第十二届全国大学生数学竞赛初赛试题参考答案

（非数学类，2020 年 11 月）

一、（**本题满分 30 分，每小题 6 分**）填空题：

【1】 极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(x-\sin x)e^{-x^2}}{\sqrt{1-x^3}-1}=$______________.

【解】 利用等价无穷小：当 $x\to 0$ 时，有 $\sqrt{1-x^3}-1\sim -\dfrac{1}{2}x^3$，所以

$$\lim_{x\to 0}\frac{(x-\sin x)e^{-x^2}}{\sqrt{1-x^3}-1}=-2\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x^3}=-2\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{3x^2}=-\frac{1}{3}.$$

【2】 设函数 $f(x)=(x+1)^n e^{-x^2}$，则 $f^{(n)}(-1)=$______________.

【解】 利用莱布尼兹求导法则，得

$$f^{(n)}(x)=n!e^{-x^2}+\sum_{k=0}^{n-1}C_n^k[(x+1)^n]^{(k)}(e^{-x^2})^{(n-k)},$$

所以 $f^{(n)}(-1)=\dfrac{n!}{e}$.

【3】 设 $y=f(x)$ 是由方程 $\arctan\dfrac{x}{y}=\ln\sqrt{x^2+y^2}-\dfrac{1}{2}\ln 2+\dfrac{\pi}{4}$ 确定的隐函数，且

满足 $f(1)=1$，则曲线 $y=f(x)$ 在点 $(1,1)$ 处的切线方程为______________.

【解】 对所给方程两端关于 x 求导，得 $\dfrac{\frac{y-xy'}{y^2}}{1+\left(\frac{x}{y}\right)^2}=\dfrac{x+yy'}{x^2+y^2}$，即 $(x+y)y'=y-x$，

所以 $f'(1)=0$，曲线 $y=f(x)$ 在点 $(1,1)$ 处的切线方程为 $y=1$.

【4】 已知 $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2}$，则 $\displaystyle\int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty}\frac{\sin x\sin(x+y)}{x(x+y)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=$______________.

【解】 令 $u=x+y$，得

$$I=\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x\int_0^{+\infty}\frac{\sin(x+y)}{x+y}\mathrm{d}y=\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x\int_x^{+\infty}\frac{\sin u}{u}\mathrm{d}u$$

$$=\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x\left(\int_0^{+\infty}\frac{\sin u}{u}\mathrm{d}u-\int_0^{x}\frac{\sin u}{u}\mathrm{d}u\right)$$

$$=\left(\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x\right)^2-\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x\int_0^x\frac{\sin u}{u}\mathrm{d}u.$$

令 $F(x)=\int_0^x\frac{\sin u}{u}\mathrm{d}u$，则 $F'(x)=\frac{\sin x}{x}$， $\lim\limits_{x\to+\infty}F(x)=\frac{\pi}{2}$， 所以

$$I=\frac{\pi^2}{4}-\int_0^{+\infty}F(x)F'(x)\mathrm{d}x=\frac{\pi^2}{4}-\frac{1}{2}[F(x)]^2\Big|_0^{+\infty}=\frac{\pi^2}{4}-\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2}\right)^2=\frac{\pi^2}{8}.$$

【5】设 $f(x)$，$g(x)$ 在 $x=0$ 的某一邻域 U 内有定义，对任意 $x\in U$， $f(x)\neq g(x)$，且 $\lim\limits_{x\to0}f(x)=\lim\limits_{x\to0}g(x)=a>0$，则 $\lim\limits_{x\to0}\frac{[f(x)]^{g(x)}-[g(x)]^{g(x)}}{f(x)-g(x)}=$ __________.

【解】 根据极限的保号性，存在 $x=0$ 的一个去心领域 U_1，使得 $x\in U_1$ 时 $f(x)>0$，$g(x)>0$. 当 $x\to0$ 时，有 $e^x-1\sim x$， $\ln(1+x)\sim x$，利用等价无穷小替换，得

$$\lim_{x\to0}\frac{[f(x)]^{g(x)}-[g(x)]^{g(x)}}{f(x)-g(x)}=\lim_{x\to0}[g(x)]^{g(x)}\frac{\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)^{g(x)}-1}{f(x)-g(x)}=a^a\lim_{x\to0}\frac{\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)^{g(x)}-1}{f(x)-g(x)}$$

$$=a^a\lim_{x\to0}\frac{e^{g(x)\ln\frac{f(x)}{g(x)}}-1}{f(x)-g(x)}=a^a\lim_{x\to0}\frac{g(x)\ln\frac{f(x)}{g(x)}}{f(x)-g(x)}=a^a\lim_{x\to0}\frac{g(x)\ln\left(1+\left(\frac{f(x)}{g(x)}-1\right)\right)}{f(x)-g(x)}$$

$$=a^a\lim_{x\to0}\frac{g(x)\left(\frac{f(x)}{g(x)}-1\right)}{f(x)-g(x)}=a^a.$$

二、(**本题满分 10 分**) 设数列 $\{a_n\}$ 满足： $a_1=1$，且 $a_{n+1}=\frac{a_n}{(n+1)(a_n+1)}$， $n\geq1$. 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}n!a_n$.

【解】 利用归纳法易知 $a_n>0$ $(n\geq1)$. 由于

$$\frac{1}{a_{n+1}}=(n+1)\left(1+\frac{1}{a_n}\right)=(n+1)+(n+1)\frac{1}{a_n}=(n+1)+(n+1)\left(n+n\frac{1}{a_{n-1}}\right)$$

$$=(n+1)+(n+1)n+(n+1)n\frac{1}{a_{n-1}},\qquad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\ 4\text{ 分}$$

如此递推，得 $\frac{1}{a_{n+1}}=(n+1)!\left(\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{k!}+\frac{1}{a_1}\right)=(n+1)!\sum\limits_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}$， $\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$ 3 分

因此

$$\lim_{n\to\infty} n!a_n = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=0}^{n-1}\frac{1}{k!}} = \frac{1}{e}.$$ ………………… 3 分

三、(**本题满分 10 分**)设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，$f(x)$ 在 $(0,1)$ 内可导，且 $f(0)=0$，$f(1)=1$.

证明： (1) 存在 $x_0 \in (0,1)$ 使得 $f(x_0)=2-3x_0$； (2) 存在 $\xi,\eta \in (0,1)$，且 $\xi \neq \eta$，使得 $[1+f'(\xi)][1+f'(\eta)]=4$.

【解】 (1) 令 $F(x)=f(x)-2+3x$，则 $F(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，且 $F(0)=-2$，$F(1)=2$. 根据连续函数介值定理，存在 $x_0 \in (0,1)$ 使得 $F(x_0)=0$，即 $f(x_0)=2-3x_0$.

………………… 5 分

(2)在区间 $[0,x_0]$，$[x_0,1]$ 上利用拉格朗日中值定理，存在 $\xi,\eta \in (0,1)$，且 $\xi \neq \eta$，使得

$$\frac{f(x_0)-f(0)}{x_0-0}=f'(\xi), \quad 且 \quad \frac{f(x_0)-f(1)}{x_0-1}=f'(\eta).$$

所以

$$[1+f'(\xi)][1+f'(\eta)]=4.$$ ……………… 5 分

四、(**本题满分 12 分**) 已知 $z=xf(\frac{y}{x})+2y\varphi(\frac{x}{y})$，其中 f，φ 均为二次可微函数.

(1) 求 $\frac{\partial z}{\partial x}$，$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$；

(2) 当 $f=\varphi$，且 $\left.\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\right|_{x=a}=-by^2$ 时，求 $f(y)$.

【解】 (1) $\frac{\partial z}{\partial x}=f(\frac{y}{x})-\frac{y}{x}f'(\frac{y}{x})+2\varphi'(\frac{x}{y})$， $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}=-\frac{y}{x^2}f''(\frac{y}{x})-\frac{2x}{y^2}\varphi''(\frac{x}{y})$.

…………………… 3 分

(2) $$\left.\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\right|_{x=a}=-\frac{y}{a^2}f''(\frac{y}{a})-\frac{2a}{y^2}\varphi''(\frac{a}{y})=-by^2.$$

因为 $f=\varphi$，所以 $$\frac{y}{a^2}f''(\frac{y}{a})+\frac{2a}{y^2}f''(\frac{a}{y})=by^2.$$

令 $y=au$，则 $\frac{u}{a}f''(u)+\frac{2}{au^2}f''(\frac{1}{u})=a^2bu^2$，即 $u^3f''(u)+2f''(\frac{1}{u})=a^3bu^4$.

上式中以 $\frac{1}{u}$ 换 u 得 $$2f''(\frac{1}{u})+4u^3f''(u)=2a^3b\frac{1}{u}.$$ ………………… 5 分

联立二式，解得 $-3u^3 f''(u)=a^3b(u^4-\frac{2}{u})$，所以 $f''(u)=\frac{a^3b}{3}(\frac{2}{u^4}-u)$，从而有

$$f(u)=\frac{a^3b}{3}(\frac{1}{3u^2}-\frac{u^3}{6})+C_1u+C_2.$$

故 $f(y)=\frac{a^3b}{3}(\frac{1}{3y^2}-\frac{y^3}{6})+C_1y+C_2.$ ………………… 4 分

五、(**本题满分 12 分**) 计算 $I=\oint_{\Gamma}\left|\sqrt{3}y-x\right|\mathrm{d}x-5z\mathrm{d}z$，曲线 $\Gamma:\begin{cases}x^2+y^2+z^2=8\\ x^2+y^2=2z\end{cases}$，从 z 轴正向往坐标原点看去取逆时针方向.

【解】 曲线 Γ 也可表示为 $\begin{cases}z=2,\\ x^2+y^2=4,\end{cases}$ 所以 Γ 的参数方程为 $\begin{cases}x=2\cos\theta,\\ y=2\sin\theta,\\ z=2,\end{cases}$ 参数的范围：$0\le\theta\le 2\pi$. ………………… 4 分

注意到在曲线 Γ 上 $\mathrm{d}z=0$，所以

$$I=-\int_0^{2\pi}\left|2\sqrt{3}\sin\theta-2\cos\theta\right|2\sin\theta\mathrm{d}\theta=-8\int_0^{2\pi}\left|\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\theta-\frac{1}{2}\cos\theta\right|\sin\theta\mathrm{d}\theta$$

$$=-8\int_0^{2\pi}\left|\cos\left(\theta+\frac{\pi}{3}\right)\right|\sin\theta\mathrm{d}\theta=-8\int_{\frac{\pi}{3}}^{2\pi+\frac{\pi}{3}}\left|\cos t\right|\sin\left(t-\frac{\pi}{3}\right)\mathrm{d}t.\ (\text{代换：}\ t=\theta+\frac{\pi}{3})$$

根据周期函数的积分性质，得 ………………… 4 分

$$I=-8\int_{-\pi}^{\pi}\left|\cos t\right|\sin\left(t-\frac{\pi}{3}\right)\mathrm{d}t=-4\int_{-\pi}^{\pi}\left|\cos t\right|\left(\sin t-\sqrt{3}\cos t\right)\mathrm{d}t=8\sqrt{3}\int_0^{\pi}\left|\cos t\right|\cos t\mathrm{d}t.$$

令 $u=t-\frac{\pi}{2}$，则 $I=-8\sqrt{3}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\left|\sin u\right|\sin u\mathrm{d}u=0.$ ………………… 4 分

六、(**本题满分 12 分**) 证明 $f(n)=\sum_{m=1}^{n}\int_0^m\cos\frac{2\pi n[x+1]}{m}dx$ 等于 n 的所有因子(包括 1 和 n 本身)之和，其中 $[x+1]$ 表示不超过 $x+1$ 的最大整数，并计算 $f(2021)$.

【解】 $\int_0^m\cos\frac{2\pi n[x+1]}{m}\mathrm{d}x=\sum_{k=1}^{m}\int_{k-1}^{k}\cos\frac{2\pi n[x+1]}{m}\mathrm{d}x=\sum_{k=1}^{m}\int_{k-1}^{k}\cos\frac{2\pi nk}{m}dx=\sum_{k=1}^{m}\cos k\frac{2\pi n}{m}.$

………………… 4 分

如果 m 是 n 的因子，那么 $\int_0^m\cos\frac{2\pi n[x+1]}{m}\mathrm{d}x=m$；否则，根据三角恒等式

$$\sum_{k=1}^{m}\cos kt=\cos\frac{m+1}{2}t\cdot\frac{\sin\frac{mt}{2}}{\sin\frac{t}{2}},$$

有 $\int_0^m \cos\frac{2\pi n[x+1]}{m}\mathrm{d}x=\cos\left(\frac{m+1}{2}\cdot\frac{2\pi n}{m}\right)\cdot\frac{\sin\left(\frac{m}{2}\cdot\frac{2\pi n}{m}\right)}{\sin\frac{2\pi n}{2m}}=0$，因此得证. …………… 5 分

由此可得 $f(2021)=1+43+47+2021=2112$. ………………… 3 分

七、（**本题满分 14 分**）设 $u_n=\int_0^1\frac{\mathrm{d}t}{(1+t^4)^n}\quad(n\geq 1)$.

(1) 证明数列 $\{u_n\}$ 收敛，并求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}u_n$；

(2) 证明级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n u_n$ 条件收敛；

(3) 证明当 $p\geq 1$ 时级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{u_n}{n^p}$ 收敛，并求级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{u_n}{n}$ 的和.

【解】 (1) 对任意 $\varepsilon>0$，取 $0<a<\frac{\varepsilon}{2}$，将积分区间分成两段，得

$$u_n=\int_0^1\frac{\mathrm{d}t}{(1+t^4)^n}=\int_0^a\frac{\mathrm{d}t}{(1+t^4)^n}+\int_a^1\frac{\mathrm{d}t}{(1+t^4)^n}.$$

因为

$$\int_a^1\frac{\mathrm{d}t}{(1+t^4)^n}\leq\frac{1-a}{(1+a^4)^n}<\frac{1}{(1+a^4)^n}\to 0\quad(n\to\infty)$$

所以存在正整数 N，当 $n>N$ 时，$\int_a^1\frac{\mathrm{d}t}{(1+t^4)^n}<\frac{\varepsilon}{2}$，从而

$$0\leq u_n<a+\int_a^1\frac{\mathrm{d}t}{(1+t^4)^n}<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon,$$

所以 $\lim\limits_{n\to\infty}u_n=0$. ………………… 4 分

(2) 显然 $0<u_{n+1}=\int_0^1\frac{\mathrm{d}t}{(1+t^4)^{n+1}}\leq\int_0^1\frac{\mathrm{d}t}{(1+t^4)^n}=u_n$，即 u_n 单调递减，又 $\lim\limits_{n\to\infty}u_n=0$，

故由莱布尼兹判别法知，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n u_n$ 收敛. ………………… 3 分

另一方面，当 $n\geq 2$ 时，有

$$u_n=\int_0^1\frac{\mathrm{d}t}{(1+t^4)^n}\geq\int_0^1\frac{\mathrm{d}t}{(1+t)^n}=\frac{1}{n-1}(1-2^{1-n}),$$

由于$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n-1}$发散，$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n-1}\frac{1}{2^{n-1}}$收敛，所以$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n-1}\left(1-\frac{1}{2^{n-1}}\right)$发散，从而$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$发散. 因此$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n u_n$条件收敛. ………………… 3 分

(3) 先求级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{u_n}{n}$的和. 因为

$$u_n=\int_0^1\frac{\mathrm{d}t}{(1+t^4)^n}=\frac{t}{(1+t^4)^n}\bigg|_0^1+n\int_0^1\frac{4t^4}{(1+t^4)^{n+1}}\mathrm{d}t=\frac{1}{2^n}+4n\int_0^1\frac{t^4}{(1+t^4)^{n+1}}\mathrm{d}t$$

$$=\frac{1}{2^n}+4n\int_0^1\frac{1+t^4-1}{(1+t^4)^{n+1}}\mathrm{d}t=\frac{1}{2^n}+4n(u_n-u_{n+1}),$$

所以

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{u_n}{n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n2^n}+4\sum_{n=1}^{\infty}(u_n-u_{n+1})=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n2^n}+4u_1.$$

利用展开式$\ln(1+x)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}$，取$x=-\frac{1}{2}$，得$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n2^n}=\ln 2$. 而

$$u_1=\int_0^1\frac{\mathrm{d}t}{1+t^4}=\frac{\sqrt{2}}{8}[\pi+2\ln(1+\sqrt{2})]$$

因此 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{u_n}{n}=\ln 2+\frac{\sqrt{2}}{2}[\pi+2\ln(1+\sqrt{2})]$.

最后，当$p\geq 1$时，因为$\frac{u_n}{n^p}\leq\frac{u_n}{n}$，且$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{u_n}{n}$收敛，所以$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{u_n}{n^p}$收敛.

………………… 4 分

第十一届全国大学生数学竞赛(非数学类)试题

参考解答及评分标准

一、填空题（每小题 6 分）

1. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(\mathrm{e}^{\sin x}+\sqrt[3]{1-\cos x})-\sin x}{\arctan(4\sqrt[3]{1-\cos x})}=\dfrac{1}{4}$.

解：$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(\mathrm{e}^{\sin x}+\sqrt[3]{1-\cos x})-\sin x}{\arctan(4\sqrt[3]{1-\cos x})}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(\mathrm{e}^{\sin x}-1)+\sqrt[3]{1-\cos x}}{4\sqrt[3]{1-\cos x}}-\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{4\sqrt[3]{1-\cos x}}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{(\mathrm{e}^{\sin x}-1)}{4\left(\dfrac{x^2}{2}\right)^{1/3}}+\frac{1}{4}-\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{4\left(\dfrac{x^2}{2}\right)^{1/3}}=\frac{1}{4}.$$

2. 设隐函数 $y=y(x)$ 由方程 $y^2(x-y)=x^2$ 所确定，则 $\displaystyle\int\frac{dx}{y^2}=\frac{3y}{x}-2\ln|\frac{y}{x}|+C$.

解：令 $y=tx$，则 $x=\dfrac{1}{t^2(1-t)}$， $y=\dfrac{1}{t(1-t)}$， $dx=\dfrac{-2+3t}{t^3(1-t)^2}dt$，

这样，$\displaystyle\int\frac{dx}{y^2}=\int\frac{-2+3t}{t}dt=3t-2\ln|t|+C=\frac{3y}{x}-2\ln|\frac{y}{x}|+C$.

3. 定积分 $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{e^x(1+\sin x)}{1+\cos x}dx=e^{\frac{\pi}{2}}$.

解：$\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{e^x(1+\sin x)}{1+\cos x}dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{e^x}{1+\cos x}dx+\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x}{1+\cos x}de^x$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{e^x}{1+\cos x}dx+\frac{\sin xe^x}{1+\cos x}\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}}-\int_0^{\frac{\pi}{2}}e^x\frac{\cos x(1+\cos x)+\sin^2 x}{(1+\cos x)^2}dx$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{e^x}{1+\cos x}dx+\frac{\sin xe^x}{1+\cos x}\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}}-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{e^x}{1+\cos x}dx=e^{\frac{\pi}{2}}.$$

4. 已知 $du(x,y)=\dfrac{ydx-xdy}{3x^2-2xy+3y^2}$，则 $u(x,y)=\dfrac{1}{2\sqrt{2}}\arctan\dfrac{3}{2\sqrt{2}}(\dfrac{x}{y}-\dfrac{1}{3})+\mathrm{C}$.

解：$du(x,y)=\dfrac{ydx-xdy}{3x^2-2xy+3y^2}=\dfrac{d(\dfrac{x}{y})}{3(\dfrac{x}{y})^2-\dfrac{2x}{y}+3}=\dfrac{1}{2\sqrt{2}}d\arctan\dfrac{3}{2\sqrt{2}}(\dfrac{x}{y}-\dfrac{1}{3})$.

所以，$u(x,y)=\dfrac{1}{2\sqrt{2}}\arctan\dfrac{3}{2\sqrt{2}}(\dfrac{x}{y}-\dfrac{1}{3})+\mathrm{C}$.

5. 设$a,b,c,\mu>0$，曲面$xyz=\mu$与曲面$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$相切，则$\mu=\frac{abc}{3\sqrt{3}}$.

解：根据题意有：$yz=\frac{2x}{a^2}\lambda$, $xz=\frac{2y}{b^2}\lambda$， $xy=\frac{2z}{c^2}\lambda$，以及

$\mu=2\lambda\frac{x^2}{a^2}$， $\mu=2\lambda\frac{y^2}{b^2}$， $\mu=2\lambda\frac{z^2}{c^2}$，从而得：$\mu=\frac{8\lambda^3}{a^2b^2c^2}$， $3\mu=2\lambda$，

联立解得：$\mu=\frac{abc}{3\sqrt{3}}$.

二、（14 分）计算三重积分$\iiint\limits_{\Omega}\frac{xyz}{x^2+y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$，其中$\Omega$是由曲面$(x^2+y^2+z^2)^2=2xy$围成的区域在第一卦限部分.

解：采用“球面坐标”计算，并利用对称性，得

$$I=2\int_0^{\frac{\pi}{4}}\mathrm{d}\theta\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\varphi\int_0^{\sqrt{2}\sin\varphi\sqrt{\sin\theta\cos\theta}}\frac{\rho^3\sin^2\varphi\cos\theta\sin\theta\cos\varphi}{\rho^2\sin^2\varphi}\rho^2\sin\varphi\mathrm{d}\rho$$ -------5 分

$$=2\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin\theta\cos\theta\mathrm{d}\theta\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\varphi\cos\varphi\mathrm{d}\varphi\int_0^{\sqrt{2}\sin\varphi\sqrt{\sin\theta\cos\theta}}\rho^3\mathrm{d}\rho$$

$$=2\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin^3\theta\cos^3\theta\mathrm{d}\theta\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^5\varphi\cos\varphi\mathrm{d}\varphi$$ -------10 分

$$=\frac{1}{4}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin^3 2\theta\mathrm{d}\theta\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^5\varphi\mathrm{d}(\sin\varphi)$$

$$=\frac{1}{48}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^3 t\mathrm{d}t=\frac{1}{48}\cdot\frac{2}{3}=\frac{1}{72}.$$ -------14 分

三、（14 分）设$f(x)$在$[0,+\infty)$上可微，$f(0)=0$，且存在常数$A>0$，使得$|f'(x)|\le A|f(x)|$在$[0,+\infty)$上成立，试证明：在$(0,+\infty)$上有$f(x)\equiv 0$.

