

第三届中国大学生数学竞赛赛区赛

试题参考答案

(数学类, 2011)

一、(本题 15 分) 已知四点 $A(1, 2, 7)$, $B(4, 3, 3)$, $(5, -1, 6)$, $(\sqrt{7}, \sqrt{7}, 0)$. 试求过这四点的球面方程.

解答: 设所求球面的球心为 $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$, 则

$$\begin{aligned} & (\bar{x} - 1)^2 + (\bar{y} - 2)^2 + (\bar{z} - 7)^2 \\ &= (\bar{x} - 4)^2 + (\bar{y} - 3)^2 + (\bar{z} - 3)^2 \\ &= (\bar{x} - 5)^2 + (\bar{y} + 1)^2 + (\bar{z} - 6)^2 \\ &= (\bar{x} - \sqrt{7})^2 + (\bar{y} - \sqrt{7})^2 + \bar{z}^2. \end{aligned}$$

..... (8 分)

即

$$\begin{cases} 3\bar{x} + \bar{y} - 4\bar{z} = -10, \\ 4\bar{x} - 3\bar{y} - \bar{z} = 4, \\ (\sqrt{7} - 1)\bar{x} + (\sqrt{7} - 2)\bar{y} - 7\bar{z} = -20. \end{cases}$$

..... (10 分)

解得 $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) = (1, -1, 3)$. 而 (14 分)

$$(\bar{x} - 1)^2 + (\bar{y} - 2)^2 + (\bar{z} - 7)^2 = 25.$$

于是所求球面方程为

$$(x - 1)^2 + (y + 1)^2 + (z - 3)^2 = 25.$$

..... (15 分)

二、(本题 10 分) 设 f_1, f_2, \dots, f_n 为 $[0, 1]$ 上的非负连续函数. 求证: 存在 $\xi \in [0, 1]$, 使得

$$\prod_{k=1}^n f_k(\xi) \leq \prod_{k=1}^n \int_0^1 f_k(x) dx.$$

证明: 记

$$a_k = \int_0^1 f_k(x) dx, \quad \forall k = 1, 2, \dots, n.$$

当某个 $a_k = 0$ 时, 结论是平凡的. (1 分)

下设 $a_k > 0$ ($\forall k = 1, 2, \dots, n$). 我们有

$$\int_0^1 \sqrt[n]{\prod_{k=1}^n \frac{f_k(x)}{a_k}} dx \leq \int_0^1 \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{f_k(x)}{a_k} dx = 1.$$

..... (8 分)

由此立即可得存在 $\xi \in [0, 1]$ 使得

$$\sqrt[n]{\prod_{k=1}^n \frac{f_k(\xi)}{a_k}} \leq 1.$$

结论得证. (10 分)

□

三、(本题 15 分) 设 F^n 是数域 F 上的 n 维列空间, $\sigma: F^n \rightarrow F^n$ 是一个线性变换. 若 $\forall A \in M_n(F), \sigma(A\alpha) = A\sigma(\alpha), (\forall \alpha \in V)$, 证明: $\sigma = \lambda \cdot \text{id}_{F^n}$, 其中 λ 是 F 中某个数, id_{F^n} 表示恒同变换.

证明: 设 σ 在 F^n 的标准基 $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n$ 下的矩阵为 B , 则 $\sigma(\alpha) = B\alpha (\forall \alpha \in F^n)$ (5 分)

由条件: $\forall A \in M_n(F), \sigma(A\alpha) = A\sigma(\alpha), \forall \alpha \in F^n$, 有 $BA\alpha = AB\alpha, \forall \alpha \in F^n$. 故 $AB = BA, (\forall A \in M_n(F))$ (10 分)

设 $B = (b_{ij})$, 取 $A = \text{diag}(1, \dots, 1, c, 1, \dots, 1)$, 其中 $c \neq 0, 1$, 由 $AB = BA$ 可得 $b_{ij} = 0, \forall i \neq j$. 又取 $A = I_n - E_{ii} - E_{jj} + E_{ij} + E_{ji}$, 这里 E_{st} 是 $(s \ t)$ - 位置为 1 其它位置为 0 的矩阵. 则由 $AB = BA$ 可得 $a_{ii} = a_{jj}, (\forall i, j)$. 取 $\lambda = a_{11}$. 故 $B = \lambda I_n$, 从而 $\sigma = \lambda \cdot \text{id}_{F^n}$ (15 分)

四、(本题 10 分) 对于 $\triangle ABC$, 求 $3\sin A + 4\sin B + 18\sin C$ 的最大值.

