省市______ 学校______ 准考证号______ 姓名______ 考场号______ 座位号______

密封线 答题时不要超过此线

第九届全国大学生数学竞赛预赛参考答案

(非数学类, 2017 年 10 月 28 日)

绝密 ★ 启用前

(14 金融工程 – 白兔兔)

考试形式: 闭卷　考试时间: 150 分钟　满分: 100 分

题号	一	二	三	四	五	总分
满分	42	14	14	15	15	100
得分						

注意: 1. 所有答题都须写在试卷密封线右边, 写在其他纸上一律无效.

2. 密封线左边请勿答题, 密封线外不得有姓名及相关标记.

3. 如答题空白不够, 可写在当页背面, 并标明题号.

一、(本题满分 42 分, 共 6 小题, 每小题 7 分)

1. 已知可导函数 $f(x)\cos x+2\int_0^x f(t)\sin t\,\mathrm{d}t=x+1$ 满足 则 $f(x)=$ ________

答案: $\sin x+\cos x$

解. 两边同时对 x 求导

$$f'(x)\cos x+f(x)\sin x=1\Longrightarrow f'(x)+f(x)\tan x=\sec x$$

由常数变易法, 从而

$$\begin{aligned}f(x)&=e^{-\int\tan x\,\mathrm{d}x}\left(\int\sec x e^{\int\tan x\,\mathrm{d}x}\mathrm{d}x+C\right)\\&=e^{\ln\cos x}\left(\int\frac{1}{\cos x}e^{-\ln\cos x}\mathrm{d}x+C\right)=\cos x\left(\int\frac{1}{\cos^2 x}\mathrm{d}x+C\right)\\&=\cos x\left(\tan x+C\right)=\sin x+C\cos x\end{aligned}$$

由于 $f(0)=1$, 故 $f(x)=\sin x+\cos x$ ◊

2. 极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\sin^2\left(\pi\sqrt{n^2+n}\right)=$ ________

答案: 1

解.

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\sin^2\left(\pi\sqrt{n^2+n}\right)&=\lim_{n\to\infty}\sin^2\left(\pi\sqrt{n^2+n}-n\pi\right)\\&=\lim_{n\to\infty}\sin^2\left(\frac{n\pi}{\sqrt{n^2+n}+n}\right)=1\end{aligned}$$

◊

3. 设 $w=f(u,v)$ 具有二阶连续偏导数, 且 $u=x-cy$, $v=x+cy$. 其中 c 为非零常数. 则 $w_{xx}-\frac{1}{c^2}w_{yy}=$ ____________

答案：$4f_{12}$

解. $w_x=f_1+f_2$, $w_{xx}=f_{11}+2f_{12}+f_{22}$

$w_y=c(f_2-f_1)$,

$$w_{yy}=c\frac{\partial}{\partial x}(f_2-f_1)=c(cf_{11}-cf_{12}-cf_{21}+cf_{22})=c^2(f_{11}-2f_{12}+f_{22})$$

所以

$$w_{xx}-\frac{1}{c^2}w_{yy}=4f_{12}$$

◊

4. 设 $f(x)$ 有二阶导数连续, 且 $f(0)=f'(0)=0$, $f''(0)=6$, 则 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{f(\sin^2 x)}{x^4}=$ ________

答案：3

解. $f(x)$ 在 $x=0$ 泰勒展开式

$$f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{1}{2}f''(\xi)x^2$$

所以 $f(\sin^2 x)=\frac{1}{2}f''(\xi)\sin^4 x$, 于是

$$\lim_{n\to\infty}\frac{f(\sin^2 x)}{x^4}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{2}f''(\xi)\sin^4 x}{x^4}=3$$

◊

5. 不定积分 $\int\frac{e^{-\sin x}\sin 2x}{(1-\sin x)^2}\mathrm{d}x=$ ____________

答案：$\frac{2e^{-\sin x}}{1-\sin x}+C$

解.

$$\begin{aligned}
I&=2\int\frac{e^{-\sin x}\sin x\cos x}{(1-\sin x)^2}\mathrm{d}x\\
&\xlongequal{\sin x=v}2\int\frac{ve^{-v}}{(1-v)^2}\mathrm{d}v=2\int\frac{(v-1+1)e^{-v}}{(1-v)^2}\mathrm{d}v\\
&=2\int\frac{e^{-v}}{v-1}\mathrm{d}v+2\int\frac{e^{-v}}{(v-1)^2}\mathrm{d}v=2\int\frac{e^{-v}}{v-1}\mathrm{d}v-2\int e^{-v}\mathrm{d}\left(\frac{1}{v-1}\right)\\
&=2\int\frac{e^{-v}}{v-1}\mathrm{d}v-2\left(\frac{e^{-v}}{v-1}+\int\frac{e^{-v}}{v-1}\mathrm{d}v\right)\\
&=-\frac{2e^{-v}}{v-1}+C=\frac{2e^{-\sin x}}{1-\sin x}+C
\end{aligned}$$