证明：设$x_0\in[0,\frac{1}{2A}]$，使得$|f(x_0)|=\max\left\{|f(x)|\,\middle|\,x\in[0,\frac{1}{2A}]\right\}$， -------5 分

$|f(x_0)|=|f(0)+f'(\xi)x_0|\le A|f(x_0)|\frac{1}{2A}=\frac{1}{2}|f(x_0)|$，只有$|f(x_0)|=0$.

故当 $x\in[0,\frac{1}{2A}]$时， $f(x)\equiv 0$. -------12 分

递推可得，对所有的$x\in[\frac{k-1}{2A},\frac{k}{2A}]$，$k=1,2,\cdots\cdots$，均有$f(x)\equiv 0$. -------14 分

四、（14 分）计算积分$I=\int_0^{2\pi}d\phi\int_0^{\pi}e^{\sin\theta(\cos\phi-\sin\phi)}\sin\theta d\theta$

解：设球面 $\Sigma: x^2+y^2+z^2=1$, 由球面参数方程

$$x=\sin\theta\cos\phi，\quad y=\sin\theta\sin\phi，\quad z=\cos\theta$$

知 $dS=\sin\theta d\theta d\phi$，所以，所求积分可化为第一型曲面积分

$$I=\iint_{\Sigma} e^{x-y}dS \qquad \text{-------4 分}$$

设平面 P_t：$\frac{x-y}{\sqrt{2}}=t$，$-1\le t\le 1$，其中 t 为平面 P_t 被球面截下部分中心到原点距离. 用平面 P_t 分割球面 Σ，球面在平面 P_t, P_{t+dt} 之间的部分形如圆台外表面状，记为 $\Sigma_{\mathrm{t,dt}}$. 被积函数在其上为 $e^{x-y}=e^{\sqrt{2}t}$. --------8 分

由于 $\Sigma_{\mathrm{t,dt}}$ 半径为 $r_t=\sqrt{1-\mathrm{t}^2}$，半径的增长率为 $d\sqrt{1-t^2}=\frac{-tdt}{\sqrt{1-t^2}}$ 就是 $\Sigma_{\mathrm{t,dt}}$ 上下底半径之差. 记圆台外表面斜高为 h_t，则由微元法知 $dt^2+\left(d\sqrt{1-t^2}\right)^2=h_t^2$，得到 $h_t=\frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}$，所以 $\Sigma_{\mathrm{t,dt}}$ 的面积为 $dS=2\pi r_t h_t=2\pi dt$, --------12 分

$$I=\int_{-1}^{1}e^{\sqrt{2}t}\,2\pi\mathrm{dt}=\frac{2\pi}{\sqrt{2}}e^{\sqrt{2}t}\Big|_{-1}^{1}=\sqrt{2}\pi(e^{\sqrt{2}}-e^{-\sqrt{2}}). \qquad \text{--------14 分}$$

五、（14 分）设 $f(x)$ 是仅有正实根的多项式函数，满足 $\frac{f'(x)}{f(x)}=-\sum_{n=0}^{+\infty}c_n x^n$. 试证：$c_n>0$，$(n\ge 0)$，极限 $\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{c_n}}$ 存在，且等于 $f(x)$ 的最小根.

证明：由 $f(x)$ 为仅有正实根的多项式，不妨设 $f(x)$ 的全部根为 $0<a_1<a_2<\cdots<a_k$，这样，

$$f(x)=A(x-a_1)^{r_1}\cdots(x-a_k)^{r_k},$$

其中 r_i 为对应根 a_i 的重数 $(i=1,\cdots,k,r_k\ge 1)$. --------2 分

$$f'(x)=Ar_1(x-a_1)^{r_1-1}\cdots(x-a_k)^{r_k}+\cdots+Ar_k(x-a_1)^{r_1}\cdots(x-a_k)^{r_k-1},$$

所以，$f'(x)$=$f(x)\left(\frac{r_1}{x-a_1}+\cdots+\frac{r_k}{x-a_k}\right)$，从而，$-\frac{f'(x)}{f(x)}=\frac{r_1}{a_1}\cdot\frac{1}{1-\frac{x}{a_1}}+\cdots+\frac{r_k}{a_k}\cdot\frac{1}{1-\frac{x}{a_k}}$.

--------6 分

若 $|x|<a_1$，则

$$-\frac{f'(x)}{f(x)}=\frac{r_1}{a_1}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{x}{a_1}\right)^n+\cdots+\frac{r_k}{a_k}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{x}{a_k}\right)^n=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{r_1}{{a_1}^{n+1}}+\cdots+\frac{r_k}{{a_k}^{n+1}}\right)x^n.$$

而 $-\frac{f'(x)}{f(x)}=\sum_{n=0}^{\infty}c_n x^n$，由幂级数的唯一性知

$$c_n=\frac{r_1}{{a_1}^{n+1}}+\cdots+\frac{r_k}{{a_k}^{n+1}}>0, \qquad \text{-------9 分}$$

$$\frac{c_n}{c_{n+1}}=\frac{\frac{r_1}{{a_1}^{n+1}}+\cdots+\frac{r_k}{{a_k}^{n+1}}}{\frac{r_1}{{a_1}^{n+2}}+\cdots+\frac{r_k}{{a_k}^{n+2}}}=a_1\cdot\frac{r_1+\cdots+\left(\frac{a_1}{a_k}\right)^{n+1}r_k}{r_1+\cdots+\left(\frac{a_1}{a_k}\right)^{n+2}r_k}.$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{c_n}{c_{n+1}}=a_1\cdot\frac{r_1+0+\cdots+0}{r_1+0+\cdots+0}=a_1>0，\qquad \lim_{n\to\infty}\frac{c_{n+1}}{c_n}=\frac{1}{a_1}, \qquad \text{-----12 分}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\cdot\left(ln\frac{c_2}{c_1}+\cdots+ln\frac{c_{n+1}}{c_n}\right)=ln\frac{1}{a_1},$$

$$\sqrt[n]{c_n}=e^{\frac{lnc_n}{n}}=e^{\frac{lnc_1}{n}+\frac{1}{n}\left(ln\frac{c_2}{c_1}+\cdots+ln\frac{c_{n+1}}{c_n}\right)}\to e^{ln\frac{1}{a_1}}=\frac{1}{a_1}.$$

从而，$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{c_n}}=a_1$, 即$f(x)$的最小正根. -----14 分

六、(14 分）设函数 $f(x)$ 在$[0,\ +\infty)$上具有连续导数，满足

$$3[3+f^2(x)]f'(x)=2[1+f^2(x)]^2e^{-x^2},$$

且 $f(0)\le 1$. 证明：存在常数$M>0$，使得$x\in[0,+\infty)$时，恒有$|f(x)|\le M$.

证明：由于 $f'(x)>0$，所以 $f(x)$ 是$[0,\ +\infty)$上的严格增函数，故 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=L$（有限或为$+\infty$）. 下面证明 $L\ne+\infty$. -----2 分

记$y=f(x)$，将所给等式分离变量并积分得 $\int\frac{3+y^2}{(1+y^2)^2}\mathrm{d}y=\frac{2}{3}\int e^{-x^2}\mathrm{d}x$，即

$$\frac{y}{1+y^2}+2\arctan y=\frac{2}{3}\int_0^x e^{-t^2}\mathrm{d}t+C,$$ ------6 分

其中$C=\frac{f(0)}{1+f^2(0)}+2\arctan f(0)$. ------8 分

若$L=+\infty$，则对上式取极限$x\to+\infty$，并利用$\int_0^{+\infty}e^{-t^2}\mathrm{d}t=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$，得$C=\pi-\frac{\sqrt{\pi}}{3}$. -----10 分

另一方面，令 $g(u)=\frac{u}{1+u^2}+2\arctan u$，则 $g'(u)=\frac{3+u^2}{(1+u^2)^2}>0$，所以函数 $g(u)$ 在$(-\infty,\ +\infty)$上严格单调增加. 因此，当 $f(0)\le 1$ 时，$C=g(f(0))\le g(1)=\frac{1+\pi}{2}$，但 $C>\frac{2\pi-\sqrt{\pi}}{2}>\frac{1+\pi}{2}$，矛盾， 这就证明了 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=L$ 为有限数.

最后，取$M=\max\{|f(0)|,|L|\}$，则$|f(x)|\le M$，$\forall x\in[0,+\infty)$. -----14 分

第十届全国大学生数学竞赛（非数学类）预赛试题及答案

一、填空题（本题满分 24 分，共 4 小题，每小题 6 分)

（1）设 $\alpha\in(0,1)$, 则 $\lim\limits_{n\to+\infty}\left((n+1)^{\alpha}-n^{\alpha}\right)=$ __0____________.

解 由于 $\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{\alpha}<\left(1+\dfrac{1}{n}\right)$, 则 $(n+1)^{\alpha}-n^{\alpha}=n^{\alpha}\left(\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{\alpha}-1\right)<n^{\alpha}\left(\left(1+\dfrac{1}{n}\right)-1\right)=\dfrac{1}{n^{1-\alpha}}$，

于是 $0<(n+1)^{\alpha}-n^{\alpha}<\dfrac{1}{n^{1-\alpha}}$，应用两边夹法则，$\lim\limits_{n\to+\infty}\left((n+1)^{\alpha}-n^{\alpha}\right)=0$.

（2）若曲线 $y=y(x)$ 由 $\begin{cases}x=t+\cos t\\ e^{y}+ty+\sin t=1\end{cases}$ 确定，则此曲线在 $t=0$ 对应点处的切线方程为

$\underline{y-0=-(x-1)}$

解：当 $t=0$ 时，$x=1,y=0$，对 $x=t+\cos t$ 两边关于 t 求导：$\dfrac{dx}{dt}=1-\sin t$，$\left.\dfrac{dx}{dt}\right|_{t=0}=1$，

对 $e^{y}+ty+\sin t=1$ 两边关于 t 求导：$e^{y}\dfrac{dy}{dt}+y+t\dfrac{dy}{dt}+\cos t=0$，$\left.\dfrac{dy}{dt}\right|_{t=0}=-1$， 则 $\left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{t=0}=-1$.

所以，切线方程为 $y-0=-(x-1)$.

（3）$\displaystyle\int\frac{\ln(x+\sqrt{1+x^{2}})}{(1+x^{2})^{3/2}}dx=\underline{\frac{x}{\sqrt{1+x^{2}}}\ln(x+\sqrt{1+x^{2}})-\frac{1}{2}\ln(1+x^{2})+C}$

解 1：$\displaystyle\int\frac{\ln(x+\sqrt{1+x^{2}})}{(1+x^{2})^{3/2}}dx\overset{x=\tan t}{=}\int\frac{\ln(\tan t+\sec t)}{\sec t}dt=\int\ln(\tan t+\sec t)d\sin t$

$$=\int\ln(\tan t+\sec t)d\sin t=\sin t\ln(\tan t+\sec t)-\int\sin t\, d\ln(\tan t+\sec t)$$

$$=\sin t\ln(\tan t+\sec t)-\int\sin t\frac{1}{\tan t+\sec t}(\sec^{2}t+\tan t\sec t)dt$$

$$=\sin t\ln(\tan t+\sec t)-\int\frac{\sin t}{\cos t}dt$$

$$=\sin t\ln(\tan t+\sec t)+\ln|\cos t|+C=\frac{x}{\sqrt{1+x^{2}}}\ln(x+\sqrt{1+x^{2}})-\frac{1}{2}\ln(1+x^{2})+C.$$

解 2：$\displaystyle\int\frac{\ln(x+\sqrt{1+x^{2}})}{(1+x^{2})^{3/2}}dx=\int\ln(x+\sqrt{1+x^{2}})d\frac{x}{\sqrt{1+x^{2}}}$

$$=\frac{x}{\sqrt{1+x^{2}}}\ln(x+\sqrt{1+x^{2}})-\int\frac{x}{\sqrt{1+x^{2}}}\frac{1}{x+\sqrt{1+x^{2}}}\left(1+\frac{x}{\sqrt{1+x^{2}}}\right)dx$$

$$=\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\ln(x+\sqrt{1+x^2})-\int\frac{x}{1+x^2}dx$$

$$=\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\ln(x+\sqrt{1+x^2})-\frac{1}{2}\ln(1+x^2)+\mathrm{C}$$

（4）$\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos x\sqrt{\cos 2x}\sqrt[3]{\cos 3x}}{x^2}=$______3________.

解答：$\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos x\sqrt{\cos 2x}\sqrt[3]{\cos 3x})}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\left[\frac{1-\cos x}{x^2}+\frac{\cos x(1-\sqrt{\cos 2x}\sqrt[3]{\cos 3x})}{x^2}\right]$

$$=\frac{1}{2}+\lim_{x\to 0}\frac{1-\sqrt{\cos 2x}\sqrt[3]{\cos 3x}}{x^2}=\frac{1}{2}+\lim_{x\to 0}\left[\frac{1-\sqrt{\cos 2x}}{x^2}+\frac{\sqrt{\cos 2x}(1-\sqrt[3]{\cos 3x})}{x^2}\right]$$

$$=\frac{1}{2}+\lim_{x\to 0}\left[\frac{1-\sqrt{(\cos 2x-1)+1}}{x^2}+\frac{1-\sqrt[3]{(\cos 3x-1)+1}}{x^2}\right]$$

$$=\frac{1}{2}+\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 2x}{2x^2}+\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 3x}{3x^2}=\frac{1}{2}+1+\frac{3}{2}=3.$$

二（**本题满分 8 分**）设函数 $f(t)$ 在 $t\neq 0$ 时一阶连续可导，且 $f(1)=0$，求函数 $f(x^2-y^2)$，使得曲线积分 $\int_L\left[y(2-f(x^2-y^2))\right]dx+xf(x^2-y^2)dy$ 与路径无关，其中 L 为任一不与直线 $y=\pm x$ 相交的分段光滑闭曲线.

解：设 $P(x,y)=y(2-f(x^2-y^2))$，$Q(x,y)=xf(x^2-y^2)$，由题设可知，积分与路径无关，于是有 $\frac{\partial Q(x,y)}{\partial x}=\frac{\partial P}{\partial y}$，由此可知 $(x^2-y^2)f'(x^2-y^2)+f(x^2-y^2)=1$

-----------5 分

记 $t=x^2-y^2$，则得微分方程 $tf'(t)+f(t)=1$，即 $(tf(t))'=1$，$tf(t))=t+C$

又 $f(1))=0$，可得 $C=-1,\ f(t))=1-\frac{1}{t}$，从而 $f(x^2-y^2)=1-\frac{1}{x^2-y^2}$.

------------8 分

三（**本题满分 14 分**）设 $f(x)$ 在区间 $[0,1]$ 上连续，且 $1\le f(x)\le 3$.证明：

$$1\le\int_0^1 f(x)dx\int_0^1\frac{1}{f(x)}dx\le\frac{4}{3}.$$

证明. 由柯西不等式

$$\int_0^1 f(x)dx\int_0^1\frac{1}{f(x)}dx \ge \left(\int_0^1\sqrt{f(x)}\sqrt{\frac{1}{f(x)}}dx\right)^2 = 1. \qquad \text{--------4 分}$$

又由于 $\left(f(x)-1\right)\left(f(x)-3\right)\le 0$，则 $\left(f(x)-1\right)\left(f(x)-3\right)/f(x)\le 0$，

即 $f(x)+\dfrac{3}{f(x)}\le 4$， $\displaystyle\int_0^1\left(f(x)+\frac{3}{f(x)}\right)dx\le 4$. ----------10 分

由于 $\displaystyle\int_0^1 f(x)dx\int_0^1\frac{3}{f(x)}dx \le \frac{1}{4}\left(\int_0^1 f(x)+\int_0^1\frac{3}{f(x)}dx\right)^2$

故 $\displaystyle 1\le\int_0^1 f(x)dx\int_0^1\frac{1}{f(x)}dx\le\frac{4}{3}$. -----------14 分

四（本题满分 12 分）计算三重积分 $\displaystyle\iiint\limits_{(V)}(x^2+y^2)\,dV$，其中（V）是由 $x^2+y^2+(z-2)^2\ge 4$，

$x^2+y^2+(z-1)^2\le 9$，$z\ge 0$ 所围成的空心立体.

解：（1）$(V_1):\begin{cases}x=r\sin\varphi\cos\theta,\ y=r\sin\varphi\sin\theta,\ z-1=r\cos\varphi\\ 0\le r\le 3, 0\le\varphi\le\pi, 0\le\theta\le 2\pi\end{cases}$

$$\iiint\limits_{(V_1)}(x^2+y^2)dV=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\pi}d\varphi\int_0^3 r^2\sin^2\varphi r^2\sin\varphi dr=\frac{8}{15}\cdot 3^5\cdot\pi \qquad \text{----------4 分}$$

（2）$(V_2):\begin{cases}x=r\sin\varphi\cos\theta,\ y=r\sin\varphi\sin\theta,\ z-2=r\cos\varphi\\ 0\le r\le 2, 0\le\varphi\le\pi, 0\le\theta\le 2\pi\end{cases}$

$$\iiint\limits_{(V_2)}(x^2+y^2)dV=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\pi}d\varphi\int_0^2 r^2\sin^2\varphi r^2\sin\varphi dr=\frac{8}{15}\cdot 2^5\cdot\pi \qquad \text{----------8 分}$$

（3）$(V_3):\begin{cases}x=r\cos\theta,\ y=r\sin\theta, 1-\sqrt{9-r^2}\le z\le 0\\ 0\le r\le 2\sqrt{2}, 0\le\theta\le 2\pi\end{cases}$

$$\iiint\limits_{(V_3)}(x^2+y^2)dV=\iint\limits_{r\le 2\sqrt{2}}rdrd\theta\int_{1-\sqrt{9-r^2}}^0 r^2dz=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{2\sqrt{2}}r^3(\sqrt{9-r^2}-1)dr=(124-\frac{2}{5}\cdot 3^5+\frac{2}{5})\pi$$

$$\iiint\limits_{(V)}(x^2+y^2)dV=\iiint\limits_{(V_1)}(x^2+y^2)dV-\iiint\limits_{(V_2)}(x^2+y^2)dV-\iiint\limits_{(V_3)}(x^2+y^2)dV=\frac{256}{3}\pi \qquad \text{------12 分}$$

五（本题满分 14 分）设 $f(x,y)$ 在区域 D 内可微，且 $\sqrt{\left(\dfrac{\partial f}{\partial x}\right)^2+\left(\dfrac{\partial f}{\partial y}\right)^2}\le M$，$A(x_1,y_1)$，

$B(x_2,y_2)$ 是 D 内两点，线段 AB 包含在 D 内。证明：$|f(x_1,y_1)-f(x_2,y_2)|\le M|AB|$，其

中$|AB|$表示线段AB的长度.

证明：作辅助函数$\varphi(t)=f(x_1+t(x_2-x_1),y_1+t(y_2-y_1))$，----------2 分

显然$\varphi(t)$在[0,1]上可导.根据拉格朗日中值定理，存在$c\in(0,1)$，使得

$$\varphi(1)-\varphi(0)=\varphi'(c)=\frac{\partial f(u,v)}{\partial u}(x_2-x_1)+\frac{\partial f(u,v)}{\partial v}(y_2-y_1) \qquad \text{------8 分}$$

$$|\varphi(1)-\varphi(0)|=|f(x_2,y_2)-f(x_1,y_1)|=|\frac{\partial f(u,v)}{\partial u}(x_2-x_1)+\frac{\partial f(u,v)}{\partial v}(y_2-y_1)|$$

$$\le\left[\left(\frac{\partial f(u,v)}{\partial u}\right)^2+\left(\frac{\partial f(u,v)}{\partial v}\right)^2\right]^{1/2}[(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2]^{1/2}\le M\,|AB| \qquad \text{------14 分}$$

六（本题满分 14 分）证明：对于连续函数$f(x)>0$，有$\ln\int_0^1 f(x)dx\ge\int_0^1\ln f(x)dx$.

证：由于$f(x)$在$[0,1]$上连续，所以$\int_0^1 f(x)dx=\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}f(x_k)$，其中$x_k\in\left[\frac{k-1}{n},\frac{k}{n}\right]$.

-----------4 分

由不等式 $\left(f(x_1)f(x_2)\cdots f(x_n)\right)^{\frac{1}{n}}\le\frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}f(x_k)$， 根据$\ln x$的单调性

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\ln f(x_k)\le\ln\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}f(x_k)\right), \qquad \text{-------------12 分}$$

根据$\ln x$的连续性，两边取极限

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\ln f(x_k)\right)\le\lim_{n\to+\infty}\ln\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}f(x_k)\right)\text{得}\int_0^1\ln f(x)dx\le\ln\int_0^1 f(x)dx. \qquad \text{---------14 分}$$

七（本题满分 14 分）已知$\{a_k\}$，$\{b_k\}$是正项数列，且$b_{k+1}-b_k\ge\delta>0,\ k=1,2,\cdots\cdots$，$\delta$为一常数.证明：若级数$\sum\limits_{k=1}^{+\infty}a_k$收敛，则级数$\sum\limits_{k=1}^{+\infty}\frac{k\sqrt[k]{(a_1a_2\cdots a_k)(b_1b_2\cdots b_k)}}{b_{k+1}b_k}$收敛.

证明：令$S_k=\sum\limits_{i=1}^{k}a_ib_i$，$a_kb_k=S_k-S_{k-1}$，$S_0=0,\ a_k=\frac{S_k-S_{k-1}}{b_k}$，$k=1,2,\cdots\cdots$

----------4 分

$$\sum_{k=1}^{N}a_k=\sum_{k=1}^{N}\frac{S_k-S_{k-1}}{b_k}=\sum_{k=1}^{N-1}\left(\frac{S_k}{b_k}-\frac{S_k}{b_{k+1}}\right)+\frac{S_N}{b_N}=\sum_{k=1}^{N-1}\frac{b_{k+1}-b_k}{b_kb_{k+1}}S_k+\frac{S_N}{b_N}\ge\sum_{k=1}^{N-1}\frac{\delta}{b_kb_{k+1}}S_k$$

所以$\sum\limits_{k=1}^{+\infty}\frac{S_k}{b_kb_{k+1}}$收敛， ----------10 分

由不等式$\sqrt[k]{(a_1a_2\cdots a_k)(b_1b_2\cdots b_k)}\le\frac{a_1b_1+a_2b_2+\cdots a_kb_k}{k}=\frac{S_k}{k}$知

$\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{k\sqrt[k]{(a_1a_2\cdots a_k)(b_1b_2\cdots b_k)}}{b_{k+1}b_k}\le\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{S_k}{b_{k+1}b_k}$，故结论成立.　　---------14 分

座位号 考场号 姓名 准考证号 学校 省市

密封线 答题时不要超过此线

第九届全国大学生数学竞赛预赛参考答案

(非数学类, 2017 年 10 月 28 日)

绝密★启用前 (14 金融工程 – 白兔兔)

考试形式: 闭卷 考试时间: 150 分钟 满分: 100 分

题 号	一	二	三	四	五	总 分
满 分	42	14	14	15	15	100
得 分						

注意: 1. 所有答题都须写在试卷密封线右边, 写在其他纸上一律无效.

