Lösungsansätze für das Worst-Case-Portfoliooptimierungsproblem

Martin Böschen

June 15, 2010

Contents

Chapter 1

Einleitung

Sei (Ω, F, P) ein Wahrscheinlichkeitsraum. Sei W eine auf diesen Raum definierte Brownsche Bewegung. Wir betrachten das Black-Scholes-Marktmodell mit einer Aktie und konstanten Koeffizienten, die Preisprozesse seien also durch die folgenden Gleichungen gegeben:

$$\begin{aligned} dB(t) &= rB(t)dt \\ B(0) &= 1 \\ dS(t) &= S(t)(\mu dt + \sigma dW(t)) \\ S(0) &= s_0 \end{aligned}$$

Sei X der Vermögensprozess zur Handelsstrategie π. Er ist durch folgende Differentialgleichung gegeben:

$$\begin{aligned} dX(t) &= X(t)(rdt + \pi(t)(\mu - r)dt + \sigma dW(t)) \\ X(0) &= x_0 \end{aligned}$$

Sei U eine Nutzenfunktion. Dann nennen wir

$$\max_{\pi} E(U(X^{\pi}(T)))$$

das *klassische Portfoliooptimierungsproblem.* Wir diskutieren seine Lösung mittels stochastischer Steuerung, welche auf Merton zurüchgeht.

Das Black-Scholes-Modell wurde vielfach dafür kritisiert, dass seine Preisprozesse stetig sind. In Realität beobachtet man aber Crashes von Aktienmärkten. Um dies zu modellieren machen wir nun einen anderen Ansatz als den vielfach diskutierten Vorschlag den Aktienprozess S durch einen unstetigen Prozess zu modellieren: Wir betrachten eine Stoppzeit τ, zu der die Aktie um den Faktor k fällt. Das Endvermögen hat in diesem Modell dann die folgende Form:

$$X^{\pi\tau}(T) = (1 - \pi(\tau)k)X(T)$$

Nun betrachten wir den Markt als Gegenspieler des Investors und versuchen das folgende Maximierungsproblem

$$\max_{\pi} \min_{\tau} E(U(X^{\pi\tau}(T)))$$

zu lösen, das wir als *Worst-Case Portfoliooptimierungsproblem* bezeichnen. Wir diskutieren zwei von Ralf Korn vorgeschlagene Lösungen für dieses Problem. Die erste Lösung bestimmt die Handelstrategie durch Gleichgewichtsüberlegungen. Die zweite Lösung macht einen ganz anderen Ansatz, durch Aufstellung eines Systems von HJB-Gleichungen kann eine Wertfunktion ermittelt werden, aus der dann auf die optimale Handelstrategie geschlossen werden kann. Dabei werden wir insbesondere untersuchen, inwiefern sich diese beiden Ansätze in ihren Ergebnissen,in ihrer Beweismethodik und ihren weiteren Anwendungsmöglichkeiten unterscheiden.

Um konkret rechen zu können, werden wir sowohl das *klassische Portfoliooptimierungsproblem* als auch die beiden Ansätze beim *Worst-Case Portfoliooptimierungsproblem* nach Wahl der logarithmischen Nutzenfunktion diskutieren.

Schliesslich soll noch untersucht werden, inwieweit wir das Problem als ein optimales Stoppproblem, welches der Markt als Gegenspieler des Investors zu lösen hat, formuliert werden kann.

Chapter 2

Prelimnarien

2.1 Stochastische

Satz 2.1.1. *Die stochastische Differentialgleichung*

$$dX(t) = X(t)(A(t)dt + S(t)dW(t))$$
$$X(t_0) = x_0$$

besitzt die eindeutige Lösung

$$X_{t_0,x_0}(t) = \exp\left(\int_{t_0}^{t}(A(u) - \frac{1}{2}S(u)^2)du + \int_{t_0}^{t} S(u)dW(u)\right) \tag{2.1}$$

2.2 Finanzmarktmodell

Definition 2.2.1. *Sei (Ω, F, P) ein Wahrscheinlichkeitsraum. Sei W eine auf diesen Raum definierte Brownsche Bewegung. Seien r, μ, σ reelle Zahlen und sei $r < \mu$ und $\sigma > 0$. Der Bond B und die Aktie S seien die eindeutigen Lösungen der stochastischen Differentialgleichungen*

$$dB(t) = rB(t)dt \tag{2.2}$$
$$B(0) = 1 \tag{2.3}$$
$$dS(t) = S(t)(\mu dt + \sigma dW(t)) \tag{2.4}$$
$$S(0) = s_0 \tag{2.5}$$

Gelten alle diese Vorrausetzungen, so sagen wir dass die Vorrausetzungen unseres Standardfinanzmarktmodells gelten.

Definition 2.2.2. *Eine Handelsstrategie π ist ein stochastischer Prozess auf dem Wahrscheinlichkeitsraum des Standardfinanzmarktmodells.*

Definition 2.2.3. *Es gelten die Vorrausetzungen unseres Standardfinanzmarktmodells. Die Lösung von*

$$dX(t) = X(t)(rdt + \pi(t)(\mu - r)dt + \sigma dW(t)) \tag{2.6}$$
$$X(t_0) = x_0 \tag{2.7}$$

bezeichen wir mit $X_{\pi,t_0,x}$. Ist $t_0 = 0$, so schreiben wir auch $X_{\pi,x}$.

Definition 2.2.4. *Es gelten die Vorrausetzungen unseres Standardfinanzmarktmodells. Sei f durch*

$$f(\pi) = \pi(\mu - r) - \frac{1}{2}\pi^2\sigma^2 \tag{2.8}$$

definiert.

Satz 2.2.5. *f besitzt die beiden Nullstellen*

$$x_0 = 0 \tag{2.9}$$

$$x_1 = 2\frac{\pi - \mu}{\sigma^2}, \tag{2.10}$$

nimmt ihr Maximum bei

$$\pi_{max} = \frac{\pi - \mu}{\sigma^2} \tag{2.11}$$

an hat dort den Wert $\frac{1}{2}\frac{(\pi-\mu)^2}{\sigma^2}$.

Die eindeutige Lösung von 2.6 ist nach 2.1.1 duch

$$X_{\pi,t_0,x}(t) = x \exp\left(\int_{t_0}^{t} r + \pi(u)(\mu - r) - \frac{1}{2}\pi(u)^2\sigma^2 du + \int_{t_0}^{t} \pi(u)\sigma dW(u))\right) \tag{2.12}$$

$$= x \exp\left(\int_{t_0}^{t} f(\pi(u))du + \int_{t_0}^{t} \pi(u)\sigma dW(u))\right) \tag{2.13}$$

gegeben. Für einen konstanten Vermögensprozess π vereinfacht diese Gleichung sich zu:

$$\tag{2.14}$$

Logaritmiert man 2.12 und nimmt den Erwartungswert so erhält man

$$E(log(X_{\pi,x}(T))) = log(x) + \int_0^T (r + \pi(u)(\mu - r) - \frac{1}{2}\pi(u)^2\sigma^2)du \tag{2.15}$$

und bezeichnet dies als erwarteten logaritmischen Nutzen des Endvermögens. Unter der Annahme einer konstanten Handelsstrategie vereinfacht sich 2.15 zu

$$E(log(X_{\pi,x}(T))) = log(x) + (r + \pi(\mu - r) - \frac{1}{2}\pi^2\sigma^2)T. \tag{2.16}$$

Chapter 3

Portfoliooptimierung in kontinuirlicher Zeit mit stochastischer Steuerung und HJB-Gleichungen

3.1 Stochastische Steuerung

3.2 Anwendung auf das Portfolioproblem

Definition 3.2.1. *Sei $U : (0, \infty) \to R$ strikt konkav, stetig differenzierbar und es gelte*

$$\lim U'(x) = \infty, \qquad \lim U'(x) = 0. \tag{3.1}$$

Dann nennen wir U eine Nutzenfunktion.

