

第十二届全国大学生数学竞赛初赛试卷

(数学类 A 卷, 2020 年 11 月)

考试形式: 闭卷

考试时间: 150 分钟

满分: 100 分

题号	一	二	三	四	五	六	总分
满分	15	15	15	20	15	20	100
得分							

- 注意: 1. 所有答题都须写在此试卷纸密封线右边, 写在其它纸上一律无效.
2. 密封线左边请勿答题, 密封线外不得有姓名及相关标记.
3. 如答题空白不够, 可写在当页背面, 并标明题号.

得分	
评阅人	

一、(本题 15 分) 设 $N(0, 0, 1)$ 是球面 $S: x^2 + y^2 + z^2 = 1$ 的北极点. $A(a_1, a_2, 0), B(b_1, b_2, 0), C(c_1, c_2, 0)$ 为 xOy 平面上不同的三点. 设连接 N 与 A, B, C 的三直线依次交球面 S 于点 A_1, B_1 与 C_1 .

- (1) 求连接 N 与 A 两点的直线方程.
- (2) 求点 A_1, B_1 与 C_1 的坐标.
- (3) 给定点 $A(1, -1, 0), B(-1, 1, 0), C(1, 1, 0)$, 求四面体 $NA_1B_1C_1$ 的体积.

解.

- (1) 过 N, A 两点的直线方程为

$$\frac{x}{a_1} = \frac{y}{a_2} = \frac{z-1}{-1}.$$

..... (3 分)

- (2) 由此可得直线的参数方程

$$x = a_1 t, \quad y = a_2 t, \quad z = 1 - t,$$

代入球面方程可得

$$(a_1 t)^2 + (a_2 t)^2 + (1 - t)^2 = 1.$$

由此解得

$$t = \frac{2}{a_1^2 + a_2^2 + 1} \quad \text{或} \quad t = 0.$$

从而得 A_1 的坐标为

$$\left(\frac{2a_1}{a_1^2 + a_2^2 + 1}, \frac{2a_2}{a_1^2 + a_2^2 + 1}, \frac{a_1^2 + a_2^2 - 1}{a_1^2 + a_2^2 + 1} \right).$$

同理可得, A_2 的坐标为

$$\left(\frac{2b_1}{b_1^2 + b_2^2 + 1}, \frac{2b_2}{b_1^2 + b_2^2 + 1}, \frac{b_1^2 + b_2^2 - 1}{b_1^2 + b_2^2 + 1} \right).$$

以及 A_3 的坐标为

$$\left(\frac{2c_1}{c_1^2 + c_2^2 + 1}, \frac{2c_2}{c_1^2 + c_2^2 + 1}, \frac{c_1^2 + c_2^2 - 1}{c_1^2 + c_2^2 + 1} \right).$$

..... (9 分)

(3) 当 $A(1, -1, 0)$, $B(-1, 1, 0)$ 以及 $C(1, 1, 0)$ 给定时, 经计算可得

$$A_1 = \left(\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{1}{3} \right), \quad B_1 = \left(-\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{3} \right), \quad C_1 = \left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{3} \right).$$

所以, 利用向量的混合积可以把四面体 $NA_1B_1C_1$ 的体积表示为

$$V = \frac{1}{6} |(\overrightarrow{NA_1}, \overrightarrow{NB_1}, \overrightarrow{NC_1})|.$$

混合积 $(\overrightarrow{NA_1}, \overrightarrow{NB_1}, \overrightarrow{NC_1})$ 表示成矩阵的行列式

$$(\overrightarrow{NA_1}, \overrightarrow{NB_1}, \overrightarrow{NC_1}) = \det \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \end{pmatrix} = \frac{32}{27}.$$

于是得到

$$V = \frac{1}{6} \times \frac{32}{27} = \frac{16}{81}.$$

..... (15 分)

密封线 答题时不要超过此线

得分	
评阅人	

二、(本题 15 分) 求极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln n}{\ln(1^{2020} + 2^{2020} + \cdots + n^{2020})}$.

解. 我们有

$$\begin{aligned}
 & \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^{2021}} (1^{2020} + 2^{2020} + \cdots + n^{2020}) \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left(\left(\frac{1}{n}\right)^{2020} + \left(\frac{2}{n}\right)^{2020} + \cdots + \left(\frac{n}{n}\right)^{2020} \right) \\
 &= \int_0^1 x^{2020} dx = \frac{1}{2021}.
 \end{aligned}$$

或用 Stolz 公式

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^{2021}} (1^{2020} + 2^{2020} + \cdots + n^{2020}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^{2020}}{n^{2021} - (n-1)^{2021}} = \frac{1}{2021}.$$

因此, $\ln \frac{1^{2020} + 2^{2020} + \cdots + n^{2020}}{n^{2021}}$ 有界.

.....(8 分)

$$\begin{aligned}
 & \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln n}{\ln(1^{2020} + 2^{2020} + \cdots + n^{2020})} \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln n}{2021 \ln n + \ln \frac{1^{2020} + 2^{2020} + \cdots + n^{2020}}{n^{2021}}} \\
 &= \frac{1}{2021}.
 \end{aligned}$$

..... (15 分)

得分	
评阅人	

三、（本题 15 分）设 A, B 均为 2020 阶正交矩阵, 齐次线性方程组 $Ax = Bx (x \in \mathbb{R}^{2020})$ 的解空间维数为 3. 问: 矩阵 A, B 是否可能相似? 证明你的结论.

解. A, B 一定不相似.

..... (2 分)

证明如下.

令 $C = AB^{-1}$. 由于 A, B 均为正交矩阵, 故 C 也是正交矩阵. C 视为复矩阵是酉矩阵, 故可以复对角化. 即存在复可逆矩阵 T 和复对角矩阵 D , 使得 $T^{-1}CT = D$, 其中 D 的主对角线上的元素即为 C 的复特征值.

..... (7 分)

齐次线性方程组 $Ax = Bx$ 的解空间维数为 3, 则 $\text{rank}(A - B) = 2017$. 进而

$$\begin{aligned} \text{rank}(D - I) &= \text{rank}(T^{-1}(C - I)T) = \text{rank}(C - I) \\ &= \text{rank}((A - B)B^{-1}) = \text{rank}(A - B) = 2017. \end{aligned}$$

这表明对角矩阵 D 的主对角线上恰有 3 个元素是 1. 即 C 有三重特征值 1. 由于正交矩阵的实特征值为 1 或 -1 , 而非实数特征值共轭成对出现, 共有偶数个. 又 C 共有 2020 个特征值 (计重数), 故 C 有特征值 -1 , 且重数为奇数.

..... (12 分)

C 的行列式是其所有特征值 (计重数) 之积. 注意到 C 的非实数特征值共轭成对出现, 它们的乘积为正数. 故 $\det C < 0$. 特别地, $\det(AB^{-1}) = \det C \neq 1$. 即 $\det A \neq \det B$. 从而 A, B 不相似.

..... (15 分)

得分	
评阅人	

四、(本题 20 分) 称非常值一元 n 次多项式 (合并同类项后) 的 $n-1$ 次项 (可能为 0) 为第二项. 求所有 2020 次复系数首一多项式 $f(x)$, 满足对 $f(x)$ 的每个复根 x_k , 都存在非常值复系数首一多项式 $g_k(x)$ 和 $h_k(x)$, 使得 $f(x) = (x - x_k)g_k(x)h_k(x)$, 且 $g_k(x)$ 与 $h_k(x)$ 的第二项系数相等.

解. 显然 $f(x) = x^{2020}$ 满足题意.

..... (5 分)

以下证明这是唯一解. 设 $f(x)$ 的 2020 个复根为 $x_1, x_2, \dots, x_{2020}$. 对每个 k ($1 \leq k \leq 2020$), 由题设条件可设 $f(x) = (x - x_k)g_k(x)h_k(x)$, 其中 $g_k(x), h_k(x)$ 分别为 m_k 次和 n_k 次非常值首一多项式, 第二项系数均为 a_k . 设 $g_k(x)$ 的所有复根为 $y_{k,1}, y_{k,2}, \dots, y_{k,m_k}$, $h_k(x)$ 的所有复根为 $z_{k,1}, z_{k,2}, \dots, z_{k,n_k}$. 这些根恰为所有 x_j ($j \neq k$). 由韦达定理,

$$a_k = (-1)^{m_k-1}(y_{k,1} + y_{k,2} + \dots + y_{k,m_k}) = (-1)^{n_k-1}(z_{k,1} + z_{k,2} + \dots + z_{k,n_k}).$$

..... (12 分)

对每个 k , 将上式改写为

$$\sum_{j \neq k} \varepsilon_{kj} x_j = 0,$$

其中 $\varepsilon_{kj} = 1$ 或 -1 .

这样, 我们得到了关于 $x_1, x_2, \dots, x_{2020}$ 的齐次线性方程组, 其系数矩阵 A 为 2020 阶方阵, 主对角线上元素为 0. 主对角线外元素为 1 或 -1 . 令 B 为 2020 阶方阵, 其主对角线上元素为 0, 主对角线外元素为 1, 则容易计算出 B 的行列式为 $\det B = -2019$. 由行列式定义, $\det A$ 与 $\det B$ 的奇偶性相同, 故 $\det A \neq 0$.

..... (18 分)

从而上述齐次线性方程组只有零解, 即 $x_1 = x_2 = \dots = x_{2020} = 0$. 这便证明了 $f(x) = x^{2020}$.

..... (20 分)

注: 上面证明 $\det A \neq 0$ 也可以如下进行:

显然, $\det A \equiv \det B \pmod{2}$. 由于 $\det B = -2019 \equiv 1 \pmod{2}$. 所以 $\det A \equiv 1 \pmod{2}$. 故 $\det A \neq 0$.

得分	
评阅人	

五、(本题 15 分) 设 φ 是 \mathbb{R} 上严格单调增加的连续函数, ψ 是 φ 的反函数, 实数列 $\{x_n\}$ 满足

$$x_{n+2} = \psi\left(\left(1 - \frac{1}{\sqrt{n}}\right)\varphi(x_n) + \frac{1}{\sqrt{n}}\varphi(x_{n+1})\right), \quad n \geq 2.$$

证明 $\{x_n\}$ 收敛或举例说明 $\{x_n\}$ 有可能发散.

证明. 我们断言 $\{x_n\}$ 收敛. 证明如下. 记 $y_n = \varphi(x_n)$, 则

$$y_{n+2} = \left(1 - \frac{1}{\sqrt{n}}\right)y_n + \frac{1}{\sqrt{n}}y_{n+1}, \quad n \geq 2.$$

令

$$a_n = \min\{y_n, y_{n-1}\}, \quad b_n = \max\{y_n, y_{n-1}\} \quad n \geq 3.$$

则

$$a_n \leq y_{n+1} \leq b_n, \quad n \geq 3.$$

进而

$$a_n \leq a_{n+1} \leq b_{n+1} \leq b_n, \quad n \geq 3.$$

所以 $\{a_n\}, \{b_n\}$ 均单调有界, 从而收敛.

..... (5 分)

特别, $\{y_n\}$ 有界. 由于

$$y_{n+2} - y_{n+1} = -\left(1 - \frac{1}{\sqrt{n}}\right)(y_{n+1} - y_n), \quad n \geq 2.$$

因此

$$|y_{n+2} - y_{n+1}| \leq |y_3 - y_2| \prod_{k=2}^n \left(1 - \frac{1}{\sqrt{k}}\right), \quad n \geq 2.$$

由 $\prod_{k=2}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{k}}\right)$ 发散到零, 得到 $\lim_{n \rightarrow \infty} (y_{n+1} - y_n) = 0$.

..... (10 分)

所以

$$b_n - a_n = |y_n - y_{n-1}| \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty.$$

这样, $\{a_n\}$ 与 $\{b_n\}$ 的极限相等, 从而 $\{y_n\}$ 收敛.

最后, 由 ψ 的连续性得到 $\{x_n\}$ 收敛.

..... (15 分)

得分	
评阅人	

六、（本题 20 分）对于有界区间 $[a, b]$ 的划分

$P: a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{n+1} = b$, 其范数定义为 $\|P\| = \max_{0 \leq k \leq n} (x_{k+1} - x_k)$. 现设 $[a, b]$ 上函数 f 满足 Lipschitz 条件, 即存在常数 $M > 0$ 使得对任何 $x, y \in [a, b]$, 成立

$|f(x) - f(y)| \leq M|x - y|$. 定义 $s(f; P) \equiv \sum_{k=0}^n \sqrt{|x_{k+1} - x_k|^2 + |f(x_{k+1}) - f(x_k)|^2}$. 若 $\lim_{\|P\| \rightarrow 0^+} s(f; P)$ 存在, 则称曲线 $y = f(x)$ 可求长. 记 P_n 为 $[a, b]$ 的 2^n 等分. 证明:

(1) $\lim_{n \rightarrow \infty} s(f; P_n)$ 存在.

(2) 曲线 $y = f(x)$ 可求长.

证明. 法 I. 我们有

$$0 \leq s(f; P) \leq \sum_{k=0}^n \sqrt{M^2 + 1} |x_{k+1} - x_k| = (b - a) \sqrt{M^2 + 1}.$$

因此, $s(f; P)$ 有界.

..... (3 分)

(1) 由平面上点和点距离的三角不等式, 立即有

$$s(f; P_n) \leq s(f; P_{n+1}), \quad \forall n \geq 1.$$

因此, $\{s(f; P_n)\}$ 单调增加, 结合有界性知其收敛. 设极限为 L .

..... (8 分)

一般地, 对于划分 P, Q , 用 $P \oplus Q$ 表示由 P 和 Q 的所有分点为分点的划分, 则

$$s(f; P \oplus Q) \geq s(f; P).$$

(2) 对于任何 $\varepsilon > 0$, 有 $m \geq 1$ 使得

$$s(f; P_m) \geq L - \varepsilon.$$

对于划分 P , 用 $P \oplus P_m$ 表示由 P 和 P_m 的所有分点为分点的划分, 则

$$s(f; P \oplus P_m) \geq s(f; P_m) \geq L - \varepsilon.$$

在 $s(f; P \oplus P_m)$ 的和式中, 与 $s(f; P)$ 的和式中不同的项是涉及 P_m 的分点的项, 总数不超过 2^{m+1} 项, 相应的小区间长度不超过 $\|P \oplus P_m\| \leq \|P\|$. 因此, 这些项的

和不超过 $2^{m+1}\sqrt{M^2+1}\|P\|$. 于是

$$s(f; P) \geq s(f; P \oplus P_m) - 2^{m+1}\sqrt{M^2+1}\|P\| \geq L - \varepsilon - 2^{m+1}\sqrt{M^2+1}.$$

这样

$$\lim_{\|P\| \rightarrow 0^+} s(f; P) \geq L - \varepsilon.$$

进而

$$\lim_{\|P\| \rightarrow 0^+} s(f; P) \geq L.$$

.....(14 分)

类似地, 记 $K = \overline{\lim}_{\|P\| \rightarrow 0^+} s(f; P)$. 对于任何 $\varepsilon > 0$, 有划分 Q 使得

$$s(f; Q) \geq K - \varepsilon.$$

则

$$s(f; Q \oplus P_m) \geq s(f; Q) \geq K - \varepsilon.$$

在 $s(f; Q \oplus P_m)$ 的和式中, 与 $s(f; P_m)$ 的和式中不同的项是涉及 Q 的分点的项, 总数不超过 $2N$ 项, 其中 N 是划分 Q 的分点数. 因此, 这些项的和不超过 $2N\sqrt{M^2+1}\|P_m\|$. 于是

$$s(f; P_m) \geq s(f; Q \oplus P_m) - 2N\sqrt{M^2+1}\|P_m\| \geq K - \varepsilon - 2N\sqrt{M^2+1}\|P_m\|.$$

这样

$$L = \lim_{m \rightarrow \infty} s(f; P_m) \geq K - \varepsilon.$$

进而 $L \geq K$. 结合 $K \geq \lim_{\|P\| \rightarrow 0^+} s(f; P) \geq L$ 得到

$$\lim_{\|P\| \rightarrow 0^+} s(f; P) = L.$$

即 $y = f(x)$ 可求长.

.....(20 分)

法 II. 事实上, 注意到 (1) 是 (2) 的推论, 我们只需直接证明 (2). 具体证明如下.

我们有

$$0 \leq s(f; P) \leq \sum_{k=0}^n \sqrt{M^2 + 1} |x_{k+1} - x_k| = (b - a) \sqrt{M^2 + 1}.$$

因此, $s(f; P)$ 有界.

.....(3 分)

对于划分 P, Q , 用 $P \oplus Q$ 表示由 P 和 Q 的所有分点为分点的划分, 由平面上点和点距离的三角不等式, 立即有

$$s(f; P \oplus Q) \geq s(f; P).$$

.....(8 分)

考虑划分列 $\{Q_k\}$ 使得 $\lim_{k \rightarrow \infty} \|Q_k\| = 0$, 且

$$\lim_{k \rightarrow \infty} s(f; Q_k) = L \equiv \overline{\lim}_{\|P\| \rightarrow 0} s(f; P).$$

.....(10 分)

对于每个 $k \geq 1$, 设 N_k 为划分 Q_k 的分点数.

$$s(f; P \oplus P_m) \geq s(f; P_m) \geq L - \varepsilon.$$

在 $s(f; P \oplus Q_k)$ 的和式中, 与 $s(f; P)$ 的和式中不同的项是涉及 Q_k 的分点的项, 总数不超过 $2N_k$ 项, 相应的小区间长度不超过 $\|P \oplus Q_k\| \leq \|P\|$. 因此, 这些项的和不超过 $2N_k \sqrt{M^2 + 1} \|P\|$. 于是

$$s(f; P) \geq s(f; P \oplus Q_k) - 2N_k \sqrt{M^2 + 1} \|P\| \geq s(f; Q_k) - 2N_k \sqrt{M^2 + 1} \|P\|.$$

这样

$$\lim_{\|P\| \rightarrow 0^+} s(f; P) \geq s(f; Q_k), \quad \forall k \geq 1.$$

进而

$$\lim_{\|P\| \rightarrow 0^+} s(f; P) \geq L = \overline{\lim}_{\|P\| \rightarrow 0^+} s(f; P).$$

所以 $\lim_{\|P\| \rightarrow 0^+} s(f; P)$ 存在. 即 $y = f(x)$ 可求长. 自然也有 $\lim_{n \rightarrow \infty} s(f; P_n)$ 存在.

.....(20 分)

专业:

座位号:

考场号:

所在院校:

准考证号:

姓名:

答题时不要超过此线
密封线

第十二届全国大学生数学竞赛初赛试卷答案 (数学类B卷, 2020年11月)

考试形式: 闭卷 考试时间: 150 分钟 满分: 100 分

题号	一	二	三	四	五	六	总分
满分	15	15	15	20	15	20	100
得分							

- 注意: 1. 所有答题都须写在此试卷纸密封线右边, 写在其它纸上一律无效.
2. 密封线左边请勿答题, 密封线外不得有姓名及相关标记.
3. 如答题空白不够, 可写在当页背面, 并标明题号.

得分	
评阅人	

一、(本题 15 分)已知椭球面

$$\Sigma_0: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1, \quad a > b,$$

的外切柱面 Σ_ε ($\varepsilon = 1$ 或 -1) 平行于已知直线

$$l_\varepsilon: \frac{x-2}{0} = \frac{y-1}{\varepsilon\sqrt{a^2-b^2}} = \frac{z-3}{c}.$$

试求与 Σ_ε 交于一个圆周的平面的法方向. 注: 本题中的外切柱面指的是每一条直母线均与已知椭球面相切的柱面.

解: 设 l 是柱面的任意一条直母线, 则由假设, l 与已知椭球面 Σ_0 相切于一点 $M_1(x_1, y_1, z_1)$. 因为 l 平行于已知直线 l_ε , 所以, l 的标准方程和参数方程分别是

$$\begin{aligned} \frac{x-x_1}{0} &= \frac{y-y_1}{\varepsilon\sqrt{a^2-b^2}} = \frac{z-z_1}{c}, \\ x &= x_1, \quad y = y_1 + \varepsilon t\sqrt{a^2-b^2}, \quad z = z_1 + ct. \end{aligned}$$

把 l 的参数方程代入曲面 Σ_0 的方程并化简得

$$t^2 \left(\frac{a^2-b^2}{b^2} + 1 \right) + 2t \left(\varepsilon \frac{\sqrt{a^2-b^2}}{b^2} y_1 + \frac{1}{c} z_1 \right) + \frac{x_1^2}{a^2} + \frac{y_1^2}{b^2} + \frac{z_1^2}{c^2} - 1 = 0, \quad (1)$$

其中首项系数 $\frac{a^2-b^2}{a^2} + 1 > 0$. (5分)

因为点 M_1 在 Σ_0 上, 所以

$$\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{y_1^2}{b^2} + \frac{z_1^2}{c^2} - 1 = 0.$$

又因为 l 与 Σ_0 在 M_1 点相切, 所以 $t = 0$ 是二次方程(1)的重根。因此,

$$\varepsilon \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{b^2} y_1 + \frac{1}{c} z_1 = 0, \text{ 即 } \varepsilon c \sqrt{a^2 - b^2} y_1 + b^2 z_1 = 0.$$

此式与

$$\frac{y - y_1}{\varepsilon \sqrt{a^2 - b^2}} = \frac{z - z_1}{c} \text{ 即 } \varepsilon c y_1 - \sqrt{a^2 - b^2} z_1 = \varepsilon c y - \sqrt{a^2 - b^2} z$$

联立解出

$$y_1 = \frac{b^2}{ca^2} (cy - \varepsilon \sqrt{a^2 - b^2} z), \quad z_1 = -\varepsilon \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a^2} (cy - \varepsilon \sqrt{a^2 - b^2} z).$$

再把 $x_1 = x$ 和上面的两式代入 Σ_0 的方程, 得到外切柱面 Σ_ε 的方程为

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{b^2 (cy - \varepsilon \sqrt{a^2 - b^2} z)^2}{a^4 c^2} + \frac{(a^2 - b^2) (cy - \varepsilon \sqrt{a^2 - b^2} z)^2}{a^4 c^2} = 1.$$

(10分)

如果令 $z = 0$, 上式化为

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{b^2 y^2}{a^4} + \frac{(a^2 - b^2) y^2}{a^4} = 1, \text{ 即 } x^2 + y^2 = a^2.$$

所以柱面 Σ_ε 与 xoy 坐标面相交于圆周

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = a^2 \\ z = 0 \end{cases}.$$

由于与二次柱面 Σ_ε 的交线为圆周的所有平面都是平行的, 故知所求的法方向唯一且为 xoy 平面的法方向, 方向数为 $0, 0, 1$. (15分)

密封线 答题时不要超过此线

得分	
评阅人	

二、(本题 15 分) 设 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上连续, 且 $1 \leq f(x) \leq 3$, 证明: $1 \leq \int_0^1 f(x) dx \int_0^1 \frac{dx}{f(x)} \leq \frac{4}{3}$.

证: 由 Schwarz 不等式,

$$1 = \left(\int_0^1 \sqrt{f(x)} \frac{1}{\sqrt{f(x)}} dx \right)^2 \leq \int_0^1 f(x) dx \int_0^1 \frac{dx}{f(x)}$$

(5分)

又由于 $(f(x) - 1)(f(x) - 3) \leq 0$, 故有 $\frac{(f(x)-1)(f(x)-3)}{f(x)} \leq 0$, 即 $\int_0^1 (f(x) + \frac{3}{f(x)}) dx \leq 4$.
(10分)

由 $4ab \leq (a+b)^2$ 知

$$\int_0^1 f(x) dx \int_0^1 \frac{3}{f(x)} dx \leq \frac{(\int_0^1 f(x) dx + \int_0^1 \frac{3}{f(x)} dx)^2}{4} \leq 4$$

于是 $1 \leq \int_0^1 f(x) dx \int_0^1 \frac{dx}{f(x)} \leq \frac{4}{3}$.

(15分)

得分	
评阅人	

三、(本题15分) 设 A 为 n 阶复方阵, $p(x)$ 为 A 的特征多项式. 又设 $g(x)$ 为 m 次复系数多项式, $m \geq 1$. 证明: $g(A)$ 可逆当且仅当 $p(x)$ 与 $g(x)$ 互素.

证明: 取 A 的 Jordan 分解: $A = P \begin{pmatrix} J_1 & & \\ & \ddots & \\ & & J_s \end{pmatrix} P^{-1}$,

其中 $J_i = \begin{pmatrix} \lambda_i & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & \lambda_i \end{pmatrix}$ 为 Jordan 块. 结果,

$$(*) \quad g(A) = P \begin{pmatrix} g(J_1) & & \\ & \ddots & \\ & & g(J_s) \end{pmatrix} P^{-1} = P \begin{pmatrix} g(\lambda_1) & * & * \\ & \ddots & * \\ & & g(\lambda_s) \end{pmatrix} P^{-1} \quad (8分)$$

\Leftarrow). $p(x)$ 与 $g(x)$ 互素, 于是 $p(x)$ 与 $g(x)$ 没有公共根. 注意到 $\lambda_1, \dots, \lambda_s$ 为 A 的所有互不相同的特征根. 故有 $g(\lambda_1), \dots, g(\lambda_s)$ 均不为 0. 结果,

$$|g(A)| = g(\lambda_1) \cdots g(\lambda_s) \neq 0,$$

$g(A)$ 可逆, 得证. (13分)

\Rightarrow). $g(A)$ 可逆, 从而 $|g(A)| \neq 0$. 由 $|g(A)| = g(\lambda_1) \cdots g(\lambda_s)$ 知: $g(\lambda_1), \dots, g(\lambda_s)$ 均不为 0, 故 $p(x)$ 与 $g(x)$ 没有公共根. 当然 $p(x)$ 与 $g(x)$ 互素, 否则导致 $p(x)$ 与 $g(x)$ 有公共根, 矛盾. (15分)

得分	
评阅人	

四、(本题20分) 设 σ 为 n 维复向量空间 \mathbb{C}^n 的一个线性变换. $\mathbf{1}$ 表示恒等变换. 证明以下两条等价:

(1) $\sigma = k\mathbf{1}, k \in \mathbb{C}$;

(2) 存在 σ 的 $n+1$ 个特征向量: v_1, \dots, v_{n+1} , 这 $n+1$ 个向量中任何 n 个向量均线性无关.

证: (1) \Rightarrow (2). 取 $v_1 = e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \dots, v_n = e_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}, v_{n+1} = e_1 + \dots + e_n =$

$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$. 则易知, v_1, \dots, v_{n+1} 均是 σ 的特征向量. 进一步, 该组向量中任何 n 个向量必

线性无关. 事实上, 不妨设这 n 个向量为: $v_1, \dots, v_{i-1}, v_{i+1}, \dots, v_{n+1}$. 于是

$$a_1 v_1 + \dots + a_{i-1} v_{i-1} + a_{i+1} v_{i+1} + \dots + a_{n+1} v_{n+1} = 0 \Leftrightarrow$$

$$(a_1 + a_{n+1})e_1 + \dots + (a_{i-1} + a_{n+1})e_{i-1} + a_{n+1}e_i + (a_{i+1} + a_{n+1})e_{i+1} + \dots + (a_n + a_{n+1})e_n = 0.$$

结果, $a_{n+1} = 0$, 进而 $a_1 = \dots = a_{n+1} = 0$. 如所需. (5分)

(2) \Rightarrow (1). 记 $\lambda_1, \dots, \lambda_{n+1}$ 分别为相应于 v_1, \dots, v_{n+1} 的 σ 的特征值, 其和为 s , 即 $s = \lambda_1 + \dots + \lambda_{n+1}$. 由条件知 $v_1, \dots, v_{i-1}, v_{i+1}, \dots, v_{n+1}$ 线性无关, 因此它可充当 \mathbb{C}^n 的基. σ 在此组基下的表示阵为 A :

$$\sigma(v_1, \dots, v_{i-1}, v_{i+1}, \dots, v_{n+1}) = (v_1, \dots, v_{i-1}, v_{i+1}, \dots, v_{n+1})A$$

结果 $\text{tr} A = s - \lambda_i$. (10分)

又取 $v_1, \dots, v_{j-1}, v_{j+1}, \dots, v_{n+1}$, σ 在此组基下的表示阵为 B :

$$\sigma(v_1, \dots, v_{j-1}, v_{j+1}, \dots, v_{n+1}) = (v_1, \dots, v_{j-1}, v_{j+1}, \dots, v_{n+1})B$$

结果 $\text{tr} B = s - \lambda_j$. 注意到 A 与 B 相似, 因为他们是同一线性变换在不同基下的表示阵. 故 $s - \lambda_i = s - \lambda_j, \lambda_i = \lambda_j$. 即

$\sigma = k\mathbf{1}, k = \lambda_1$. 证毕. (20分)

得分	
评阅人	

五、（本题15分）计算广义积分 $\int_1^{+\infty} \frac{(x)}{x^3} dx$, 这里 (x) 表示 x 的小数部分(例如: 当 n 为正整数且 $x \in [n, n+1)$ 时, $(x) = x - n$).

