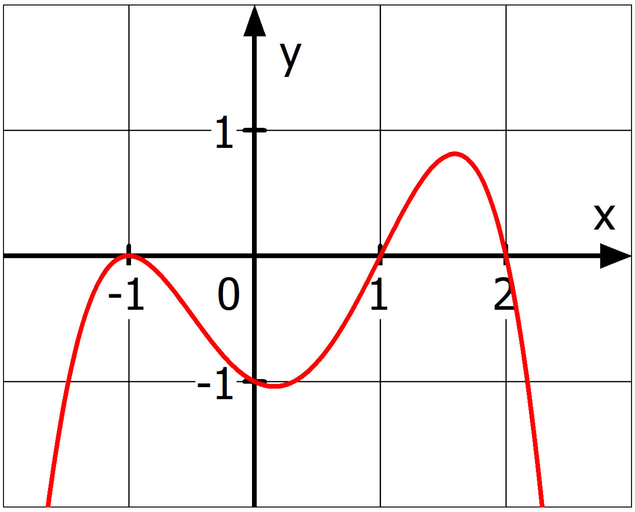
NST	Verlauf	VFH
$x_1 = -1$	Parabelförmig	gerade
$x_2 = 1$	wie Gerade	1
$x_3 = 2$	wie Gerade	1

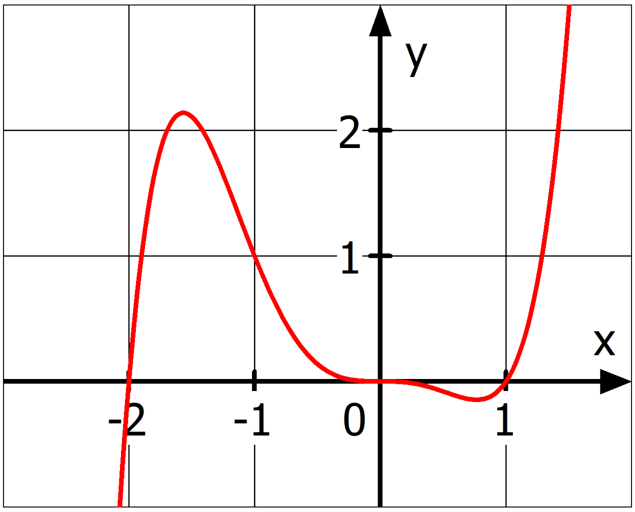
Nehmen wir für die erste Nullstelle die kleinste mögliche Vielfachheit, also 2, so ergibt sich

$f_1(x) = a\,(x+1)^2\,(x-1)\,(x-2)$

Eine Punktprobe mit $P(0|-1)$, also $f_1(0) = -1$ ergibt $a = -0,5$ und damit

$f_1(x) = -0,5\,(x+1)^2\,(x-1)\,(x-2)$





Beispiel 2:

NST	Verlauf	VFH
$x_1 = -2$	wie Gerade	1
$x_2 = 0$	S-förmig	$3,\ 5,\ \ldots$
$x_3 = 1$	wie Gerade	1

Nehmen wir für die zweite Nullstelle die kleinste mögliche Vielfachheit, also 3, so ergibt sich

$f_2(x) = a\,(x+2)\,x^3\,(x-1)$

Eine Punktprobe mit $P(-1|1)$, also $f_1(-1) = 1$ ergibt $a = 0,5$ und damit

$f_2(x) = 0,5\,(x+2)\,x^3\,(x-1)$

Beispiel 3:

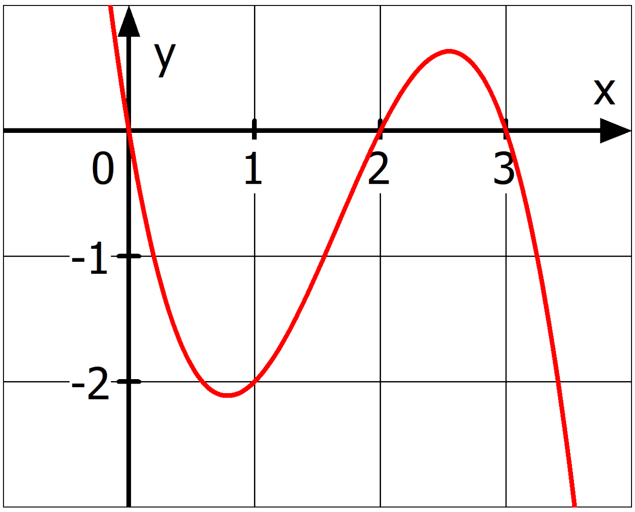
NST	Verlauf	VFH
$x_1 = 0$	wie Gerade	1
$x_2 = 2$	wie Gerade	1
$x_3 = 3$	wie Gerade	1

Es ergibt sich aus den Nullstellen:

$f_3(x) = ax\,(x-2)\,(x-3)$

Eine Punktprobe mit $P(1|-2)$, also $f_1(1) = -2$ ergibt $a = -1$ und damit

$f_3(x) = -x\,(x-2)\,(x-3)$



Übung 29 Skizziere das Schaubild

a) $f(x) = 0,1\,(x+3)^2\,(x+1)\,(x-1)^3$

b) $g(x) = -\frac{1}{5}\,(x+4)\,(x+3)\,(x+1)\,x^2$

c) $h(x) = -\,(x+1)^3\,(x-1)^2\,(x-2)$

d) $i(x) = \frac{1}{3}x^2\,(x+1)\,(x-2)\,(x-3)^2$

e) $j(x) = \frac{1}{5}\,(x+2)\,x\,(x-2)^2$

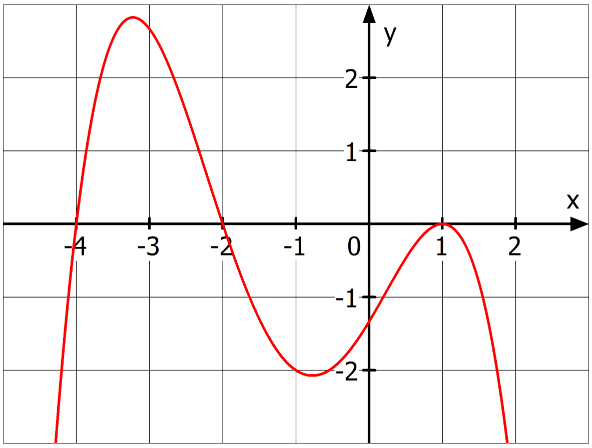
f) $k(x) = -x^3\,(x-2)^2$

g) $l(x) = \frac{1}{10}\,(x+4)^2\,x^2$

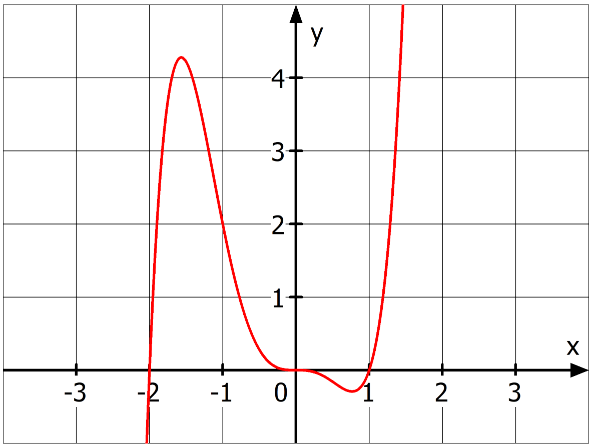
h) $m(x) = -\frac{3}{35}\,(x+5)\,(x+4)^2\,(x+2)\,x$

Übung 30 Stelle die Funktionsgleichung auf. Verwende jeweils die kleinstmögliche Vielfachheit.

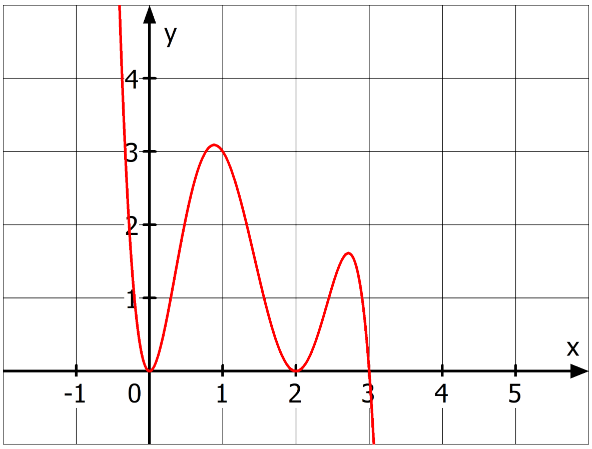
a)



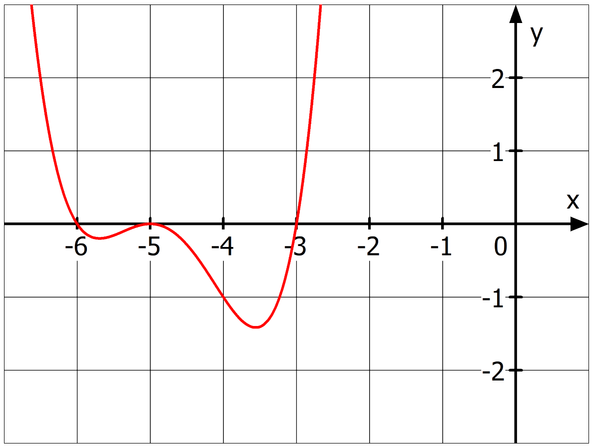
b)



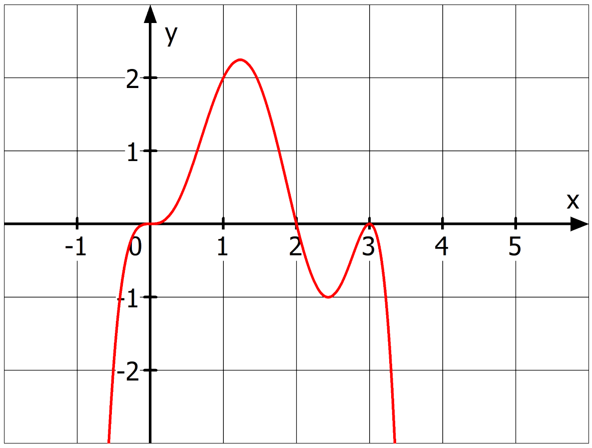
c)



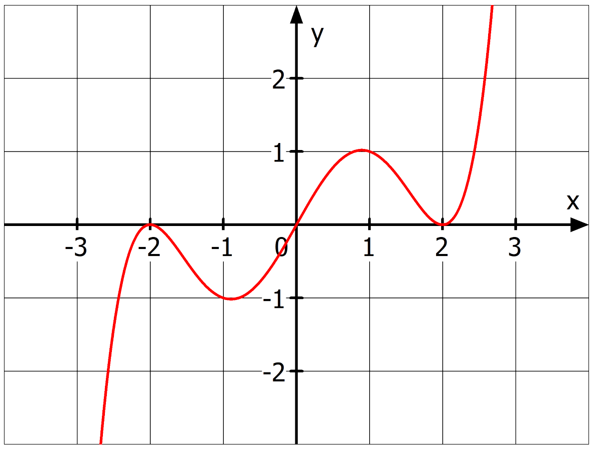
d)



e)



f)



Lösung zu Übung 24

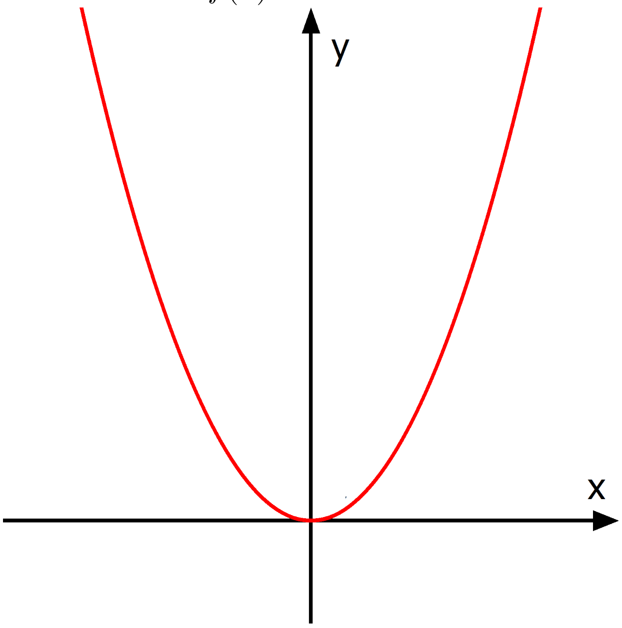
Man muss nur das Vorzeichen des Streckfaktors a beachten sowie ob die Hochzahl gerade oder ungerade ist:

a positiv und n gerade wie $h(x)$ und $j(x)$

Parabelförmig

Achsensymmetrie zur y-Achse

$$f(x) \xrightarrow{x\to-\infty} \infty$$
$$f(x) \xrightarrow{x\to\infty} \infty$$

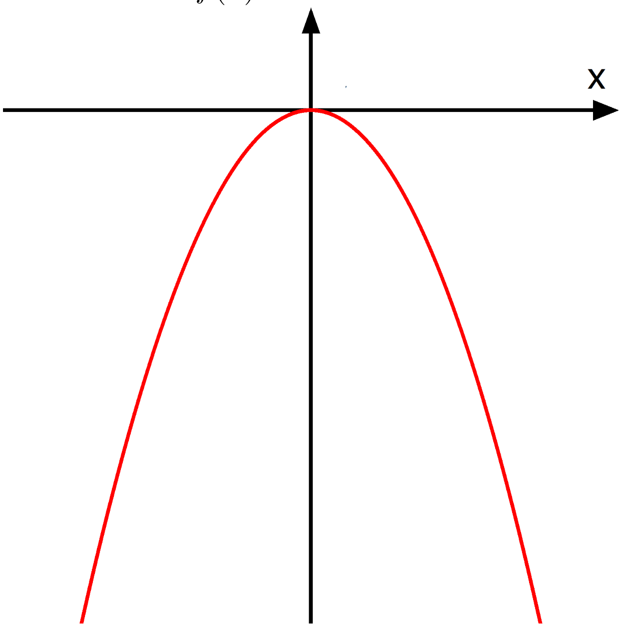


a negativ und n gerade wie $f(x)$ und $l(x)$

Parabelförmig

Achsensymmetrie zur y-Achse

$$f(x) \xrightarrow{x\to-\infty} -\infty$$
$$f(x) \xrightarrow{x\to\infty} -\infty$$

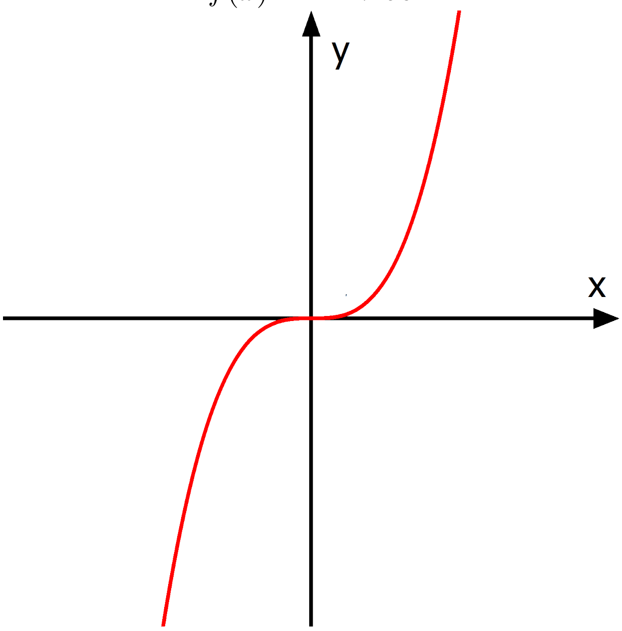


a positiv und n ungerade wie $g(x)$ und $m(x)$

S-förmig

Punktsymmetrie zum Ursprung

$$f(x) \xrightarrow{x\to-\infty} -\infty$$
$$f(x) \xrightarrow{x\to\infty} \infty$$

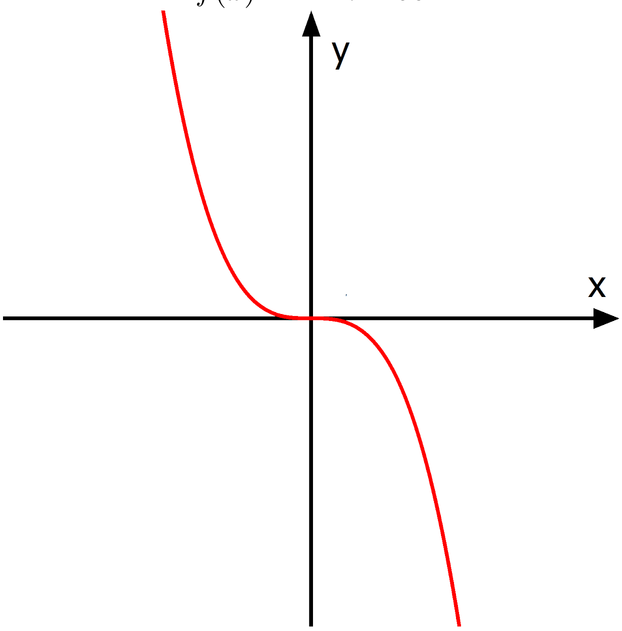


a negativ und n ungerade wie $i(x)$ und $k(x)$

S-förmig

Punktsymmetrie zum Ursprung

$$f(x) \xrightarrow{x\to-\infty} \infty$$
$$f(x) \xrightarrow{x\to\infty} -\infty$$