2. 密封线左边请勿答题, 密封线外不得有姓名及相关标记.

3. 如答题空白不够, 可写在当页背面, 并标明题号.

一、(本题满分 42 分, 共 6 小题, 每小题 7 分)

1. 已知可导函数 $f(x)\cos x+2\int_0^x f(t)\sin t\,\mathrm{d}t=x+1$ 满足 则 $f(x)=$ __________

答案: $\sin x+\cos x$

解. 两边同时对 x 求导

$$f'(x)\cos x+f(x)\sin x=1\Longrightarrow f'(x)+f(x)\tan x=\sec x$$

由常数变易法, 从而

$$\begin{aligned}
f(x)&=e^{-\int\tan x\mathrm{d}x}\left(\int\sec x e^{\int\tan x\mathrm{d}x}\mathrm{d}x+C\right)\\
&=e^{\ln\cos x}\left(\int\frac{1}{\cos x}e^{-\ln\cos x}\mathrm{d}x+C\right)=\cos x\left(\int\frac{1}{\cos^2 x}\mathrm{d}x+C\right)\\
&=\cos x\left(\tan x+C\right)=\sin x+C\cos x
\end{aligned}$$

由于 $f(0)=1$, 故 $f(x)=\sin x+\cos x$ ◇

2. 极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\sin^2\left(\pi\sqrt{n^2+n}\right)=$ ________

答案: 1

解.

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty}\sin^2\left(\pi\sqrt{n^2+n}\right)&=\lim_{n\to\infty}\sin^2\left(\pi\sqrt{n^2+n}-n\pi\right)\\
&=\lim_{n\to\infty}\sin^2\left(\frac{n\pi}{\sqrt{n^2+n}+n}\right)=1
\end{aligned}$$

◇

3. 设 $w=f(u,v)$ 具有二阶连续偏导数, 且 $u=x-cy$, $v=x+cy$. 其中 c 为非零常数. 则 $w_{xx}-\frac{1}{c^2}w_{yy}=$ ____________

答案：$4f_{12}$

解. $w_x=f_1+f_2$, $w_{xx}=f_{11}+2f_{12}+f_{22}$
$w_y=c(f_2-f_1)$,

$$w_{yy}=c\frac{\partial}{\partial x}(f_2-f_1)=c(cf_{11}-cf_{12}-cf_{21}+cf_{22})=c^2(f_{11}-2f_{12}+f_{22})$$

所以

$$w_{xx}-\frac{1}{c^2}w_{yy}=4f_{12}$$

◊

4. 设 $f(x)$ 有二阶导数连续, 且 $f(0)=f'(0)=0$, $f''(0)=6$, 则 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{f(\sin^2 x)}{x^4}=$ ________

答案：3

解. $f(x)$ 在 $x=0$ 泰勒展开式

$$f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{1}{2}f''(\xi)x^2$$

所以 $f(\sin^2 x)=\frac{1}{2}f''(\xi)\sin^4 x$, 于是

$$\lim_{n\to\infty}\frac{f(\sin^2 x)}{x^4}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{2}f''(\xi)\sin^4 x}{x^4}=3$$

◊

5. 不定积分 $\int\frac{e^{-\sin x}\sin 2x}{(1-\sin x)^2}\mathrm{d}x=$ ____________

答案：$\frac{2e^{-\sin x}}{1-\sin x}+C$

解.

$$\begin{aligned}
I&=2\int\frac{e^{-\sin x}\sin x\cos x}{(1-\sin x)^2}\mathrm{d}x\\
&\xlongequal{\sin x=v}2\int\frac{ve^{-v}}{(1-v)^2}\mathrm{d}v=2\int\frac{(v-1+1)e^{-v}}{(1-v)^2}\mathrm{d}v\\
&=2\int\frac{e^{-v}}{v-1}\mathrm{d}v+2\int\frac{e^{-v}}{(v-1)^2}\mathrm{d}v=2\int\frac{e^{-v}}{v-1}\mathrm{d}v-2\int e^{-v}\mathrm{d}\left(\frac{1}{v-1}\right)\\
&=2\int\frac{e^{-v}}{v-1}\mathrm{d}v-2\left(\frac{e^{-v}}{v-1}+\int\frac{e^{-v}}{v-1}\mathrm{d}v\right)\\
&=-\frac{2e^{-v}}{v-1}+C=\frac{2e^{-\sin x}}{1-\sin x}+C
\end{aligned}$$

◊

6. 记曲面 $z^2=x^2+y^2$ 和 $z=\sqrt{4-x^2-y^2}$ 围成空间区域为 V, 则三重积分 $\iint_V z\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z=$ ________

答案：2π

解. 使用球面坐标

$$I=\iiint_V z\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\pi/4}\mathrm{d}\varphi\int_0^2\rho\cos\varphi\cdot\rho^2\sin\varphi\,\mathrm{d}\rho$$

$$=2\pi\cdot\frac{1}{2}\sin^2\varphi\Big|_0^{\pi/4}\cdot\frac{1}{4}\rho^4\Big|_0^2=2\pi$$

◊

二、(本题满分 14 分)

设二元函数 $f(x,y)$ 在平面上有连续的二阶导数. 对任意角度 α, 定义一元函数

$$g_\alpha(t)=f(t\cos\alpha,t\sin\alpha).$$

若对任何 α 都有 $\frac{\mathrm{d}g_\alpha(0)}{\mathrm{d}t}=0$ 且 $\frac{\mathrm{d}^2g_\alpha(0)}{\mathrm{d}t^2}>0$. 证明: $f(0,0)$ 是 $f(x,y)$ 的极小值

证明. **方法** 1 由于 $\frac{\mathrm{d}g_\alpha(0)}{\mathrm{d}t}=\left(f_x,f_y\right)_{(0,0)}\begin{pmatrix}\cos\alpha\\ \sin\alpha\end{pmatrix}=0$ 对一切 α 成立, 故 $\left(f_x,f_y\right)_{(0,0)}=(0,0)$,

即 $(0,0)$ 是 $f(x,y)$ 的驻点. ……………………………………………(4 分)

记 $H_f=(x,y)=\begin{pmatrix}f_{xx} & f_{xy}\\ f_{yx} & f_{yy}\end{pmatrix}$, 则

$$\frac{\mathrm{d}^2g_\alpha(0)}{\mathrm{d}t^2}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\left(f_x,f_y\right)\begin{pmatrix}\cos\alpha\\ \sin\alpha\end{pmatrix}\right]_{(0,0)}=(\cos\alpha,\sin\alpha)H_f(0,0)\begin{pmatrix}\cos\alpha\\ \sin\alpha\end{pmatrix}>0$$

……………………………………………(10 分)

上式对任何单位向量 $(\cos\alpha,\sin\alpha)$ 成立, 故 $H_f(0,0)$ 是一个正定阵, 而 $f(0,0)$ 是 $f(x,y)$ 极小值.

……………………………………………(14 分)

方法 2 易得 $\frac{\mathrm{d}g_\alpha(t)}{\mathrm{d}t}=f_x\cos\alpha+f_y\sin\alpha$, 令 $x=t\cos\alpha, y=t\sin\alpha$, 由已知 $\frac{\mathrm{d}g_\alpha(0)}{\mathrm{d}t}=0$, 则

$$\frac{\mathrm{d}g_\alpha(0)}{\mathrm{d}t}=f_x(0,0)\cos\alpha+f_y(0,0)\sin\alpha=0$$

由 α 的任意性得 $\begin{cases}f_x(0,0)=0\\ f_y(0,0)=0\end{cases}$, 从而 $(0,0)$ 是 $f(x,y)$ 的驻点.

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}^2g_\alpha(t)}{\mathrm{d}t^2}&=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(f_x\cos\alpha+f_y\sin\alpha\right)\\&=\left(f_{xx}\cos\alpha+f_{xy}\sin\alpha\right)\cos\alpha+\left(f_{yx}\cos\alpha+f_{yy}\sin\alpha\right)\sin\alpha\\&=f_{xx}\cos^2\alpha+2f_{xy}\sin\alpha\cos\alpha+f_{yy}\sin^2\alpha\\&=\sin\alpha\cos\alpha\left[f_{xx}\cot^2\alpha+2f_{xy}+f_{yy}\tan^2\alpha\right]\end{aligned}$$

由已知

$$\frac{\mathrm{d}^2 g_\alpha(0)}{\mathrm{d}t^2}=\frac{1}{2}\sin 2\alpha\left[f_{xx}(0,0)\cot^2\alpha+2f_{xy}(0,0)+f_{yy}(0,0)\tan^2\alpha\right]>0$$

令 $\alpha=\dfrac{\pi}{4}$ 得

$$f_{xy}(0,0)>-\frac{1}{2}\left[f_{xx}(0,0)+f_{yy}(0,0)\right]$$

从而

$$\begin{aligned}
&\left[f_{xy}(0,0)\right]^2-f_{xx}(0,0)f_{yy}(0,0)\\
>&\frac{1}{4}\left[f_{xy}(0,0)\right]^2+\frac{1}{2}f_{xx}(0,0)f_{yy}(0,0)+\frac{1}{4}\left[f_{yy}(0,0)\right]^2-f_{xx}(0,0)f_{yy}(0,0)\\
=&\frac{1}{4}\left\{\left[f_{xy}(0,0)\right]^2-2f_{xx}(0,0)f_{yy}(0,0)+\left[f_{yy}(0,0)\right]^2\right\}\\
=&\frac{1}{4}\left[f_{xx}(0,0)-f_{yy}(0,0)\right]^2\geqslant 0
\end{aligned}$$

这就说明 $B^2-AC>0$, $f(0,0)$ 为极值. 下面证明 $f(0,0)$ 为极小值,

$$\frac{\mathrm{d}^2 g_\alpha(0)}{\mathrm{d}t^2}=\lim_{t\to 0}\frac{g'_\alpha(t)-g'_\alpha(0)}{t}=\lim_{t\to 0}\frac{g'_\alpha(t)}{t}>0$$

由保序性知: $t>0$ 时, $g'_\alpha(t)>0\Longrightarrow g_\alpha(t)\uparrow$; $t<0$ 时, $g'_\alpha(t)<0\Longrightarrow g'_\alpha(t)\downarrow$
所以 $f(0,0)$ 是 $f(x,y)$ 极小值.

三、(本题满分 14 分)

设曲线 Γ 为曲线

$$x^2+y^2+z^2=1\,,\quad x+z=1\,,\quad x\geqslant 0,\, y\geqslant 0,\, z\geqslant 0$$

上从点 $A(1,0,0)$ 到点 $B(0,0,1)$ 的一段. 求曲线积分 $I=\displaystyle\int_\Gamma y\,\mathrm{d}x+z\,\mathrm{d}y+x\,\mathrm{d}z$

解. 记 Γ_1 为从 B 到 A 的直线段, 则 $x=t, y=0, z=1-t, 0\leqslant t\leqslant 1$

$$\int_{\Gamma_1} y\,\mathrm{d}x+z\,\mathrm{d}y+x\,\mathrm{d}z=\int_0^1 t\,\mathrm{d}(1-t)=-\frac{1}{2}$$

……………………………………………(4 分)

设 Γ 和 Γ_1 围成的平面区域 Σ, 方向按右手法则. 由 Stokes 公式得到

$$\left(\int_\Gamma+\int_{\Gamma_1}\right)y\,\mathrm{d}x+z\,\mathrm{d}y+x\,\mathrm{d}z=\iint_\Sigma\begin{vmatrix}\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z & \mathrm{d}z\,\mathrm{d}x & \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ y & z & x\end{vmatrix}=-\iint_\Sigma \mathrm{d}y\,\mathrm{d}z+\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x+\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

……………………………………………(8 分)

右边三个积分都是 Σ 在各个坐标面上的投影面积, 而 Σ 在 xOz 面上投影面积为零. 故

$$I+\int_{\Gamma_1}=-\iint_\Sigma \mathrm{d}y\,\mathrm{d}z+\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

曲线 Γ 在 xOy 面上投影的方程为

$$\frac{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2}{\left(\frac{1}{2}\right)^2}+\frac{y^2}{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2}=1$$

…………………………………………(12 分)

又该投影（半个椭圆）的面积得知 $\iint\limits_{\Sigma} \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\frac{\pi}{4\sqrt{2}}$. 同理, $\iint\limits_{\Sigma} \mathrm{d}y\,\mathrm{d}z=\frac{\pi}{4\sqrt{2}}$

这样就有 $I=\frac{1}{2}-\frac{\pi}{2\sqrt{2}}$ …………………………………………(14 分)

四、(本题满分 15 分)

设函数 $f(x)>0$ 且在实轴上连续, 若对任意实数 t , 有 $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-|t-x|} f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant 1$,

证明 $\forall a,b,a<b$, 有 $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \frac{b-a+2}{2}$.

证明. 由于 $\forall a,b(a<b)$, 有

$$\int_a^b e^{-|t-x|} f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-|t-x|} f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant 1$$

因此

$$\int_a^b \mathrm{d}t \int_a^b e^{-|t-x|} f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant b-a$$

…………………………………………(4 分)

然而

$$\int_a^b \mathrm{d}t \int_a^b e^{-|t-x|} f(x)\,\mathrm{d}x=\int_a^b f(x)\left(\int_a^b e^{-|t-x|}\,\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}x$$

其中

$$\int_a^b e^{-|t-x|}\,\mathrm{d}t=\int_a^x e^{t-x}\,\mathrm{d}t+\int_x^b e^{x-t}\,\mathrm{d}t=2-e^{a-x}-e^{x-b}$$

这样就有

$$\int_a^b f(x)\left(2-e^{a-x}-e^{x-b}\right)\mathrm{d}x \leqslant b-a \tag{1}$$

…………………………………………(10 分)

即

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \frac{b-a}{2}+\frac{1}{2}\left[\int_a^b e^{a-x} f(x)\,\mathrm{d}x+\int_a^b e^{x-b} f(x)\,\mathrm{d}x\right]$$

注意到

$$\int_a^b e^{a-x} f(x)\,\mathrm{d}x=\int_a^b e^{-|a-x|} f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant 1 \quad 和 \quad \int_a^b e^{x-b} f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant 1$$

…………………………………………(13 分)

把以上两个式子入 (1), 即得结论。 …………………………………………(15 分)

微信公众号: 考研竞赛数学, 练习 062 ; 蒲和平《大学生数学竞赛教程》例 61, p129

五、(本题满分 14 分)

设 $\{a_n\}$ 为一个数列, p 为固定的正整数. 若 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(a_{n+p}-a_n\right)=\lambda$, 证明: $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{n}=\dfrac{\lambda}{p}$

证明. 对于 $i=0,1,2,\cdots,p-1$, 记 $A_n^{(i)}=a_{(n+1)p+i}-a_{np+i}$. 由题设 $\lim\limits_{n\to\infty}A_n^{(i)}=\lambda$, 从而

$$\lim_{n\to\infty}\frac{A_1^{(i)}+A_2^{(i)}+\cdots+A_n^{(i)}}{n}=\lambda$$

而

$$A_1^{(i)}+A_2^{(i)}+\cdots+A_n^{(i)}=a_{(n+1)p+i}-a_{p+i}$$

由题设知

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{(n+1)p+i}}{(n+1)p+i}=\lim_{n\to\infty}\frac{a_{(n+1)p+i}}{n}\frac{n}{(n+1)p+i}=\frac{\lambda}{p}$$

对正整数 m, 设 $m=np+i$, 其中 $i=0,1,2,\cdots,p-1$, 从而可以把正整数依照 i 分为 p 个子列类。考虑任何这样的子列，下面极限

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{(n+1)p+i}}{(n+1)p+i}=\frac{\lambda}{p},\quad \text{故}\lim_{m\to\infty}\frac{a_m}{m}=\frac{\lambda}{p}$$

当 $p=1$ 时, 可以由 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(a_{n+1}-a_n\right)=\lambda$ 知, $\forall\varepsilon>0,\exists N_1\in\mathbb{N}$, 当 $n>N_1$ 时, 有 $|a_{n+1}-a_n-\lambda|<\dfrac{\varepsilon}{2}$. 注意到

$$a_n=a_1+(a_2-a_1)+(a_3-a_2)+\cdots+(a_n-a_{n-1})$$

用 N_1 作分项指标, 得

$$\begin{aligned}\left|\frac{a_n}{n}-\lambda\right|&=\left|\frac{a_n-n\lambda}{n}\right|=\left|\frac{\left(a_1+(a_2-a_1)+(a_3-a_2)+\cdots+(a_n-a_{n-1})\right)-n\lambda}{n}\right|\\&=\left|\frac{(a_1-\lambda)+(a_2-a_1-\lambda)+\cdots+(a_n-a_{n-1}-\lambda)}{n}\right|\\&\leqslant\frac{|a_1-\lambda|+\cdots+|a_{N_1+1}-a_{N_1}-\lambda|}{n}+\frac{|a_{N_1+2}-a_{N_1+1}-\lambda|+\cdots+|a_n-a_{n-1}-\lambda|}{n}\end{aligned}$$

其次, 记 $M=|a_1-\lambda|+\cdots+|a_{N_1+1}-a_{N_1}-\lambda|$, 且取 N_2, 使得当 $n>N_2$ 时, 有 $\dfrac{M}{n}<\dfrac{\varepsilon}{2}$.
从而令 $N=\max\{N_1,N_2\}$, 则当 $n>N$ 时, 有

$$\left|\frac{a_n}{n}-\lambda\right|<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{n-1-N_1}{n}\cdot\frac{\varepsilon}{2}<\varepsilon$$

此题是第三届全国大学生数学竞赛预赛 (非数学类) 的第二题

省市______ 学校______ 准考证号______ 姓名______ 考场号______ 座位号______

密封线 答题时不要超过此线

第八届全国大学生数学竞赛预赛试卷参考答案

(非数学类, 2016 年 10 月)

绝密 ★ 启用前 (14 金融工程-白兔兔)

考试形式: 闭卷 考试时间: 150 分钟 满分: 100 分

题 号	一	二	三	四	五	六	总 分
满 分	30	14	14	14	14	14	100
得 分							

注意: 1.所有答题都须写在试卷密封线右边, 写在其他纸上一律无效.

2.密封线左边请勿答题, 密封线外不得有姓名及相关标记.

3.如答题空白不够, 可写在当页背面, 并标明题号.

一 (填空题, 本题满分 30 分, 共 5 小题, 每小题 6 分)

1. 若 $f(x)$ 在点 $x=a$ 可导, 且 $f(a)\neq 0$, 则 $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{f\left(a+\frac{1}{n}\right)}{f(a)}\right)^n=$ __________

解

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{f\left(a+\frac{1}{n}\right)}{f(a)}\right)^n=\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{f(a)+f'(a)\frac{1}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right)}{f(a)}\right)^n=e^{\frac{f'(a)}{f(a)}}$$

2. 若 $f(1)=0$, $f'(1)$ 存在, 则极限 $I=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(\sin^2 x+\cos x)\tan 3x}{(e^{x^2}-1)\sin x}=$ __________

解

$$\begin{aligned}
I&=\lim_{x\to 0}\frac{f(\sin^2 x+\cos x)\tan 3x}{(e^{x^2}-1)\sin x}\\
&=\lim_{x\to 0}\frac{f(\sin^2 x+\cos x)\times 3x}{x^2\times x}=3\lim_{x\to 0}\frac{f(\sin^2 x+\cos x)}{x^2}\\
&=3\lim_{x\to 0}\left(\frac{f(\sin^2 x+\cos x)-f(1)}{\sin^2 x+\cos x-1}\cdot\frac{\sin^2 x+\cos x-1}{x^2}\right)\\
&=3f'(1)\lim_{x\to 0}\frac{x^2-\frac{1}{2}x^2+o(x^2)}{x^2}\\
&=\frac{3}{2}f'(1)
\end{aligned}$$

3. 设 $f(x)$ 有连续导数, 且 $f(1)=2$. 记 $z=f(e^x y^2)$, 若 $\dfrac{\partial z}{\partial x}=z$, 则当 $x>0$, $f(x)=$ __________

解 由题设得 $\dfrac{\partial z}{\partial x} = f'(e^x y^2)e^x y = f(e^x y^2)$, 令 $u = e^x y^2$,

得到当 $u > 0$ 有 $f'(u)u = f(u)$, 即 $\dfrac{f'(u)}{f(u)} = \dfrac{1}{u}$, 从而 $\big(\ln f(u)\big)' = (\ln u)'$

所以有 $\ln f(u) = \ln u + C_1$, $f(u) = Cu$. 再而由初始条件得 $f(u) = 2u$

故当 $x > 0$ 有 $f(x) = 2x$

4. 设 $f(x) = e^x \sin 2x$, 则 $f^{(4)}(0) =$ __________

解 由 Taylor 展开式得

$$f(x) = \left[1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + o(x^3)\right]\left[2x - \frac{1}{3!}(2x)^3 + o(x^4)\right]$$

所以 $f(x)$ 展开式的 4 次项 $\dfrac{-1}{3!}(2x)^3 \times x + \dfrac{1}{3!}x^3 \times (2x) = -x^4$, 从而 $\dfrac{f^{(4)}(x)}{4!} = 1$,

故 $f^{(4)}(0) = 24$

5. 曲面 $z = \dfrac{x^2}{2} + y^2$ 平行于平面 $2x + 2y - z = 0$ 的切平面方程为 __________

解 该曲面在点 (x_0, y_0, z_0) 的切平面的法向量为 $(x_0, 2y_0, -1)$ 。又该切平面于已知平面平行，从而两平面法向量平行，故 $\dfrac{x_0}{2} = \dfrac{2y_0}{2} = \dfrac{-1}{-1}$

从而 $x_0 = 2$, $y_0 = 1$, 得 $z_0 = \dfrac{x_0^2}{2} + y_0^2 = 3$, 从而所求切平面为

$$2(x-2) + 2(y-1) - (z-3) = 0$$

即

$$2x + 2y - z = 3$$

二 (本题满分 14 分)

设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 可导, $f(0) = 0$, 且当 $x \in (0,1)$, $0 < f'(x) < 1$.

试证当 $a \in (0,1)$, $\left(\displaystyle\int_0^a f(x)\,\mathrm{d}x\right)^2 > \displaystyle\int_0^a f^3(x)\,\mathrm{d}x$.

