

第四届全国大学生数学竞赛预赛试题

（非数学类）参考答案及评分标准

一、（本题共 5 小题，每小题各 6 分，共 30 分）解答下列各题（要求写出重要步骤）。

(1) 求极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} (n!)^{\frac{1}{n^2}}$;

(2) 求通过直线 $L: \begin{cases} 2x + y - 3z + 2 = 0 \\ 5x + 5y - 4z + 3 = 0 \end{cases}$ 的两个相互垂直的平面 π_1 和 π_2 ，使其中一个平面过点

$(4, -3, 1)$;

(3) 已知函数 $z = u(x, y)e^{ax+by}$ ，且 $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = 0$ ，确定常数 a 和 b ，使函数 $z = z(x, y)$ 满足方程

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} - \frac{\partial z}{\partial x} - \frac{\partial z}{\partial y} + z = 0;$$

(4) 设函数 $u = u(x)$ 连续可微， $u(2) = 1$ ，且 $\int_L (x + 2y)udx + (x + u^3)udy$ 在右半平面上与路径无关，

求 $u(x)$;

(5) 求极限 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt[3]{x} \int_x^{x+1} \frac{\sin t}{\sqrt{t + \cos t}} dt$.

解

(1) 因为 $(n!)^{\frac{1}{n^2}} = e^{\frac{1}{n^2} \ln(n!)} \dots\dots\dots (1 \text{ 分})$

而 $\frac{1}{n^2} \ln(n!) \leq \frac{1}{n} \left(\frac{\ln 1}{1} + \frac{\ln 2}{2} + \dots + \frac{\ln n}{n} \right)$ ，且 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln n}{n} = 0 \dots\dots\dots (3 \text{ 分})$

所以 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left(\frac{\ln 1}{1} + \frac{\ln 2}{2} + \dots + \frac{\ln n}{n} \right) = 0$,

即 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} \ln(n!) = 0$ ，故 $\lim_{n \rightarrow \infty} (n!)^{\frac{1}{n^2}} = 1 \dots\dots\dots (2 \text{ 分})$

(2) 过直线 L 的平面束为

$$\lambda(2x + y - 3z + 2) + \mu(5x + 5y - 4z + 3) = 0$$

即 $(2\lambda + 5\mu)x + (\lambda + 5\mu)y - (3\lambda + 4\mu)z + (2\lambda + 3\mu) = 0$ ， $\dots\dots\dots (2 \text{ 分})$

若平面 π_1 过点 $(4, -3, 1)$ ，代入得 $\lambda + \mu = 0$ ，即 $\mu = -\lambda$ ，从而 π_1 的方程为

$$3x+4y-z+1=0, \quad \dots\dots\dots (2 \text{ 分})$$

若平面束中的平面 π_2 与 π_1 垂直, 则

$$3 \cdot (2\lambda + 5\mu) + 4 \cdot (\lambda + 5\mu) + 1 \cdot (3\lambda + 4\mu) = 0$$

解得 $\lambda = -3\mu$, 从而平面 π_2 的方程为 $x - 2y - 5z + 3 = 0$, $\dots\dots\dots (2 \text{ 分})$

$$(3) \quad \frac{\partial z}{\partial x} = e^{ax+by} \left[\frac{\partial u}{\partial x} + au(x+y) \right], \quad \frac{\partial z}{\partial y} = e^{ax+by} \left[\frac{\partial u}{\partial y} + bu(x+y) \right], \quad \dots\dots\dots (2 \text{ 分})$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = e^{ax+by} \left[b \frac{\partial u}{\partial x} + a \frac{\partial u}{\partial y} + abu(x,y) \right]. \quad \dots\dots\dots (2 \text{ 分})$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} - \frac{\partial z}{\partial x} - \frac{\partial z}{\partial y} + z = e^{ax+by} \left[(b-1) \frac{\partial u}{\partial x} + (a-1) \frac{\partial u}{\partial y} + (ab-a-b+1)u(x,y) \right],$$

若使 $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} - \frac{\partial z}{\partial x} - \frac{\partial z}{\partial y} + z = 0$, 只有

$$(b-1) \frac{\partial u}{\partial x} + (a-1) \frac{\partial u}{\partial y} + (ab-a-b+1)u(x,y) = 0, \quad \text{即 } a=b=1. \quad \dots\dots\dots (2 \text{ 分})$$

$$(4) \quad \text{由 } \frac{\partial}{\partial x}(u[x+u^3]) = \frac{\partial}{\partial y}((x+2y)u) \text{ 得 } (x+4u^3)u' = u, \text{ 即 } \frac{dx}{du} - \frac{1}{u}x = 4u^2 \quad \dots\dots (2 \text{ 分})$$