解答: 三角形三个角 A, B, C 的取值范围为

$$(A, B, C) \in D \equiv \{(\alpha, \beta, \gamma) | \alpha + \beta + \gamma = \pi, \alpha > 0, \beta > 0, \gamma > 0\}.$$

我们首先考虑 $3\sin A + 4\sin B + 18\sin C$ 在 D 的闭包

$$E = \{(\alpha, \beta, \gamma) | \alpha + \beta + \gamma = \pi, \alpha \geq 0, \beta \geq 0, \gamma \geq 0\}$$

上的最大值. (1 分)

我们有

$$\begin{aligned} & \max_{(A,B,C) \in E} (3\sin A + 4\sin B + 18\sin C) \\ &= \max_{\substack{A+C \leq \pi \\ A, C \geq 0}} (3\sin A + 4\sin(A+C) + 18\sin C) \\ &= \max_{0 \leq C \leq \pi} \max_{0 \leq A \leq \pi-C} \left((3+4\cos C)\sin A + 4\sin C \cos A + 18\sin C \right) \\ &= \max_{0 \leq C \leq \pi} \left(\sqrt{(3+4\cos C)^2 + 16\sin^2 C} + 18\sin C \right) \\ &= \max_{0 \leq C \leq \pi} (\sqrt{25+24\cos C} + 18\sin C). \end{aligned}$$

..... (4 分)

考虑

$$f(C) = \sqrt{25+24\cos C} + 18\sin C, \quad 0 \leq C \leq \pi.$$

易见

$$f(C) \geq f(\pi - C), \quad \forall C \in [0, \frac{\pi}{2}].$$

..... (5 分)

直接计算得

$$f'(C) = 18\cos C - \frac{12\sin C}{\sqrt{25+24\cos C}}.$$

..... (6 分)

计算得 $f'(C) = 0$ 等价于

$$(8\cos C - 1)(27\cos^2 C + 32\cos C + 4) = 0.$$

从而它在 $[0, \frac{\pi}{2}]$ 的解为 $C = \arccos \frac{1}{8}$ (7 分)

于是

$$\begin{aligned} \max_{0 \leq C \leq \pi} f(C) &= \max_{0 \leq C \leq \frac{\pi}{2}} f(C) = \max \left\{ f\left(\arccos \frac{1}{8}\right), f(0), f\left(\frac{\pi}{2}\right) \right\} \\ &= \max \left\{ \frac{35\sqrt{7}}{4}, 7, 23 \right\} = \frac{35\sqrt{7}}{4}. \end{aligned}$$

..... (8 分)

由此可得

$$\max_{(A,B,C) \in E} (3 \sin A + 4 \sin B + 18 \sin C) = \frac{35\sqrt{7}}{4},$$

另一方面, 不难看到 $3 \sin A + 4 \sin B + 18 \sin C$ 在 E 的边界上 (A, B, C 之一为零) 的最大值为 22. (9 分)

所以所求最大值为 $\frac{35\sqrt{7}}{4}$ (10 分)

五、(本题 15 分) 对于任何实数 α , 求证存在取值于 $\{-1, 1\}$ 的数列 $\{a_n\}_{n \geq 1}$ 满足

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\sum_{k=1}^n \sqrt{n+a_k} - n^{\frac{3}{2}} \right) = \alpha.$$

证明: 由 Taylor 展式, $\forall x \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$, 存在 $\xi \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ 使得

$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8(1+\xi)^{\frac{3}{2}}}.$$

..... (1 分)

从而

$$\left| \sqrt{1+x} - \left(1 + \frac{x}{2}\right) \right| \leq x^2, \quad \forall x \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}].$$

..... (2 分)

于是当 $n \geq 2$ 时, 不管我们怎么选取只取值 ± 1 的数列 $\{a_n\}_{n \geq 1}$, 均有

$$\begin{aligned} & \sum_{k=1}^n \left| \sqrt{n+a_k} - n^{\frac{3}{2}} - \sum_{k=1}^n \frac{a_k}{2\sqrt{n}} \right| \\ &= \sqrt{n} \sum_{k=1}^n \left| \sqrt{1 + \frac{a_k}{n}} - \sum_{k=1}^n \left(1 + \frac{a_k}{2n}\right) \right| \\ &\leq \sqrt{n} \sum_{k=1}^n \left(\frac{a_k}{n} \right)^2 \leq \frac{1}{\sqrt{n}}. \end{aligned}$$