Definition 3.2.2. *Es gelten die Vorraussetzungen unseres Standardfinanzmarktmodells. Wir bezeichen mit*

$$J(x, t, \pi, U) = E(U(X_{\pi,x,t}(T)) \tag{3.2}$$

den erwarteten Endnutzen durch Verfolgung einer Handestrategie π bezüglich U. Die Funktion

$$v_0^U(t, x) = \sup J(x, t, \pi, U) \tag{3.3}$$

heißt Wertfunktion.

Die 0 im subscript der Wertefunktion wird erst in späteren Kapiteln klar werden.

Satz 3.2.3. *Ist V eine Lösung von*

$$\underset{\pi \in (a,b)}{max} (\frac{1}{2}\pi^2\sigma^2x^2V_{xx}(t, x) + (r + \pi(b - r)x)V_x(t, x) + V_t(t, x) = 0) \tag{3.4}$$

mit

$$V(T, x) = U(x) \tag{3.5}$$

Dann gilt

$$V(t,x) = v_0^U(t,x) \tag{3.6}$$

und

$$p(t) \tag{3.7}$$

ist der optimale portfolioprozess.

Ist π argmin, so ist π die zugehörige Handelsstrategie.

3.3 Explizite Lösung für logaritmischen Nutzen

Wir zeigen, dass die Wertfunktion durch

$$v_0(t,x) = \log(x) + \left(r + \frac{1}{2}\left(\frac{\mu - r}{\sigma}\right)^2\right)(T-t) \tag{3.8}$$

ist. Dazu berechen wir die Ableitungen

$$V_t(t,x) = -(r + \frac{1}{2}(\frac{\mu - r}{\sigma})^2, \tag{3.9}$$

$$V_x(t,x) = \frac{1}{x} \tag{3.10}$$

und

$$V_x(t,x) = -\frac{1}{x^2}. \tag{3.11}$$

Einsetzen in Korn/Korn, Seite 276 ergibt:

$$\begin{aligned}
B &= \frac{1}{2}\pi^2\sigma^2x^2V_{xx}(t,x) + (r + \pi(b-r))xV_x(t,x) + V_t(t,x) \\
&= \frac{1}{2}\pi^2\sigma^2x^2\frac{1}{\cancel{x^2}} + (r + \pi(b-r))x\frac{1}{x} + -r + \frac{1}{2}(\frac{\mu - r}{\sigma})^2 \\
&= -\pi^2\frac{1}{2}\sigma^2 + \pi(b-r) - \frac{1}{2}(\frac{\mu - r}{\sigma})^2 \\
&= f(\pi) - \frac{1}{2}(\frac{\mu - r}{\sigma})^2
\end{aligned}$$

Dabei haben wir in der letzten Gleichung 2.8 eingesetzt. Das Maximum von f ist $\frac{1}{2}(\frac{\mu-r}{\sigma})^2$, Maximieren der vorhergehenden Gleichung ergibt also tatsächlich 0. Ausserdem erfüllt 3.8 auch die Endbedingung:

$$V(T,x) = (r + \frac{1}{2}(\frac{\mu - r}{\sigma})^2(T-T) = \log(x) + 0 = \log(x) \tag{3.12}$$

Maximiert wird die Gleichung durch

$$\pi = \frac{\pi - \mu}{\sigma^2}, \tag{3.13}$$

das ist dann der optimale Portfolioprozess.

Zur Probe berechen wir auch noch den besten konstanten Portfoliprozess, dabei erwarten wir natürlich das gleiche Ergenis. Wir müssen dazu nur das π finden, welches 2.16 maximiert. Dazu setzen wir 2.8 in 2.16 ein

$$\pi = \frac{\pi - \mu}{\sigma^2}, \tag{3.14}$$

$$\begin{aligned} E(log(X(t))) &= log(x) + (r + \pi(\mu - r) - \frac{1}{2}\pi^2\sigma^2)t \qquad (3.15) \\ &= log(x) + (r + f(\pi))t \qquad (3.16) \end{aligned}$$

Und man erkennt das wir das Maximum von f suchen. Das haben wir schon in 2.11 als

$$\pi = \frac{\pi - \mu}{\sigma^2} \tag{3.17}$$

und wir sind in unserer Probe bestätigt worden.

Chapter 4

Ein spieltheoretischer MaxMin-Ansatz zur Lösung des Portfolioproblems

Das Modell unseres Standardfinanzmarktes hat den Nachteil, dass es den Aktienekurs als stetige Funktion der Zeit modelliert. In der Realität beobachtet man aber Kurssprünge, insbesondere nach unten, die man als Crash bezeichnet.

Das modellieren wir nun dadurch, dass wir annehmen dass innerhalb des Zeithorizonts es zu einem Fall des Aktienkuses um das k-fachen seines Wertes kommen kann. Dabei gelte $k \in (0, k^*)$ und $0 < k^* < 1$. Bezeichnet t den Crashzeitpunkt, so lässt sich dieser Sachverhalt mittels der folgenden Formel ausgedrücken

$$k = \frac{X_{t-} - X_t}{X_{t-}} \Leftrightarrow X_t = (1-k)X_{t-}.$$

Auf welchen Faktor schrumpft das Vermögen bei einem Crash? Anders ausgedrückt, welches a löst die Gleichung

$$aX_{t-} = X_t?$$

Dazu führen wir folgende Rechnung durch

$$\begin{aligned} aX_{t-} &= \underbrace{(1-\pi(t))X_{t-}}_{\text{Bondvermögen}} + \underbrace{\pi(t)(1-k)X_{t-}}_{\text{gecrashtes Aktienvermögen}} && (4.1) \\ &= (1-\pi(t)k)X_{t-}, && (4.2) \end{aligned}$$

also $a = 1 - \pi(t)k$. Wie sieht nun das zu einem Vermögensprozess gehörige Endvermögen aus, wenn man in unserem Chrashscenario handelt.Sei $f(x, t_1, t_2)$ das Endvermögen das Endvemögen, wenn man beginnend mit dem Vermögen x in t_1 bis zum Zeitpunkt t_2 gemäß dem Vermögensprozess π handelt. Den Wert von f haben wir in 2.12 auch explizit angegeben. Für das endvermögen ist dann folgender Ansatz sinnvoll

$$X(T) = f((1-\pi(t)k)f(x, 0, t), t, T),$$

denn bis zum Crashzeitpunkt t sammelt man das Vermögen $f(x, 0, t)$ an, der Crash verringert es auf $(1 - \pi(t)k)f(x, 0, t)$ und dann hat man noch bis T Zeit es weiter zu vermehren. Mit 2.12 berechnen wir nun:

$$\begin{aligned} X(T) &= (1 - \pi(t)k)f(x, 0, t)\exp(\int_t^T \dots) & (4.3) \\ &= (1 - \pi(t)k)x\exp(\int_0^t \dots)\exp(\int_t^T \dots) & (4.4) \\ &= (1 - \pi(t)k)x\exp(\int_0^T \dots) & (4.5) \\ &= (1 - \pi(t)k)f(x, 0, T) & (4.6) \end{aligned}$$

Der Crash beinflusst das Endvermögen also nur um einen (zeitabhängigen) Faktor. Das hängt mit der Exponentialgestalt des Vermögensprozesses zusammen, der relative Vermögenszuwachs hängt nämlich nicht von der Höhe der Vermögens ab.

