2019 年普通高等学校招生全国统一考试

数学全国卷一答案与解析

一、选择题:本题考查基础知识和基本运算. 每小题 5 分,满分 60 分.

1. ☞**考点:** 本题考查复数的运算

✔**答案:** C

✍**解析:** 由题意 $z=\dfrac{1-7\mathrm{i}}{5}$,所以 $|z|=\sqrt{\left(\dfrac{1}{5}\right)^2+\left(-\dfrac{7}{5}\right)^2}=\sqrt{2}$.

※**点睛:** 复数的四则运算,模的计算

(浙江　陈晓)

2. ☞**考点:** 集合的基本运算

✔**答案:** C

✍**解析:** 因为 $\complement_U A=\{1,6,7\}$,所以 $B\cap\complement_U A=\{6,7\}$.

※**点睛:** 源于课本的习题,送分题

(浙江　陈晓)

3. ☞**考点:** 本题考查指数与对数的基本运算

✔**答案:** B

✍**解析:** 因为

$$a=\log_2 0.2<\log_2 1=0,$$

$$b=2^{0.2}>2^0=1,$$

$$0<c=0.2^{0.3}<2^0=1,$$

所以 $a<c<b$.

※**点睛:** 本题也可以直接将 $y=\log_2 x$、$y=2^x$ 和 $y=0.2^x$ 的图象画出,分别令 $x=0.2$、$x=0.2$ 和 $x=0.3$ 即可

(张家口　饶强)

4. ☞**考点:** 本题考查简单的估算能力

✔**答案:** B

✍**解析:** 由右图可知

$$\begin{cases}\dfrac{a}{b}=0.618\\[2ex] \dfrac{a+b}{c}=0.618\\[2ex] a<26\\[1ex] c>105\end{cases}$$

一方面,身高

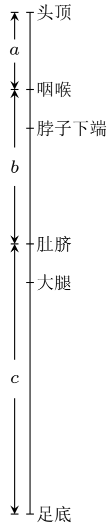
$$H=a+b+c=0.618c+c=1.618c>169.89$$

另一方面,身高

$$\begin{aligned}H&=a+b+c=a+b+\frac{a+b}{0.618}=(a+b)\left(1+\frac{1}{0.618}\right)\\&=\left(a+\frac{a}{0.618}\right)\left(1+\frac{1}{0.618}\right)=a\left(1+\frac{1}{0.618}\right)^2\\&<26\cdot\left(1+\frac{1}{0.618}\right)^2=178.22\end{aligned}$$

所以 $169.89<H<178.22$. 故选 B.

※**点睛:** 选填题有很多种特殊解法,但本人还是推荐用不等式求出其整体的范围,不要养成投机取巧的习惯.



(张家口 饶强)(第 4 题解析图)

5. ☞**考点:** 本题考查函数图象与性质

✔**答案:** D

✍**解析:** 由

$$f\left(\frac{\pi}{3}\right)=\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\pi}{3}}{\frac{1}{2}+\left(\frac{\pi}{3}\right)^2}=\frac{0.87+1.05}{0.5+\left(\frac{\pi}{3}\right)^2}>1;$$

且

$$f(-x)=\frac{-\sin x-x}{\cos x+x^2}=-f(x)$$

即 $f(x)$ 为奇函数,故选 D.

※**点睛:** 准确把握函数的奇偶性以及特殊值排除法,是解决这类问题的关键.

(山西 廖凯)

6. ☞**考点:** 本题考查系统抽样

✔**答案:** C

✍**解析:** 系统抽样的组距 $=\dfrac{1000}{100}=10$,由于抽到的是 46 号,说明第一组抽到的是 $46-4\times10=6$,故其他抽到的编号为 $6+(n-1)\times10(n\in\mathbf{N}且n<101)$. 易知 616 符合题意,故选 C.

※**点睛:** 在系统抽样中, 分段完成以后, 按预先制定的规则抽取指的是: 在第 1 段内采用简单随机抽样确定一个起始编号, 在此编号的基础上加上分段间隔的整倍数即为抽样编号, 所得编号即为抽样结果.

(山西 廖凯)

7. ☞**考点:** 本题考查三角函数的诱导公式与特殊角的三角函数值

✔**答案:** D

✍**解析:** $\tan 255^\circ = \tan(255^\circ - 180^\circ) = \tan 75^\circ = 2+\sqrt{3}$.

※**点睛:** $\sin 15^\circ = \cos 75^\circ = \dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$; $\sin 75^\circ = \cos 15^\circ = \dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$; $\tan 15^\circ = 2-\sqrt{3}$, $\tan 75^\circ = 2+\sqrt{3}$.

(山西　廖凯)

8. ☞**考点:** 本题考查向量的数量积

✔**答案:** B

✍**解析:** $(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}) \perp \boldsymbol{b} \Rightarrow \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} = |\boldsymbol{b}|^2$,则 $\cos <\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}>= \dfrac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{b}|} = \dfrac{1}{2}$,所以选 B.

※**点睛:** 平面向量数量积的应用,夹角公式 $\cos <\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}>= \dfrac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{b}|}$

(江西　陈江波)

9. ☞**考点:** 本题考查算法程序框图

✔**答案:** A

✍**解析:** 分析代数结构便知,$k \leqslant 2$,要进行两次迭代,每次 $+2$ 后取倒数. 由于步骤不多,此题也可代入选项.

※**点睛:** 程序框图的循环结构.