..... (5 分)

可以有很多种方法选取只取值 ± 1 的数列 $\{a_n\}_{n \geq 1}$ 使得

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n \frac{a_k}{2\sqrt{n}} = \alpha.$$

此时就成立

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\sum_{k=1}^n \sqrt{n+a_k} - n^{\frac{3}{2}} \right) = \alpha.$$

..... (6 分)

例如, 我们可以按以下方式选取: 取 $a_1 = 1$, 依次定义

$$a_{n+1} = \begin{cases} 1, & \text{如果 } \sum_{k=1}^n a_k < 2\alpha\sqrt{n}, \\ -1, & \text{如果 } \sum_{k=1}^n a_k \geq 2\alpha\sqrt{n}. \end{cases}$$

..... (10 分)

记

$$y_n = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=1}^n a_k, \quad n = 1, 2, \dots$$

我们有

$$-\sqrt{n} \leq y_n \leq \sqrt{n}.$$

若 $y_n > 2\alpha$, 我们有

$$\begin{aligned} y_{n+1} - y_n &= \frac{y_n\sqrt{n} - 1}{\sqrt{n+1}} - y_n \\ &= -\frac{\sqrt{n+1} + \sqrt{n} + y_n}{\sqrt{n+1}(\sqrt{n+1} + \sqrt{n})}, \end{aligned}$$

这时

$$-\frac{2}{\sqrt{n+1}} < y_{n+1} - y_n < 0;$$

..... (12 分)

而当 $y_n < 2\alpha$ 时, 我们有

$$\begin{aligned} y_{n+1} - y_n &= \frac{y_n\sqrt{n} + 1}{\sqrt{n+1}} - y_n \\ &= \frac{\sqrt{n+1} + \sqrt{n} - y_n}{\sqrt{n+1}(\sqrt{n+1} + \sqrt{n})}; \end{aligned}$$

这时

$$0 < y_{n+1} - y_n < \frac{2}{\sqrt{n+1}};$$

于是当 $y_{n+1} - 2\alpha$ 和 $y_n - 2\alpha$ 同号时,

$$|y_{n+1} - 2\alpha| \leq |y_n - 2\alpha|,$$

而当 $y_{n+1} - 2\alpha$ 和 $y_n - 2\alpha$ 异号时,

$$|y_{n+1} - 2\alpha| \leq |y_{n+1} - y_n| \leq \frac{2}{\sqrt{n+1}}.$$

一般地有

$$|y_{n+1} - 2\alpha| \leq \max(|y_n - 2\alpha|, \frac{2}{\sqrt{n+1}}).$$

..... (14 分)

注意到对任何 $N > 0$, 总有 $m \geq N$, 使得 $y_{m+1} - 2\alpha$ 和 $y_m - 2\alpha$ 异号. 由上面的讨论可得到

$$|y_k - 2\alpha| \leq \frac{2}{\sqrt{m+1}} \leq \frac{2}{\sqrt{N+1}}, \quad \forall k = m+1, m+2, \dots$$

因此, $\lim_{n \rightarrow +\infty} y_n = 2\alpha$ (15 分)

□

六、(本题 20 分) 设 A 是数域 F 上的 n 阶方阵. 证明: A 相似于 $\begin{pmatrix} B & 0 \\ 0 & C \end{pmatrix}$, 其中 B 是可逆矩阵, C 是幂零阵, 即存在 m 使得 $C^m = 0$.

证明: 设 V 是 F 上 n 维线性空间, σ 是 V 上线性变换, 它在 V 的一组基下的矩阵为 A . 下面证明存在 σ -不变子空间 V_1, V_2 满足 $V = V_1 \oplus V_2$, 且 $\sigma|_{V_1}$ 是同构, $\sigma|_{V_2}$ 是幂零变换.

首先有子空间升链: $\text{Ker } \sigma \subseteq \text{Ker } \sigma^2 \subseteq \cdots \subseteq \text{Ker } \sigma^k \subseteq \cdots$ 从而存在正整数 m 使得 $\text{Ker } \sigma^m = \text{Ker } \sigma^{m+i}$, ($i = 1, 2, \cdots$). 进而有 $\text{Ker } \sigma^m = \text{Ker } \sigma^{2m}$.