证明 设 $F(x) = \left(\displaystyle\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t\right)^2 - \displaystyle\int_0^x f^3(t)\,\mathrm{d}t$, 则 $F(0) = 0$ 且要证明 $F'(x) > 0$

设 $g(x) = 2\displaystyle\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t - f^2(x)$, 则 $F'(x) = f(x)g(x)$

由于 $f(0) = 0$, $f'(x) > 0$, 故 $f(x) > 0$,

从而只要证明 $g(x) > 0$, $x > 0$

而 $g(0) = 0$, 我们只要证明 $g'(x) > 0$, $0 < x < a$

而 $g'(x) = 2f(x)\big[1 - f'(x)\big] > 0$, 得证

三 (**本题满分 14 分**)

某物体所在的空间区域为 $\Omega: x^2+y^2+2z^2 \leqslant x+y+2z,$

密度函数为 $x^2+y^2+z^2$, 求质量

$$M=\iiint\limits_{\Omega}(x^2+y^2+z^2)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$$

解 由于 $\Omega:\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\left(y-\frac{1}{2}\right)^2+2\left(z-\frac{1}{2}\right)^2\leqslant 1$, 是一个椭球

其体积为 $V=\frac{4\pi}{3}\pi$, 作变换 $u=x-\frac{1}{2}, v=y-\frac{1}{2}, w=\sqrt{2}\left(z-\frac{1}{2}\right)$

将 Ω 变为单位球 $\Sigma: u^2+v^2+w^2\leqslant 1$, 而

$$J=\frac{\partial(u,v,w)}{\partial(x,y,z)}=\begin{vmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&\sqrt{2}\end{vmatrix}=\sqrt{2}$$

故 $\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v\,\mathrm{d}w=\sqrt{2}\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$ 且

$$M=\frac{1}{\sqrt{2}}\iiint\limits_{\Sigma}\left[\left(u+\frac{1}{2}\right)^2+\left(v+\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{w}{\sqrt{2}}+\frac{1}{2}\right)^2\right]\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v\,\mathrm{d}w$$

因一次项积分都是 0 , 故

$$M=\frac{1}{\sqrt{2}}\iiint\limits_{\Sigma}\left(u^2+v^2+\frac{w^2}{2}\right)\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v\,\mathrm{d}w+A$$

其中 $A=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\right)V=\frac{\pi}{\sqrt{2}}$

记

$$I=\iiint\limits_{\Sigma}\left(u^2+v^2+w^2\right)\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v\,\mathrm{d}w=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^{\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1 r^2\cdot r^2\sin\theta\,\mathrm{d}r=\frac{4\pi}{5}$$

由于 u^2,v^2,w^2 在 Σ 上积分都是 $\frac{I}{3}$, 故

$$M=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}\right)I+A=\frac{5\sqrt{2}}{6}\pi$$

四 (**本题满分** 14 **分**)

设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[0,1]$ 上具有连续导数, $f(0)=0,\ f(1)=1$.

证明:

$$\lim_{n\to\infty} n\left(\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x-\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)\right)=-\frac{1}{2}$$

解 n 等分区间 $[0,1]$, 分点为 $0=x_0<x_1<\cdots<x_{n-1}<x_n=1$.

记 $h=\dfrac{1-0}{n}=\dfrac{1}{n}$, 则 $x_k=0+kh=kh$, $x_k-x_{k-1}=h$, $k=1,2,\cdots,n$.

$$\begin{aligned}
&\lim_{n\to\infty} n\left(\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x-\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)\right)\\
=&\lim_{n\to\infty} n\left(\sum_{k=1}^{n}\int_{x_{k1}}^{x_k} f(x)\,\mathrm{d}x-\sum_{k=1}^{n} hf(x_k)\right)\\
=&\lim_{n\to\infty} n\sum_{k=1}^{n}\int_{x_{k1}}^{x_k}\big(f(x)-f(x_k)\big)\,\mathrm{d}x\\
=&\lim_{n\to\infty} n\sum_{k=1}^{n}\int_{x_{k1}}^{x_k}\frac{f(x)-f(x_k)}{x-x_k}\cdot(x-x_k)\,\mathrm{d}x\\
=&\lim_{n\to\infty} n\sum_{k=1}^{n}\frac{f(\xi_k)-f(x_k)}{\xi_k-x_k}\cdot\int_{x_{k1}}^{x_k}(x-x_k)\,\mathrm{d}x \quad \xi_k\in(x_{k-1},x_k)\\
=&\lim_{n\to\infty} n\sum_{k=1}^{n} f'(\eta_k)\Big(-\frac{1}{2}(x_k-x_{k-1})^2\Big) \quad \eta_k\in(\xi_k,x_k)\\
=&-\frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}(1-0)\sum_{k=1}^{n} f'(\eta_k)h\\
=&-\frac{1}{2}\int_0^1 f'(x)\,\mathrm{d}x\\
=&\frac{1}{2}\big(f(1)-f(0)\big)=-\frac{1}{2}
\end{aligned}$$

五 (**本题满分** 14 **分**)

设函数 $f(x)$ 在区间 $[0,1]$ 上连续, 且 $I=\displaystyle\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x\neq 0$.

证明: 在 $(0,1)$ 内存在不同的两点 $x_1,\ x_2$ 使得

$$\frac{1}{f(x_1)}+\frac{1}{f(x_2)}=\frac{2}{I}$$

证明 设 $F(x)=\dfrac{1}{I}\displaystyle\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$ 则 $F(0)=0$, $F(1)=1$.

座位号______ 考场号______ 姓名______ 准考证号______ 学校______ 省市______

密封线 答题时不要超过此线

由介值定理, 存在 $\xi \in (0,1)$ 使得 $F(\xi) = \dfrac{1}{2}$
在两个子区间 $(0,\xi)$, $(\xi,1)$ 分别应用拉格朗日中值定理：

$$F'(x_1) = \frac{f(x_1)}{I} = \frac{F(\xi)-F(0)}{\xi-0} = \frac{1/2}{\xi} \quad , \quad x_1 \in (0,\xi)$$

$$F'(x_2) = \frac{f(x_2)}{I} = \frac{F(1)-F(\xi)}{1-\xi} = \frac{1/2}{1-\xi} \quad , \quad x_2 \in (0,\xi)$$

$$\frac{I}{f(x_1)} + \frac{I}{f(x_2)} = \frac{1}{F'(x_1)} + \frac{1}{F'(x_2)} = \frac{\xi}{1/2} + \frac{1-\xi}{1/2} = 2$$

六 (**本题满分** 14 **分**)

设 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 可导, 且

$$f(x) = f(x+2) = f(x+\sqrt{3})$$

用 Fourier 级数理论证明 $f(x)$ 为常数

证明 由 $f(x) = f(x+2)$ 知 $f(x)$ 为以 2 为周期的周期函数，
其 Fourier 系数分别为：

$$a_n = \int_{-1}^{1} f(x)\cos n\pi x \,\mathrm{d}x \quad b_n = \int_{-1}^{1} f(x)\sin n\pi x \,\mathrm{d}x$$

由 $f(x) = f(x+\sqrt{3})$ 知

$$\begin{aligned} a_n &= \int_{-1}^{1} f(x+\sqrt{3})\cos n\pi x \,\mathrm{d}x \\ &= \int_{-1+\sqrt{3}}^{1+\sqrt{3}} f(t)\cos n\pi(t-\sqrt{3}) \,\mathrm{d}t \\ &= \int_{-1+\sqrt{3}}^{1+\sqrt{3}} f(t)\big(\cos n\pi t\cos\sqrt{3}n\pi + \sin n\pi t\sin\sqrt{3}n\pi\big) \,\mathrm{d}t \\ &= \cos\sqrt{3}n\pi \int_{-1+\sqrt{3}}^{1+\sqrt{3}} f(t)\cos n\pi t \,\mathrm{d}t + \sin\sqrt{3}n\pi \int_{-1+\sqrt{3}}^{1+\sqrt{3}} f(t)\sin n\pi t \,\mathrm{d}t \\ &= \cos\sqrt{3}n\pi \int_{-1}^{1} f(t)\cos n\pi t \,\mathrm{d}t + \sin\sqrt{3}n\pi \int_{-1}^{1} f(t)\sin n\pi t \,\mathrm{d}t \end{aligned}$$

所以 $a_n = a_n\cos\sqrt{3}n\pi + b_n\sin\sqrt{3}n\pi$
同理可得 $b_n = b_n\cos\sqrt{3}n\pi + a_n\sin\sqrt{3}n\pi$
联立

$$\begin{cases} a_n &= a_n\cos\sqrt{3}n\pi + b_n\sin\sqrt{3}n\pi \\ b_n &= b_n\cos\sqrt{3}n\pi + a_n\sin\sqrt{3}n\pi \end{cases}$$

得 $a_n = b_n = 0\ (n = 1, 2, \cdots)$

而 $f(x)$ 可导，其 Fourier 级数处处收敛于 $f(x)$，所以

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \big(a_n \cos nx + b_n \sin nx\big) = \frac{a_0}{2}$$

其中 $a_0 = \displaystyle\int_{-1}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x$ 为常数

2015 年第七届预赛（非数学类）参考答案

一、每小题 6 分，共计 30 分。

(1) 极限 $\lim\limits_{n\to\infty} n\left(\dfrac{\sin\frac{\pi}{n}}{n^2+1}+\dfrac{\sin\frac{2}{n}\pi}{n^2+2}+\cdots+\dfrac{\sin\pi}{n^2+n}\right)=$ $\underline{\dfrac{2}{\pi}}$ 。

解：由于 $\dfrac{1}{n+1}\sum\limits_{i=1}^{n}\sin\dfrac{i}{n}\pi\le\sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{\sin\frac{i}{n}\pi}{n+\frac{i}{n}}\le\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}\sin\dfrac{i}{n}\pi,$ 而

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}\sum_{i=1}^{n}\sin\frac{i}{n}\pi=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{(n+1)\pi}\frac{\pi}{n}\sum_{i=1}^{n}\sin\frac{i}{n}\pi=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\sin x dx=\frac{2}{\pi},$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\sin\frac{i}{n}\pi=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\pi}\frac{\pi}{n}\sum_{i=1}^{n}\sin\frac{i}{n}\pi=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\sin x dx=\frac{2}{\pi}。$$

所以所求极限是 $\dfrac{2}{\pi}$.

（2）设函数 $z=z(x,y)$ 由方程 $F(x+\dfrac{z}{y},y+\dfrac{z}{x})=0$ 所决定，其中 $F(u,v)$ 具有连续偏导数，且 $xF_u+yF_v\neq0$。则 $x\dfrac{\partial z}{\partial x}+y\dfrac{\partial z}{\partial y}=$ $\underline{z-xy}$ 。（本小题结果要求不显含 F 及其偏导数）

解：方程对 x 求导，得到 $\left(1+\dfrac{1}{y}\dfrac{\partial z}{\partial x}\right)F_u+\left(\dfrac{1}{x}\dfrac{\partial z}{\partial x}-\dfrac{z}{x^2}\right)F_v=0$

即 $x\dfrac{\partial z}{\partial x}=\dfrac{y(zF_v-x^2F_u)}{xF_u+yF_v}$。

同样，方程对 y 求导，得到 $y\dfrac{\partial z}{\partial y}=\dfrac{x(zF_u-y^2F_v)}{xF_u+yF_v}$。

于是 $x\dfrac{\partial z}{\partial x}+y\dfrac{\partial z}{\partial y}=\dfrac{z(xF_u+yF_v)-xy(xF_u+yF_v)}{xF_u+yF_v}=z-xy$

（3）曲面 $z=x^2+y^2+1$ 在点 M(1,-1,3)的切平面与曲面 $z=x^2+y^2$ 所围区域的体积为 $\underline{\dfrac{\pi}{2}}$ 。

解：曲面$z=x^2+y^2+1$在点 $M(1,-1,3)$的切平面：$2(x-1)-2(y+1)-(z-3)=0$，

即$z=2x-2y-1$。联立$\begin{cases} z=x^2+y^2 \\ z=2x-2y-1 \end{cases}$，

得到所围区域的投影 D 为：$(x-1)^2+(y+1)^2\le 1$。

所求体积$V=\iint\limits_D [(2x-2y-1)-(x^2+y^2)]dxdy=\iint\limits_D [1-(x-1)^2-(y+1)^2]dxdy$

令$\begin{cases} x-1=r\cos t \\ y+1=r\sin t \end{cases}$，$V=\int_0^{2\pi}dt\int_0^1(1-r^2)rdr=\dfrac{\pi}{2}$。

（4）函数 $f(x)=\begin{cases} 3,\ x\in[-5,0) \\ 0,\ x\in[0,5) \end{cases}$在$(-5,5]$的傅立叶级数在 x=0 收敛的值<u>   3/2   </u>。

解：由傅里叶收敛定理，易知 $f(0)=3/2$.

（5）设区间$(0,+\infty)$上的函数$u(x)$定义为$u(x)=\int_0^{+\infty}e^{-xt^2}dt$，则$u(x)$的初等函数表达式为

$\underline{\dfrac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{x}}}$。

[解] 由于 $u^2(x)=\int_0^{+\infty}e^{-xt^2}dt\int_0^{+\infty}e^{-xs^2}ds=\iint\limits_{s\ge0,t\ge0}e^{-x(s^2+t^2)}dsdt$，故有

$$u^2(x)=\int_0^{\pi/2}d\varphi\int_0^{+\infty}e^{-x\rho^2}\rho d\rho=\frac{\pi}{4x}\int_0^{+\infty}e^{-x\rho^2}d_\rho(x\rho^2)=-\frac{\pi}{4x}e^{-x\rho^2}\Big|_{\rho=0}^{\rho=+\infty}=\frac{\pi}{4x}。$$

所以$u(x)=\dfrac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{x}}$。

二、（12 分）设 M 是以三个正半轴为母线的半圆锥面，求其方程。

解：显然，$O(0,0,0)$为 M 的顶点，$A(1,0,0),B(0,1,0),C(0,0,1)$在 M 上。由 A,B,C 三点决定的平面$x+y+z=1$与球面$x^2+y^2+z^2=1$的交线 L 是 M 的准线。----------------------------4 分

设 $P(x,y,z)$是 M 上的点，(u,v,w)是 M 的母线 OP 与 L 的交点，则 OP 的方程为$\dfrac{x}{u}=\dfrac{y}{v}=\dfrac{z}{w}=\dfrac{1}{t}$，

即 $u=xt,v=yt,w=zt$。---8 分

代入准线方程，得$\begin{cases} (x+y+z)t=1 \\ (x^2+y^2+z^2)t^2=1 \end{cases}$。

消除 t，得到圆锥面 M 的方程$xy+yz+zx=0$。--12 分

三、（12 分）设 $f(x)$ 在 (a,b) 内二次可导，且存在常数 α,β，使得对于 $\forall x\in(a,b)$

$$f'(x)=\alpha f(x)+\beta f''(x),$$

则 $f(x)$ 在 (a,b) 内无穷次可导。

证明 1. 若 $\beta=0$。

对于 $\forall x\in(a,b)$，有

$$f'(x)=\alpha f(x),\quad f''(x)=\alpha f'(x)=\alpha^2 f(x),\cdots,\ f^{(n)}(x)=\alpha^n f(x)。$$

从而 $f(x)$ 在 (a,b) 内无穷次可导。 ----------------------------------4 分

2. 若 $\beta\neq 0$。对于 $\forall x\in(a,b)$，有

$$f''(x)=\frac{f'(x)-\alpha f(x)}{\beta}=A_1 f'(x)+B_1 f(x), \qquad (1)$$

其中 $A_1=1/\beta, B_1=\alpha/\beta$。 -----------------------6 分

因为（1）右端可导，从而

$$f'''(x)=A_1 f''(x)+B_1 f'(x)。$$ ---------------------8 分

设 $f^{(n)}(x)=A_1 f^{(n-1)}(x)+B_1 f^{(n-2)}(x), n>1$，则 $f^{(n+1)}(x)=A_1 f^{(n)}(x)+B_1 f^{(n-1)}(x)$。

故 $f(x)$ 任意阶可导。 ----------------------------------12 分

四、（14 分）求幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n^3+2}{(n+1)!}(x-1)^n$ 的收敛域与和函数

解：因 $\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^3+2}{(n+2)(n^3+2)}=0$。

固收敛半径 $R=+\infty$，收敛域为 $(-\infty,+\infty)$。 ---4 分

由

$$\frac{n^3+2}{(n+1)!}=\frac{(n+1)n(n-1)}{(n+1)!}+\frac{n+1}{(n+1)!}+\frac{1}{(n+1)!}=\frac{1}{(n-2)!}+\frac{1}{n!}+\frac{1}{(n+1)!}\ (n\geq 2)$$

及幂级数 $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{(n-2)!}(x-1)^n$，$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}(x-1)^n$ 和 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(n+1)!}(x-1)^n$ 的收敛域皆为 $(-\infty,+\infty)$ 得

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n^3+2}{(n+1)!}(x-1)^n=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{(n-2)!}(x-1)^n+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}(x-1)^n+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(n+1)!}(x-1)^n。$$

---------------------------------------7 分

用 $S_1(x)$，$S_2(x)$ 和 $S_3(x)$ 分别表示上式右端三个幂级数的和函数。依据 e^x 的展开式得到

$$S_1(x)=(x-1)^2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}(x-1)^n=(x-1)^2e^{x-1},\qquad S_2(x)=e^{x-1}$$

再由

$$(x-1)S_3(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(n+1)!}(x-1)^{n+1}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}(x-1)^n=e^{x-1}-1$$

得到，当 $x\neq 1$ 时 $S_3(x)=\dfrac{1}{x-1}(e^{x-1}-1)$。---10 分

又 $S_3(1)=1$。---12 分

综合以上讨论，最终得到所给幂级数的和函数

$$S(x)=\begin{cases}(x^2-2x+2)e^{x-1}+\dfrac{1}{x-1}(e^{x-1}-1), & x\neq 1\\ 2 & x=1\end{cases}$$ ----------14 分

五、（16 分）设函数 f 在[0,1]上连续，且 $\int_0^1 f(x)dx=0,\int_0^1 xf(x)dx=1$。试证：

（1）$\exists x_0\in[0,1]$ 使 $|f(x_0)|>4$

（2）$\exists x_1\in[0,1]$ 使 $|f(x_1)|=4$

证明：（1）若 $\forall x\in[0,1]$，$|f(x)|\le 4$，则

$$1=\int_0^1(x-\frac{1}{2})f(x)dx\le\int_0^1\left|x-\frac{1}{2}\right||f(x)|dx\le 4\int_0^1\left|x-\frac{1}{2}\right|dx=1$$ ----------------4 分

因此 $\int_0^1\left|x-\frac{1}{2}\right||f(x)|dx=1$。而 $4\int_0^1\left|x-\frac{1}{2}\right|dx=1$，

故 $\int_0^1\left|x-\frac{1}{2}\right|(4-|f(x)|)dx=0$， -------------8 分

所以对于任意的 $x\in[0,1]$，$|f(x)|=4,$ 由连续性知 $f(x)\equiv 4$ 或 $f(x)\equiv -4$。

这就与条件 $\int_0^1 f(x)dx=0$ 矛盾。

故 $\exists x_0\in[0,1],$ 使 $|f(x_0)|>4$ ------------10 分

（2）先证$\exists x_2 \in [0,1]$，使$\left| f(x_2) \right| < 4$。若不然，对任何$x \in [0,1]$，$\left| f(x) \right| \ge 4$成立。则，$f(x) \ge 4$恒成立，或者$f(x) \le -4$恒成立，与$\int_0^1 f(x)dx = 0$矛盾。再由$f(x)$的连续性及（1）的结果，利用介值定理$\exists x_1 \in [0,1]$使$\left| f(x_1) \right| = 4$。 -------------------16 分

六、（16 分）设$f(x,y)$在$x^2 + y^2 \le 1$上有连续的二阶偏导数，$f_{xx}^2 + 2f_{xy}^2 + f_{yy}^2 \le M$。若$f(0,0) = 0$，$f_x(0,0) = f_y(0,0) = 0$，证明

$$\left| \iint_{x^2+y^2\le 1} f(x,y)dxdy \right| \le \frac{\pi\sqrt{M}}{4}。$$

证明： 在点$(0,0)$展开$f(x,y)$得

$$f(x,y) = \frac{1}{2}\left(x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y} \right)^2 f(\theta x, \theta y) = \frac{1}{2}\left(x^2\frac{\partial^2}{\partial x^2} + 2xy\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} + y^2\frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) f(\theta x, \theta y),$$

其中$\theta \in (0,1)$。 ---------6 分

记$(u,v,w) = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}, \frac{\partial^2}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) f(\theta x, \theta y)$，则

$$f(x,y) = \frac{1}{2}\left(ux^2 + 2vxy + wy^2 \right)。$$

由于$\| (u, \sqrt{2}v, w) \| = \sqrt{u^2 + 2v^2 + w^2} \le \sqrt{M}$ 以及$\| (x^2, \sqrt{2}xy, y^2) \| = x^2 + y^2$，我们有

$$|(u, \sqrt{2}v, w) \cdot (x^2, \sqrt{2}xy, y^2)| \le \sqrt{M}\left(x^2 + y^2 \right),$$

即

$$|f(x,y)| \le \frac{1}{2}\sqrt{M}\left(x^2 + y^2 \right)。$$ -----------13 分

从而

$$\left| \iint_{x^2+y^2\le 1} f(x,y)dxdy \right| \le \frac{\sqrt{M}}{2}\iint_{x^2+y^2\le 1} (x^2 + y^2)dxdy = \frac{\pi\sqrt{M}}{4}。$$ -------16 分

2014 年第六届全国大学生数学竞赛初赛（非数学类）试卷及参考答案

一、填空题(共有 5 小题，每小题 6 分，共 30 分)

(1) 已知 $y_1 = e^x$ 和 $y_2 = xe^x$ 是齐次二阶常系数线性微分方程的解，则该微分方程是____________________.

【参考解答】：由解的表达式可知微分方程对应的特征方程有二重根 $r=1$，故所求微分方程为

$$y''(x)-2y'(x)+y(x)=0.$$

(2) 设有曲面 $S: z = x^2 + 2y^2$ 和平面 $\pi: 2x + 2y + z = 0$，则与 π 平行的 S 的切平面方程是____________________.

【参考解答】：设 $P_0(x_0,y_0,z_0)$ 是 S 上一点，则 S 在点 P_0 的切平面方程为 $-2x_0(x-x_0)-4y_0(y-y_0)+(z-z_0)=0$。由于该切平面与已知平面 L 平行，则 $(-2x_0,-4y_0,1)$ 平行于 $(2,2,1)$，故存在常数 $k\neq 0$，使得 $(-2x_0,-4y_0,1)=k(2,2,1)$，故得 $x_0=-1, y_0=-\dfrac{1}{2}, z_0=\dfrac{3}{2}$，所以切平面方程就为 $2x+2y+z+\dfrac{3}{2}=0$.