Lösung zu Übung 25

a) Grad: 3
Koeffizienten: $a_3 = -6$, $a_2 = 0$, $a_1 = 2$, $a_0 = -3$
Leitkoeffizient $a_3 = -6$
Absolutglied $a_0 = -3$

b) Grad: 5
Koeffizienten: $a_5 = 0,5$, $a_4 = -7$, $a_3 = 0$, $a_2 = 0$, $a_1 = 2,5$, $a_0 = 0$
Leitkoeffizient $a_5 = 0,5$
Absolutglied $a_0 = 0$

c) Grad: 6
Koeffizienten: $a_6 = 2$, $a_5 = 0$, $a_4 = 0$, $a_3 = 0$, $a_2 = 0$, $a_1 = 0$, $a_0 = 0$
Leitkoeffizient $a_6 = 2$
Absolutglied $a_0 = 0$

d) Grad: 5
Koeffizienten: $a_5 = -\frac{3}{2}$, $a_4 = -8$, $a_3 = 0$, $a_2 = 1$, $a_1 = 0$, $a_0 = -1$
Leitkoeffizient $a_5 = -\frac{3}{2}$
Absolutglied $a_0 = -1$

e) Grad: 4
Koeffizienten: $a_4 = 0,1$, $a_3 = -12$, $a_2 = -1$, $a_1 = 8,6$, $a_0 = -3,1$
Leitkoeffizient $a_4 = 0,1$
Absolutglied $a_0 = -3,1$

f) Grad: 7
Koeffizienten: $a_7 = -\frac{3}{5}$, $a_6 = \frac{2}{7}$, $a_5 = 0$, $a_4 = -\frac{11}{6}$, $a_3 = 0$, $a_2 = 0$, $a_1 = -\frac{12}{5}$, $a_0 = 0$
Leitkoeffizient $a_7 = -\frac{3}{5}$
Absolutglied $a_0 = 0$

g) $l(x) = 2x\left(x^3 - 2x^2 + 5\right) = 2x^4 - 4x^3 + 10x$
Grad: 4
Koeffizienten: $a_4 = 2$, $a_3 = -4$, $a_2 = 0$, $a_1 = 10$, $a_0 = 0$
Leitkoeffizient $a_4 = 2$
Absolutglied $a_0 = 0$

h) $m(x) = -3x^2\left(x+2\right)^2$
$= -3x^4 - 12x^3 - 12x^2$
Grad: 4
Koeffizienten: $a_4 = -3$, $a_3 = -12$, $a_2 = -12$,
$a_1 = 0$, $a_0 = 0$
Leitkoeffizient $a_4 = -3$
Absolutglied $a_0 = 0$

Lösung zu Übung 26

a) Hochzahlen: 3, 1, 0
Keine der beiden Symmetrien.

b) Hochzahlen: 5, 3, 1
Punktsymmetrie zum Ursprung.

c) Hochzahlen: 6, 2, 0
Achsensymmetrie zur y-Achse

d) Hochzahlen: 5, 4, 2, 0
Keine der beiden Symmetrien.

e) Hochzahlen: 6, 4, 2, 0
Achsensymmetrie zur y-Achse

f) Hochzahlen: 7, 5, 3, 1
Punktsymmetrie zum Ursprung.

g) $l(x) = -2x^3\left(x^2 - 2x + 5\right)$
$= -2x^5 + 4x^4 - 10x^3$
Hochzahlen: 5, 4, 3
Keine der beiden Symmetrien.

h) $m(x) = 3x\left(x-3\right)^2 + 18x^2 = 3x^3 + 27x$
Hochzahlen: 3, 1
Punktsymmetrie zum Ursprung.

Lösung zu Übung 27

a) Verhält sich wie $3x^3$
$f(x) \xrightarrow{x\to-\infty} -\infty$
$f(x) \xrightarrow{x\to\infty} \infty$

b) Verhält sich wie $-2,5x^5$
$g(x) \xrightarrow{x\to-\infty} \infty$
$g(x) \xrightarrow{x\to\infty} -\infty$

c) Verhält sich wie $2x^6$
$h(x) \xrightarrow{x\to-\infty} \infty$
$h(x) \xrightarrow{x\to\infty} \infty$

d) Verhält sich wie $-\frac{3}{5}x^5$
$i(x) \xrightarrow{x\to-\infty} \infty$
$i(x) \xrightarrow{x\to\infty} -\infty$

e) Verhält sich wie $-0,3x^6$
$j(x) \xrightarrow{x\to-\infty} -\infty$
$j(x) \xrightarrow{x\to\infty} -\infty$

f) Verhält sich wie $-\frac{7}{5}x^7$
$k(x) \xrightarrow{x\to-\infty} \infty$
$k(x) \xrightarrow{x\to\infty} -\infty$

g) $l(x) = x\left(-x^3 + 2x^2 + 5\right) = -x^4 + 2x^3 + 5x$
Verhält sich wie $-x^4$
$l(x) \xrightarrow{x\to-\infty} -\infty$
$l(x) \xrightarrow{x\to\infty} -\infty$

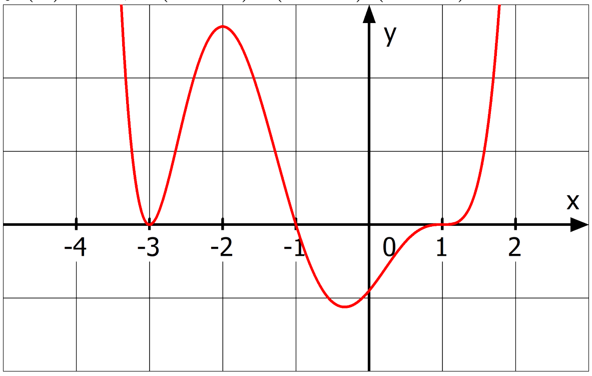
h) $m(x) = 5x^2\left(x-1\right)^2 = 5x^4 - 10x^3 + 5x^2$
Verhält sich wie $5x^4$
$m(x) \xrightarrow{x\to-\infty} \infty$
$m(x) \xrightarrow{x\to\infty} \infty$

Lösung zu Übung 28

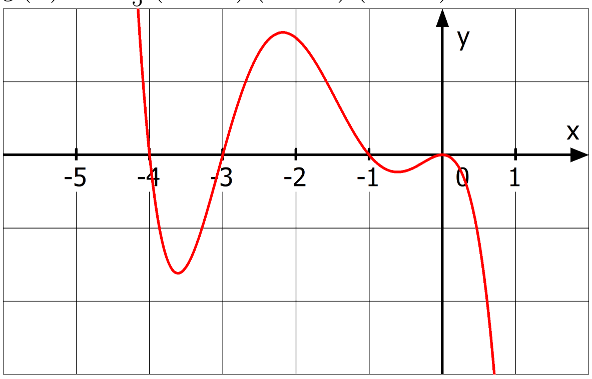
a) $x_1 = 0,\ x_2 = -2,\ x_3 = 4$
b) $x_{1/2} = \pm 2,\ x_{3/4} = \pm 4$
c) $x_{1/2} = \pm 4$
d) $x_1 = 0,\ x_2 = -1,\ x_3 = 3$
e) $x_{1/2} = \pm 2$
f) $x_1 = -5$
g) $x_1 = 1,\ x_2 = 2$
h) $x_1 = 0,\ x_2 = -2,\ x_3 = 3$
i) $x_1 = 0$
j) $x_1 = -\frac{3}{2}$
k) $x_{1/2} = \pm\frac{3}{8}$
l) $x_1 = -\frac{3}{5}$
m) $x_1 = 0,\ x_2 = -2,\ x_3 = 3$
n) $x_1 = 0,\ x_2 = 5$
o) $x_{1/2} = \pm\sqrt{2},\ x_{3/4} = \pm\sqrt{3}$
p) $x_{1/2} = \pm 1$
q) $x_1 = \frac{3}{4}$
r) $x_1 = -1,\ x_2 = 2$
s) $x_1 = 0,\ x_2 = \frac{1}{4},\ x_3 = -\frac{1}{5}$
t) $x_1 = 4,\ x_2 = \frac{5}{2}$
u) $x_1 = 0,\ x_{2/3} = \pm\frac{7}{8}$
v) $x_1 = \frac{2}{3},\ x_2 = -\frac{3}{\sqrt[3]{4}}$
w) $x_{1/2} = \pm\frac{2}{5}$
x) $x_{1/2} = \pm\frac{1}{3}$
y) $x_{1/2} = \pm\frac{3}{4},\ x_{3/4} = \pm\frac{4}{3}$
z) $x_1 = 0,\ x_{2/3} = \pm\frac{1}{2}$

Lösung zu Übung 29

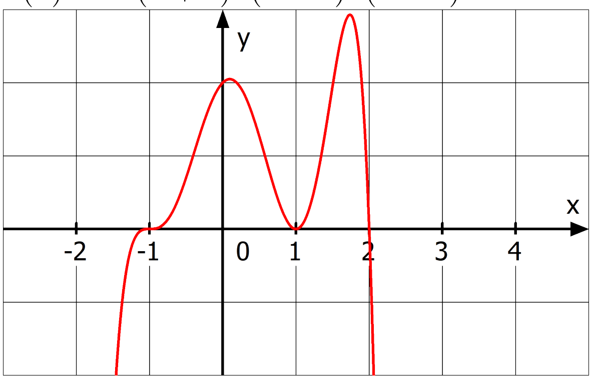
a) $f(x) = 0,1\,(x+3)^2\,(x+1)\,(x-1)^3$



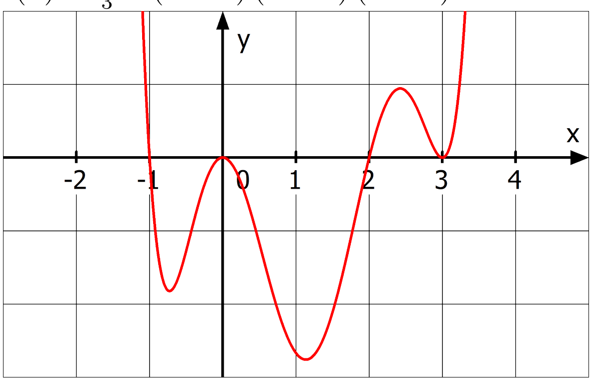
b) $g(x) = -\frac{1}{5}\,(x+4)\,(x+3)\,(x+1)\,x^2$



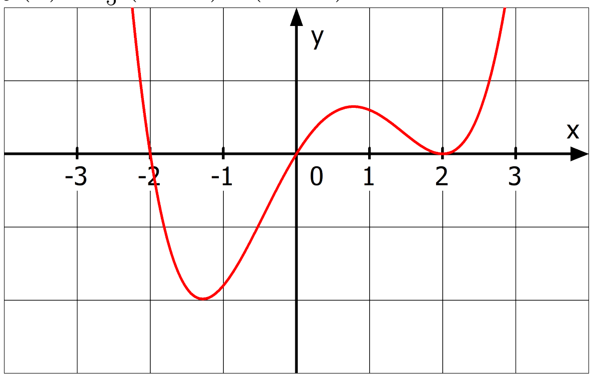
c) $h(x) = -\,(x+1)^3\,(x-1)^2\,(x-2)$



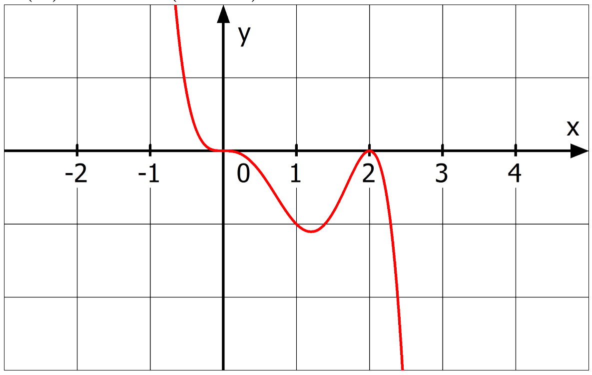
d) $i(x) = \frac{1}{3}x^2\,(x+1)\,(x-2)\,(x-3)^2$



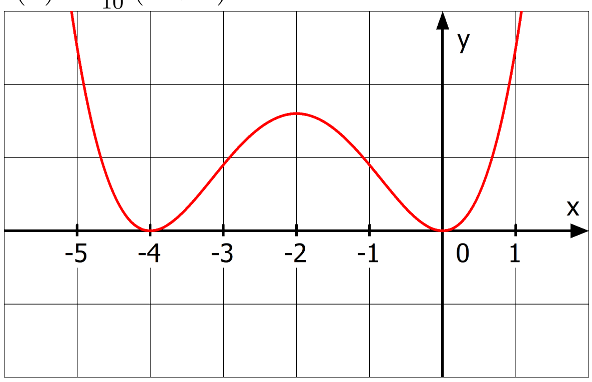
e) $j(x) = \frac{1}{5}\,(x+2)\,x\,(x-2)^2$



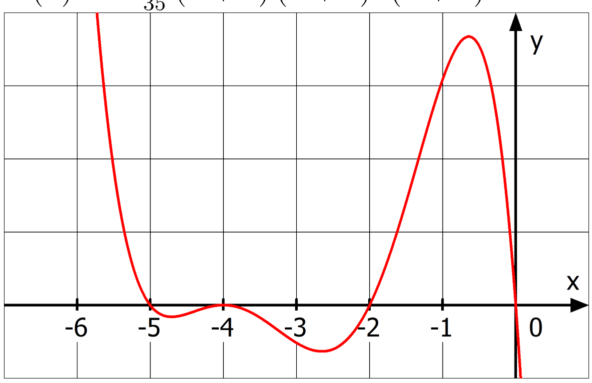
f) $k(x) = -x^3\,(x-2)^2$



g) $l(x) = \frac{1}{10}\,(x+4)^2\,x^2$



h) $m(x) = -\frac{3}{35}\,(x+5)\,(x+4)^2\,(x+2)\,x$



Lösung zu Übung 30

a) $f_a(x) = -\frac{1}{6}(x+4)(x+2)(x-1)^2$

b) $f_b(x) = (x+2)\,x^3\,(x-1)$

c) $f_c(x) = -\frac{3}{2}x^2(x-2)^2(x-3)$

d) $f_d(x) = \frac{1}{2}(x+6)(x+5)^2(x+3)$

e) $f_e(x) = -\frac{1}{2}x^3(x-2)(x-3)^2$

f) $f_f(x) = \frac{1}{9}(x+2)^2\,x\,(x-2)^2$

Die Anzahl der Bakterien in einer Petrischale verdoppelt sich jede Stunde (bis die komplette Schale mit Bakterien bedeckt ist). Zu Beginn sind 10 Bakterien auf der Schale. Vervollständige die Tabelle:

x	0	1	2	3	4	5	6
$f(x)$	10 $10 \cdot 2^0$	20 $10 \cdot 2^1$	40 $10 \cdot 2^2$	80 $10 \cdot 2^3$	160 $10 \cdot 2^4$	320 $10 \cdot 2^5$	640 $10 \cdot 2^6$

$$f(x) = 10 \cdot 2^x$$

Wie viele Bakterien sind nach 20h und nach 100h vorhanden?

Da x die Zeit in Stunden angibt, setzt man einfach die angegebenen Werte ein:

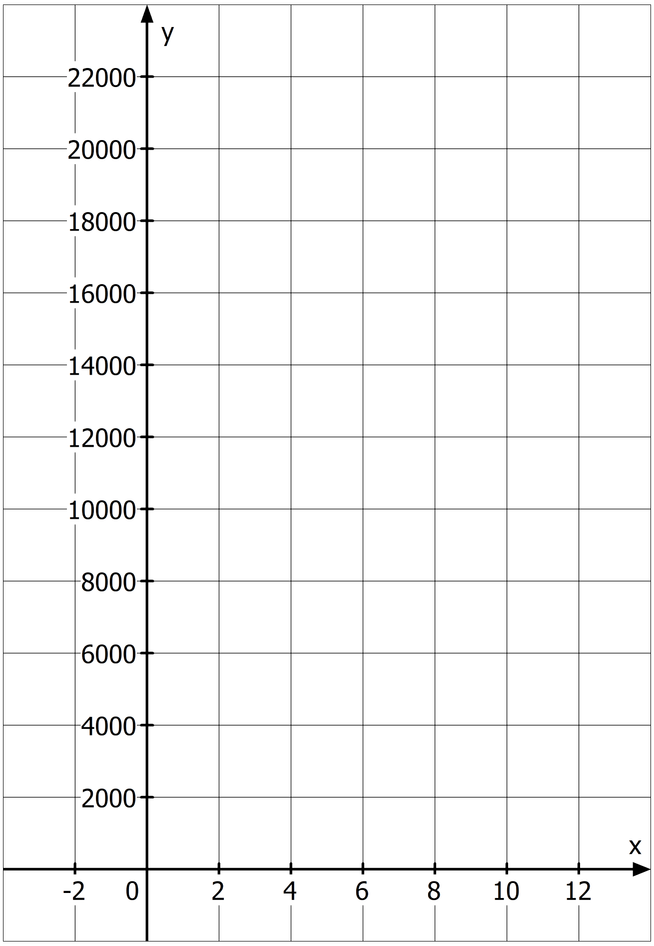
$$f(20) = 10 \cdot 2^{20} = 10.485.760$$
$$f(100) = 10 \cdot 2^{100} \approx 1,27 \cdot 10^{31}$$

Nach wie vielen Stunden waren 8000 Bakterien vorhanden?

$f(x)$ gibt die Anzahl an Bakterien nach x Stunden an. Wir setzen also gleich:

$$f(x) = 8000$$
$$10 \cdot 2^x = 8000 \mid : 10$$
$$2^x = 800 \mid \log_2$$
$$\Rightarrow x = \log_2(800) \approx 9,64$$

Der Logarithmus erfüllt für Exponentialfunktionen die gleiche Funktion, die die verschiedenen Wurzeln für x^2, x^3, usw. erfüllen.



Exponentialfunktionen wie 2^x wachsen sehr schnell. Überlegen wir uns zur Illustration wie lange es dauern würde bis die komplette Erde ($m_{Erde} = 6 \cdot 10^{24} kg$) aus Bakterien bestehen würde, falls sie sich unbegrenzt vermehren könnten. 1.000.000.000.000.000 Bakterien wiegen 1g.

$$f(x) = 6 \cdot 10^{4}2$$
$$10 \cdot 2^x = 6 \cdot 10^{4}2 \mid : 10$$
$$2^x = 6 \cdot 10^{4}1 \mid \log_2$$
$$\Rightarrow x = \log_2\left(6 \cdot 10^{4}1\right) \approx 138,8$$

Könnten sich die Bakterien unbegrenzt vermehren, würde es also lediglich $139h = 5,8d$, also nicht ganz 6 Tage, dauern bis die komplette Erde nur aus Bakterien bestehen würde.