证: 对于任意正整数 $\ell > 2$, 我们有

$$\begin{aligned}
 \int_1^{\ell} \frac{(x)}{x^3} dx &= \sum_{n=1}^{\ell-1} \int_n^{n+1} \frac{x-n}{x^3} = \sum_{n=1}^{\ell-1} \left(\int_n^{n+1} x^{-2} dx - n \int_n^{n+1} x^{-3} dx \right) \\
 &= \sum_{n=1}^{\ell-1} \frac{1}{n(n+1)} - \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\ell-1} \frac{2n+1}{n(n+1)^2} \\
 &= \sum_{n=1}^{\ell-1} \frac{1}{n(n+1)} - \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\ell-1} \left(\frac{2}{n(n+1)} - \frac{1}{n(n+1)^2} \right) \\
 &= \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\ell-1} \frac{1}{n(n+1)^2} = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\ell-1} \left(\frac{1}{n(n+1)} - \frac{1}{(n+1)^2} \right) \\
 &= \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{\ell} \right) - \frac{1}{2} \sum_{n=2}^{\ell} \frac{1}{n^2}
 \end{aligned}$$

(10分)

对于 $y \in [\ell, \ell+1)$, 我们有

$$\frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{\ell} \right) - \frac{1}{2} \sum_{n=2}^{\ell} \frac{1}{n^2} = \int_1^{\ell} \frac{(x)}{x^3} dx \leq \int_1^y \frac{(x)}{x^3} dx \leq \int_1^{\ell+1} \frac{(x)}{x^3} dx = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{\ell+1} \right) - \frac{1}{2} \sum_{n=2}^{\ell+1} \frac{1}{n^2}$$

于是得到

$$\int_1^{+\infty} \frac{(x)}{x^3} dx = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2} = 1 - \frac{\pi^2}{12}.$$

(15分)

得分	
评阅人	

六、(本题20分) 设函数 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上连续, 满足对任意 $x \in [0, 1]$

$$\int_{x^2}^x f(t)dt \geq \frac{x^2 - x^4}{2}.$$

证明: $\int_0^1 f^2(x)dx \geq \frac{1}{10}$.

证明一: 注意到

$$\int_0^1 dx \int_{x^2}^x f(t)dt = \int_0^1 dt \int_t^{\sqrt{t}} f(t)dx = \int_0^1 (\sqrt{t} - t)f(t)dt$$

.....8 分

于是, 我们有

$$\int_0^1 (\sqrt{t} - t)f(t)dt = \int_0^1 dx \int_{x^2}^x f(t)dt \geq \int_0^1 \frac{x^2 - x^4}{2}dx = \frac{1}{15}.$$

.....13 分

因为

$$0 \leq \int_0^1 (f(t) - (\sqrt{t} - t))^2 dt = \int_0^1 f^2(t)dt - 2 \int_0^1 (\sqrt{t} - t)f(t)dt + \int_0^1 (\sqrt{t} - t)^2 dt$$

.....18 分

所以

$$\int_0^1 f^2(t)dt \geq 2 \int_0^1 (\sqrt{t} - t)f(t)dt - \int_0^1 (\sqrt{t} - t)^2 dt \geq \frac{2}{15} - \frac{1}{30} = \frac{1}{10}$$

.....20 分

证明二: 注意到

$$\int_0^1 dx \int_{x^2}^x f(t)dt = \int_0^1 dt \int_t^{\sqrt{t}} f(t)dx = \int_0^1 (\sqrt{t} - t)f(t)dt$$

.....8 分

于是, 我们有

$$\int_0^1 (\sqrt{t} - t)f(t)dt = \int_0^1 dx \int_{x^2}^x f(t)dt \geq \int_0^1 \frac{x^2 - x^4}{2}dx = \frac{1}{15}.$$

.....13 分

因为对任意 $\beta \in (0, +\infty)$

$$0 \leq \int_0^1 (\beta f(t) - (\sqrt{t} - t))^2 dt = \int_0^1 \beta^2 f^2(t) dt - 2\beta \int_0^1 (\sqrt{t} - t) f(t) dt + \int_0^1 (\sqrt{t} - t)^2 dt$$

所以

$$\begin{aligned} \int_0^1 f^2(t) dt &\geq \frac{2}{\beta} \int_0^1 (\sqrt{t} - t) f(t) dt - \frac{1}{\beta^2} \int_0^1 (\sqrt{t} - t)^2 dt \geq \frac{2}{15\beta} - \frac{1}{30\beta^2} \\ &= \frac{1}{30} \left(4 \cdot \frac{1}{\beta} - \left(\frac{1}{\beta} \right)^2 \right). \end{aligned}$$

..... 17 分

容易得到当 $\beta \in [1/3, 1]$ 时, 有

$$\int_0^1 f^2(t) dt \geq \frac{1}{30} \left(4 \cdot \frac{1}{\beta} - \left(\frac{1}{\beta} \right)^2 \right) \geq \frac{1}{10}.$$

特别地, 当 $\beta = 1/2$ 时

$$\int_0^1 f^2(t) dt \geq \frac{1}{30} (4 \cdot 2 - 2^2) = \frac{2}{15} > \frac{1}{10}.$$

..... 20 分

证明三: 因为对任意 $0 < \beta < 1$, 任意正整数 n , 我们有

$$\int_{\beta^{2^n}}^{\beta} f(t) dt = \sum_{k=1}^n \int_{\beta^{2^k}}^{\beta^{2^{k-1}}} f(t) dt \geq \sum_{k=1}^n \frac{\beta^{2^k} - \beta^{2^{k+1}}}{2} = \frac{1}{2} (\beta^2 - \beta^{2^{n+1}}).$$

..... 5 分

于是

$$\int_0^{\beta} f(t) dt = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\beta^{2^n}}^{\beta} f(t) dt \geq \frac{\beta^2}{2}.$$

..... 8 分

从而我们有

$$\int_0^1 f(t) dt = \lim_{\beta \rightarrow 1^-} \int_0^{\beta} f(t) dt \geq \lim_{\beta \rightarrow 1^-} \frac{\beta^2}{2} = \frac{1}{2}.$$

..... 13 分

最后, 由柯西-希瓦尔茨不等式可得

$$\frac{1}{2} \leq \int_0^1 f(t) dt \leq \left(\int_0^1 1^2 dt \right)^{1/2} \cdot \left(\int_0^1 f^2(t) dt \right)^{1/2}$$

于是,

$$\int_0^1 f^2(x)dx \geqslant \frac{1}{4} > \frac{1}{10}.$$

.....18 分

.....20 分

第十一届全国大学生数学竞赛初赛试卷 (数学类A卷, 2019年10月)

考试形式: 闭卷 考试时间: 150 分钟 满分: 100 分

题号	一	二	三	四	五	六	总分
满分	15	15	15	20	15	20	100
得分							

- 注意: 1. 所有答题都须写在此试卷纸密封线右边, 写在其它纸上一律无效.
2. 密封线左边请勿答题, 密封线外不得有姓名及相关标记.
3. 如答题空白不够, 可写在当页背面, 并标明题号.

得分	
评阅人	

一、(本题 15 分) 空间中有两个圆球面 B_1 和 B_2 , B_2 包含在 B_1 所围球体的内部, 两球面之间的闭区域为 D . 设 B 是含在 D 中的一个圆球, 它与球面 B_1 和 B_2 均相切. 问:

- (i) (4分) B 的球心轨迹构成的曲面 S 是何种曲面;
(ii) (2分) B_1 的球心和 B_2 的球心是曲面 S 的何种点.

证明你的论断 (9分).

答: B 的球心轨迹构成的曲面 S 为旋转椭球面 (2分+2分=4分); B_1 和 B_2 的球心为 S 的两个焦点 (2分).

证明: 设 B_1 的球心为 O_1 , 半径为 R_1 , B_2 的球心为 O_2 , 半径为 R_2 . 设 B 是含在 D 中的一个球, 球心在 P 点, 半径为 r , 它与球 B_1 和 B_2 均相切. 因为 B 与 B_1 内切, 所以 $PO_1 = R_1 - r$. 因为 B 与 B_2 外切, 所以 $PO_2 = R_2 + r$. 于是有

$$PO_1 + PO_2 = R_1 + R_2$$

总是常数. (4分)

设 l 是过球心 O_1 和 O_2 的直线. 因为 B_1 和 B_2 在以 l 为不动轴的空间旋转下不变, 故区域 D 也在以 l 为不动轴的空间旋转下不变. B 在以 l 为不动轴的空间旋转下保持与 B_1 和 B_2 均相切, 它的球心 P 在以 l 为不动轴的空间旋转下是一个圆周. 在每个过直线 l 的平面 Σ 上, 由于 $PO_1 + PO_2 = R_1 + R_2$ 总是常数, B 的球心轨迹 P 在平面 Σ 上

是一个椭圆. 故 B 的球心轨迹构成的曲面 S 为旋转椭球, 旋转轴为过 O_1 和 O_2 的直线, 并且两球心 O_1 和 O_2 为旋转椭球的两个焦点. (9分)

得分	
评阅人	

二、(本题 15 分) 设 $\alpha > 0$, $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上非负, 有二阶导函数, $f(0) = 0$, 且在 $[0, 1]$ 上不恒为零. 求证: 存在 $\xi \in (0, 1)$ 使得

$$\xi f''(\xi) + (\alpha + 1)f'(\xi) > \alpha f(\xi).$$

证明 (反证法) 若结论不对, 则对一切 $x \in [0, 1]$ 有

$$xf''(x) + (\alpha + 1)f'(x) \leq \alpha f(x).$$

这说明函数 $xf'(x) + \alpha f(x) - \alpha \int_0^x f(u) du$ 的导数非正, 因而单调递减, 但它在 0 取 0, 故,

$$xf'(x) + \alpha f(x) \leq \alpha \int_0^x f(u) du, \quad x \in [0, 1]. \quad (\dots 5 \text{分})$$

因而

$$x^\alpha f'(x) + \alpha x^{\alpha-1} f(x) \leq \alpha x^{\alpha-1} \int_0^x f(u) du, \quad x \in [0, 1].$$

将上式在 $[0, x]$ 上积分, 可得

$$\begin{aligned} x^\alpha f(x) &\leq \alpha \int_0^x t^{\alpha-1} \left(\int_0^t f(u) du \right) dt \\ &\leq \alpha \int_0^x t^{\alpha-1} \left(\int_0^x f(u) du \right) dt \\ &= x^\alpha \int_0^x f(u) du. \end{aligned}$$

故,

$$f(x) \leq \int_0^x f(u) du. \quad (\dots 10 \text{分})$$

记, $g(x) = \int_0^x f(u) du$. 则从上式可得 $g'(x) \leq g(x)$. 因此

$$(e^{-x}g(x))' \leq 0.$$

这说明 $e^{-x}g(x)$ 在 $[0, 1]$ 上递减. 注意到 $g(0) = 0$, 可得 $g(x) \leq 0$. 但从 $f(x)$ 非负可知 $g(x) \geq 0$. 故, $g(x) \equiv 0$. 从而 $f(x) \equiv 0$. 这与 $f(x)$ 不恒为零矛盾! (\dots 15 \text{分})

得分	
评阅人	

三、（本题15分）设 A 为 n 阶复方阵, $p(x)$ 为 $I - \bar{A}A$ 的特征多项式,其中 \bar{A} 表 A 的共轭矩阵. 证明: $p(x)$ 必为实系数多项式.

证明: 记

$$p(t) = \det(tI - (I - A\bar{A})) = \det((t-1)I + A\bar{A})$$

为 $I - A\bar{A}$ 的特征多项式. 对任何实数 t , 有

$$(*) \quad \overline{p(t)} = \overline{\det((t-1)I + A\bar{A})} = \det((t-1)I + \bar{A}A).$$

(5分)

对任何两个方阵 A 和 B , 有 $\det(sI + AB) = \det(sI + BA)$, 证明如下: 取可逆矩阵序列 B_n 使得 $B_n \rightarrow B$ (例如, 对充分大的 n 取 $B_n = B + \frac{1}{n}I$), 则

$$\det(sI + AB_n) = \det(sB_n^{-1} + A)\det B_n = \det B_n \det(sB_n^{-1} + A) = \det(sI + B_n A).$$

令 $n \rightarrow \infty$, 得到公式 $\det(sI + AB) = \det(sI + BA)$. 用 $B = \bar{A}$ 代入公式, 则有

$$\overline{p(t)} = \det((t-1)I + \bar{A}A) = \det((t-1)I + A\bar{A}) = p(t)$$

对所有的实数 t 成立, 故 $p(t)$ 的系数都是实数.

(15分)

注: 也可通过利用分块矩阵初等变换求 $\begin{pmatrix} I & B \\ A & sI \end{pmatrix}$ 的行列式来证明公式 $\det(sI - AB) = \det(sI - BA)$. 具体地:

$$\begin{aligned} \forall s \neq 0, \begin{pmatrix} I & 0 \\ -A & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & B \\ A & sI \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} I & B \\ 0 & sI - AB \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} I & B \\ A & sI \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & 0 \\ -A/s & I \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} I - BA/s & B \\ 0 & sI \end{pmatrix} \end{aligned}$$

对上两矩阵等式两边取行列式即得 $\det(sI - AB) = \det(sI - BA)$ 对一切非零的实数均成立. 从而多项式 $\det(sI - AB) - \det(sI - BA) \equiv 0$, 因为多项式 $\det(sI - AB) - \det(sI - BA)$ 至多是 n 次多项式. 获证.

得分	
评阅人	

四、(本题20分) 已知 f_1 为实 n 元正定二次型. 令
 $V = \{f \mid f \text{ 为实 } n \text{ 元二次型, 满足: 对任何实数 } k \text{ 有 } kf + f_1 \text{ 属于恒号二次型}\},$

这里恒号二次型为0二次型, 正定二次型及负定二次型的总称. 证明: V 按照通常的二次型加法和数乘构成一个实向量空间, 并求这个向量空间的维数.

证法1: 设 $f \in V$, f 与 f_1 所对应的二次型矩阵分别为 A 和 B . 由 B 正定可推得

$$\exists P \text{ 可逆, 使得 } B = PP^T, A = P \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix} P^T. \quad (10\text{分})$$

由条件: 对任何实数 k 有 $kf + f_1$ 属于恒号二次型可推得 $\lambda_1 = \cdots = \lambda_n$.

事实上, 若 $\lambda_1 \neq \lambda_2$. 则由式子

$$kf + f_1 = (z_1, \dots, z_n)P \begin{pmatrix} k\lambda_1 + 1 & & \\ & \ddots & \\ & & k\lambda_n + 1 \end{pmatrix} P^T \begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix}$$

知, 总可取某实数 q , 使得 $(q\lambda_1 + 1)(q\lambda_2 + 1) < 0$. 从而可取两点: $(z_1, \dots, z_n)P = (0, 1, 0, \dots, 0)$ 及 $(z_1, \dots, z_n)P = (1, 0, 0, \dots, 0)$, $qf + f_1$ 在该两点取值异号, 矛盾.

到此, 我们实际上得到 $V = \{kf_1 \mid k \in \mathbb{R}\}$.

直接可知, V 按照通常的二次型加法和数乘构成一个实向量空间, 并这个向量空间的维数是1. 证毕. (20分)

证法2: 首先, $V \neq \emptyset$, 因为 $0 \in V$, 且对任何实数 k 有 $kf_1 \in V$. (2分)

其次, 对任意非零 $f \in V$, 若存在 $k \in \mathbf{R}$, 使得 $kf + f_1 \equiv 0$, 则由 f_1 的正定性, 可知 $k \neq 0$, 从而 $f = -\frac{1}{k}f_1$; 若对任意的 $k \in \mathbf{R}$, $kf + f_1 \neq 0$, 则由条件知, $kf + f_1$ 要么为正定二次型, 要么为负定二次型. 断言: f 和 f_1 必线性相关.

用反证法. 若 f 和 f_1 线性无关, 则由 f_1 正定知, 存在点 P_1 使得 $f_1(P_1) > 0$. 此时考察二次型 $g = f_1(P_1)f - f(P_1)f_1$, 由 f 和 f_1 线性无关知 $g \neq 0$ (因为 $\{f_1(P_1), -f(P_1)\}$ 是一组不全为零的数), 故存在 P_2 使得

$$(*) \quad 0 \neq g(P_2) = f_1(P_1)f(P_2) - f(P_1)f_1(P_2).$$

此时有

$$(i) \quad P_2 \neq (0, \dots, 0), f_1(P_2) > 0;$$

(ii) $f(P_2), f(P_1)$ 不同时为零.

先考虑 $f(P_1) \neq 0$ 的情形, 由(*)式有

$$\frac{f_1(P_1)}{-f(P_1)}f(P_2) + f_1(P_2) = \frac{g(P_2)}{-f(P_1)} \neq 0.$$

令 $k = \frac{f_1(P_1)}{-f(P_1)}$, 由 $kf + f_1$ 恒号可知: 当 $\frac{g(P_2)}{-f(P_1)} > 0$ 时, $\frac{f_1(P_1)}{-f(P_1)}f(P_1) + f_1(P_1) > 0$, 明显上述不等式左边为零, 矛盾.

当 $\frac{g(P_2)}{-f(P_1)} < 0$ 时, 得 $\frac{f_1(P_1)}{-f(P_1)}f(P_1) + f_1(P_1) < 0$, 不等式左边为零, 矛盾.

接下来考虑 $f(P_2) \neq 0$ 的情形. 同样由(*)式有

$$-\frac{f_1(P_2)}{f(P_2)}f(P_1) + f_1(P_1) = \frac{g(P_2)}{-f(P_2)} \neq 0.$$

令 $k = -\frac{f_1(P_2)}{f(P_2)}$, 类似地, 由 $kf + f_1$ 恒号可得矛盾.断言获证. (15分)

现在, f 与 f_1 线性相关, 故存在一组不全为0 得数 $\lambda_1\mu$, 使得 $\lambda_1f_1 + \mu f = 0$.

若 $\lambda_1 = 0$, 则 $\mu \neq 0$, 因此有 $f = -\frac{\lambda_1}{\mu}f_1$. 若 $\lambda_1 \neq 0$, 则由 $\lambda_1f_1 \neq 0$ 知 $\mu \neq 0$, 因此仍然有 $f = -\frac{\lambda_1}{\mu}f_1$.

到此, 我们实际上得到 $V = \{kf_1 | k \in \mathbb{R}\}$. (18分)

最后直接可知, V 按照通常的二次型加法和数乘构成一个实向量空间, 并这个向量空间的维数是 1. (20分)

专业:

座位号:

考场号:

所在院校:

准考证号:

姓名:

密封线 答题时不要超过此线

得分	
评阅人	

满足

五、(本题15分) 设 $\delta > 0, \alpha \in (0, 1)$, 实数列 $\{x_n\}$

$$x_{n+1} = x_n \left(1 - \frac{h_n}{n^\alpha}\right) + \frac{1}{n^{\alpha+\delta}}, \quad n \geq 1,$$

其中 $\{h_n\}$ 有正的上下界. 证明: $\{n^\delta x_n\}$ 有界.证明. 记 $c := \inf_{n \geq 1} h_n$.由题设可知存在 $N \geq 1$ 使得当 $n \geq N$ 时, 成立

$$|x_{n+1}| \leq \left(1 - \frac{c}{n^\alpha}\right) |x_n| + \frac{1}{n^{\alpha+\delta}}$$

.....(+3 分= 3 分)

以及

$$\frac{\delta}{n} \leq \frac{c}{2n^\alpha}.$$

.....(+3 分= 6 分)

取 $C := \max\left(N^\delta |x_N|, \frac{2}{c}\right)$. 我们来证明对于 $n \geq N$ 成立 $|x_n| \leq \frac{C}{n^\delta}$. 首先, 由 C 的定义知当 $n = N$ 时, 有 $|x_n| \leq \frac{C}{n^\delta}$. 进一步, 若对某个 $n \geq N$ 成立 $|x_n| \leq \frac{C}{n^\delta}$, 则

$$\begin{aligned} & |x_{n+1}| - \frac{C}{(n+1)^\delta} \leq \left(1 - \frac{c}{n^\alpha}\right) \frac{C}{n^\delta} + \frac{1}{n^{\alpha+\delta}} - \frac{C}{(n+1)^\delta} \\ &= C \left(\frac{1}{n^\delta} - \frac{1}{(n+1)^\delta} \right) - \frac{Cc-1}{n^{\alpha+\delta}} \end{aligned}$$

.....(+3 分= 9 分)

$$\leq \frac{C\delta}{n^{1+\delta}} - \frac{Cc-1}{n^{\alpha+\delta}} \leq \frac{Cc}{2n^{\alpha+\delta}} - \frac{Cc-1}{n^{\alpha+\delta}} = -\frac{Cc-2}{2n^{\alpha+\delta}} \leq 0.$$

.....(+3 分= 12 分)

因此, 由数学归纳法得到当 $n \geq N$ 时, 总成立 $|x_n| \leq \frac{C}{n^\delta}$. 因此, $\{n^\delta x_n\}$ 有界.

.....(+3 分= 15 分)

得分	
评阅人	

六、(本题20分) 设 $f(x) = \frac{1}{1+e^x}$.

(i) 证明 $f(x)$ 是 $[0, +\infty)$ 上的凸函数. 进一步, 证明当 $x, y \geq 0$ 时成立 $f(x) + f(y) \leq f(0) + f(x+y)$.

(ii) 设 $n \geq 3$, 试确定集合 $E \equiv \left\{ \sum_{k=1}^n f(x_k) \mid \sum_{k=1}^n x_k = 0, x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R} \right\}$.

解:

(i) 我们有

$$f'(x) = -\frac{e^x}{(1+e^x)^2}, \quad f''(x) = \frac{e^x(e^x-1)}{(1+e^x)^3}.$$

当 $x \geq 0$ 时, 成立 $f''(x) \geq 0$. 所以 $f(x)$ 是 $[0, +\infty)$ 上的凸函数.

..... (+4 分= 4 分)

从而 $f'(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上单调增加, 因此对于 $x, y \geq 0$, 有

$$f(x+y) - f(x) - f(y) + f(0) = \int_0^y (f'(t+x) - f'(t)) dt \geq 0.$$

..... (+2 分= 6 分)

(ii) 由连续性, 易见 E 是一个区间.

..... (+2 分= 8 分)

我们有 $f(x) + f(-x) = 1$.

..... (+2 分= 10 分)

下设 $x_1 + x_2 + \dots + x_n = 0$.

若 $x_1 = x_2 = \dots = x_n = 0$, 则 $\sum_{j=1}^n f(x_j) = \frac{n}{2}$.

若 x_1, x_2, \dots, x_n 不全为零, 设其中负数的个数为 k , 非负数的个数为 m , 则 $m+k=n, 1 \leq k \leq n-1$.

不妨设 $x_1, \dots, x_m \geq 0, x_{m+1}, \dots, x_n < 0$. 记 $y_1 = -x_{m+1}, y_2 = -x_{m+2}, \dots, y_k = -x_n, x = x_1 + \dots + x_m = y_1 + \dots + y_k$, 则由 (i) 易得

$$f(y_1) + f(y_2) + \dots + f(y_k) \leq (k-1)f(0) + f(x).$$

注意到 $mf\left(\frac{x}{m}\right) - f(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上严格单减,

..... (+4 分= 14 分)

密封线 答题时不要超过此线

我们有

$$\begin{aligned}
 \sum_{j=1}^n f(x_j) &= \sum_{j=1}^m f(x_j) + k - \sum_{j=1}^k f(y_j) \\
 &\geq m f\left(\frac{x}{m}\right) + k - \left((k-1)f(0) + f(x)\right) \\
 &> \lim_{u \rightarrow +\infty} \left[m f\left(\frac{u}{m}\right) + k - ((k-1)f(0) + f(u)) \right] \\
 &= \frac{k+1}{2} \geq 1.
 \end{aligned}$$

这表明 $\inf E \geq 1$ 而 $1 \notin E$.

另一方面, 取 $u > 0, x_1 = x_2 = \dots = x_{n-1} = \frac{u}{n-1}, x_n = -u$, 则

$$\lim_{u \rightarrow +\infty} \sum_{j=1}^n f(x_j) = \lim_{u \rightarrow +\infty} \left((n-1)f\left(\frac{u}{n-1}\right) + 1 - f(u) \right) = 1.$$

因此, $\inf E = 1$.

..... (+4 分= 18 分)

另一方面, 由 $f(-x) = 1 - f(x)$ 可得

$$E = \{n - z | z \in E\}.$$

因此, $\sup E = n - 1$, 且 $n - 1 \notin E$.

所以 E 为开区间 $(1, n - 1)$.

..... (+2 分= 20 分)

第十一届全国大学生数学竞赛初赛(数学类B卷)参考答案

一、(本题15分) 设 L_1 和 L_2 是空间中的两条不垂直的异面直线, 点 B 是它们公垂线段的中点. 点 A_1 和 A_2 分别在 L_1 和 L_2 上滑动, 使得 $A_1B \perp A_2B$. 证明直线 A_1A_2 的轨迹是单叶双曲面.

证明: 取公垂线为 z 轴, B 为原点. 取 x 轴使得 L_1 和 L_2 与之夹角相同. 此时我们有:

$$L_1: \begin{cases} ax + y = 0 \\ z = c, \end{cases}$$

$$L_2: \begin{cases} ax - y = 0 \\ z = -c, \end{cases}$$

其中 $c > 0$. 由于 L_1 与 L_2 不垂直, $a \neq \pm 1$ 4分

设点 A_1 的坐标为 (x_1, y_1, c) , A_2 的坐标 $(x_2, y_2, -c)$, 则

$$ax_1 + y_1 = 0, \quad ax_2 - y_2 = 0. \quad (1)$$

由 $A_1B \perp A_2B$ 得,

$$x_1x_2 + y_1y_2 - c^2 = 0. \quad (2)$$

任取 A_1A_2 上的点 $M(x, y, z)$, 有

$$\frac{x - x_2}{x_1 - x_2} = \frac{y - y_2}{y_1 - y_2} = \frac{z + c}{2c}. \quad (3)$$

..... 10分

消去 x_1, x_2, y_1, y_2 : 令 $\frac{z+c}{2c} = k$, 由(1,3) 得

$$x = kx_1 - (k - 1)x_2; \quad y = -akx_1 - a(k - 1)x_2.$$

由(1,2), $x_1x_2 = \frac{c^2}{1-a^2}$. 又 $k(k - 1) = \frac{z^2-c^2}{4c^2}$, 从而

$$a^2(1 - a^2)x^2 - (1 - a^2)y^2 + a^2z^2 = a^2c^2,$$

所以轨迹是单叶双曲面. 15分

二、(本题10 分) 计算 $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{(1+x^2)(1+x^{2019})}$.

