# 第八届全国大学生数学竞赛预赛试卷参考答案
## (数学类, 2016年10月)

一、 (本题 15 分) 设 $S$ 是空间中的一个椭球面. 设方向为常向量 $V$ 的一束平行光线照射 $S$, 其中的部分光线与 $S$ 相切, 它们的切点在 $S$ 上形成一条曲线 $\Gamma$.

证明：$\Gamma$ 落在一张过椭球中心的平面上.

**证明 1** 在空间中取直角坐标系, 记椭球面 $S$ 的方程为

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1,\ V=(\alpha,\beta,\gamma).$$

设 $(x,y,z)\in\Gamma$, 则光束中的光线

$$\ell(t)=(x,y,z)+t(\alpha,\beta,\gamma),t\in\mathbb{R}$$

是椭球面 $S$ 的切线. ........ (8分 )

由于每条切线与椭球面有且仅有一个交点，故 $t=0$ 是方程

$$\frac{(x+t\alpha)^2}{a^2}+\frac{(y+t\beta)^2}{b^2}+\frac{(z+t\gamma)^2}{c^2}=1$$

的唯一解. 由于 $(x,y,z)\in\Gamma\subset S$, 上述方程化为

$$\left(\frac{\alpha^2}{a^2}+\frac{\beta^2}{b^2}+\frac{\gamma^2}{c^2}\right)t^2+2\left(\frac{\alpha}{a^2}x+\frac{\beta}{b^2}y+\frac{\gamma}{c^2}z\right)t=0.$$

这个方程只有 $t=0$ 的唯一解, 当且仅当

$$\frac{\alpha}{a^2}x+\frac{\beta}{b^2}y+\frac{\gamma}{c^2}z=0.$$

这是一个过原点的平面方程, 故 $\gamma$ 落在过椭球面中心的一张平面上. ........(15分)

**证明 2** 在空间中做仿射变换，将椭球面映成圆球面. ..........（5分）
这时平行光束映成平行光束，切线映成切线，切点映成切点，椭球中心映成球面中心. ........（10分）
由于平行光束照圆球面的所有切线的切点是一个大圆，它落在过球心的平面上，而仿射变换将平面映成平面，故 $\Gamma$ 落在一张过椭球面中心的平面上. ....... （15分）

二、 (本题 15 分) 设 $n$ 为奇数, $A, B$ 为两个实 $n$ 阶方阵, 且 $BA = 0$. 记 $A + J_A$ 的特征值集合为 $S_1$, $B + J_B$ 的特征值集合为 $S_2$, 其中 $J_A, J_B$ 分别表示 $A$ 和 $B$ 的 Jordan 标准型. 求证 $0 \in S_1 \cup S_2$.

**证明** 由秩不等式 $\operatorname{rank} A + \operatorname{rank} B \leqslant \operatorname{rank}(BA) + n$ 得 $\operatorname{rank} A + \operatorname{rank} B \leqslant n$. 结果 $\operatorname{rank} A \leqslant \frac{n}{2}$ 或 $\operatorname{rank} B \leqslant \frac{n}{2}$. ..........(5分)

注意到 $n$ 为奇数，故有 $\operatorname{rank} A < \frac{n}{2}$ 或 $\operatorname{rank} B < \frac{n}{2}$ 成立。 .........(10分)

若 $\operatorname{rank} A < \frac{n}{2}$, 则 $\operatorname{rank}(A + J_A) \leqslant \operatorname{rank} A + \operatorname{rank} J_A < n$, 此时, $0 \in S_1$;

若 $\operatorname{rank} B < \frac{n}{2}$, 则 $\operatorname{rank}(B + J_B) \leqslant \operatorname{rank} B + \operatorname{rank} J_B < n$, 此时, $0 \in S_2$. 最终总有 $0 \in S_1 \cup S_2$. ........(15分)

三、(本题 20 分) 设 $A_1,\ldots,A_{2017}$ 为 2016 阶实方阵。证明关于 $x_1,\ldots,x_{2017}$ 的方程 $\det(x_1A_1+\cdots+x_{2017}A_{2017})=0$ 至少有一组非零实数解, 其中 det 表示行列式.