Das Isotop ^{207}Ra hat eine Halbwertszeit von ca. 1s, d.h. dass innerhalb einer Sekunde die Hälfte des radioaktiven Materials in andere Elemente zerfallen ist. Zu Beginn sind 8g Radium vorhanden. Vervollständige die Tabelle:

x	0	1	2	3	4	5	6
$f(x)$	8 $8\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^0$	4 $8\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^1$	2 $8\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2$	1 $8\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^3$	$\frac{1}{2}$ $8\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^4$	$\frac{1}{4}$ $8\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^5$	$\frac{1}{8}$ $8\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^6$

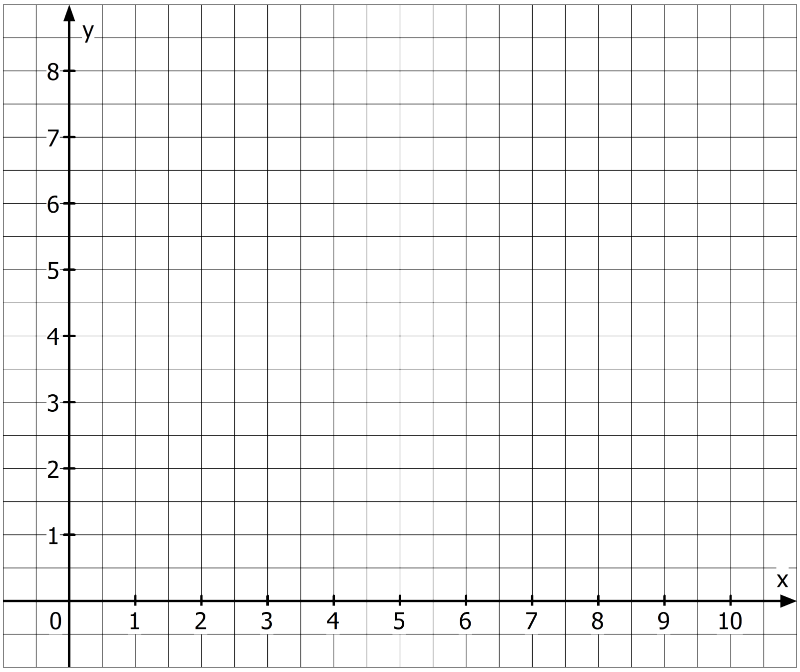
$$f(x) = 8\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^x$$

Wie viel g Radium sind nach 10s noch vorhanden, wie viel nach 1min?

Da x die Zeit in Sekunden angibt, setzt man einfach die angegebenen Werte ein:

$$f(10) = 8\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{10} = \frac{1}{128} \approx 0,00781$$

$$f(60) = 8\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{60} = \frac{1}{128} \approx 6,94\cdot 10^{-18}$$



Nach wie vielen Sekunden waren noch 0,3g Radium vorhanden?

$f(x)$ gibt die Masse des Radiums in g nach x Sekunden an. Wir setzen also gleich:

$$\begin{aligned} f(x) &= 0,3 \\ 8\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^x &= 0,3 \mid :8 \\ \left(\frac{1}{2}\right)^x &= \frac{3}{80} \mid \log_{\frac{1}{2}} \\ \Rightarrow x &= \log_{\frac{1}{2}}\left(\frac{3}{80}\right) \approx 4,74 \end{aligned}$$

Wie lange würde es dauern bis die Masse des Radiums die eines Bakteriums entspricht?

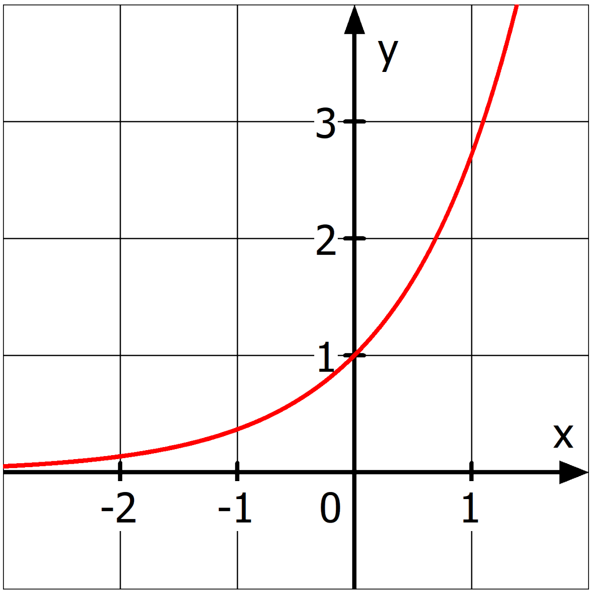
$$\begin{aligned} f(x) &= 10^{-15} \\ 8\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^x &= 10^{-15} \mid :8 \\ \left(\frac{1}{2}\right)^x &= 1,25\cdot 10^{-16} \mid \log_{\frac{1}{2}} \\ \Rightarrow x &= \log_{\frac{1}{2}}\left(1,25\cdot 10^{-16}\right) \approx 52,8 \end{aligned}$$

Es dauert also nicht mal ganz eine Minute bis das Radium fast verschwunden ist.

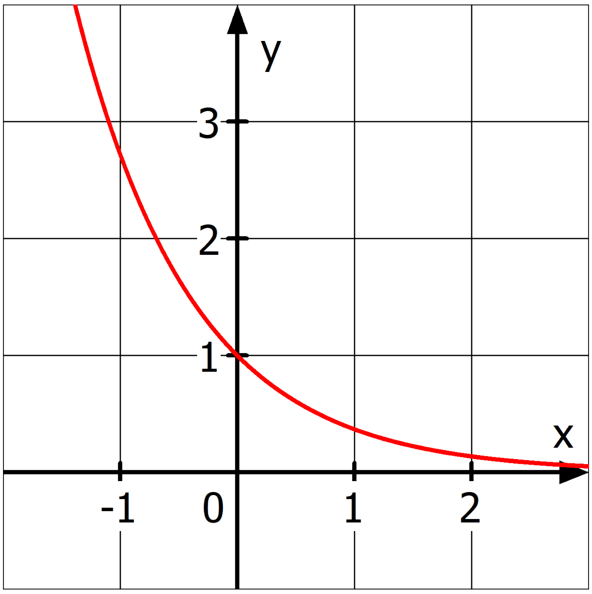
Wir werden im Folgenden als Basis nur die eulersche Zahl $e = 2,71828\ldots$ als Basis verwenden. Man kann jede Exponentialfunktion zur Basis e schreiben, indem man im Exponenten einen zusätzlichen Faktor hinzufügt, z.B. $f(x) = 10 \cdot 2^x = 10 \cdot e^{\ln(2)\cdot x}$. Dabei ist $\ln(2) = \log_e(2)$ der Logarithmus zur Basis e. Diesen werden wir später noch genauer betrachten.

Wie die parabelförmigen und S-förmigen Schaubilder bei den ganzrationalen Funktionen, bilden die folgenden 4 Schaubilder die Grundbausteine, um Schaubilder zu skizzieren.

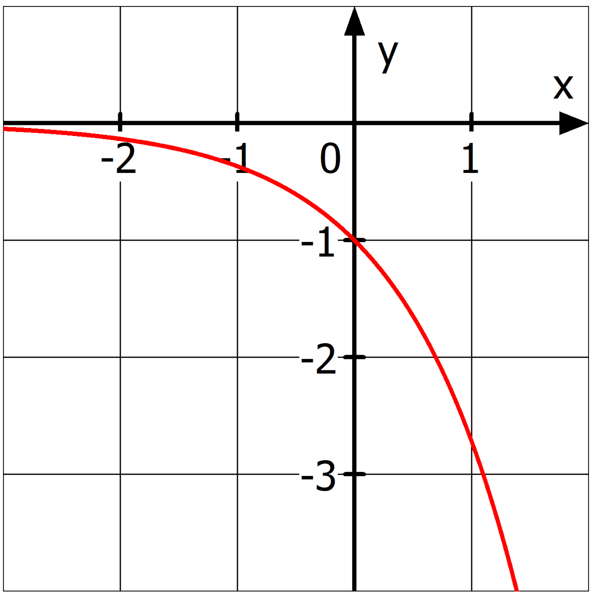
Die Funktion $f(x) = a \cdot e^{k\cdot x}$, $a \neq 0$, $k \neq 0$ nimmt in Abhängigkeit der Vorzeichen von a und k folgende vier Formen an:



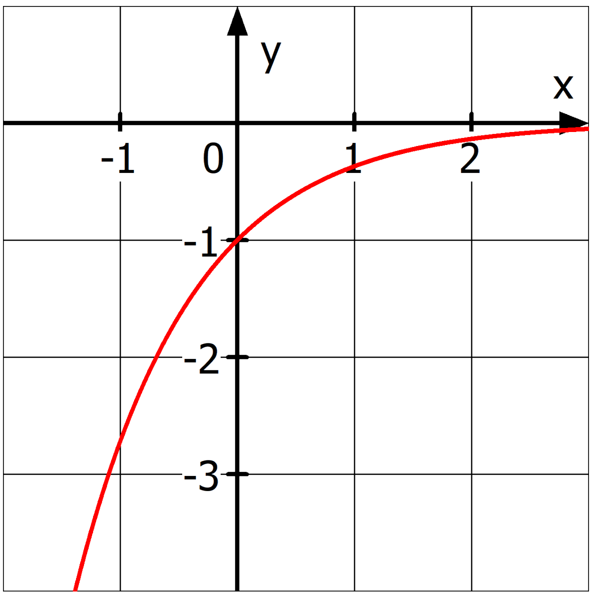
a positiv, k positiv, z.B. $f_1(x) = e^x$



a positiv, k negativ, z.B. $f_2(x) = e^{-x}$



a negativ, k positiv, z.B. $f_3(x) = -e^x$



a negativ, k negativ, z.B. $f_4(x) = -e^{-x}$

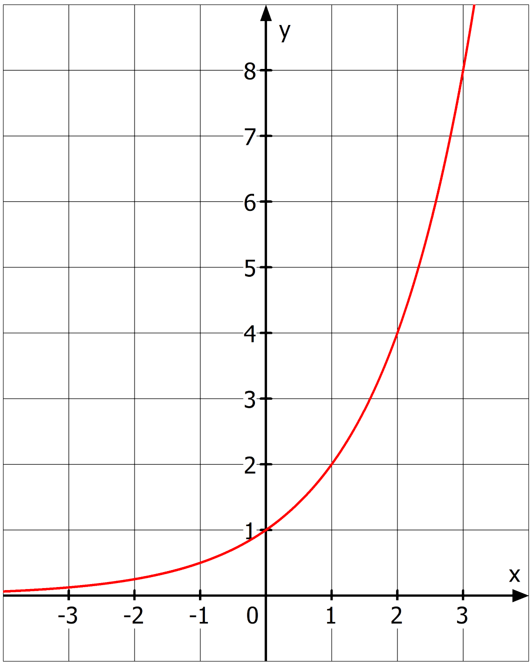
Wichtiger Funktionswert von e^x:

$$\boldsymbol{e^0} = 1$$

Zur Einführung der neuen Begriffe Asymptote und Monotonie betrachten wir als Beispiel $f(x) = e^{\ln(2)\cdot x} = 2^x$:

Asymptote

Eine Asymptote einer Funktion ist eine Gerade, an die sich die Funktion beliebig nahe annähert, d.h. der Abstand zw. der Funktion und der Geraden wird beliebig klein. Im Beispiel halbiert man den Funktionswert immer wenn man einen Schritt nach links macht. Die Funktionswerte gehen also immer näher an die Null heran. Die Asymptote ist die x-Achse bzw. $y = 0$



Verhalten für $x \to \pm\infty$

$$f(x) \xrightarrow{x\to-\infty} 0$$
$$f(x) \xrightarrow{x\to\infty} \infty$$

Monotonie

Wachsen die Funkionswerte bzw. y-Werte mit wachsenden x-Werten, so ist die Funktion monoton wachsend. Werden die Funktionswerte mit wachsenden x-Werten immer kleiner, so ist die Funktion Monoton fallend.

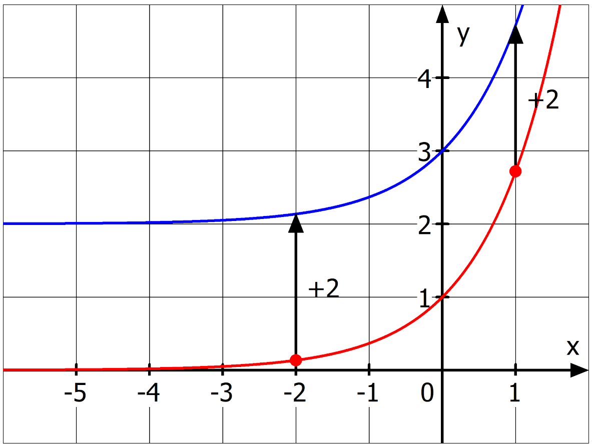
Das Beispiel ist also monoton wachsend, da man von links nach rechts immer weiter nach oben geht. (Die Funktionswerte verdoppeln sich mit jedem Schritt nach rechts.)

Übung 31 **Bestimme den y-Achsenabschnitt, skizziere das Schaubild, gib die Asymptote, das Verhalten für $x \to \pm\infty$ und die Monotonie an**

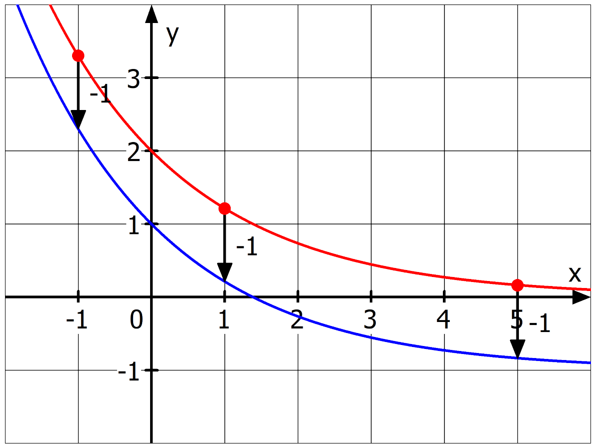
a) $f(x) = e^{2x}$
b) $f(x) = -3e^{\frac{1}{2}x}$
c) $f(x) = -4e^{-2x}$
d) $f(x) = 2e^{-7x}$
e) $f(x) = -\frac{5}{3}e^{x}$
f) $f(x) = 8e^{-3x}$
g) $f(x) = -3e^{-\frac{9}{8}x}$
h) $f(x) = \frac{3}{5}e^{0,2x}$
i) $f(x) = -0,5e^{-3,5x}$
j) $f(x) = -8e^{\frac{1}{10}x}$
k) $f(x) = 2e^{-2x}$
l) $f(x) = -4e^{-7x}$
m) $f(x) = -\frac{5}{7}e^{x}$
n) $f(x) = 6e^{-4x}$
o) $f(x) = -2e^{-8x}$
p) $f(x) = 5,3e^{0,2x}$
q) $f(x) = -\frac{1}{4}e^{-\frac{2}{3}x}$
r) $f(x) = -2e^{0,2x}$
s) $f(x) = 1,8e^{-4x}$
t) $f(x) = 5e^{7x}$
u) $f(x) = -\frac{8}{3}e^{\frac{3}{8}x}$
v) $f(x) = -0,1e^{-0,3x}$
w) $f(x) = 10e^{-4x}$
x) $f(x) = -5e^{6x}$
y) $f(x) = -0,9e^{-1,1x}$
z) $f(x) = \frac{11}{6}e^{\frac{8}{7}x}$

Jede Funktion vom Typ $f(x) = a \cdot e^{kx}$ hat als Asymptote die x-Achse $y = 0$. Verschiebt man die Funktion nun um b in y-Richtung, so verschiebt sich die Asymptote ebenfalls um b:

> $f(x) = a \cdot e^{kx} + b$ hat die Asymptote $y = b$



$f_1(x) = e^x$ um 2 nach oben verschoben:
$f_2(x) = e^x + 2$ mit Asymptote $y = 2$



$f_3(x) = 2e^{-0{,}5x}$ um 1 nach unten verschoben:
$f_3(x) = 2e^{-0{,}5x} - 1$ mit Asymptote $y = -1$

Für viele Aufgabenstellungen ist eine Skizze hilfreich, die sich wie folgt erstellen lässt. Als Beispiel verwenden wir $f(x) = -2e^{\frac{1}{3}x} + 3$

1) Asymptote ablesen: $y = b$

Asymptote $y = 3$

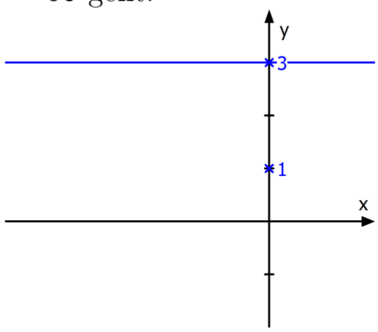
2) y-Achsenabschnitt berechnen:
$f(0) = a + b$

y-Achsenabschnitt:
$f(0) = -2e^{\frac{1}{3}\cdot 0} + 3 = -2 + 3 = 1$

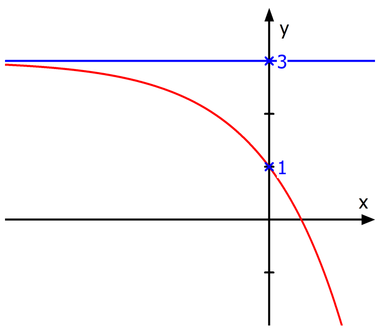
3) Form an Hand der Vorzeichen von a und k bestimmen

Aus $a = -2$ negativ und $k = \frac{1}{3}$ positiv folgt, dass das Schaubild sich nach links von unten der Asymptote nähert und nach rechts gegen $-\infty$ geht.