解：我们有

$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{(1+x^2)(1+x^{2019})} = \int_0^1 \frac{dx}{(1+x^2)(1+x^{2019})} + \int_1^{+\infty} \frac{dx}{(1+x^2)(1+x^{2019})}$$

..... 3分

对上式右端的第二个积分做变换 $x = \frac{1}{t}$

得到

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{(1+x^2)(1+x^{2019})} = \int_0^1 \frac{t^{2019}}{(1+t^2)(1+t^{2019})} dt$$

..... 7分

于是

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} \frac{dx}{(1+x^2)(1+x^{2019})} &= \int_0^1 \frac{dx}{(1+x^2)(1+x^{2019})} + \int_1^{+\infty} \frac{dx}{(1+x^2)(1+x^{2019})} \\ &= \int_0^1 \frac{dx}{(1+x^2)(1+x^{2019})} + \int_0^1 \frac{t^{2019}}{(1+t^2)(1+t^{2019})} dt \\ &= \int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} = \arctan x \Big|_0^1 = \frac{\pi}{4}. \end{aligned}$$

..... 10分

三、(本题15分) 设数列 $\{x_n\}$ 满足

$$x_1 > 0, x_{n+1} = \ln(1 + x_n), n = 1, 2, \dots$$

证明: $\{x_n\}$ 收敛并求其极限.

证明: 由于 $x_1 > 0$, 所以 $x_2 = \ln(1+x_1)$ 。由数学归纳法, $x_n > 0, n = 1, 2, \dots$.

..... 3分

$$x_{n+1} - x_n = \ln(1 + x_n) - x_n = \frac{1}{1 + \xi_n} x_n - x_n = \left(\frac{1}{1 + \xi_n} - 1 \right) x_n$$

$$= -\frac{\xi_n}{1 + \xi_n} x_n < 0,$$

这里 $\xi_n \in (0, x_n)$. 所以数列 $\{x_n\}$ 单调减少。..... 8分

应用单调有界定理, $\{x_n\}$ 收敛。..... 10分

设 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a \geq 0$. 由 $x_{n+1} = \ln(1 + x_n)$, 知 $a = \ln(1 + a)$.

令 $f(x) = x - \ln(1 + x)$, $f'(x) = 1 - \frac{1}{1+x} > 0, x \in (0, +\infty), f(0) = 0$. 从而 $x = 0$ 是 $f(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上的唯一零点, 所以 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$ 15分

四、(本题15分) 设 $\{\epsilon_1, \dots, \epsilon_n\}$ 是 n 维实线性空间 V 的一组基, 令 $\epsilon_1 + \epsilon_2 + \dots + \epsilon_n + \epsilon_{n+1} = 0$. 证明:

- (1) 对 $i = 1, 2, \dots, n+1$, $\{\epsilon_1, \dots, \epsilon_{i-1}, \epsilon_{i+1}, \dots, \epsilon_{n+1}\}$ 都构成 V 的基;
- (2) $\forall \alpha \in V$, 在(1)中的 $n+1$ 组基中, 必存在一组基使 α 在此基下的坐标分量均非负;
- (3) 若 $\alpha = a_1\epsilon_1 + a_2\epsilon_2 + \dots + a_n\epsilon_n$, 且 $|a_i|$ ($i = 1, 2, \dots, n$) 互不相同, 则在(1)中的 $n+1$ 组基中, 满足(2)中非负坐标表示的基是唯一的.

证明: (1) 若 $i = n+1$, 显然有 $\epsilon_1, \dots, \epsilon_n$ 是 V 的一组基. 若 $1 \leq i \leq n$, 令

$$k_1\epsilon_1 + k_2\epsilon_2 + \dots + k_{i-1}\epsilon_{i-1} + k_{i+1}\epsilon_{i+1} + \dots + k_n\epsilon_n + k_{n+1}\epsilon_{n+1} = 0.$$

由于 $\epsilon_1 + \epsilon_2 + \dots + \epsilon_n + \epsilon_{n+1} = 0$, 所以有

$$k_{n+1}(\epsilon_1 + \epsilon_2 + \dots + \epsilon_n + \epsilon_{n+1}) = 0$$

..... 2分

两式相减得

$$(k_1 - k_{n+1})\epsilon_1 + \dots + (k_{i-1} - k_{n+1})\epsilon_{i-1} - k_{n+1}\epsilon_i + (k_{i+1} - k_{n+1})\epsilon_{i+1} + \dots + (k_n - k_{n+1})\epsilon_n = 0.$$

由于 $\epsilon_1, \dots, \epsilon_n$ 线性无关, 故得

$$k_1 - k_{n+1} = \dots = k_{i-1} - k_{n+1} = -k_{n+1} = k_{i+1} - k_{n+1} = \dots = k_n - k_{n+1} = 0$$

从而有

$$k_1 = k_2 = \dots = k_{i-1} = k_{i+1} = \dots = k_n = k_{n+1} = 0$$

因此可得 $\epsilon_1, \dots, \epsilon_{i-1}, \epsilon_{i+1}, \dots, \epsilon_{n+1}$ 线性无关, 于是(1)得证. 5分

(2) 由于

$$(\epsilon_1, \dots, \epsilon_{i-1}, \epsilon_i, \epsilon_{i+1}, \dots, \epsilon_n) = (\epsilon_1, \dots, \epsilon_{i-1}, \epsilon_{i+1}, \dots, \epsilon_{n+1})A$$

这里

$$A = \begin{pmatrix} 1 & & & -1 & & \\ & \ddots & & \vdots & & \\ & & 1 & -1 & & \\ & & & -1 & 1 & \\ & & & -1 & & \ddots \\ & & & \vdots & & & 1 \\ & & & -1 & & & \end{pmatrix}$$

为两组基之间的过渡矩阵.

..... 7分

$\forall \alpha \in V$, 设 $\alpha = a_1\epsilon_1 + a_2\epsilon_2 + \cdots + a_n\epsilon_n$, 若 $a_1, a_2, \cdots, a_n \geq 0$, 则结论正确, 否则令 a_i 是负坐标中绝对值最大者, 那么

$$\begin{aligned} \alpha = (\epsilon_1, \epsilon_2, \cdots, \epsilon_n) \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} &= (\epsilon_1, \cdots, \epsilon_{i-1}, \epsilon_{i+1}, \cdots, \epsilon_{n+1}) A \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \\ &= (\epsilon_1, \cdots, \epsilon_{i-1}, \epsilon_{i+1}, \cdots, \epsilon_{n+1}) \begin{pmatrix} a_1 - a_i \\ \vdots \\ a_{i-1} - a_i \\ a_{i+1} - a_i \\ \vdots \\ a_n - a_i \\ -a_i \end{pmatrix} \end{aligned}$$

于是 $\epsilon_1, \cdots, \epsilon_{i-1}, \epsilon_{i+1}, \cdots, \epsilon_{n+1}$ 即为所求的一组基.

..... 10分

(3) 设 $\alpha = a_1\epsilon_1 + a_2\epsilon_2 + \cdots + a_n\epsilon_n$, 且 $|a_i|$ ($i = 1, 2, \cdots, n$) 互不相同. 设 a_i 是负坐标中绝对值最大者, 除了基 $\epsilon_1, \cdots, \epsilon_{i-1}, \epsilon_{i+1}, \cdots, \epsilon_{n+1}$ 之外, 可以证明 α 无论

在哪一组基下的坐标都有负的分量. 事实上, 对任意的 $k \neq i$ 都有

$$\alpha = (\epsilon_1, \epsilon_2, \dots, \epsilon_n) \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = (\epsilon_1, \dots, \epsilon_{k-1}, \epsilon_{k+1}, \dots, \epsilon_{n+1}) \begin{pmatrix} a_1 - a_k \\ \vdots \\ a_i - a_k \\ \vdots \\ a_n - a_k \\ -a_k \end{pmatrix}$$

其中 $a_i - a_k < 0$, 于是知满足(2)中非负坐标表示的基是唯一的.

..... 15分

五、(本题20分) 设 A 是数域 F 上的 n 阶矩阵, 若 $A^2 = I_n$ (I_n 表示单位矩阵), 则称 A 为对合矩阵. 试证:

(1) 若 A 是 n 阶对合矩阵, 则

$$\text{rank}(I_n + A) + \text{rank}(I_n - A) = n;$$

(2) n 阶对合矩阵 A 一定可以对角化, 其相似对角形为 $\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & -I_{n-r} \end{pmatrix}$, 其中 $r = \text{rank}(I_n + A)$;

(3) 若 A, B 均是 n 阶对合矩阵, 且 $AB = BA$, 则存在可逆矩阵 P , 使得 $P^{-1}AP$ 和 $P^{-1}BP$ 同时为对角矩阵.

证明: (1) 因为 $A^2 = I_n$, 故有 $I_n - A^2 = 0$ 即 $(I_n + A)(I_n - A) = 0$,

于是 $\text{rank}(I_n + A) + \text{rank}(I_n - A) \leq n$.

又因为 $(I_n + A) + (I_n - A) = 2I_n$, 所以 $\text{rank}(I_n + A) + \text{rank}(I_n - A) \geq \text{rank}(2I_n) = n$.

从而得

$$\text{rank}(I_n + A) + \text{rank}(I_n - A) = n.$$

..... 5分

(2) 先证 A 的特征值为1或-1. 设 λ 为 A 的任一特征值, 则存在非零向量 α , 使得 $A\alpha = \lambda\alpha$, 由 $A^2 = I_n$ 可得

$$\alpha = A^2\alpha = A(A\alpha) = A(\lambda\alpha) = \lambda^2\alpha$$

由 $\alpha \neq 0$, 可得 $\lambda^2 - 1 = 0$, 所以有 $\lambda = 1$ 或 $\lambda = -1$

8分

下证对合矩阵一定可以对角化. 因为 $A^2 = I_n$, 故 $x^2 - 1 = (x+1)(x-1)$ 为 A 的零化多项式, 所以 A 的最小多项式一定为数域 F 上互素的一次因式的乘积, 从而可知对合矩阵 A 一定可以对角化.

..... 10分

又因为对合矩阵 A 的特征值为1或-1. 由(1)知特征值 $\lambda = 1$ 的几何重数 $r = \text{rank}(I_n + A)$, $\lambda = -1$ 的几何重数为 $n - r = \text{rank}(I_n - A)$, 所以其相似对角形

$$\text{为} \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & -I_{n-r} \end{pmatrix}.$$

..... 12分

可对角化另一证明思路:

[对应于特征值 $\lambda = 1$, 有 $n - \text{rank}(I_n - A)$ 个线性无关的特征向量, 对应于特征值 $\lambda = -1$, 有 $n - \text{rank}(-I_n - A)$ 个线性无关的特征向量, 由(1)知, A 共有 $n - \text{rank}(I_n - A) + n - \text{rank}(-I_n - A) = n$ 个线性无关的特征向量, 从而 A 一定可以对角化, 其相似对角形为 $\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & -I_{n-r} \end{pmatrix}$ 参照上面证明给分]

(3) 由于 A 为对合矩阵, 故存在可逆矩阵 G , 使得

$$G^{-1}AG = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & -I_{n-r} \end{pmatrix}$$

又由 $AB = BA$, 则有

$$(G^{-1}AG)(G^{-1}BG) = (G^{-1}BG)(G^{-1}AG).$$

所以 $G^{-1}BG = \begin{pmatrix} B_{11} & 0 \\ 0 & B_{22} \end{pmatrix}$ 为一个准对角矩阵. 15分

由于 $B^2 = I_n$ 为对合矩阵, 故 $B_{11}^2 = I_r, B_{22}^2 = I_{n-r}$ 也是对合矩阵. 由(2), 存在可逆矩阵 G_1, G_2 , 使得

$$G^{-1}B_{11}G_1 = \begin{pmatrix} I_s & 0 \\ 0 & -I_{r-s} \end{pmatrix}, \quad G_2^{-1}B_{22}G_2 = \begin{pmatrix} I_t & 0 \\ 0 & -I_{n-r-t} \end{pmatrix}$$

为对角矩阵. 令 $P = G \begin{pmatrix} G_1 & 0 \\ 0 & G_2 \end{pmatrix}$, 则有 P 可逆, 且有 $P^{-1}AP, P^{-1}BP$ 同时为对角矩阵. 20分

六、(本题15分) 设函数 $f(x)$ 为闭区间 $[a, b]$ 上的连续凹函数, 满足 $f(a) = 0, f(b) > 0$ 且 $f(x)$ 在 $x = a$ 处存在非零的右导数. 对 $n \geq 2$, 记

$$S_n = \left\{ \sum_{k=1}^n kx_k : \sum_{k=1}^n kf(x_k) = f(b), x_k \in [a, b] \right\}.$$

(1) 证明对 $\forall \alpha \in (0, f(b))$, 存在唯一 $x \in (a, b)$ 使得 $f(x) = \alpha$;

(2) 求 $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sup S_n - \inf S_n)$.

解: (1) 因为函数 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 于是对 $\forall \alpha \in (0, f(b))$ 在 (a, b) 内至少存在一个点 ξ 使得 $f(\xi) = \alpha$ 1分

下面证明满足上述要求的点是唯一的. 假设 $\xi, \eta \in (a, b)$, 满足 $\xi < \eta$ 及 $f(\xi) = f(\eta) = \alpha$. 则点 $(\eta, f(\eta)) = (\eta, \alpha)$ 落在端点为 $(\xi, f(\xi)) = (\xi, \alpha), (b, f(b))$ 的线段的下方, 这与函数的凹性矛盾. 3分

(2) 我们记

$$T_n = \left\{ (x_1, x_2, \dots, x_n) : \sum_{k=1}^n kf(x_k) = f(b), x_k \in [a, b] \right\}, \quad n \geq 2.$$

现对 $\forall (x_1, \dots, x_n) \in T_n$, 由函数的凹性有

$$\frac{2f(b)}{n(n+1)} = \frac{\sum_{k=1}^n kf(x_k)}{1+2+\dots+n} \leq f\left(\frac{x_1+2x_2+\dots+nx_n}{1+2+\dots+n}\right)$$

..... 5分

于是,

$$\frac{x_1+2x_2+\dots+nx_n}{1+2+\dots+n} \geq f^{-1}\left(\frac{2f(b)}{n(n+1)}\right),$$

即

$$\sum_{k=1}^n kx_k \geq \frac{n(n+1)}{2} f^{-1}\left(\frac{2f(b)}{n(n+1)}\right)$$

上面不等式当 $x_1 = x_2 = \dots = x_n = f^{-1}\left(\frac{2f(b)}{n(n+1)}\right) \in [a, b]$ 时等号成立. 而 $(x_1, x_2, \dots, x_n) = \left(f^{-1}\left(\frac{2f(b)}{n(n+1)}\right), f^{-1}\left(\frac{2f(b)}{n(n+1)}\right), \dots, f^{-1}\left(\frac{2f(b)}{n(n+1)}\right)\right) \in T_n$,

于是

$$\inf S_n = \frac{n(n+1)}{2} f^{-1} \left(\frac{2f(b)}{n(n+1)} \right)$$

..... 8分

另一方面, 连接点 $(a, f(a))$ 与点 $(b, f(b))$ 的直线段落在曲线 $y = f(x)$ 的下方。
故有对任意 $x \in [a, b]$

$$\frac{f(b)}{b-a}(x-a) \leq f(x),$$

即

$$x \leq \frac{b-a}{f(b)} f(x) + a.$$

于是

$$\sum_{k=1}^n kx_k \leq \frac{b-a}{f(b)} \sum_{k=1}^n kf(x_k) + \frac{n(n+1)}{2}a = b-a + \frac{n(n+1)}{2}a$$

..... 10分

注意, 上式的等号当 $x_1 = b, x_2 = x_3 = \cdots = x_n = a$ 时达到。而 $(x_1, x_2, \cdots, x_n) = (b, a, a, \cdots, a) \in T_n$, 故有

$$\sup S_n = b-a + \frac{n(n+1)}{2}a$$

..... 12分

于是

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} (\sup S_n - \inf S_n) &= b-a + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n(n+1)}{2} \left(a - f^{-1} \left(\frac{2f(b)}{n(n+1)} \right) \right) \\ &= b-a + f(b) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a - f^{-1} \left(\frac{2f(b)}{n(n+1)} \right)}{\frac{2f(b)}{n(n+1)}} \\ &= b-a + f(b) \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{a - f^{-1}(x)}{x} = b-a + f(b) \lim_{t \rightarrow a^+} \frac{a-t}{f(t)} \\ &= b-a - \frac{f(b)}{f'(a)} \end{aligned}$$

..... 15分

七、(本题10分) 设正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a_n}$ 收敛. 证明级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 a_n}{S_n^2}$ 收敛, 其中 $S_n =$

$$\sum_{k=1}^n a_k.$$

证明: 记 $S_0 = 0$, $\sigma = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a_n}$. 则

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^N \frac{n^2 a_n}{S_n^2} &= \sum_{n=1}^N \frac{n^2}{S_n^2} (S_n - S_{n-1}) = \frac{1}{a_1} + \sum_{n=2}^N \frac{n^2}{S_n^2} (S_n - S_{n-1}) \\ &\leq \frac{1}{a_1} + \sum_{n=2}^N \frac{n^2}{S_n S_{n-1}} (S_n - S_{n-1}) = \frac{1}{a_1} + \sum_{n=2}^N \frac{n^2}{S_{n-1}} - \sum_{n=2}^N \frac{n^2}{S_n} \\ &= \frac{1}{a_1} + \sum_{n=1}^{N-1} \frac{(n+1)^2}{S_n} - \sum_{n=2}^N \frac{n^2}{S_n} \leq \frac{5}{a_1} + 2 \sum_{n=2}^N \frac{n}{S_n} + \sum_{n=2}^N \frac{1}{S_n} \end{aligned} \quad (1)$$

..... 4分

由Cauchy不等式

$$\sum_{n=2}^N \frac{n}{S_n} \leq \sum_{n=2}^N \frac{n}{S_n} \sqrt{a_n} \frac{1}{\sqrt{a_n}} \leq \left(\sum_{n=1}^N \frac{n^2 a_n}{S_n^2} \right)^{1/2} \cdot \left(\sum_{n=1}^N \frac{1}{a_n} \right)^{1/2} \quad \text{..... 6分}$$

则由(1)

$$\sum_{n=1}^N \frac{n^2 a_n}{S_n^2} \leq \frac{5}{a_1} + 2 \left(\sum_{n=1}^N \frac{n^2 a_n}{S_n^2} \right)^{1/2} \cdot \sqrt{\sigma} + \sigma,$$

从而得到

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^N \frac{n^2 a_n}{S_n^2} - 2 \left(\sum_{n=1}^N \frac{n^2 a_n}{S_n^2} \right)^{1/2} \cdot \sqrt{\sigma} + \sigma &\leq \frac{5}{a_1} + 2\sigma, \\ \left(\sum_{n=1}^N \frac{n^2 a_n}{S_n^2} \right)^{1/2} &\leq \sqrt{\sigma} + \sqrt{2\sigma + 5/a_1}. \end{aligned}$$

于是级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 a_n}{S_n^2}$ 收敛。 10分

第十届全国大学生数学竞赛试卷 (数学类, 2018年10月)

考试形式: 闭卷 考试时间: 150 分钟 满分: 100 分

题号	一	二	三	四	五	六	总分
满分	15	15	20	15	15	20	100
得分							

- 注意: 1. 所有答题都须写在此试卷纸密封线右边, 写在其它纸上一律无效.
2. 密封线左边请勿答题, 密封线外不得有姓名及相关标记.
3. 如答题空白不够, 可写在当页背面, 并标明题号.

一、(本题 15 分)在空间直角坐标系中, 设马鞍面 S 的方程为 $x^2 - y^2 = 2z$. 设 σ 为平面 $z = \alpha x + \beta y + \gamma$, 其中 α, β, γ 为给定常数. 求马鞍面 S 上点 P 的坐标, 使得过 P 且落在马鞍面 S 上的直线均平行于平面 σ .

解: 设所求 P 点坐标为 $P = (a, b, c)$, 满足 $a^2 - b^2 = 2c$. 则过 P 的直线可以表为

$$\ell = \ell(t) = (a, b, c) + t(u, v, w), \quad u^2 + v^2 + w^2 \neq 0, \quad t \in \mathbb{R}.$$

直线 $\ell(t)$ 落在马鞍面 S 上, 得到

$$(u^2 - v^2)t^2 + 2(au - bv - w)t = 0, \quad t \in \mathbb{R}.$$

$$au - bv = w, \quad u^2 - v^2 = 0.$$

于是有

$$v = \varepsilon u, \quad w = (a - \varepsilon b)u, \quad \varepsilon = \pm 1.$$

(5分)

于是, 过 P 点恰有两条直线落在马鞍面 S 上, 为

$$\ell_1 = \ell_1(t) = (a, b, c) + tu(1, 1, a - b),$$

$$\ell_2 = \ell_2(t) = (a, b, c) + tu(1, -1, a + b).$$

这两条直线的方向向量 $(1, 1, a - b)$ 和 $(1, -1, a + b)$ 均平行于平面 σ , 而平面 σ 的法向量为 $(\alpha, \beta, -1)$. 我们得到

$$\alpha + \beta = a - b, \quad \alpha - \beta = a + b.$$

(10分)

于是

$$a = \alpha, \quad b = -\beta, \quad c = \frac{1}{2}(\alpha^2 - \beta^2).$$

故所求点 P 的坐标为

$$P = (\alpha, -\beta, \frac{1}{2}(\alpha^2 - \beta^2)).$$

(15分)

二、(本题 15 分) $A = (a_{ij})_{n \times n}$ 为 n 阶实方阵, 满足

1) $a_{11} = a_{22} = \cdots = a_{nn} = a > 0$;

2) 对每个 $i(i = 1, \dots, n)$, 有 $\sum_{j=1}^n |a_{ij}| + \sum_{j=1}^n |a_{ji}| < 4a$.

求 $f(x_1, \dots, x_n) = (x_1, \dots, x_n)A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ 的规范形.

解: $f = (x_1, \dots, x_n) \frac{A+A^T}{2} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$. 令 $B = (b_{ij}) = \frac{A+A^T}{2}$, 则 B 为实对称阵,

(2分)

且

$$b_{11} = b_{22} = \cdots = b_{nn} = a;$$

$$\sum_{j=1}^n |b_{ij}| = \sum_{j=1}^n \left| \frac{a_{ij}}{2} + \frac{a_{ji}}{2} \right| < 2a$$

结果, $b_{ii} > \sum_{j \neq i} |b_{ij}|$.

(5分)

若 λ 为 B 的特征值, $\alpha = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ 为关于 λ 的非零特征向量, 记

$$|x_i| = \max_{1 \leq j \leq n} |x_j| > 0.$$

由于 $B\alpha = \lambda\alpha$,

$$\lambda = \frac{\sum_{j=i}^n b_{ij}x_j}{x_i} \geq a - \sum_{j \neq i} |b_{ij}| > 0.$$

(10分)

故 B 为正定矩阵, f 的规范形为 $y_1^2 + \cdots + y_n^2$.

(15分)

三、(20分) 元素皆为整数的矩阵称为整矩阵. 设 n 阶方阵 A, B 皆为整矩阵.

1) 证明以下两条等价: $i)$ A 可逆且 A^{-1} 仍为整矩阵; $ii)$ A 的行列式的绝对值为1.

2) 若又知 $A, A - 2B, A - 4B, \dots, A - 2nB, A - 2(n+1)B, \dots, A - 2(n+n)B$ 皆可逆, 且它们的逆矩阵皆仍为整矩阵. 证明: $A + B$ 可逆.

证明: 1) $i) \Rightarrow ii)$. 由 $AA^{-1} = I$ 知 $|A| \cdot |A^{-1}| = 1$. 注意到 $|A|, |A^{-1}|$ 皆为整数. 故 A 的行列式的绝对值为1.

$ii) \Rightarrow i)$. 由 $AA^* = |A|I$ 知 $A^{-1} = A^*/|A|$ 立即知 $i)$ 成立. (10分)

2) 考虑多项式 $p(x) = |A - xB|^2$. 则由已给条件得 $p(0), p(2), p(4), \dots, p(4n)$ 的值皆为1. 结果多项式 $q(x) = p(x) - 1$ 有超过 $2n$ 个的零点, 从而得出 $q(x) \equiv 0$, 即 $p(x) \equiv 1$. 特别地, $p(-1) = |A + B|^2 = 1$. 故 $A + B$ 可逆. 证毕. (20分)

四、(本题15分) 设 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上连续可微, 在 $x = 0$ 处有任意阶导数, $f^{(n)}(0) = 0$ ($\forall n \geq 0$), 且存在常数 $C > 0$ 使得

$$|xf'(x)| \leq C|f(x)|, \quad \forall x \in [0, 1].$$

证明: (1) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)}{x^n} = 0$ ($\forall n \geq 0$); (2) 在 $[0, 1]$ 上成立 $f(x) \equiv 0$.

证明: (1) 由假设, 对任何 $m \geq 0$, $f(x)$ 在零点附近有 $m+1$ 阶导数, 从而 $f^{(m)}(x)$ 在 $x = 0$ 连续. 因此, $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)}{x^0} = f(0) = 0$. (2分)

对于 $n \geq 1$, 利用 L'Hospital 法则,

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)}{x^n} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f'(x)}{nx^{n-1}} = \dots = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f^{(n)}(x)}{n!} = 0.$$

(5分)

(2) 我们有

$$xf(x)f'(x) \leq x|f(x)||f'(x)| \leq C|f(x)|^2, \quad \forall x \in [0, 1].$$

从而

$$\left(\frac{f^2(x)}{x^{2C}} \right)' = \frac{2(xf(x)f'(x) - Cf^2(x))}{x^{2C+1}} \leq 0, \quad \forall x \in (0, 1].$$

(10分)

因此 $\frac{f^2(x)}{x^{2C}}$ 在 $(0, 1]$ 上单调减少, 从而

$$\frac{f^2(x)}{x^{2C}} \leq \left(\frac{f(t)}{t^C}\right)^2, \quad \forall 0 < t < x \leq 1.$$

所以

$$\frac{f^2(x)}{x^{2C}} \leq \lim_{t \rightarrow 0^+} \left(\frac{f(t)}{t^C}\right)^2 = 0, \quad \forall x \in (0, 1].$$

因此, $f(x) \equiv 0$. (15分)

五、(本题15分) 设 $\{a_n\}, \{b_n\}$ 是两个数列, $a_n > 0 (n \geq 1)$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 绝对收敛, 且

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} \leq 1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n \ln n} + b_n, \quad n \geq 2.$$

求证: (1) $\frac{a_n}{a_{n+1}} < \frac{n+1}{n} \cdot \frac{\ln(n+1)}{\ln n} + b_n (n \geq 2)$; (2) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散.

