

专业:

考生座位号:

所在院校:

准考证号:

姓名:

第六届中国大学生数学竞赛预赛试卷

(数学类, 2014年10月)

考试形式: 闭卷 考试时间: 150 分钟 满分: 100 分

| 题号 | 一 | 二 | 三 | 四 | 五 | 六 | 总分 |
|----|----|----|----|----|----|----|-----|
| 满分 | 15 | 15 | 15 | 15 | 20 | 20 | 100 |
| 得分 | | | | | | | |

- 注意: 1. 所有答题都须写在此试卷纸密封线右边, 写在其它纸上一律无效.
 2. 密封线左边请勿答题, 密封线外不得有姓名及相关标记.
 3. 如答题空白不够, 可写在当页背面, 并标明题号.

一、(本题 15 分) 已知空间的两条直线

$$l_1: \frac{x-4}{1} = \frac{y-3}{-2} = \frac{z-8}{1},$$

$$l_2: \frac{x+1}{7} = \frac{y+1}{-6} = \frac{z+1}{1}.$$

- 1) 证明 l_1 和 l_2 异面;
 2) 求 l_1 和 l_2 公垂线的标准方程;
 3) 求连接 l_1 上的任一点和 l_2 上的任一点线段中点的轨迹的一般方程.

(1) 证明: l_1 上有点 $r_1 = (4, 3, 8)$, 方向向量为 $v_1 = (1, -2, 1)$.

l_2 上有点 $r_2 = (-1, -1, -1)$, 方向向量为 $v_2 = (7, -6, 1)$.

又

$$(r_1 - r_2, v_1, v_2) = \begin{vmatrix} 5 & 4 & 9 \\ 1 & -2 & 1 \\ 7 & -6 & 1 \end{vmatrix} \neq 0,$$

故 l_1 和 l_2 异面. (3分)

(2) l_1 上的任一点 $P_1 = r_1 + t_1 v_1$ 与 l_2 上的任一点 $P_2 = r_2 + t_2 v_2$ 的连线的方向向量为

$$\begin{aligned} \overrightarrow{P_1 P_2} &= r_2 - r_1 + t_2 v_2 - t_1 v_1 \\ &= (-5 + 7t_2 - t_1, -4 - 6t_2 + 2t_1, -9 + t_2 - t_1). \end{aligned}$$

公垂线的方向向量为

$$v = v_1 \times v_2 = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & -2 & 1 \\ 7 & -6 & 1 \end{vmatrix} = (4, 6, 8).$$

由 $\overrightarrow{P_1P_2}$ 与 v 平行:

$$(-5 + 7t_2 - t_1) : (-4 - 6t_2 + 2t_1) : (-9 + t_2 - t_1) = 4 : 6 : 8$$

得

$$t_1 = -1, t_2 = 0.$$

故点 $r_2 + 0v_2 = (-1, -1, -1)$ 在公垂线上, 从而公垂线的标准方程为

$$\frac{x+1}{4} = \frac{y+1}{6} = \frac{z+1}{8}. \quad (9\text{分})$$

(3) $P_1 = r_1 + t_1v_1$ 与 $P_2 = r_2 + t_2v_2$ 的中点为

$$\frac{1}{2}(3 + t_1 + 7t_2, 2 - 2t_1 - 6t_2, 7 + t_1 + t_2).$$

因此中点轨迹为一个平面, 平面的法向量为

$$v = v_1 \times v_2 = (4, 6, 8).$$

又点 $\frac{1}{2}(3, 2, 7)$ 在平面上, 故轨迹的方程为

$$4x + 6y + 8z - 40 = 0. \quad (15\text{分})$$

二、(本题 15 分) 设 $f \in C[0, 1]$ 是非负的严格单调增函数。

1) 证明: 对任意 $n \in \mathbb{N}$, 存在唯一的 $x_n \in [0, 1]$, 使得

$$(f(x_n))^n = \int_0^1 (f(x))^n dx.$$

2) 证明: $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 1$.