4) Asymptote ins Koordinatensystem einzeichnen und y-Achsenabschnitt markieren



5) Schaubild der Funktion skizzieren



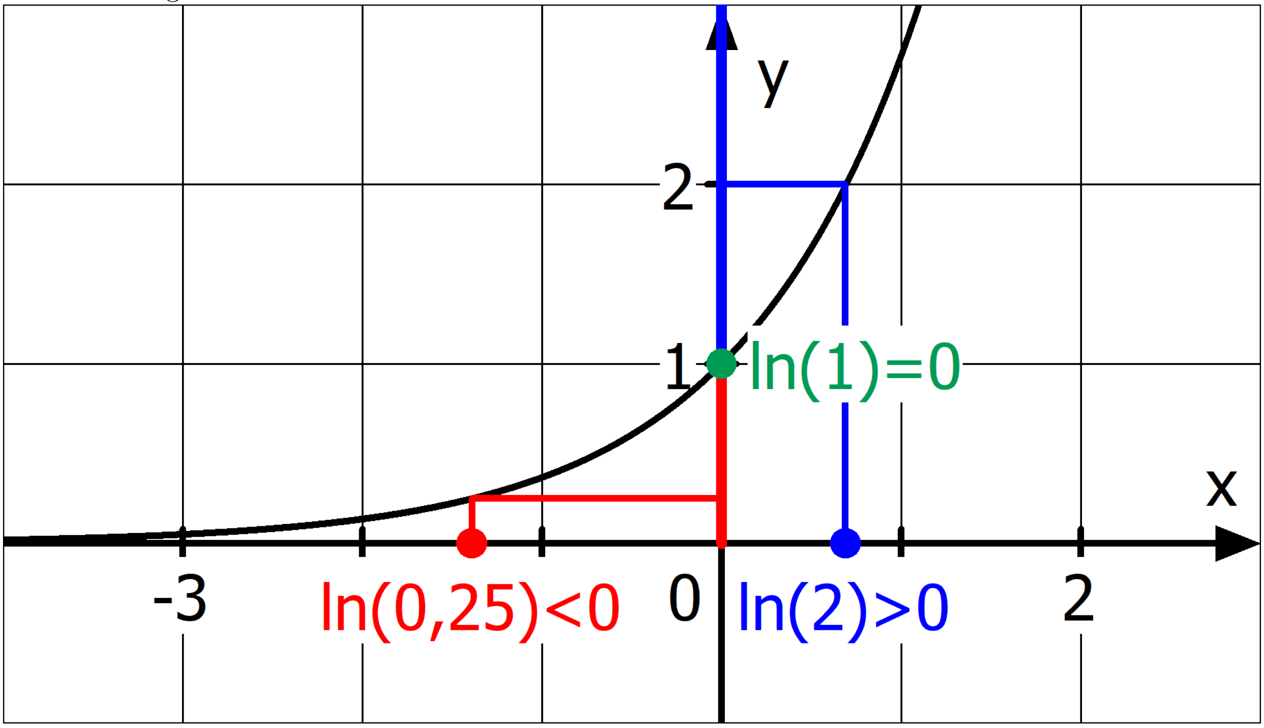
Übung 32 **Bestimme den y-Achsenabschnitt, skizziere das Schaubild, gib die Asymptote, das Verhalten für $x \to \pm\infty$ und die Monotonie an**

a) $f(x) = e^{-2x} - 3$
b) $f(x) = 2e^{\frac{1}{2}x} + 1$
c) $f(x) = -3e^{2x} + 6$
d) $f(x) = -2e^{-7x} - 1$
e) $f(x) = \frac{5}{2}e^{2x} - 2$
f) $f(x) = -8e^{3x} + 8$
g) $f(x) = 2e^{-\frac{3}{8}x} - 5$
h) $f(x) = -\frac{3}{2}e^{0,2x} + 2$
i) $f(x) = -5e^{-3,5x} + 5$
j) $f(x) = -8e^{0,3x} + 6$
k) $f(x) = 2e^{-2x} + 2$
l) $f(x) = -6 + 4e^{-7x}$
m) $f(x) = 8 - 5e^{x}$
n) $f(x) = -4e^{-2x} - 2$
o) $f(x) = 2e^{-3x} + 4$
p) $f(x) = 5e^{0,2x} - 10$
q) $f(x) = -\frac{1}{4}e^{-\frac{2}{3}x} + \frac{7}{4}$
r) $f(x) = e^{-4x} + 3$
s) $f(x) = -4 + 5e^{7x}$
t) $f(x) = \frac{3}{2} - \frac{9}{4}e^{\frac{3}{8}x}$
u) $f(x) = -2\left(1 + e^{-0,3x}\right)$
v) $f(x) = 5\left(e^{-4x} + \frac{1}{2}\right)$
w) $f(x) = -2\left(2e^{6x} - 2\right)$
x) $f(x) = -e^{-1,1x} + 3\left(e^{-1,1x} - 2\right)$
y) $f(x) = 4\left(0,25e^{1,25x} + 2\right) - 8$

Wie die Wurzel zu x^2 und die dritte Wurzel zu x^3 gibt es auch zu e^x eine Umkehrfunktion. Diese ist der natürliche Logarithmus und als Formelzeichen wird $\ln(y)$ verwendet. Der natürliche Logarithmus gibt gibt zu einem y-Wert den passenden x-Wert an, so dass folgendes gilt:

Wenn $e^{x_1} = y_1$ dann ist $\ln(y_1) = x_1$ bzw. $\ln(e^x) = e^{\ln(x)} = x$

Mit Hilfe des Schaubilds von e^x überlegen wir uns, welche Werte man in den $ln(y)$ einsetzen darf und welche Ergebnisse man erhält:



- y ist größer 1 bzw. $y > 1$:
  Da e^x jeden y-Wert größer als 1 genau einmal annimmt und die passenden x-Werte alle positiv sind, darf man Zahlen größer 1 in den ln einsetzen und das Ergebnis ist positiv:
  $\ln(y) > 0$ für $y > 1$
  Bsp.: $\ln(2) = 0,693147\ldots$
- $y = 1$:
  Der einzige Wert, den man auswendig können muss. Da $e^0 = 1$ ist, gilt umgekehrt $\ln(1) = 0$
- y liegt zwischen 0 und 1 bzw. $0 < y < 1$:
  Da e^x jeden y-Wert zwischen 0 und 1 genau einmal annimmt und die passenden x-Werte alle negativ sind, darf man Zahlen zwischen 0 und 1 in den ln einsetzen und das Ergebnis ist negativ:
  $\ln(y) < 0$ für $0 < y < 1$
  Bsp.: $\ln(0,25) = -1,38629\ldots$
- y ist kleiner gleich 0 bzw. $y \leq 0$:
  Da e^x niemals Null wird und auch keine negativen Funktionswerte annimmt, darf man weder Null noch eine negative Zahl in den ln einsetzen:
  $\ln(y)$ ↯ für $y \leq 0$

Es gibt zwar Rechengesetze für Logarithmen, wir werden diese aber nicht betrachten.
Zum Vergleichen von Lösungen kann aber folgendes Gesetz nützlich sein:

$$\ln\left(\frac{a}{b}\right) = -\ln\left(\frac{b}{a}\right)$$

Mit Hilfe des natürlichen Logarithmus lassen sich Gleichungen mit Exponentialfunktionen mit Hilfe der gleichen Lösungsmethoden lösen, die wir auch bei ganzrationalen Funktionen bereits angewandt haben:

1) Auflösen und ln anwenden
   Dieses Verfahren kann nur dann angewendet werden, wenn die Gleichung auf folgende Form gebracht werden kann: $ae^{kx} + b = 0$
   Wir lösen nach e^{kx} auf, d.h. e^{kx} steht alleine auf einer Seite. Dann wenden wir den ln auf beiden Seiten an.
   Beispiel: Löse die Gleichung $2e^{3x} - 4 = 0$.

$$\begin{aligned} 2e^{3x} - 4 &= 0 \mid +4 \\ 2e^{3x} &= 4 \mid :2 \\ e^{3x} &= 2 \mid \ln \\ 3x &= \ln(2) \mid :3 \\ x &= \frac{1}{3}\ln(2) \end{aligned}$$

2) Ausklammern und SvN
   Dieses Verfahren wenden wir dann an, wenn jeder Summand über ein $e^{k_i x}$ verfügt. (Die k_i sind dabei paarweise verschieden.) Wir klammern ein $e^{k_i x}$ vor (welches ist egal) und wenden dann den Satz vom Nullprodukt an.
   Beispiel: Löse die Gleichung $2e^{3x} - 4e^{7x} = 0$.

1. Möglichkeit

$$\begin{aligned} 2e^{3x} - 4e^{7x} &= 0 \\ e^{3x}\left(2 - 4e^{4x}\right) &= 0 \\ \text{SvN: Entweder } e^{3x} &= 0 ⚡ \\ \text{oder } 2 - 4e^{4x} &= 0 \mid +4e^{4x} \\ 4e^{4x} &= 2 \mid :4 \\ e^{4x} &= \frac{1}{2} \mid \ln \\ 4x &= \ln\left(\tfrac{1}{2}\right) \mid :4 \\ x &= \frac{1}{4}\ln\left(\tfrac{1}{2}\right) \end{aligned}$$

2. Möglichkeit

$$\begin{aligned} 2e^{3x} - 4e^{7x} &= 0 \\ e^{7x}\left(2e^{-4x} - 4\right) &= 0 \\ \text{SvN: Entweder } e^{7x} &= 0 ⚡ \\ \text{oder } 2e^{-4x} - 4 &= 0 \mid +4 \\ 2e^{-4x} &= 4 \mid :2 \\ e^{-4x} &= 2 \mid \ln \\ -4x &= \ln(2) \mid :(-4) \\ x &= -\frac{1}{4}\ln(2) \end{aligned}$$

3) Substitution

Dieses Verfahren setzen wir dann ein, wenn die Gleichung auf folgende Form gebracht werden kann: $ae^{2kx} + be^{kx} + c = 0$

Wir substituieren $z = e^{kx}$ und damit $z^2 = e^{2kx}$. Die entstehende quadratische Gleichung lösen wir mit Hilfe der Mitternachtsformel und erhalten dann die Lösungen für x nach einer Rücksubstitution.

Beispiel: Löse die Gleichung $0,5e^{6x} + e^{3x} - 4 = 0$.

$$
\begin{aligned}
0,5e^{6x} + e^{3x} - 4 = 0 &\mid \text{Sub.: } z = e^{3x} \\
0,5z^2 + z - 4 = 0 & \\
z_{1/2} &= \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \cdot 0,5 \cdot (-4)}}{2 \cdot 0,5} \\
z_1 &= -4 \quad z_2 = 2 \mid \text{Rücksub.} \\
e^{3x} &= -4 \; \lightning \; \text{oder} \\
e^{3x} &= 2 \mid \ln \\
3x &= \ln(2) \mid :3 \\
x &= \frac{1}{3}\ln(2)
\end{aligned}
$$

Übung 33 Löse folgende Gleichungen

a) $3e^{x} - 9 = 0$

b) $4e^{3x} - 12 = 0$

c) $5e^{4x} - 2e^{x} = 0$

d) $0,5e^{-2x} + e^{-x} - 12 = 0$

e) $3e^{-8x} + 6 = 0$

f) $-\frac{3}{4}e^{-\frac{2}{3}x} + 12 = 0$

g) $e^{8x} - 5e^{4x} + 10 = 0$

h) $-e^{x} + 0,4 = 0$

i) $-10e^{10x} - 13e^{5x} - 4 = 0$

j) $7 - e^{-2x} = 0$

k) $7e^{-4x} - e^{-2x} = 0$

l) $-2e^{-6x} + \frac{13}{2}e^{-3x} - \frac{3}{2} = 0$

m) $5e^{4x} - 10e^{-x} = 0$

n) $0,4e^{4x} + 1,8e^{2x} = 0$

o) $-3e^{4x} + 8e^{-2x} = 0$

p) $e^{2x} + 2e^{x} - 3 = 0$

q) $3e^{3x} + \frac{1}{2}e^{1,5x} - \frac{1}{2} = 0$

r) $e^{5x} - 4e^{\frac{5}{2}x} - 12 = 0$

s) $-\frac{2}{3}e^{4x} - e^{x} = 0$

t) $-0,2e^{0,3x} - 1,4 = 0$

u) $2e^{-2x} + e^{-x} - 6 = 0$

v) $5e^{-6x} = 4$

w) $0,1e^{4x} - e^{x} = 0$

x) $-\frac{1}{9}e^{-0,5x} + \frac{2}{3}e^{-0,25x} = -3$

y) $0,5e^{4x} = e^{x}$

z) $-3e^{x} + 2 = -e^{2x}$

Beim Aufstellen von Funktionsgleichungen vom Typ $f(x) = a \cdot e^{kx} + b$ können wir in den allermeisten Fällen die folgenden Schritte abarbeiten:

1) Asymptote bestimmen, sofern notwendig. Bei Funktionen vom Typ $f(x) = a \cdot e^{kx}$ ist die Asymptote $y = 0$ bereits gegeben.
2) Den Faktor a bestimmen, indem man den y-Achsenabschnitt einsetzt.
3) Den Faktor k mit Hilfe einer weiteren Punktprobe bestimmen.

Beispiel: Von einer Funktion $f(x) = a \cdot e^{kx} + b$ ist bekannt, dass $f(x) \xrightarrow{x \to -\infty} 1$ gilt und dass das Schaubild durch den Ursprung und $A(2|-4)$ verläuft.

1) Aus $f(x) \xrightarrow{x \to -\infty} 1$ folgt, dass die Asymptote $y = 1$ ist und damit $b = 1$.
2) Da das Schaubild durch den Ursprung verläuft, ist der y-Achsenabschnitt 0:

$$\begin{aligned} f(0) &= 0 \\ a \cdot e^0 + 1 &= 0 \mid -1 \\ a &= -1 \end{aligned}$$

3) Punktprobe mit $A(2|-4)$:

$$\begin{aligned} f(2) &= -4 \\ -1 \cdot e^{2k} + 1 &= -4 \mid -1 \\ -e^{2k} &= -5 \mid \cdot(-1) \\ e^{2k} &= 5 \mid \ln \\ 2k &= \ln(5) \mid :2 \\ k &= \frac{1}{2}\ln(5) \end{aligned}$$

Damit ergibt sich $f(x) = -e^{\frac{1}{2}\ln(5)x} + 1$

Übung 34 Stelle jeweils eine Funktionsgleichung vom passenden Typ auf

a) Das Schaubild von $f_1(x) = ae^{kx}$ verläuft durch die Punkte $A(0|3)$ und $B(2|8)$.

b) Das Schaubild von $f_2(x) = ae^{kx}$ verläuft durch die Punkte $A(0|-1)$ und $B(-2|-5)$.

c) Das Schaubild von $f_3(x) = ae^{kx}$ verläuft durch die Punkte $A(0|5)$ und $B(3|4)$.

d) Das Schaubild von $f_4(x) = ae^{kx} + b$ verläuft durch die Punkte $A(0|5)$ und $B(-1|3)$ und hat die Asymptote $y = 7$.

e) Das Schaubild von $f_5(x) = ae^{kx} + b$ verläuft durch die Punkte $A(0|0)$ und $B(3|-3)$ und hat die Asymptote $y = 3$.

f) Das Schaubild von $f_6(x) = ae^{kx} + b$ verläuft durch die Punkte $A(4|-2)$ und $B(0|3)$ und hat die Asymptote $y = -4$.

g) Von der Funktion $f_7(x) = ae^{kx} + b$ ist das Verhalten bekannt: $f_7(x) \xrightarrow{x \to -\infty} -1$ Zudem ist folgende Wertetabelle gegeben:

x	-5	0
$f_7(x)$	3	8

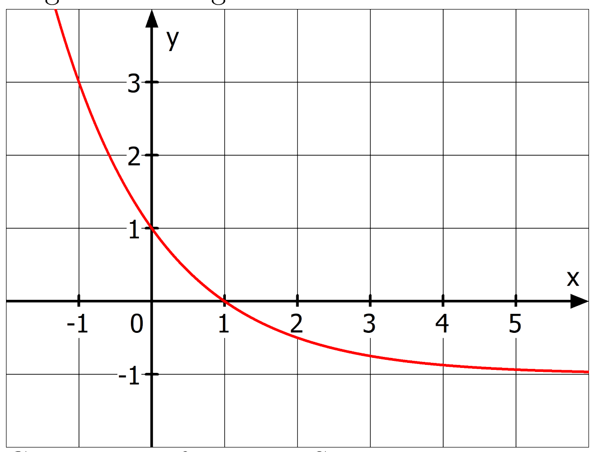
h) Von der Funktion $f_8(x) = ae^{kx} + b$ ist das Verhalten bekannt: $f_8(x) \xrightarrow{x \to -\infty} 2$ Zudem ist folgende Wertetabelle gegeben:

x	-5	0
$f_7(x)$	0	1

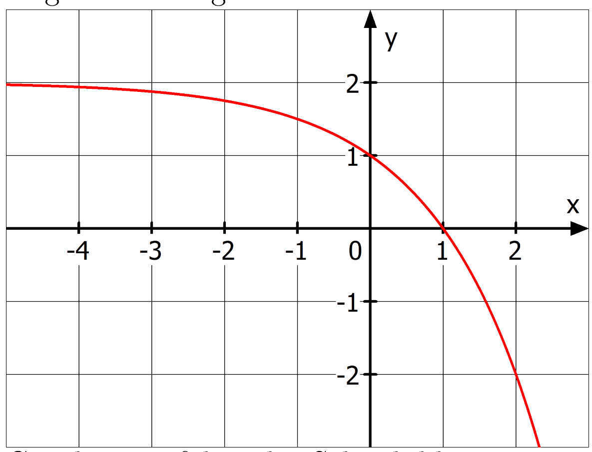
i) Von der Funktion $f_9(x) = ae^{kx} + b$ ist das Verhalten bekannt: $f_9(x) \xrightarrow{x \to -\infty} -4$ Zudem ist folgende Wertetabelle gegeben:

x	0	1
$f_7(x)$	-3	-1

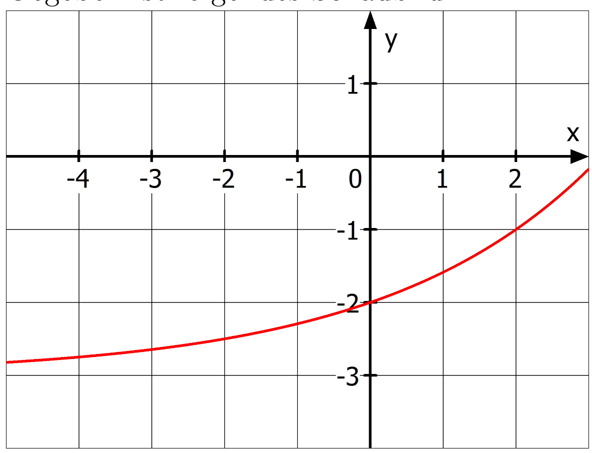
j) Gegeben ist folgendes Schaubild:



k) Gegeben ist folgendes Schaubild:

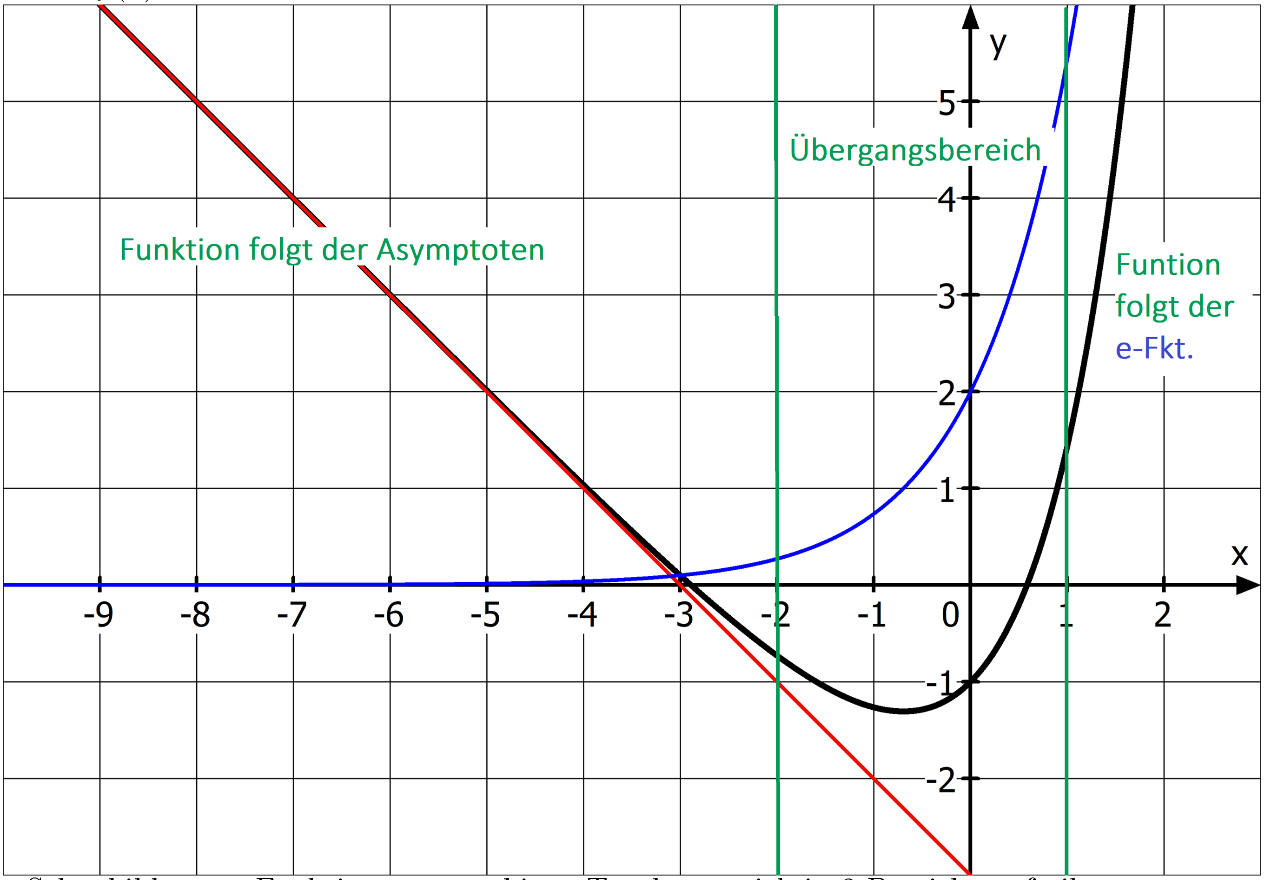


l) Gegeben ist folgendes Schaubild:



Funktionen vom Typ $f(x) = a \cdot e^{kx} + mx + b \quad a, k, m \neq 0$ haben eine schiefe Asymptote. Der erste Teil der Funktion $a \cdot e^{kx}$ geht entweder für sehr große x oder sehr kleine x gegen Null. In diese Richtung nähert sich das Schaubild von $f(x)$ der Geraden $mx + b$ beliebig nahe, d.h. $y = mx + b$ ist eine Asymptote von $f(x)$. Da das Schaubild der Asymptoten nicht mehr parallel zur x-Achse verläuft, spricht man von einer schiefen Asymptoten.

Beispiel: $f(x) = 2 \cdot e^{x} - x - 3$



Die Schaubilder von Funktionen vom obigen Typ lassen sich in 3 Bereiche aufteilen:

- In dem Bereich, in dem $a \cdot e^{kx}$ gegen Null geht, folgt die Funktion der Asymptoten. Im Beispiel ist dies für ca. $x < -2$ der Fall.
- In dem Bereich, in dem $a \cdot e^{kx}$ gegen $+\infty$ oder $-\infty$ geht, folgt die Funktion $a \cdot e^{kx}$ Im Beispiel ist dies ab ca. $x > 1$ der Fall.
- Im Übergangsbereich zwischen den beiden Bereichen muss man die beiden Teile mit einem Bogen miteinander verbinden.

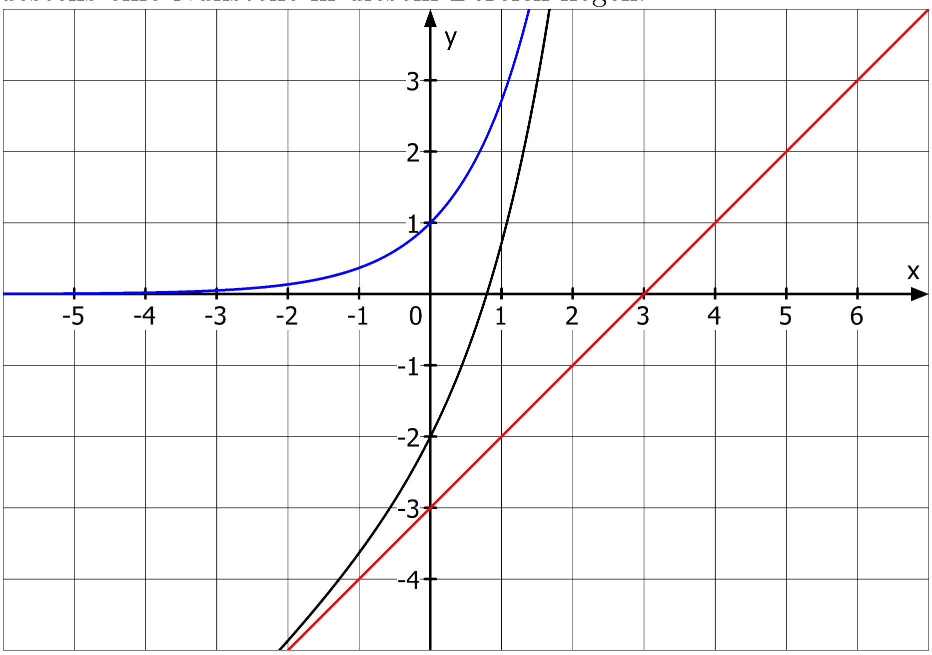
Das obige Beispiel hat einen Tiefpunkt bei ca. $x \approx -0,8$. Mit Hilfe der Ableitung werden wir in Zukunft Hoch- und Tiefpunkte berechnen können. Momentan können wir nicht wissen, wo genau der Tiefpunkt liegt. Die obige Funktion hat 2 Nullstellen, die man jedoch nicht exakt bestimmen kann.

> Gleichungen vom Typ
> $$ae^{kx} + mx + b = 0$$
> sind im Allgemeinen nicht exakt lösbar. Man kann lediglich die Lösungen auf beliebig viele Nachkommastellen bestimmen.

Übung 35 **Skizziere die Asymptote, den Teil mit ae^{kx} sowie das Schaubild der Funktion.**

a) $f_1(x) = e^{-x} + 2x - 3$
b) $f_2(x) = -e^{-2x} + 0,5x$
c) $f_3(x) = -e^{x} - \frac{2}{3}x + 1$
d) $f_4(x) = -2e^{-x} - 2x + 1$
e) $f_5(x) = 3e^{1,4x} + \frac{3}{4}x - 1$
f) $f_6(x) = e^{2x} + 0,4x - 3$
g) $f_7(x) = -3e^{-0,5x} - x$
h) $f_8(x) = -2e^{4x} + \frac{4}{3}x + 5$

Wir haben die Behauptung aufgestellt, dass sich Gleichungen vom Typ $ae^{kx} + mx + b = 0$ im Allgemeinen nicht exakt lösen lassen. Im Allgemeinen bedeutet, dass es durchaus Gleichungen dieses Typs gibt, die man exakt lösen kann, aber nicht jede Gleichung ist exakt lösbar. Als Beispiel betrachten wir $f(x) = e^x + x - 3$. Aus dem Schaubild lässt sich entnehmen, dass die Funktion eine Nullstelle im positiven Bereich haben muss. Zeichnet man das Schaubild mit dem Computer, so kann man sogar sagen, dass die Nullstellen zwischen $x = 0$ und $x = 1$ liegen muss. Dies könnte man auch mit dem Taschenrechner und einer Wertetabelle zeigen. Da $f(0) = -2$ und $f(1) \approx 0,72$ gilt, muss mindestens eine Nullstelle in diesem Bereich liegen.



ACHTUNG: Wechseln die Funktionswerte einer Funktion ihr Vorzeichen, so kann man ohne weitere Überlegungen nur sagen, dass mindestens eine Nullstelle im fraglichen Bereich liegen muss, es könnten aber auch mehr Nullstellen sein. Findet kein Vorzeichenwechsel der Funktionswerte statt, kann man keine Aussage treffen. So hat x^2 keinen Vorzeichenwechsel in den Funktionswerten, aber dennoch eine Nullstelle bei $x = 0$.

Um die Nullstelle genauer zu bestimmen, gibt es verschiedene Verfahren wie z.B. das Newton-Verfahren. Wir werden einfach die Wertetabelle des Taschenrechners verwenden. In den Aufgaben ist normalerweise die Lage der Nullstelle bereits grob vorgegeben, z.B. $f(x) = e^x + x - 3$ hat zwischen $x = 0$ und $x = 1$ eine Nullstelle. Bestimme diese auf 2 Nachkommastellen genau. Wir erstellen eine Wertetabelle im Taschenrechner und geben als Startwert $x = 0$ an (als Endwert, soweit notwendig, $x = 1$) und als Schrittweite (oft als step oder Inkrement bezeichnet) $\Delta x = 0,05$ an. Nun prüfen wir, an welcher Stelle der Vorzeichenwechsel stattfindet. Aus $f(0,75) \approx -0,13$ und $f(0,8) \approx 0,03$ folgt, dass die Nullstelle zwischen $x = 0,75$ und $x = 0,8$ liegen muss. Nun verfeinern wir die Wertetabelle mit Start $x = 0,75$ (Ende $x = 0,8$) und Schrittweite $\Delta x = 0,005$ und erhalten aus $f(0,79) \approx -0,007$ und $f(0,795) \approx 0,009$ die ungefähre Lage der Nullstelle als $x_1 \approx 0,79$, da alle Werte zwischen 0,79 und 0,795 beim Runden auf die 2. Nachkommastelle auf 0,79 gerundet werden.

Mit dem gleichen Prinzip lassen sich auch die Nullstellen von Funktionen wie z.B.
$f(x) = x^4 - 2x^3 - 4x + 2$ bestimmen ($x_1 \approx 0,46 \quad x_2 \approx 2,51$).

Übung 36 **Prüfe an Hand deiner Skizze, ob die Funktionen aus Aufg. 35 NST haben und bestimme diese auf 2 Nachkommastellen genau.**