证明 (1) 因为 $\ln(1 + \frac{1}{n}) > \frac{1}{n+1} (n \geq 2)$, 所以根据条件, 有

$$\begin{aligned} \frac{a_n}{a_{n+1}} &\leq 1 + \frac{1}{n} + \frac{n+1}{n \ln n} \cdot \frac{1}{n+1} + b_n \\ &< 1 + \frac{1}{n} + \frac{n+1}{n \ln n} \cdot \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) + b_n \\ &= \frac{n+1}{n} \cdot \frac{\ln(n+1)}{\ln n} + b_n. \end{aligned}$$

(5分)

(2) 令 $c_n = (n \ln n)a_n$, $d_n = \frac{n \ln n}{(n+1) \ln(n+1)} \cdot |b_n|$. 则有

$$\frac{c_n}{c_{n+1}} < 1 + d_n.$$

取对数, 得

$$\ln c_n - \ln c_{n+1} < \ln(1 + d_n) \leq d_n.$$

于是

$$\ln c_2 - \ln c_n < \sum_{k=2}^{n-1} d_k, \quad (n \geq 3).$$

(10分)

由于 $0 \leq d_n < |b_n|$, 从 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 绝对收敛, 可知 $\sum_{n=1}^{\infty} d_n$ 收敛. 故, 由上式可知存在常数 c 使得

$$c \leq \ln c_n, \quad n \geq 3.$$

即,

$$a_n \geq \frac{e^c}{n \ln n}, \quad n \geq 3.$$

于是 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散. (15分)

(2) 法二: 由条件

$$\begin{aligned} \ln \frac{a_n}{a_{n+1}} &\leq \ln \left(1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n \ln n} + |b_n| \right) \\ &\leq \frac{1}{n} + \frac{1}{n \ln n} + |b_n|. \end{aligned}$$

从 3 到 n 求和, 然后利用积分的性质可知存在常数 $C > 0$ 使得

$$\begin{aligned} \ln \frac{a_3}{a_{n+1}} &\leq \sum_{k=3}^n \left(\frac{1}{k} + \frac{1}{k \ln k} + |b_k| \right) \\ &\leq C + \ln n + \ln \ln n. \end{aligned}$$

(10分)

于是

$$a_{n+1} \geq \frac{a_3 e^C}{n \ln n}.$$

故, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散. (15分)

六、(本题20分) 设 $f: \mathbb{R} \rightarrow (0, +\infty)$ 是一可微函数, 且对所有 $x, y \in \mathbb{R}$, 有

$$|f'(x) - f'(y)| \leq |x - y|^\alpha,$$

其中 $\alpha \in (0, 1]$ 是常数. 求证: 对所有 $x \in \mathbb{R}$, 有

$$|f'(x)|^{\frac{\alpha+1}{\alpha}} < \frac{\alpha+1}{\alpha} f(x).$$

证明 对固定的 $x \in \mathbb{R}$, 若 $f'(x) = 0$, 则 (2) 成立. (2分)

若 $f'(x) < 0$, 则 $h = (-f'(x))^{\frac{1}{\alpha}} > 0$. 根据 Newton-Leibniz 公式和条件, 得

$$\begin{aligned} 0 < f(x+h) &= f(x) + \int_x^{x+h} f'(t) dt \\ &= f(x) + \int_x^{x+h} (f'(t) - f'(x)) dt + f'(x)h \\ &\leq f(x) + \int_x^{x+h} (t-x)^\alpha dt + f'(x)h \\ &= f(x) + \frac{1}{\alpha+1}h^{\alpha+1} + f'(x)h. \end{aligned}$$

故

$$\frac{1}{\alpha+1}h^{\alpha+1} + f'(x)h + f(x) > 0. \quad (3)$$

将 $h = (-f'(x))^{\frac{1}{\alpha}}$ 代入上式, 即得

$$|f'(x)|^{\frac{\alpha+1}{\alpha}} < \frac{\alpha+1}{\alpha}f(x). \quad (11分)$$

若 $f'(x) > 0$, 则记 $h = (f'(x))^{\frac{1}{\alpha}}$. 根据 Newton-Leibniz 公式和条件, 得

$$\begin{aligned} 0 < f(x-h) &= - \int_{x-h}^x f'(t) dt + f(x) \\ &= \int_{x-h}^x (f'(x) - f'(t)) dt - f'(x)h + f(x) \\ &\leq \int_{x-h}^x (x-t)^\alpha dt - f'(x)h + f(x) \\ &= \frac{1}{\alpha+1}h^{\alpha+1} - f'(x)h + f(x). \end{aligned}$$

将 $h = (f'(x))^{\frac{1}{\alpha}}$ 代入上式, 仍得

$$(f'(x))^{\frac{\alpha+1}{\alpha}} < \frac{\alpha+1}{\alpha}f(x).$$

总之, 始终有 $|f'(x)|^{\frac{\alpha+1}{\alpha}} < \frac{\alpha+1}{\alpha}f(x)$. 证毕. (20分)

第九届中国大学生数学竞赛预赛试卷参考答案 (数学类, 2017年10月)

考试形式: 闭卷 考试时间: 150 分钟 满分: 100 分

题号	一	二	三	四	五	六	总分
满分	15	15	15	20	15	20	100
得分							

- 注意: 1. 所有答题都须写在此试卷纸密封线右边, 写在其它纸上一律无效.
2. 密封线左边请勿答题, 密封线外不得有姓名及相关标记.
3. 如答题空白不够, 可写在当页背面, 并标明题号.

得分	
评阅人	

一、(本题 15 分) 在空间直角坐标系中, 设单叶双曲面 Γ 的方程为 $x^2 + y^2 - z^2 = 1$. 设 P 为空间中的平面, 它交 Γ 于一抛物线 C . 求该平面 P 的法线与 z -轴的夹角.

解: 设平面 P 上的抛物线 C 的顶点为 $X_0 = (x_0, y_0, z_0)$. 取平面 P 上 X_0 处相互正交的两单位向量 $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ 和 $\beta = (\beta_1, \beta_2, \beta_3)$, 使得 β 是抛物线 C 在平面 P 上的对称轴方向. 则抛物线的参数方程为

$$X(t) = X_0 + t\alpha + \lambda t^2\beta, \quad t \in \mathbf{R},$$

λ 为不等于0的常数. (5分)

记 $X(t) = (x(t), y(t), z(t))$, 则

$$x(t) = x_0 + \alpha_1 t + \lambda \beta_1 t^2, \quad y(t) = y_0 + \alpha_2 t + \lambda \beta_2 t^2, \quad z(t) = z_0 + \alpha_3 t + \lambda \beta_3 t^2.$$

因为 $X(t)$ 落在单叶双曲面 Γ 上, 代入方程 $x^2 + y^2 - z^2 = 1$, 我们得到对任意 t 要满足的方程

$$\lambda^2(\beta_1^2 + \beta_2^2 - \beta_3^2)t^4 + 2\lambda(\alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2 - \alpha_3\beta_3)t^3 + A_1t^2 + A_2t + A_3 = 0,$$

其中 A_1, A_2, A_3 是与 X_0, α, β 相关的常数. 于是得到

$$\beta_1^2 + \beta_2^2 - \beta_3^2 = 0, \quad \alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2 - \alpha_3\beta_3 = 0.$$

(10分)

因为 $\{\alpha, \beta\}$ 是平面 P 上正交的两单位向量, 则有

$$\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2 = 1, \quad \beta_1^2 + \beta_2^2 + \beta_3^2 = 1, \quad \alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2 + \alpha_3\beta_3 = 0.$$

于是得到

$$\beta_1^2 + \beta_2^2 = \beta_3^2 = \frac{1}{2}, \quad \alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2 = 0, \quad \alpha_3 = 0, \quad \alpha_1^2 + \alpha_2^2 = 1;$$

$$\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, 0), \quad \beta = \left(-\frac{\varepsilon}{\sqrt{2}}\alpha_2, \frac{\varepsilon}{\sqrt{2}}\alpha_1, \beta_3\right), \quad \varepsilon = \pm 1.$$

于是得到平面 P 的法向量

$$n = \alpha \times \beta = \left(A, B, \frac{\varepsilon}{\sqrt{2}}\right),$$

它与 z -轴方向 $e = (0, 0, 1)$ 的夹角 θ 满足 $\cos \theta = n \cdot e = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$, 为 $\frac{\pi}{4}$ 或 $\frac{3\pi}{4}$. (15分)

密封线 答题时不要超过此线

得分	
评阅人	

二、(本题 15 分) 设 $\{a_n\}$ 是递增数列, $a_1 > 1$. 求证:
级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{n+1} - a_n}{a_n \ln a_{n+1}}$ 收敛的充分必要条件是 $\{a_n\}$ 有界. 又问级数通项分母中的 a_n 能否换成 a_{n+1} ?

证明 充分性: 若 $\{a_n\}$ 有界, 则可设 $a_n \leq M$.

$$\sum_{n=1}^m \frac{a_{n+1} - a_n}{a_n \ln a_{n+1}} \leq \sum_{n=1}^m \frac{a_{n+1} - a_n}{a_1 \ln a_1} = \frac{a_{m+1} - a_1}{a_1 \ln a_1} \leq \frac{M}{a_1 \ln a_1}.$$

由此知 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{n+1} - a_n}{a_n \ln a_{n+1}}$ 收敛. (5分)

必要性: 设 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{n+1} - a_n}{a_n \ln a_{n+1}}$ 收敛. 由于

$$\ln(a_{n+1}) - \ln(a_n) = \ln\left(1 + \frac{a_{n+1} - a_n}{a_n}\right) \leq \frac{a_{n+1} - a_n}{a_n},$$

所以

$$\frac{b_{n+1} - b_n}{b_{n+1}} \leq \frac{a_{n+1} - a_n}{a_n \ln a_{n+1}},$$

其中 $b_n = \ln a_n$. 因此, 级数 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{b_{n+1} - b_n}{b_{n+1}}$ 收敛. (10分)

由 Cauchy 收敛准则, 存在自然数 m , 使得对一切自然数 p , 有

$$\frac{1}{2} > \sum_{n=m}^{m+p} \frac{b_{n+1} - b_n}{b_{n+1}} \geq \sum_{n=m}^{m+p} \frac{b_{n+1} - b_n}{b_{m+p+1}} = \frac{b_{m+p+1} - b_m}{b_{m+p+1}} = 1 - \frac{b_m}{b_{m+p+1}}.$$

由此可知 $\{b_n\}$ 有界, 因为 p 是任意的. 因而 $\{a_n\}$ 有界. (13分)

题中级数分母的 a_n 不能换成 a_{n+1} . 例如: $a_n = e^{n^2}$ 无界, 但 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{n+1} - a_n}{a_{n+1} \ln a_{n+1}}$ 收敛. (15分)

得分	
评阅人	

三、证明题（15分）设 $\Gamma = \{W_1, W_2, \dots, W_r\}$ 为 r 个各不相同的可逆 n 阶复方阵构成的集合. 若该集合关于矩阵乘法封闭(即, $\forall M, N \in \Gamma$, 有 $MN \in \Gamma$), 证明: $\sum_{i=1}^r W_i = 0$ 当且仅当 $\sum_{i=1}^r \text{tr}(W_i) = 0$, 其中 $\text{tr}(W_i)$ 表示 W_i 的迹.

证明: 必要性: 由迹的性质直接知. (2分)

充分性: 首先, 对于可逆矩阵 $W \in \Gamma$, 有 WW_1, \dots, WW_r 各不相同. 故有

$$W\Gamma \equiv \{WW_1, WW_2, \dots, WW_r\} = \{W_1, W_2, \dots, W_r\},$$

即, $W\Gamma = \Gamma, \forall W \in \Gamma$. (7分)

记 $S = \sum_{i=1}^r W_i$, 则 $WS = S, \forall W \in \Gamma$. 进而 $S^2 = rS$, 即, $S^2 - rS = 0$. 若 λ 为 S 的特征值, 则 $\lambda^2 - r\lambda = 0$, 即 $\lambda = 0$ 或 r .

结合条件 $\sum_{i=1}^r \text{tr}(W_i) = 0$ 知, S 的特征值只能为0. 因此有 $S - rI$ 可逆 (例如取 S 的约当分解就可直接看出)

再次注意到 $S(S - rI) = S^2 - rS = 0$, 此时右乘 $(S - rI)^{-1}$ 即得 $S = 0$. 证毕. (15分)

得分	
评阅人	

四、(本题20分) 给定非零实数 a 及实 n 阶反对称矩阵 A (即, A 的转置 A^T 等于 $-A$), 记矩阵有序对集合 T 为:

$$T = \{(X, Y) | X \in \mathbb{R}^{n \times n}, Y \in \mathbb{R}^{n \times n}, XY = aI + A\},$$

其中 I 为 n 阶单位阵, $\mathbb{R}^{n \times n}$ 为所有实 n 阶方阵构成的集合。证明: 任取 T 中两元: (X, Y) 和 (M, N) , 必有 $XN + Y^T M^T \neq 0$.

证明: 反证. 若 $XN + Y^T M^T = 0$, 则有

$$N^T X^T + MY = 0.$$

(2分)

另外, 由 $(X, Y) \in T$ 得

$$XY + (XY)^T = 2aI,$$

即

$$XY + Y^T X^T = 2aI.$$

类似有

$$MN + N^T M^T = 2aI.$$

因此,

$$\begin{pmatrix} X & Y^T \\ M & N^T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Y & N \\ X^T & M^T \end{pmatrix} = 2a \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix},$$

(10分)

进而

$$\frac{1}{2a} \begin{pmatrix} Y & N \\ X^T & M^T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X & Y^T \\ M & N^T \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix},$$

得

$$YY^T + NN^T = 0$$

所以

$$Y = 0, N = 0$$

导致 $XY = 0$, 与 $XY = aI + A \neq 0$ 矛盾. 证毕.

(20分)

得分	
评阅人	

五、（本题15分）设 $f(x) = \arctan x$, A 为常数. 若

$$B = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right) - An \right)$$

存在, 求 A, B .

解:

法 I. 我们有

$$\begin{aligned} A &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right) = \int_0^1 f(x) dx \\ &= x \arctan x \Big|_0^1 - \int_0^1 \frac{x}{1+x^2} dx = \frac{\pi}{4} - \frac{\ln 2}{2}. \end{aligned}$$

.....(6 分)

对于 $x \in (\frac{k-1}{n}, \frac{k}{n})$, $(1 \leq k \leq n)$, 由中值定理, 存在 $\xi_{n,k} \in (\frac{k-1}{n}, \frac{k}{n})$ 使得

$$f(x) = f\left(\frac{k}{n}\right) + f'\left(\frac{k}{n}\right)\left(x - \frac{k}{n}\right) + \frac{f''(\xi_{n,k})}{2}\left(x - \frac{k}{n}\right)^2.$$

.....(9 分)

于是,

$$\begin{aligned} & \left| \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right) - nA + \sum_{k=1}^n n \int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} f'\left(\frac{k}{n}\right)\left(x - \frac{k}{n}\right) dx \right| \\ &= \left| \sum_{k=1}^n n \int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} \left[f\left(\frac{k}{n}\right) + f'\left(\frac{k}{n}\right)\left(x - \frac{k}{n}\right) - f(x) \right] dx \right| \\ &\leq M \sum_{k=1}^n n \int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} \left(x - \frac{k}{n}\right)^2 dx = \frac{M}{3n}, \end{aligned}$$

其中 $M = \frac{1}{2} \max_{x \in [0,1]} |f''(x)|$.

.....(12 分)

因此,

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right) - An \right) &= - \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n n \int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} f'\left(\frac{k}{n}\right)\left(x - \frac{k}{n}\right) dx \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2n} \sum_{k=1}^n f'\left(\frac{k}{n}\right) = \frac{1}{2} \int_0^1 f'(x) dx = \frac{\pi}{8}. \end{aligned}$$

.....(15 分)

法 II. 我们有

$$\begin{aligned} A &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right) = \int_0^1 f(x) dx \\ &= x \arctan x \Big|_0^1 - \int_0^1 \frac{x}{1+x^2} dx = \frac{\pi}{4} - \frac{\ln 2}{2}. \end{aligned}$$

.....(6 分)

对于 $x \in (\frac{k-1}{n}, \frac{k}{n})$, $(1 \leq k \leq n)$, 由中值定理, 存在 $\xi_{n,k} \in (\frac{k-1}{n}, \frac{k}{n})$ 使得

$$f\left(\frac{k}{n}\right) = f(x) + f'(x)\left(\frac{k}{n} - x\right) + \frac{f''(\xi_{n,k})}{2}\left(\frac{k}{n} - x\right)^2.$$

.....(9 分)

于是,

$$\begin{aligned} &\left| \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right) - nA - \sum_{k=1}^n n \int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} f'(x)\left(\frac{k}{n} - x\right) dx \right| \\ &= \left| \sum_{k=1}^n n \int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} \left[f\left(\frac{k}{n}\right) - f(x) - f'(x)\left(\frac{k}{n} - x\right) \right] dx \right| \\ &\leq M \sum_{k=1}^n n \int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} \left(\frac{k}{n} - x\right)^2 dx = \frac{M}{3n}, \end{aligned}$$

其中 $M = \frac{1}{2} \max_{x \in [0,1]} |f''(x)|$.
.....(12 分)

因此,

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right) - An \right) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n n \int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} f'(x)\left(\frac{k}{n} - x\right) dx \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n n f'(\eta_{n,k}) \int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} \left(\frac{k}{n} - x\right) dx \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2n} \sum_{k=1}^n f'(\eta_{n,k}) = \frac{1}{2} \int_0^1 f'(x) dx = \frac{\pi}{8}, \end{aligned}$$

其中 $\eta_{n,k} \in (\frac{k-1}{n}, \frac{k}{n})$.
.....(15 分)

法 III. 我们有

$$\begin{aligned} A &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right) = \int_0^1 f(x) dx \\ &= x \arctan x \Big|_0^1 - \int_0^1 \frac{x}{1+x^2} dx = \frac{\pi}{4} - \frac{\ln 2}{2}. \end{aligned}$$

.....(6 分)

对于 $x \in (\frac{k-\frac{1}{2}}{n}, \frac{k+\frac{1}{2}}{n})$, $(1 \leq k \leq n)$, 由中值定理, 存在 $\xi_{n,k} \in (\frac{k-\frac{1}{2}}{n}, \frac{k+\frac{1}{2}}{n})$ 使得

$$f(x) = f\left(\frac{k}{n}\right) + f'\left(\frac{k}{n}\right)\left(x - \frac{k}{n}\right) + \frac{f''(\xi_{n,k})}{2}\left(x - \frac{k}{n}\right)^2.$$

.....(9 分)

于是,

$$\begin{aligned} & \left| \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right) - nA - n \int_1^{1+\frac{1}{2n}} f(x) dx + n \int_0^{\frac{1}{2n}} f(x) dx \right| \\ &= \left| \sum_{k=1}^n n \int_{\frac{k-\frac{1}{2}}{n}}^{\frac{k+\frac{1}{2}}{n}} \left[f\left(\frac{k}{n}\right) - f(x) + f'\left(\frac{k}{n}\right)\left(\frac{k}{n} - x\right) \right] dx \right| \\ &\leq M \sum_{k=1}^n n \int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} \left(\frac{k}{n} - x\right)^2 dx = \frac{M}{3n}, \end{aligned}$$

其中 $M = \frac{1}{2} \max_{x \in [0,1]} |f''(x)|$.

.....(12 分)

因此,

$$\begin{aligned} & \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right) - An \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} n \int_1^{1+\frac{1}{2n}} f(x) dx - \lim_{n \rightarrow \infty} n \int_0^{\frac{1}{2n}} f(x) dx \\ &= \frac{f(1)}{2} - \frac{f(0)}{2} = \frac{\pi}{8}. \end{aligned}$$

.....(15 分)

得分	
评阅人	

六、(本题20分) 设 $f(x) = 1 - x^2 + x^3$ ($x \in [0, 1]$), 计算以下极限并说明理由

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\int_0^1 f^n(x) \ln(x+2) dx}{\int_0^1 f^n(x) dx}.$$

解: 易见 $f(x)$ 连续. 注意到 $f(x) = 1 - x^2(1-x)$, 我们有

$$0 < f(x) < 1 = f(0) = f(1), \quad \forall x \in (0, 1).$$

..... (3 分)
任取 $\delta \in (0, \frac{1}{2})$, 我们有 $\eta = \eta_\delta \in (0, \delta)$ 使得

$$m_\eta \equiv \min_{x \in [0, \eta]} f(x) > M_\delta \equiv \max_{x \in [\delta, 1-\delta]} f(x).$$

..... (6 分)
于是当 $n \geq \frac{1}{\delta^2}$ 时,

$$\begin{aligned} 0 &\leq \frac{\int_\delta^1 f^n(x) dx}{\int_0^\delta f^n(x) dx} = \frac{\int_{1-\delta}^1 f^n(x) dx}{\int_0^\delta f^n(x) dx} + \frac{\int_\delta^{1-\delta} f^n(x) dx}{\int_0^\delta f^n(x) dx} \\ &= \frac{\int_0^\delta (1 - x(1-x)^2)^n dx}{\int_0^\delta (1 - x^2(1-x))^n dx} + \frac{\int_\delta^{1-\delta} f^n(x) dx}{\int_0^\delta f^n(x) dx} \\ &\leq \frac{\int_0^\delta (1 - \frac{x}{4})^n dx}{\int_0^\delta (1 - x^2)^n dx} + \frac{\int_\delta^{1-\delta} f^n(x) dx}{\int_0^\eta f^n(x) dx} \\ &\leq \frac{\int_0^\delta (1 - \frac{x}{4})^n dx}{\int_0^{\frac{1}{\sqrt{n}}} (1 - \frac{x}{\sqrt{n}})^n dx} + \frac{(1-2\delta)M_\delta^n}{\eta m_\eta^n} \\ &= \frac{\frac{4}{n+1} \left(1 - (1 - \frac{\delta}{4})^{n+1}\right)}{\frac{\sqrt{n}}{n+1} \left(1 - (1 - \frac{1}{n})^{n+1}\right)} + \frac{(1-\delta)}{\eta} \left(\frac{M_\delta}{m_\eta}\right)^n. \end{aligned}$$

从而

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\int_\delta^1 f^n(x) dx}{\int_0^\delta f^n(x) dx} = 0.$$

..... (14 分)

=====

(注: 可以用多种写法说明上述极限成立. 原则上, 给出

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\int_{\delta}^{1-\delta} f^n(x) dx}{\int_0^{\delta} f^n(x) dx} = 0$$

可以给 4 分, 给出

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\int_{1-\delta}^1 f^n(x) dx}{\int_0^{\delta} f^n(x) dx} = 0$$

给 4 分.)

=====

对于 $\varepsilon \in (0, \ln \frac{5}{4})$, 取 $\delta = 2(e^{\varepsilon} - 1)$, 则 $\delta \in (0, \frac{1}{2})$, $\ln \frac{2+\delta}{2} = \varepsilon$.

另一方面, 由前述结论, 存在 $N \geq 1$ 使得当 $n \geq N$ 时有

$$\frac{\int_{\delta}^1 f^n(x) dx}{\int_0^{\delta} f^n(x) dx} \leq \varepsilon.$$

从而又有

$$\begin{aligned} & \left| \frac{\int_0^1 f^n(x) \ln(x+2) dx}{\int_0^1 f^n(x) dx} - \ln 2 \right| = \frac{\int_0^1 f^n(x) \ln \frac{x+2}{2} dx}{\int_0^1 f^n(x) dx} \\ & \leq \frac{\int_0^{\delta} f^n(x) \ln \frac{x+2}{2} dx}{\int_0^{\delta} f^n(x) dx} + \frac{\int_{\delta}^1 f^n(x) \ln \frac{x+2}{2} dx}{\int_0^{\delta} f^n(x) dx} \\ & \leq \ln \frac{\delta+2}{2} + \frac{\ln 2 \int_{\delta}^1 f^n(x) dx}{\int_0^{\delta} f^n(x) dx} \\ & \leq \varepsilon(1 + \ln 2). \end{aligned}$$

因此

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\int_0^1 f^n(x) \ln(x+2) dx}{\int_0^1 f^n(x) dx} = \ln 2.$$

.....(20 分)

第八届全国大学生数学竞赛预赛试卷参考答案 (数学类, 2016年10月)

一、(本题 15 分) 设 S 是空间中的一个椭球面. 设方向为常向量 V 的一束平行光线照射 S , 其中的部分光线与 S 相切, 它们的切点在 S 上形成一条曲线 Γ .

证明: Γ 落在一张过椭球中心的平面上.

证明 1 在空间中取直角坐标系, 记椭球面 S 的方程为

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1, \quad V = (\alpha, \beta, \gamma).$$

设 $(x, y, z) \in \Gamma$, 则光束中的光线

$$\ell(t) = (x, y, z) + t(\alpha, \beta, \gamma), t \in \mathbb{R}$$

是椭球面 S 的切线.

..... (8分)

由于每条切线与椭球面有且仅有一个交点, 故 $t = 0$ 是方程

$$\frac{(x + t\alpha)^2}{a^2} + \frac{(y + t\beta)^2}{b^2} + \frac{(z + t\gamma)^2}{c^2} = 1$$

的唯一解. 由于 $(x, y, z) \in \Gamma \subset S$, 上述方程化为

$$\left(\frac{\alpha^2}{a^2} + \frac{\beta^2}{b^2} + \frac{\gamma^2}{c^2}\right)t^2 + 2\left(\frac{\alpha}{a^2}x + \frac{\beta}{b^2}y + \frac{\gamma}{c^2}z\right)t = 0.$$

这个方程只有 $t = 0$ 的唯一解, 当且仅当

$$\frac{\alpha}{a^2}x + \frac{\beta}{b^2}y + \frac{\gamma}{c^2}z = 0.$$

这是一个过原点的平面方程, 故 Γ 落在过椭球面中心的一张平面上.

.....(15分)

证明 2 在空间中做仿射变换, 将椭球面映成圆球面.

..... (5分)

这时平行光束映成平行光束, 切线映成切线, 切点映成切点, 椭球中心映成球面中心.

..... (10分)

由于平行光束照圆球面的所有切线的切点是一个大圆, 它落在过球心的平面上, 而仿射变换将平面映成平面, 故 Γ 落在一张过椭球面中心的平面上.

..... (15分)

二、(本题 15 分) 设 n 为奇数, A, B 为两个实 n 阶方阵, 且 $BA = 0$. 记 $A + J_A$ 的特征值集合为 S_1 , $B + J_B$ 的特征值集合为 S_2 , 其中 J_A, J_B 分别表示 A 和 B 的 Jordan 标准型. 求证 $0 \in S_1 \cup S_2$.

证明 由秩不等式 $\text{rank } A + \text{rank } B \leq \text{rank}(BA) + n$ 得 $\text{rank } A + \text{rank } B \leq n$. 结果 $\text{rank } A \leq \frac{n}{2}$ 或 $\text{rank } B \leq \frac{n}{2}$(5分)

注意到 n 为奇数, 故有 $\text{rank } A < \frac{n}{2}$ 或 $\text{rank } B < \frac{n}{2}$ 成立。(10分)

若 $\text{rank } A < \frac{n}{2}$, 则 $\text{rank}(A + J_A) \leq \text{rank } A + \text{rank } J_A < n$, 此时, $0 \in S_1$;

若 $\text{rank } B < \frac{n}{2}$, 则 $\text{rank}(B + J_B) \leq \text{rank } B + \text{rank } J_B < n$, 此时, $0 \in S_2$. 最终总有 $0 \in S_1 \cup S_2$(15分)

三、(本题 20 分) 设 A_1, \dots, A_{2017} 为 2016 阶实方阵。证明关于 x_1, \dots, x_{2017} 的方程 $\det(x_1 A_1 + \dots + x_{2017} A_{2017}) = 0$ 至少有一组非零实数解, 其中 \det 表示行列式.

证明 记

$$A_1 = (p_1^{(1)}, \dots, p_{2016}^{(1)}), \dots, A_{2017} = (p_1^{(2017)}, \dots, p_{2016}^{(2017)}).$$

.....(5分)

考虑线性方程组

$$x_1 p_1^{(1)} + \dots + x_{2017} p_1^{(2017)} = 0$$

.....(10分)

由于未知数个数大于方程个数, 故该线性方程组必有非零解 (c_1, \dots, c_{2017}) . 从而 $c_1 A_1 + \dots + c_{2017} A_{2017}$ 的第一列为 0, 更有

$$\det(c_1 A_1 + \dots + c_{2017} A_{2017}) = 0.$$

证毕。

.....(20分)

四、(本题 20 分) 设 $f_0(x)$ 和 $f_1(x)$ 是 $[0, 1]$ 上正连续函数, 满足 $\int_0^1 f_0(x) dx \leq \int_0^1 f_1(x) dx$. 设

$$f_{n+1}(x) = \frac{2f_n^2(x)}{f_n(x) + f_{n-1}(x)}, \quad n = 1, 2, \dots.$$

求证: 数列 $a_n = \int_0^1 f_n(x) dx$, $n = 0, 1, 2, \dots$ 单调递增且收敛.

证明 因为

$$\begin{aligned} & \int_0^1 \frac{f_1^2(x)}{f_1(x) + f_0(x)} dx - \int_0^1 \frac{f_0^2(x)}{f_1(x) + f_0(x)} dx \\ &= \int_0^1 \frac{f_1^2(x) - f_0^2(x)}{f_1(x) + f_0(x)} dx = \int_0^1 f_1(x) dx - \int_0^1 f_0(x) dx \geq 0. \end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned} a_2 - a_1 &= 2 \int_0^1 \frac{f_1^2(x)}{f_1(x) + f_0(x)} dx - \int_0^1 f_1(x) dx \\ &= \int_0^1 \frac{f_1^2(x)}{f_1(x) + f_0(x)} dx - \int_0^1 \frac{f_1(x)f_0(x)}{f_1(x) + f_0(x)} dx \\ &\geq \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{f_1^2(x) + f_0^2(x)}{(f_1(x) + f_0(x))} dx - \int_0^1 \frac{f_1(x)f_0(x)}{f_1(x) + f_0(x)} dx \\ &= \int_0^1 \frac{(f_1(x) - f_0(x))^2}{2(f_1(x) + f_0(x))} dx \geq 0. \end{aligned}$$

归纳地可以证明 $a_{n+1} \geq a_n$, $n = 1, 2, \dots$(5分)

由于 f_0, f_1 是正连续函数, 可取常数 $k \geq 1$ 使得 $f_1 \leq kf_0$. 设 $c_1 = k$. 根据递推关系可以归纳证明

$$f_n(x) \leq c_n f_{n-1}(x), \quad (1)$$

.....(10分)

其中 $c_{n+1} = \frac{2c_n}{c_n+1}$, $n = 0, 1, \dots$. 易证 $\{c_n\}$ 单调递减趋于 1, 且 $\frac{c_n}{c_n+1} \leq \frac{k}{k+1}$.