(3) 设 $y = y(x)$ 由 $x = \int_1^{y-x} \sin^2\left(\dfrac{\pi t}{4}\right) \mathrm{d}t$ 所确定，则 $\left.\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{x=0} =$________.

【参考解答】：易知 $y(0)=1$，两边对变量 x 求导，则

$$1=\sin^2\left(\frac{\pi}{4}(y-x)\right)(y'-1)\Rightarrow y'=\csc^2\left(\frac{\pi}{4}(y-x)\right)+1$$

把 $x=0$ 代入可得 $y'=3$.

(4) 设 $x_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{k}{(k+1)!}$，则 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n =$____________.

【参考解答】：$x_n=\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{k}{(k+1)!}=\sum\limits_{k=1}^{n}\left[\dfrac{1}{k!}-\dfrac{1}{(k+1)!}\right]$，$1-\dfrac{1}{(n+1)!}\to 1$.

(5) 已知 $\lim\limits_{x\to 0}\left(1+x+\dfrac{f(x)}{x}\right)^{\frac{1}{x}} = e^3$，则 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x^2} =$______.

【参考解答】：由 $\lim\limits_{x\to 0}\left(1+x+\dfrac{f(x)}{x}\right)^{\frac{1}{x}}=e^3$ 可得 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x}\ln\left(1+x+\dfrac{f(x)}{x}\right)=3$.

于是 $\dfrac{1}{x}\ln\left(1+x+\dfrac{f(x)}{x}\right)=3+\alpha, \alpha\to 0(x\to 0)$，即有 $\dfrac{f(x)}{x^2}=\dfrac{e^{3x+\alpha x}-1}{x}-1$，从而

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{e^{3x+\alpha x}-1}{x}-1=\lim_{x\to 0}\frac{3x+\alpha x}{x}-1=2.$$

第二题：(12 分)设 n 为正整数，计算 $I = \int_{e^{-2n\pi}}^{1}\left|\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\cos\left(\ln\dfrac{1}{x}\right)\right|\mathrm{d}x.$

【参考解答】：$I=\int_{e^{-2n\pi}}^{1}\left|\frac{d}{dx}\cos\left(\ln\frac{1}{x}\right)\right|dx=\int_{e^{-2n\pi}}^{1}\left|\frac{d}{dx}\cos(\ln x)\right|dx=\int_{e^{-2n\pi}}^{1}\left|\sin(\ln x)\right|\frac{1}{x}dx$

令 $\ln x=u$，则有 $I=\int_{-2n\pi}^{0}\left|\sin(u)\right|du=\int_{0}^{2n\pi}\left|\sin t\right|dt=4n\int_{0}^{\pi/2}\left|\sin t\right|dt=4n.$

第三题：(14 分) 设函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上有二阶导数，且有正常数 A,B 使得 $\left|f(x)\right|\le A,\left|f''(x)\right|\le B$，证明：对于任意 $x\in[0,1]$，有 $\left|f'(x)\right|\le 2A+\frac{B}{2}$.

【参考证明】：由泰勒公式，有

$$f(0)=f(x)+f'(x)(0-x)+\frac{f''(\xi)}{2}(0-x)^2,\xi\in(0,x)$$

$$f(1)=f(x)+f'(x)(1-x)+\frac{f''(\eta)}{2}(1-x)^2,\eta\in(x,1)$$

上面两式相减，得到 $f'(x)=f(1)-f(0)-\frac{f''(\eta)}{2}(1-x)^2+\frac{f''(\xi)}{2}x^2$

由条件 $\left|f(x)\right|\le A,\left|f''(x)\right|\le B$，得到 $\left|f'(x)\right|\le 2A+\frac{B}{2}\left[(1-x)^2+x^2\right]$

由于 $(1-x)^2+x^2$ 在 $[0,1]$ 的最大值为 1，所以有 $\left|f'(x)\right|\le 2A+\frac{B}{2}$.

第四题：(14 分) (1) 设一球缺高为 h，所在球半径为 R。证明该球缺的体积为 $\frac{\pi}{3}(3R-h)h^2$，球冠的面积为 $2\pi Rh$.

(2) 设球体 $(x-1)^2+(y-1)^2+(z-1)^2\le 12$ 被平面 $P: x+y+z=6$ 所截的小球缺为 Ω。记球缺上的球冠为 Σ，方向指向球外，求第二型曲面积分

$$I=\iint_{\Sigma} x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z+y\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x+z\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

【参考证明】(1)：设球缺所在球表面方程为 $x^2+y^2+z^2\le R^2$，球缺的中心线为 z 轴，且设球缺所在的圆锥顶角为 2α。

记球缺的区域为 Ω，则其体积为

$$\iiint_{\Omega} dV=\int_{R-h}^{R}dz\iint_{D_z}dxdy=\int_{R-h}^{R}\pi\left(R^2-z^2\right)dz=\frac{\pi}{3}(3R-h)h^2.$$

由于球面的面积微元为 $dS=R^2\sin\theta d\theta$，故球冠的面积为

$$\int_{0}^{2\pi}d\varphi\int_{0}^{\alpha}R^2\sin\theta d\theta=2\pi R^2(1-\cos\alpha)=2\pi Rh.$$

(2) 记球缺 Ω 的底面圆为 P_1，方向指向球缺外，且记 $J=\iint_{P_1}xdyz+ydzdx+zdxdy$. 由高斯公式，有 $I+J=\iiint_{\Omega}3dV=3V(\Omega)$，其中 $V(\Omega)$ 为 Ω 的体积。由于平面 P 的正向单位法向量为 $\frac{-1}{\sqrt{3}}(1,1,1)$，故 $J=\frac{-1}{\sqrt{3}}\iint_{P_1}(x+y+z)dS=\frac{-6}{\sqrt{3}}\sigma(P_1)=-2\sqrt{3}\sigma(P_1)$,

其中 $\sigma(P_1)$ 为 P_1 的面积。故 $I=3V(\Omega)-J=3V(\Omega)+2\sqrt{3}\sigma(P_1)$.

因为球缺底面圆心为 $Q(2,2,2)$，而球缺的顶点为 $D(3,3,3)$，故球缺的高度为

$h=|QD|=\sqrt{3}$.再由(1)所证并代入$h=\sqrt{3}$和$R=2\sqrt{3}$得

$$I=3\cdot\frac{\pi}{3}(3R-h)h^2+2\sqrt{3}\pi\left(2Rh-h^2\right)=33\sqrt{3}\pi.$$

第五题：(15 分)设f在$[a,b]$上非负连续，严格单增，且存在$x_n\in[a,b]$使得

$$\left[f\left(x_n\right)\right]^n=\frac{1}{b-a}\int_a^b\left[f(x)\right]^n\mathrm{d}x,\ \text{求}\ \lim_{n\to\infty}x_n.$$

【参考解答】：考虑特殊情形：$a=0,b=1$。下面证明$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=1$.

首先，$x_n\in[0,1]$，即$x_n\le 1$，只要证明$\forall\varepsilon>0(\varepsilon<1)$，$\exists N,\forall n>N$时，$1-\varepsilon<x_n$。由$f$在$[0,1]$上严格单增，就是要证明$f^n(1-\varepsilon)<\left[f\left(x_n\right)\right]^n=\int_0^1\left[f(x)\right]^n dx.$

由于$\forall c\in(0,1)$，有$\int_c^1\left[f(x)\right]^n dx>f^n(c)(1-c)$. 取$c=1-\dfrac{\varepsilon}{2}$,则$f(1-\varepsilon)<f(c)$，即$\dfrac{f(1-\varepsilon)}{f(c)}<1$,于是$\lim\limits_{n\to\infty}\left[\dfrac{f(1-\varepsilon)}{f(c)}\right]^n=0$, 所以$\exists N,\forall n>N$时有$\left[\dfrac{f(1-\varepsilon)}{f(c)}\right]^n<\dfrac{\varepsilon}{2}=1-c$. 即

$$f^n(1-\varepsilon)<\left[f(c)\right]^n(1-c)\le\int_c^1\left[f(x)\right]^n dx\le\int_0^1\left[f(x)\right]^n dx=f^n\left(x_n\right).$$

从而$1-\varepsilon<x_n$，由ε的任意性得$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=1$.

再考虑一般情形。令$F(t)=f\left(a+t(b-a)\right)$，由$f$在$[a,b]$上非负连续，严格单增，知$F$在$[0,1]$上非负连续，严格单增。从而$\exists t_n\in[0,1]$，使得$F^n\left(t_n\right)=\int_0^1F^n(t)dt$,且$\lim\limits_{n\to\infty}t_n=1$. 即

$$f^n\left(a+t_n(b-a)\right)=\int_0^1 f^n\left(a+t(b-a)\right)dt.$$

记$x_n=a+t_n(b-a)$,则有$\left[f\left(x_n\right)\right]^n=\dfrac{1}{b-a}\int_a^b\left[f(x)\right]^n dx$,且$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a+(b-a)=b.$

第六题：(15 分)设$A_n=\dfrac{n}{n^2+1}+\dfrac{n}{n^2+2^2}+\cdots+\dfrac{n}{n^2+n^2}$,求$\lim\limits_{n\to\infty}n\left(\dfrac{\pi}{4}-A_n\right)$.

【参考解答】：令$f(x)=\dfrac{1}{1+x^2}$，因$A_n=\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^n\dfrac{1}{1+i^2/n^2}$, 所以有$\lim\limits_{n\to\infty}A_n=\int_0^1 f(x)dx=\dfrac{\pi}{4}$.

记$x_i=\dfrac{i}{n}$,则$A_n=\sum\limits_{i=1}^n\int_{x_{i-1}}^{x_i}f\left(x_i\right)dx$, 故$J_n=n\sum\limits_{i=1}^n\int_{x_{i-1}}^{x_i}\left[f(x)-f\left(x_i\right)\right]dx.$

由拉格朗日中值，存在$\zeta_i\in\left(x_{i-1},x_i\right)$使得$J_n=n\sum\limits_{i=1}^n\int_{x_{i-1}}^{x_i}f'(\zeta)\left(x-x_i\right)dx.$

记m_i,M_i分别是$f'(x)$在$\left[x_{i-1},x_i\right]$上的最大值和最小值，则$m_i\le f'\left(\zeta_i\right)\le M_i$，故积分$\int_{x_{i-1}}^{x_i}f'(\zeta)\left(x-x_i\right)dx$介于$m_i\int_{x_{i-1}}^{x_i}\left(x-x_i\right)dx,M_i\int_{x_{i-1}}^{x_i}\left(x-x_i\right)dx$

之间，所以存在$\eta_i\in\left(x_{i-1},x_i\right)$使得$\int_{x_{i-1}}^{x_i}f'\left(\zeta_i\right)\left(x-x_i\right)dx=-f'\left(\eta_i\right)\left(x_i-x_{i-1}\right)^2/2.$

于是，有$J_n=-\dfrac{n}{2}\sum\limits_{i=1}^n f'\left(\eta_i\right)\left(x_i-x_{i-1}\right)^2=-\dfrac{1}{2n}\sum\limits_{i=1}^n f'\left(\eta_i\right)$. 从而

$$\lim_{n\to\infty}n\left(\frac{\pi}{4}-A_n\right)=\lim_{n\to\infty}J_n=-\frac{1}{2}\int_0^1 f'(x)dx=-\frac{1}{2}\left[f(1)-f(0)\right]=\frac{1}{4}.$$

第五届全国大学生数学竞赛预赛试卷 评分细则

一、(共 4 小题,每小题 6 分,共 24 分) 解答下列各题 .

1. 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\sin\pi\sqrt{1+4n^2}\right)^n$.

解 $\because \sin\left(\pi\sqrt{1+4n^2}\right)=\sin\left(\pi\sqrt{1+4n^2}-2n\pi\right)=\sin\dfrac{\pi}{2n\pi+\pi\sqrt{1+4n^2}}$ (2 分)

$$\text{原式}=\lim_{n\to\infty}\left(1+\sin\frac{\pi}{2n\pi+\pi\sqrt{1+4n^2}}\right)^n$$

$$=\exp\left[\lim_{n\to\infty}n\ln\left(1+\sin\frac{\pi}{2n\pi+\pi\sqrt{1+4n^2}}\right)\right] \quad (2\text{ 分})$$

$$=\exp\left(\lim_{n\to\infty}n\sin\frac{\pi}{2n\pi+\pi\sqrt{1+4n^2}}\right)$$

$$=\exp\left(\lim_{n\to\infty}\frac{\pi n}{2n\pi+\pi\sqrt{1+4n^2}}\right)=e^{\frac{1}{4}} \quad (2\text{ 分})$$

2 证明广义积分 $\int_0^{+\infty}\dfrac{\sin x}{x}dx$ 不是绝对收敛的.

证. 记 $a_n=\int_{n\pi}^{(n+1)\pi}\dfrac{|\sin x|}{x}dx$，只要证明 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n$ 发散. (2 分)

因为 $a_n\ge\dfrac{1}{(n+1)\pi}\int_{n\pi}^{(n+1)\pi}|\sin x|\,dx=\dfrac{1}{(n+1)\pi}\int_0^{\pi}\sin x dx=\dfrac{2}{(n+1)\pi}$. (3 分)

而 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{2}{(n+1)\pi}$ 发散，故 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n$ 发散. (1 分)

3. 设函数 $y=y(x)$ 由 $x^3+3x^2y-2y^3=2$ 所确定. 求 $y(x)$ 的极值.

解 方程两边对 x 求导，得

$$3x^2+6xy+3x^2y'-6y^2y'=0 \quad (1\text{ 分})$$

故 $y'=\dfrac{x(x+2y)}{2y^2-x^2}$，令 $y'=0$，得 $x(x+2y)=0\Rightarrow x=0$ 或 $x=-2y$.

将 $x=0$ 和 $x=-2y$ 代入所给方程，得

$$\begin{cases} x=0 \\ y=-1 \end{cases} \quad 和 \quad \begin{cases} x=-2 \\ y=1 \end{cases}. \qquad (2 分)$$

又

$$y''=\frac{(2y^2-x^2)(2x+2xy'+2y)+(x^2+2xy)(4yy'-2x)}{(2y^2-x^2)^2}\Bigg|_{\substack{x=0\\y=-1\\y'=0}}=-1<0,$$

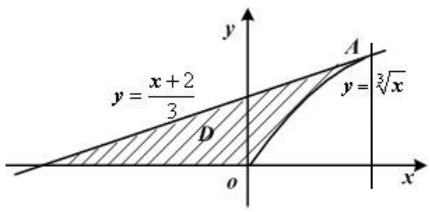
$$y''\Big|_{\substack{x=-2\\y=1\\y'=0}}=1>0.$$

故 $y(0)=-1$ 为极大值， $y(-2)=1$ 为极小值. (3 分)

4. 过曲线 $y=\sqrt[3]{x}(x\geq 0)$ 上的点 A 作切线,使该切线与曲线及 x 轴所围成的平面图形的面积为 $\frac{3}{4}$，求点 A 的坐标.

解 设切点 A 的坐标为 $(t,\sqrt[3]{t})$，曲线过 A 点的切线方程为

$$y-\sqrt[3]{t}=\frac{1}{3\sqrt[3]{t^2}}(x-t) \qquad (2分)$$



令 $y=0$, 由上式可得切线与 x 轴交点的横坐标 $x_0=-2t$

$\therefore$ 平面图形的面积 $S=\Delta Ax_0t$ 的面积 $-$ 曲边梯形 otA 的面积

$$S=\frac{1}{2}\sqrt[3]{t}\cdot 3t-\int_0^t\sqrt[3]{x}\,\mathrm{d}x=\frac{3}{4}t\sqrt[3]{t}=\frac{3}{4}\Rightarrow t=1，\quad \therefore A 的坐标为 (1,1). \qquad (4分)$$

二、 (12 分) 计算定积分 $I=\int_{-\pi}^{\pi}\frac{x\sin x\cdot\arctan e^x}{1+\cos^2 x}\mathrm{d}x$.

解
$$I=\int_{-\pi}^{0}\frac{x\sin x\cdot\arctan e^x}{1+\cos^2 x}\mathrm{d}x+\int_0^{\pi}\frac{x\sin x\cdot\arctan e^x}{1+\cos^2 x}\mathrm{d}x$$

$$=\int_0^{\pi}\frac{x\sin x\cdot\arctan e^{-x}}{1+\cos^2 x}\mathrm{d}x+\int_0^{\pi}\frac{x\sin x\cdot\arctan e^x}{1+\cos^2 x}\mathrm{d}x \qquad (4 分)$$

$$=\int_0^{\pi}(\arctan e^x+\arctan e^{-x})\frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}\mathrm{d}x$$

$$=\frac{\pi}{2}\int_0^{\pi}\frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}\mathrm{d}x \qquad (2 分)$$

$$=\left(\frac{\pi}{2}\right)^2\int_0^{\pi}\frac{\sin x}{1+\cos^2 x}dx \qquad (4 分)$$

$$=-\left(\frac{\pi}{2}\right)^2\arctan(\cos x)\Big|_0^{\pi}=\frac{\pi^3}{8} \qquad (2 分)$$

三、(12 分)设 $f(x)$ 在 $x=0$ 处存在二阶导数 $f''(0)$，且 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=0$. 证明：级数

$\sum_{n=1}^{\infty}\left|f\left(\frac{1}{n}\right)\right|$收敛.

证　由于 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续，且 $\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=0$，

则 $$f(0)=\lim_{x\to 0}f(x)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}\cdot x=0,\qquad (2\text{ 分})$$

$$f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=0.\qquad (2\text{ 分})$$

应用罗比达法则，

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{f'(x)}{2x}=\lim_{x\to 0}\frac{f'(x)-f'(0)}{2(x-0)}=\frac{1}{2}f''(0).\qquad (3\text{ 分})$$

所以

$$\lim_{n\to 0}\frac{\left|f\left(\frac{1}{n}\right)\right|}{\frac{1}{n^2}}=\frac{1}{2}\left|f''(0)\right|.\qquad (2\text{ 分})$$

由于级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ 收敛，从而 $\sum_{n=1}^{\infty}\left|f\left(\frac{1}{n}\right)\right|$ 收敛.　(3 分)

四、(10 分) 设 $|f(x)|\le\pi,\ f'(x)\ge m>0\ (a\le x\le b)$，证明 $\left|\int_a^b\sin f(x)\,\mathrm{d}x\right|\le\frac{2}{m}$.

证 因为 $f'(x)\ge m>0\ (a\le x\le b)$，所以 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上严格单增，从而有反函数.　(2 分)

设 $A=f(a)$，$B=f(b)$，φ 是 f 的反函数，则

$$0<\varphi'(y)=\frac{1}{f'(x)}\le\frac{1}{m},\qquad (3\text{ 分})$$

又 $|f(x)|\le\pi$，则 $-\pi\le A<B\le\pi$，所以

$$\left|\int_a^b\sin f(x)\,\mathrm{d}x\right|\overset{x=\varphi(y)}{=\!=\!=}\left|\int_A^B\varphi'(y)\sin y\,\mathrm{d}y\right|\qquad (3\text{ 分})$$

$$\le\int_0^{\pi}\frac{1}{m}\sin y\,\mathrm{d}y=\frac{2}{m}\qquad (2\text{ 分})$$

五、(１４分)设 Σ 是一个光滑封闭曲面, 方向朝外.　给定第二型的曲面积分

$$I=\iint_{\Sigma}\left(x^3-x\right)dydz+\left(2y^3-y\right)dzdx+\left(3z^3-z\right)dxdy.$$

试确定曲面 Σ, 使得积分 I 的值最小, 并求该最小值.

解. 记 Σ 围成的立体为 V，由高斯公式,

$$I=\iiint_V\left(3x^2+6y^2+9z^2-3\right)dv=3\iiint_V\left(x^2+2y^2+3z^2-1\right)dxdydz.\qquad (3\text{ 分})$$

为了使得I达到最小，就要求V是使得$x^2+2y^2+3z^2-1\le 0$的最大空间区域，即

$$V=\left\{(x,y,z)\,|\,x^2+2y^2+3z^2\le 1\right\}. \qquad (3\text{ 分})$$

所以V是一个椭球，Σ是椭球V的表面时，积分I最小.

为求该最小值，作变换$\begin{cases} x=u \\ y=v/\sqrt{2} \\ z=w/\sqrt{3} \end{cases}$. 则$\dfrac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)}=\dfrac{1}{\sqrt{6}}$，有

$$I=\frac{3}{\sqrt{6}}\iiint\limits_{u^2+v^2+w^2\le 1}\left(u^2+v^2+w^2-1\right)dudvdw. \qquad (4\text{ 分})$$

使用球坐标变换，我们有

$$I=\frac{3}{\sqrt{6}}\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^{\pi}d\theta\int_0^1\left(r^2-1\right)r^2\sin\theta dr=-\frac{4\sqrt{6}}{15}\pi. \qquad (4\text{ 分})$$

六、(14 分) 设$I_a(r)=\displaystyle\int_C\frac{ydx-xdy}{(x^2+y^2)^a}$，其中$a$为常数，曲线$C$为椭圆$x^2+xy+y^2=r^2$，取正向. 求极限$\lim\limits_{r\to+\infty}I_a(r)$.

解. 作变换$\begin{cases} x=(u-v)/\sqrt{2} \\ y=(u+v)/\sqrt{2} \end{cases}$,

曲线C变为uov平面上的 $\Gamma:\dfrac{3}{2}u^2+\dfrac{1}{2}v^2=r^2$，也是取正向 (2 分)

且有 $x^2+y^2=u^2+v^2$， $ydx-xdy=vdu-udv$,

$$I_a(r)=\int_\Gamma\frac{vdu-udv}{(u^2+v^2)^a}. \qquad (2\text{ 分})$$

作变换$\begin{cases} u=\sqrt{\dfrac{2}{3}}r\cos\theta \\ v=\sqrt{2}r\sin\theta \end{cases}$，则有$vdu-udv=-\dfrac{2}{\sqrt{3}}r^2d\theta$

$$I_a(r)=-\frac{2}{\sqrt{3}}r^{2(1-a)}\int_0^{2\pi}\frac{d\theta}{(2\cos^2\theta/3+2\sin^2\theta)^a}=-\frac{2}{\sqrt{3}}r^{2(1-a)}J_a,$$

其中$J_a=\displaystyle\int_0^{2\pi}\frac{d\theta}{(2\cos^2\theta/3+2\sin^2\theta)^a}$， $0<J_a<+\infty$. (3 分)

因此当$a>1$和$a<1$，所求极限分别为 0 和$-\infty$. (2 分)

而当$a=1$，

$$J_1=\int_0^{2\pi}\frac{d\theta}{2\cos^2\theta+3/2\sin^2\theta}=4\int_0^{\pi/2}\frac{d\tan\theta}{2+3/2\tan^2\theta}=4\int_0^{+\infty}\frac{dt}{2+3/2\,t^2}=\frac{2}{\sqrt{3}}\pi. \qquad (3\text{分})$$

故所求极限为

$$\lim_{r\to+\infty}I_a(r)=\begin{cases}0, & a>1\\ -\infty, & a<1\\ -2\pi, & a=1\end{cases}. \qquad (2\text{分})$$

七、(14分) 判断级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}}{(n+1)(n+2)}$的敛散性，若收敛，求其和.