Lösung zu Übung 31

a) $f(x) = e^{2x}$

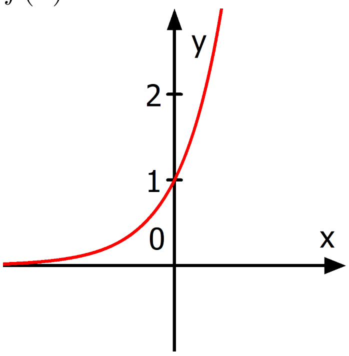
Asymptote $y = 0$

y-Achsenabschnitt: $f(0) = 1$

Monoton wachsend

$f(x) \xrightarrow{x \to -\infty} 0$

$f(x) \xrightarrow{x \to \infty} \infty$



b) $f(x) = -3e^{\frac{1}{2}x}$

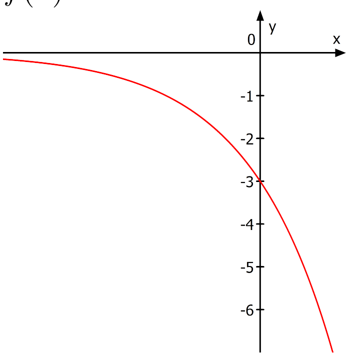
Asymptote $y = 0$

y-Achsenabschnitt: $f(0) = -3$

Monoton fallend

$f(x) \xrightarrow{x \to -\infty} 0$

$f(x) \xrightarrow{x \to \infty} -\infty$



c) $f(x) = -4e^{-2x}$

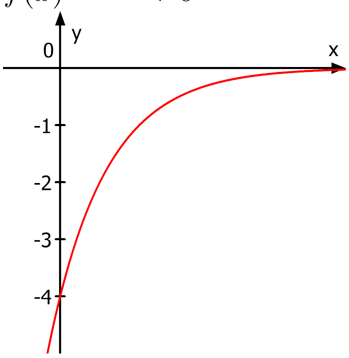
Asymptote $y = 0$

y-Achsenabschnitt: $f(0) = -4$

Monoton wachsend

$f(x) \xrightarrow{x \to -\infty} -\infty$

$f(x) \xrightarrow{x \to \infty} 0$



d) $f(x) = 2e^{-7x}$

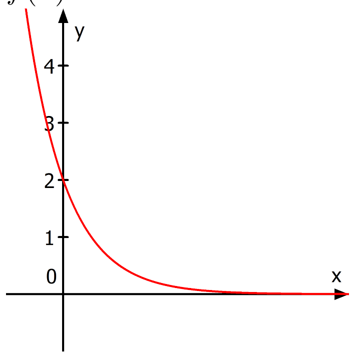
Asymptote $y = 0$

y-Achsenabschnitt: $f(0) = 2$

Monoton fallend

$f(x) \xrightarrow{x \to -\infty} \infty$

$f(x) \xrightarrow{x \to \infty} 0$



e) $f(x) = -\frac{5}{3}e^{x}$

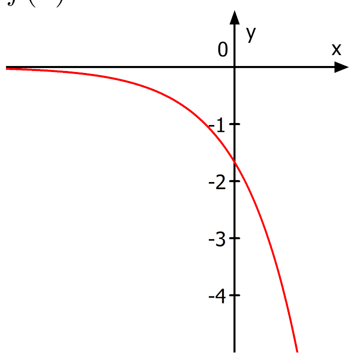
Asymptote $y = 0$

y-Achsenabschnitt: $f(0) = -\frac{5}{3}$

Monoton fallend

$f(x) \xrightarrow{x \to -\infty} 0$

$f(x) \xrightarrow{x \to \infty} -\infty$



f) $f(x) = 8e^{-3x}$

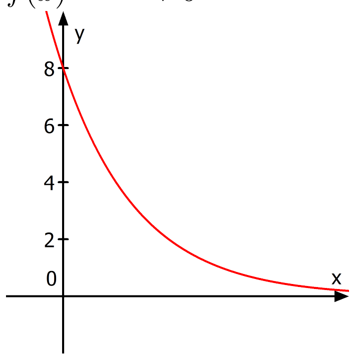
Asymptote $y = 0$

y-Achsenabschnitt: $f(0) = 8$

Monoton fallend

$f(x) \xrightarrow{x \to -\infty} \infty$

$f(x) \xrightarrow{x \to \infty} 0$



g) $f(x) = -3e^{-\frac{9}{8}x}$

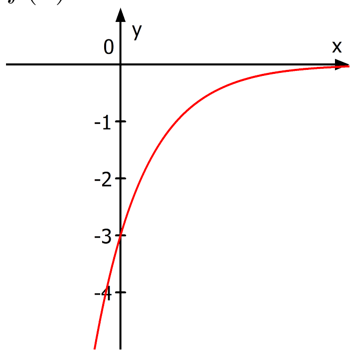
Asymptote $y = 0$

y-Achsenabschnitt: $f(0) = -3$

Monoton wachsend

$f(x) \xrightarrow{x\to-\infty} -\infty$

$f(x) \xrightarrow{x\to\infty} 0$



h) $f(x) = \frac{3}{5}e^{0,2x}$

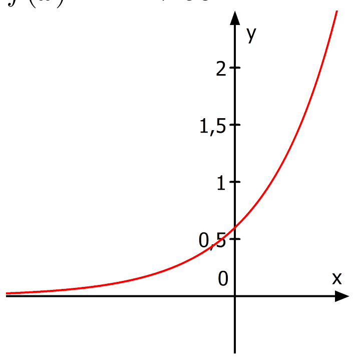
Asymptote $y = 0$

y-Achsenabschnitt: $f(0) = \frac{3}{5}$

Monoton wachsend

$f(x) \xrightarrow{x\to-\infty} 0$

$f(x) \xrightarrow{x\to\infty} \infty$



i) $f(x) = -0,5e^{-3,5x}$

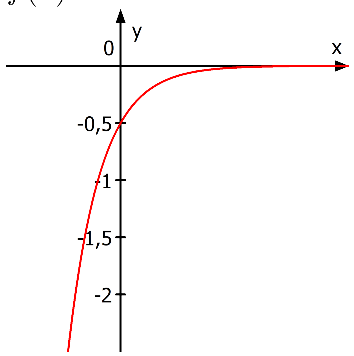
Asymptote $y = 0$

y-Achsenabschnitt: $f(0) = -0,5$

Monoton wachsend

$f(x) \xrightarrow{x\to-\infty} -\infty$

$f(x) \xrightarrow{x\to\infty} 0$



j) $f(x) = -8e^{\frac{1}{10}x}$

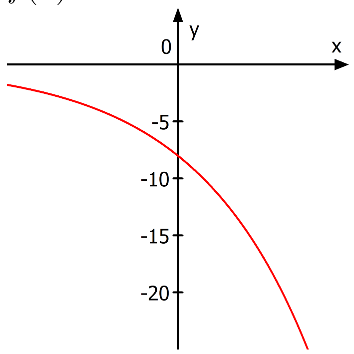
Asymptote $y = 0$

y-Achsenabschnitt: $f(0) = -8$

Monoton fallend

$f(x) \xrightarrow{x\to-\infty} 0$

$f(x) \xrightarrow{x\to\infty} -\infty$



k) $f(x) = 2e^{-2x}$

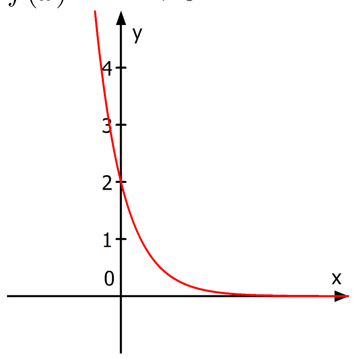
Asymptote $y = 0$

y-Achsenabschnitt: $f(0) = 2$

Monoton fallend

$f(x) \xrightarrow{x\to-\infty} \infty$

$f(x) \xrightarrow{x\to\infty} 0$



l) $f(x) = -4e^{-7x}$

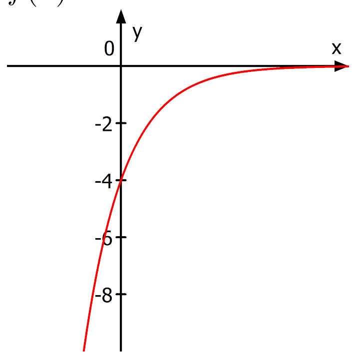
Asymptote $y = 0$

y-Achsenabschnitt: $f(0) = -4$

Monoton wachsend

$f(x) \xrightarrow{x\to-\infty} -\infty$

$f(x) \xrightarrow{x\to\infty} 0$



m) $f(x) = -\frac{5}{7}e^{x}$

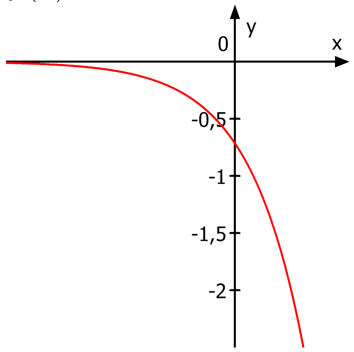
Asymptote $y = 0$

y-Achsenabschnitt: $f(0) = -\frac{5}{7}$

Monoton fallend

$f(x) \xrightarrow{x\to-\infty} 0$

$f(x) \xrightarrow{x\to\infty} -\infty$



n) $f(x) = 6e^{-4x}$

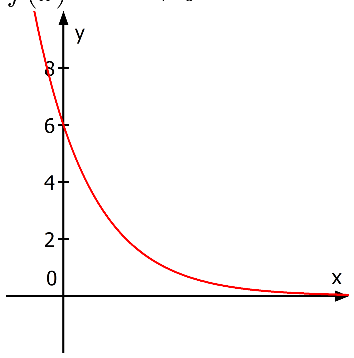
Asymptote $y = 0$

y-Achsenabschnitt: $f(0) = 6$

Monoton fallend

$f(x) \xrightarrow{x\to-\infty} \infty$

$f(x) \xrightarrow{x\to\infty} 0$



o) $f(x) = -2e^{-8x}$

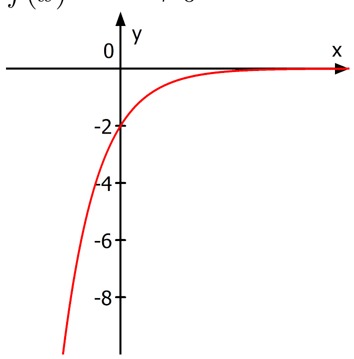
Asymptote $y = 0$

y-Achsenabschnitt: $f(0) = -2$

Monoton wachsend

$f(x) \xrightarrow{x\to-\infty} -\infty$

$f(x) \xrightarrow{x\to\infty} 0$



p) $f(x) = 5,3e^{0,2x}$

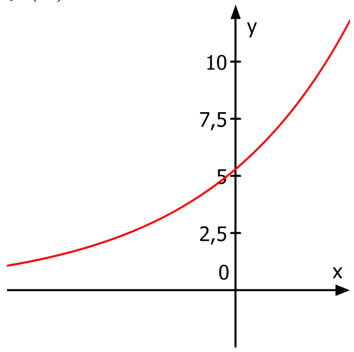
Asymptote $y = 0$

y-Achsenabschnitt: $f(0) = 5,3$

Monoton wachsend

$f(x) \xrightarrow{x\to-\infty} 0$

$f(x) \xrightarrow{x\to\infty} \infty$



q) $f(x) = -\frac{1}{4}e^{-\frac{2}{3}x}$

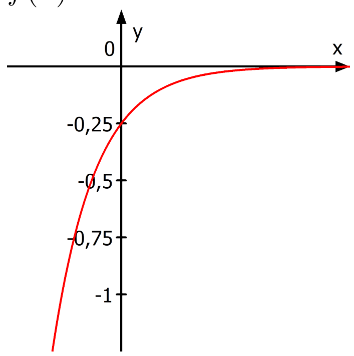
Asymptote $y = 0$

y-Achsenabschnitt: $f(0) = -\frac{1}{4}$

Monoton wachsend

$f(x) \xrightarrow{x\to-\infty} -\infty$

$f(x) \xrightarrow{x\to\infty} 0$



r) $f(x) = -2e^{0,2x}$

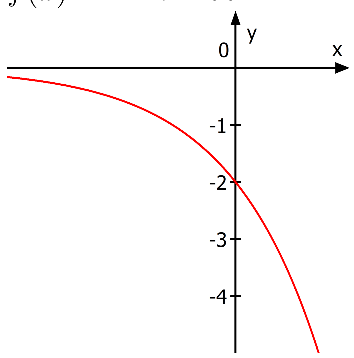
Asymptote $y = 0$

y-Achsenabschnitt: $f(0) = -2$

Monoton fallend

$f(x) \xrightarrow{x\to-\infty} 0$

$f(x) \xrightarrow{x\to\infty} -\infty$



s) $f(x) = 1,8e^{-4x}$

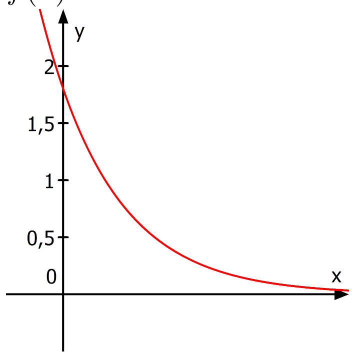
Asymptote $y = 0$

y-Achsenabschnitt: $f(0) = 1,8$

Monoton fallend

$f(x) \xrightarrow{x\to-\infty} \infty$

$f(x) \xrightarrow{x\to\infty} 0$



t) $f(x) = 5e^{7x}$

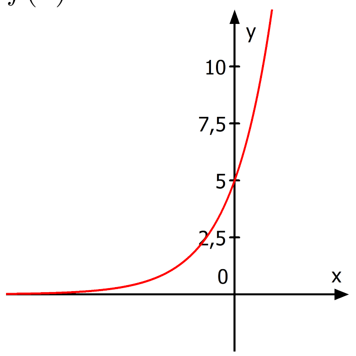
Asymptote $y = 0$

y-Achsenabschnitt: $f(0) = 5$

Monoton wachsend

$f(x) \xrightarrow{x\to-\infty} 0$

$f(x) \xrightarrow{x\to\infty} \infty$



u) $f(x) = -\frac{8}{3}e^{\frac{3}{8}x}$

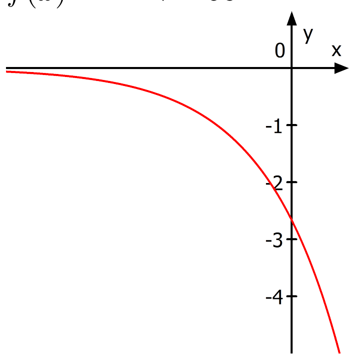
Asymptote $y = 0$

y-Achsenabschnitt: $f(0) = -\frac{8}{3}$

Monoton fallend

$f(x) \xrightarrow{x\to-\infty} 0$

$f(x) \xrightarrow{x\to\infty} -\infty$



v) $f(x) = -0,1^{-0,3x}$

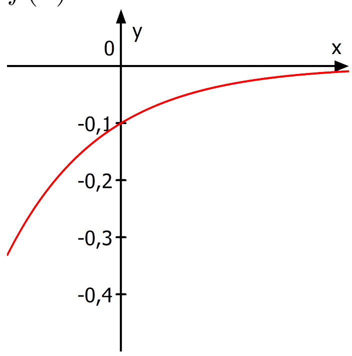
Asymptote $y = 0$

y-Achsenabschnitt: $f(0) = -0,1$

Monoton wachsend

$f(x) \xrightarrow{x\to-\infty} -\infty$

$f(x) \xrightarrow{x\to\infty} 0$



w) $f(x) = 10e^{-4x}$