方程通解为

$$x = e^{\ln u} \left(\int 4u^2 e^{-\ln u} du + C \right) = u \left(\int 4u du + C \right) = u(2u^2 + C) \quad \dots\dots\dots (3 \text{ 分})$$

$$\text{由 } u(2)=1 \text{ 得 } C=0, \text{ 故 } u = \left(\frac{x}{2} \right)^{1/3}. \quad \dots\dots\dots (1 \text{ 分})$$

(5) 因为当 $x > 1$ 时,

$$\left| \sqrt[3]{x} \int_x^{x+1} \frac{\sin t}{\sqrt{t+\cos t}} dt \right| \leq \sqrt[3]{x} \int_x^{x+1} \frac{dt}{\sqrt{t-1}} \quad \dots\dots\dots (3 \text{ 分})$$

$$\leq 2\sqrt[3]{x} (\sqrt{x} - \sqrt{x-1}) = 2 \frac{\sqrt[3]{x}}{\sqrt{x} + \sqrt{x-1}} \rightarrow 0 (x \rightarrow \infty), \quad \dots\dots\dots (2 \text{ 分})$$

$$\text{所以 } \lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt[3]{x} \int_x^{x+1} \frac{\sin t}{\sqrt{t+\cos t}} dt = 0. \quad \dots\dots\dots (1 \text{ 分})$$

二、(本题 10 分) 计算 $\int_0^{+\infty} e^{-2x} |\sin x| dx$

解 由于

$$\begin{aligned} \int_0^{n\pi} e^{-2x} |\sin x| dx &= \sum_{k=1}^n \int_{(k-1)\pi}^{k\pi} e^{-2x} |\sin x| dx \\ &= \sum_{k=1}^n \int_{(k-1)\pi}^{k\pi} (-1)^{k-1} e^{-2x} \sin x dx \quad \dots\dots\dots (3 \text{ 分}) \end{aligned}$$

应用分部积分法

$$\int_{(k-1)\pi}^{k\pi} (-1)^{k-1} e^{-2x} \sin x dx = \frac{1}{5} e^{-2k\pi} (1 + e^{2\pi}) \quad \dots\dots\dots (2 \text{ 分})$$

所以

$$\int_0^{n\pi} e^{-2x} |\sin x| dx = \frac{1}{5} (1 + e^{2\pi}) \sum_{k=1}^n e^{-2k\pi} = \frac{1}{5} (1 + e^{2\pi}) \frac{e^{-2\pi} - e^{-2(n+1)\pi}}{1 - e^{-2\pi}} \quad \dots\dots\dots (2 \text{ 分})$$

当 $n\pi \leq x < (n+1)\pi$ 时

$$\int_0^{n\pi} e^{-2x} |\sin x| dx \leq \int_0^x e^{-2x} |\sin x| dx < \int_0^{(n+1)\pi} e^{-2x} |\sin x| dx,$$

令 $n \rightarrow \infty$, 由两边夹法则, 得

$$\int_0^{\infty} e^{-2x} |\sin x| dx = \lim_{x \rightarrow \infty} \int_0^x e^{-2x} |\sin x| dx = \frac{1}{5} \frac{e^{2\pi} + 1}{e^{2\pi} - 1} \quad \dots\dots\dots (3 \text{ 分})$$

注: 如果最后不用夹逼法则, 而用 $\int_0^{\infty} e^{-2x} |\sin x| dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{n\pi} e^{-2x} |\sin x| dx = \frac{1}{5} \frac{e^{2\pi} + 1}{e^{2\pi} - 1}$, 需先说明

$\int_0^{\infty} e^{-2x} |\sin x| dx$ 收敛.

三、(本题 10 分) 求方程 $x^2 \sin \frac{1}{x} = 2x - 501$ 的近似解. 精确到 0.001.

解 由泰勒公式 $\sin t = t - \frac{\sin(\theta t)}{2} t^2 \quad (0 < \theta < 1) \quad \dots\dots\dots (2 \text{ 分})$

令 $t = \frac{1}{x}$ 得 $\sin \frac{1}{x} = \frac{1}{x} - \frac{\sin\left(\frac{\theta}{x}\right)}{2x^2},$

代入原方程得

$$x - \frac{1}{2} \sin\left(\frac{\theta}{x}\right) = 2x - 501 \quad \text{即 } x = 501 - \frac{1}{2} \sin\left(\frac{\theta}{x}\right) \quad \dots\dots\dots (4 \text{ 分})$$

由此知 $x > 500$, $0 < \frac{\theta}{x} < \frac{1}{500}$

$$|x - 501| = \frac{1}{2} \left| \sin \left(\frac{\theta}{x} \right) \right| \leq \frac{1}{2} \frac{\theta}{x} < \frac{1}{1000} = 0.001$$

所以, $x = 501$ 即为满足题设条件的解 (4 分)

四、(本题 12 分) 设函数 $y = f(x)$ 的二阶可导, 且 $f''(x) > 0, f(0) = 0, f'(0) = 0$, 求

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3 f(u)}{f(x) \sin^3 u}$, 其中 u 是曲线 $y = f(x)$ 上点 $p(x, f(x))$ 处的切线在 x 轴上的截距.