解: (1) 记 $a_n=1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}$，$u_n=\frac{a_n}{(n+1)(n+2)},n=1,2,3,\cdots$.

因为n充分大时

$$0<a_n=1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}<1+\int_1^n\frac{1}{x}dx=1+\ln n<\sqrt{n}, \qquad (3\text{分})$$

所以 $u_n\le\frac{\sqrt{n}}{(n+1)(n+2)}<\frac{1}{n^{3/2}}$ 而 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{3/2}}$收敛，所以$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$收敛. (2分)

（2）$a_k=1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{k}(k=1,2,....)$

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{k}}{(k+1)(k+2)}=\sum_{k=1}^{n}\frac{a_k}{(k+1)(k+2)}=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{a_k}{k+1}-\frac{a_k}{k+2}\right)$$

$$=\left(\frac{a_1}{2}-\frac{a_1}{3}\right)+\left(\frac{a_2}{3}-\frac{a_2}{4}\right)+\cdots+\left(\frac{a_{n-1}}{n}-\frac{a_{n-1}}{n+1}\right)+\left(\frac{a_n}{n+1}-\frac{a_n}{n+2}\right) \qquad (2\text{分})$$

$$=\frac{1}{2}a_1+\frac{1}{3}(a_2-a_1)+\frac{1}{4}(a_3-a_2)+\cdots+\frac{1}{n+1}(a_n-a_{n-1})-\frac{1}{n+2}a_n \qquad (2\text{分})$$

$$=\left(\frac{1}{1\cdot2}+\frac{1}{2\cdot3}+\frac{1}{3\cdot4}+\cdots+\frac{1}{n\cdot(n-1)}\right)-\frac{1}{n+2}a_n=1-\frac{1}{n}-\frac{1}{n+2}a_n. \qquad (2\text{分})$$

因为$0<a_n<1+\ln n$

所以$0<\frac{a_n}{n+2}<\frac{1+\ln n}{n+2}$ 且 $\lim_{n\to\infty}\frac{1+\ln n}{n+2}=0$. 所以$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{n+2}=0$.

于是 $S=\lim_{n\to\infty}S_n=1-0-0=1$. 证毕。 (3分)

第四届全国大学生数学竞赛预赛试题
（非数学类）参考答案及评分标准

一、（本题共 5 小题，每小题各 6 分，共 30 分）解答下列各题（要求写出重要步骤）.

(1) 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}(n!)^{\frac{1}{n^2}}$；

(2) 求通过直线 $L:\begin{cases}2x+y-3z+2=0\\5x+5y-4z+3=0\end{cases}$ 的两个相互垂直的平面 π_1 和 π_2，使其中一个平面过点 $(4,-3,1)$；

(3) 已知函数 $z=u(x,y)e^{ax+by}$，且 $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=0,$ 确定常数 a 和 b，使函数 $z=z(x,y)$ 满足方程 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}-\dfrac{\partial z}{\partial x}-\dfrac{\partial z}{\partial y}+z=0$；

(4) 设函数 $u=u(x)$ 连续可微，$u(2)=1$，且 $\int\limits_L (x+2y)udx+(x+u^3)udy$ 在右半平面上与路径无关，求 $u(x)$；

(5) 求极限 $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt[3]{x}\int_x^{x+1}\dfrac{\sin t}{\sqrt{t+\cos t}}dt$.

解

（1） 因为 $(n!)^{\frac{1}{n^2}}=e^{\frac{1}{n^2}\ln(n!)}$ ……………………………………（1 分）

而 $\dfrac{1}{n^2}\ln(n!)\le\dfrac{1}{n}\left(\dfrac{\ln 1}{1}+\dfrac{\ln 2}{2}+\cdots+\dfrac{\ln n}{n}\right)$，且 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\ln n}{n}=0$ ………………………（3 分）

所以 $$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(\frac{\ln 1}{1}+\frac{\ln 2}{2}+\cdots+\frac{\ln n}{n}\right)=0,$$

即 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n^2}\ln(n!)=0$， 故 $\lim\limits_{n\to\infty}(n!)^{\frac{1}{n^2}}=1$ ……………………………………（2 分）

（2）过直线 L 的平面束为

$$\lambda(2x+y-3z+2)+\mu(5x+5y-4z+3)=0$$

即 $(2\lambda+5\mu)x+(\lambda+5\mu)y-(3\lambda+4\mu)z+(2\lambda+3\mu)=0$ ，…………………………（2 分）

若平面 π_1 过点 $(4,-3,1)$，代入得 $\lambda+\mu=0$，即 $\mu=-\lambda$，从而 π_1 的方程为

$$3x+4y-z+1=0$$ ，……………………………………（2 分）

若平面束中的平面 π_2 与 π_1 垂直，则

$$3\cdot(2\lambda+5\mu)+4\cdot(\lambda+5\mu)+1\cdot(3\lambda+4\mu)=0$$

解得 $\lambda=-3\mu$，从而平面 π_2 的方程为 $x-2y-5z+3=0$ ，………………………………（2 分）

（3）$\dfrac{\partial z}{\partial x}=e^{ax+by}\left[\dfrac{\partial u}{\partial x}+au(x+y)\right]$，$\dfrac{\partial z}{\partial y}=e^{ax+by}\left[\dfrac{\partial u}{\partial y}+bu(x+y)\right]$，………………（2 分）

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=e^{ax+by}\left[b\frac{\partial u}{\partial x}+a\frac{\partial u}{\partial y}+abu(x,y)\right].$$ ………………………………………（2 分）

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}-\frac{\partial z}{\partial x}-\frac{\partial z}{\partial y}+z=e^{ax+by}\left[(b-1)\frac{\partial u}{\partial x}+(a-1)\frac{\partial u}{\partial y}+(ab-a-b+1)u(x,y)\right],$$

若使 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}-\dfrac{\partial z}{\partial x}-\dfrac{\partial z}{\partial y}+z=0$，只有

$(b-1)\dfrac{\partial u}{\partial x}+(a-1)\dfrac{\partial u}{\partial y}+(ab-a-b+1)u(x,y)=0$，即 $a=b=1$. ………………（2 分）

（4）由 $\dfrac{\partial}{\partial x}\left(u[x+u^3]\right)=\dfrac{\partial}{\partial y}\left((x+2y)u\right)$ 得 $\left(x+4u^3\right)u'=u$，即 $\dfrac{dx}{du}-\dfrac{1}{u}x=4u^2$ …… .（2 分）

方程通解为

$$x=e^{\ln u}\left(\int 4u^2e^{-\ln u}du+C\right)=u\left(\int 4udu+C\right)=u\left(2u^2+C\right)$$. …………………（3 分）

由 $u(2)=1$ 得 $C=0$，故 $u=\left(\dfrac{x}{2}\right)^{1/3}$. ……………………………………（1 分）

（5）因为当 $x>1$ 时，

$$\left|\sqrt[3]{x}\int_x^{x+1}\frac{\sin t}{\sqrt{t+\cos t}}dt\right|\le\sqrt[3]{x}\int_x^{x+1}\frac{dt}{\sqrt{t-1}}$$ ………………………………（3 分）

$$\le 2\sqrt[3]{x}\left(\sqrt{x}-\sqrt{x-1}\right)=2\frac{\sqrt[3]{x}}{\sqrt{x}+\sqrt{x-1}}\to 0(x\to\infty),$$ ………… ………（2 分）

所以 $\lim\limits_{x\to\infty}\sqrt[3]{x}\int_x^{x+1}\dfrac{\sin t}{\sqrt{t+\cos t}}dt=0$。 ……………………… ………（1 分）

二、（本题 10 分）计算 $\int_0^{+\infty} e^{-2x}\ |\sin x|\ dx$

解　由于

$$\int_0^{n\pi} e^{-2x}|\sin x|dx=\sum_{k=1}^{n}\int_{(k-1)\pi}^{k\pi} e^{-2x}|\sin x|dx$$

$$=\sum_{k=1}^{n}\int_{(k-1)\pi}^{k\pi}(-1)^{k-1}e^{-2x}\sin xdx \quad \text{……………………………………（3 分）}$$

应用分部积分法

$$\int_{(k-1)\pi}^{k\pi}(-1)^{k-1}e^{-2x}\sin xdx=\frac{1}{5}e^{-2k\pi}(1+e^{2\pi}) \quad \text{………………………………（2 分）}$$

所以

$$\int_0^{n\pi} e^{-2x}|\sin x|dx=\frac{1}{5}(1+e^{2\pi})\sum_{k=1}^{n}e^{-2k\pi}=\frac{1}{5}(1+e^{2\pi})\frac{e^{-2\pi}-e^{-2(n+1)\pi}}{1-e^{-2\pi}} \text{……………（2 分）}$$

当 $n\pi\le x<(n+1)\pi$ 时

$$\int_0^{n\pi} e^{-2x}|\sin x|dx\le\int_0^{x} e^{-2x}|\sin x|dx<\int_0^{(n+1)\pi} e^{-2x}|\sin x|dx,$$

令 $n\to\infty$，由两边夹法则，得

$$\int_0^{\infty} e^{-2x}|\sin x|dx=\lim_{x\to\infty}\int_0^{x} e^{-2x}|\sin x|dx=\frac{1}{5}\frac{e^{2\pi}+1}{e^{2\pi}-1} \text{…………………………（3 分）}$$

注：如果最后不用夹逼法则，而用 $\int_0^{\infty} e^{-2x}|\sin x|dx=\lim_{n\to\infty}\int_0^{n\pi} e^{-2x}|\sin x|dx=\frac{1}{5}\frac{e^{2\pi}+1}{e^{2\pi}-1}$，需先说明 $\int_0^{\infty} e^{-2x}|\sin x|dx$ 收敛.

三、（本题 10 分）求方程 $x^2\sin\frac{1}{x}=2x-501$ 的近似解．精确到 0.001.

解　由泰勒公式 $\sin t=t-\frac{\sin(\theta t)}{2}t^2 \quad (0<\theta<1)$ …………………………………（2 分）

令 $t=\frac{1}{x}$　得 $\sin\frac{1}{x}=\frac{1}{x}-\frac{\sin\left(\frac{\theta}{x}\right)}{2x^2}$，

代入原方程得

$$x-\frac{1}{2}\sin\left(\frac{\theta}{x}\right)=2x-501 \qquad \text{即 } x=501-\frac{1}{2}\sin\left(\frac{\theta}{x}\right) \quad \text{……………………………（4 分）}$$

由此知 $x>500$，$0<\dfrac{\theta}{x}<\dfrac{1}{500}$

$$|x-501|=\frac{1}{2}\left|\sin\left(\frac{\theta}{x}\right)\right|\le\frac{1}{2}\frac{\theta}{x}<\frac{1}{1000}=0.001$$

所以，$x=501$ 即为满足题设条件的解 ……………………………（4 分）

四、（本题 12 分）设函数 $y=f(x)$ 的二阶可导，且 $f''(x)>0, f(0)=0, f'(0)=0$，求 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x^3f(u)}{f(x)\sin^3u}$，其中 u 是曲线 $y=f(x)$ 上点 $p(x,f(x))$ 处的切线在 x 轴上的截距.

解：曲线 $y=f(x)$ 在点 $p(x,f(x))$ 处的切线方程为

$$Y-f(x)=f'(x)(X-x),$$

令 $Y=0$，则有 $X=x-\dfrac{f(x)}{f'(x)}$，由此 $u=x-\dfrac{f(x)}{f'(x)}$，………………………………（3 分）

且有

$$\lim_{x\to0}u=\lim_{x\to0}\left(x-\frac{f(x)}{f'(x)}\right)=-\lim_{x\to0}\frac{\dfrac{f(x)-f(0)}{x}}{\dfrac{f'(x)-f'(0)}{x}}=\frac{f'(0)}{f''(0)}=0\text{. ………………… （2 分）}$$

由 $f(x)$ 在 $x=0$ 处的二阶泰勒公式

$$f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2}x^2+o(x^2)=\frac{f''(0)}{2}x^2+o(x^2)\text{ ……（2 分）}$$

得

$$\lim_{x\to0}\frac{u}{x}=1-\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{xf'(x)}=1-\lim_{x\to0}\frac{\dfrac{f''(0)}{2}x^2+o(x^2)}{xf'(x)}$$

$$=1-\frac{1}{2}\lim_{x\to0}\frac{f''(0)+o(1)}{\dfrac{f'(x)-f'(0)}{x}}=1-\frac{1}{2}\frac{f''(0)}{f''(0)}=\frac{1}{2}\text{ …………………（3 分）}$$

$$\therefore\lim_{x\to0}\frac{x^3f(u)}{f(x)\sin^3u}=\lim_{x\to0}\frac{x^3\left(\dfrac{f''(0)}{2}u^2+o(u^2)\right)}{u^3\left(\dfrac{f''(0)}{2}x^2+o(x^2)\right)}=\lim_{x\to0}\frac{x}{u}=2\text{ ……………………（2 分）}$$

五、（本题 12 分）求最小实数 C，使得满足 $\int_0^1 |f(x)|dx = 1$ 的连续的函数 $f(x)$ 都有 $\int_0^1 f(\sqrt{x})dx \le C$

解　由于　$\int_0^1 |f(\sqrt{x})|dx = \int_0^1 |f(t)|2tdt \le 2\int_0^1 |f(t)|dt = 2,$ ………………………（4 分）

另一方面, 取 $f_n(x) = (n+1)x^n$, 则　$\int_0^1 |f_n(x)|dx = \int_0^1 f_n(x)dx = 1.$…………………（3 分）

而 $\int_0^1 f_n(\sqrt{x})dx = 2\int_0^1 tf_n(t)dt = 2\frac{n+1}{n+2} = 2\left(1-\frac{1}{n+2}\right) \to 2\ \ (n\to\infty).$…………………（3 分）

因此最小的实数 $C = 2.$　　　　　　　　　　…………………………………（2 分）

六、（本题 12 分）设 $f(x)$ 为连续函数，$t > 0$。 区域 Ω 是由抛物面 $z = x^2 + y^2$ 和球面 $x^2 + y^2 + z^2 = t^2\ (t > 0)$ 所围起来的部分. 定义三重积分

$$F(t) = \iiint_\Omega f(x^2 + y^2 + z^2)dv 。$$

求 $F(t)$ 的导数 $F'(t)$.

解法 1.　记 $g = g(t) = \frac{\sqrt{1+4t^2}-1}{2}$，则 Ω 在 xy 面上的投影为 $x^2 + y^2 \le g$　　….（2 分）

在曲线 $S:\begin{cases} x^2 + y^2 = z \\ x^2 + y^2 + z^2 = t^2 \end{cases}$ 上任取一点 (x, y, z)，则原点到的点的射线和 z 轴的夹角为　$\theta_t = \arccos\frac{z}{t} = \arccos\frac{g}{t}$．取 $\Delta t > 0$，则 $\theta_t > \theta_{t+\Delta t}$．对于固定的 $t > 0$，考虑积分差 $F(t+\Delta t) - F(t)$，这是一个在厚度为 Δt 的球壳上的积分. 原点到球壳边缘上的点的射线和 z 轴夹角在 $\theta_{t+\Delta t}$ 和 θ_t 之间. 我们使用球坐标变换来做这个积分，由积分的连续性可知，存在 $\alpha = \alpha(\Delta t)$，$\theta_{t+\Delta t} \le \alpha \le \theta_t$，使得

$$F(t+\Delta t) - F(t) = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\alpha} d\theta \int_t^{t+\Delta t} f(r^2)r^2 \sin\theta dr\ .$$ ……………………（4 分）

这样就有 $F(t+\Delta t) - F(t) = 2\pi(1-\cos\alpha)\int_t^{t+\Delta t} f(r^2)r^2 dr$．而当 $\Delta t \to 0^+$，

$$\cos\alpha \to \cos\theta_t = \frac{g(t)}{t}, \quad \frac{1}{\Delta t}\int_t^{t+\Delta t} f(r^2) r^2 dr \to t^2 f(t^2).$$

故$F(t)$的右导数为

$$2\pi\left(1-\frac{g(t)}{t}\right)t^2 f(t^2) = \pi\left(2t+1-\sqrt{1+4t^2}\right) t\, f(t^2). \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots（4 分）$$

当$\Delta t < 0$，考虑$F(t) - F(t+\Delta t)$可以得到同样的左导数. 因此

$$F'(t) = \pi\left(2t+1-\sqrt{1+4t^2}\right) t\, f(t^2) \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots（2 分）$$

解法 2.. 令$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta, \\ z = z \end{cases}$

则Ω: $\begin{cases} 0 \le \theta \le 2\pi \\ 0 \le r \le a \\ r^2 \le z \le \sqrt{t^2 - r^2} \end{cases}$，其中$a$满足$a^2 + a^4 = t^2$，$a = \dfrac{\sqrt{1+4t^2}-1}{2}$ ………(2 分）

故有

$$F(t) = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^a r dr \int_{r^2}^{\sqrt{t^2-r^2}} f(r^2+z^2)dz = 2\pi\int_0^a r\left(\int_{r^2}^{\sqrt{t^2-a^2}} f(r^2+z^2)dz\right)dr \quad \ldots\ldots（2 分）$$

从而有

$$F'(t) = 2\pi\left(a\int_{a^2}^{\sqrt{t^2-a^2}} f(a^2+z^2)dz\frac{da}{dt} + \int_0^a rf(r^2+t^2-r^2)\frac{t}{\sqrt{t^2-r^2}}dr\right) \ldots（4 分）$$

注意到 $\sqrt{t^2-a^2} = a^2$，第一个积分为 0，我们得到

$$F'(t) = 2\pi f(t^2)t\int_0^a r\frac{1}{\sqrt{t^2-r^2}}dr = -\pi t f(t^2)\int_0^a \frac{d(t^2-r^2)}{\sqrt{t^2-r^2}},$$

所以 $F'(t) = 2\pi t f(t^2)\left(t-a^2\right) = \pi t f(t^2)\left(2t+1-\sqrt{1+4t^2}\right)$. …… ………………（4 分）

七、（本题 14 分）设$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$与$\sum_{n=1}^{\infty} b_n$为正项级数，

（1）若$\lim_{n\to\infty}\left(\dfrac{a_n}{a_{n+1}b_n} - \dfrac{1}{b_{n+1}}\right) > 0$，则$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$收敛；

（2）若$\lim_{n\to\infty}\left(\dfrac{a_n}{a_{n+1}b_n} - \dfrac{1}{b_{n+1}}\right) < 0$，且$\sum_{n=1}^{\infty} b_n$发散，则$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$发散。

证明：（1）设 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{a_n}{a_{n+1}b_n}-\dfrac{1}{b_{n+1}}\right)=2\delta>\delta>0$，则存在 $N\in\mathbf{N}$,对于任意的 $n\geq N$ 时,

$\dfrac{a_n}{a_{n+1}}\dfrac{1}{b_n}-\dfrac{1}{b_{n+1}}>\delta$, $\dfrac{a_n}{b_n}-\dfrac{a_{n+1}}{b_{n+1}}>\delta a_{n+1}$, $a_{n+1}<\dfrac{1}{\delta}(\dfrac{a_n}{b_n}-\dfrac{a_{n+1}}{b_{n+1}})$, ……………（4 分）

$$\sum_{n=N}^{m}a_{n+1}\leq\frac{1}{\delta}\sum_{n=N}^{m}(\frac{a_n}{b_n}-\frac{a_{n+1}}{b_{n+1}})\leq\frac{1}{\delta}(\frac{a_N}{b_N}-\frac{a_{m+1}}{b_{m+1}})\leq\frac{1}{\delta}\frac{a_N}{b_N},$$

因而 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 的部分和有上界,从而 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛. ………………………………（4 分）

（2）若 $\lim\limits_{n\to\infty}(\dfrac{a_n}{a_{n+1}}\dfrac{1}{b_n}-\dfrac{1}{b_{n+1}})<\delta<0$ 则存在 $N\in\mathbf{N}$,对于任意的 $n\geq N$ 时,

$$\frac{a_n}{a_{n+1}}<\frac{b_n}{b_{n+1}}$$

…………………………………（3 分）

有

$$a_{n+1}>\frac{b_{n+1}}{b_n}a_n>\cdots>\frac{b_{n+1}}{b_n}\frac{b_n}{b_{n-1}}\cdots\frac{b_{N+1}}{b_N}a_N=\frac{a_N}{b_N}b_{n+1}$$

于是由 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$ 发散,得到 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 发散. ………………………………（3 分）

第三届全国大学生数学竞赛预赛试卷

参考答案及评分标准

（非数学类，2011）

一、（本题共 4 小题，每题 6 分，共 24 分）计算题

1. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+x)^{\frac{2}{x}}-e^2(1-\ln(1+x))}{x}$.

解：因为 $\dfrac{(1+x)^{\frac{2}{x}}-e^2(1-\ln(1+x))}{x}=\dfrac{e^{\frac{2}{x}\ln(1+x)}-e^2(1-\ln(1+x))}{x}$,

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^2\ln(1+x)}{x}=e^2$, ……………………………………………………3 分

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{\frac{2}{x}\ln(1+x)}-e^2}{x}=e^2\lim_{x\to 0}\frac{e^{\frac{2}{x}\ln(1+x)-2}-1}{x}=e^2\lim_{x\to 0}\frac{\frac{2}{x}\ln(1+x)-2}{x}$$

$=2e^2\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)-x}{x^2}=2e^2\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\frac{1}{1+x}-1}{2x}=-e^2$, ………………5 分

所以

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+x)^{\frac{2}{x}}-e^2(1-\ln(1+x))}{x}=0$. ……………………………………6 分

2. 设 $a_n=\cos\dfrac{\theta}{2}\cdot\cos\dfrac{\theta}{2^2}\cdot\cdots\cdot\cos\dfrac{\theta}{2^n}$, 求 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n$.