◊

省市________ 学校________ 准考证号________ 姓名________ 考场号________ 座位号________

密封线 答题时不要超过此线

6. 记曲面 $z^2=x^2+y^2$ 和 $z=\sqrt{4-x^2-y^2}$ 围成空间区域为 V, 则三重积分 $\iint_V z\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z=$ ________

答案：2π

解. 使用球面坐标

$$I=\iiint\limits_V z\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\pi/4}\mathrm{d}\varphi\int_0^2\rho\cos\varphi\cdot\rho^2\sin\varphi\,\mathrm{d}\rho$$
$$=2\pi\cdot\frac{1}{2}\sin^2\varphi\Big|_0^{\pi/4}\cdot\frac{1}{4}\rho^4\Big|_0^2=2\pi$$

◊

二、(本题满分 14 分)

设二元函数 $f(x,y)$ 在平面上有连续的二阶导数. 对任意角度 α, 定义一元函数

$$g_\alpha(t)=f(t\cos\alpha,t\sin\alpha).$$

若对任何 α 都有 $\dfrac{\mathrm{d}g_\alpha(0)}{\mathrm{d}t}=0$ 且 $\dfrac{\mathrm{d}^2g_\alpha(0)}{\mathrm{d}t^2}>0$. 证明: $f(0,0)$ 是 $f(x,y)$ 的极小值

证明. **方法** 1 由于 $\dfrac{\mathrm{d}g_\alpha(0)}{\mathrm{d}t}=(f_x,f_y)_{(0,0)}\begin{pmatrix}\cos\alpha\\ \sin\alpha\end{pmatrix}=0$ 对一切 α 成立, 故 $(f_x,f_y)_{(0,0)}=(0,0)$, 即 $(0,0)$ 是 $f(x,y)$ 的驻点. ··(4 分)

记 $H_f=(x,y)=\begin{pmatrix}f_{xx} & f_{xy}\\ f_{yx} & f_{yy}\end{pmatrix}$, 则

$$\frac{\mathrm{d}^2g_\alpha(0)}{\mathrm{d}t^2}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[(f_x,f_y)\begin{pmatrix}\cos\alpha\\ \sin\alpha\end{pmatrix}\right]_{(0,0)}=(\cos\alpha,\sin\alpha)H_f(0,0)\begin{pmatrix}\cos\alpha\\ \sin\alpha\end{pmatrix}>0$$

··(10 分)

上式对任何单位向量 $(\cos\alpha,\sin\alpha)$ 成立, 故 $H_f(0,0)$ 是一个正定阵, 而 $f(0,0)$ 是 $f(x,y)$ 极小值.
··(14 分)

方法 2 易得 $\dfrac{\mathrm{d}g_\alpha(t)}{\mathrm{d}t}=f_x\cos\alpha+f_y\sin\alpha$, 令 $x=t\cos\alpha,y=t\sin\alpha$, 由已知 $\dfrac{\mathrm{d}g_\alpha(0)}{\mathrm{d}t}=0$, 则

$$\frac{\mathrm{d}g_\alpha(0)}{\mathrm{d}t}=f_x(0,0)\cos\alpha+f_y(0,0)\sin\alpha=0$$

由 α 的任意性得 $\begin{cases}f_x(0,0)=0\\ f_y(0,0)=0\end{cases}$, 从而 $(0,0)$ 是 $f(x,y)$ 的驻点.

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}^2g_\alpha(t)}{\mathrm{d}t^2}&=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(f_x\cos\alpha+f_y\sin\alpha\right)\\&=\left(f_{xx}\cos\alpha+f_{xy}\sin\alpha\right)\cos\alpha+\left(f_{yx}\cos\alpha+f_{yy}\sin\alpha\right)\sin\alpha\\&=f_{xx}\cos^2\alpha+2f_{xy}\sin\alpha\cos\alpha+f_{yy}\sin^2\alpha\\&=\sin\alpha\cos\alpha\left[f_{xx}\cot^2\alpha+2f_{xy}+f_{yy}\tan^2\alpha\right]\end{aligned}$$

由已知

$$\frac{\mathrm{d}^2 g_\alpha(0)}{\mathrm{d}t^2}=\frac{1}{2}\sin 2\alpha\left[f_{xx}(0,0)\cot^2\alpha+2f_{xy}(0,0)+f_{yy}(0,0)\tan^2\alpha\right]>0$$