.....(15分)

以下证明 $\{a_n\}$ 收敛. 由 (1) 可得 $a_{n+1} \leq c_{n+1}a_n$. 因此

$$c_{n+1}a_{n+1} \leq \frac{2c_{n+1}}{c_n+1}c_na_n = \frac{4c_n}{(c_n+1)^2}c_na_n \leq c_na_n.$$

这说明 $\{c_na_n\}$ 是正单调递减数列, 因而收敛. 注意到 $\{c_n\}$ 收敛到 1, 可知 $\{a_n\}$ 收敛, 且 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \leq c_1a_1 = ka_1$(20分)

五、(本题 15 分) 设 $\alpha > 1$. 求证不存在 $[0, +\infty)$ 上的正可导函数 $f(x)$ 满足

$$f'(x) \geq f^\alpha(x), \quad x \in [0, +\infty). \quad (1)$$

证明 若 $f(x)$ 是这样的函数, 则 $f'(x) > 0$. 因此 $f(x)$ 是严格递增函数. (1) 式可表示为

$$\left(\frac{1}{\alpha-1} f^{1-\alpha}(x) + x \right)' \leq 0.$$

这说明 $\frac{1}{\alpha-1} f^{1-\alpha}(x) + x$ 是单调递减函数.(5分)

因而

$$\frac{1}{\alpha-1} f^{1-\alpha}(x+1) + (x+1) \leq \frac{1}{\alpha-1} f^{1-\alpha}(x) + x,$$

即,

$$(\alpha-1) \leq f^{1-\alpha}(x) - f^{1-\alpha}(x+1) < f^{1-\alpha}(x).$$

因此

$$f^{\alpha-1}(x) < \frac{1}{\alpha-1}.$$

于是 $f(x)$ 是有界函数.(10分)

从 $f(x)$ 的严格递增性, 可知 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ 收敛. 由微分中值定理, 存在 $\xi \in (x, x+1)$ 使得

$$f(x+1) - f(x) = f'(\xi) \geq f^\alpha(\xi) \geq f^\alpha(x) \geq f^\alpha(0) > 0.$$

令 $x \rightarrow +\infty$, 上式左端趋于零, 可得矛盾!(15分)

六、(本题 15 分) 设 $f(x)$ 和 $g(x)$ 是 $[0, 1]$ 区间上的单调递增函数, 满足

$$0 \leq f(x), g(x) \leq 1, \int_0^1 f(x)dx = \int_0^1 g(x)dx.$$

求证:

$$\int_0^1 |f(x) - g(x)|dx \leq \frac{1}{2}.$$

证明 由于 f 和 g 可用单调阶梯函数逼近, 故可不妨设他们都是单调增的阶梯函数。.....(2分)

令 $h(x) = f(x) - g(x)$, 则对 $\forall x, y \in [0, 1]$ 有 $|h(x) - h(y)| \leq 1$(5分)

事实上, 对 $x \geq y$ 我们有

$$-1 \leq -(g(x) - g(y)) \leq h(x) - h(y) = f(x) - f(y) - (g(x) - g(y)) \leq f(x) - f(y) \leq 1;$$

对 $x < y$ 有

$$-1 \leq f(x) - f(y) \leq h(x) - h(y) \leq g(y) - g(x) \leq 1.$$

现记

$$C_1 = \{x \in [0, 1] \mid f(x) \geq g(x)\}, \quad C_2 = \{x \in [0, 1] \mid f(x) < g(x)\},$$

则 C_1 与 C_2 分别为有限个互不相交区间的并, 且由 $\int_0^1 f dx = \int_0^1 g dx$, 有

$$\int_{C_1} h dx = - \int_{C_2} h dx.$$

让 $|C_i| (i = 1, 2)$ 表示 C_i 所含的那些区间的长度之和, 则 $|C_1| + |C_2| = 1$(7分)

于是

$$\begin{aligned} 2 \int_0^1 |f - g| dx &= 2 \left(\int_{C_1} h dx - \int_{C_2} h dx \right) \\ &\leq \left(\frac{|C_2|}{|C_1|} \int_{C_1} h dx + \frac{|C_1|}{|C_2|} \int_{C_2} (-h) dx \right) + \int_{C_1} h dx - \int_{C_2} h dx \\ &= \frac{1}{|C_1|} \int_{C_1} h dx + \frac{1}{|C_2|} \int_{C_2} (-h) dx \\ &\leq \sup_{C_1} h + \sup_{C_2} (-h) \\ &\leq 1. \end{aligned}$$

注意, 上式中最后一个不等式来自 $|h(x) - h(y)| \leq 1$, 另外, 若有某个 $|C_i|$ 等于 0, 则结论显然成立。.....(15分)

第七届中国大学生数学竞赛预赛试卷参考答案及评分标准 (数学类, 2015年10月)

考试形式: 闭卷 考试时间: 150 分钟 满分: 100 分

一、(本题 15 分) 设 L_1 和 L_2 是空间中两异面直线. 设在标准直角坐标系下直线 L_1 过坐标为 a 的点, 以单位向量 v 为直线方向; 直线 L_2 过坐标为 b 的点, 以单位向量 w 为直线方向.

1) 证明: 存在唯一点 $P \in L_1$ 和 $Q \in L_2$ 使得两点连线 PQ 同时垂直于 L_1 和 L_2 .

2) 求 P 点和 Q 点坐标(用 a, b, v, w 表示).

解: 1) 过直线 L_2 上一点和线性无关向量 v 和 w 做平面 σ , 则直线 L_2 落在平面 σ 上, 且直线 L_1 平行于平面 σ . 过 L_1 做平面 τ 垂直于平面 σ , 记两平面交线为 L_1^* . 设两直线 L_1^* 和 L_2 的交点为 Q , 过 Q 做平面 σ 的法线, 交直线 L_1 为 P , 则 PQ 同时垂直于 L_1 和 L_2(4分)

设 $X = P + sv \in L_1$ 和 $Y = Q + tw \in L_2$ 也使得 XY 同时垂直于 L_1 和 L_2 , 则有 $\overrightarrow{XY} = \overrightarrow{PQ} - sv + tw$ 垂直于 v 和 w , 故有 $-s + (v \cdot w)t = 0$ 和 $-s(v \cdot w) + t = 0$. 由于 $(v \cdot w)^2 < 1$, 我们得到 $s = t = 0$, 即 $X = P$, $Y = Q$, 这样的 P 和 Q 存在且唯一.(8分)

2) 设 $P = a + sv \in L_1$ 和 $Q = b + tw \in L_2$. 因为 $\overrightarrow{PQ} = \lambda v \times w$, 我们得到

$$(b - a) - sv + tw = \lambda v \times w, \quad \text{.....(11分)}$$

于是有

$$(b - a) \cdot v - s + t(v \cdot w) = 0, (b - a) \cdot w - s(v \cdot w) + t = 0$$

故有

$$s = \frac{(b - a) \cdot (v - (v \cdot w)w)}{1 - (v \cdot w)^2}, t = \frac{(a - b) \cdot (w - (v \cdot w)v)}{1 - (v \cdot w)^2}$$

得到

$$P = a + \frac{(b - a) \cdot (v - (v \cdot w)w)}{1 - (v \cdot w)^2}v, Q = b + \frac{(a - b) \cdot (w - (v \cdot w)v)}{1 - (v \cdot w)^2}w. \quad \text{.....(15分)}$$

二、(本题 20 分) A 为 4 阶复方阵, 它满足关于迹的关系式: $\text{tr} A^i = i, i = 1, 2, 3, 4$. 求 A 的行列式.

解 $|A| = \frac{1}{24}$, 过程如下:

首先, 记 A 的 4 个特征值为 $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$, A 的特征多项式为 $p(\lambda) = \lambda^4 + a_3\lambda^3 + a_2\lambda^2 + a_1\lambda + a_0$. 则由 $p(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2)(\lambda - \lambda_3)(\lambda - \lambda_4)$ 可知

$$\begin{cases} a_3 = -(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4) \\ a_2 = \lambda_1\lambda_2 + \lambda_1\lambda_3 + \lambda_1\lambda_4 + \lambda_2\lambda_3 + \lambda_2\lambda_4 + \lambda_3\lambda_4 \\ a_1 = -(\lambda_1\lambda_2\lambda_3 + \lambda_1\lambda_2\lambda_4 + \lambda_1\lambda_3\lambda_4 + \lambda_2\lambda_3\lambda_4) \\ a_0 = |A| = \lambda_1\lambda_2\lambda_3\lambda_4 \end{cases}$$

其次, 由于迹在相似变换下保持不变, 故由 A 的约当标准形 (或 Schur 分解) 立知

$$\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4 = 1 \cdots \cdots \cdots (1) \\ \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 + \lambda_4^2 = 2 \cdots \cdots \cdots (2) \\ \lambda_1^3 + \lambda_2^3 + \lambda_3^3 + \lambda_4^3 = 3 \cdots \cdots \cdots (3) \\ \lambda_1^4 + \lambda_2^4 + \lambda_3^4 + \lambda_4^4 = 4 \cdots \cdots \cdots (4) \end{cases}$$

.....(10分)

由 (1) 和 (2) 得

$$a_2 = \lambda_1\lambda_2 + \lambda_1\lambda_3 + \lambda_1\lambda_4 + \lambda_2\lambda_3 + \lambda_2\lambda_4 + \lambda_3\lambda_4 = -\frac{1}{2}$$

由 (1) 两边立方得

$$1 = \lambda_1^3 + \lambda_2^3 + \lambda_3^3 + \lambda_4^3 + 3\lambda_1^2(\lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4) + 3\lambda_2^2(\lambda_1 + \lambda_3 + \lambda_4) + 3\lambda_3^2(\lambda_2 + \lambda_1 + \lambda_4) + 3\lambda_4^2(\lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_1) - 6a_1$$

再由 (1) (2) (3) 即得

$$1 = 3 + 3\lambda_1^2 - 3\lambda_1^3 + 3\lambda_2^2 - 3\lambda_2^3 + 3\lambda_3^2 - 3\lambda_3^3 + 3\lambda_4^2 - 3\lambda_4^3 - 6a_1$$

$$a_1 = -\frac{1}{6}$$

最后, 由 $p(\lambda) = \lambda^4 - \lambda^3 - \frac{1}{2}\lambda^2 - \frac{1}{6}\lambda + a_0$ 得

$$\begin{cases} p(\lambda_1) = 0 \\ \vdots \\ p(\lambda_4) = 0 \end{cases}$$

相加得

$$4 - 3 - \frac{1}{2} \times 2 - \frac{1}{6} \times 1 + 4a_0 = 0$$

结果 $a_0 = \frac{1}{24}$, 亦即 A 的行列式为 $\frac{1}{24}$. □

.....(20分)

三、(本题 15 分) 设 A 为 n 阶实方阵, 其 n 个特征值皆为偶数. 试证明关于 X 的矩阵方程

$$X + AX - XA^2 = 0$$

只有零解。

证明 设 $C = I + A$, $B = A^2$, A 的 n 个特征值为 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$, 则 B 的 n 个特征值为 $\lambda_1^2, \lambda_2^2, \dots, \lambda_n^2$; C 的 n 个特征值为 $\mu_1 = \lambda_1 + 1, \mu_2 = \lambda_2 + 1, \dots, \mu_n = \lambda_n + 1$; C 的特征多项式为 $p_C(\lambda) = (\lambda - \mu_1)(\lambda - \mu_2) \cdots (\lambda - \mu_n)$.

.....(5分)

若 X 为 $X + AX - XA^2 = 0$ 的解, 则有 $CX = XB$; 进而 $C^2X = XB^2, \dots, C^kX = XB^k \dots$, 结果 $0 = p_C(C)X = Xp_C(B) = X(B - \mu_1I) \cdots (B - \mu_nI)$. 注意到 B 的 n 个特征值皆为偶数, 而 C 的 n 个特征值皆为奇数, 故

$B - \mu_1I, \dots, B - \mu_nI$ 皆为可逆矩阵, 结果由 $0 = X(B - \mu_1I) \cdots (B - \mu_nI)$ 立得 $X = 0$. \square

.....(15分)

四、(本题 15 分) 数列 $\{a_n\}$ 满足关系式 $a_{n+1} = a_n + \frac{n}{a_n}$, $a_1 > 0$. 求证 $\lim_{n \rightarrow \infty} n(a_n - n)$ 存在.

证明 $a_2 = a_1 + \frac{1}{a_1} \geq 2$. 若 $a_n \geq n$, 则

$$a_{n+1} - (n+1) = a_n + \frac{n}{a_n} - n - 1 = (1 - \frac{1}{a_n})(a_n - n) \geq 0, \text{ 故}$$

$a_n \geq n, \forall n \geq 2$, 且 $a_n - n$ 单调递减.

.....(5分)

令 $b_n = n(a_n - n)$, 则

$$b_{n+1} = (n+1)(a_{n+1} - n - 1) = (n+1)(a_n + \frac{n}{a_n} - n - 1)$$

$$= (a_n - n)(n+1)(1 - \frac{1}{a_n}) = (1 + \frac{1}{n})(1 - \frac{1}{a_n})b_n$$

$$= (1 + \frac{a_n - n}{na_n} - \frac{1}{na_n})b_n = (1 + R_n)b_n, \text{ 其中 } R_n = \frac{a_n - n}{na_n} - \frac{1}{na_n}. \text{ 从而 } b_n = b_2 \prod_{k=2}^{n-1} (1 + R_k).$$

.....(10分)

考察 R_n .

$$|R_n| \leq |\frac{a_n - n}{na_n}| + \frac{1}{na_n} \leq \frac{1 + |a_2 - 2|}{n^2}, n \geq 2.$$

结果由 $\lim_{n \rightarrow \infty} \prod_{k=2}^{n-1} (1 + R_k)$ 存在知 $\lim_{n \rightarrow \infty} n(a_n - n)$ 存在.

.....(15分)

五、(本题 15 分) 设 $f(x)$ 是 $[0, +\infty)$ 上有界连续函数, $h(x)$ 是 $[0, +\infty)$ 上连续函数, 且 $\int_0^{+\infty} |h(t)| dt = a < 1$. 构造函数列如下: $g_0(x) = f(x)$,

$$g_n(x) = f(x) + \int_0^x h(t)g_{n-1}(t) dt, \quad n = 1, 2, \dots \quad (1)$$

求证 $\{g_n(x)\}$ 收敛于一个连续函数, 并求其极限函数.

证明 记 $M = \sup |f(x)|$. 因而 $|g_0(x)| \leq M$. 假设 $|g_{n-1}(x)| \leq (1 + a + \dots + a^{n-1})M$. 由 (1) 可得

$$\begin{aligned} |g_n(x)| &\leq |f(x)| + \int_0^x |h(t)| |g_{n-1}(t)| dt \\ &\leq M + \int_0^{+\infty} |h(t)| (1 + a + \dots + a^{n-1}) M dt \\ &= M + a(1 + a + \dots + a^{n-1})M \\ &= (1 + a + \dots + a^{n-1} + a^n)M. \end{aligned}$$

因此 $|g_n(x)| \leq \frac{1-a^{n+1}}{1-a}M$. 由 (1) 可得

$$g_n(x) - g_{n-1}(x) = \int_0^x h(t)(g_{n-1}(t) - g_{n-2}(t)) dt,$$

由此可得

$$\sup |g_n(x) - g_{n-1}(x)| \leq a \sup |g_{n-1}(x) - g_{n-2}(x)|.$$

从而

$$\sup |g_n(x) - g_{n-1}(x)| \leq a^{n-1} \sup |g_1(x) - g_0(x)| \leq a^n M.$$

.....5分

由于 $a \in [0, 1)$, 从上面这个式子, 可知函数项级数

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (g_n(x) - g_{n-1}(x))$$

在 $[0, +\infty)$ 上一致收敛, 即函数列 $\{g_n(x)\}$ 在 $[0, +\infty)$ 上一致收敛. 因为函数列的每一项都连续, 因而其极限函数 $g(x)$ 也是连续函数.10分

在 (1) 的两边取极限得

$$g(x) = f(x) + \int_0^x h(t)g(t) dt. \quad (2)$$

记 $\psi(x) = \int_0^x h(t)g(t) dt$, $H(x) = \int_0^x h(t) dt$, 则此二函数可导, 且 $\psi'(x) = h(x)g(x)$, $H'(x) = h(x)$. 由 (2) 得

$$\psi'(x) - h(x)\psi(x) = h(x)f(x).$$

因而

$$\left(e^{-H(x)}\psi(x)\right)' = e^{-H(x)}h(x)f(x).$$

两边积分可得

$$e^{-H(x)}\psi(x) = \int_0^x e^{-H(t)}h(t)f(t) dt.$$

即,

$$\psi(x) = e^{H(x)} \int_0^x e^{-H(t)}h(t)f(t) dt.$$

将此代入 (2) 就得到

$$g(x) = f(x) + e^{H(x)} \int_0^x e^{-H(t)}h(t)f(t) dt.$$

.....15分

六、(本题 20 分) 设 $f(x)$ 是 \mathbb{R} 上有下界或者有上界的连续函数且存在正数 a 使得

$$f(x) + a \int_{x-1}^x f(t) dt$$

为常数。求证: $f(x)$ 必为常数。

证明: 不妨设 $f(x)$ 有下界。设 $m = \inf_{x \in \mathbb{R}} f(x)$, $g(x) = f(x) - m$, 则 $g(x)$ 为非负连续函数, 且

$$A = g(x) + a \int_{x-1}^x g(t) dt \quad (1)$$

为非负常数。5分

由 (1) 知 $g(x)$ 是可微函数, 且

$$g'(x) + a(g(x) - g(x-1)) = 0. \quad (2)$$

由此

$$(e^{ax}g(x))' = ae^{ax}g(x-1) \geq 0.$$

这说明 $e^{ax}g(x)$ 是递增函数。10分

由 (1), 可得

$$\begin{aligned} A &= g(x) + a \int_{x-1}^x e^{at}g(t)e^{-at} dt \\ &\leq g(x) + ae^{ax}g(x) \int_{x-1}^x e^{-at} dt \\ &= g(x) + e^{ax}g(x)(e^{-a(x-1)} - e^{-ax}) \\ &= e^a g(x). \end{aligned}$$

由此, 可得

$$g(x) \geq Ae^{-a}.$$

..... 15分

由 $g(x)$ 的定义知, $g(x)$ 的下确界为零, 因此 $A = 0$. 再根据 (1) 可知 $g(x)$ 恒等于零, 即 $f(x)$ 为常数。20分

专业:

考生座位号:

所在院校:

准考证号:

姓名:

密封线 答题时不要超过此线

第六届中国大学生数学竞赛预赛试卷 (数学类, 2014年10月)

考试形式: 闭卷 考试时间: 150 分钟 满分: 100 分

题号	一	二	三	四	五	六	总分
满分	15	15	15	15	20	20	100
得分							

- 注意: 1. 所有答题都须写在此试卷纸密封线右边, 写在其它纸上一律无效.
 2. 密封线左边请勿答题, 密封线外不得有姓名及相关标记.
 3. 如答题空白不够, 可写在当页背面, 并标明题号.

一、(本题 15 分) 已知空间的两条直线

$$l_1: \frac{x-4}{1} = \frac{y-3}{-2} = \frac{z-8}{1},$$

$$l_2: \frac{x+1}{7} = \frac{y+1}{-6} = \frac{z+1}{1}.$$

- 1) 证明 l_1 和 l_2 异面;
- 2) 求 l_1 和 l_2 公垂线的标准方程;
- 3) 求连接 l_1 上的任一点和 l_2 上的任一点线段中点的轨迹的一般方程.

(1) 证明: l_1 上有点 $r_1 = (4, 3, 8)$, 方向向量为 $v_1 = (1, -2, 1)$.

l_2 上有点 $r_2 = (-1, -1, -1)$, 方向向量为 $v_2 = (7, -6, 1)$.

又

$$(r_1 - r_2, v_1, v_2) = \begin{vmatrix} 5 & 4 & 9 \\ 1 & -2 & 1 \\ 7 & -6 & 1 \end{vmatrix} \neq 0,$$

故 l_1 和 l_2 异面。 (3分)

(2) l_1 上的任一点 $P_1 = r_1 + t_1 v_1$ 与 l_2 上的任一点 $P_2 = r_2 + t_2 v_2$ 的连线的方向向量为

$$\begin{aligned} \overrightarrow{P_1 P_2} &= r_2 - r_1 + t_2 v_2 - t_1 v_1 \\ &= (-5 + 7t_2 - t_1, -4 - 6t_2 + 2t_1, -9 + t_2 - t_1). \end{aligned}$$

公垂线的方向向量为

$$v = v_1 \times v_2 = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & -2 & 1 \\ 7 & -6 & 1 \end{vmatrix} = (4, 6, 8).$$

由 $\overrightarrow{P_1P_2}$ 与 v 平行:

$$(-5 + 7t_2 - t_1) : (-4 - 6t_2 + 2t_1) : (-9 + t_2 - t_1) = 4 : 6 : 8$$

得

$$t_1 = -1, t_2 = 0.$$

故点 $r_2 + 0v_2 = (-1, -1, -1)$ 在公垂线上, 从而公垂线的标准方程为

$$\frac{x+1}{4} = \frac{y+1}{6} = \frac{z+1}{8}. \quad (9\text{分})$$

(3) $P_1 = r_1 + t_1v_1$ 与 $P_2 = r_2 + t_2v_2$ 的中点为

$$\frac{1}{2}(3 + t_1 + 7t_2, 2 - 2t_1 - 6t_2, 7 + t_1 + t_2).$$

因此中点轨迹为一个平面, 平面的法向量为

$$v = v_1 \times v_2 = (4, 6, 8).$$

又点 $\frac{1}{2}(3, 2, 7)$ 在平面上, 故轨迹的方程为

$$4x + 6y + 8z - 40 = 0. \quad (15\text{分})$$

二、(本题 15 分) 设 $f \in C[0, 1]$ 是非负的严格单调增函数。

1) 证明: 对任意 $n \in \mathbb{N}$, 存在唯一的 $x_n \in [0, 1]$, 使得

$$(f(x_n))^n = \int_0^1 (f(x))^n dx.$$

2) 证明: $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 1$.

证明: 1)

$$f(0)^n \leq \int_0^1 (f(x))^n dx \leq f(1)^n,$$

由连续函数的介值性质得到 x_n 的存在性。 (3分)

由于 f 是严格单调函数, x_n 是唯一的。 (5分)

2) 对任意的小 $\epsilon > 0$, 由 f 的非负性和单调性,

$$(f(x_n))^n \geq \int_{1-\epsilon}^1 (f(1-\epsilon))^n = \epsilon(f(1-\epsilon))^n,$$

故

$$f(x_n) \geq \sqrt[n]{\epsilon} f(1-\epsilon),$$

从而

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} f(x_n) \geq f(1-\epsilon).$$

由 f 的单调性,

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} x_n \geq 1 - \epsilon.$$

由 ϵ 的任意性, $\lim x_n = 1$.

(15分)

三、(本题 15 分) 设 V 为闭区间 $[0, 1]$ 上全体实函数构成的实向量空间, 其中向量加法与纯量乘法均为通常的. $f_1, \dots, f_n \in V$. 证明以下两条等价:

1) f_1, \dots, f_n 线性无关;

2) $\exists a_1, \dots, a_n \in [0, 1]$ 使得 $\det(f_i(a_j)) \neq 0$, 这里 \det 表行列式.

证明 2) \Rightarrow 1). 考虑方程 $\lambda_1 f_1 + \dots + \lambda_n f_n = 0$. 将 a_1, \dots, a_n 分别代入, 得方程组

$$\begin{cases} \lambda_1 f_1(a_1) + \dots + \lambda_n f_n(a_1) = 0 \\ \vdots \\ \lambda_1 f_1(a_n) + \dots + \lambda_n f_n(a_n) = 0 \end{cases}$$

注意到上述方程组的系数矩阵为 $(f_i(a_j))^T$, 因此由 $\det(f_i(a_j)) \neq 0$ 直接知道 $\lambda_1 = \dots = \lambda_n = 0$.

(6分)

1) \Rightarrow 2). 用归纳法. 首先, $n = 1$ 时, 结论显然.

其次, 设 $n = k$ 时结论真. 则 $n = k + 1$ 时, 由 f_1, \dots, f_{k+1} 线性无关知, f_1, \dots, f_k 线性无关. 因此 $\exists a_1, \dots, a_k \in [0, 1]$ 使得 $\det(f_i(a_j))_{k \times k} \neq 0$. 观察函数

$$F(x) = \det \begin{pmatrix} f_1(a_1) & \cdots & f_1(a_k) & f_1(x) \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ f_k(a_1) & \cdots & f_k(a_k) & f_k(x) \\ f_{k+1}(a_1) & \cdots & f_{k+1}(a_k) & f_{k+1}(x) \end{pmatrix}.$$

按最后一列展开得

$$F(x) = \lambda_1 f_1(x) + \dots + \lambda_k f_k(x) + \lambda_{k+1} f_{k+1}(x),$$

其中 $\lambda_1, \dots, \lambda_{k+1}$ 均为常量. 注意到 $\lambda_{k+1} \neq 0$, 因此由 f_1, \dots, f_{k+1} 线性无关知 $F(x)$ 不恒为 0, 从而 $\exists a_{k+1} \in [0, 1]$ 使得 $F(a_{k+1}) \neq 0$. 亦即 $a_1, \dots, a_{k+1} \in [0, 1]$, $\det(f_i(a_j)) \neq 0$. 证毕.

(15分)

四、(本题 15 分) 设 $f(x)$ 在 \mathbb{R} 上有二阶导函数, $f(x), f'(x), f''(x)$ 都大于零, 假设存在正数 a, b 使得 $f''(x) \leq af(x) + bf'(x)$ 对一切 $x \in \mathbb{R}$ 成立.

(i) 求证: $\lim_{x \rightarrow -\infty} f'(x) = 0$;

(ii) 求证: 存在常数 c 使得 $f'(x) \leq cf(x)$.

(iii) 求使上面不等式成立的最小常数 c .

证明: 由条件知 f 及 f' 是单调递增的正函数, 因此 $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ 和 $\lim_{x \rightarrow -\infty} f'(x)$ 都存在.