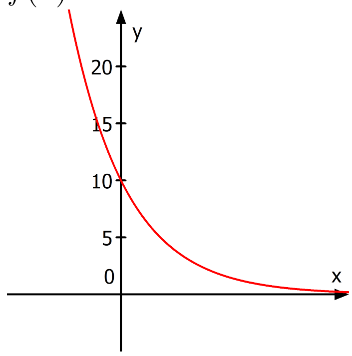
Asymptote $y = 0$

y-Achsenabschnitt: $f(0) = 10$

Monoton fallend

$f(x) \xrightarrow{x\to-\infty} \infty$

$f(x) \xrightarrow{x\to\infty} 0$



x) $f(x) = -5e^{6x}$

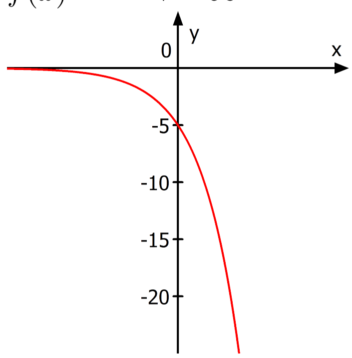
Asymptote $y = 0$

y-Achsenabschnitt: $f(0) = -5$

Monoton fallend

$f(x) \xrightarrow{x\to-\infty} 0$

$f(x) \xrightarrow{x\to\infty} -\infty$



y) $f(x) = -0,9e^{-1,1x}$

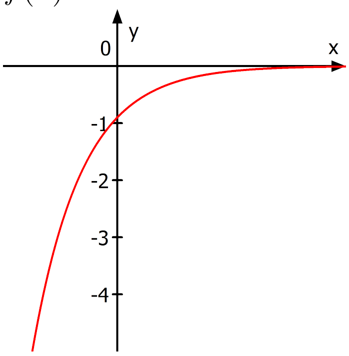
Asymptote $y = 0$

y-Achsenabschnitt: $f(0) = -0,9$

Monoton wachsend

$f(x) \xrightarrow{x \to -\infty} -\infty$

$f(x) \xrightarrow{x \to \infty} 0$



z) $f(x) = \frac{11}{6}e^{\frac{8}{7}x}$

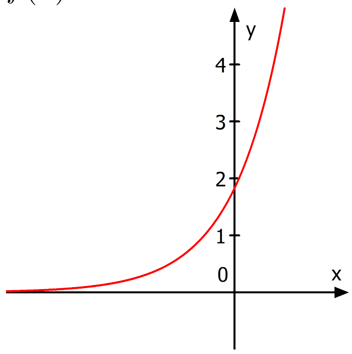
Asymptote $y = 0$

y-Achsenabschnitt: $f(0) = \frac{11}{6}$

Monoton wachsend

$f(x) \xrightarrow{x \to -\infty} 0$

$f(x) \xrightarrow{x \to \infty} \infty$



Lösung zu Übung 32

a) $f(x) = e^{-2x} - 3$

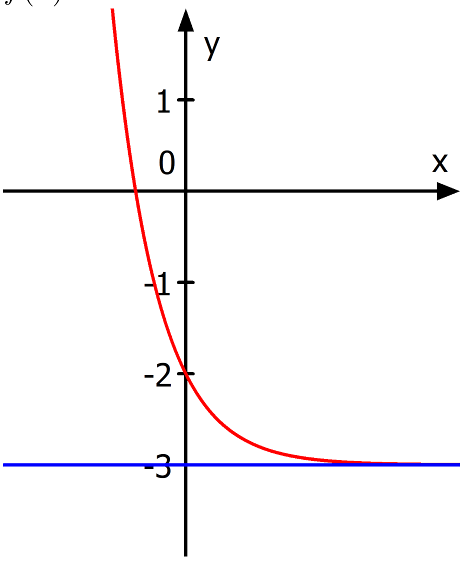
Asymptote $y = -3$

y-Achsenabschnitt: $f(0) = -2$

Monoton fallend

$f(x) \xrightarrow{x \to -\infty} \infty$

$f(x) \xrightarrow{x \to \infty} -3$



c) $f(x) = -3e^{2x} + 6$

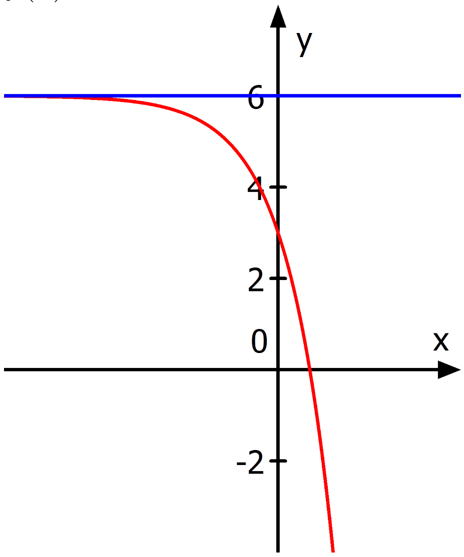
Asymptote $y = 6$

y-Achsenabschnitt: $f(0) = 3$

Monoton fallend

$f(x) \xrightarrow{x \to -\infty} 6$

$f(x) \xrightarrow{x \to \infty} -\infty$



b) $f(x) = 2e^{\frac{1}{2}x} + 1$

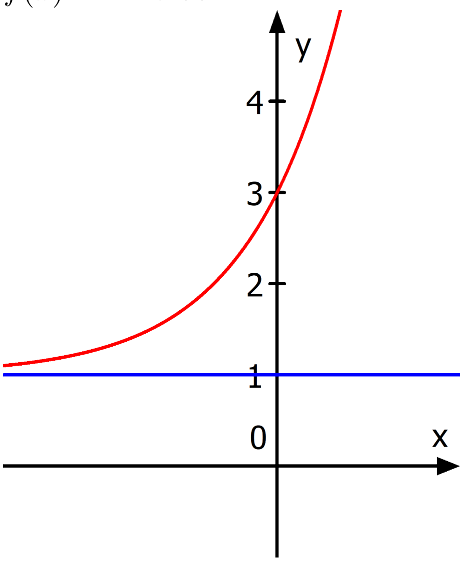
Asymptote $y = 1$

y-Achsenabschnitt: $f(0) = 3$

Monoton wachsend

$f(x) \xrightarrow{x \to -\infty} 1$

$f(x) \xrightarrow{x \to \infty} \infty$



d) $f(x) = -2e^{-7x} - 1$

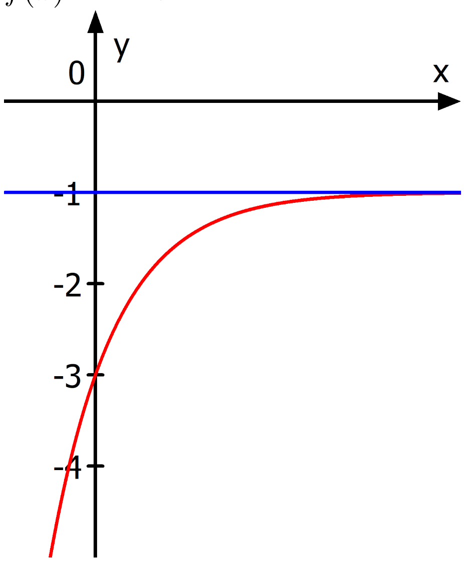
Asymptote $y = -1$

y-Achsenabschnitt: $f(0) = -3$

Monoton wachsend

$f(x) \xrightarrow{x \to -\infty} -\infty$

$f(x) \xrightarrow{x \to \infty} -1$



e) $f(x) = \frac{5}{2}e^{2x} - 2$

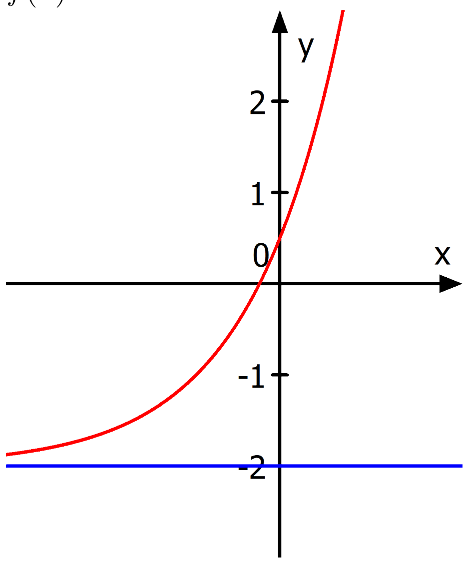
Asymptote $y = -2$

y-Achsenabschnitt: $f(0) = \frac{1}{2}$

Monoton wachsend

$f(x) \xrightarrow{x \to -\infty} -2$

$f(x) \xrightarrow{x \to \infty} \infty$



g) $f(x) = 2e^{-\frac{3}{8}x} - 5$

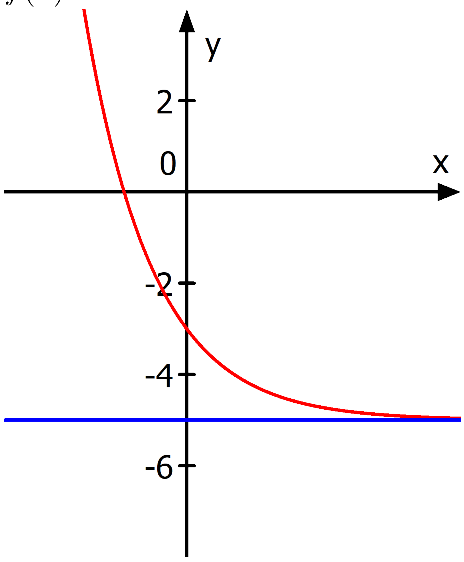
Asymptote $y = -5$

y-Achsenabschnitt: $f(0) = -3$

Monoton fallend

$f(x) \xrightarrow{x \to -\infty} \infty$

$f(x) \xrightarrow{x \to \infty} -5$



f) $f(x) = -8e^{3x} + 8$

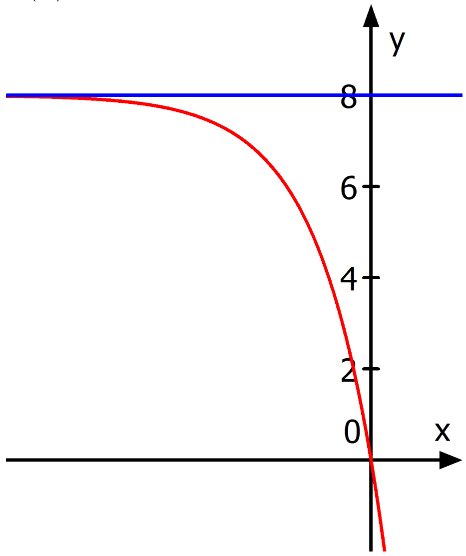
Asymptote $y = 8$

y-Achsenabschnitt: $f(0) = 0$

Monoton fallend

$f(x) \xrightarrow{x \to -\infty} 8$

$f(x) \xrightarrow{x \to \infty} -\infty$



h) $f(x) = -\frac{3}{2}e^{0,2x} + 2$

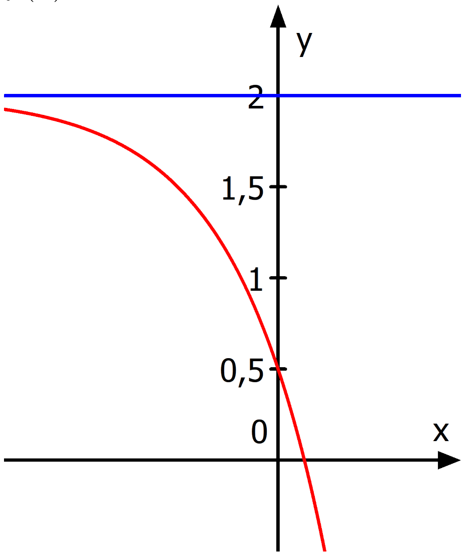
Asymptote $y = 2$

y-Achsenabschnitt: $f(0) = \frac{1}{2}$

Monoton fallend

$f(x) \xrightarrow{x \to -\infty} 2$

$f(x) \xrightarrow{x \to \infty} -\infty$



i) $f(x) = -5e^{-3{,}5x} + 5$

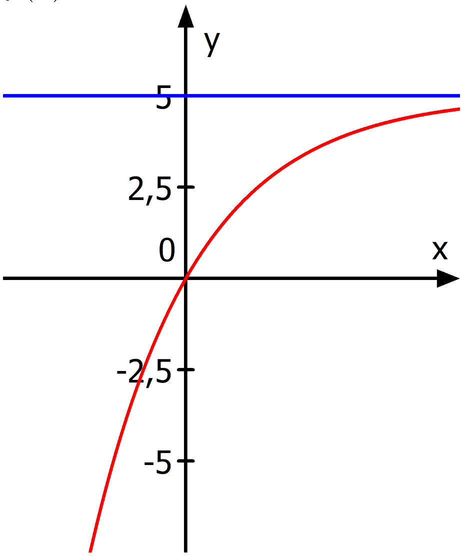
Asymptote $y = 5$

y-Achsenabschnitt: $f(0) = 0$

Monoton wachsend

$f(x) \xrightarrow{x \to -\infty} -\infty$

$f(x) \xrightarrow{x \to \infty} 5$



k) $f(x) = 2e^{-2x} + 2$

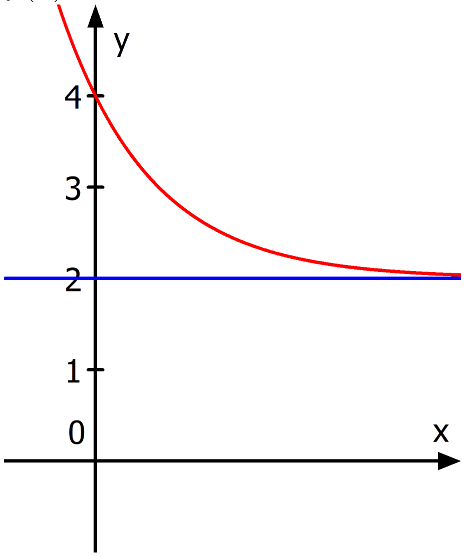
Asymptote $y = 2$

y-Achsenabschnitt: $f(0) = 4$

Monoton fallend

$f(x) \xrightarrow{x \to -\infty} \infty$

$f(x) \xrightarrow{x \to \infty} 2$



j) $f(x) = -8e^{0{,}3x} + 6$

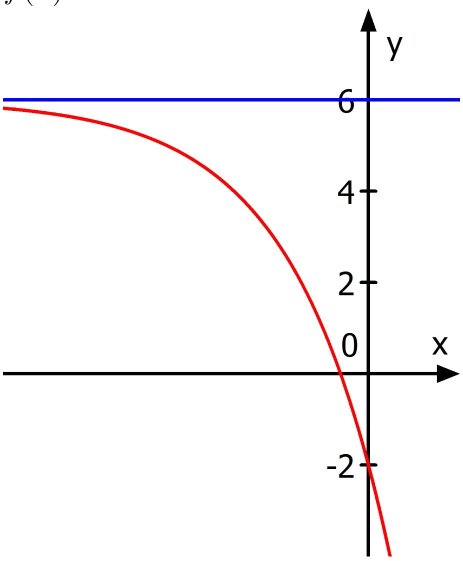
Asymptote $y = 6$

y-Achsenabschnitt: $f(0) = -2$

Monoton fallend

$f(x) \xrightarrow{x \to -\infty} 6$

$f(x) \xrightarrow{x \to \infty} -\infty$



l) $f(x) = -6 + 4e^{-7x}$

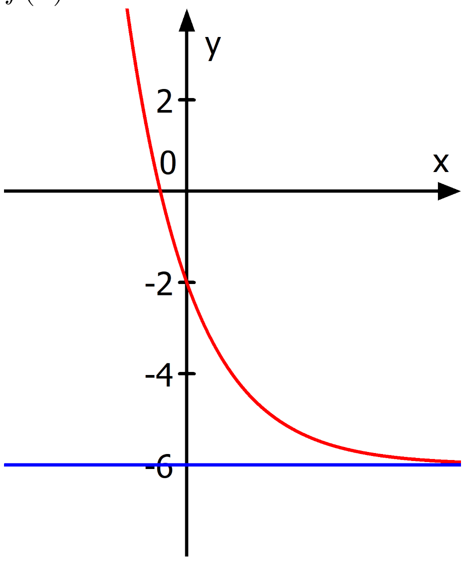
Asymptote $y = -6$

y-Achsenabschnitt: $f(0) = -2$

Monoton fallend

$f(x) \xrightarrow{x \to -\infty} \infty$

$f(x) \xrightarrow{x \to \infty} -6$



m) $f(x) = 8 - 5e^{x}$

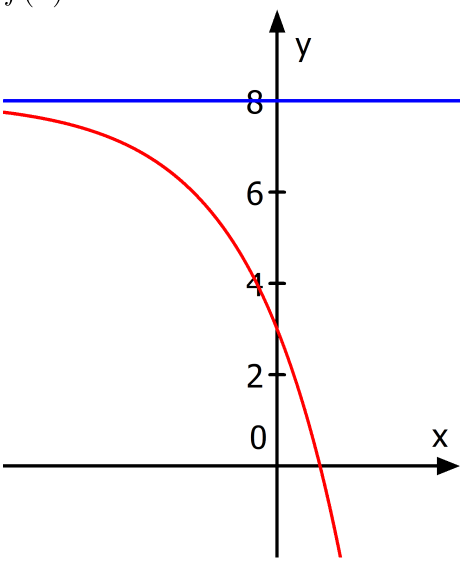
Asymptote $y = 8$

y-Achsenabschnitt: $f(0) = 3$

Monoton fallend

$f(x) \xrightarrow{x \to -\infty} 8$

$f(x) \xrightarrow{x \to \infty} -\infty$



n) $f(x) = -4e^{-2x} - 2$

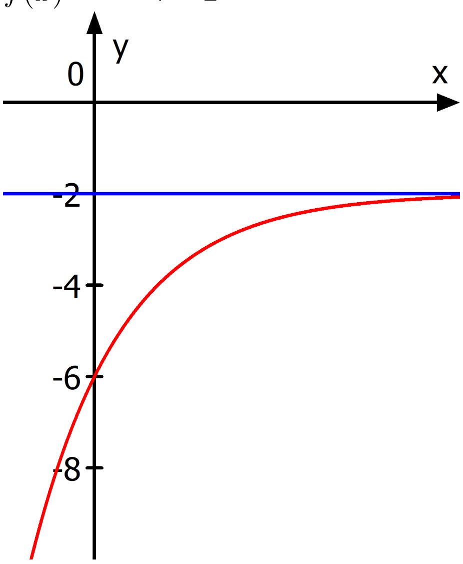
Asymptote $y = -2$

y-Achsenabschnitt: $f(0) = -6$

Monoton wachsend

$f(x) \xrightarrow{x \to -\infty} -\infty$

$f(x) \xrightarrow{x \to \infty} -2$



o) $f(x) = 2e^{-3x} + 4$

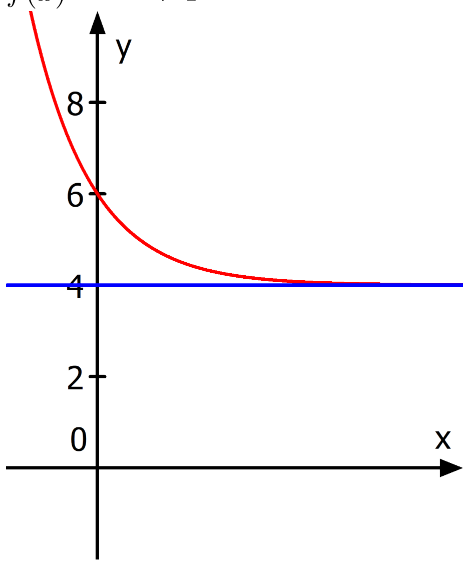
Asymptote $y = 4$

y-Achsenabschnitt: $f(0) = 6$

Monoton fallend

$f(x) \xrightarrow{x \to -\infty} \infty$

$f(x) \xrightarrow{x \to \infty} 4$



p) $f(x) = 5e^{0,2x} - 10$

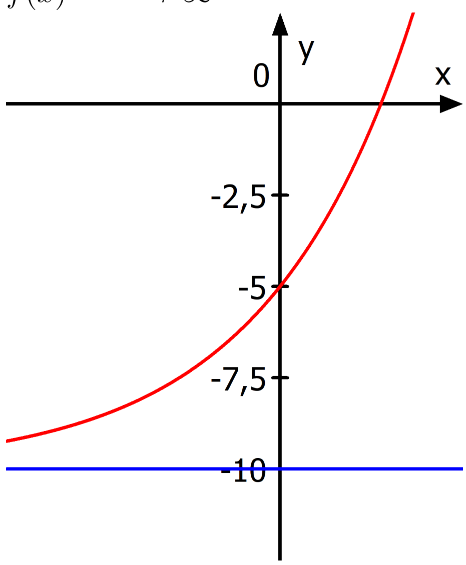
Asymptote $y = -10$

y-Achsenabschnitt: $f(0) = -5$

Monoton wachsend

$f(x) \xrightarrow{x \to -\infty} -10$

$f(x) \xrightarrow{x \to \infty} \infty$



q) $f(x) = -\frac{1}{4}e^{-\frac{2}{3}x} + \frac{7}{4}$

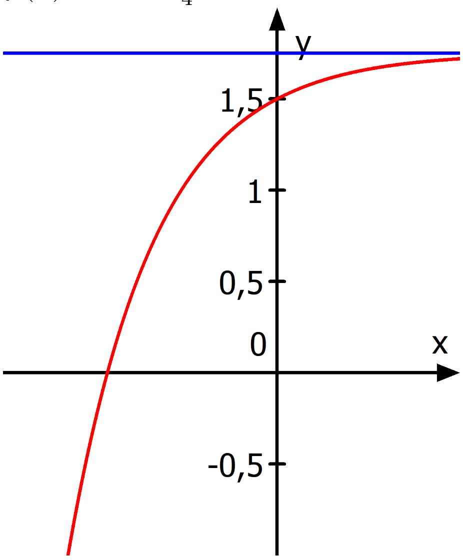
Asymptote $y = \frac{7}{4}$

y-Achsenabschnitt: $f(0) = \frac{3}{2}$

Monoton wachsend

$f(x) \xrightarrow{x \to -\infty} -\infty$

$f(x) \xrightarrow{x \to \infty} \frac{7}{4}$



r) $f(x) = 2e^{-0,2x} + 3,5$

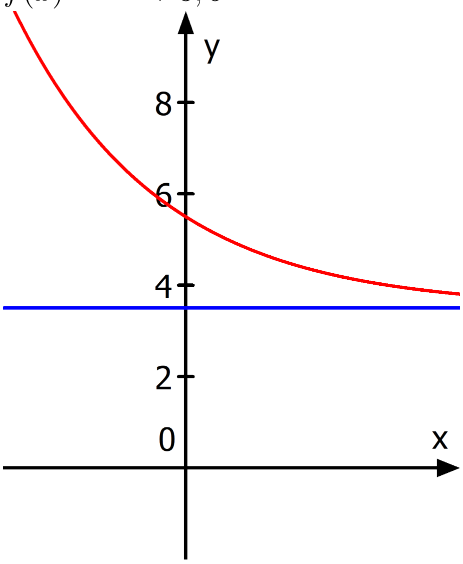
Asymptote $y = 3,5$

y-Achsenabschnitt: $f(0) = 5,5$

Monoton fallend

$f(x) \xrightarrow{x \to -\infty} \infty$

