2019 年普通高等学校招生全国统一考试

理科数学全国卷三答案与解析

一、选择题:本题考查基础知识和基本运算. 每小题 5 分,满分 60 分.

1. ☞**考点:** 本题考查集合的交集

✔**答案:** A

✍**解析:** 因为 $B=\{x\mid x^2\leqslant 1\}=\{x\mid -1\leqslant x\leqslant 1\}$,所以 $A\cap B=\{-1,0,1\}$.

※**点睛:** 本题属于简单的集合运算

(安徽　贾彬)

2. ☞**考点:** 本题考查复数的运算性质

✔**答案:** D

✍**解析:** $z=\dfrac{2\mathrm{i}}{1+\mathrm{i}}=\dfrac{2\mathrm{i}(1-\mathrm{i})}{(1+\mathrm{i})(1-\mathrm{i})}=\dfrac{2(\mathrm{i}-\mathrm{i}^2)}{2}=1+\mathrm{i}$.

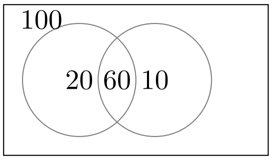
※**点睛:** 利用共轭复数的性质,分母实数化.

(安徽　贾彬)

3. ☞**考点:** 集合的运算

✔**答案:** C

✍**解析:** 如图所示,



※**点睛:** 使用 Venn 图可以更加直观

(河南　时涛)

4. ☞**考点:** 本题考查二项式定理

✔**答案:** A

✍**解析:** $(1+x)^4$ 展开通项 $\mathrm{C}_4^r x^r$,故 $2\cdot\mathrm{C}_4^1+1\cdot\mathrm{C}_4^3=12$.

※**点睛:** 注意 x^3 的项不止 $(1+x)^4$ 的展开项

(河南　时涛)

5. ☞**考点:** 本题考查等比数列的基本量

✔**答案:** C

✍**解析:** 设 $a_n=a_1\cdot q^{n-1}$,根据题意,

$$\begin{cases}\dfrac{a_1\left(1-q^4\right)}{1-q}=15,\\ a_1q^4=3a_1q^2+4a_1,\end{cases}$$

解得 $a_1=1$,$q=2$,因此 $a_3=4$.

※**点睛**:方程思想

(宜昌　李云皓)

6. ☞**考点**:本题考查利用导数研究函数的切线

✔**答案**:D

✍**解析**:记 $f(x)=a\mathrm{e}^x+x\ln x$,其导函数

$$f'(x)=a\mathrm{e}^x+1-\ln x,$$

根据题意,有

$$\begin{cases}f'(1)=a\mathrm{e}+1=2,\\ f(1)=a\mathrm{e}=2+b,\end{cases}$$

解得 $a=\mathrm{e}^{-1}$,$b=-1$.

※**点睛**:基本初等函数的导数及其简单应用

(宜昌　李云皓)

7. ☞**考点**:本题考查函数图象

✔**答案**:B

✍**解析**:由 $f(x)$ 为奇函数排除 C. 由 $x\in\mathbf{R}_+$ 时 $f(x)\in\mathbf{R}_+$ 排除 D. 当 $x=6$ 时 $f(x)>6$ 可知选 B.

※**点睛**:本题使用排除法

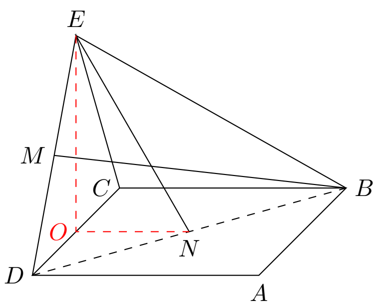
(河南　时涛)

8. ☞**考点**:本题考查空间直线的位置关系

✔**答案**:B

✍**解析**:在 $\triangle BDE$ 中,BM,EN 为该平面直线,故 BM,EN 相交非异面.

取 BC 中点 O,设 $AB=2$,则 $EN=\sqrt{EO^2+ON^2}=2$,由 $BC\perp CD\Rightarrow BC\perp$ 面 CDE,$BE=BD=2\sqrt{2}$,$BM=\sqrt{BE^2-EM^2}=\sqrt{7}$. 故 $BM\neq EN$.