(2分)

根据微分中值定理, 对任意 x 存在 $\theta_x \in (0, 1)$ 使得

$$f(x+1) - f(x) = f'(x + \theta_x) > f'(x) > 0.$$

上式左边当 $x \rightarrow -\infty$ 时极限为 0, 因而有 $\lim_{x \rightarrow -\infty} f'(x) = 0$. (5分)

设 $c = \frac{b + \sqrt{b^2 + 4a}}{2}$. 则 $c > b > 0$, 且 $\frac{a}{b-c} = -c$. 于是根据条件有

$$f''(x) - cf'(x) \leq (b-c)f'(x) + af(x) = (b-c)(f'(x) - cf(x)).$$

这说明函数 $e^{-(b-c)x}(f'(x) - cf(x))$ 是单调递减的. 注意到该函数当 $x \rightarrow -\infty$ 时极限为 0, 因此有 $f'(x) - cf(x) \leq 0$. 即, $f'(x) \leq cf(x)$. (10分)

常数 c 是最佳的, 这是因为对函数 $f(x) = e^{cx}$ 有 $f''(x) = af(x) + bf'(x)$. (15分)

五、(本题 20 分) 设 m 为给定的正整数. 证明: 对任何的正整数 n, l , 存在 m 阶方阵 X 使得

$$X^n + X^l = I + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ m-1 & m-2 & m-3 & \cdots & 1 & 0 \\ m & m-1 & m-2 & \cdots & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

证明 1) 令 $H = \begin{pmatrix} 0 & & & & \\ 1 & \ddots & & & \\ & \ddots & \ddots & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & 1 & 0 \end{pmatrix}$, 则所求的方程变为

$$X^n + X^l = 2I + 2H + 3H^2 + \cdots + mH^{m-1}. \quad (3分)$$

2) 考察形如 $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ a_1 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ a_2 & a_1 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m-1} & a_{m-2} & a_{m-3} & \cdots & 1 & 0 \\ a_m & a_{m-1} & a_{m-2} & \cdots & a_1 & 1 \end{pmatrix}$ 的矩阵 X , 则有 $X = I + a_1H +$
 $a_2H^2 + \cdots + a_mH^{m-1}$. 结果,

$$\begin{aligned} X^n &= (I + a_1H + a_2H^2 + \cdots + a_mH^{m-1})^n \\ &= I + (na_1)H + (na_2 + f_1(a_1))H^2 + \cdots + (na_m + f_{m-1}(a_1, \cdots, a_{m-1}))H^{m-1}, \end{aligned}$$

其中 $f_1(a_1)$ 由 a_1 确定, \dots , $f_{m-1}(a_1, \cdots, a_{m-1})$ 由 a_1, \cdots, a_{m-1} 确定.

类似地, 有

$$X^l = I + (la_1)H + (la_2 + g_1(a_1))H^2 + \cdots + (la_m + g_{m-1}(a_1, \cdots, a_{m-1}))H^{m-1}.$$

(12分)

3) 观察下列方程组

$$\begin{cases} (n+l)a_1 = 2, \\ (n+l)a_2 + (f_1(a_1) + g_1(a_1)) = 3, \\ \cdots \\ (n+l)a_m + (f_{m-1}(a_1, \cdots, a_{m-1}) + g_{m-1}(a_1, \cdots, a_{m-1})) = m. \end{cases}$$

直接可看出该方程组有解。命题得证。

(20分)

六、(本题 20 分) 设 $\alpha \in (0, 1)$, $\{a_n\}$ 是正数列且满足

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} n^\alpha \left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 \right) = \lambda \in (0, +\infty).$$

求证 $\lim_{n \rightarrow \infty} n^k a_n = 0$, 其中 $k > 0$.

证明: 由条件可知从某项开始 $\{a_n\}$ 单调递减。因此,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a \geq 0.$$

若 $a > 0$, 则当 n 充分大时,

$$\frac{a_n - a_{n+1}}{1/n^\alpha} = n^\alpha \left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 \right) a_{n+1} = \frac{\lambda a}{2} > 0.$$

因为 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ 发散, 所以 $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n - a_{n+1})$ 也发散, 但此级数显然收敛到 $a_1 - a$. 这是矛盾! 所以应有 $a = 0$.

(10分)

令 $b_n = n^k a_n$. 则有

$$n^\alpha \left(\frac{b_n}{b_{n+1}} - 1 \right) = \left(\frac{n}{n+1} \right)^k \left[n^\alpha \left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 \right) - n^\alpha \left(\left(1 + \frac{1}{n} \right)^k - 1 \right) \right].$$

因为 $(1 + \frac{1}{n})^k - 1 \sim \frac{k}{n}$ ($n \rightarrow \infty$), 所以由上式及条件可得

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} n^\alpha \left(\frac{b_n}{b_{n+1}} - 1 \right) = \lambda, \quad (n \rightarrow \infty).$$

因此由开始所证, 可得 $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0$, 即, $\lim_{n \rightarrow \infty} n^k a_n = 0$.

(20分)

第五届中国大学生数学竞赛预赛试卷

(数学类, 2013年10月)

考试形式: 闭卷 考试时间: 150 分钟 满分: 100 分

一、(本题 15 分) 平面 \mathbb{R}^2 上两个半径为 r 的圆 C_1 和 C_2 外切于 P 点. 将圆 C_2 沿 C_1 的圆周(无滑动)滚动一周, 这时, C_2 上的 P 点也随 C_2 的运动而运动. 记 Γ 为 P 点的运动轨迹曲线, 称为心脏线. 现设 C 为以 P 的初始位置(切点)为圆心的圆, 其半径为 R . 记 $\gamma: \mathbb{R}^2 \cup \{\infty\} \rightarrow \mathbb{R}^2 \cup \{\infty\}$ 为圆 C 的反演变换, 它将 $Q \in \mathbb{R}^2 \setminus \{P\}$ 映成射线 PQ 上的点 Q' , 满足 $\overrightarrow{PQ} \cdot \overrightarrow{PQ'} = R^2$. 求证: $\gamma(\Gamma)$ 为抛物线.

证明 以 C_1 的圆心 O 为原点建立直角坐标系, 使得初始切点 $P = (0, r)$. 将圆 C_2 沿 C_1 的圆周(无滑动)滚动到 Q 点, 记角 $\angle POQ = \theta$, 则 $Q = (r \sin \theta, r \cos \theta)$. 令 l_Q 为 C_1 在 Q 点的切线, 它的单位法向为 $\vec{n} = (\sin \theta, \cos \theta)$. 这时, P 点运动到 P 关于直线 l_Q 的对称点 $P' = P(\theta)$ 处. 于是, 有

$$\overrightarrow{OP'} = \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{PP'} = \overrightarrow{OP} - 2(\overrightarrow{QP} \cdot \vec{n})\vec{n}. \quad (5\text{分})$$

故 P 点的运动轨迹曲线(心脏线)为

$$P(\theta) = P' = (2r(1 - \cos \theta) \sin \theta, r + 2r(1 - \cos \theta) \cos \theta), \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi. \quad (8\text{分})$$

容易得到, 圆 C 的反演变换的坐标表示为

$$(\tilde{x}, \tilde{y}) = (0, r) + \frac{R^2}{x^2 + (y - r)^2} (x, y - r). \quad (11\text{分})$$

将 $(x, y) = P(\theta)$ 代人, 得到

$$(\tilde{x}, \tilde{y}) = \left(\frac{R^2 \sin \theta}{2r(1 - \cos \theta)}, \frac{R^2 \cos \theta}{2r(1 - \cos \theta)} + r \right). \quad (13\text{分})$$

直接计算, 得到抛物线方程

$$\tilde{y} = \frac{r}{R^2} \tilde{x}^2 + \left(r - \frac{R^2}{4r} \right). \quad (15\text{分})$$

二、(本题 10 分) 设 n 阶方阵 $B(t)$ 和 $n \times 1$ 矩阵 $b(t)$ 分别为 $B(t) = (b_{ij}(t))$ 和 $b(t) = \begin{pmatrix} b_1(t) \\ \vdots \\ b_n(t) \end{pmatrix}$, 其中 $b_{ij}(t), b_i(t)$ 均为关于 t 的实系数多项式, $i, j = 1, 2, \dots, n$. 记 $d(t)$ 为 $B(t)$ 的行列式, $d_i(t)$ 为用 $b(t)$ 替代 $B(t)$ 的第 i 列后所得的 n 阶矩阵的行列式. 若 $d(t)$ 有实根 t_0 使得 $B(t_0)X = b(t_0)$ 成为关于 X 的相容线性方程组, 试证明: $d(t), d_1(t), \dots, d_n(t)$ 必有次数 ≥ 1 的公因式.

证明 设 $B(t)$ 的第 i 列为 $B_i(t), i = 1, 2, \dots, n$. 断言: $t - t_0$ 是 $d(t), d_1(t), \dots, d_n(t)$ 的公因式. 反证. 不失一般性, 设 $d_1(t_0) \neq 0$, 于是

$$\text{秩}[B(t_0), b(t_0)] = n, \text{ 因为 } d_1(t_0) \neq 0. \quad (5 \text{ 分})$$

注意到秩 $B(t_0) \leq n - 1$, 结果

$$\text{增广阵}[B(t_0), b(t_0)] \text{ 的秩} \neq B(t_0) \text{ 的秩}, \quad (9 \text{ 分})$$

$$\text{从而 } B(t_0)X = b(t_0) \text{ 不相容. 矛盾. 证毕.} \quad (10 \text{ 分})$$

六、(本题 25 分) 设 $\mathbb{R}^{n \times n}$ 为 n 阶实方阵全体, E_{ij} 为 (i, j) 位置元素为 1 其余位置元素为 0 的 n 阶方阵, $i, j = 1, 2, \dots, n$. 让 Γ_r 为秩等于 r 的实 n 阶方阵全体, $r = 0, 1, 2, \dots, n$, 并让 $\phi: \mathbb{R}^{n \times n} \rightarrow \mathbb{R}^{n \times n}$ 为可乘映照, 即满足: $\phi(AB) = \phi(A)\phi(B), \forall A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$. 试证明:

$$(1) \forall A, B \in \Gamma_r, \text{秩}\phi(A) = \text{秩}\phi(B).$$

(2) 若 $\phi(0) = 0$, 且存在某个秩为 1 的矩阵 W 使得 $\phi(W) \neq 0$, 则必存在可逆方阵 R 使得 $\phi(E_{ij}) = RE_{ij}R^{-1}$ 对一切 E_{ij} 皆成立, $i, j = 1, 2, \dots, n$.

$$\text{证明: (1) } A, B \in \Gamma_r \text{ 表明 } A \text{ 可表为 } A = PBQ, \text{ 其中 } P, Q \text{ 可逆.} \quad (1 \text{ 分})$$

$$\text{结果 } \phi(A) = \phi(P)\phi(B)\phi(Q), \text{ 从而 } \text{秩}\phi(A) \leq \text{秩}\phi(B). \quad (3 \text{ 分})$$

$$\text{对称地有 } \text{秩}\phi(B) \leq \text{秩}\phi(A). \text{ 即有, } \text{秩}\phi(A) = \text{秩}\phi(B). \quad (5 \text{ 分})$$

(2) 考察矩阵集合 $\{\phi(E_{ij}) | i, j = 1, 2, \dots, n\}$. 先考察 $\phi(E_{11}), \dots, \phi(E_{nn})$. 由 (1) 知 $\phi(E_{ij})$ 为非零阵, 特别地, $\phi(E_{ii})$ 为非零幂等阵, 故存在单位特征向量 w_i 使得

$$\phi(E_{ii})w_i = w_i, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

$$\text{从而得向量组: } w_1, w_2, \dots, w_n. \quad (7 \text{ 分})$$

此向量组有如下性质:

$$\text{a) } \phi(E_{ii})w_k = \begin{cases} \phi(E_{ii})\phi(E_{kk})w_k = \phi(E_{ii}E_{kk})w_k = 0, & k \neq i \text{ 时} \\ w_i, & k = i \text{ 时.} \end{cases}$$

b) w_1, w_2, \dots, w_n 线性无关, 从而构成 \mathbb{R}^n 的基, 矩阵 $W = [w_1, w_2, \dots, w_n]$ 为可逆阵. 事实上, 若 $x_1w_1 + \dots + x_nw_n = 0$, 则在两边用 $\phi(E_{ii})$ 作用之, 得 $x_i = 0, i = 1, 2, \dots, n$. (11 分)

$$\text{c) 当 } k \neq j \text{ 时, } \phi(E_{ij})w_k = \phi(E_{ij})\phi(E_{kk})w_k = \phi(E_{ij}E_{kk})w_k = 0;$$

当 $k = j$ 时, 令 $\phi(E_{ij})w_k = b_{1j}w_1 + \dots + b_{ij}w_i + \dots + b_{nj}w_n$. 两边分别用

$\phi(E_{11}), \dots, \phi(E_{i-1 \ i-1}), \phi(E_{i+1 \ i+1}), \dots, \phi(E_{nn})$ 作用之, 得

$$0 = \phi(E_{11}E_{ij})w_j = \phi(E_{11})\phi(E_{ij})w_k = b_{1j}w_1, \dots,$$

$$0 = \phi(E_{nn}E_{ij})w_j = \phi(E_{nn})(b_{1j}w_1 + \dots + b_{ij}w_i + \dots + b_{nj}w_n) = b_{nj}w_n,$$

即有

$$b_{1j} = \dots = b_{i-1 \ j} = b_{i+1 \ j} = \dots = b_{nj} = 0.$$

从而 $\phi(E_{ij})w_j = b_{ij}w_i$, 进一步, $b_{ij} \neq 0$, 否则有 $\phi(E_{ij})[w_1, \dots, w_n] = 0$, 导致 $\phi(E_{ij})$ 为零阵, 不可能. (15 分)

这样通过计算 $\phi(E_{ij})w_j \ i, j = 1, 2, \dots, n$, 我们得到 n^2 个非零的实数:

$$\begin{array}{ccc} b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ b_{n1} & \cdots & b_{nn} \end{array}$$

注意到 $E_{mr}E_{rs} = E_{ms}$, 从而

$$b_{ms}w_m = \phi(E_{ms})w_s = \phi(E_{mr})\phi(E_{rs})w_s = \phi(E_{mr})b_{rs}w_r = b_{rs}b_{mr}w_m$$

因此有 $b_{mr}b_{rs} = b_{ms}$. (17 分)

最后, 令 $v_i = b_{i1}w_i, \ i = 1, 2, \dots, n$. 则有

$$\phi(E_{ij})v_k = \begin{cases} 0, & k \neq j \text{ 时} \\ \phi(E_{ij})b_{j1}w_j = b_{j1}b_{ij}w_i = b_{i1}w_i = v_i, & k = j \text{ 时.} \end{cases} \quad (21 \text{ 分})$$

令 $R = [v_1, \dots, v_n]$, 则 $R = [w_1, \dots, w_n] \begin{pmatrix} b_{11} & & \\ & \ddots & \\ & & b_{n1} \end{pmatrix}$ 为可逆矩阵, 且

$$\phi(E_{ij})R = \phi(E_{ij})[v_1, \dots, v_n] = [0, \dots, 0, v_i, 0, \dots, 0] = [v_1, \dots, v_n]E_{ij}$$

即, $\phi(E_{ij}) = RE_{ij}R^{-1}$. 证毕. (25 分)

三、(本题 15 分) 设 $f(x)$ 在区间 $[0, a]$ 上有二阶连续导数, $f'(0) = 1, f''(0) \neq 0$, 且 $0 < f(x) < x, x \in (0, a)$. 令

$$x_{n+1} = f(x_n), \quad x_1 \in (0, a).$$

(1) 求证 $\{x_n\}$ 收敛并求极限; (2) 试问 $\{nx_n\}$ 是否收敛? 若不收敛, 则说明理由. 若收敛, 则求其极限.

证明 (1) 由条件 $0 < x_2 = f(x_1) < x_1$, 归纳地可证得 $0 < x_{n+1} < x_n$, 于是 $\{x_n\}$ 有极限, 设为 x_0 . 由 f 的连续性, 及 $x_{n+1} = f(x_n)$ 得 $x_0 = f(x_0)$. 又因为当 $x > 0$ 时, $f(x) < x$, 所以只有 $x_0 = 0$. 即, $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$. (5 分)

(2) 由 Stolz 定理和 L'Hospital 法则,

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} nx_n &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{1/x_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{1/x_{n+1} - 1/x_n} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_{n+1}x_n}{x_n - x_{n+1}} \quad (8\text{分}) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n f(x_n)}{x_n - f(x_n)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{xf(x)}{x - f(x)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) + xf'(x)}{1 - f'(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2f'(x) + xf''(x)}{-f''(x)} \\ &= -\frac{2}{f''(0)} \quad (15\text{分}) \end{aligned}$$

四、(本题 15 分) 设 $a > 1$, 函数 $f: (0, +\infty) \rightarrow (0, +\infty)$ 可微. 求证存在趋于无穷的正数列 $\{x_n\}$ 使得

$$f'(x_n) < f(ax_n), \quad n = 1, 2, \dots$$

证明 若结论不对, 则存在 $x_0 > 0$ 使得当 $x \geq x_0$ 时, 有 $f'(x) \geq f(ax) > 0$. (5分)
于是当 $x > x_0$ 时, $f(x)$ 严格递增, 且由微分中值定理

$$\begin{aligned} f(ax) - f(x) &= f'(\xi)(a-1)x \geq f(a\xi)(a-1)x \\ &> f(ax)(a-1)x. \end{aligned}$$

但这对于 $x > \frac{1}{a-1}$ 是不能成立的. (10分)

五、(本题 20 分) 设 $f: [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ 为偶函数, f 在 $[0, 1]$ 上单调递增, 又设 g 是 $[-1, 1]$ 上的凸函数, 即对任意 $x, y \in [-1, 1]$ 及 $t \in (0, 1)$ 有

$$g(tx + (1-t)y) \leq tg(x) + (1-t)g(y).$$

求证: $2 \int_{-1}^1 f(x)g(x) dx \geq \int_{-1}^1 f(x) dx \int_{-1}^1 g(x) dx.$

证明 由于 f 为偶函数, 可得

$$\int_{-1}^1 f(x)g(x) dx = \int_{-1}^1 f(x)g(-x) dx. \quad (2\text{分})$$

因而

$$\begin{aligned} 2 \int_{-1}^1 f(x)g(x) dx &= \int_{-1}^1 f(x)(g(x) + g(-x)) dx \\ &= 2 \int_0^1 f(x)(g(x) + g(-x)) dx. \end{aligned} \quad (1)$$

(7分)

因为 $g(x)$ 为凸函数, 所以函数 $h(x) = g(x) + g(-x)$ 在 $[0, 1]$ 上递增. (10分)

故对任意 $x, y \in [0, 1]$, 有

$$(f(x) - f(y))(h(x) - h(y)) \geq 0.$$

因而

$$\int_0^1 \int_0^1 (f(x) - f(y))(h(x) - h(y)) dx dy \geq 0. \quad (15\text{分})$$

由此可得

$$\begin{aligned} 2 \int_0^1 f(x)h(x) dx &\geq 2 \int_0^1 f(x) dx \cdot \int_0^1 h(x) dx \\ &= \frac{1}{2} \int_{-1}^1 f(x) dx \cdot \int_{-1}^1 h(x) dx \\ &= \int_{-1}^1 f(x) dx \cdot \int_{-1}^1 g(x) dx. \end{aligned} \quad (20\text{分})$$

结合 (1) 即得结论.

试题解答

1: (15分) 设 Γ 为椭圆抛物面 $z = 3x^2 + 4y^2 + 1$. 从原点作 Γ 的切锥面. 求切锥面方程.

解答: 设 (x, y, z) 为切锥面上的点 (非原点). 存在唯一 t 使得 $t(x, y, z)$ 落在椭圆抛物面上 (5分). 于是有 $tz = (3x^2 + 4y^2)t^2 + 1$, 并且这个关于 t 的二次方程只有一个根 (10分). 于是, 判别式

$$\Delta = z^2 - 4(3x^2 + 4y^2) = 0.$$

这就是所求的切锥面方程 (15分). \square

2: (15分) 设 Γ 为抛物线, P 是与焦点位于抛物线同侧的一点. 过 P 的直线 L 与 Γ 围成的有界区域的面积记为 $A(L)$. 证明: $A(L)$ 取最小值当且仅当 P 恰为 L 被 Γ 所截出的线段的中点.

解答: 不妨设抛物线方程为 $y = x^2$, $P = (x_0, y_0)$ (1分). P 与焦点在抛物线的同侧, 则 $y_0 > x_0^2$ (2分). 设 L 的方程为 $y = k(x - x_0) + y_0$. L 与 Γ 的交点的 x 坐标满足 $x^2 = k(x - x_0) + y_0$, 有两个解 $x_1 < x_2$ 满足

$$x_1 + x_2 = k, \quad x_1 x_2 = kx_0 - y_0$$

(6分). L 与 x 轴, $x = x_1$, $x = x_2$ 构成的梯形面积 $D = \frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2)(x_2 - x_1)$, 抛物线与 x 轴, $x = x_1$, $x = x_2$ 构成区域的面积为 $\int_{x_1}^{x_2} x^2 dx = \frac{1}{3}(x_2^3 - x_1^3)$ (8分). 于是有

$$A(L) = \frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2)(x_2 - x_1) - \frac{1}{3}(x_2^3 - x_1^3) = \frac{1}{6}(x_2 - x_1)^3$$

$$\begin{aligned} 36A(L)^2 &= (x_2 - x_1)^6 = ((x_1 + x_2)^2 - 4x_1 x_2)^3 = (k^2 - 4kx_0 + 4y_0)^3 \\ &= ((k - 2x_0)^2 + 4(y_0 - x_0^2))^3 \geq 64(y_0 - x_0^2)^3. \end{aligned}$$

(12分), 等式成立当且仅当 $A(L)$ 取最小值, 当且仅当 $k = 2x_0$, 即 $x_1 + x_2 = 2x_0$ (15分). \square

3: (10分) 设 $f \in C^1[0, +\infty)$, $f(0) > 0$, $f'(x) \geq 0 \forall x \in [0, +\infty)$. 已知 $\int_0^{+\infty} \frac{1}{f(x)+f'(x)} dx < +\infty$, 求证: $\int_0^{+\infty} \frac{1}{f(x)} dx < +\infty$.

解答: 由于 $f'(x) \geq 0$, 有

$$0 \leq \int_0^N \frac{1}{f(x)} dx - \int_0^N \frac{1}{f(x) + f'(x)} dx = \int_0^N \frac{f'(x)}{f(x)(f(x) + f'(x))} dx$$

(1 分). 取极限

$$\begin{aligned}\lim_{N \rightarrow +\infty} \int_0^N \frac{f'(x)}{f(x)(f(x) + f'(x))} dx &\leq \lim_{N \rightarrow +\infty} \int_0^N \frac{f'(x)}{f(x)^2} dx \\ &= \lim_{N \rightarrow +\infty} \left(-\frac{1}{f(x)}\right) \Big|_0^N \leq \frac{1}{f(0)}\end{aligned}$$

(8 分). 故由已知条件有

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{f(x)} dx \leq \int_0^{+\infty} \frac{1}{f(x) + f'(x)} dx + \frac{1}{f(0)} < +\infty$$

(10 分).

4: (10 分) 设 A, B, C 均为实 n 阶正定矩阵, $P(t) = At^2 + Bt + C$, $f(t) = \det P(t)$, 其中 t 为未定元, $\det P(t)$ 表示 $P(t)$ 的行列式. 若 λ 为 $f(t)$ 的根, 试证明: $\operatorname{Re}(\lambda) < 0$, 这里 $\operatorname{Re}(\lambda)$ 表示 λ 的实部.

解答: 设 λ 为 $f(t)$ 的根, 则有 $\det P(t) = 0$, 从而 $P(t)$ 的 n 个列线性相关. 于是存在 $\alpha \neq 0$ 使得 $P(\lambda)\alpha = 0$, 进而 $\alpha^* P(\lambda)\alpha = 0$. (4 分)
具体地,

$$\alpha^* A \alpha \lambda^2 + \alpha^* B \alpha \lambda + \alpha^* C \alpha = 0.$$

令 $a = \alpha^* A \alpha$, $b = \alpha^* B \alpha$, $c = \alpha^* C \alpha$, 则由 A, B, C 皆为正定矩阵知 $a > 0, b > 0, c > 0$, 且

$$\lambda = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

(6 分). 注意到, 当 $b^2 - 4ac \geq 0$ 时, $\sqrt{b^2 - 4ac} < b$, 从而

$$\operatorname{Re} \lambda = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} < 0;$$

(8 分). 当 $b^2 - 4ac < 0$ 时, $\sqrt{b^2 - 4ac} = i\sqrt{4ac - b^2}$, 从而 $\operatorname{Re} \lambda = -b/2a < 0$.
□

5: (10 分) 已知 $\frac{(1+x)^n}{(1-x)^3} = \sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i$, $|x| < 1$, n 为正整数. 求 $\sum_{i=0}^{n-1} a_i$.

解答: 由于 $\sum_{i=0}^{n-1} a_i$ 恰为 $\frac{(1+x)^n}{(1-x)^3} \cdot \frac{1}{1-x}$ 展开式中 x^{n-1} 的系数 (2 分), 而

$$\frac{(1+x)^n}{(1-x)^4} = \frac{(2 - (1-x))^n}{(1-x)^4} = \sum_{i=0}^n (-1)^i C_n^i 2^{n-i} (1-x)^{i-4},$$

其 x^{n-1} 项系数等于

$$2^n(1-x)^{-4} - n2^{n-1}(1-x)^{-3} + \frac{n(n-1)}{2}2^{n-2}(1-x)^{-2} - \frac{n(n-1)(n-2)}{6}2^{n-3}(1-x)^{-1}$$

的 x^{n-1} 项系数 (6 分), 也就等于

$$\begin{aligned} & \frac{2^n}{3!}((1-x)^{-1})''' - \frac{n2^{n-1}}{2!}((1-x)^{-1})'' \\ & + \frac{n(n-1)}{2}2^{n-2}((1-x)^{-1})' - \frac{n(n-1)(n-2)}{6}2^{n-3}(1-x)^{-1} \end{aligned}$$

的 x^{n-1} 项系数, 它等于

$$\frac{2^n}{3!}(n+2)(n+1)n - \frac{n2^{n-1}}{2!}(n+1)n + \frac{n(n-1)}{2}2^{n-2}n - \frac{n(n-1)(n-2)}{6}2^{n-3}.$$

故有

$$\sum_{i=0}^{n-1} a_i = \frac{n(n+2)(n+7)}{3}2^{n-4}$$

(10 分). \square

6: (15 分) 设 $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ 可微, $f(0) = f(1)$, $\int_0^1 f(x) dx = 0$, 且 $f'(x) \neq 1 \forall x \in [0, 1]$. 求证: 对任意正整数 n , 有 $\left| \sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) \right| < \frac{1}{2}$.

解答: 由于 $f(0) = f(1)$, 故存在 $c \in (0, 1)$ 使得 $f'(c) = 0$ (2 分). 又 $f'(x) \neq 1$, 由导函数介值性质恒有 $f'(x) < 1$ (4 分). 令 $g(x) = f(x) - x$, 则 $g(x)$ 为单调下降函数 (6 分). 故

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2} + \frac{1}{n} &= \int_0^1 g(x) dx + \frac{1}{n} > \frac{1}{n} \left(\sum_{k=1}^n g\left(\frac{k}{n}\right) + 1 \right) \\ &= \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} g\left(\frac{k}{n}\right) > \int_0^1 g(x) dx = -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

(12 分). 于是有

$$\left| \sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) \right| = \left| \sum_{k=0}^{n-1} g\left(\frac{k}{n}\right) + \frac{n-1}{2} \right| < \frac{1}{2} \square$$

(15 分)

7: (25 分) 已知实矩阵 $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & a \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 4 & b \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$. 证明:

(1) 矩阵方程 $AX = B$ 有解但 $BY = A$ 无解的充要条件是 $a \neq 2, b = 4/3$;

(2) A 相似于 B 的充要条件是 $a = 3, b = 2/3$;

(3) A 合同于 B 的充要条件是 $a < 2, b = 3$.

解答: (1) 矩阵方程 $AX = B$ 有解等价于 B 的列向量可由 A 的列向量线性表示, $BY = A$ 无解等价于 A 的某个列向量不能由 B 的列向量线性表示 (2 分). 对 (A, B) 作初等行变换:

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & 4 & b \\ 2 & a & 3 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 2 & 4 & b \\ 0 & a-2 & -1 & 1-b \end{pmatrix}$$

知, B 的列向量组可由 A 的列向量线性表示当且仅当 $a \neq 2$ (6 分). 对矩阵 (B, A) 作初等行变换:

$$(B, A) = \begin{pmatrix} 4 & b & 2 & 2 \\ 3 & 1 & 2 & a \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 4 & b & 2 & 2 \\ 0 & 1-3b/4 & 1/2 & a-3/2 \end{pmatrix}.$$

由此知 A 的列向量组不能由 B 的列向量线性表示的充要条件是 $b = 4/3$. 所以矩阵方程 $AX = B$ 有解但 $BY = A$ 无解的充要条件是 $a \neq 2, b = 4/3$ (10 分).