Diese mehr oder weniger heuristische Überlegungen motivieren nun das folgende Modell für das Endvermögen. Startet man zur Zeit s mit dem Anfangsvermügen x und erlebt man zur Zeit s einen Crash der Höhe k, dann hat man in T das Vermögen:

$$\hat{X}^{\pi,t,k}(T) = (1 - \pi(t)k)X^{\pi}(T). \qquad (4.7)$$

In [1] wird nun vorgeschlagen eine Strategie π_{opt} mit

$$\max_{\pi} \min_{t,k} E(U(X^{\pi\tau}(T))) = \min_{\tau} E(U(X^{\pi_{opt}\tau}(T))) \qquad (4.8)$$

zu suchen. Dieser Ansatz stammt aus der Spieltheorie, man versucht also den minimalen Nutzen zu maximieren. Diesen MaxMin-Ansatz möchte ich gundsätzlich übernehmen, kritisiere die Formulierung 4.8 aber aus zweierlei Gründen. Zum einen wollen wir auch Strategien modellieren, die auf den Crash reagieren können. Nach dem Crash wecheln wir in die optimale Stategie des crashfreien settings. Das wird hier aber nicht mitmodelliert. wir können das ausdrücken, indem wir versuchen

$$\min_{t,k} E(v(t, \hat{X}^{\pi,t,k}(T)) \qquad (4.9)$$

zu maximieren. Zum anderen soll der Markt auch die Möglichkeit haben, gar nicht zu crashen. In der gegebenen Formulierung könnte man argumentieren, dass sei durch einen Crash der Höhe $k = 0$ mitmodelliert. Wir wollen das aber explizit machen, indem wir versuchen das Minimum aus 4.9 und dem dem erwarteten Nutzen im Crashfreien setting zu maximieren. Das ist in der Modellierung sauberer und wird auch später die Beweise durchsichtiger machen. Dann ist es auch nicht mehr nötig, über verschieden Crashhöhen zu minimieren. Ist unsere Aktienposition positiv, so schadet uns ein Crash der maximalen Größe am meisten, ist sie negativ (wenn wir also Aktien leerverkauft haben), so schadet uns das Ausbleiben eines Crashes am meisten. Alle diese Gedanken berücksichtigend, gelangen wir so zur folgenden Definition:

Definition 4.0.1. *Jeder Handelsstrategie ordnen wir die Worst-Case-Schranke*

$$WC(\pi) = min(\inf_t \quad E(v(t, X(t)(1 - \pi(t)k^*))), E(U(X(T))))$$

zu. Die Aufgabe

$$max \qquad WC(\pi)$$

bezeichnen wir als Worst-Case-Portfoliooptimierungsproblem. Eine Strategie, für die das Maximimum angenommen wird bezeichen wir als optimale Strategie.

Wir berechen die Worst-Case-Schranke im Log-utility-modell der reinen Bondstrategie. Intuitiv ist klar, das der Worst-Case das Ausbleiben eines Crashes ist. Denn ein Crash verursacht uns keinen Schaden, aber gibt uns die Möglichkeit in die optimale Stategie des crashfreien Settings zu wechseln. Das machen wir nochmal explizit. Sei also $\pi_0 = 0$.

$$\begin{aligned} WC(\pi_0) &= \min(\inf_t \quad E(v_0(t, X(t)(1 - \pi_0(t)k^*))), E(\log(X(T)))) \\ &= \min(\inf_t \quad v_0(t, x\exp(rt)), \log(x\exp(rt)) \\ &= \min(\inf_t \quad \log(x) + rt + \left[r + \frac{1}{2}\left(\frac{\mu - r}{\sigma}\right)^2\right](T - t), \log(x\exp(rt)) \\ &= \min(\inf_t \quad \log(x) + \left[\frac{1}{2}\left(\frac{\mu - r}{\sigma}\right)^2\right](T - t) + rT, \log(x\exp(rt)) \\ &= \log(x) + rT, \end{aligned}$$

denn in der letzen Zeile ist klar, dass das inf im ersten Argunement von min bei $t = T$ anegnommen wird. Wir halten also

$$WC(\pi_0) = \log(x) + rT, \tag{4.10}$$

fest.

Als nächstes berechen wir die Worst-Case-Schranke, wenn man der optimalen Startegie $\pi^* = \frac{\pi - \mu}{\sigma^2}$ des crashfreien Scenarios verfolgt:

$$WC(\pi^*) = \log(x) + rT + \frac{1}{2}\left(\frac{\mu - r}{\sigma}\right)^2 T + \log(1 - \pi^* k^*), \tag{4.11}$$

Der Unterschied zwischen diesen beiden Schranken liegt also im Term $\frac{1}{2}\left(\frac{\mu - r}{\sigma}\right)^2 T + \log(1 - \pi^* k^*)$. Nur wenn der Zeithorizont groß genug ist ist, wird dieser Term positiv.Dann überwiegt die höhere Rendite der Aktie den Schaden der uns einmal durch den Crash zugefügt wurde. Eine optimale Stategie sollte diese Effekte ausbalancieren und je näher man ssich crashfrei dem Ende des zeithorizonts genähert hat, desto vorsichtiger sollte man in AKtien investieren.

Wir müssen uns nun noch um die Klasse der Handelsstrategien Gedanken machen. Um eine Pleite zu verhindern müssen wir die Wert der Handelstrategie auf $< \frac{1}{k^*}$ einschränken.

Satz 4.0.2. *Es gilt:* $WC(\pi^+) \geq WC(\pi)$

Proof. Der Beweis ist so organisiert, dass wir erst seine Struktur zeigen, und dann die Details ausarbeiten. Sei

$$\begin{aligned}
A &:= \inf_t \quad E(v(t, \hat{X}^{\pi,t,k^*}(T))) \\
B &:= E(U(X^{\pi}(T))) \\
A^+ &:= \inf_t \quad E(v(t, \hat{X}^{\pi^+,t,k^*}(T))) \\
B^+ &:= E(U(X^{\pi^+}(T)))
\end{aligned}$$

Wir haben also

$$min(A, B) \leq min(A^+, B^+) \tag{4.12}$$

zu zeigen. Wir zeigen zunächst, dass im crashfreien Scenario π^+ einen höheren erwarteten Nutzen bringt, also

$$B \leq B^+ \tag{4.13}$$

Wenn $A \leq A^+$ sind wir wegen $min(A, B) \leq B \leq B^+$ und $min(A, B) \leq A \leq A^+$, also auch $min(A, B) \leq min(A^+, B^+)$ fertig. Sei also $A > A^+$. Dann gilt

$$\text{für alle t} \qquad \pi(t) < 0 \tag{4.14}$$

und

$$A^+ = B^+. \tag{4.15}$$

In dem Fall ist das Worst-Case-Scenario aber das Ausbleiben eines Crashes, also

$$A \geq B, \tag{4.16}$$

und dann ist die risikofreie Bondstrategie die beste, also

$$B \leq B^+, \tag{4.17}$$

Insgesamt folgt also

$$min(A, B) = B \leq B^+ = A^+ = min(A^+, B^+) \tag{4.18}$$

□

Satz 4.0.3. *Ist $\hat{\pi}$ eine Lösung der Differentialgleichung*

$$\dot{\pi(t)} = \frac{1}{k}(1 - \pi(t)k^*)\left(\pi(t)(\mu - r) - \frac{1}{2}\left(\pi(t)^2\sigma^2 + \left(\frac{\mu - r}{\sigma}\right)^2\right)\right) \tag{4.19}$$

mit

$$\pi(T) = 0 \tag{4.20}$$

und

$$0 \leq \pi < \frac{1}{k*}, \tag{4.21}$$

dann gilt

$$v_0(t, x(1 - \pi(t)k^*)) = E(\log(X^{\hat{\pi},t,x}(T))) \tag{4.22}$$

Proof. Wir formen 4.19 zunächst um:

$$\frac{\dot{\pi(t)}k^*}{(1-\pi(t)k^*)} = \left(\pi(t)(\mu-r) - \frac{1}{2}\left(\pi(t)^2\sigma^2 + \left(\frac{\mu-r}{\sigma}\right)^2\right)\right) \tag{4.23}$$

Integrieren von t nach T ergibt:

$$[-\log(1-\pi(s)k^*)]_t^T = \int_t^T \pi(u)(\mu-r) - \frac{1}{2}\left(\pi(u)^2\sigma^2 + \left(\frac{\mu-r}{\sigma}\right)^2\right) du \tag{4.24}$$

Berechnung der linken Seite unter Beachtung von $\pi(T) = 0$ und herausziehen des bezüglich u konstanten Teil des Integrals auf der rechten Seite ergibt

$$\log(1-\pi(t)k^*) = \int_t^T \pi(u)(\mu-r) - \frac{1}{2}\left(\pi(u)^2\sigma^2\right) du - \frac{1}{2}\left(\frac{\mu-r}{\sigma}\right)^2 (T-t) \tag{4.25}$$

verinfachen.