证明: 1)

$$f(0)^n \leq \int_0^1 (f(x))^n dx \leq f(1)^n,$$

由连续函数的介值性质得到 x_n 的存在性. (3分)

由于 f 是严格单调函数, x_n 是唯一的. (5分)

2) 对任意的小 $\epsilon > 0$, 由 f 的非负性和单调性,

$$(f(x_n))^n \geq \int_{1-\epsilon}^1 (f(1-\epsilon))^n = \epsilon(f(1-\epsilon))^n,$$

故

$$f(x_n) \geq \sqrt[n]{\epsilon} f(1-\epsilon),$$

从而

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} f(x_n) \geq f(1-\epsilon).$$

由 f 的单调性,

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} x_n \geq 1 - \epsilon.$$

由 ϵ 的任意性, $\lim x_n = 1$. (15分)

三、(本题 15 分) 设 V 为闭区间 $[0, 1]$ 上全体实函数构成的实向量空间, 其中向量加法与纯量乘法均为通常的. $f_1, \dots, f_n \in V$. 证明以下两条等价:

- 1) f_1, \dots, f_n 线性无关;
- 2) $\exists a_1, \dots, a_n \in [0, 1]$ 使得 $\det(f_i(a_j)) \neq 0$, 这里 \det 表行列式.

证明 2) \Rightarrow 1). 考虑方程 $\lambda_1 f_1 + \dots + \lambda_n f_n = 0$. 将 a_1, \dots, a_n 分别代入, 得方程组

$$\begin{cases} \lambda_1 f_1(a_1) + \dots + \lambda_n f_n(a_1) = 0 \\ \vdots \\ \lambda_1 f_1(a_n) + \dots + \lambda_n f_n(a_n) = 0 \end{cases}$$

注意到上述方程组的系数矩阵为 $(f_i(a_j))^T$, 因此由 $\det(f_i(a_j)) \neq 0$ 直接知道 $\lambda_1 = \dots = \lambda_n = 0$. (6分)

1) \Rightarrow 2). 用归纳法. 首先, $n = 1$ 时, 结论显然.

其次, 设 $n = k$ 时结论真. 则 $n = k + 1$ 时, 由 f_1, \dots, f_{k+1} 线性无关知, f_1, \dots, f_k 线性无关. 因此 $\exists a_1, \dots, a_k \in [0, 1]$ 使得 $\det(f_i(a_j))_{k \times k} \neq 0$. 观察函数

$$F(x) = \det \begin{pmatrix} f_1(a_1) & \cdots & f_1(a_k) & f_1(x) \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ f_k(a_1) & \cdots & f_k(a_k) & f_k(x) \\ f_{k+1}(a_1) & \cdots & f_{k+1}(a_k) & f_{k+1}(x) \end{pmatrix}.$$

按最后一列展开得

$$F(x) = \lambda_1 f_1(x) + \dots + \lambda_k f_k(x) + \lambda_{k+1} f_{k+1}(x),$$

其中 $\lambda_1, \dots, \lambda_{k+1}$ 均为常量. 注意到 $\lambda_{k+1} \neq 0$, 因此由 f_1, \dots, f_{k+1} 线性无关知 $F(x)$ 不恒为 0, 从而 $\exists a_{k+1} \in [0, 1]$ 使得 $F(a_{k+1}) \neq 0$. 亦即 $a_1, \dots, a_{k+1} \in [0, 1]$, $\det(f_i(a_j)) \neq 0$. 证毕. (15分)

四、(本题 15 分) 设 $f(x)$ 在 \mathbb{R} 上有二阶导函数, $f(x), f'(x), f''(x)$ 都大于零, 假设存在正数 a, b 使得 $f''(x) \leq af(x) + bf'(x)$ 对一切 $x \in \mathbb{R}$ 成立.

- (i) 求证: $\lim_{x \rightarrow -\infty} f'(x) = 0$;
- (ii) 求证: 存在常数 c 使得 $f'(x) \leq cf(x)$.
- (iii) 求使上面不等式成立的最小常数 c .

证明: 由条件知 f 及 f' 是单调递增的正函数, 因此 $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ 和 $\lim_{x \rightarrow -\infty} f'(x)$ 都存在. (2分)

根据微分中值定理, 对任意 x 存在 $\theta_x \in (0, 1)$ 使得

$$f(x+1) - f(x) = f'(x + \theta_x) > f'(x) > 0.$$

上式左边当 $x \rightarrow -\infty$ 时极限为 0, 因而有 $\lim_{x \rightarrow -\infty} f'(x) = 0$. (5分)