(第 8 题解析图)

※**点睛**:也可以使用平行四边形四边对角线定理进行计算

(河南　时涛)

9. ☞**考点:** 本题考查算法框图

✔**答案:** C

✍**解析:** 由题意,

$$s=\sum_{i=0}^{7}\left(\frac{1}{2}\right)^{i}=\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{7}}{1-\frac{1}{2}}=2-\frac{1}{2^{6}}.$$

※**点睛:** 本题实质是等比数列求和

(浙江　陈晓)

10. ☞**考点:** 本题考查双曲线的几何形状

✔**答案:** A

✍**解析:** 由题意,点 P 在双曲线的右支上. 过点 P 作 $PH\perp OF$,因为 $\tan\angle POF=\frac{b}{a}=\frac{\sqrt{2}}{2}$,$OH=\frac{c}{2}=\frac{\sqrt{6}}{2}$,所以 $PH=\frac{\sqrt{6}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\sqrt{3}}{3}$,故 $S_{\triangle POF}=\frac{1}{2}|OF||PH|=\frac{3\sqrt{2}}{4}$.

※**点睛:** 合理使用几何性质,解析几何不解析.

(浙江　陈晓)

11. ☞**考点:** 本题考查利用函数的单调性和奇偶性比较大小

✔**答案:** C

✍**解析:** 因为 $f\left(\log_3\frac{1}{4}\right)=f(\log_3 4)$,$\log_3 4>1$,$1>2^{-2/3}>2^{-3/2}>0$,又因为函数 $f(x)$ 在区间 $(0,+\infty)$ 上单调递减,所以 $f(2^{-3/2})>f(2^{-2/3})>f\left(\log_3\frac{1}{4}\right)$.

※**点睛:** 本题要抓住函数的单调性和奇偶性,并利用指数函数和对数函数的性质判断取值范围和比较大小关系.

(安徽　史飞)

12. ☞**考点:** 本题考查了三角函数的图像与性质

✔**答案:** D

✍**解析:** 因为 $0\leqslant x\leqslant 2\pi$,所以

$$\frac{\pi}{5}\leqslant\omega x+\frac{\pi}{5}\leqslant 2\pi\omega+\frac{\pi}{5},$$

因为函数有且仅有 5 个零点,所以

$$5\pi\leqslant 2\pi\omega+\frac{\pi}{5}<6\pi\Longrightarrow\frac{12}{5}\leqslant\omega<\frac{29}{10},$$

所以④正确.

令

$$\omega x+\frac{\pi}{5}=\frac{\pi}{2},\frac{5\pi}{2},\frac{9\pi}{2},$$

则函数有且仅有 3 个极大值点，故①正确.

令

$$\omega x+\frac{\pi}{5}=\frac{3\pi}{2},\frac{7\pi}{2},\frac{11\pi}{2},$$

则函数可以有 3 个极小值点，故②错误.

当 $0\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{10}$ 时，

$$\frac{\pi}{5}\leqslant\omega x+\frac{\pi}{5}\leqslant\omega\frac{\pi}{10}+\frac{\pi}{5}<\frac{29}{10}\cdot\frac{\pi}{10}+\frac{\pi}{5}=\frac{49\pi}{100}<\frac{\pi}{2},$$

所以函数单调递增，故③正确.

※**点睛：**本题关键是掌握正弦型函数的图像和性质.

（安徽　史飞）

二、填空题：本题考查基础知识和基本运算，每小题 5 分，共 20 分.

13. ☞**考点：**向量夹角余弦值的计算

✔**答案：**$\frac{2}{3}$.

✍**解析：**$\cos<\boldsymbol{a},\boldsymbol{c}>=\dfrac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}}{|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{c}|}=\dfrac{\boldsymbol{a}(2\boldsymbol{a}-\sqrt{5}\boldsymbol{b})}{|\boldsymbol{a}|\cdot|2\boldsymbol{a}-\sqrt{5}\boldsymbol{b}|}=\dfrac{2|\boldsymbol{a}|}{\sqrt{4\boldsymbol{a}^2-4\sqrt{5}\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+5\boldsymbol{b}^2}}=\dfrac{2}{3}$.