令 $\alpha=\dfrac{\pi}{4}$ 得

$$f_{xy}(0,0)>-\frac{1}{2}\left[f_{xx}(0,0)+f_{yy}(0,0)\right]$$

从而

$$\begin{aligned}
&\left[f_{xy}(0,0)\right]^2-f_{xx}(0,0)f_{yy}(0,0)\\
>&\frac{1}{4}\left[f_{xy}(0,0)\right]^2+\frac{1}{2}f_{xx}(0,0)f_{yy}(0,0)+\frac{1}{4}\left[f_{yy}(0,0)\right]^2-f_{xx}(0,0)f_{yy}(0,0)\\
=&\frac{1}{4}\left\{\left[f_{xy}(0,0)\right]^2-2f_{xx}(0,0)f_{yy}(0,0)+\left[f_{yy}(0,0)\right]^2\right\}\\
=&\frac{1}{4}\left[f_{xx}(0,0)-f_{yy}(0,0)\right]^2\geqslant 0
\end{aligned}$$

这就说明 $B^2-AC>0$, $f(0,0)$ 为极值. 下面证明 $f(0,0)$ 为极小值,

$$\frac{\mathrm{d}^2 g_\alpha(0)}{\mathrm{d}t^2}=\lim_{t\to 0}\frac{g'_\alpha(t)-g'_\alpha(0)}{t}=\lim_{t\to 0}\frac{g'_\alpha(t)}{t}>0$$

由保序性知: $t>0$ 时, $g'_\alpha(t)>0\Longrightarrow g_\alpha(t)\uparrow$; $t<0$ 时, $g'_\alpha(t)<0\Longrightarrow g'_\alpha(t)\downarrow$

所以 $f(0,0)$ 是 $f(x,y)$ 极小值.

三、(本题满分 14 分)

设曲线 Γ 为曲线

$$x^2+y^2+z^2=1\,,\quad x+z=1\,,\quad x\geqslant 0,\, y\geqslant 0,\, z\geqslant 0$$

上从点 $A(1,0,0)$ 到点 $B(0,0,1)$ 的一段. 求曲线积分 $I=\displaystyle\int_\Gamma y\,\mathrm{d}x+z\,\mathrm{d}y+x\,\mathrm{d}z$

解. 记 Γ_1 为从 B 到 A 的直线段, 则 $x=t, y=0, z=1-t, 0\leqslant t\leqslant 1$

$$\int_{\Gamma_1} y\,\mathrm{d}x+z\,\mathrm{d}y+x\,\mathrm{d}z=\int_0^1 t\,\mathrm{d}(1-t)=-\frac{1}{2}$$

……………………………………………(4 分)

设 Γ 和 Γ_1 围成的平面区域 Σ, 方向按右手法则. 由 Stokes 公式得到

$$\left(\int_\Gamma+\int_{\Gamma_1}\right)y\,\mathrm{d}x+z\,\mathrm{d}y+x\,\mathrm{d}z=\iint_\Sigma\begin{vmatrix}\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z & \mathrm{d}z\,\mathrm{d}x & \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ y & z & x\end{vmatrix}=-\iint_\Sigma \mathrm{d}y\,\mathrm{d}z+\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x+\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

……………………………………………(8 分)

右边三个积分都是 Σ 在各个坐标面上的投影面积, 而 Σ 在 xOz 面上投影面积为零. 故

$$I+\int_{\Gamma_1}=-\iint_\Sigma \mathrm{d}y\,\mathrm{d}z+\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

曲线 Γ 在 xOy 面上投影的方程为

$$\frac{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2}{\left(\frac{1}{2}\right)^2}+\frac{y^2}{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2}=1$$

……………………………………(12 分)

又该投影（半个椭圆）的面积得知 $\iint\limits_{\Sigma} \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\frac{\pi}{4\sqrt{2}}$. 同理, $\iint\limits_{\Sigma} \mathrm{d}y\,\mathrm{d}z=\frac{\pi}{4\sqrt{2}}$

这样就有 $I=\frac{1}{2}-\frac{\pi}{2\sqrt{2}}$ ……………………………………(14 分)

四、(本题满分 15 分)

设函数 $f(x)>0$ 且在实轴上连续, 若对任意实数 t , 有 $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-|t-x|} f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant 1$,

证明 $\forall a,b,a<b$, 有 $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \frac{b-a+2}{2}$.