解：若 $\theta=0$, 则 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=1$. ………………………1 分

若 $\theta\neq 0$，则当 n 充分大，使得 $2^n>|k|$ 时，

$$a_n=\cos\frac{\theta}{2}\cdot\cos\frac{\theta}{2^2}\cdot\cdots\cdot\cos\frac{\theta}{2^n}=\cos\frac{\theta}{2}\cdot\cos\frac{\theta}{2^2}\cdot\cdots\cdot\cos\frac{\theta}{2^n}\cdot\sin\frac{\theta}{2^n}\cdot\frac{1}{\sin\frac{\theta}{2^n}}$$

$=\cos\dfrac{\theta}{2}\cdot\cos\dfrac{\theta}{2^2}\cdot\cdots\cdot\cos\dfrac{\theta}{2^{n-1}}\cdot\dfrac{1}{2}\sin\dfrac{\theta}{2^{n-1}}\cdot\dfrac{1}{\sin\frac{\theta}{2^n}}$. ………………………4 分

$$=\cos\frac{\theta}{2}\cdot\cos\frac{\theta}{2^2}\cdot\cdots\cdot\cos\frac{\theta}{2^{n-2}}\cdot\frac{1}{2^2}\sin\frac{\theta}{2^{n-2}}\cdot\frac{1}{\sin\frac{\theta}{2^n}}=\frac{\sin\theta}{2^n\sin\frac{\theta}{2^n}}$$

这时，$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sin\theta}{2^n\sin\frac{\theta}{2^n}}=\dfrac{\sin\theta}{\theta}$. ………………………6 分

3. 求 $\iint\limits_D \operatorname{sgn}(xy-1)dxdy$，其中 $D=\{(x,y)\,|\,0\le x\le 2, 0\le y\le 2\}$

解：设 $D_1=\{(x,y)\,|\,0\le x\le \frac{1}{2}, 0\le y\le 2\}$

$D_2=\{(x,y)\,|\,\frac{1}{2}\le x\le 2, 0\le y\le \frac{1}{x}\}$

$D_3=\{(x,y)\,|\,\frac{1}{2}\le x\le 2, \frac{1}{x}\le y\le 2\}$. ……………………………2 分

$\iint\limits_{D_1\cup D_2} dxdy = 1+\int_{\frac{1}{2}}^{2}\frac{dx}{x}=1+2\ln 2$，$\iint\limits_{D_3} dxdy=3-2\ln 2$. ……………………………4 分

$\iint\limits_D \operatorname{sgn}(xy-1)dxdy=\iint\limits_{D_3} dxdy-\iint\limits_{D_2\cup D_3} dxdy=2-4\ln 2$. ……………………………6 分

4. 求幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n-1}{2^n}x^{2n-2}$ 的和函数，并求级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n-1}{2^{2n-1}}$ 的和.

解：令 $S(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n-1}{2^n}x^{2n-2}$，则其的定义区间为 $(-\sqrt{2},\sqrt{2})$. $\forall x\in(-\sqrt{2},\sqrt{2})$，

$\int_0^x S(t)dt=\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^x\frac{2n-1}{2^n}t^{2n-2}dt=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n-1}}{2^n}=\frac{x}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{x^2}{2}\right)^{n-1}=\frac{x}{2-x^2}$. ……………………2 分

于是，$S(x)=\left(\frac{x}{2-x^2}\right)'=\frac{2+x^2}{(2-x^2)^2}$， $x\in(-\sqrt{2},\sqrt{2})$. ……………………………4 分

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n-1}{2^{2n-1}}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n-1}{2^n}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{2n-2}=S\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=\frac{10}{9}$. ……………………………………6 分

二、（本题 2 两问，每问 8 分，共 16 分）设 $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ 为数列，a,λ 为有限数，求证：

1. 如果 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}=a$；

2. 如果存在正整数 p，使得 $\lim\limits_{n\to\infty}(a_{n+p}-a_n)=\lambda$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{n}=\frac{\lambda}{p}$.

证明：1. 由 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$，$\exists M>0$ 使得 $|a_n|\le M$，且 $\forall\varepsilon>0,\exists N_1\in\mathbb{N}$，当 $n>N_1$ 时，

$$|a_n-a|<\frac{\varepsilon}{2}.$$ ……………………………………………4 分

因为 $\exists N_2>N_1$，当 $n>N_2$ 时，$\frac{N_1(M+|a|)}{n}<\frac{\varepsilon}{2}$.

于是，$\left|\frac{a_1+\cdots+a_n}{n}-a\right|\le\frac{N_1(M+|a|)}{n}\frac{\varepsilon}{2}+\frac{(n-N_1)}{n}\frac{\varepsilon}{2}<\varepsilon$，

所以， $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}=a$. ……………………………………………8 分

2. 对于 $i=0,1,\cdots,p-1$，令 $A_n^{(i)}=a_{(n+1)p+i}-a_{np+i}$，易知 $\{A_n^{(i)}\}$ 为 $\{a_{n+p}-a_n\}$ 的子列.

由 $\lim\limits_{n\to\infty}(a_{n+p}-a_n)=\lambda$，知 $\lim\limits_{n\to\infty}A_n^{(i)}=\lambda$，从而 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{A_1^{(i)}+A_2^{(i)}+\cdots+A_n^{(i)}}{n}=\lambda$.

而 $A_1^{(i)}+A_2^{(i)}+\cdots+A_n^{(i)}=a_{(n+1)p+i}-a_{p+i}$. 所以，$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_{(n+1)p+i}-a_{p+i}}{n}=\lambda$.

由 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_{p+i}}{n}=0$. 知 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_{(n+1)p+i}}{n}=\lambda$. ……………………………………………12 分

从而 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_{(n+1)p+i}}{(n+1)p+i}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{(n+1)p+i}\cdot\dfrac{a_{(n+1)p+i}}{n}=\dfrac{\lambda}{p}$

$\forall m\in\mathbb{N},\exists n,p,i\in\mathbb{N}$，$(0\le i\le p-1)$，使得 $m=np+i$，且当 $m\to\infty$ 时，$n\to\infty$.

所以，$\lim\limits_{m\to\infty}\dfrac{a_m}{m}=\dfrac{\lambda}{p}$. ……………………………………………………………16 分

三、（15 分）设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[-1,1]$ 上具有连续的三阶导数，且 $f(-1)=0$，$f(1)=1$，$f'(0)=0$.

求证：在开区间 $(-1,1)$ 内至少存在一点 x_0，使得 $f'''(x_0)=3$

证. 由马克劳林公式，得

$f(x)=f(0)+\dfrac{1}{2!}f''(0)x^2+\dfrac{1}{3!}f'''(\eta)x^3$，$\eta$ 介于 0 与 x 之间，$x\in[-1,\ 1]$…3 分

在上式中分别取 $x=1$ 和 $x=-1$，得

$1=f(1)=f(0)+\dfrac{1}{2!}f''(0)+\dfrac{1}{3!}f'''(\eta_1)$， $0<\eta_1<1$. ………………………5 分

$0=f(-1)=f(0)+\dfrac{1}{2!}f''(0)-\dfrac{1}{3!}f'''(\eta_2)$， $-1<\eta_2<0$. ………………………7 分

两式相减，得 $f'''(\eta_1)+f'''(\eta_2)=6$. ………………………10 分

由于 $f'''(x)$ 在闭区间 $[-1,1]$ 上连续，因此 $f'''(x)$ 在闭区间 $[\eta_2,\eta_1]$ 上有最大值 M 最小值 m，从而

$m\le\dfrac{1}{2}(f'''(\eta_1)+f'''(\eta_2))\le M$ …………………………………13 分

再由连续函数的介值定理，至少存在一点 $x_0\in[\eta_2,\eta_1]\subset(-1,1)$，使得

$f'''(x_0)=\dfrac{1}{2}(f'''(\eta_1)+f'''(\eta_2))=3$. ………………………15 分

四、（15 分）在平面上，有一条从点$(a,0)$向右的射线, 线密度为ρ．在点$(0,h)$处（其中 $\boldsymbol{h>0}$）有一质量为m 的质点．求射线对该质点的引力.

解：在x轴的x处取一小段dx，其质量是ρdx，到质点的距离为$\sqrt{h^2+x^2}$，这一小段与质点的引力是 $dF=\dfrac{Gm\rho dx}{h^2+x^2}$（其中 G 为引力常数）．　　　　…………………5 分

这个引力在水平方向的分量为$dF_x=\dfrac{Gm\rho xdx}{(h^2+x^2)^{3/2}}$．从而

$$F_x=\int_a^{+\infty}\frac{Gm\rho xdx}{(h^2+x^2)^{3/2}}=\frac{Gm\rho}{2}\int_a^{+\infty}\frac{d(x^2)}{(h^2+x^2)^{3/2}}=-Gm\rho(h^2+x^2)^{-1/2}\Big|_a^{+\infty}=\frac{Gm\rho}{\sqrt{h^2+a^2}}$$

……10 分

而dF 在竖直方向的分量为$dF_y=\dfrac{Gm\rho hdx}{(h^2+x^2)^{3/2}}$，故

$$F_y=\int_a^{+\infty}\frac{Gm\rho hdx}{(h^2+x^2)^{3/2}}=\int_{\arctan\frac{a}{h}}^{\pi/2}\frac{Gm\rho h^2\sec^2 dt}{h^3\sec^3 t}=\frac{Gm\rho}{h}\int_{\arctan\frac{a}{h}}^{\pi/2}\cos tdt=\frac{Gm\rho}{h}\left(1-\sin\arctan\frac{a}{h}\right)$$

所求引力向量为$\mathbf{F}=(F_x,F_y)$．　　　　…………………………15 分

五、（15 分）设$z=z(x,y)$是由方程$F(z+\frac{1}{x},z-\frac{1}{y})=0$确定的隐函数，其中 F具有连续的二阶偏导数，且$F_u(u,v)=F_v(u,v)\neq 0$. 求证：$x^2\dfrac{\partial z}{\partial x}+y^2\dfrac{\partial z}{\partial y}=0$和$x^3\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}+xy(x+y)\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}+y^3\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$.

解：在方程$F(z+\frac{1}{x},z-\frac{1}{y})=0$两边分别关于$x$、$y$求偏导，得

$(\dfrac{\partial z}{\partial x}-\dfrac{1}{x^2})F_u+\dfrac{\partial z}{\partial x}F_v=0$，$\dfrac{\partial z}{\partial y}F_u+(\dfrac{\partial z}{\partial y}+\dfrac{1}{y^2})F_v=0$.　　　…………………5 分

由此解得，$\dfrac{\partial z}{\partial x}=\dfrac{F_u}{x^2(F_u+F_v)},\dfrac{\partial z}{\partial y}=\dfrac{-F_v}{y^2(F_u+F_v)}$

所以，$x^2\dfrac{\partial z}{\partial x}+y^2\dfrac{\partial z}{\partial y}=0$　　　…………………………10 分

对上式两边关于x和y分别求偏导，得

$$x^2\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+y^2\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}=-2x\frac{\partial z}{\partial x},\quad x^2\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}+y^2\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=-2y\frac{\partial z}{\partial y}$$

上面第一式乘以 x 加上第二式乘以 y，并注意到 $x^2\dfrac{\partial z}{\partial x}+y^2\dfrac{\partial z}{\partial y}=0$，得到

$$x^3\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+xy(x+y)\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}+y^3\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$$ ……………………………………………15 分

六、（15 分）设函数 $f(x)$ 连续，a,b,c 为常数，Σ 是单位球面 $x^2+y^2+z^2=1$．记第一型曲面积分 $I=\iint\limits_{\Sigma} f(ax+by+cz)dS$．求证：$I=2\pi\int_{-1}^{1} f(\sqrt{a^2+b^2+c^2}\,u)du$

解：由 Σ 的面积为 4π 可见：当 a,b,c 都为零时，等式成立. ……………………2 分

当它们不全为零时，可知：原点到平面 $ax+by+cz+d=0$ 的距离是

$$\frac{|d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}.$$ ……………………………5 分

设平面 $P_u: u=\dfrac{ax+by+cz}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$，其中 u 固定. 则 $|u|$ 是原点到平面 P_u 的距离，从而

$-1\le u\le 1$. ……………………………8 分

两平面 P_u 和 P_{u+du} 截单位球 Σ 的截下的部分上，被积函数取值为

$f\left(\sqrt{a^2+b^2+c^2}\,u\right)$. ……………………………10 分

这部分摊开可以看成一个细长条. 这个细长条的长是 $2\pi\sqrt{1-u^2}$，宽是 $\dfrac{du}{\sqrt{1-u^2}}$，它的面积是 $2\pi du$，故我们得证. ……………………………15 分

第二届中国大学生数学竞赛预赛试卷

参考答案及评分标准

（非数学类，2010）

一（本题共 5 小题，每小题 5 分，共 25 分）、计算下列各题（要求写出重要步骤）.

(1) 设 $x_n = (1+a)\cdot(1+a^2)\cdots(1+a^{2^n})$，其中 $|a|<1$，求 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$.

解 将 x_n 恒等变形

$$x_n = (1-a)(1+a)\cdot(1+a^2)\cdots(1+a^{2^n})\frac{1}{1-a} = (1-a^2)\cdot(1+a^2)\cdots(1+a^{2^n})\frac{1}{1-a}$$

$$= (1-a^4)\cdot(1+a^4)\cdots(1+a^{2^n})\frac{1}{1-a} = \frac{1-a^{2^{n+1}}}{1-a},$$

由于 $|a|<1$，可知 $\lim\limits_{n\to\infty} a^{2^n} = 0$，从而

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \frac{1}{1-a}.$$

(2) 求 $\lim\limits_{x\to\infty} e^{-x}\left(\mathbf{1}+\frac{\mathbf{1}}{x}\right)^{x^2}$.

解 $\lim\limits_{x\to\infty} e^{-x}\left(\mathbf{1}+\frac{\mathbf{1}}{x}\right)^{x^2} = \lim\limits_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{x}\right)^x e^{-1}\right]^x$

$$= \exp\left(\lim_{x\to\infty}\left[\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)^x - 1\right]x\right) = \exp\left(\lim_{x\to\infty} x\left[x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)-1\right]\right)$$

$$= \exp\left(\lim_{x\to\infty} x\left[x\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{2x^2}+o(\frac{1}{x^2})\right)-1\right]\right) = e^{-\frac{1}{2}}.$$

(3) 设 $s>0$，求 $I_n = \int_0^{+\infty} e^{-sx}x^n dx\ (n=1,2,\cdots)$.

解 因为 $s>0$ 时，$\lim\limits_{x\to+\infty} e^{-sx}x^n = 0$，所以，

$$I_n = -\frac{1}{s}\int_0^{+\infty} x^n de^{-sx} = -\frac{1}{s}\left[x^n e^{-sx}\Big|_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} e^{-sx}dx^n\right] = \frac{n}{s}I_{n-1}$$

由此得到，$I_n = \frac{n}{s}I_{n-1} = \frac{n}{s}\cdot\frac{n-1}{s}I_{n-2} = \cdots = \frac{n!}{s^n}I_0 = \frac{n!}{s^{n+1}}$

(4) 设函数$f(t)$有二阶连续的导数，$r=\sqrt{x^2+y^2}$，$g(x,y)=f(\frac{1}{r})$，求$\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 g}{\partial y^2}$.

解 因为$\frac{\partial r}{\partial x}=\frac{x}{r},\frac{\partial r}{\partial y}=\frac{y}{r}$，所以

$$\frac{\partial g}{\partial x}=-\frac{x}{r^3}f'(\frac{1}{r}),\quad \frac{\partial^2 g}{\partial x^2}=\frac{x^2}{r^6}f''(\frac{1}{r})+\frac{2x^2-y^2}{r^5}f'(\frac{1}{r}).$$

利用对称性，$\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 g}{\partial y^2}=\frac{1}{r^4}f''(\frac{1}{r})+\frac{1}{r^3}f'(\frac{1}{r})$

(5) 求直线$l_1:\begin{cases}x-y=0\\ z=0\end{cases}$ 与直线$l_2:\frac{x-2}{4}=\frac{y-1}{-2}=\frac{z-3}{-1}$的距离.

解 直线l_1的对称式方程为$l_1:\frac{x}{1}=\frac{y}{1}=\frac{z}{0}$. 记两直线的方向向量分别为

$\vec{l_1}=(1,1,0)$，$\vec{l_2}=(4,-2,-1)$，两直线上的定点分别为$P_1(0,0,0)$和$P_2(2,1,3)$，

$\vec{a}=\overrightarrow{P_1P_2}=(2,1,3)$.

$\vec{l_1}\times\vec{l_2}=(-1,1,-6)$. 由向量的性质可知，两直线的距离

$$d=\left|\frac{\vec{a}\cdot(\vec{l_1}\times\vec{l_2})}{\left|\vec{l_1}\times\vec{l_2}\right|}\right|=\frac{|-2+1-18|}{\sqrt{1+1+36}}=\frac{19}{\sqrt{38}}=\sqrt{\frac{19}{2}}$$

二（本题共 15 分）、 设函数$f(x)$在$(-\infty,+\infty)$上具有二阶导数，并且

$f''(x)>0,\ \lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)=\alpha>0$，$\lim\limits_{x\to-\infty}f'(x)=\beta<0$，且存在一点$x_0$，使得$f(x_0)<0$.

证明：方程$f(x)=0$在$(-\infty,+\infty)$恰有两个实根.

证 1. 由$\lim\limits_{x\to-\infty}f'(x)=\alpha>0$必有一个充分大的$a>x_0$，使得$f'(a)>0$.

$f''(x)>0$知$y=f(x)$是凹函数，从而$f(x)>f(a)+f'(a)(x-a)\quad (x>a)$

当$x\to+\infty$时，$f(+\infty)+f'(a)(x-a)\to+\infty$.

故存在$b>a$，使得

$f(b)>f(a)+f'(a)(b-a)>0$ .... （6 分）

同样，由 $\lim\limits_{x\to-\infty} f'(x)=\beta<0$，必有 $c<x_0$，使得 $f'(c)<0$.

$f''(x)>0$ 知 $y=f(x)$ 是凹函数，从而 $f(x)>f(c)+f'(c)(x-c) \quad (x<c)$

当 $x\to-\infty$ 时， $f(-\infty)+f'(c)(x-c)\to+\infty$.

故存在 $d<c$，使得

$f(d)>f(c)+f'(c)(d-c)>0$ .... （10 分）

在 $[x_0,b]$ 和 $[d,x_0]$ 利用零点定理， $\exists x_1\in(x_0,b)$ ， $x_2\in(d,x_0)$ 使得

$f(x_1)=f(x_2)=0$ .... （12 分）

下面证明方程 $f(x)=0$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 只有两个实根.

用反证法. 假设方程 $f(x)=0$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内有三个实根，不妨设为 x_1,x_2,x_3，且 $x_1<x_2<x_3$. 对 $f(x)$ 在区间 $[x_1,x_2]$ 和 $[x_2,x_3]$ 上分别应用洛尔定理，则各至少存在一点 ξ_1（$x_1<\xi_1<x_2$）和 ξ_2（$x_2<\xi_2<x_3$），使得 $f'(\xi_1)=f'(\xi_2)=0$. 再将 $f'(x)$ 在区间 $[\xi_1,\xi_2]$ 上使用洛尔定理，则至少存在一点 $\eta(\xi_1<\eta<\xi_2)$，使 $f''(\eta)=0$. 此与条件 $f''(x)>0$ 矛盾. 从而方程 $f(x)=0$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 不能多于两个根. ....（15 分）

证 2. 先证方程 $f(x)=0$ 至少有两个实根.

由 $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x)=\alpha>0$，必有一个充分大的 $a>x_0$，使得 $f'(a)>0$.

因 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上具有二阶导数，故 $f'(x)$ 及 $f''(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 均连续. 由拉格朗日中值定理，对于 $x>a$ 有

$$f(x)-[f(a)+f'(a)(x-a)]=f(x)-f(a)-f'(a)(x-a)]$$

$$=f'(\xi)(x-a)-f'(a)(x-a)=[f'(\xi)-f'(a)](x-a)$$

$$=f''(\eta)(\xi-a)(x-a).$$

其中 $a<\xi<x,\quad a<\eta<x$. 注意到 $f''(\eta)>0$（因为 $f''(x)>0$），则

$$f(x) > f(a) + f'(a)(x-a) \qquad (x > a)$$

又因 $f'(a) > 0$, 故存在 $b > a$，使得

$$f(b) > f(a) + f'(a)(b-a) > 0$$ ....（6 分）

又已知 $f(x_0) < 0$，由连续函数的中间值定理，至少存在一点 $x_1 (x_0 < x_1 < b)$ 使得

$f(x_1) = 0$. 即方程 $f(x) = 0$ 在 $(x_0, +\infty)$ 上至少有一个根 x_1 ....（7 分）

同理可证方程 $f(\mathrm{x}) = 0$ 在 $(-\infty, x_0)$ 上至少有一个根 x_2. ....（12 分）

下面证明方程 $f(x) = 0$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 只有两个实根.（以下同证 1）.......（15 分）

三（本题共 15 分）、设函数 $y = f(x)$ 由参数方程 $\begin{cases} x = 2t + t^2 \\ y = \psi(t) \end{cases}$ $(t > -1)$ 所确定. 且 $\dfrac{d^2y}{dx^2} = \dfrac{3}{4(1+t)}$，其中 $\psi(t)$ 具有二阶导数，曲线 $y = \psi(t)$ 与 $y = \int_1^{t^2} e^{-u^2} du + \dfrac{3}{2e}$ 在 $t = 1$ 处相切. 求函数 $\psi(t)$.

解　因为 $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{\psi'(t)}{2+2t}$， $\dfrac{d^2y}{dx^2} = \dfrac{1}{2+2t} \cdot \dfrac{(2+2t)\psi''(t) - 2\psi'(t)}{(2+2t)^2} = \dfrac{(1+t)\psi''(t) - \psi'(t)}{4(1+t)^3}$，

..................（3 分）

由题设 $\dfrac{d^2y}{dx^2} = \dfrac{3}{4(1+t)}$，故 $\dfrac{(1+t)\psi''(t) - \psi'(t)}{4(1+t)^3} = \dfrac{3}{4(1+t)}$，从而 $(1+t)\psi''(t) - \psi'(t) = 3(1+t)^2$，即 $\psi''(t) - \dfrac{1}{1+t}\psi'(t) = 3(1+t).$

设 $u = \psi'(t)$，则有 $u' - \dfrac{1}{1+t}u = 3(1+t)$，

$$u = e^{\int \frac{1}{1+t} dt} \left[\int 3(1+t) e^{-\int \frac{1}{1+t} dt} dt + C_1 \right] = (1+t) \left[\int 3(1+t)(1+t)^{-1} dt + C_1 \right] = (1+t)(3t + C_1).$$

............（9 分）

由曲线 $y = \psi(t)$ 与 $y = \int_1^{t^2} e^{-u^2} du + \dfrac{3}{2e}$ 在 $t = 1$ 处相切知 $\psi(1) = \dfrac{3}{2e}$，$\psi'(1) = \dfrac{2}{e}$. ....（11 分）

所以$u\big|_{t=1}=\psi'(1)=\dfrac{2}{e}$，知$C_1=\dfrac{1}{e}-3$.