※**点睛：**本题属于基础题，熟记夹角余弦公式是关键.

（河北　焦子奇）

14. ☞**考点：**等差数列

✔**答案：**4

✍**解析：**由题意，$a_1+d=3a1\Rightarrow d=2a_1$. $\dfrac{S_{10}}{S_5}=\dfrac{10a_1+45d}{5a_1+10d}=\dfrac{100}{25}=4$.

※**点睛：**本题属于基础题，灵活运用等差数列求和公式可以快速解决.

（河北　焦子奇）

15. ☞**考点：**考查椭圆方程的几何性质与简单计算

✔**答案：**$(3,\sqrt{15})$

✍**解析：**由 $\triangle MF_1F_2$ 为等腰三角形可知 M 是以 $F_1(-4,0)$ 为圆心，以 $r=2c=8$ 为半径的圆 $(x+4)^2+y^2=64$ 上一个点. 又因为 M 为 C 上一点且在第一象限，联立

$$\begin{cases}\dfrac{x^2}{36}+\dfrac{y^2}{20}=1\\(x+4)^2+y^2=64\end{cases}$$

解得 $M(3,\sqrt{15})$.

※点睛:判断等腰三角形谁是底边是这道题的关键

(河南 林木)

16. ☞**考点:**本题考常见几何体的体积

✔**答案:**118.8

✍**解析:**根据题意,有

$$\begin{aligned}V_{\text{模型}}&=V_{ABCD-A_1B_1C_1D_1}-V_{O-EFGH}\\&=6\cdot6\cdot4-\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{1}{2}\cdot4\cdot6\right)\cdot3\\&=132\ (\mathrm{cm}^3),\end{aligned}$$

从而所需原料的质量为 $132\cdot0.9=118.8\ (\mathrm{g})$.

※**点睛:**解决简单的应用问题.

(宜昌 李云皓)

三、解答题:共 **70** 分.

17. ☞**考点:**本题考查简单的统计

✔**答案:**见解析

✍**解析:**(1)由已知得 $0.70=a+0.20+0.15$,故

$$a=0.35,$$

$$b=1-0.05-0.15-0.70=0.10.$$

(2)甲离子残留百分比的平均值的估计值为

$$2\times0.15+3\times0.20+4\times0.30+5\times0.20+6\times0.10+7\times0.05=4.05.$$

乙离子残留百分比的平均值的估计值为

$$3\times0.05+4\times0.10+5\times0.15+6\times0.35+7\times0.20+8\times0.15=6.00.$$

※**点睛:**读懂题意是关键

(浙江 陈晓)

18. ☞**考点:**本题主要考查正余弦定理,两角和差公式,三角形面积公式

✔**答案:**见解析

✍**解析:**(1)由题设及正弦定理得 $\sin A\sin\dfrac{A+C}{2=\sin B\sin A}$. 因为 $\sin A\neq0$,所以

$$\sin\frac{A+C}{2}=\sin B.$$

由 $A+B+C=\pi$,可得 $\sin\dfrac{A+C}{2}=\cos\dfrac{B}{2}$. 故

$$\cos\frac{B}{2}=2\sin\frac{B}{2}\cos\frac{B}{2},$$

因为 $\cos\frac{B}{2}\neq 0$，故 $\sin\frac{B}{2}=\frac{1}{2}$，因此 $B=60^\circ$.

（2）由题设及（1）知 $\triangle ABC$ 的面积为

$$S_{\triangle ABC}=\frac{\sqrt{3}}{4}a.$$

由正弦定理得

$$a=\frac{c\sin A}{\sin C}=\frac{\sin(120^\circ-C)}{\sin C}=\frac{\sqrt{3}}{2\tan C}+\frac{1}{2}.$$

由于 $\triangle ABC$ 为锐角三角形，故 $0^\circ<A<90^\circ$，$0^\circ<C<90^\circ$. 由（1）知 $A+C=120^\circ$，所以 $30^\circ<C<90^\circ$，故 $\frac{1}{2}<a<2$，从而 $\frac{\sqrt{3}}{8}<S_{\triangle ABC}<\frac{\sqrt{3}}{2}$.