**证明** 记

$$A_1=(p_1^{(1)},\cdots,p_{2016}^{(1)}),\ldots,A_{2017}=(p_1^{(2017)},\cdots,p_{2016}^{(2017)}).$$

.........(5分)

考虑线性方程组

$$x_1p_1^{(1)}+\cdots+x_{2017}p_1^{(2017)}=0$$

..........(10分)

由于未知数个数大于方程个数，故该线性方程组必有非零解 $(c_1,\cdots,c_{2017})$. 从而 $c_1A_1+\cdots+c_{2017}A_{2017}$ 的第一列为 0，更有

$$\det(c_1A_1+\cdots+c_{2017}A_{2017})=0.$$

证毕。 ...........(20分)

四、 (本题 20 分) 设 $f_0(x)$ 和 $f_1(x)$ 是 $[0,1]$ 上正连续函数, 满足 $\int_0^1 f_0(x)\,dx \leqslant \int_0^1 f_1(x)\,dx$. 设

$$f_{n+1}(x)=\frac{2f_n^2(x)}{f_n(x)+f_{n-1}(x)},\ n=1,2,\cdots.$$

求证: 数列 $a_n=\displaystyle\int_0^1 f_n(x)\,dx,\ n=0,1,2,\cdots$ 单调递增且收敛.

**证明** 因为

$$\begin{aligned}&\int_0^1 \frac{f_1^2(x)}{f_1(x)+f_0(x)}\,dx-\int_0^1 \frac{f_0^2(x)}{f_1(x)+f_0(x)}\,dx\\ =&\int_0^1 \frac{f_1^2(x)-f_0^2(x)}{f_1(x)+f_0(x)}\,dx=\int_0^1 f_1(x)\,dx-\int_0^1 f_0(x)\,dx\geqslant 0.\end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned}a_2-a_1=\quad & 2\int_0^1 \frac{f_1^2(x)}{f_1(x)+f_0(x)}\,dx-\int_0^1 f_1(x)\,dx\\ =&\int_0^1 \frac{f_1^2(x)}{f_1(x)+f_0(x)}\,dx-\int_0^1 \frac{f_1(x)f_0(x)}{f_1(x)+f_0(x)}\,dx\\ \geqslant&\frac{1}{2}\int_0^1 \frac{f_1^2(x)+f_0^2(x)}{(f_1(x)+f_0(x))}\,dx-\int_0^1 \frac{f_1(x)f_0(x)}{f_1(x)+f_0(x)}\,dx\\ =&\int_0^1 \frac{(f_1(x)-f_0(x))^2}{2(f_1(x)+f_0(x))}\,dx\geqslant 0.\end{aligned}$$

归纳地可以证明 $a_{n+1}\geqslant a_n$, $n=1,2,\cdots$. ............(5分)

由于 $f_0,f_1$ 是正连续函数, 可取常数 $k\geqslant 1$ 使得 $f_1\leqslant kf_0$. 设 $c_1=k$. 根据递推关系可以归纳证明

$$f_n(x)\leqslant c_nf_{n-1}(x), \tag{1}$$

............(10分)

其中 $c_{n+1}=\frac{2c_n}{c_n+1}$, $n=0,1,\cdots$. 易证 $\{c_n\}$ 单调递减趋于 1, 且 $\frac{c_n}{c_n+1}\leqslant\frac{k}{k+1}$.
............(15分)

以下证明 $\{a_n\}$ 收敛. 由 (1) 可得 $a_{n+1}\leqslant c_{n+1}a_n$. 因此

$$c_{n+1}a_{n+1}\leqslant\frac{2c_{n+1}}{c_n+1}c_na_n=\frac{4c_n}{(c_n+1)^2}c_na_n\leqslant c_na_n.$$

这说明 $\{c_na_n\}$ 是正单调递减数列, 因而收敛. 注意到 $\{c_n\}$ 收敛到 1, 可知 $\{a_n\}$ 收敛, 且 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n\leqslant c_1a_1=ka_1$. ............(20分)