解: 曲线 $y = f(x)$ 在点 $p(x, f(x))$ 处的切线方程为

$$Y - f(x) = f'(x)(X - x),$$

令 $Y = 0$, 则有 $X = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$, 由此 $u = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$, (3 分)

且有

$$\lim_{x \rightarrow 0} u = \lim_{x \rightarrow 0} \left(x - \frac{f(x)}{f'(x)} \right) = - \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{f(x) - f(0)}{x}}{\frac{f'(x) - f'(0)}{x}} = \frac{f'(0)}{f''(0)} = 0. \text{ (2 分)}$$

由 $f(x)$ 在 $x = 0$ 处的二阶泰勒公式

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2}x^2 + o(x^2) = \frac{f''(0)}{2}x^2 + o(x^2) \text{ (2 分)}$$

得

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{u}{x} &= 1 - \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{xf'(x)} = 1 - \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{f''(0)}{2}x^2 + o(x^2)}{xf'(x)} \\ &= 1 - \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f''(0) + o(1)}{\frac{f'(x) - f'(0)}{x}} = 1 - \frac{1}{2} \frac{f''(0)}{f''(0)} = \frac{1}{2} \text{ (3 分)} \end{aligned}$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3 f(u)}{f(x) \sin^3 u} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3 \left(\frac{f''(0)}{2}u^2 + o(u^2) \right)}{u^3 \left(\frac{f''(0)}{2}x^2 + o(x^2) \right)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{u} = 2 \text{ (2 分)}$$

五、(本题 12 分) 求最小实数 C ，使得满足 $\int_0^1 |f(x)| dx = 1$ 的连续的函数 $f(x)$ 都有

$$\int_0^1 f(\sqrt{x}) dx \leq C$$

解 由于 $\int_0^1 |f(\sqrt{x})| dx = \int_0^1 |f(t)| 2t dt \leq 2 \int_0^1 |f(t)| dt = 2$, (4 分)

另一方面, 取 $f_n(x) = (n+1)x^n$, 则 $\int_0^1 |f_n(x)| dx = \int_0^1 f_n(x) dx = 1$ (3 分)

而 $\int_0^1 f_n(\sqrt{x}) dx = 2 \int_0^1 t f_n(t) dt = 2 \frac{n+1}{n+2} = 2 \left(1 - \frac{1}{n+2} \right) \rightarrow 2 \quad (n \rightarrow \infty)$ (3 分)

因此最小的实数 $C = 2$ (2 分)

六、(本题 12 分) 设 $f(x)$ 为连续函数, $t > 0$ 。区域 Ω 是由抛物面 $z = x^2 + y^2$ 和球面 $x^2 + y^2 + z^2 = t^2 \quad (t > 0)$ 所围起来的部分. 定义三重积分

$$F(t) = \iiint_{\Omega} f(x^2 + y^2 + z^2) dv.$$

求 $F(t)$ 的导数 $F'(t)$.

解法 1. 记 $g = g(t) = \frac{\sqrt{1+4t^2}-1}{2}$, 则 Ω 在 xy 面上的投影为 $x^2 + y^2 \leq g$ (2 分)

在曲线 $S: \begin{cases} x^2 + y^2 = z \\ x^2 + y^2 + z^2 = t^2 \end{cases}$ 上任取一点 (x, y, z) , 则原点到的点的射线和 z 轴的夹角

为 $\theta_t = \arccos \frac{z}{t} = \arccos \frac{g}{t}$. 取 $\Delta t > 0$, 则 $\theta_t > \theta_{t+\Delta t}$. 对于固定的 $t > 0$, 考虑积分差

$F(t+\Delta t) - F(t)$, 这是一个在厚度为 Δt 的球壳上的积分. 原点到球壳边缘上的点的射线和

z 轴夹角在 $\theta_{t+\Delta t}$ 和 θ_t 之间. 我们使用球坐标变换来做这个积分, 由积分的连续性可知, 存在

$\alpha = \alpha(\Delta t)$, $\theta_{t+\Delta t} \leq \alpha \leq \theta_t$, 使得

$$F(t+\Delta t) - F(t) = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\alpha} d\theta \int_t^{t+\Delta t} f(r^2) r^2 \sin \theta dr. \dots\dots\dots (4 \text{ 分})$$

这样就有 $F(t+\Delta t) - F(t) = 2\pi(1 - \cos \alpha) \int_t^{t+\Delta t} f(r^2) r^2 dr$. 而当 $\Delta t \rightarrow 0^+$,

$$\cos \alpha \rightarrow \cos \theta_t = \frac{g(t)}{t}, \quad \frac{1}{\Delta t} \int_t^{t+\Delta t} f(r^2) r^2 dr \rightarrow t^2 f(t^2).$$