因此，$\triangle ABC$ 面积的取值范围是 $\left(\frac{\sqrt{3}}{8},\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

※**点睛:** 正余弦定理及两角和差公式在解三角形中的灵活运用

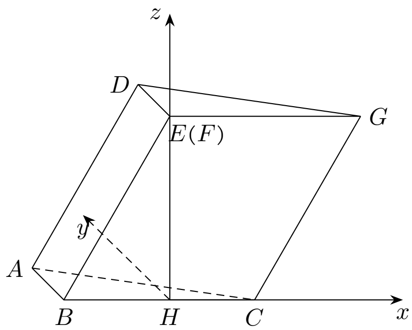
（河北　宁现丰）

19. ☞**考点:** 本题考查空间点、线、面的位置关系，空间角的求解.

✔**答案:** 见解析

✍**解析:**（1）由已知得 $AD /\!/ BE$，$CG /\!/ BE$，所以 $AD /\!/ CG$. 故 AD，CG 确定一个平面，从而 A，C，G，D 四点共面.

由已知得 $AB\perp BE$，$AB\perp BC$，故 $AB\perp$ 平面 $BCGE$. 又因为 $AB\subset$ 平面 ABC，所以平面 $ABC\perp$ 平面 $BCGE$.



（第 19 题解析图）

（2）作 $EH\perp BC$，垂足为 H. 因为 $EH\subset$ 平面 $BCGE$，平面 $BCGE\perp$ 平面 ABC，所以 $EH\perp$ 平面 ABC.

由已知，菱形 $BCGE$ 的边长为 2，$\angle EBC=60^\circ$，可求得 $BH=1$，$EH=\sqrt{3}$.

以 H 为坐标原点,建立如图所示的空间直角坐标系 $H-xyz$. 则

$$A(-1,1,0),C(1,0,0),G(2,0\sqrt{3}),\overrightarrow{CG}=(1,0,\sqrt{3}),\overrightarrow{AC}=(2,-1,0).$$

设平面 $ACGD$ 的法向量为 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$,则

$$\begin{cases}\overrightarrow{CG}\cdot\boldsymbol{n}=x+\sqrt{3}z=0,\\ \overrightarrow{AC}\cdot\boldsymbol{n}=2x-y=0.\end{cases}$$

所以可取 $\boldsymbol{n}=(3,6,-\sqrt{3})$.

又平面 $BCGE$ 的法向量可取 $\boldsymbol{m}=(0,1,0)$,所以

$$\cos<\boldsymbol{n},\boldsymbol{m}>=\frac{\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{m}}{|\boldsymbol{n}||\boldsymbol{m}|}=\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

因此二面角 $B-CG-A$ 的大小为 $30°$.

※**点睛:**空间向量是求解空间角的有力武器

(浙江　陈晓)

20. ☞**考点:**本题考查含参函数在定义域内单调性, 闭区间函数极值、最值.

✔**答案:**见解析

✍**解析:**(1)函数 $f(x)$ 的导函数为

$$f'(x)=6x^2-2ax=2x(3x-a)$$

若 $a=0$,则当 $x\in\mathbf{R}$ 时恒有 $f'(x)>0$,$f(x)$ 的单调递增区间是 $\mathbf{R}$;

若 $a<0$,列表如下:

x	$\left(-\infty,\frac{a}{3}\right)$	$\frac{a}{3}$	$\left(\frac{a}{3},0\right)$	0	$(0,+\infty)$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	极大值	$\searrow$	极小值	$\nearrow$

若 $a>0$,列表如下:

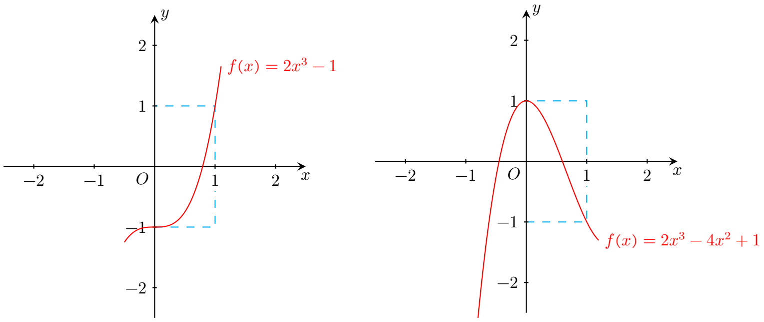
x	$(-\infty,0)$	0	$\left(0,\frac{a}{3}\right)$	$\frac{a}{3}$	$\left(\frac{a}{3},+\infty\right)$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	极大值	$\searrow$	极小值	$\nearrow$

综上, 当 $a=0$ 时, $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增; 当 $a<0$ 时, $f(x)$ 在 $\left(\frac{a}{3},0\right)$ 单调递减, 在 $\left(-\infty,\frac{a}{3}\right)$, $(0,+\infty)$ 单调递增; 当 $a>0$ 时, $f(x)$ 在 $\left(0,\frac{a}{3}\right)$ 单调递减, 在 $(-\infty,0)$, $\left(\frac{a}{3},+\infty\right)$ 单调递增.

(2) 假设存在满足条件的 a,b，使得 $f(x)$ 在区间 $[0,1]$ 的最小值为 -1 且最大值为 1.
由 (1) 知，当 $a\leqslant 0$ 时函数 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 上单调递增.

$$\begin{cases} f(0)_{\min}=b=-1 \\ f(1)_{\max}=2-a+b=1 \end{cases}$$

解得 $a=0,b=-1$ 满足条件.



（第 20 题解析图）

当 $0<a<2$ 时，由 (1) 可知，函数 $f(x)$ 在 $\left(0,\dfrac{a}{3}\right)$ 单调递减，在 $\left(\dfrac{a}{3},1\right)$ 单调递增.

$$\begin{cases} f(x)_{\min}=f(\dfrac{a}{3})=2\times\left(\dfrac{a}{3}\right)^3-a\left(\dfrac{a}{3}\right)^2+b=-1, & ① \\ f(x)_{\max}=\max\{f(0),f(1)\}=\max\{b,2-a+b\}=2-a+b=1, & ② \end{cases}$$

联立①②，消去 b 得

$$\frac{a^3}{27}-a=\frac{a}{27}(a^2-27)=0\Longrightarrow a=3\sqrt{3}>2(舍)$$

当 $2\leqslant a<3$，由 (1) 可知，函数 $f(x)$ 在 $\left(0,\dfrac{a}{3}\right)$ 单调递减，在 $\left(\dfrac{a}{3},1\right)$ 单调递增.

$$\begin{cases} f(x)_{\min}=f(\dfrac{a}{3})=2\times\left(\dfrac{a}{3}\right)^3-a\left(\dfrac{a}{3}\right)^2+b=-1, \\ f(x)_{\max}=\max\{f(0),f(1)\}=\max\{b,2-a+b\}=b=1, \end{cases}$$

解得 $b=1,a=3\sqrt[3]{2}>3$，不满足条件.
当 $a\geqslant 3$ 时，由（1）可知，函数 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 单调递减.

$$\begin{cases} f(x)_{\min}=f(1)=2-a+b=-1, \\ f(x)_{\max}=f(0)=b=1, \end{cases}$$

解得 $b=1,a=4>3$，满足条件.

综上,当 $a=0,b=-1$ 和 $a=4,b=1$ 时,$f(x)$ 在区间 $[0,1]$ 的最小值为 -1 且最大值为 1.

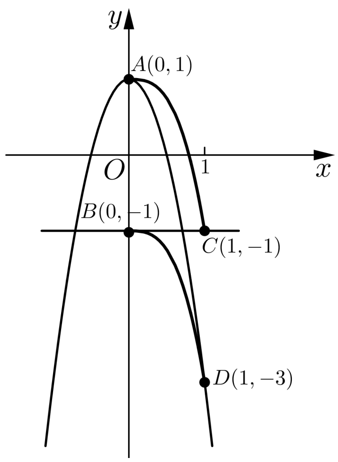
※点睛: 解答本题需要注意两点:①讨论含参函数单调性, 若导函数零点,讨论零点的大小;②讨论函数在闭区间最值时,比较极值点与区间端点最值大小.