Addieren wir $\frac{1}{2}\left(\frac{\mu-r}{\sigma}\right)^2 (T-t)$ zu dieser Gleichung, so erhalten wir

$$\log(1-\pi(t)k^*) + \frac{1}{2}\left(\frac{\mu-r}{\sigma}\right)^2 (T-t) = \int_t^T \pi(u)(\mu-r) - \frac{1}{2}\left(\pi(u)^2\sigma^2\right) du \tag{4.26}$$

Damit erhalten wir

$$v_0(t,(1-\pi(t)k^*)) = \log(1-\pi(t)k^*) + \frac{1}{2}\left(\frac{\mu-r}{\sigma}\right)^2 (T-t) \qquad 3.8 \tag{4.27}$$

$$= \int_t^T \pi(u)(\mu-r) - \frac{1}{2}\left(\pi(u)^2\sigma^2\right) du \qquad 4.26 \tag{4.28}$$

$$= E(\log(X'^{\pi})) \qquad \text{to be refenrencde} \tag{4.29}$$

□

Satz 4.0.4. $\hat{\pi} < \pi^*$

Satz 4.0.5. *Die Lösung der Differentalgleichung 4.19 ist eine Lösung des Worst-Case-Problems.*

Proof. Die Struktur dieses Beweises ist wie folgt. Wie betrachten in Fallunterscheidungen verschiedene Handelsstrategien die sich bezüglich $\hat{\pi}$ wie folgt unterscheiden.

- Handelstrategien mit einer höherem erwarteten Nutzen im crashfreien Scenario ...
  - ...und einem höheren Aktienanteil zu Beginn.
  - ... und einem niedrigerem Aktienanteil zu Beginn.
- Handelsstrategien mit einem niedrigeren erwarteten Nutzen im im crashfreien Scenario.

Für jeden Fall zeigen wir dann das $\hat{\pi}$ jeweils eine bessere Worstcaseschranke besitzt. Damit muss $\hat{\pi}$ dann die optimale Stategie sein.

Sei also π eine Handesstrategie mit einer höheren höherem erwarteten Nutzen im crashfreien Scenario. Aus 2.15 folgt dann

$$E(\int_0^T f(\pi(t))dt) \geq \int_0^T f(\hat{\pi}(t))dt. \tag{4.30}$$

Weiter gilt

$$\int_0^T f(E(\pi(t)))dt) \geq \int_0^T E(\pi(t))(\mu - r) - \frac{1}{2}E(\pi(t))^2\sigma^2 dt \tag{4.31}$$

$$\geq \int_0^T E(\pi(t))(\mu - r) - \frac{1}{2}E(\pi(t)^2)\sigma^2 dt \tag{4.32}$$

$$\geq E(\int_0^T f(\pi(t))dt) \tag{4.33}$$

Dann muss es aber ein t geben mit

$$f(E(\pi(t))) > f(\hat{\pi}(t)) \tag{4.34}$$

Da $\hat{\pi} \leq \pi^*$ und f bis π^* streng monoton wachsend ist folgt

$$E(\pi(t)) \geq \hat{\pi}(t). \tag{4.35}$$

Wir bezeichen mit $\hat{v}$ den erwarteten logaritmischen Nutzen durch Verfolgung der Handelsstrategie $\hat{\pi}$. Wir geben sie hier nochmal explizit an und berechnen dir zur Anwendung der Ito-Formel benötigten partiellen Ableitungen:

$$\hat{v}(t,x) = \log(x) + r(T-t) + \int_t^T \hat{\pi}(u)(\mu - r) - \frac{1}{2}\hat{\pi}(u)^2\sigma^2 du \tag{4.36}$$

$$\hat{v}_x(t,x) = \frac{1}{x} \tag{4.37}$$

$$\hat{v}_{xx}(t,x) = -\frac{1}{x^2} \tag{4.38}$$

$$\hat{v}_t(t,x) = -\hat{\pi}(t)(\mu - r) + \frac{1}{2}\hat{\pi}(t)^2\sigma^2 - r \tag{4.39}$$

Wir wiedeholen hier auch nochmal die X treibende Dynamik um im folgenden die Anwendung der Ito-Formel nachvollziehen zu können:

$$dX(t) = X(t)(r + \pi(t)(\mu - r))dt + X(t)\sigma dW(t) \tag{4.40}$$

$$X(0) = x_0 \tag{4.41}$$

Nun machen wir folgende Rechnung

$$v_0(t, (1 - \pi(t)k^*)) = E(\log(X'^{\pi})) \tag{4.42}$$

$$= \hat{v}(t, X(t)) \tag{4.43}$$

$$= \hat{v}(0, x) \tag{4.44}$$

$$+ \int_0^t \hat{v}_x(s, X)\hat{\pi}(s)\sigma dW(s) \tag{4.45}$$

$$+ \int_0^t \hat{v}_t(s, X) + \hat{v}_x(s, X)(r + \hat{\pi}(s)(\mu - r)) + \frac{1}{2}\hat{v}_{xx}(s, X)\hat{\pi}(s)^2\sigma^2 ds \tag{4.46}$$

Nehmen wir nun davon den Erwartungswert, so fällt das Integral bezüglich der Brownschen Bewegung dank unserser Vorrausetzungen an eine zulässige Handelsstartegie weg, für das andere Integral berechnen wir:

$$
\begin{aligned}
&= \int_0^t -\hat{\pi}(t)(\mu - r) + \frac{1}{2}\hat{\pi}(t)^2\sigma^2 - r + (r + \hat{\pi}(s)(\mu - r)) + \frac{1}{2}\hat{\pi}(s)^2\sigma^2 ds && (4.47)\\
&= \int_0^t E(-\pi(t)(\mu - r) + \frac{1}{2}\pi(t)^2\sigma^2) - r + (r + \hat{\pi}(s)(\mu - r)) + \frac{1}{2}\hat{\pi}(s)^2\sigma^2 ds && (4.48)\\
&= 0 && (4.49)
\end{aligned}
$$

Dabei haben wir die Ableitungen eingesetzt, Integral und Erwartungswert vertauscht. Wir erhalten also

$$
\begin{aligned}
E(v_0(t, \hat{X}(t)(1 - \pi(t)k^*))) &= E(\hat{v}(t, X(t))) && (4.50)\\
&= \hat{v}(0, x) && (4.51)\\
&= \hat{v}(T, X(T)) && (4.52)
\end{aligned}
$$

Also gilt:

$$
\begin{aligned}
WC(\hat{\pi}) &= \min(\inf_t \quad E(v_0(t, \hat{X}(t)(1 - \pi(t)k^*))), \hat{v}(0, x)) && (4.53)\\
&= \min(\inf_t \quad \hat{v}(0, x), \hat{v}(0, x)) && (4.54)\\
&= \hat{v}(0, x) && (4.55)
\end{aligned}
$$

Fall $\pi(0) \geq \hat{\pi}(0)$: Dann gilt:

$$
\begin{aligned}
WC(\pi) &\leq E(v_0(0, X(1 - \pi(0)k^*))) && (4.56)\\
&= v_0(0, x(1 - \pi(0)k^*) && (4.57)\\
&\leq v_0(0, x(1 - \hat{\pi}(0)k^*) && (4.58)\\
&= \hat{v}(0, x) && (4.59)\\
&= WC(\hat{\pi}) && (4.60)
\end{aligned}
$$

Fall $\pi(0) \leq \hat{\pi}(0)$: Wir betrachten dann

$$\tau = \inf(t; E(\pi(t)) > \hat{\pi}(t)). \tag{4.61}$$

Wegen 4.35 liegt dieses τ zwischen 0 und T.