证明. 由于 $\forall a,b(a<b)$, 有

$$\int_a^b e^{-|t-x|} f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-|t-x|} f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant 1$$

因此

$$\int_a^b \mathrm{d}t \int_a^b e^{-|t-x|} f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant b-a$$

……………………………………(4 分)

然而

$$\int_a^b \mathrm{d}t \int_a^b e^{-|t-x|} f(x)\,\mathrm{d}x=\int_a^b f(x)\left(\int_a^b e^{-|t-x|}\,\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}x$$

其中

$$\int_a^b e^{-|t-x|}\,\mathrm{d}t=\int_a^x e^{t-x}\,\mathrm{d}t+\int_x^b e^{x-t}\,\mathrm{d}t=2-e^{a-x}-e^{x-b}$$

这样就有

$$\int_a^b f(x)\left(2-e^{a-x}-e^{x-b}\right)\mathrm{d}x \leqslant b-a \tag{1}$$

……………………………………(10 分)

即

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \frac{b-a}{2}+\frac{1}{2}\left[\int_a^b e^{a-x} f(x)\,\mathrm{d}x+\int_a^b e^{x-b} f(x)\,\mathrm{d}x\right]$$

注意到

$$\int_a^b e^{a-x} f(x)\,\mathrm{d}x=\int_a^b e^{-|a-x|} f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant 1 \quad \text{和} \quad \int_a^b e^{x-b} f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant 1$$

……………………………………(13 分)

把以上两个式子入 (1), 即得结论。 ……………………………………(15 分)

五、(本题满分 14 分)

设 $\{a_n\}$ 为一个数列, p 为固定的正整数. 若 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(a_{n+p}-a_n\right)=\lambda$, 证明: $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{n}=\dfrac{\lambda}{p}$

证明. 对于 $i=0,1,2,\cdots,p-1$, 记 $A_n^{(i)}=a_{(n+1)p+i}-a_{np+i}$. 由题设 $\lim\limits_{n\to\infty}A_n^{(i)}=\lambda$, 从而

$$\lim_{n\to\infty}\frac{A_1^{(i)}+A_2^{(i)}+\cdots+A_n^{(i)}}{n}=\lambda$$

而

$$A_1^{(i)}+A_2^{(i)}+\cdots+A_n^{(i)}=a_{(n+1)p+i}-a_{p+i}$$

由题设知

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{(n+1)p+i}}{(n+1)p+i}=\lim_{n\to\infty}\frac{a_{(n+1)p+i}}{n}\frac{n}{(n+1)p+i}=\frac{\lambda}{p}$$

对正整数 m, 设 $m=np+i$, 其中 $i=0,1,2,\cdots,p-1$, 从而可以把正整数依照 i 分为 p 个子列类。考虑任何这样的子列，下面极限

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{(n+1)p+i}}{(n+1)p+i}=\frac{\lambda}{p},\quad \text{故}\lim_{m\to\infty}\frac{a_m}{m}=\frac{\lambda}{p}$$

当 $p=1$ 时, 可以由 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(a_{n+1}-a_n\right)=\lambda$ 知, $\forall\varepsilon>0$, $\exists N_1\in\mathbb{N}$, 当 $n>N_1$ 时, 有 $|a_{n+1}-a_n-\lambda|<\dfrac{\varepsilon}{2}$.
注意到

$$a_n=a_1+(a_2-a_1)+(a_3-a_2)+\cdots+(a_n-a_{n-1})$$

用 N_1 作分项指标, 得

$$\begin{aligned}\left|\frac{a_n}{n}-\lambda\right|&=\left|\frac{a_n-n\lambda}{n}\right|=\left|\frac{\left(a_1+(a_2-a_1)+(a_3-a_2)+\cdots+(a_n-a_{n-1})\right)-n\lambda}{n}\right|\\&=\left|\frac{(a_1-\lambda)+(a_2-a_1-\lambda)+\cdots+(a_n-a_{n-1}-\lambda)}{n}\right|\\&\leqslant\frac{|a_1-\lambda|+\cdots+|a_{N_1+1}-a_{N_1}-\lambda|}{n}+\frac{|a_{N_1+2}-a_{N_1+1}-\lambda|+\cdots+|a_n-a_{n-1}-\lambda|}{n}\end{aligned}$$

其次, 记 $M=|a_1-\lambda|+\cdots+|a_{N_1+1}-a_{N_1}-\lambda|$, 且取 N_2, 使得当 $n>N_2$ 时, 有 $\dfrac{M}{n}<\dfrac{\varepsilon}{2}$.
从而令 $N=\max\{N_1,N_2\}$, 则当 $n>N$ 时, 有

$$\left|\frac{a_n}{n}-\lambda\right|<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{n-1-N_1}{n}\cdot\frac{\varepsilon}{2}<\varepsilon$$

此题是第三届全国大学生数学竞赛预赛 (非数学类) 的第二题