(安徽　贾彬)

另解: 由题意 $-1\leqslant 2x^3-ax^2+b\leqslant 1$,即

$$-1-2x^3<-ax^2+b<1-2x^3.$$

所求问题转化为,当 $x\in[0,1]$ 时,曲线 $y=-ax^2+b$ 夹在三次曲线 $y_1=-1-2x^3$ 和 $y_2=1-2x^3$ 之间.



(第 20 题解析图)

如图所示,当 $a=0,b=-1$ 时符合题意. 当二次曲线经过点 $(0,1)$ 和 $(1,-3)$ 时,即

$$\begin{cases}b=1\\-a+b=-3\end{cases}$$

解得 $a=4,b=1$ 也符合题意.

所以,当 $a=0,b=-1$ 和 $a=4,b=1$ 时,$f(x)$ 在区间 $[0,1]$ 的最小值为 -1 且最大值为 1.

(浙江　沈联晖)

21. ☞**考点:** 本题考查直线与抛物线的位置关系

✔**答案:** 见解析

✍**解析:**(1)设 $D\left(t,-\dfrac{1}{2}\right)$,$A(x_1,y_1)$,则 $x_1^2=2y_1$. 由于 $y'=x$,所以切线 DA 的斜率为 x_1,故

$$\frac{y_1+\frac{1}{2}}{x_1-t}=x_1,$$

整理得

$$2tx_1-2y_1+1=0.$$

设 $B(x_2,y_2)$，同理可得

$$2tx_2-2y_2+1=0.$$

故直线 AB 的方程为

$$2tx-2y+1=0.$$

所以直线 AB 过定点 $\left(0,\frac{1}{2}\right)$.

（2）由（1）得直线 AB 的方程为 $y=tx+\frac{1}{2}$. 联立

$$\begin{cases}y=tx+\dfrac{1}{2},\\ y=\dfrac{x^2}{2},\end{cases}$$

可得 $x^2-2tx-1=0$. 于是

$$x_1+x_2=2t, x_1x_2=-1, y_1+y_2=t(x_1+x_2)=2t^2+1.$$

所以

$$|AB|=\sqrt{1+t^2}|x_1-x_2|=\sqrt{1+t^2}\sqrt{(x_1+x_2)^2-4x_1x_2}=2(t^2+1).$$

设 d_1,d_2 分别为点 D,E 到直线 AB 的距离，则

$$d_1=\sqrt{t^2+1}, d_2=\frac{2}{\sqrt{t^2+1}}.$$

因此，四边形 $ADBE$ 的面积为

$$S=\frac{1}{2}|AB|(d_1+d_2)=(t^2+3\sqrt{t^2+1}).$$

设 M 为线段 AB 的中点，则 $M\left(t,t^2+\frac{1}{2}\right)$. 由于 $\overrightarrow{EM}\perp\overrightarrow{AB}$，而 $\overrightarrow{EM}=(t,t^2-2)$，$\overrightarrow{AB}$ 与向量 $(1,t)$ 平行，所以

$$t+(t^2-2)t=0.$$

解得 $t=0$ 或 $t=\pm 1$.

当 $t=0$ 时，$S=3$；当 $t=\pm 1$ 时，$S=4\sqrt{2}$.

因此，四边形 $ADBE$ 的面积为 3 或 $4\sqrt{2}$.