(7 分)

下面证明 $V = \text{Ker } \sigma^m \oplus \text{Im } \sigma^m$.

$\forall \alpha \in \text{Ker } \sigma^m \cap \text{Im } \sigma^m$, 由 $\alpha \in \text{Im } \sigma^m$, 存在 $\beta \in V$, 使得 $\alpha = \sigma^m(\beta)$. 由此 $0 = \sigma^m(\alpha) = \sigma^{2m}(\beta)$, 所以 $\beta \in \text{Ker } \sigma^{2m}$, 从而 $\beta \in \text{Ker } \sigma^m = \text{Ker } \sigma^{2m}$. 故 $\alpha = \sigma^m(\beta) = 0$. $\text{Ker } \sigma^m \cap \text{Im } \sigma^m = (0)$, 从而 $V = \text{Ker } \sigma^m \oplus \text{Im } \sigma^m$. (12 分)

由 $\sigma(\text{Ker } \sigma^m) \subseteq \text{Ker } \sigma^m$, $\sigma(\text{Im } \sigma^m) \subseteq \text{Im } \sigma^m$ 知 $\text{Ker } \sigma^m, \text{Im } \sigma^m$ 是 σ -不变子空间. 又由 $\sigma^m(\text{Ker } \sigma^m) = (0)$ 知 $\sigma|_{\text{Ker } \sigma^m}$ 是幂零变换. 由 $\sigma(\text{Im } \sigma^m) = \text{Im } \sigma^m$ 知 $\sigma|_{\text{Im } \sigma^m}$ 是满线性变换, 从而可逆. (17 分)

从 $V_1 = \text{Im } \sigma^m, V_2 = \text{Ker } \sigma^m$ 中各找一组基 $\alpha_1, \cdots, \alpha_s; \beta_1, \cdots, \beta_t$, 合并成 V 的一组基, σ 在此基下的矩阵为 $\begin{pmatrix} B & 0 \\ 0 & C \end{pmatrix}$, 其中 B 是 $\sigma|_{V_1}$ 在基 $\alpha_1, \cdots, \alpha_s$ 下的矩阵, 从而可逆; C 是 $\sigma|_{V_2}$ 在基 β_1, \cdots, β_t 下的矩阵, 是幂零矩阵. 从而 A 相似于 $\begin{pmatrix} B & 0 \\ 0 & C \end{pmatrix}$, 其中 B 是可逆矩阵, C 是幂零矩阵. (20 分)

=====

注: 如果视 F 为复数域直接用若当标准型证明, 证明正确可以给 10 分:

存在可逆矩阵 P , 使得

$$P^{-1}AP = \text{diag}(J(\lambda_1, n_1), \cdots, J(\lambda_s, n_s), J(0, m_1), \cdots, J(0, m_t)),$$

其中 $J(\lambda_i, n_i)$ 是特征值为 λ_i 的阶为 n_i 的若当块, $\lambda_i \neq 0$; $J(0, m_j)$ 特征值为 0 的阶为 m_j 的若当块. (5 分)

令

$$B = \text{diag} (J(\lambda_1, n_1), \cdots, J(\lambda_s, n_s)),$$

$$C = \text{diag} (J(0, m_1), \cdots, J(0, m_t)),$$

则 B 为可逆矩阵, C 为幂零矩阵, A 相似于 $\begin{pmatrix} B & 0 \\ 0 & C \end{pmatrix}$ (10 分)

七、(本题 15 分) 设 $F(x)$ 是 $[0, +\infty)$ 上的单调递减函数, $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = 0$, 且

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^{+\infty} F(t) \sin \frac{t}{n} dt = 0.$$

证明: (i) $\lim_{x \rightarrow +\infty} xF(x) = 0$, (ii) $\lim_{x \rightarrow 0} \int_0^{+\infty} F(t) \sin(xt) dt = 0$.