$f(x) \xrightarrow{x \to \infty} 3,5$



s) $f(x) = e^{-4x} + 3$

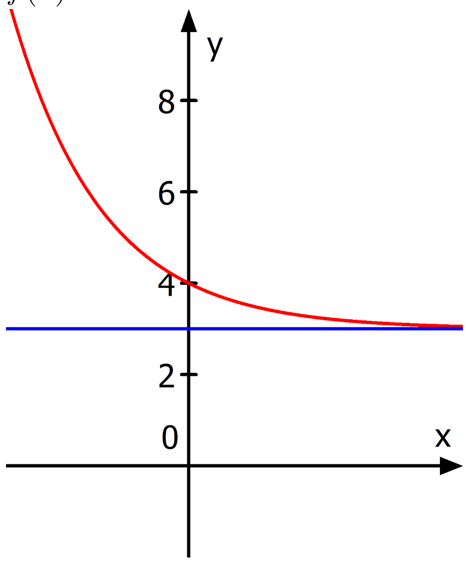
Asymptote $y = 3$

y-Achsenabschnitt: $f(0) = 4$

Monoton fallend

$f(x) \xrightarrow{x \to -\infty} \infty$

$f(x) \xrightarrow{x \to \infty} 3$



t) $f(x) = -4 + 5e^{7x}$

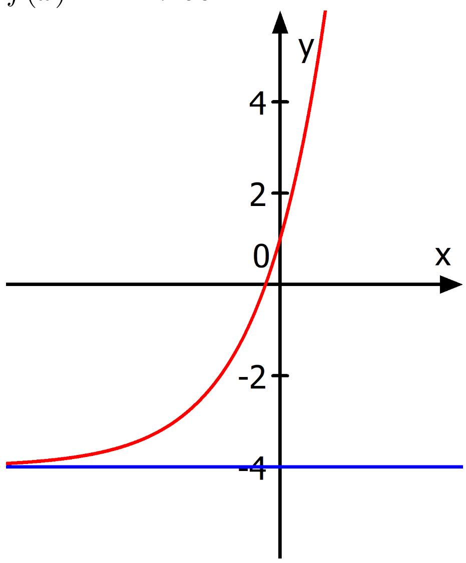
Asymptote $y = -4$

y-Achsenabschnitt: $f(0) = 1$

Monoton wachsend

$f(x) \xrightarrow{x \to -\infty} -4$

$f(x) \xrightarrow{x \to \infty} \infty$



u) $f(x) = \frac{3}{2} - \frac{9}{4}e^{\frac{3}{8}x}$

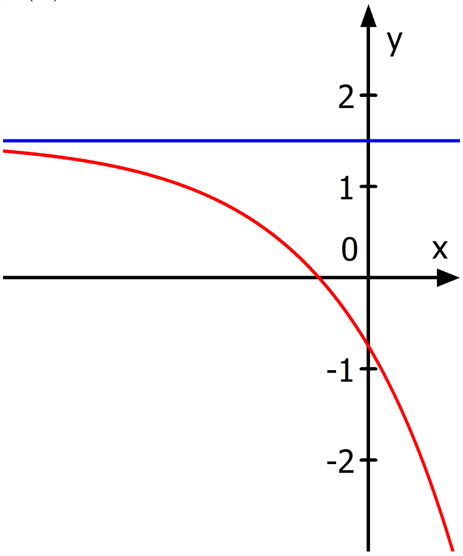
Asymptote $y = \frac{3}{2}$

y-Achsenabschnitt: $f(0) = -\frac{3}{4}$

Monoton fallend

$f(x) \xrightarrow{x\to-\infty} \frac{3}{2}$

$f(x) \xrightarrow{x\to\infty} -\infty$



w) $f(x) = 5\left(e^{-4x} + \frac{1}{2}\right)$

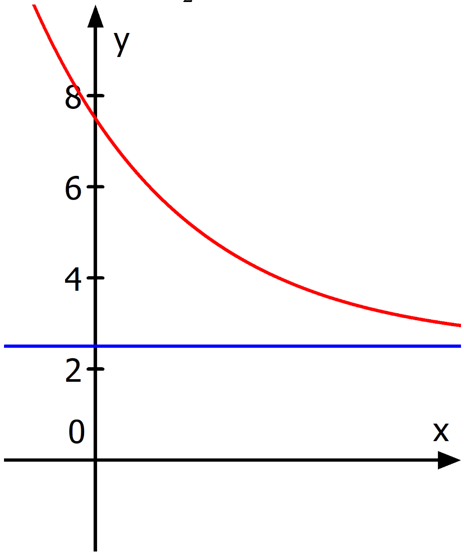
Asymptote $y = \frac{5}{2}$

y-Achsenabschnitt: $f(0) = \frac{15}{2} = 7,5$

Monoton fallend

$f(x) \xrightarrow{x\to-\infty} \infty$

$f(x) \xrightarrow{x\to\infty} \frac{5}{2}$



v) $f(x) = -2\left(1 + e^{-0,3x}\right)$

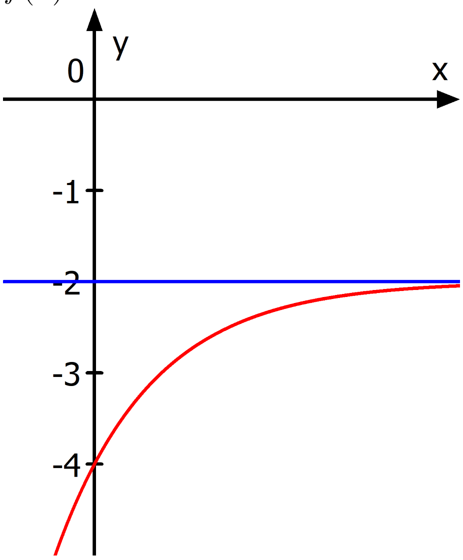
Asymptote $y = -2$

y-Achsenabschnitt: $f(0) = -4$

Monoton wachsend

$f(x) \xrightarrow{x\to-\infty} -\infty$

$f(x) \xrightarrow{x\to\infty} -2$



x) $f(x) = -2\left(2e^{6x} - 2\right)$

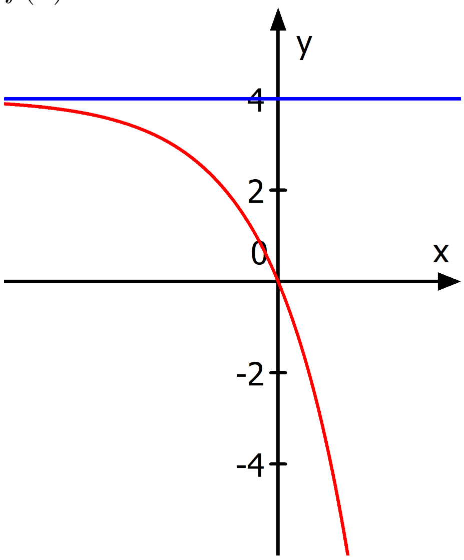
Asymptote $y = 4$

y-Achsenabschnitt: $f(0) = 0$

Monoton fallend

$f(x) \xrightarrow{x\to-\infty} 4$

$f(x) \xrightarrow{x\to\infty} -\infty$



y) $f(x) = -e^{-1,1x} + 3\left(e^{-1,1x} - 2\right)$

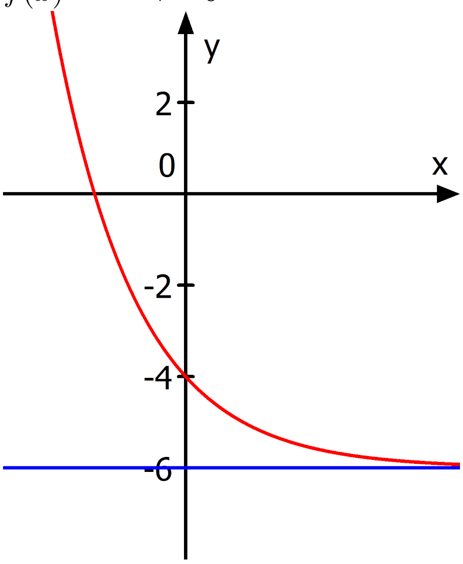
Asymptote $y = -6$

y-Achsenabschnitt: $f(0) = -4$

Monoton fallend

$f(x) \xrightarrow{x \to -\infty} \infty$

$f(x) \xrightarrow{x \to \infty} -6$



z) $f(x) = 4\left(0,25e^{1,25x} + 2\right) - 8$

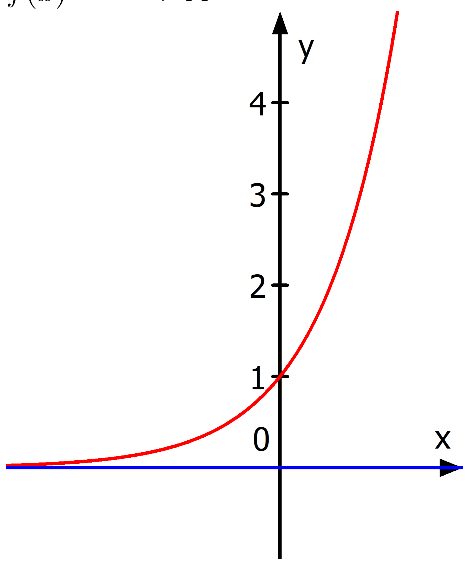
Asymptote $y = 0$

y-Achsenabschnitt: $f(0) = 1$

Monoton wachsend

$f(x) \xrightarrow{x \to -\infty} 0$

$f(x) \xrightarrow{x \to \infty} \infty$



Lösung zu Übung 33

a) $x = \ln(3)$

b) $x = \frac{1}{3}\ln(3)$

c) $x = \frac{1}{3}\ln\left(\frac{2}{5}\right) = -\frac{1}{3}\ln\left(\frac{5}{2}\right)$

d) $x = -\ln(4)$

e) keine Lösung

f) $x = -\frac{3}{2}\ln(16)$

g) $x_1 = \frac{1}{4}\ln(2)\,,\ x_2 = \frac{1}{4}\ln(3)$

h) $x = \ln(0,4)$

i) keine Lösung

j) $x = -\frac{1}{2}\ln(7)$

k) $x = -\frac{1}{2}\ln\left(\frac{1}{7}\right) = \frac{1}{2}\ln(7)$

l) $x_1 = -\frac{1}{3}\ln(3)\,,\ x_2 = -\frac{1}{3}\ln\left(\frac{1}{4}\right)$

m) $x = \frac{1}{5}\ln(2) = -\frac{1}{5}\ln\left(\frac{2}{1}2\right)$

n) $x = 0,5\ln(4,5) = -0,5\ln\left(\frac{2}{9}\right)$

o) $x = \frac{1}{6}\ln\left(\frac{8}{3}\right) = -\frac{1}{6}\ln\left(\frac{3}{8}\right)$

p) $x = 0$

q) $x = \frac{2}{3}\ln\left(\frac{1}{3}\right)$

r) $x = \frac{2}{5}\ln(6)$

s) keine Lösung

t) keine Lösung

u) $x = -\ln\left(\frac{3}{2}\right)$

v) $x = -\frac{1}{6}\ln\left(\frac{4}{5}\right)$

w) $x = \frac{1}{3}\ln(10) = -\frac{1}{3}\ln\left(\frac{1}{10}\right)$

x) $x = -4\ln(9)$

y) $x = \frac{1}{3}\ln(2) = -\frac{1}{3}\ln(0,5)$

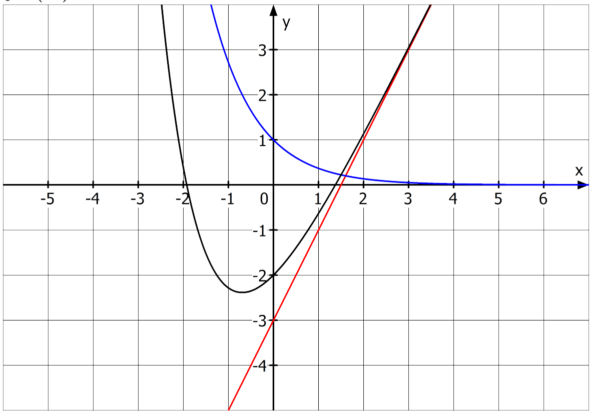
z) $x_1 = \ln(2)\,,\ x_2 = 0$

Lösung zu Übung 34

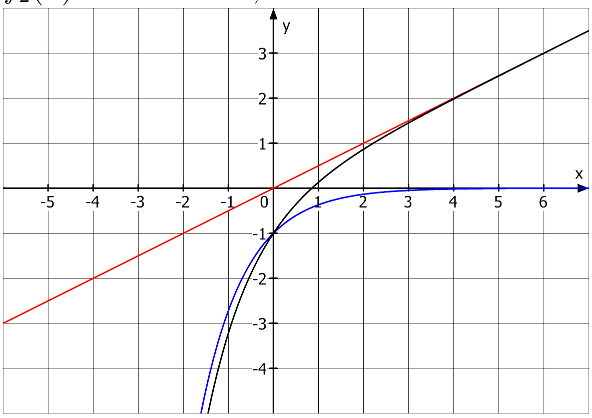
a) $f_1(x) = 3e^{\frac{1}{2}\ln\left(\frac{8}{3}\right)x}$
b) $f_2(x) = -e^{-\frac{1}{2}\ln(5)x}$
c) $f_3(x) = ae^{\frac{1}{3}\ln\left(\frac{4}{5}\right)x}$
d) $f_4(x) = -2e^{-\ln(2)x} + 7$
e) $f_5(x) = -3e^{\frac{1}{3}\ln(2)x} + 3$
f) $f_6(x) = 7e^{\frac{1}{4}\ln\left(\frac{2}{7}\right)x} - 4$
g) $f_7(x) = 9e^{-\frac{1}{5}\ln\left(\frac{1}{3}\right)x} - 1$
h) $f_8(x) = -e^{-\frac{1}{5}\ln(2)x} + 2$
i) $f_9(x) = e^{\ln(5)x} - 4$
j) $f_{10}(x) = 2e^{-\ln(2)x} - 1$
k) $f_{11}(x) = -e^{-\ln\left(\frac{1}{2}\right)x} + 2$
l) $f_{12}(x) = e^{0,5\ln(2)x} - 3$

Lösung zu Übung 35

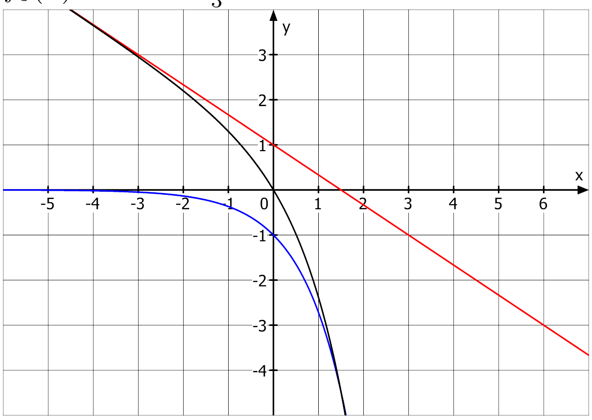
a) $f_1(x) = e^{-x} + 2x - 3$



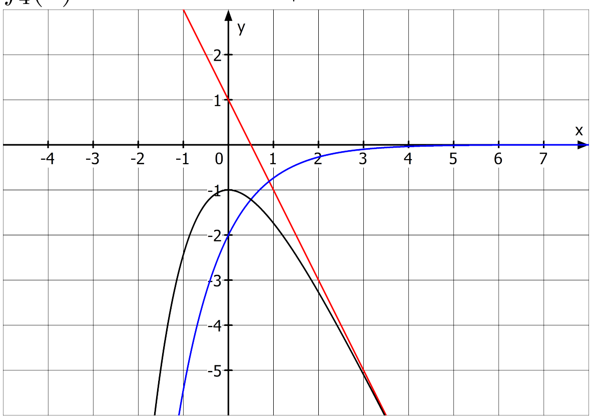
b) $f_2(x) = -e^{-2x} + 0,5x$



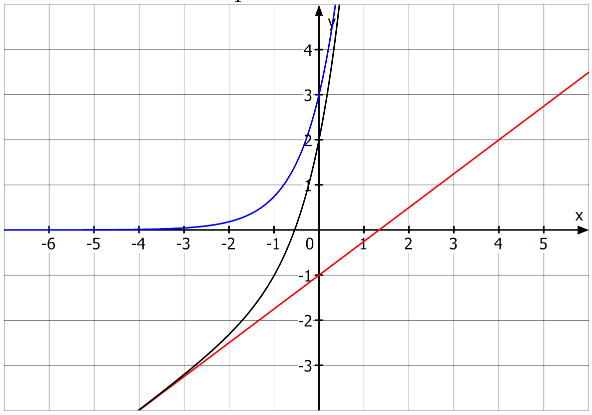
c) $f_3(x) = -e^{x} - \frac{2}{3}x + 1$



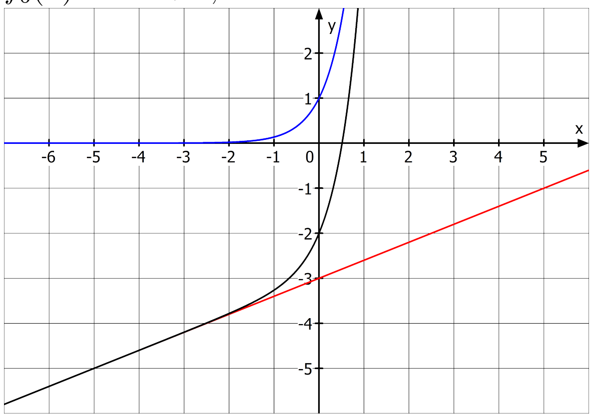
d) $f_4(x) = -2e^{-x} - 2x + 1$



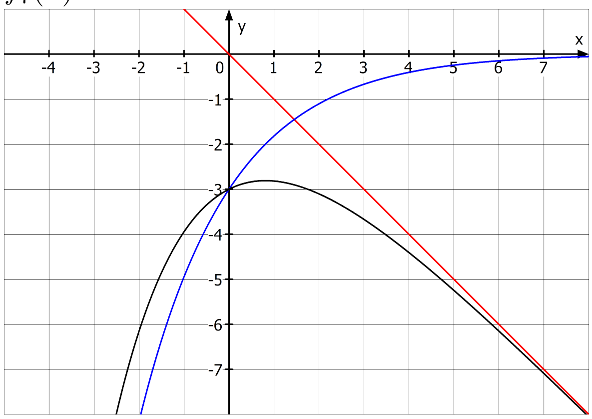
e) $f_5(x) = 3e^{1,4x} + \frac{3}{4}x - 1$



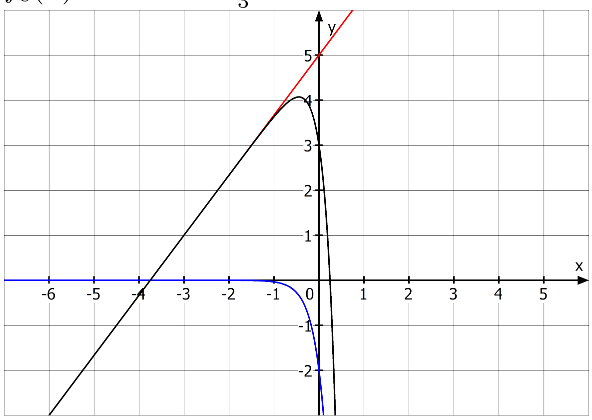
f) $f_6(x) = e^{2x} + 0,4x - 3$



g) $f_7(x) = -3e^{-0,5x} - x$



h) $f_8(x) = -2e^{4x} + \frac{4}{3}x + 5$



Lösung zu Übung 36

a) $f_1(x) = e^{-x} + 2x - 3$
$x_1 \approx 1,37 \quad x_2 \approx -1,92$

b) $f_2(x) = -e^{-2x} + 0,5x$
$x_1 \approx 0,60$

c) $f_3(x) = -e^{x} - \frac{2}{3}x + 1$
$x_1 = 0$ (Exakte Lösung, da diese NST zufälligerweise exakt bestimmbar ist)

d) $f_4(x) = -2e^{-x} - 2x + 1$
keine Nullstellen

e) $f_5(x) = 3e^{1,4x} + \frac{3}{4}x - 1$
$x_1 \approx -0,54$

f) $f_6(x) = e^{2x} + 0,4x - 3$
$x_1 \approx 0,51$

g) $f_7(x) = -3e^{-0,5x} - x$
keine Nullstellen

h) $f_8(x) = -2e^{4x} + \frac{4}{3}x + 5$
$x_1 \approx -3,75 \quad x_2 \approx 0,24$