设 $c = \frac{b + \sqrt{b^2 + 4a}}{2}$. 则 $c > b > 0$, 且 $\frac{a}{b-c} = -c$. 于是根据条件有

$$f''(x) - cf'(x) \leq (b-c)f'(x) + af(x) = (b-c)(f'(x) - cf(x)).$$

这说明函数 $e^{-(b-c)x}(f'(x) - cf(x))$ 是单调递减的. 注意到该函数当 $x \rightarrow -\infty$ 时极限为 0, 因此有 $f'(x) - cf(x) \leq 0$. 即, $f'(x) \leq cf(x)$. (10分)

常数 c 是最佳的, 这是因为对函数 $f(x) = e^{cx}$ 有 $f''(x) = af(x) + bf'(x)$. (15分)

五、(本题 20 分) 设 m 为给定的正整数. 证明: 对任何的正整数 n, l , 存在 m 阶方阵 X 使得

$$X^n + X^l = I + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ m-1 & m-2 & m-3 & \cdots & 1 & 0 \\ m & m-1 & m-2 & \cdots & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

证明 1) 令 $H = \begin{pmatrix} 0 & & & & \\ 1 & \ddots & & & \\ & \ddots & \ddots & & \\ & & 1 & 0 \end{pmatrix}$, 则所求的方程变为

$$X^n + X^l = 2I + 2H + 3H^2 + \cdots + mH^{m-1}. \quad (3分)$$

2) 考察形如 $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ a_1 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ a_2 & a_1 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m-1} & a_{m-2} & a_{m-3} & \cdots & 1 & 0 \\ a_m & a_{m-1} & a_{m-2} & \cdots & a_1 & 1 \end{pmatrix}$ 的矩阵 X , 则有 $X = I + a_1H + a_2H^2 + \cdots + a_mH^{m-1}$. 结果,

$$\begin{aligned} X^n &= (I + a_1H + a_2H^2 + \cdots + a_mH^{m-1})^n \\ &= I + (na_1)H + (na_2 + f_1(a_1))H^2 + \cdots + (na_m + f_{m-1}(a_1, \cdots, a_{m-1}))H^{m-1}, \end{aligned}$$

其中 $f_1(a_1)$ 由 a_1 确定, \dots , $f_{m-1}(a_1, \cdots, a_{m-1})$ 由 a_1, \cdots, a_{m-1} 确定.

类似地, 有

$$X^l = I + (la_1)H + (la_2 + g_1(a_1))H^2 + \cdots + (la_m + g_{m-1}(a_1, \cdots, a_{m-1}))H^{m-1}. \quad (12分)$$

3) 观察下列方程组

$$\begin{cases} (n+l)a_1 = 2, \\ (n+l)a_2 + (f_1(a_1) + g_1(a_1)) = 3, \\ \cdots \\ (n+l)a_m + (f_{m-1}(a_1, \cdots, a_{m-1}) + g_{m-1}(a_1, \cdots, a_{m-1})) = m. \end{cases}$$

直接可看出该方程组有解。命题得证。 (20分)

六、(本题 20 分) 设 $\alpha \in (0, 1)$, $\{a_n\}$ 是正数列且满足

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} n^\alpha \left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 \right) = \lambda \in (0, +\infty).$$

求证 $\lim_{n \rightarrow \infty} n^k a_n = 0$, 其中 $k > 0$.

证明: 由条件可知从某项开始 $\{a_n\}$ 单调递减。因此,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a \geq 0.$$

若 $a > 0$, 则当 n 充分大时,

$$\frac{a_n - a_{n+1}}{1/n^\alpha} = n^\alpha \left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 \right) a_{n+1} = \frac{\lambda a}{2} > 0.$$

因为 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ 发散, 所以 $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n - a_{n+1})$ 也发散, 但此级数显然收敛到 $a_1 - a$. 这是矛盾! 所以应有 $a = 0$. (10分)

令 $b_n = n^k a_n$. 则有

$$n^\alpha \left(\frac{b_n}{b_{n+1}} - 1 \right) = \left(\frac{n}{n+1} \right)^k \left[n^\alpha \left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 \right) - n^\alpha \left(\left(1 + \frac{1}{n} \right)^k - 1 \right) \right].$$

因为 $(1 + \frac{1}{n})^k - 1 \sim \frac{k}{n}$ ($n \rightarrow \infty$), 所以由上式及条件可得

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} n^\alpha \left(\frac{b_n}{b_{n+1}} - 1 \right) = \lambda, \quad (n \rightarrow \infty).$$

因此由开始所证, 可得 $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0$, 即, $\lim_{n \rightarrow \infty} n^k a_n = 0$. (20分)