Offensichtlich gilt dann auch:

$$E(\log(X^\pi(\tau))) \leq E(\log(\hat{X}(\tau))) \tag{4.62}$$

$$
\begin{aligned}
E(\log(1 - \pi(t)k^*)) &\leq \log(1 - k^* E(\pi(t)) && \text{Jensens Ungleichung} && (4.63)\\
&< \log(1 - k^* \hat{\pi}(t)) && \text{wegen 4.35} && (4.64)
\end{aligned}
$$

Nun folgern wir

$$\begin{aligned}
WC(\pi) &\leq E(v_0(t, X(1-\pi(t)k^*))) && (4.65)\\
&= E(\log(X^\pi(t))) + E(1-\pi(t)k^*) + ... && (4.66)\\
&< E(\log(X^\pi(t))) + \log(1-k^*\hat{\pi}(t)) + .. \quad \text{wegen 4.63} && (4.67)\\
&< E(\log(\hat{X}(\tau))) + \log(1-k^*\hat{\pi}(t)) + .. \quad \text{wegen 4.62} && (4.68)\\
&= E(v_0(t, \hat{X}(\tau)(1-\pi(t)k^*))) && (4.69)\\
&= WC(\hat{\pi}) && (4.70)
\end{aligned}$$

Es bleibt noch der Fall, wo π einen kleineren erwarteten Nutzen im crashfreien Scenario besitzt. Dann gilt:

$$\begin{aligned}
WC(\pi) &\leq E(\log(X^\pi(T))) \quad \text{Definition von WC} && (4.71)\\
&= E(\log(\hat{X}(T))) \quad \text{nach Vorrausetzung in diesem Fall} && (4.72)\\
&\leq WC(\hat{\pi}) \quad \text{wegen 4.53} && (4.73)\\
& && (4.74)
\end{aligned}$$

□

Wir haben noch nicht gezeigt, dass $\hat{\pi}$ wirklich eine bessere Worst-Case Schranke besitzt als die Bondstrategie. Dass tun wir nun, indem wir eine Stategie angeben, die eine höhere Worstcaseschranke als die pure Bondstrategie hat. Da $\hat{\pi}$ optimal ist, muss es auch eine bessere Worstcaseschranke besitzen. Für eine numerische Berechnung verweisen wir auf das letzte Kapitel.

Satz 4.0.6. *Es gibt eine Strategie, mit einer besseren Worstcaseschranke.*

Proof. Wir betrachten die Strategie

$$\pi(t) = \frac{1}{2}\min\left(\frac{1}{k^*}(1-\exp(-\frac{1}{2}\frac{\pi-\mu}{\sigma}^2(T-t))), \frac{\pi-\mu}{\sigma^2}\right) \tag{4.75}$$

Also gilt:

$$0 < \pi(t) \leq \frac{\pi-\mu}{\sigma^2} \tag{4.76}$$

Also folgt $f(\pi(t)) > 0$ und auch

$$0 < E\left[\int_t^T f(\pi(s))ds\right] \tag{4.77}$$

Weiter gilt:

$$\begin{aligned}
v_0(t, x(1-\pi(t))k^*) &= \log(x) + \log((1-\pi(t))k^*) + (r + \frac{1}{2}\left(\frac{\mu-r}{\sigma}\right)^2)(T-t)\\
&> \log(x) + \log(1-(1-\exp(-\frac{1}{2}\frac{\pi-\mu}{\sigma}^2(T-t)))) + (r + \frac{1}{2}\left(\frac{\mu-r}{\sigma}\right)^2)(T-t)\\
&= \log(x) + -\frac{1}{2}\frac{\pi-\mu}{\sigma}^2(T-t) + (r + \frac{1}{2}\left(\frac{\mu-r}{\sigma}\right)^2)(T-t)\\
&= \log(x) + r(T-t)\\
&= \log(x\exp(r(T-t)))
\end{aligned}$$

Dabei ergibt sich die Ungleichung, da $\log(1 - xk^*)$ streng fallend in x ist und

$$\pi(t) < 2\pi(t) \leq \frac{1}{k^*}(1 - \exp(-\frac{1}{2}\frac{\pi - \mu}{\sigma}^2(T - t)))$$

Also gilt:

$$v_0(t, x(1 - \pi(t))k^*) = \log(x \exp(r(T - t))) \tag{4.78}$$

Also folgt aus 4.78 und 4.77 das π eine bessere Strategie als die reine Bonddstrategie ist. $\square$

Wir wollen nun noch den besten konstanten Portfoliprozess ausrechen:

Satz 4.0.7. *Der beste konstante Portfolioprozess ist:*

$$\pi = \left(\frac{1}{2} \left(\frac{\pi - \mu}{\sigma^2} + \frac{1}{k^*} \right) - \sqrt{\frac{1}{4} \left(\frac{\pi - \mu}{\sigma^2} - \frac{1}{k^*} \right)^2 + \frac{1}{\sigma^2 T}} \right)^+ \tag{4.79}$$

Weiter gilt: $\pi - > \min(\pi^*, \frac{1}{k^*})$ *für* $T - > \infty$.

Proof. Zunächst zeigen wir die Grenzwertaussage. Geht T gegen ∞ so nimmt π folgende Gestalt an:

$$\pi = \left(\frac{1}{2} \left(\frac{\pi - \mu}{\sigma^2} + \frac{1}{k^*} \right) - \frac{1}{2} | \frac{\pi - \mu}{\sigma^2} - \frac{1}{k^*} | \right)^+ \tag{4.80}$$

Daraus wird die Aussage offensichtlich.

Nun zur eigentlichen Aussage: Wir geben zunächst die Worst-Case-Schranke für einen konstanten Portfolioprozess an:

$$WC() = \log(x) + rT + \left(\pi(\mu - r) - \frac{1}{2}\pi^2\sigma^2 \right) T + \log(1 - \pi k^*) \tag{4.81}$$

Nun suchen wir dasjenige π das diesen Ausdruck maximiert. Ableiten nach π ergibt:

$$\left((\mu - r) - \pi\sigma^2\right) T + \frac{-k^*}{1 - \pi k^*}$$

Gleichsetzen mit 0 und Multiplikation mit $1 - \pi k^*$ ergibt

$$(\mu - r)T - (\mu - r)T\pi k^* - \pi\sigma^2 T + \pi^2\sigma^2 T k^* - k^* = 0$$

Nun sortieren wir anch den Koeffizienten von π.

$$\pi\sigma^2 T - \pi T((\mu - r)k^* + \sigma^2) + (\mu - r)T - k^* = 0$$

Und normieren noch:

$$\pi^2 - \pi T(\pi^* + \frac{1}{k^*}) + \frac{(\mu - r)}{\sigma^2 k^*} - \frac{1}{\sigma^2 T} = 0$$