五、(本题 15 分) 设 $\alpha > 1$. 求证不存在 $[0,+\infty)$ 上的正可导函数 $f(x)$ 满足

$$f'(x) \geqslant f^{\alpha}(x),\ x \in [0,+\infty). \tag{1}$$

**证明** 若 $f(x)$ 是这样的函数, 则 $f'(x) > 0$. 因此 $f(x)$ 是严格递增函数. (1) 式可表示为

$$\left(\frac{1}{\alpha-1} f^{1-\alpha}(x) + x\right)' \leqslant 0.$$

这说明 $\frac{1}{\alpha-1} f^{1-\alpha}(x) + x$ 是单调递减函数. ............(5分)

因而

$$\frac{1}{\alpha-1} f^{1-\alpha}(x+1) + (x+1) \leqslant \frac{1}{\alpha-1} f^{1-\alpha}(x) + x,$$

即,

$$(\alpha-1) \leqslant f^{1-\alpha}(x) - f^{1-\alpha}(x+1) < f^{1-\alpha}(x).$$

因此

$$f^{\alpha-1}(x) < \frac{1}{\alpha-1}.$$

于是 $f(x)$ 是有界函数. ............(10分)

从 $f(x)$ 的严格递增性, 可知 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ 收敛. 由微分中值定理, 存在 $\xi \in (x, x+1)$ 使得

$$f(x+1) - f(x) = f'(\xi) \geqslant f^{\alpha}(\xi) \geqslant f^{\alpha}(x) \geqslant f^{\alpha}(0) > 0.$$

令 $x \to +\infty$, 上式左端趋于零, 可得矛盾! ............(15分)

六、 (本题 15 分) 设 $f(x)$ 和 $g(x)$ 是 $[0,1]$ 区间上的单调递增函数, 满足

$$0 \le f(x), g(x) \le 1, \ \int_0^1 f(x)dx = \int_0^1 g(x)dx.$$

求证:

$$\int_0^1 |f(x) - g(x)|dx \le \frac{1}{2}.$$

**证明** 由于$f$ 和 $g$ 可用单调阶梯函数逼近，故可不妨设他们都是单调增的阶梯函数。 ............(2分)

令 $h(x) = f(x) - g(x)$, 则对 $\forall x, y \in [0,1]$ 有 $|h(x) - h(y)| \leqslant 1$. ............(5分)

事实上，对 $x \geqslant y$ 我们有

$$-1 \leqslant -(g(x) - g(y)) \leqslant h(x) - h(y) = f(x) - f(y) - (g(x) - g(y)) \leqslant f(x) - f(y) \leqslant 1;$$

对 $x < y$ 有

$$-1 \leqslant f(x) - f(y) \leqslant h(x) - h(y) \leqslant g(y) - g(x) \leqslant 1.$$

现记

$$C_1 = \{x \in [0,1] \mid f(x) \geqslant g(x)\}, \quad C_2 = \{x \in [0,1] \mid f(x) < g(x)\},$$

则 $C_1$ 与 $C_2$ 分别为有限个互不相交区间的并，且由 $\int_0^1 f dx = \int_0^1 g dx$, 有

$$\int_{C_1} h dx = -\int_{C_2} h dx.$$

让 $|C_i| (i = 1,2)$ 表示 $C_i$ 所含的那些区间的长度之和, 则 $|C_1| + |C_2| = 1$. ............(7分)

于是

$$\begin{aligned}
2\int_0^1 |f - g| dx &= 2\left(\int_{C_1} h dx - \int_{C_2} h dx\right) \\
&\leqslant \left(\frac{|C_2|}{|C_1|}\int_{C_1} h dx + \frac{|C_1|}{|C_2|}\int_{C_2}(-h) dx\right) + \int_{C_1} h dx - \int_{C_2} h dx \\
&= \frac{1}{|C_1|}\int_{C_1} h dx + \frac{1}{|C_2|}\int_{C_2}(-h) dx \\
&\leqslant \sup_{C_1} h + \sup_{C_2}(-h) \\
&\leqslant 1.
\end{aligned}$$

注意，上式中最后一个不等式来自 $|h(x) - h(y)| \leqslant 1$，另外，若有某个 $|C_i|$ 等于 0，则结论显然成立。 ............(15分)