(2) 若 A, B 相似, 则有 $\text{tr} A = \text{tr} B$, 且 $|A| = |B|$, 故有 $a = 3, b = 2/3$ (12 分). 反之, 若 $a = 3, b = 2/3$, 则有

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 4 & 2/3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix},$$

A 和 B 的特征多项式均为 $\lambda^2 - 5\lambda + 2$. 由于 $\lambda^2 - 5\lambda + 2 = 0$ 由两个不同的根, 从而 A, B 都可以相似于同一对角阵. 故 A 与 B 相似 (15 分).

(3) 由于 A 为对称阵, 若 A, B 合同, 则 B 也是对称阵, 故 $b = 3$ (16 分). 矩阵 B 对应的二次型

$$g(x_1, x_2) = 4x_1^2 + 6x_1x_2 + x_2^2 = (3x_1 + x_2)^2 - 5x_1^2.$$

在可逆线性变换 $y_1 = 3x_1 + x_2, y_2 = x_1$ 下, $g(x_1, x_2)$ 变成标准型: $y_1^2 - 5y_2^2$ (18 分). 由此, B 的正、负惯性指数为 1 (19 分). 类似地, A 对应的二次型

$$f(x_1, x_2) = 2x_1^2 + 4x_1x_2 + ax_2^2 = 2(x_1 + x_2)^2 + (a-2)x_2^2$$

在可逆线性变换 $z_1 = 3x_1 + x_2, z_2 = x_2$ 下 $f(x_1, x_2)$ 变成标准型: $2z_1^2 + (a-2)z_2^2$ (22 分). A, B 合同的充要条件是它们有相同的正、负惯性指数, 故 A, B 合同的充要条件是 $a < 2, b = 3$ (25 分) \square

第三届中国大学生数学竞赛赛区赛

试题参考答案 (数学类, 2011)

一、(本题 15 分) 已知四点 $A(1, 2, 7)$, $B(4, 3, 3)$, $(5, -1, 6)$, $(\sqrt{7}, \sqrt{7}, 0)$. 试求过这四点的球面方程.

解答: 设所求球面的球心为 $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$, 则

$$\begin{aligned} & (\bar{x} - 1)^2 + (\bar{y} - 2)^2 + (\bar{z} - 7)^2 \\ &= (\bar{x} - 4)^2 + (\bar{y} - 3)^2 + (\bar{z} - 3)^2 \\ &= (\bar{x} - 5)^2 + (\bar{y} + 1)^2 + (\bar{z} - 6)^2 \\ &= (\bar{x} - \sqrt{7})^2 + (\bar{y} - \sqrt{7})^2 + \bar{z}^2. \end{aligned}$$

..... (8 分)

即

$$\begin{cases} 3\bar{x} + \bar{y} - 4\bar{z} = -10, \\ 4\bar{x} - 3\bar{y} - \bar{z} = 4, \\ (\sqrt{7} - 1)\bar{x} + (\sqrt{7} - 2)\bar{y} - 7\bar{z} = -20. \end{cases}$$

..... (10 分)

解得 $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) = (1, -1, 3)$. 而 (14 分)

$$(\bar{x} - 1)^2 + (\bar{y} - 2)^2 + (\bar{z} - 7)^2 = 25.$$

于是所求球面方程为

$$(x - 1)^2 + (y + 1)^2 + (z - 3)^2 = 25.$$

..... (15 分)

二、(本题 10 分) 设 f_1, f_2, \dots, f_n 为 $[0, 1]$ 上的非负连续函数. 求证: 存在 $\xi \in [0, 1]$, 使得

$$\prod_{k=1}^n f_k(\xi) \leq \prod_{k=1}^n \int_0^1 f_k(x) dx.$$

证明: 记

$$a_k = \int_0^1 f_k(x) dx, \quad \forall k = 1, 2, \dots, n.$$

当某个 $a_k = 0$ 时, 结论是平凡的. (1 分)

下设 $a_k > 0$ ($\forall k = 1, 2, \dots, n$). 我们有

$$\int_0^1 \sqrt[n]{\prod_{k=1}^n \frac{f_k(x)}{a_k}} dx \leq \int_0^1 \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{f_k(x)}{a_k} dx = 1.$$

..... (8 分)

由此立即可得存在 $\xi \in [0, 1]$ 使得

$$\sqrt[n]{\prod_{k=1}^n \frac{f_k(\xi)}{a_k}} \leq 1.$$

结论得证. (10 分)

□

三、(本题 15 分) 设 F^n 是数域 F 上的 n 维列空间, $\sigma : F^n \rightarrow F^n$ 是一个线性变换. 若 $\forall A \in M_n(F), \sigma(A\alpha) = A\sigma(\alpha), (\forall \alpha \in V)$, 证明: $\sigma = \lambda \cdot \text{id}_{F^n}$, 其中 λ 是 F 中某个数, id_{F^n} 表示恒同变换.

证明: 设 σ 在 F^n 的标准基 $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n$ 下的矩阵为 B , 则 $\sigma(\alpha) = B\alpha (\forall \alpha \in F^n)$ (5 分)

由条件: $\forall A \in M_n(F), \sigma(A\alpha) = A\sigma(\alpha), \forall \alpha \in F^n$, 有 $BA\alpha = AB\alpha, \forall \alpha \in F^n$.
故 $AB = BA, (\forall A \in M_n(F))$ (10 分)

设 $B = (b_{ij})$, 取 $A = \text{diag}(1, \dots, 1, c, 1, \dots, 1)$, 其中 $c \neq 0, 1$, 由 $AB = BA$ 可得 $b_{ij} = 0, \forall i \neq j$. 又取 $A = I_n - E_{ii} - E_{jj} + E_{ij} + E_{ji}$, 这里 E_{st} 是 $(s\ t)$ -位置为 1 其它位置为 0 的矩阵. 则由 $AB = BA$ 可得 $a_{ii} = a_{jj}, (\forall i, j)$. 取 $\lambda = a_{11}$. 故 $B = \lambda I_n$, 从而 $\sigma = \lambda \cdot \text{id}_{F^n}$ (15 分)

四、(本题 10 分) 对于 $\triangle ABC$, 求 $3\sin A + 4\sin B + 18\sin C$ 的最大值.

解答: 三角形三个角 A, B, C 的取值范围为

$$(A, B, C) \in D \equiv \{(\alpha, \beta, \gamma) | \alpha + \beta + \gamma = \pi, \alpha > 0, \beta > 0, \gamma > 0\}.$$

我们首先考虑 $3\sin A + 4\sin B + 18\sin C$ 在 D 的闭包

$$E = \{(\alpha, \beta, \gamma) | \alpha + \beta + \gamma = \pi, \alpha \geq 0, \beta \geq 0, \gamma \geq 0\}$$

上的最大值. (1 分)

我们有

$$\begin{aligned} & \max_{(A,B,C) \in E} (3\sin A + 4\sin B + 18\sin C) \\ &= \max_{\substack{A+C \leq \pi \\ A, C \geq 0}} (3\sin A + 4\sin(A+C) + 18\sin C) \\ &= \max_{0 \leq C \leq \pi} \max_{0 \leq A \leq \pi - C} \left((3 + 4\cos C)\sin A + 4\sin C \cos A + 18\sin C \right) \\ &= \max_{0 \leq C \leq \pi} \left(\sqrt{(3 + 4\cos C)^2 + 16\sin^2 C} + 18\sin C \right) \\ &= \max_{0 \leq C \leq \pi} (\sqrt{25 + 24\cos C} + 18\sin C). \end{aligned}$$

..... (4 分)

考虑

$$f(C) = \sqrt{25 + 24\cos C} + 18\sin C, \quad 0 \leq C \leq \pi.$$

易见

$$f(C) \geq f(\pi - C), \quad \forall C \in [0, \frac{\pi}{2}].$$

..... (5 分)

直接计算得

$$f'(C) = 18\cos C - \frac{12\sin C}{\sqrt{25 + 24\cos C}}.$$

..... (6 分)

计算得 $f'(C) = 0$ 等价于

$$(8\cos C - 1)(27\cos^2 C + 32\cos C + 4) = 0.$$

从而它在 $[0, \frac{\pi}{2}]$ 的解为 $C = \arccos \frac{1}{8}$ (7 分)

于是

$$\begin{aligned} \max_{0 \leq C \leq \pi} f(C) &= \max_{0 \leq C \leq \frac{\pi}{2}} f(C) = \max \left\{ f(\arccos \frac{1}{8}), f(0), f(\frac{\pi}{2}) \right\} \\ &= \max \left\{ \frac{35\sqrt{7}}{4}, 7, 23 \right\} = \frac{35\sqrt{7}}{4}. \end{aligned}$$

..... (8 分)

由此可得

$$\max_{(A,B,C) \in E} (3 \sin A + 4 \sin B + 18 \sin C) = \frac{35\sqrt{7}}{4},$$

另一方面, 不难看到 $3 \sin A + 4 \sin B + 18 \sin C$ 在 E 的边界上 (A, B, C 之一为零) 的最大值为 22. (9 分)

所以所求最大值为 $\frac{35\sqrt{7}}{4}$ (10 分)

五、(本题 15 分) 对于任何实数 α , 求证存在取值于 $\{-1, 1\}$ 的数列 $\{a_n\}_{n \geq 1}$ 满足

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\sum_{k=1}^n \sqrt{n+a_k} - n^{\frac{3}{2}} \right) = \alpha.$$

证明: 由 Taylor 展式, $\forall x \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$, 存在 $\xi \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ 使得

$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8(1+\xi)^{\frac{3}{2}}}.$$

..... (1 分)

从而

$$\left| \sqrt{1+x} - \left(1 + \frac{x}{2}\right) \right| \leq x^2, \quad \forall x \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right].$$

..... (2 分)

于是当 $n \geq 2$ 时, 不管我们怎么选取只取值 ± 1 的数列 $\{a_n\}_{n \geq 1}$, 均有

$$\begin{aligned} & \sum_{k=1}^n \left| \sqrt{n+a_k} - n^{\frac{3}{2}} - \sum_{k=1}^n \frac{a_k}{2\sqrt{n}} \right| \\ &= \sqrt{n} \sum_{k=1}^n \left| \sqrt{1 + \frac{a_k}{n}} - \sum_{k=1}^n \left(1 + \frac{a_k}{2n}\right) \right| \\ &\leq \sqrt{n} \sum_{k=1}^n \left(\frac{a_k}{n}\right)^2 \leq \frac{1}{\sqrt{n}}. \end{aligned}$$

..... (5 分)

可以有很多种方法选取只取值 ± 1 的数列 $\{a_n\}_{n \geq 1}$ 使得

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n \frac{a_k}{2\sqrt{n}} = \alpha.$$

此时就成立

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\sum_{k=1}^n \sqrt{n+a_k} - n^{\frac{3}{2}} \right) = \alpha.$$

..... (6 分)

例如, 我们可以按以下方式选取: 取 $a_1 = 1$, 依次定义

$$a_{n+1} = \begin{cases} 1, & \text{如果 } \sum_{k=1}^n a_k < 2\alpha\sqrt{n}, \\ -1, & \text{如果 } \sum_{k=1}^n a_k \geq 2\alpha\sqrt{n}. \end{cases}$$

..... (10 分)

记

$$y_n = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=1}^n a_k, \quad n = 1, 2, \dots$$

我们有

$$-\sqrt{n} \leq y_n \leq \sqrt{n}.$$

若 $y_n > 2\alpha$, 我们有

$$\begin{aligned} y_{n+1} - y_n &= \frac{y_n\sqrt{n} - 1}{\sqrt{n+1}} - y_n \\ &= -\frac{\sqrt{n+1} + \sqrt{n} + y_n}{\sqrt{n+1}(\sqrt{n+1} + \sqrt{n})}, \end{aligned}$$

这时

$$-\frac{2}{\sqrt{n+1}} < y_{n+1} - y_n < 0;$$

..... (12 分)

而当 $y_n < 2\alpha$ 时, 我们有

$$\begin{aligned} y_{n+1} - y_n &= \frac{y_n\sqrt{n} + 1}{\sqrt{n+1}} - y_n \\ &= \frac{\sqrt{n+1} + \sqrt{n} - y_n}{\sqrt{n+1}(\sqrt{n+1} + \sqrt{n})}; \end{aligned}$$

这时

$$0 < y_{n+1} - y_n < \frac{2}{\sqrt{n+1}};$$

于是当 $y_{n+1} - 2\alpha$ 和 $y_n - 2\alpha$ 同号时,

$$|y_{n+1} - 2\alpha| \leq |y_n - 2\alpha|,$$

而当 $y_{n+1} - 2\alpha$ 和 $y_n - 2\alpha$ 异号时,

$$|y_{n+1} - 2\alpha| \leq |y_{n+1} - y_n| \leq \frac{2}{\sqrt{n+1}}.$$

一般地有

$$|y_{n+1} - 2\alpha| \leq \max(|y_n - 2\alpha|, \frac{2}{\sqrt{n+1}}).$$

..... (14 分)

注意到对任何 $N > 0$, 总有 $m \geq N$, 使得 $y_{m+1} - 2\alpha$ 和 $y_m - 2\alpha$ 异号. 由上面的讨论可得到

$$|y_k - 2\alpha| \leq \frac{2}{\sqrt{m+1}} \leq \frac{2}{\sqrt{N+1}}, \quad \forall k = m+1, m+2, \dots$$

因此, $\lim_{n \rightarrow +\infty} y_n = 2\alpha$ (15 分)

□

六、(本题 20 分) 设 A 是数域 F 上的 n 阶方阵. 证明: A 相似于 $\begin{pmatrix} B & 0 \\ 0 & C \end{pmatrix}$, 其中 B 是可逆矩阵, C 是幂零阵, 即存在 m 使得 $C^m = 0$.

证明: 设 V 是 F 上 n 维线性空间, σ 是 V 上线性变换, 它在 V 的一组基下的矩阵为 A . 下面证明存在 σ -不变子空间 V_1, V_2 满足 $V = V_1 \oplus V_2$, 且 $\sigma|_{V_1}$ 是同构, $\sigma|_{V_2}$ 是幂零变换.

首先有子空间升链: $\text{Ker } \sigma \subseteq \text{Ker } \sigma^2 \subseteq \cdots \subseteq \text{Ker } \sigma^k \subseteq \cdots$ 从而存在正整数 m 使得 $\text{Ker } \sigma^m = \text{Ker } \sigma^{m+i}$, ($i = 1, 2, \cdots$). 进而有 $\text{Ker } \sigma^m = \text{Ker } \sigma^{2m}$.

(7 分)

下面证明 $V = \text{Ker } \sigma^m \oplus \text{Im } \sigma^m$.

$\forall \alpha \in \text{Ker } \sigma^m \cap \text{Im } \sigma^m$, 由 $\alpha \in \text{Im } \sigma^m$, 存在 $\beta \in V$, 使得 $\alpha = \sigma^m(\beta)$. 由此 $0 = \sigma^m(\alpha) = \sigma^{2m}(\beta)$, 所以 $\beta \in \text{Ker } \sigma^{2m}$, 从而 $\beta \in \text{Ker } \sigma^m = \text{Ker } \sigma^{2m}$. 故 $\alpha = \sigma^m(\beta) = 0$. $\text{Ker } \sigma^m \cap \text{Im } \sigma^m = (0)$, 从而 $V = \text{Ker } \sigma^m \oplus \text{Im } \sigma^m$. (12 分)

由 $\sigma(\text{Ker } \sigma^m) \subseteq \text{Ker } \sigma^m$, $\sigma(\text{Im } \sigma^m) \subseteq \text{Im } \sigma^m$ 知 $\text{Ker } \sigma^m, \text{Im } \sigma^m$ 是 σ -不变子空间. 又由 $\sigma^m(\text{Ker } \sigma^m) = (0)$ 知 $\sigma|_{\text{Ker } \sigma^m}$ 是幂零变换. 由 $\sigma(\text{Im } \sigma^m) = \text{Im } \sigma^m$ 知 $\sigma|_{\text{Im } \sigma^m}$ 是满线性变换, 从而可逆. (17 分)

从 $V_1 = \text{Im } \sigma^m, V_2 = \text{Ker } \sigma^m$ 中各找一组基 $\alpha_1, \cdots, \alpha_s; \beta_1, \cdots, \beta_t$, 合并成 V 的一组基, σ 在此基下的矩阵为 $\begin{pmatrix} B & 0 \\ 0 & C \end{pmatrix}$, 其中 B 是 $\sigma|_{V_1}$ 在基 $\alpha_1, \cdots, \alpha_s$ 下的矩阵, 从而可逆; C 是 $\sigma|_{V_2}$ 在基 β_1, \cdots, β_t 下的矩阵, 是幂零矩阵. 从而 A 相似于 $\begin{pmatrix} B & 0 \\ 0 & C \end{pmatrix}$, 其中 B 是可逆矩阵, C 是幂零矩阵. (20 分)

=====

注: 如果视 F 为复数域直接用若当标准型证明, 证明正确可以给 10 分:
存在可逆矩阵 P , 使得

$$P^{-1}AP = \text{diag}(J(\lambda_1, n_1), \cdots, J(\lambda_s, n_s), J(0, m_1), \cdots, J(0, m_t)),$$

其中 $J(\lambda_i, n_i)$ 是特征值为 λ_i 的阶为 n_i 的若当块, $\lambda_i \neq 0$; $J(0, m_j)$ 特征值为 0 的阶为 m_j 的若当块. (5 分)

令

$$B = \text{diag}(J(\lambda_1, n_1), \cdots, J(\lambda_s, n_s)),$$

$$C = \text{diag}(J(0, m_1), \cdots, J(0, m_t)),$$

则 B 为可逆矩阵, C 为幂零矩阵, A 相似于 $\begin{pmatrix} B & 0 \\ 0 & C \end{pmatrix}$ (10 分)

七、(本题 15 分) 设 $F(x)$ 是 $[0, +\infty)$ 上的单调递减函数, $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = 0$, 且

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^{+\infty} F(t) \sin \frac{t}{n} dt = 0.$$

证明: (i) $\lim_{x \rightarrow +\infty} xF(x) = 0$, (ii) $\lim_{x \rightarrow 0} \int_0^{+\infty} F(t) \sin(xt) dt = 0$.

证明: 首先, 对任何 $x \in \mathbb{R}$, 不难由关于无穷积分收敛性的 Dirichlet 判别法得到 $\int_0^{+\infty} F(t) \sin(xt) dt$ 收敛. 下记

$$f(x) = \int_0^{+\infty} F(t) \sin(xt) dt, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

由于 F 单调下降,

$$\begin{aligned} & \int_{2k\pi}^{(2k+2)\pi} F(nt) \sin t dt \\ &= \int_0^\pi \left(F(2nk\pi + nt) - F(2nk\pi + 2n\pi - nt) \right) \sin t dt \\ &\geq 0, \quad \forall k = 0, 1, 2, \dots \end{aligned}$$

从而

$$\begin{aligned} f\left(\frac{1}{n}\right) &= \int_0^{+\infty} F(t) \sin \frac{t}{n} dt \\ &= \int_0^{+\infty} nF(nt) \sin t dt \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \int_{2k\pi}^{(2k+2)\pi} nF(nt) \sin t dt \\ &\geq \int_0^{2\pi} nF(nt) \sin t dt \\ &= \int_0^\pi n \left(F(nt) - F(2n\pi - nt) \right) \sin t dt \\ &\geq \int_0^{\frac{\pi}{2}} n \left(F(nt) - F(2n\pi - nt) \right) \sin t dt \\ &\geq n \left[F\left(\frac{n\pi}{2}\right) - F\left(\frac{3n\pi}{2}\right) \right] \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin t dt \\ &= n \left[F\left(\frac{n\pi}{2}\right) - F\left(\frac{3n\pi}{2}\right) \right] \\ &\geq 0. \end{aligned}$$

..... (5 分)

结合 $\lim_{n \rightarrow +\infty} f\left(\frac{1}{n}\right) = 0$ 得

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} n \left[F\left(\frac{n\pi}{2}\right) - F\left(\frac{3n\pi}{2}\right) \right] = 0.$$

..... (7 分)

这样, 任取 $\delta > 0$, 有 $N > 0$ 使得当 $n > N$ 时, 有

$$n \left| F\left(\frac{n\pi}{2}\right) - F\left(\frac{3n\pi}{2}\right) \right| \leq \delta.$$

从而对任何 $m > 0$, $n > N$ 有

$$\begin{aligned} 0 &\leq nF\left(\frac{n\pi}{2}\right) \\ &\leq \sum_{k=0}^m n \left| F\left(\frac{3^k n\pi}{2}\right) - F\left(\frac{3^{k+1} n\pi}{2}\right) \right| + nF\left(\frac{3^{m+1} n\pi}{2}\right) \\ &\leq \sum_{k=0}^m \frac{\delta}{3^k} + nF\left(\frac{3^{m+1} n\pi}{2}\right) \\ &\leq \frac{3\delta}{2} + nF\left(\frac{3^{m+1} n\pi}{2}\right). \end{aligned}$$

上式中令 $m \rightarrow +\infty$, 由 $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = 0$ 得到

$$0 \leq nF\left(\frac{n\pi}{2}\right) \leq \frac{3\delta}{2}, \quad \forall n > N.$$

所以

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} nF\left(\frac{n\pi}{2}\right) = 0.$$

..... (9 分)

进一步利用单调性, 当 $x > \frac{\pi}{2}$ 时, 有

$$0 \leq xF(x) \leq \pi \left[\frac{2x}{\pi} \right] F\left(\left[\frac{2x}{\pi} \right] \cdot \frac{\pi}{2}\right),$$

其中 $[s]$ 表示实数 s 的整数部分. 于是可得

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} xF(x) = 0.$$

..... (10 分)

从而又知 $xF(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上有界, 设上界为 $M \geq 0$.

$\forall \varepsilon \in (0, \pi)$, 当 $x > 0$ 时, 我们有

$$\begin{aligned} 0 &\leq f(x) = \int_0^{+\infty} x^{-1} F(x^{-1}t) \sin t \, dt \\ &\leq \int_0^{\pi} x^{-1}t H(x^{-1}t) \frac{\sin t}{t} \, dt \end{aligned}$$

..... (12 分)

$$\leq x^{-1}\varepsilon H(x^{-1}\varepsilon) \int_{\varepsilon}^{\pi} \frac{\sin t}{t} \, dt + M\varepsilon, \quad \forall x > 0.$$

..... (14 分)

于是

$$0 \leq \overline{\lim}_{x \rightarrow 0^+} f(x) \leq M\varepsilon.$$

由 $\varepsilon \in (0, \pi)$ 的任意性, 可得 $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 0$.

进而因 f 是奇函数推得 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$ (15 分)

□

第二届中国大学生数学竞赛预赛试卷参考答案 (数学类)

一、(10分) 设 $\varepsilon \in (0, 1)$, $x_0 = a$, $x_{n+1} = a + \varepsilon \sin x_n$ ($n = 0, 1, 2, \dots$). 证明:
 $\xi = \lim_{n \rightarrow +\infty} x_n$ 存在, 且 ξ 为方程 $x - \varepsilon \sin x = a$ 的唯一根.

证明: 注意到 $|(\sin x)'| = |\cos x| \leq 1$, 由中值定理, 我们有

$$|\sin x - \sin y| \leq |x - y|, \quad \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

.....(2 分)

所以

$$|x_{n+2} - x_{n+1}| = |\varepsilon(\sin x_{n+1} - \sin x_n)| \leq \varepsilon |x_{n+1} - x_n|, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

.....(4 分)

从而可得

$$|x_{n+1} - x_n| \leq \varepsilon^n |x_1 - x_0|, \quad \forall n = 0, 1, 2, \dots$$

于是级数 $\sum_{n=0}^{\infty} (x_{n+1} - x_n)$ 绝对收敛, 从而 $\xi = \lim_{n \rightarrow +\infty} x_n$ 存在.

.....(6 分)

对于递推式 $x_{n+1} = a + \varepsilon \sin x_n$ 两边取极限即得 ξ 为 $x - \varepsilon \sin x = a$ 的根.

.....(8 分)

进一步, 设 η 也是 $x - \varepsilon \sin x = a$, 即 $\eta - \varepsilon \sin \eta = a$ 的根, 则

$$|\xi - \eta| = \varepsilon |\sin \xi - \sin \eta| \leq \varepsilon |\xi - \eta|.$$

所以由 $\varepsilon \in (0, 1)$ 可得 $\eta = \xi$. 即 $x - \varepsilon \sin x = a$ 的根唯一. 证毕

.....(10 分)

□

二、(15 分) 设 $B = \begin{pmatrix} 0 & 10 & 30 \\ 0 & 0 & 2010 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. 证明 $X^2 = B$ 无解, 这里 X 为三阶未知复方阵.

证明: 反证法. 设方程有解, 即存在复矩阵 A 使得 $A^2 = B$.

.....(2 分)

我们注意到 B 的特征值为 0, 且其代数重数为 3.

.....(4 分)

设 λ 为 A 的一个特征值, 则 λ^2 为 B 的特征值. 所以 $\lambda = 0$. 从而 A 的特征值均为 0.

.....(6 分)

于是 A 的 Jordan 标准型只可能为 $J_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $J_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ 或 $J_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

.....(10 分)

从而 A^2 的 Jordan 标准型只能为 $J_1 = J_1^2 = J_2^2$ 或 $J_2 = J_3^2$.

.....(12 分)

因此 A^2 的秩不大于 1, 与 $B = A^2$ 的秩为 2 矛盾.

所以 $X^2 = B$ 无解. 证毕.

.....(15 分)

□

三、(10 分) 设 $D \subset \mathbb{R}^2$ 是凸区域, 函数 $f(x, y)$ 是凸函数. 证明或否定: $f(x, y)$ 在 D 上连续.

注: 函数 $f(x, y)$ 为凸函数的定义是 $\forall \alpha \in (0, 1)$ 以及 $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in D$, 成立

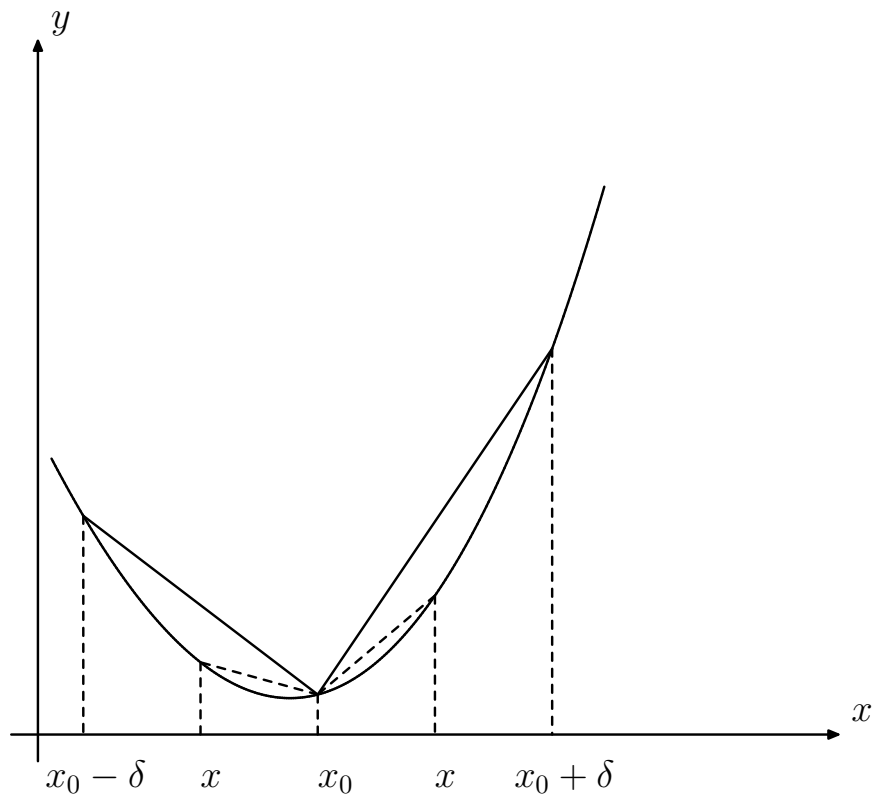
$$f(\alpha x_1 + (1 - \alpha)x_2, \alpha y_1 + (1 - \alpha)y_2) \leq \alpha f(x_1, y_1) + (1 - \alpha)f(x_2, y_2).$$

证明: 结论成立. 我们分两步证明结论.