$\square$

Chapter 5

Übertragung des MaxMin-Ansatzes in das HJB-Setting

Wir erweitern unser standardfinazmarktmodell aus 2.2.1 wie folgt. Sei (Ω, F, P) ein Wahrscheinlichkeitsraum und die Parameter r, μ, σ wie gehabt. Auf dem W-Raum sei wieder eine Brownsche Bewegung W definiert und ein Sprungprozess N, der auf dem Intervall $(0, T)$ höchstens einen Sprung von 0 auf 1 machen kann. Ähnlich wie beim vorher betrachteten Lösungsanstz führen wir wieder einen Parameter k ein, der die Höhe des Crashes angibt. Die Preise sind dann gegeben durch:

$$dB(t) = rB(t)dt \tag{5.1}$$

$$B(0) = 1 \tag{5.2}$$

$$dS(t) = S(t-)(\mu dt + \sigma dW(t) - kdN(t)) \tag{5.3}$$

$$S(0) = s_0 \tag{5.4}$$

Ist nun eine Handelsstrategie π gegeben, so folgt der Vermögensprozess der folgenden Dynamik

$$dX(t) = X(t)(rdt + \pi(t)(\mu - r)dt + \sigma dW(t) - kdN(t)) \tag{5.5}$$

$$X(t_0) = x_0 \tag{5.6}$$

Ohne N ist X on Ito-Diffusion. Den Generator $(t, X(t))$ bezeichen wir mit

$$\mathcal{L}^\pi v(t,x) = v_t(t,x) + v_x(t,x)(r + \pi(t,x)(\mu - r))x + \frac{1}{2} v_{xx}(t,x)(\pi(t,x))^2 \sigma^2 x^2 \tag{5.7}$$

Wir stellen uns also das folgende Optimierungsproblem:

$$\sup_{\pi \in \mathcal{A}} \inf_{N \in \mathcal{B}} E\left[U(X(T))\right] \tag{5.8}$$

Wir führen nun eine Wertfunktion ein

$$J^n(t, x, \pi, N) = E\left[U(X(T)) | X(t) = x, N(t) = 1 - n\right] = E_{t,x,n}\left[U(X(T))\right] \tag{5.9}$$

Die optimale Wertfunktion ist dann:

$$V^n(t,x) = \sup_{\pi\in\mathcal{A}} \inf_{N\in\mathcal{B}} J^n(t,x,\pi,N) \tag{5.10}$$

Sei

$$G = [0,T] \times \mathbb{R}^+ \tag{5.11}$$

Wir formulieren nun einen Verifikationsatz. Sei v^0 eine Lösung von

$$0 = \sup_{\pi\in R} \left[\mathcal{L}^\pi v^0(t,x)\right] \tag{5.12}$$

$$v^0(T,x) = U(x) \tag{5.13}$$

und sei p eine zulässige Handeslstrategie mit

$$\mathcal{L}^{p(t,x)} v^0(t,x) = 0 \tag{5.14}$$

Dann gilt $V^0(t,x) = v^0(t,x)$ und p ist die optimale Strategie.
Sei

$$\mathcal{A}'(t,x) = \{\pi : \pi \in R, 0 \leq \mathcal{L}^{\pi(t)} v^n(t,x)\} \tag{5.15}$$

$$\mathcal{A}''(t,x) = \{\pi : \pi \in R, v^1(t,x) \leq v^0(t,x(1-k\pi))\} \tag{5.16}$$

Es gelte nun

$$0 \leq \sup_{\pi\in\mathcal{A}''(t,x)} \left[\mathcal{L}^\pi v^0(t,x)\right] \tag{5.17}$$

$$0 \leq \sup_{\pi\in\mathcal{A}'(t,x)} \left[v^0(t,x(1-k\pi)) - v^1(t,x)\right] \tag{5.18}$$

$$0 = \sup_{\pi\in\mathcal{A}''(t,x)} \left[\mathcal{L}^\pi v^0(t,x)\right] \sup_{\pi\in\mathcal{A}'(t,x)} \left[v^0(t,x(1-k\pi)) - v^1(t,x)\right] \tag{5.19}$$

und

$$v^1(T,x) = U(x) \tag{5.20}$$

Existiert weiterhin eine zulässige Handelstrategie mit

$$p(t,x) \in \mathcal{A}''(t,x) \tag{5.21}$$

und

$$\mathcal{L}^{p(t,x)} v^1(t,x) = \sup_{\pi\in\mathcal{A}''(t,x)} \left[\mathcal{L}^\pi v^0(t,x)\right] \tag{5.22}$$

Dann gilt $v^1(t,x) = V^1(t,x)$ und p ist die optimale Strategie.

Wir brauchen noch ein Lemma: Die Wertfunktion kann auf die folgenden Weisen ausgedrückt werden:

$$\begin{aligned}
V^1(t,x) &= \sup_{\pi\in\mathcal{A}} \inf_{N\in\mathcal{B}} E\left[U(X(T))\right] && (5.23)\\
&= \inf_{N\in\mathcal{B}} \sup_{\pi\in\mathcal{A}} E\left[U(X(T))\right] && (5.24)\\
&= \sup_{\pi\in\mathcal{A}} \inf_{\tau} V^0(\tau, X(\tau-)(1-k\pi(\tau))) && (5.25)\\
&= \inf_{\tau} \sup_{\pi\in\mathcal{A}} V^0(\tau, X(\tau-)(1-k\pi(\tau))) && (5.26)\\
& && (5.27)
\end{aligned}$$

Beweis des Lemmas: Wie wenden 4 mal die ϵ-Charactersierung des Surprememus an:

$$\begin{aligned}&\sup_{\pi} E_{t,x,n}\left[V^0(\tau, X^{\pi N}(\tau-)(1-k\pi(\tau)))\right]\\ \le &E_{t,x,n}\left[V^0(\tau, X^{\pi' N}(\tau-)(1-k\pi'(\tau)))\right]+\frac{\epsilon}{4}\end{aligned} \tag{5.28}$$

$$\sup_{\pi}\inf_{N} E_{\tau,x,n}\left[U(X^{\pi N}(T))\right] \inf_{N} E_{\tau,x,n}\left[U(X^{\pi'' N}(T))\right]+\frac{\epsilon}{4} \tag{5.29}$$

$$\begin{aligned}&\inf_{\tau} E_{t,x,n}\left[V^0(\tau, X^{\pi\tau}(\tau-)(1-k\pi(\tau)))\right]\\ \ge &E_{t,x,n}\left[V^0(\tau, X^{\pi\tau'}(\tau-)(1-k\pi(\tau)))\right]-\frac{\epsilon}{4}\end{aligned} \tag{5.30}$$

$$\inf_{N} E\left[U(X^{\pi,N}(T))\right] \ge E\left[V^0(\tau, X(\tau-)(1-k\pi(\tau)))\right]-\frac{\epsilon}{4} \tag{5.31}$$

Jetzt haben wir folgende Ungleichungskette:

$$\begin{aligned}&\sup_{\pi}\inf_{N} E_{t,x,1}\left[U(X^{\pi N}(T))\right]\\ \ge &\inf_{N} E_{t,x,1}\left[U(X^{\pi'' N}(T))\right]\\ \ge &\inf_{N} E_{t,x,1}\left[E_{\tau,X^{\pi'' N}(\tau),0}\left[U(X^{\pi'' N}(T))\right]\right]\\ \ge &\inf_{N} E_{t,x,1}\left[\sup_{\pi} E_{\tau,X^{\pi'' N}(\tau),0}\left[U(X^{\pi'' N}(T))\right]\right]-\frac{\epsilon}{4}\\ \ge &\inf_{N} E_{t,x,1}\left[V^0(\tau, X^{\pi'' N}(\tau))\right]-\frac{\epsilon}{4}\\ \ge &E_{t,x,1}\left[V^0(\tau, X^{\pi'' N}(\tau))\right]-\frac{\epsilon}{2}\end{aligned} \tag{5.32}$$