证明: 首先, 对任何 $x \in \mathbb{R}$, 不难由关于无穷积分收敛性的 Dirichlet 判别法得到 $\int_0^{+\infty} F(t) \sin(xt) dt$ 收敛. 下记

$$f(x) = \int_0^{+\infty} F(t) \sin(xt) dt, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

由于 F 单调下降,

$$\begin{aligned} & \int_{2k\pi}^{(2k+2)\pi} F(nt) \sin t dt \\ &= \int_0^\pi \left(F(2nk\pi + nt) - F(2nk\pi + 2n\pi - nt) \right) \sin t dt \\ &\geq 0, \quad \forall k = 0, 1, 2, \dots \end{aligned}$$

从而

$$\begin{aligned} f\left(\frac{1}{n}\right) &= \int_0^{+\infty} F(t) \sin \frac{t}{n} dt \\ &= \int_0^{+\infty} nF(nt) \sin t dt \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \int_{2k\pi}^{(2k+2)\pi} nF(nt) \sin t dt \\ &\geq \int_0^{2\pi} nF(nt) \sin t dt \\ &= \int_0^\pi n \left(F(nt) - F(2n\pi - nt) \right) \sin t dt \\ &\geq \int_0^{\frac{\pi}{2}} n \left(F(nt) - F(2n\pi - nt) \right) \sin t dt \\ &\geq n \left[F\left(\frac{n\pi}{2}\right) - F\left(\frac{3n\pi}{2}\right) \right] \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin t dt \\ &= n \left[F\left(\frac{n\pi}{2}\right) - F\left(\frac{3n\pi}{2}\right) \right] \\ &\geq 0. \end{aligned}$$

..... (5 分)

结合 $\lim_{n \rightarrow +\infty} f\left(\frac{1}{n}\right) = 0$ 得

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} n \left[F\left(\frac{n\pi}{2}\right) - F\left(\frac{3n\pi}{2}\right) \right] = 0.$$

..... (7 分)

这样, 任取 $\delta > 0$, 有 $N > 0$ 使得当 $n > N$ 时, 有

$$n \left| F\left(\frac{n\pi}{2}\right) - F\left(\frac{3n\pi}{2}\right) \right| \leq \delta.$$

从而对任何 $m > 0$, $n > N$ 有

$$\begin{aligned} 0 &\leq nF\left(\frac{n\pi}{2}\right) \\ &\leq \sum_{k=0}^m n \left| F\left(\frac{3^k n\pi}{2}\right) - F\left(\frac{3^{k+1} n\pi}{2}\right) \right| + nF\left(\frac{3^{m+1} n\pi}{2}\right) \\ &\leq \sum_{k=0}^m \frac{\delta}{3^k} + nF\left(\frac{3^{m+1} n\pi}{2}\right) \\ &\leq \frac{3\delta}{2} + nF\left(\frac{3^{m+1} n\pi}{2}\right). \end{aligned}$$

上式中令 $m \rightarrow +\infty$, 由 $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = 0$ 得到

$$0 \leq nF\left(\frac{n\pi}{2}\right) \leq \frac{3\delta}{2}, \quad \forall n > N.$$

所以

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} nF\left(\frac{n\pi}{2}\right) = 0.$$

..... (9 分)

进一步利用单调性, 当 $x > \frac{\pi}{2}$ 时, 有

$$0 \leq xF(x) \leq \pi \left[\frac{2x}{\pi} \right] F\left(\left[\frac{2x}{\pi} \right] \cdot \frac{\pi}{2}\right),$$

其中 $[s]$ 表示实数 s 的整数部分. 于是可得

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} xF(x) = 0.$$

..... (10 分)

从而又知 $xF(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上有界, 设上界为 $M \geq 0$.

$\forall \varepsilon \in (0, \pi)$, 当 $x > 0$ 时, 我们有

$$\begin{aligned} 0 &\leq f(x) = \int_0^{+\infty} x^{-1} F(x^{-1}t) \sin t \, dt \\ &\leq \int_0^{\pi} x^{-1}t H(x^{-1}t) \frac{\sin t}{t} \, dt \end{aligned}$$

..... (12 分)

$$\leq x^{-1}\varepsilon H(x^{-1}\varepsilon) \int_{\varepsilon}^{\pi} \frac{\sin t}{t} \, dt + M\varepsilon, \quad \forall x > 0.$$

..... (14 分)

于是

$$0 \leq \overline{\lim}_{x \rightarrow 0^+} f(x) \leq M\varepsilon.$$

由 $\varepsilon \in (0, \pi)$ 的任意性, 可得 $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 0$.

进而因 f 是奇函数推得 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$ (15 分)

□