故 $F(t)$ 的右导数为

$$2\pi \left(1 - \frac{g(t)}{t}\right) t^2 f(t^2) = \pi \left(2t + 1 - \sqrt{1 + 4t^2}\right) t f(t^2). \quad \dots\dots\dots (4 \text{ 分})$$

当 $\Delta t < 0$, 考虑 $F(t) - F(t + \Delta t)$ 可以得到同样的左导数. 因此

$$F'(t) = \pi \left(2t + 1 - \sqrt{1 + 4t^2}\right) t f(t^2) \quad \dots\dots\dots (2 \text{ 分})$$

解法 2.. 令
$$\begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta, \\ z = z \end{cases}$$

则 $\Omega: \begin{cases} 0 \leq \theta \leq 2\pi \\ 0 \leq r \leq a \\ r^2 \leq z \leq \sqrt{t^2 - r^2} \end{cases}$, 其中 a 满足 $a^2 + a^4 = t^2$, $a = \frac{\sqrt{1 + 4t^2} - 1}{2}$ (2 分)

故有

$$F(t) = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^a r dr \int_{r^2}^{\sqrt{t^2 - r^2}} f(r^2 + z^2) dz = 2\pi \int_0^a r \left(\int_{r^2}^{\sqrt{t^2 - r^2}} f(r^2 + z^2) dz \right) dr \quad \dots\dots (2 \text{ 分})$$

从而有

$$F'(t) = 2\pi \left(a \int_{a^2}^{\sqrt{t^2 - a^2}} f(a^2 + z^2) dz \frac{da}{dt} + \int_0^a r f(r^2 + t^2 - r^2) \frac{t}{\sqrt{t^2 - r^2}} dr \right) \dots\dots (4 \text{ 分})$$

注意到 $\sqrt{t^2 - a^2} = a^2$, 第一个积分为 0, 我们得到

$$F'(t) = 2\pi f(t^2) t \int_0^a r \frac{1}{\sqrt{t^2 - r^2}} dr = -\pi t f(t^2) \int_0^a \frac{d(t^2 - r^2)}{\sqrt{t^2 - r^2}},$$

所以 $F'(t) = 2\pi t f(t^2) (t - a^2) = \pi t f(t^2) (2t + 1 - \sqrt{1 + 4t^2}) \quad \dots\dots\dots (4 \text{ 分})$

七、(本题 14 分) 设 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 为正项级数,

(1) 若 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{a_n}{a_{n+1} b_n} - \frac{1}{b_{n+1}} \right) > 0$, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛;

(2) 若 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{a_n}{a_{n+1} b_n} - \frac{1}{b_{n+1}} \right) < 0$, 且 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 发散, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散。

证明: (1) 设 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{a_n}{a_{n+1}b_n} - \frac{1}{b_{n+1}} \right) = 2\delta > \delta > 0$, 则存在 $N \in \mathbf{N}$, 对于任意的 $n \geq N$ 时,

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} \frac{1}{b_n} - \frac{1}{b_{n+1}} > \delta, \quad \frac{a_n}{b_n} - \frac{a_{n+1}}{b_{n+1}} > \delta a_{n+1}, \quad a_{n+1} < \frac{1}{\delta} \left(\frac{a_n}{b_n} - \frac{a_{n+1}}{b_{n+1}} \right), \dots\dots\dots (4 \text{ 分})$$

$$\sum_{n=N}^m a_{n+1} \leq \frac{1}{\delta} \sum_{n=N}^m \left(\frac{a_n}{b_n} - \frac{a_{n+1}}{b_{n+1}} \right) \leq \frac{1}{\delta} \left(\frac{a_N}{b_N} - \frac{a_{m+1}}{b_{m+1}} \right) \leq \frac{1}{\delta} \frac{a_N}{b_N},$$

因而 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 的部分和有上界, 从而 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛. $\dots\dots\dots (4 \text{ 分})$

(2) 若 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{a_n}{a_{n+1}} \frac{1}{b_n} - \frac{1}{b_{n+1}} \right) < \delta < 0$ 则存在 $N \in \mathbf{N}$, 对于任意的 $n \geq N$ 时,

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} < \frac{b_n}{b_{n+1}} \dots\dots\dots (3 \text{ 分})$$

有

$$a_{n+1} > \frac{b_{n+1}}{b_n} a_n > \dots > \frac{b_{n+1}}{b_n} \frac{b_n}{b_{n-1}} \dots \frac{b_{N+1}}{b_N} a_N = \frac{a_N}{b_N} b_{n+1}$$

于是由 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 发散, 得到 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散. $\dots\dots\dots (3 \text{ 分})$