Surpremum nehmen links und rechts führt zu:

$$\begin{aligned}&\sup_{\pi}\inf_{N} E_{t,x,1}\left[U(X^{\pi N}(T))\right]\\ \ge &\sup_{\pi} E_{t,x,1}\left[V^0(\tau, X^{\pi'' N}(\tau))\right]-\frac{\epsilon}{2}\end{aligned} \tag{5.33}$$

Und nochmal Infimum nehmen auf der rechten Seite führt zu:

$$\begin{aligned}&\sup_{\pi}\inf_{N} E_{t,x,1}\left[U(X^{\pi N}(T))\right]\\ \ge &\inf_{N}\sup_{\pi} E_{t,x,1}\left[V^0(\tau, X^{\pi'' N}(\tau))\right]-\frac{\epsilon}{2}\end{aligned} \tag{5.34}$$

Nun eröffnen wir die folgende Ungleichungskette:

$$\begin{aligned}
&\inf_N \sup_\pi E_{t,x,1}\left[U(X^{\pi N}(T))\right] \\
\leq &\sup_\pi E_{t,x,1}\left[U(X^{\pi N'}(T))\right] \\
\leq &\sup_\pi E_{t,x,1}\left[E_{\tau,X^{\pi''N}(\tau),0}\left[U(X^{\pi''N}(T))\right]\right] \\
\leq &\sup_\pi E_{t,x,1}\left[\inf N E_{\tau,X^{\pi''N}(\tau),0}\left[U(X^{\pi''N}(T))\right]\right] + \frac{\epsilon}{4} \\
\leq &\sup_\pi E_{t,x,1}\left[\sup_\pi \inf N E_{\tau,X^{\pi''N}(\tau),0}\left[U(X^{\pi''N}(T))\right]\right] + \frac{\epsilon}{4} \\
\leq &\sup_\pi E_{t,x,1}\left[V^0(\tau, X^{\pi''N}(\tau))\right] + \frac{\epsilon}{4}
\end{aligned} \tag{5.35}$$

Infimum nehmen auf beiden Seiten führt dann zu:

$$\begin{aligned}
&\inf_N \sup_\pi E_{t,x,1}\left[U(X^{\pi N}(T))\right] \\
\leq &\inf_N \sup_\pi E_{t,x,1}\left[V^0(\tau, X^{\pi''N}(\tau))\right] + \frac{\epsilon}{4}
\end{aligned} \tag{5.36}$$

Jetz haben wir folgende Ungleichungskette:

$$\begin{aligned}
&\sup_\pi \inf_N E_{t,x,1}\left[U(X^{\pi N}(T))\right] \\
\geq &\inf_N \sup_\pi E_{t,x,1}\left[V^0(\tau, X^{\pi''N}(\tau))\right] - \frac{\epsilon}{2} \\
\geq &\inf_N \sup_\pi E_{t,x,1}\left[U(X^{\pi N}(T))\right] \\
\geq &\sup_\pi \inf_N E_{t,x,1}\left[U(X^{\pi N}(T))\right]
\end{aligned} \tag{5.37}$$

Dabei folgt die erste Ungleichung aus 5.34, die zweite Ungleichung folgt aus 5.36 und die dritte Ungleichung aus der $\sup\inf \leq \inf\sup$ Beziehung.

Da das ϵ beliebig gewählt war, bleibt hier jede Ungleichung auch ohne ϵ erhalten, da dann links und rechts von der Ungleichungskette das gleiche steht erhalten wir also lauter Gleichheiten.

Beweis des Verifikationssatzes: Wir gehen davon aus, das im Punkte (t, x) $X(t) = x$ gilt und noch ein Crash möglich ist. Anwendung der Ito-formel ergibt dann:

$$dv^1(s, X(s)) = \mathcal{L}^{\pi(s)} v(0, X(s))ds + v^1_x(s, X(s))\sigma X(s)dW(s) \tag{5.38}$$

und

$$dv^1(\tau, X(\tau)) = v^1(\tau, X(\tau))(1 - \pi(\tau)k) - v^1(\tau-, X(\tau-)) \tag{5.39}$$

also

$$v^1(\tau-, X(\tau-)) - v^1(t, x) = \int_t^\tau \mathcal{L}^{\pi(s)} v(s, X(s))ds + \int_t^\tau v^1_x(s, X(s))\sigma X(s)p(s)dW(s) \tag{5.40}$$

Wir fixieren nun die optimale Strategie p. Dann folgt aus der der Vorrausetzung 5.22 an p und der HJB-ungleichung 5.17 für $t \leq s \leq \tau$:

$$0 \leq \sup_{\pi \in \mathcal{A}''(s,X(s))} \left[\mathcal{L}^{\pi} v^1(s, X(s))\right] = \left[\mathcal{L}^{p(s,X(s)} v^1(s, X(s))\right] \tag{5.41}$$

und da $p(s, X(s)) \in \mathcal{A}''(s, X(s))$

$$v^1(s, X(s)) \leq v^0(s, X(s)(1 - k\pi(s)) \tag{5.42}$$

Wenn wir nun p in 5.40 einsetzen und die Gleichung nach $v^1(t, x)$ umstellen, erhalten wir:

$$v^1(t, x) = v^1(\tau-, X(\tau-)) - \int_t^{\tau} \mathcal{L}^{p(s,X(s))} v(s, X(s))ds - \int_t^{\tau} v^1_x(s, X(s))\sigma X(s)p(s)dW(s) \tag{5.43}$$

Mit 5.42 können wir den ersten Summanden auf der rechten Seite nach oben abschätzen, den zweiten Summanden können wir wegen 5.41 durch Weglassen nach oben abschätzen und erhalten:

$$v^1(t, x) \leq v^0(\tau, X(1 - k\pi(\tau)) - \int_t^{\tau} v^1_x(s, X(s))\sigma X(s)dW(s) \tag{5.44}$$

Bilden des Erwartungswertes führt dann zu:

$$v^1(t, x) \leq E_{t,x}\left[v^0(\tau, X(1 - k\pi(\tau))\right] \tag{5.45}$$

Ausgehend von 5.45 vergrößern wir die rechte Seite durch Bilden des Surpremesmums über alle Handelsstrategien:

$$v^1(t, x) \leq \sup_{\pi} E_{t,x}\left[v^0(\tau, X(1 - k\pi(\tau))\right] \tag{5.46}$$

Da da das τ beliebig gewählt war erhaält nun auch das bilden des infimums auf er rechten Seite die Ungleichung:

$$v^1(t, x) \leq \inf_{\tau} \sup_{\pi} E_{t,x}\left[v^0(\tau, X(1 - k\pi(\tau))\right] \tag{5.47}$$

Wieder ausgehend von 5.45 können wir die beiden letzten Schritte auch in umgekehrter Reihenfolge durchführen. Da τ beliebig gewählt war erhält das Bilden des Infimums auf der rechten Seite von 5.45 die Ungleichung und wir erhalten

$$v^1(t, x) \leq \inf_{\tau} E_{t,x}\left[v^0(\tau, X(1 - k\pi(\tau))\right] \tag{5.48}$$

und bilden des Surprememus über alle Handelstrategien macht die rechte Seite davon nur größer

$$v^1(t, x) \leq \sup_{\pi} \inf_{\tau} E_{t,x}\left[v^0(\tau, X(1 - k\pi(\tau))\right] \tag{5.49}$$

Sein nun π wieder eine beliebige Handelsstrategie. Dann fixieren wir dazu die Stoppzeit

$$\theta(\pi) = \inf\{s \in R; v^0(s, X(s)(1 - \pi(s))) \leq v^1(s, X(s))\} \tag{5.50}$$

wobei X der Dynamik ohne N folgt.