(i) 对于 $\delta > 0$ 以及 $[x_0 - \delta, x_0 + \delta]$ 上的一元凸函数 $g(x)$, 容易验证 $\forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$:

$$\frac{g(x_0) - g(x_0 - \delta)}{\delta} \leq \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} \leq \frac{g(x_0 + \delta) - g(x_0)}{\delta}.$$

.....(2 分)



从而

$$\left| \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} \right| \leq \left| \frac{g(x_0 + \delta) - g(x_0)}{\delta} \right| + \left| \frac{g(x_0) - g(x_0 - \delta)}{\delta} \right|, \quad \forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta).$$

由此即得 $g(x)$ 在 x_0 连续. 一般地, 可得开区间上的一元凸函数连续.

.....(4 分)

(ii) 设 $(x_0, y_0) \in D$. 则有 $\delta > 0$ 使得

$$E_\delta \equiv [x_0 - \delta, x_0 + \delta] \times [y_0 - \delta, y_0 + \delta] \subset D.$$

.....(5 分)

注意到固定 x 或 y 时, $f(x, y)$ 作为一元函数都是凸函数, 由 (i) 的结论, $f(x, y_0), f(x, y_0 + \delta), f(x, y_0 - \delta)$ 都是 $x \in [x_0 - \delta, x_0 + \delta]$ 上的连续函数, 从而它们有界, 即存在常数 $M_\delta > 0$ 使得

$$\begin{aligned} & \frac{|f(x, y_0 + \delta) - f(x, y_0)|}{\delta} + \frac{|f(x, y_0) - f(x, y_0 - \delta)|}{\delta} \\ & + \frac{|f(x_0 + \delta, y_0) - f(x_0, y_0)|}{\delta} + \frac{|f(x_0, y_0) - f(x_0 - \delta, y_0)|}{\delta} \\ & \leq M_\delta, \quad \forall x \in [x_0 - \delta, x_0 + \delta]. \end{aligned}$$

.....(7 分)

进一步, 由 (i) 的结论, 对于 $(x, y) \in E_\delta$,

$$\begin{aligned} & |f(x, y) - f(x_0, y_0)| \\ & \leq |f(x, y) - f(x, y_0)| + |f(x, y_0) - f(x_0, y_0)| \\ & \leq \left(\frac{|f(x, y_0 + \delta) - f(x, y_0)|}{\delta} + \frac{|f(x, y_0) - f(x, y_0 - \delta)|}{\delta} \right) |y - y_0| \\ & \quad + \left(\frac{|f(x_0 + \delta, y_0) - f(x_0, y_0)|}{\delta} + \frac{|f(x_0, y_0) - f(x_0 - \delta, y_0)|}{\delta} \right) |x - x_0| \\ & \leq M_\delta |y - y_0| + M_\delta |x - x_0|. \end{aligned}$$

于是 $f(x, y)$ 在 (x_0, y_0) 连续. 证毕.

.....(10 分)

□

四、(10 分) 设 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上 Riemann 可积, 在 $x = 1$ 可导, $f(1) = 0$, $f'(1) = a$. 证明:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} n^2 \int_0^1 x^n f(x) dx = -a.$$

证明: 记 $M = \sup_{x \in [0, 1]} |f(x)| < +\infty$. 令 $r(x) = f(x) - f(1) - f'(1)(x - 1) = f(x) - a(x - 1)$. 则由 Peano 型的 Taylor 展式可得 $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta \in (0, 1)$, 使得当 $\delta < x \leq 1$ 时,

$$|r(x)| \leq \varepsilon(1 - x).$$

.....(2 分)

我们有

$$\begin{aligned} \int_0^1 x^n f(x) dx &= \int_0^\delta x^n f(x) dx + \int_\delta^1 a x^n (x - 1) dx + \int_\delta^1 x^n r(x) dx \\ &= R_1 + R_2 + R_3. \end{aligned}$$

.....(4 分)

注意到

$$\begin{aligned} |R_1| &\leq M \int_0^\delta x^n dx = M \frac{\delta^{n+1}}{n+1}, \\ R_2 &= -\frac{a}{(n+1)(n+2)} + a \left(\frac{\delta^{n+1}}{n+1} - \frac{\delta^{n+2}}{n+2} \right) \end{aligned}$$

以及

$$\begin{aligned}|R_3| &\leq \int_{\delta}^1 x^n |r(x)| dx \leq \varepsilon \int_{\delta}^1 x^n (1-x) dx \\ &\leq \varepsilon \int_0^1 x^n (1-x) dx = \frac{\varepsilon}{(n+1)(n+2)},\end{aligned}$$

我们有

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow +\infty} |n^2 R_1| &= 0, \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} |n^2 R_2 + a| &= 0\end{aligned}$$

以及

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} |n^2 R_3| \leq \varepsilon.$$

.....(8 分)

所以

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} \left| n^2 \int_0^1 x^n f(x) dx + a \right| \leq \varepsilon.$$

由上式及 $\varepsilon > 0$ 的任意性即得

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} n^2 \int_0^1 x^n f(x) dx = -a.$$

证毕.

.....(10 分)

□

五、(15 分) 已知二次曲面 Σ (非退化)过以下九点: $A(1, 0, 0)$, $B(1, 1, 2)$, $C(1, -1, -2)$, $D(3, 0, 0)$, $E(3, 1, 2)$, $F(3, -2, -4)$, $G(0, 1, 4)$, $H(3, -1, -2)$, $I(5, 2\sqrt{2}, 8)$.
问 Σ 是哪一类曲面?

解答: 易见, A 、 B 、 C 共线, D 、 E 、 F 共线.

.....(6 分)

而只有两种二次曲面上可能存在共线的三点: 单叶双曲面和双曲抛物面.

.....(10 分)

然后, 可以看到直线 ABC 和直线 DEF 是平行的, 且不是同一条直线.

.....(12 分)

这就又排除了双曲抛物面的可能(双曲抛物面的 同族直母线都异面, 不同族直母线都相交), 所以只可能是单叶双曲面.

.....(15 分)

注: 这个曲面其实是(不要求学生写出方程式)

$$(x-2)^2 + y^2 - \frac{z^2}{4} = 1.$$

六、(20 分) 设 A 为 $n \times n$ 实矩阵(未必对称), 对任一 n 维实向量 $\alpha \equiv (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$, $\alpha A \alpha^\top \geq 0$ (这里 α^\top 表示 α 的转置), 且存在 n 维实向量 β , 使得 $\beta A \beta^\top = 0$, 同时对任意 n 维实向量 x 和 y , 当 $x A y^\top \neq 0$ 时有 $x A y^\top + y A x^\top \neq 0$. 证明: 对任意 n 维实向量 v , 都有 $v A \beta^\top = 0$.

证明: 取任意实数 r , 由题设知

$$(v + r\beta)A(v + r\beta)^\top \geq 0.$$

.....(8 分)

即

$$vAv^\top + rvA\beta^\top + r\beta Av^\top + r^2\beta A\beta^\top \geq 0.$$

.....(12 分)

亦即

$$vAv^\top + r(vA\beta^\top + \beta Av^\top) + r^2\beta A\beta^\top \geq 0.$$

.....(14 分)

若 $vA\beta^\top \neq 0$, 则有 $vA\beta^\top + \beta Av^\top \neq 0$. 因此可取适当的实数 r 使得

$$vAv^\top + r(vA\beta^\top + \beta Av^\top) + r^2\beta A\beta^\top < 0.$$

盾. 证毕.

.....(20 分)

□

七、(10 分) 设 f 在区间 $[0, 1]$ 上Riemann 可积, $0 \leq f \leq 1$. 求证: 对任何 $\varepsilon > 0$, 存在只取值 0, 1 的分段(段数有限)常值函数 $g(x)$, 使得 $\forall [\alpha, \beta] \subseteq [0, 1]$,

$$\left| \int_\alpha^\beta (f(x) - g(x)) dx \right| < \varepsilon.$$

证明: 取定 $n > \frac{2}{\varepsilon}$. 定义 $A_m = \left[\frac{m}{n}, \frac{m}{n} + \int_{\frac{m}{n}}^{\frac{m+1}{n}} f(t) dt \right)$,

$$g(x) = \begin{cases} 1, & x \in \bigcup_{m=0}^{n-1} A_m, \\ 0, & x \notin \bigcup_{m=0}^{n-1} A_m. \end{cases}$$

.....(5 分)

对于 $0 \leq \alpha < \beta \leq 1$, 设非负整数 $k \leq \ell$ 满足 $\frac{k}{n} \leq \alpha < \frac{k+1}{n}$, $\frac{\ell}{n} \leq \beta < \frac{\ell+1}{n}$, 则

$$\begin{aligned} & \left| \int_{\alpha}^{\beta} (f(x) - g(x)) dx \right| \\ & \leq \int_{\alpha}^{\frac{k+1}{n}} |f(x) - g(x)| dx + \left| \int_{\frac{k+1}{n}}^{\frac{\ell}{n}} (f(x) - g(x)) dx \right| + \int_{\frac{\ell}{n}}^{\beta} |f(x) - g(x)| dx \\ & \leq \int_{\alpha}^{\frac{k+1}{n}} 1 dx + 0 + \int_{\frac{\ell}{n}}^{\beta} 1 dx \\ & \leq \frac{2}{n} < \varepsilon. \end{aligned}$$

证毕.

.....(10 分)

□

八、(10 分) 已知 $\varphi : (0, +\infty) \rightarrow (0, +\infty)$ 是一个严格单调下降的连续函数, 满足

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \varphi(t) = +\infty.$$

若

$$\int_0^{+\infty} \varphi(t) dt = \int_0^{+\infty} \varphi^{-1}(t) dt = a < +\infty,$$

其中 φ^{-1} 表示 φ 的反函数. 求证:

$$\int_0^{+\infty} [\varphi(t)]^2 dt + \int_0^{+\infty} [\varphi^{-1}(t)]^2 dt \geq \frac{1}{2} a^{\frac{3}{2}}.$$

证明: 令 $P = \int_p^{+\infty} \varphi(t) dt$, $Q = \int_q^{+\infty} \varphi^{-1}(t) dt$, $I = a - P - Q$, 其中 $pq = a$.

.....(2 分)

则

$$\begin{aligned} & \int_0^{+\infty} \left(\varphi^{-1}(t) \right)^2 dt \geq \int_0^q \left(\varphi^{-1}(t) \right)^2 dt \\ \geq & \frac{1}{q} \left(\int_0^q \varphi^{-1}(t) dt \right)^2 = \frac{1}{q} (a - Q)^2 = \frac{1}{q} (I + P)^2, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \int_0^{+\infty} \left(\varphi(t) \right)^2 dt \geq \int_0^p \left(\varphi(t) \right)^2 dt \\ \geq & \frac{1}{p} \left(\int_0^p \varphi(t) dt \right)^2 = \frac{1}{p} (a - P)^2 = \frac{1}{p} (I + Q)^2. \end{aligned}$$

.....(6 分)

因此,

$$\begin{aligned} & \int_0^{+\infty} \left(\varphi(t) \right)^2 dt + \int_0^{+\infty} \left(\varphi^{-1}(t) \right)^2 dt \\ \geq & \frac{1}{p} (I + Q)^2 + \frac{1}{q} (I + P)^2 \\ \geq & \frac{2}{\sqrt{pq}} (I + P)(I + Q) = \frac{2}{\sqrt{a}} (QP + aI). \end{aligned}$$

.....(8 分)

易见可取到适当的 p, q 满足 $P = Q = \frac{a - I}{2}$, 从而

$$\begin{aligned} & \int_0^{+\infty} \left(\varphi(t) \right)^2 dt + \int_0^{+\infty} \left(\varphi^{-1}(t) \right)^2 dt \\ \geq & \frac{1}{a} \left(\frac{(a - I)^2}{4} I + aI \right) = \frac{2}{\sqrt{2}} \frac{(a + I)^2}{4} \geq \frac{1}{2} a^{\frac{3}{2}}. \end{aligned}$$

证毕.

.....(10 分)

□

姓名：____ 身份证号：____ 所在院校：____ 年级：____ 专业：____

首届中国大学生数学竞赛赛区赛试卷解答

(数学类, 2009)

考试形式： 闭卷 考试时间： 120 分钟 满分： 100 分.

题 号	一	二	三	四	五	六	七	总分
满 分	15	20	15	10	10	15	15	100
得 分								

注意：1、所有答题都须写在此试卷纸密封线右边，写在其它纸上一律无效。
2、密封线左边请勿答题，密封线外不得有姓名及相关标记。

得 分	
评阅人	

一、(15 分) 求经过三平行直线 $L_1: x = y = z$,
 $L_2: x-1 = y = z+1$, $L_3: x = y+1 = z-1$ 的圆柱面的方程.

解： 先求圆柱面的轴 L_0 的方程. 由已知条件易知，圆柱面母线的方向是 $\vec{n} = (1,1,1)$ ， 且圆柱面经过点 $O(0,0,0)$ ， 过点 $O(0,0,0)$ 且垂直于 $\vec{n} = (1,1,1)$ 的平面 π 的方程为： $x + y + z = 0$ (3 分)

π 与三已知直线的交点分别为 $O(0,0,0), P(1,0,-1), Q(0,-1,1)$ (5 分)

圆柱面的轴 L_0 是到这三点等距离的点的轨迹， 即

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = (x-1)^2 + y^2 + (z+1)^2 \\ x^2 + y^2 + z^2 = x^2 + (y+1)^2 + (z-1)^2 \end{cases},$$

即

$$\begin{cases} x - z = 1 \\ y - z = -1 \end{cases}, \dots\dots\dots (9 \text{ 分})$$

将 L_0 的方程改为标准方程

$$x - 1 = y + 1 = z.$$

圆柱面的半径即为平行直线 $x = y = z$ 和 $x - 1 = y + 1 = z$ 之间的距离. $P_0(1,-1,0)$

为 L_0 上的点. (12 分)

对圆柱面上任意一点 $S(x, y, z)$, 有 $\frac{|\vec{n} \times \overrightarrow{P_0S}|}{|\vec{n}|} = \frac{|\vec{n} \times \overrightarrow{P_0O}|}{|\vec{n}|}$, 即

$$(-y+z-1)^2 + (x-z-1)^2 + (-x+y+2)^2 = 6,$$

所以, 所求圆柱面的方程为:

$$x^2 + y^2 + z^2 - xy - xz - yz - 3x + 3y = 0. \dots\dots\dots (15 \text{ 分})$$

得 分	
评阅人	

二、(20 分) 设 $C^{n \times n}$ 是 $n \times n$ 复矩阵全体在通常的运算下所构成

的复数域 C 上的线性空间, $F = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \vdots & 0 & -a_n \\ 1 & 0 & \vdots & 0 & -a_{n-1} \\ 0 & 1 & \vdots & 0 & -a_{n-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \vdots & 1 & -a_1 \end{pmatrix}.$

(1) 假设 $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$, 若 $AF = FA$, 证明:

$$A = a_{n1}F^{n-1} + a_{n-11}F^{n-2} + \cdots + a_{21}F + a_{11}E;$$

(2) 求 $C^{n \times n}$ 的子空间 $C(F) = \{X \in C^{n \times n} \mid FX = XF\}$ 的维数.

(1) 的证明: 记 $A = (\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n)$, $M = a_{n1}F^{n-1} + a_{n-11}F^{n-2} + \cdots + a_{21}F + a_{11}E$. 要证明 $M = A$, 只需证明 A 与 M 的各个列向量对应相等即可. 若以 e_i 记第 i 个基本单位列向量. 于是, 只需证明: 对每个 i , $Me_i = Ae_i (= \alpha_i)$ (2 分)

若记 $\beta = (-a_n, -a_{n-1}, \cdots, -a_1)^T$, 则 $F = (e_2, e_3, \cdots, e_n, \beta)$. 注意到,

$$Fe_1 = e_2, F^2e_1 = Fe_2 = e_3, \cdots, F^{n-1}e_1 = F(F^{n-2}e_1) = Fe_{n-1} = e_n \quad (*) \dots\dots (6 \text{ 分})$$

由

$$\begin{aligned} Me_1 &= (a_{n1}F^{n-1} + a_{n-11}F^{n-2} + \cdots + a_{21}F + a_{11}E)e_1 \\ &= a_{n1}F^{n-1}e_1 + a_{n-11}F^{n-2}e_1 + \cdots + a_{21}Fe_1 + a_{11}Ee_1 \\ &= a_{n1}e_n + a_{n-11}e_{n-1} + \cdots + a_{21}e_2 + a_{11}e_1 \\ &= \alpha_1 = Ae_1. \dots\dots\dots (10 \text{ 分}) \end{aligned}$$

知 $Me_2 = MFe_1 = FMe_1 = FAe_1 = AFe_1 = Ae_2$

$$Me_3 = MF^2e_1 = F^2Me_1 = F^2Ae_1 = AF^2e_1 = Ae_3$$

.....

$$Me_n = MF^{n-1}e_1 = F^{n-1}Me_1 = F^{n-1}Ae_1 = AF^{n-1}e_1 = Ae_n$$

所以, $M = A$ (14 分)

(2) 解: 由 (1), $C(F) = \text{span}\{E, F, F^2, \dots, F^{n-1}\}$, (16 分)

设 $x_0E + x_1F + x_2F^2 + \dots + x_{n-1}F^{n-1} = O$, 等式两边同右乘 e_1 , 利用 (*) 得

$$\theta = Oe_1 = (x_0E + x_1F + x_2F^2 + \dots + x_{n-1}F^{n-1})e_1$$

$$= x_0Ee_1 + x_1Fe_1 + x_2F^2e_1 + \dots + x_{n-1}F^{n-1}e_1$$

$$= x_0e_1 + x_1e_2 + x_2e_3 + \dots + x_{n-1}e_n \dots\dots\dots(18\text{分})$$

因 $e_1, e_2, e_3, \dots, e_n$ 线性无关, 故, $x_0 = x_1 = x_2 = \dots = x_{n-1} = 0$ (19 分)

所以, $E, F, F^2, \dots, F^{n-1}$ 线性无关. 因此, $E, F, F^2, \dots, F^{n-1}$ 是 $C(F)$ 的基, 特别地,

$\dim C(F) = n$ (20 分)

得 分	
评阅人	

三、(15 分) 假设 V 是复数域 C 上 n 维线性空间 ($n > 0$), f, g 是 V 上的线性变换. 如果 $fg - gf = f$, 证明: f 的特征值都是

0, 且 f, g 有公共特征向量.

证明: 假设 λ_0 是 f 的特征值, W 是相应的特征子空间, 即

$$W = \{\eta \in V \mid f(\eta) = \lambda_0\eta\}. \text{于是, } W \text{ 在 } f \text{ 下是不变的.} \dots\dots\dots (1 \text{ 分})$$

下面先证明, $\lambda_0 \neq 0$. 任取非零 $\eta \in W$, 记 m 为使得 $\eta, g(\eta), g^2(\eta), \dots, g^m(\eta)$ 线性相关的最小的非负整数, 于是, 当 $0 \leq i \leq m-1$ 时, $\eta, g(\eta), g^2(\eta), \dots, g^i(\eta)$ 线性无关..... (2 分)

$0 \leq i \leq m-1$ 时令 $W_i = \text{span}\{\eta, g(\eta), g^2(\eta), \dots, g^i(\eta)\}$, 其中, $W_0 = \{\theta\}$. 因此, $\dim W_i = i$

($1 \leq i \leq m$), 并且, $W_m = W_{m+1} = W_{m+2} = \dots$. 显然, $g(W_i) \subseteq W_{i+1}$, 特别地, W_m 在 g 下是不变的. (4 分)

下面证明, W_m 在 f 下也是不变的. 事实上, 由 $f(\eta) = \lambda_0\eta$, 知

$$fg(\eta) = gf(\eta) + f(\eta) = \lambda_0g(\eta) + \lambda_0\eta \dots\dots\dots (5 \text{ 分})$$

$$\begin{aligned}
fg^2(\eta) &= gfg(\eta) + fg(\eta) \\
&= g(\lambda_0 g(\eta) + \lambda_0 \eta) + (\lambda_0 g(\eta) + \lambda_0 \eta) \\
&= \lambda_0 g^2(\eta) + 2\lambda_0 g(\eta) + \lambda_0 \eta \quad \dots\dots\dots(6\text{分})
\end{aligned}$$

根据

$$\begin{aligned}
fg^k(\eta) &= gfg^{k-1}(\eta) + fg^{k-1}(\eta) \\
&= g(fg^{k-1})(\eta) + fg^{k-1}(\eta)
\end{aligned}$$

用归纳法不难证明, $fg^k(\eta)$ 一定可以表示成 $\eta, g(\eta), g^2(\eta), \dots, g^k(\eta)$ 的线性组合, 且表示式中 $g^k(\eta)$ 前的系数为 λ_0 (8 分)

因此, W_m 在 f 下也是不变的, f 在 W_m 上的限制在基 $\eta, g(\eta), g^2(\eta), \dots, g^{m-1}(\eta)$ 下的矩阵是上三角矩阵, 且对角线元素都是 λ_0 , 因而, 这一限制的迹为 $m\lambda_0$ (10 分)

由于 $fg - gf = f$ 在 W_m 上仍然成立, 而 $fg - gf$ 的迹一定为零, 故 $m\lambda_0 = 0$, 即 $\lambda_0 = 0$ (12 分)

任取 $\eta \in W$, 由于 $f(\eta) = \theta$, $fg(\eta) = gf(\eta) + f(\eta) = g(\theta) + f(\eta) = \theta$, 所以, $g(\eta) \in W$. 因此, W 在 g 下是不变的. 从而, 在 W 中存在 g 的特征向量, 这也是 f, g 的公共特征向量. (15 分)

得 分	
评阅人	

四、(10 分) 设 $\{f_n(x)\}$ 是定义在 $[a, b]$ 上的无穷次可微的函数序列且逐点收敛, 并在 $[a, b]$ 上满足 $|f'_n(x)| \leq M$. (1) 证明 $\{f_n(x)\}$ 在 $[a, b]$ 上一致收敛; (2) 设 $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$, 问 $f(x)$ 是否一定在 $[a, b]$ 上处处可导, 为什么?

证明: (1) $\forall \varepsilon > 0$, 将区间 $[a, b]$ K 等分, 分点为 $x_j = a + \frac{j(b-a)}{K}$, $j = 0, 1, 2, \dots, K$, 使得 $\frac{b-a}{K} < \varepsilon$. 由于 $\{f_n(x)\}$ 在有限个点 $\{x_j\}$, $j = 0, 1, 2, \dots, K$ 上收敛, 因此 $\exists N$, $\forall m > n > N$, 使得 $|f_m(x_j) - f_n(x_j)| < \varepsilon$ 对每个 $j = 0, 1, 2, \dots, K$ 成立. (3 分)

于是 $\forall x \in [a, b]$, 设 $x \in [x_j, x_{j+1}]$, 则

$$|f_m(x) - f_n(x)| \leq |f_m(x) - f_m(x_j)| + |f_m(x_j) - f_n(x_j)| + |f_n(x_j) - f_n(x)|,$$

线

封

密

$$=|f'_m(\xi)(x-x_j)|+|f_m(x_j)-f_n(x_j)|+|f'_n(\eta)(x-x_j)|<(2M+1)\varepsilon. \quad \dots (5 \text{ 分})$$

(2) 不一定. (6 分)

令 $f_n(x)=\sqrt{x^2+\frac{1}{n}}$, 则 $f(x)=\lim_{n\rightarrow\infty}f_n(x)$ 在 $[a,b]$ 上不能保证处处可导. (10 分)

得 分	
评阅人	

五、(10 分) 设 $a_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}}t\left|\frac{\sin nt}{\sin t}\right|^3dt$, 证明 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{a_n}$ 发
散.

$$\text{解: } \int_0^{\frac{\pi}{2}}t\left|\frac{\sin nt}{\sin t}\right|^3dt=\int_0^{\frac{\pi}{n}}t\left|\frac{\sin nt}{\sin t}\right|^3dt+\int_{\frac{\pi}{n}}^{\frac{\pi}{2}}t\left|\frac{\sin nt}{\sin t}\right|^3dt=I_1+I_2 \quad \dots\dots (3 \text{ 分})$$

$$I_1=\int_0^{\frac{\pi}{n}}t\left|\frac{\sin nt}{\sin t}\right|^3dt< n^3\int_0^{\frac{\pi}{n}}tdt=\frac{\pi^2n}{2}, \quad \dots\dots (5 \text{ 分})$$

$$I_2=\int_{\frac{\pi}{n}}^{\frac{\pi}{2}}t\left|\frac{\sin nt}{\sin t}\right|^3dt<\int_{\frac{\pi}{n}}^{\frac{\pi}{2}}t\cdot\left(\frac{\pi}{2t}\right)^3dt=-\frac{\pi^3}{8}\int_{\frac{\pi}{n}}^{\frac{\pi}{2}}d\left(\frac{1}{t}\right) \quad \dots\dots (7 \text{ 分})$$

$$=\frac{\pi^3}{8}\left(\frac{n}{\pi}-\frac{2}{\pi}\right)<\frac{\pi^2n}{8}. \quad \dots\dots (8 \text{ 分})$$

因此 $\frac{1}{a_n}>\frac{1}{\pi^2n}$, 由此得到 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{a_n}$ 发散. (10 分)

得 分	
评阅人	

六、(15 分) $f(x,y)$ 是 $\{(x,y)|x^2+y^2\leq 1\}$ 上二次
连续可微函数, 满足 $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=x^2y^2$, 计算

积分

$$I=\iint_{x^2+y^2\leq 1}\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\frac{\partial f}{\partial y}\right)dxdy.$$

解: 采用极坐标 $x=r\cos\theta, y=r\sin\theta$, 则

$$I=\int_0^1dr\int_0^{2\pi}\left(\cos\theta\cdot\frac{\partial f}{\partial x}+\sin\theta\cdot\frac{\partial f}{\partial y}\right)r d\theta=\int_0^1dr\int_{x^2+y^2=r^2}\left(\frac{\partial f}{\partial x}dy-\frac{\partial f}{\partial y}dx\right)\dots\dots (6 \text{ 分})$$

$$=\int_0^1dr\iint_{x^2+y^2\leq r^2}\left(\frac{\partial f}{\partial x^2}+\frac{\partial f}{\partial y^2}\right)dxdy=\int_0^1dr\iint_{x^2+y^2\leq r^2}(x^2y^2)dxdy \quad \dots\dots (10 \text{ 分})$$

$$= \int_0^1 dr \int_0^r \rho^5 d\rho \int_0^{2\pi} \cos^2 \theta \sin^2 \theta d\theta = \frac{\pi}{168}. \quad \dots\dots\dots(15 \text{ 分})$$

得 分	
评阅人	

七、(15 分)) 假设函数 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上连续, 在 $(0, 1)$ 内二阶可导, 过点 $A(0, f(0))$, 与点 $B(1, f(1))$ 的直线与曲线 $y = f(x)$ 相交于点

$C(c, f(c))$, 其中 $0 < c < 1$. 证明: 在 $(0, 1)$ 内至少存在一点 ξ , 使 $f''(\xi) = 0$.

证明: 因为 $f(x)$ 在 $[0, c]$ 上满足 *Lagrange* 中值定理的条件, 故存在 $\xi_1 \in (0, c)$, 使 $f'(\xi_1) = \frac{f(c) - f(0)}{c - 0}$. $\dots\dots\dots$ (4 分)

由于 C 在弦 AB 上, 故有

$$\frac{f(c) - f(0)}{c - 0} = \frac{f(1) - f(0)}{1 - 0} = f(1) - f(0). \quad \dots\dots\dots (7 \text{ 分})$$

从而 $f'(\xi_1) = f(1) - f(0)$. $\dots\dots\dots$ (8 分)

同理可证, 存在 $\xi_2 \in (c, 1)$, 使 $f'(\xi_2) = f(1) - f(0)$. $\dots\dots\dots$ (11 分)

由 $f'(\xi_1) = f'(\xi_2)$, 知 在 $[\xi_1, \xi_2]$ 上 $f'(x)$ 满足 *Rolle* 定理的条件, 所以存在 $\xi \in (\xi_1, \xi_2) \subset (0, 1)$, 使 $f''(\xi) = 0$. $\dots\dots\dots$ (15 分)