$\psi(t)=\int(1+t)(3t+C_1)dt=\int(3t^2+(3+C_1)t+C_1)dt=t^3+\dfrac{3+C_1}{2}t^2+C_1t+C_2$，由$\psi(1)=\dfrac{3}{2e}$，知$C_2=2$，于是$\psi(t)=t^3+\dfrac{1}{2e}t^2+(\dfrac{1}{e}-3)t+2\ (t>-1)$. ...（15 分）

四（本题共 15 分）、设 $a_n>0,\ S_n=\sum\limits_{k=1}^{n}a_k$，证明：

（1）当$\alpha>1$时，级数$\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{a_n}{S_n^{\alpha}}$收敛；

（2）当$\alpha\le 1$，且$S_n\to\infty$（$n\to\infty$）时，级数$\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{a_n}{S_n^{\alpha}}$发散.

证明 令$f(x)=x^{1-\alpha},x\in[S_{n-1},S_n]$. 将$f(x)$在区间$[S_{n-1},S_n]$上用拉格朗日中值定理，

存在$\xi\in(S_{n-1},S_n)$

$$f(S_n)-f(S_{n-1})=f'(\xi)(S_n-S_{n-1})$$

即$S_n^{1-\alpha}-S_{n-1}^{1-\alpha}=(1-\alpha)\xi^{-\alpha}a_n$ ....（5 分）

（1）当$\alpha>1$时，$\dfrac{1}{S_{n-1}^{\alpha-1}}-\dfrac{1}{S_n^{\alpha-1}}=(\alpha-1)\dfrac{a_n}{\xi^{\alpha}}\ge(\alpha-1)\dfrac{a_n}{S_n^{\alpha}}$. 显然$\left\{\dfrac{1}{S_{n-1}^{\alpha-1}}-\dfrac{1}{S_n^{\alpha-1}}\right\}$的前 n 项和有界，从而收敛，所以级数$\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{a_n}{S_n^{\alpha}}$收敛. ....（8 分）

（2）当$\alpha=1$时，因为$a_n>0$，S_n单调递增，所以

$$\sum_{k=n+1}^{n+p}\frac{a_k}{S_k}\ge\frac{1}{S_{n+p}}\sum_{k=n+1}^{n+p}a_k=\frac{S_{n+p}-S_n}{S_{n+p}}=1-\frac{S_n}{S_{n+p}}$$

因为$S_n\to+\infty$对任意 n，当$p\in\mathbb{N}$ $\dfrac{S_n}{S_{n+p}}<\dfrac{1}{2}$，从而$\sum\limits_{k=n+1}^{n+p}\dfrac{a_k}{S_k}\ge\dfrac{1}{2}$. 所以级数$\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{a_n}{S_n^{\alpha}}$ 发散. ....（12 分）

当$\alpha<1$时，$\dfrac{a_n}{S_n^{\alpha}}\ge\dfrac{a_n}{S_n}$. 由$\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{a_n}{S_n}$发散及比较判别法，$\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{a_n}{S_n^{\alpha}}$发散..........（15 分）

五（本题共 15 分）、设 l 是过原点，方向为 (α,β,γ)（其中 $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2=1$）的直线，均匀椭球 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\le 1$（其中 $0<c<b<a$ ，密度为 1）绕 l 旋转.

(1) 求其转动惯量；(2) 求其转动惯量关于方向 (α,β,γ) 的最大值和最小值.

解 (1) 设旋转轴 l 的方向向量为 $\mathbf{l}=(\alpha,\beta,\gamma)$，椭球内任意一点 P$(x,y,z)$的径向量为 $\mathbf{r}$，则点 P 到旋转轴 l 的距离的平方为

$$d^2=\mathbf{r}^2-(\mathbf{r}\cdot\mathbf{l})^2=(1-\alpha^2)x^2+(1-\beta^2)y^2+(1-\gamma^2)z^2-2\alpha\beta xy-2\beta\gamma yz-2\alpha\gamma xz$$

由积分区域的对称性可知

$$\iiint\limits_{\Omega}(2\alpha\beta xy+2\beta\gamma yz+2\alpha\gamma xz)dxdydz=0\text{，其中}\Omega=\left\{(x,y,z)\left|\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\le 1\right.\right\}$$

..................（2 分）

而 $\iiint\limits_{\Omega}x^2dxdydz=\int_{-a}^{a}x^2dx\iint_{\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\le 1-\frac{x^2}{a^2}}dydz=\int_{-a}^{a}x^2\cdot\pi bc\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)dx=\frac{4a^3bc\pi}{15}$

（或 $\iiint\limits_{\Omega}x^2dxdydz=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\pi}d\varphi\int_0^1 a^2r^2\sin^2\varphi\cos^2\theta\cdot abcr^2\sin\varphi dr=\frac{4a^3bc\pi}{15}$）

$\iiint\limits_{\Omega}y^2dxdydz=\frac{4ab^3c\pi}{15}$，$\iiint\limits_{\Omega}z^2dxdydz=\frac{4abc^3\pi}{15}$ ....（5 分）

由转到惯量的定义

$J_l=\iiint\limits_{\Omega}d^2dxdydz=\frac{4abc\pi}{15}\left((1-\alpha^2)a^2+(1-\beta^2)b^2+(1-\gamma^2)c^2\right)$...............（6 分）

(2) 考虑目标函数 $V(\alpha,\beta,\gamma)=(1-\alpha^2)a^2+(1-\beta^2)b^2+(1-\gamma^2)c^2$ 在约束 $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2=1$ 下的条件极值.

设拉格朗日函数为

$$L(\alpha,\beta,\gamma,\lambda)=(1-\alpha^2)a^2+(1-\beta^2)b^2+(1-\gamma^2)c^2+\lambda(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2-1)$$

.....................（8 分）

令 $L_\alpha=2\alpha(\lambda-a^2)=0$，$L_\beta=2\beta(\lambda-b^2)=0$，$L_\gamma=2\gamma(\lambda-c^2)=0$，

$L_\lambda=\alpha^2+\beta^2+\gamma^2-1=0$

解得极值点为 $Q_1(\pm1,0,0,a^2)$，$Q_2(0,\pm1,0,b^2)$，$Q_3(0,0,\pm1,c^2)$ ....（12 分）

比较可知，绕 z 轴（短轴）的转动惯量最大，为 $J_{\max}=\dfrac{4abc\pi}{15}\left(a^2+b^2\right)$；绕

x 轴（长轴）的转动惯量最小，为 $J_{\min}=\dfrac{4abc\pi}{15}\left(b^2+c^2\right)$. ....（15 分）

六（本题共 15 分）、设函数 $\varphi(x)$ 具有连续的导数，在围绕原点的任意光滑的简单闭曲线 C 上，曲线积分 $\oint_C \dfrac{2xydx+\varphi(x)dy}{x^4+y^2}$ 的值为常数.

(1) 设 L 为正向闭曲线 $(x-2)^2+y^2=1$. 证明: $\oint_L \dfrac{2xydx+\varphi(x)dy}{x^4+y^2}=0$；

(2) 求函数 $\varphi(x)$；

(3) 设 C 是围绕原点的光滑简单正向闭曲线，求 $\oint_C \dfrac{2xydx+\varphi(x)dy}{x^4+y^2}$.

解 (1) 设 $\oint_L \dfrac{2xydx+\varphi(x)dy}{x^4+y^2}=I$，闭曲线 L 由 $L_i,i=1,2$ 组成. 设 L_0 为不经过原点的光滑曲线，使得 $L_0\cup L_1^-$（其中 L_1^- 为 L_1 的反向曲线）和 $L_0\cup L_2$ 分别组成围绕原点的分段光滑闭曲线 $C_i,i=1,2$. 由曲线积分的性质和题设条件

$$\oint_L \frac{2xydx+\varphi(x)dy}{x^4+y^2}=\int_{L_1}+\int_{L_2}\frac{2xydx+\varphi(x)dy}{x^4+y^2}=\int_{L_2}+\int_{L_0}-\int_{L_0}-\int_{L_1^-}\frac{2xydx+\varphi(x)dy}{x^4+y^2}$$

$$=\oint_{C_1}+\oint_{C_2}\frac{2xydx+\varphi(x)dy}{x^4+y^2}=I-I=0$$ ....（5 分）

(2) 设 $P(x,y)=\dfrac{2xy}{x^4+y^2},Q(x,y)=\dfrac{\varphi(x)}{x^4+y^2}$.

令 $\dfrac{\partial Q}{\partial x}=\dfrac{\partial P}{\partial y}$，即 $\dfrac{\varphi'(x)(x^4+y^2)-4x^3\varphi(x)}{(x^4+y^2)^2}=\dfrac{2x^5-2xy^2}{(x^4+y^2)^2}$，解得

$\varphi(x)=-x^2$ ....（10 分）

(3) 设 D 为正向闭曲线 $C_a: x^4+y^2=1$ 所围区域，由(1)

$$\oint_C \frac{2xydx+\varphi(x)dy}{x^4+y^2}=\oint_{C_a}\frac{2xydx-x^2dy}{x^4+y^2}$$ …………………（12 分）

利用 Green 公式和对称性，

$$\oint_{C_a} \frac{2xydx+\varphi(x)dy}{x^4+y^2}=\oint_{C_a} 2xydx-x^2dy=\iint_D(-4x)dxdy=0$$ …………………（15 分）

首届中国大学生数学竞赛赛区赛试卷解答

（非数学类，2009）

考试形式：闭卷　　考试时间：120 分钟　　满分：100 分.

题 号	一	二	三	四	五	六	七	八	总分
满 分	20	5	15	15	10	10	15	10	100
得 分									

注意：1、所有答题都须写在此试卷纸密封线右边，写在其它纸上一律无效.

2、密封线左边请勿答题，密封线外不得有姓名及相关标记.

专业：______ 年级：______ 所在院校：______ 身份证号：______ 姓名：______

密 —— 封 —— 线

得 分	
评阅人	

一、　填空题（每小题 5 分，共 20 分）.

（1）计算 $\iint_D \frac{(x+y)\ln\left(1+\frac{y}{x}\right)}{\sqrt{1-x-y}}dxdy=$______________，其中区域 D 由直线 $x+y=1$ 与两坐标轴所围三角形区域.

（2）设 $f(x)$ 是连续函数，满足 $f(x)=3x^2-\int_0^2 f(x)dx-2$，则 $f(x)=$____________________.

（3）曲面 $z=\frac{x^2}{2}+y^2-2$ 平行平面 $2x+2y-z=0$ 的切平面方程是__________________________.

（4）设函数 $y=y(x)$ 由方程 $xe^{f(y)}=e^y\ln 29$ 确定，其中 f 具有二阶导数，且 $f'\neq 1$，则 $\frac{d^2y}{dx^2}=$_____________________.

答案：$\frac{16}{15}$，$3x^2-\frac{10}{3}$，$2x+2y-z-5=0$，$-\frac{[1-f'(y)]^2-f''(y)}{x^2[1-f'(y)]^3}$.

得　分	
评阅人	

二、（5 分）求极限 $\lim\limits_{x\to 0}(\dfrac{e^x+e^{2x}+\cdots+e^{nx}}{n})^{\frac{e}{x}}$ ，其中 n 是给定的正整数.

解：原式$=\lim\limits_{x\to 0}\exp\{\dfrac{e}{x}\ln(\dfrac{e^x+e^{2x}+\cdots+e^{nx}}{n})\}$

$$=\exp\{\lim_{x\to 0}\frac{e(\ln(e^x+e^{2x}+\cdots+e^{nx})-\ln n)}{x}\} \quad \text{……………………………（2 分）}$$

其中大括号内的极限是 $\dfrac{0}{0}$ 型未定式，由 $L'Hospital$ 法则，有

$$\lim_{x\to 0}\frac{e(\ln(e^x+e^{2x}+\cdots+e^{nx})-\ln n)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{e(e^x+2e^x+\cdots+ne^{nx})}{e^x+e^{2x}+\cdots+e^{nx}}$$

$$=\frac{e(1+2+\cdots+n)}{n}=(\frac{n+1}{2})e$$

于是　原式$=e^{(\frac{n+1}{2})e}$.　　……………………………………………………(5 分)

得　分	
评阅人	

三、（15 分）设函数 $f(x)$ 连续，$g(x)=\int_0^1 f(xt)dt$，且 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=A$，$A$ 为常数，求 $g'(x)$ 并讨论 $g'(x)$ 在 $x=0$ 处的连续性.

解：由题设，知 $f(0)=0$，$g(0)=0$.　　…………………………………(2 分)

令 $u=xt$，得 $g(x)=\dfrac{\int_0^x f(u)du}{x}$　$(x\neq 0)$，……………………………………………（5 分）

从而　$g'(x)=\dfrac{xf(x)-\int_0^x f(u)du}{x^2}$　$(x\neq 0)$ ………………………………………………(8 分)

由导数定义有

$$g'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^x f(u)du}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{2x}=\frac{A}{2} \quad \text{…………………………………………(11 分)}$$

由于 $\lim\limits_{x\to 0}g'(x)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{xf(x)-\int_0^x f(u)du}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}-\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^x f(u)du}{x^2}=A-\dfrac{A}{2}=\dfrac{A}{2}=g'(0)$，

从而知 $g'(x)$ 在 $x=0$ 处连续.　……………………………………………………….(15 分)

姓名：______ 身份证号：______ 所在院校：______ 年级：______ 专业：______

密 封 线

得　分	
评阅人	

四、（15 分）已知平面区域 $D=\{(x,y)\,|\,0\le x\le\pi\ ,0\le y\le\pi\}$ ，L 为 D 的正向边界，试证：

（1）$\oint\limits_L xe^{\sin y}dy-ye^{-\sin x}dx=\oint\limits_L xe^{-\sin y}dy-ye^{\sin x}dx$ ；

（2）$\oint\limits_L xe^{\sin y}dy-ye^{-\sin x}dx\ge\dfrac{5}{2}\pi^2$.

证法一：由于区域 D 为一正方形，可以直接用对坐标曲线积分的计算法计算.

(1) 左边 $=\int_0^{\pi}\pi e^{\sin y}dy-\int_{\pi}^{0}\pi e^{-\sin x}dx=\pi\int_0^{\pi}(e^{\sin x}+e^{-\sin x})dx$ ， ......(4 分)

右边 $=\int_0^{\pi}\pi e^{-\sin y}dy-\int_{\pi}^{0}\pi e^{\sin x}dx=\pi\int_0^{\pi}(e^{\sin x}+e^{-\sin x})dx$ ， ....（8 分）

所以 $\oint\limits_L xe^{\sin y}dy-ye^{-\sin x}dx=\oint\limits_L xe^{-\sin y}dy-ye^{\sin x}dx$ . ...(10 分)

(2) 由于 $e^{\sin x}+e^{-\sin x}\ge 2+\sin^2 x$ ， ....(12 分)

$\oint\limits_L xe^{\sin y}dy-ye^{-\sin x}dx=\pi\int_0^{\pi}(e^{\sin x}+e^{-\sin x})dx\ge\dfrac{5}{2}\pi^2$ . ...(15 分)

证法二：（1）根据 $Green$ 公式，将曲线积分化为区域 D 上的二重积分

$\oint\limits_L xe^{\sin y}dy-ye^{-\sin x}dx=\iint\limits_D(e^{\sin y}+e^{-\sin x})d\delta$ .... (4 分)

$\oint\limits_L xe^{-\sin y}dy-ye^{\sin x}dx=\iint\limits_D(e^{-\sin y}+e^{\sin x})d\delta$ ....(8 分)

因为 关于 $y=x$ 对称，所以 $\iint\limits_D(e^{\sin y}+e^{-\sin x})d\delta=\iint\limits_D(e^{-\sin y}+e^{\sin x})d\delta$ ，故

$\oint\limits_L xe^{\sin y}dy-ye^{-\sin x}dx=\oint\limits_L xe^{-\sin y}dy-ye^{\sin x}dx$ . ... (10 分)

(2) 由 $e^t+e^{-t}=2\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{t^{2n}}{(2n)!}\ge 2+t^2$

$$\oint\limits_L xe^{\sin y}dy-ye^{-\sin x}dx=\iint\limits_D(e^{\sin y}+e^{-\sin x})d\delta=\iint\limits_D(e^{\sin x}+e^{-\sin x})d\delta\ge\frac{5}{2}\pi^2 .$$

......................(15 分)

得　分	
评阅人	

五、（10 分）已知 $y_1 = xe^x + e^{2x}$，$y_2 = xe^x + e^{-x}$，$y_3 = xe^x + e^{2x} - e^{-x}$ 是某二阶常系数线性非齐次微分方程的三个解，试求此微分方程.

解：根据二阶线性非齐次微分方程解的结构的有关知识，由题设可知：e^{2x} 与 e^{-x} 是相应齐次方程两个线性无关的解，且 xe^x 是非齐次的一个特解.因此可以用下述两种解法 ……………………………………………………..……(6 分)

解法一：故此方程式 $y'' - y' - 2y = f(x)$ ……………….……..……..……(8 分)

将 $y = xe^x$ 代入上式，得

$f(x) = (xe^x)'' - (xe^x)' - 2xe^x = 2e^x + xe^x - e^x - xe^x - 2xe^x = e^x - 2xe^x$，

因此所求方程为 $y'' - y' - 2y = e^x - 2xe^x$. ……………………………………… …(10 分)

解法二：故 $y = xe^x + c_1 e^{2x} + c_2 e^{-x}$，是所求方程的通解，……………………(8 分)

由 $y' = e^x + xe^x + 2c_1 e^{2x} - c_2 e^{-x}$，$y'' = 2e^x + xe^x + 4c_1 e^{2x} + c_2 e^{-x}$，消去 c_1, c_2 得所求方程为 $y'' - y' - 2y = e^x - 2xe^x$. ……………………………………………………...…(10 分)

得　分	
评阅人	

六、（10 分）设抛物线 $y = ax^2 + bx + 2\ln c$ 过原点，当 $0 \le x \le 1$ 时，$y \ge 0$，又已知该抛物线与 x 轴及直线 $x = 1$ 所围图形的面积为 $\frac{1}{3}$. 试确定 a, b, c，使此图形绕 x 轴旋转一周而成的旋转体的体积 V 最小.

解：因抛物线过原点，故 $c = 1$

由题设有 $\int_0^1 (ax^2 + bx)dx = \frac{a}{3} + \frac{b}{2} = \frac{1}{3}$.即 $b = \frac{2}{3}(1-a)$，………..……………..…(2 分)

而 $V = \pi\int_0^1 (ax^2 + bx)^2 dx = \pi[\frac{1}{5}a^2 + \frac{1}{2}ab + \frac{1}{3}b^2]$

$= \pi[\frac{1}{5}a^2 + \frac{1}{3}a(1-a) + \frac{1}{3}\cdot\frac{4}{9}(1-a)^2]$. …………………………….……….…(5 分)

令 $\frac{dv}{da} = \pi[\frac{2}{5}a + \frac{1}{3} - \frac{2}{3}a - \frac{8}{27}(1-a)] = 0$，

得 $a = -\frac{5}{4}$，代入 b 的表达式 得 $b = \frac{3}{2}$. 所以 $y \ge 0$，……………..…………(8 分)

专业：________ 年级：________ 所在院校：________ 身份证号：________ 姓名：________

密 封 线

又因 $\frac{d^2v}{da^2}|_{a=-\frac{5}{4}}=\pi[\frac{2}{5}-\frac{2}{3}+\frac{8}{27}]=\frac{4}{135}\pi>0$ 及实际情况，当 $a=-\frac{5}{4}$，$b=\frac{3}{2}$，$c=1$ 时，体积最小. ……………………….(10 分)

得　分	
评阅人	

七、（15 分）已知 $u_n(x)$ 满足

$u_n{}'(x)=u_n(x)+x^{n-1}e^x$（$n$ 为正整数），

且 $u_n(1)=\frac{e}{n}$，求函数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ 之和.

解：先解一阶常系数微分方程，求出 $u_n(x)$ 的表达式，然后再求 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ 的和.

由已知条件可知 $u_n{}'(x)-u_n(x)=x^{n-1}e^x$ 是关于 $u_n(x)$ 的一个一阶常系数线性微分方程，故其通解为

$$u_n(x)=e^{\int dx}(\int x^{n-1}e^x e^{-\int dx}dx+c)=e^x(\frac{x^n}{n}+c)\text{ ，} \quad \text{………………...…..(6 分)}$$

由条件 $u_n(1)=\frac{e}{n}$，得 $c=0$，故 $u_n(x)=\frac{x^n e^x}{n}$，

从而 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n e^x}{n}=e^x\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}$. ……………………..……...…(8 分)

$s(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}$，其收敛域为 $[-1,\ 1)$，当 $x\in(-1,\ 1)$ 时，有

$s'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}x^{n-1}=\frac{1}{1-x}$，………………………..……………………….(10 分)

故 $s(x)=\int_0^x\frac{1}{1-t}dt=-\ln(1-x)$. ……………………..……………………(12 分)

当 $x=-1$ 时，$\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)=-e^{-1}\ln 2$. ………………………………...…(13 分)

于是，当 $-1\le x<1$ 时，有 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)=-e^x\ln(1-x)$. ……………..…(15 分)

得　分	
评阅人	

八、（10 分）求 $x \to 1-$ 时，与 $\sum_{n=0}^{\infty} x^{n^2}$ 等价的无穷大量.

解：$\int_0^{+\infty} x^{t^2}dt \le \sum_{n=0}^{\infty} x^{n^2} \le 1+\int_0^{+\infty} x^{t^2}dt$，　……………………………………………(3 分)

$$\int_0^{+\infty} x^{t^2}dt = \int_0^{+\infty} e^{-t^2\ln\frac{1}{x}}dt$$ ………………………………….....…(7 分)

$$=\frac{1}{\sqrt{\ln\frac{1}{x}}}\int_0^{+\infty} e^{-t^2}dt = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{\ln\frac{1}{x}}} \sim \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{1-x}}.$$ ……………………………...(10 分)