Wir fixieren nun θ. Nach definition von θ gilt für $t \leq s < \theta$

$$v^0(s, X(s)(1 - k\pi(s))) > v^1(s, X(s)) \tag{5.51}$$

und

$$v^0(\theta, X(\theta)(1 - k\pi(\theta))) \leq v^1(\theta, X(\theta)) \tag{5.52}$$

Nun muss entweder

$$\mathcal{L}^{\pi(s,X(s))} v_1(s, X(s)) < 0 \tag{5.53}$$

oder

$$0 \leq \mathcal{L}^{\pi(s,X(s))} v_1(s, X(s)) \tag{5.54}$$

gelten. Gilt letzteres, so ist $\pi(s, X(s)) \in \mathcal{A}'(s, X(s))$ und aus 5.51 folgt

$$\sup_{\pi \in \mathcal{A}''(s,X(s))} \left[v^0(s, X(s)(1 - k\pi)) - v^1(s, X(s))\right] > 0 \tag{5.55}$$

Wegen 5.19 folgt dann

$$0 = \sup_{\pi \in \mathcal{A}''(s,X(s))} \left[\mathcal{L}^{\pi} v^1(s, X(s))\right] \tag{5.56}$$

Aber wegen 5.51 ist $\pi(s, X(s)) \in \mathcal{A}''(s, X(s))$ und es folgt

$$\mathcal{L}^{\pi(s,X(s))} v_1(s, X(s)) \leq 0 \tag{5.57}$$

Also unabhängig ob 5.53 oder 5.54 gilt, es folgt

$$\mathcal{L}^{\pi(s,X(s))} v_1(s, X(s)) \leq 0 \tag{5.58}$$

Wenn wir nun θ in 5.40 einsetzen und die Fleichung nach $v(t, x)$ umstellen erhalten wir

$$v^1(t, x) = v^1(\theta, X(\theta)) - \int_t^\theta \mathcal{L}^{\pi(s)} v(s, X(s)) ds - \int_t^\theta v^1_x(s, X(s)) \sigma X(s) dW(s) \tag{5.59}$$

Mit 5.52 können wir den ersten Summanden auf der rechten Seite verkleinern, und wegen 5.58 wird die rechte Seite durch Weglassen des zweiten Summanden ebenfalls nur kleiner. So erhalten wir

$$v^1(t, x) \geq v^0(\tau-, X(\tau-)) - \int_t^\tau v^1_x(s, X(s)) \sigma X(s) dW(s) \tag{5.60}$$

Bildung des erwartungwertes führt zu

$$v^1(t, x) \geq E_{t,x}\left[v^0(\tau-, X(\tau-))\right] \tag{5.61}$$

Wie im ersten Teil des Beweises nehmen wir nun surprema und infina: Bilden des Infimums über alle Crashzeiten macht die rechte Seite von 5.61 nur kleiner.

$$v^1(t, x) \geq \inf_\tau E_{t,x}\left[v^0(\tau-, X(\tau-))\right] \tag{5.62}$$

Da π beliebig gewählt war, bleibt die Ungleichung durch Bildung des Surpremums über alle Handelstrategie erhalten:

$$v^1(t, x) \geq \sup_\pi \inf_\tau E_{t,x}\left[v^0(\tau-, X(\tau-))\right] \tag{5.63}$$

Wieder ausgehen von 5.61 können wir mit den gleichen Argument wie in der verherigen Gleichung das Surpremum über alle handelsstrategien bilden.

$$v^1(t,x) \geq \sup_{\pi} E_{t,x}\left[v^0(\tau-, X(\tau-))\right] \tag{5.64}$$

Und das Bilden des Infimums macht die rechte Seite nur kleiner.

$$v^1(t,x) \geq \inf_{\tau} \sup_{\pi} E_{t,x}\left[v^0(\tau-, X(\tau-))\right] \tag{5.65}$$

5.1 Charakteriesierung der Lösung

In $\mathcal{N}$ gilt

$$\pi(t,x) = \frac{-V_x^1(t,x)}{V_x^1 x(t,x)x}\pi^* \tag{5.66}$$

und

$$V_t^1(t,x) = -V_x^1(t,x)(r+\pi(\mu-r))x - \frac{1}{2}V_{xx}^1(t,x)\pi^2\sigma^2x^2 \tag{5.67}$$

und auf dem Komplement von N gilt

$$V^1(t,x) = V^0(t, x(1-k\pi)) \tag{5.68}$$

und

$$V_t^1(t,x) = -V_x^1(t,x)(r+\pi(\mu-r))x - \frac{1}{2}V_{xx}^1(t,x)\pi^2\sigma^2x^2 \tag{5.69}$$

5.2 Log Utility

Inspiriert duch die Lösung

$$V^0(t,x) = \log(x) + \left(r + \frac{1}{2}\frac{\pi-\mu}{\sigma^2}\right)(T-t) \tag{5.70}$$

im crasfreien Scenario machen wir den Ansatz

$$V^1(t,x) = \log(x) + f^1(t) \tag{5.71}$$

Wir berechen die benötigten Ableitungen:

$$V_t^1(t,x) = f_t^1(t), \tag{5.72}$$

$$V_x^1(t,x) = \frac{1}{x} \tag{5.73}$$

und

$$V_{xx}^1(t,x) = -\frac{1}{x^2} \tag{5.74}$$

Aus $V^1(t,x) = V^0(t, x(1-k\pi^1))$ folgt

$$\log(x) + f^1(t) = \log(x) + \log(1-k\pi^1) + f^0(t) \tag{5.75}$$

Umstellen führt zu

$$\exp(f^1(t) - f^0(t)) = 1 - k\pi^1 \tag{5.76}$$

und schliesslich

$$\pi^1 = \frac{1 - \exp(f^1(t) - f^0(t))}{k} \tag{5.77}$$

Setzen wir die Ableitungen von V in 5.69 ein erhalten wird

$$f^1_t(t) = -(r + \pi^1(\mu - r)) + \frac{1}{2}(\pi^1)^2\sigma^2 \tag{5.78}$$

Ableiten von π^1 ergibt

$$\pi^1_t = \frac{\exp(f^1(t) - f^0(t))(f^0_t(t) - f^1_t(t))}{k} \tag{5.79}$$

und druch Einsetzen von 5.76

$$\pi^1_t = \frac{1}{k}(1 - \pi^1 k)\left((f^0_t(t) - f^1_t(t))\right) \tag{5.80}$$

Mit 5.78 und dem bekannten wert für f^0 berechnen wir

$$(f^0_t(t) - f^1_t(t)) = -r - \frac{1}{2}\frac{\pi - \mu}{\sigma^2} - \left[-r + \pi^1(\mu - r) + \frac{1}{2}(\pi^1)^2\sigma^2\right] \tag{5.81}$$

$$= \pi^1(\mu - r) - \frac{1}{2}\left[\frac{\pi - \mu}{\sigma^2} + (\pi^1)^2\sigma^2\right] \tag{5.82}$$

und setzen wir das wieder in 5.80 ein so ergibst sich die schon aus 4.19 bekannte Differentialgleichung.

$$\pi^1_t = \frac{1}{k}(1 - \pi^1 k)\left(\pi^1(\mu - r) - \frac{1}{2}\left[\frac{\pi - \mu}{\sigma^2} + (\pi^1)^2\sigma^2\right]\right) \tag{5.83}$$

Chapter 6

Simulationen

Chapter 7

Weitere Aspekte

Weitere Aspekte die diskutiert werden könnten:

- Further aspects in Korn, 2007, seite 16
- Further possible refinements, Korn/willmott, seite 183
- Durchgehen des Verifikationssatzes mit logaritmischen nutzen, Korn, 2007, seite 9
- Best constant portfolio process, Korn/Menkens, seite 133
- Formulierung des Worst-Case-Problem als optimal-stopping-problem

Bibliography

[1] Ralf Korn and Paul Wilmott. Optimal portfolios under the threat of a crash. *Int. J. Theor. Appl. Finance*, 5(2):171–187, 2002.