※**点睛：**同构式的灵活应用是解题的关键

（浙江　陈晓）

22. ☞**考点：**考查坐标系与参数方程，求极坐标方程，求极坐标

✔**答案：**见解析

✍**解析：**（1）由题意知，弧 $\overset{\frown}{AB}$ 所在圆的直角坐标方程为 $(x-1)^2+y^2=1$，由

$$\begin{cases} x=\rho\cos\theta \\ y=\rho\sin\theta \end{cases}$$

化简得 M_1 的极坐标方程为

$$\rho=2\cos\theta,\theta\in[0,\frac{\pi}{4}].$$

同理，弧 $\overset{\frown}{BC}$ 所在圆的直角坐标方程为 $x^2+(y-1)^2=1$，则 M_2 的极坐标方程为

$$\rho=2\sin\theta,\theta\in[\frac{\pi}{4},\frac{3\pi}{4}].$$

弧 $\overset{\frown}{CD}$ 所在圆的直角坐标方程为 $(x+1)^2+y^2=1$，则 M_3 的极坐标方程为

$$\rho=-2\cos\theta,\theta\in[\frac{3\pi}{4},\pi].$$

（2）由 $|OP|=\sqrt{3}$，设点 P 极坐标为 $(\sqrt{3},\theta)$，联立

$$M_1:\ \begin{cases} \rho=2\cos\theta \\ \rho=\sqrt{3} \end{cases},\theta\in\left[0,\frac{\pi}{4}\right],$$

解得 $\theta=\dfrac{\pi}{6}$，故 $P\left(\sqrt{3},\dfrac{\pi}{6}\right)$.

同理联立

$$M_2:\ \begin{cases} \rho=2\sin\theta, \\ \rho=\sqrt{3} \end{cases},\theta\in\left[\frac{\pi}{4},\frac{3\pi}{4}\right],$$

解得 $\theta=\dfrac{\pi}{3}$ 或 $\theta=\dfrac{2\pi}{3}$. 故 $P\left(\sqrt{3},\dfrac{\pi}{3}\right)$ 或 $P\left(\sqrt{3},\dfrac{2\pi}{3}\right)$.

联立

$$M_3:\ \begin{cases} \rho=-2\cos\theta \\ \rho=\sqrt{3} \end{cases},\theta\in\left[\frac{3\pi}{4},\pi\right]$$

解得 $\theta=\dfrac{5\pi}{6}$，故 $P\left(\sqrt{3},\dfrac{5\pi}{6}\right)$.

综上，P 点的极坐标为

$$P_1\left(\sqrt{3},\frac{\pi}{6}\right),P_2\left(\sqrt{3},\frac{\pi}{3}\right),P_3\left(\sqrt{3},\frac{2\pi}{3}\right),P_4\left(\sqrt{3},\frac{5\pi}{6}\right).$$

※**点睛**：此题着重考查对极坐标系的理解，能够分类讨论，具体问题具体分析.

（河南　林木）

23. ☞**考点**：不等式求最值；不等式的证明.

✔**答案**：见解析

✍**解析**：(1)因为 $x^2+y^2\geqslant 2xy,y^2+z^2\geqslant 2yz,z^2+x^2\geqslant 2zx$，三式相加得：

$$x^2+y^2+z^2\geqslant xy+yz+zx.$$

不等式两边同时加 $2xy+2yz+2zx$ 得

$$(x+y+z)^2\geqslant 3(xy+yz+zx)$$

所以

$$(x-1+y+1+z+1)^2\geqslant 3(x-1)(y+1)+3(y+1)(z+1)+3(z+1)(x-1).$$

因为 $x+y+z=1$，所以

$$4\geqslant 3\left[(x-1)(y+1)+(y+1)(z+1)+(z+1)(x-1)\right],$$

即

$$(x-1)(y+1)+(y+1)(z+1)+(z+1)(x-1)\leqslant\frac{4}{3}.$$

所以

$$(x-1)^2+(y+1)^2+(z+1)^2\geqslant\frac{4}{3}.$$

（当且仅当 $x-1=y+1=z+1$ 时，等号成立）

(2)由(1)知，

$$xy+yz+zx\leqslant\frac{(x+y+z)^2}{3}.$$

因为

$$(x-2)^2+(y-1)^2+(z-a)^2\geqslant\frac{1}{3},$$

所以

$$|x+y+z|\geqslant 1,$$

即

$$|(x-2)+(y-1)+(z-a)|\geqslant 1,$$

所以

$$\begin{cases}-2-a\geqslant 1,\\ -2-a\leqslant -1,\end{cases}$$

解得 $a\leqslant -3$ 或 $a\geqslant -1$.

※点睛: 本题考查了排序不等式的相关内容,在模拟题中往往以“零点分段讨论法”出现,也提醒考生在备考时应全方位复习.

(河北 焦子奇)

排版: 浙江 陈晓