(江西　陈江波)

10. ☞**考点:** 双曲线的离心率和同角三角函数关系

✔**答案:** D

✍**解析:** 由题知,双曲线的渐近线 $y=-\dfrac{b}{a}x$ 的斜率为 $\tan 130^\circ$,即 $\dfrac{b}{a} = \tan 50^\circ$,所以双曲线离心率

$$e=\sqrt{1+\left(\frac{b}{a}\right)^2}=\sqrt{1+\tan^2 50^\circ}=\frac{1}{\cos 50^\circ}.$$

※**点睛:** 斜率和倾斜角之间关系　　(江西　陈江波)

11. ☞**考点:** 解三角形

✔**答案:** A

✍**解析:** 由正弦定理得 $a^2-b^2=4c^4 \Rightarrow a^2=b^2+4c^2$,由余弦定理得 $\cos A=\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=-\dfrac{1}{4}$,代入得 $\dfrac{-3c^2}{2bc}=-\dfrac{1}{4}$,即 $\dfrac{c}{b}=\dfrac{1}{6}$,所以 $\dfrac{b}{c}=6$.

※**点睛:** 利用正弦定理进行边角互化

(江西　陈江波)

12. ☞**考点：**本题考查坐标法

✔**答案：**B

✍**解析：**设 $A(0,b)$，$B(x,y)$，由 $\overrightarrow{AF_2}=\overrightarrow{F_2B}$，得 $\begin{cases}1=2(x-1)\\-b=2y\end{cases}$，所以 $B\left(\frac{3}{2},-\frac{b}{2}\right)$. 把 B 点坐标代入椭圆方程得

$$\frac{9}{4a^2}+\frac{b^2}{4b^2}=1$$

所以 $a^2=3$，又 $c=1$，所以 $b^2=2$，故选 B

※**点睛：**坐标法是解析几何的核心方法.

（山西　廖凯）

二、填空题：本题考查基础知识和基本运算. 每小题 5 分，共 20 分.

13. ☞**考点：**本题考查了函数某处的切线问题

✔**答案：**$y=3x$

✍**解析：**易得 $y'=3(x^2+3x+1)\mathrm{e}^x$，故该曲线在点 $(0,0)$ 处的切线斜率为 $y'\big|_{x=0}=3$，又由于该切线过 (0,0)，故切线方程为 $y=3x$.

※**点睛：**注意求的是函数某处的切线，而不是过某点的切线，即已经确定切点就是 $(0,0)$，无需再求.

（山西　廖凯）

14. ☞**考点：**考查等比数列的前 n 项和，基本量法

✔**答案：**$\frac{5}{8}$

✍**解析：**当 $q=1$ 时，显然不符合题意. 当 $q\neq 1$ 时, 由

$$\begin{cases}a_1=1,\\ S_3=a_1\dfrac{1-q^3}{1-q}=q^2+q+1=\dfrac{3}{4}\end{cases}$$

得

$$\begin{cases}a_1=1,\\ q=-\dfrac{1}{2}\end{cases}.$$

所以

$$S_4=a_1\frac{1-q^4}{1-q}=\frac{5}{8}.$$

※**点睛：**主要考查等比数列的基本量法，难度较小，有时需要掌握立方差立方和公式.

（河南　林木）

15. ☞**考点:** 考查诱导公式, 倍角公式, 三角函数求最值问题, 运用换元法

✔**答案:** -4

✍**解析:** 由诱导公式得 $f(x)=\sin\left(2x+\dfrac{3}{2}\pi\right)-3\cos x=-\cos 2x-3\cos x$. 由倍角公式得

$$f(x)=-\cos 2x-3\cos x=-2\cos^2 x-3\cos x+1.$$

令 $t=\cos x$, $-1\leqslant t\leqslant 1$. 则 $y=-2t^2-3t+1, 1\leqslant t\leqslant 1$. 所以 y 的最小值为 -4.

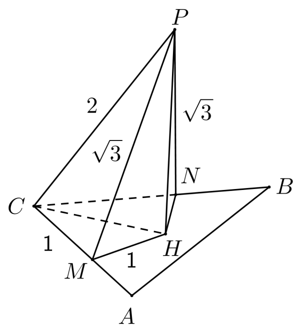
※**点睛:** 三角函数常见求最值问题有以下两类方法: 1. 化为 $y=A\sin(\omega x+\phi)+b$ 的形式; 2. 换元法化为二次函数类. 3. 其他还原类.

(河南　林木)

16. ☞**考点:** 本题主要考查空间的几何度量、角平分线性质、点到直线的距离、直角三角形的边角关系

✔**答案:** $\sqrt{2}$

✍**解析:** 设 $PM\perp AC$ 于 M, $PN\perp BC$ 于 N. 过 P 作 $PH\perp$ 平面 ABC 于 H, 连接 MH、NH、CH, 易知 CH 所在直线为 $\angle ACB$ 的角平分线, 故 $\angle HCM=\angle HCN=45^\circ$, $HM\perp AC$, $HN\perp BC$. 在 $\mathrm{Rt}\triangle PCM$ 中, $PC=2$, $PM=\sqrt{3}$, $\angle PMC=90^\circ$, 故 $CM=1$, 同理 $CN=1$; 在等腰 $\mathrm{Rt}\triangle CHM$ 中, $MH=CM=1$, $CH=\sqrt{2}$. 故在 $\triangle PCH$ 中, P 到平面 ABC 的距离 $PH=\sqrt{PC^2-CH^2}=\sqrt{4-2}=\sqrt{2}$。



(第 16 题解析图)

※**点睛:** 充分利用特殊直角三角形的边角关系和勾股定理是解决空间距离问题的关键.

(山西　廖凯)

三、解答题: 共 70 分.

17. ☞**考点:** 本题主要考查简单的概率统计问题, 考查数据分析能力.

✔**答案:** 见解析

✍**解析:** (1) 男顾客中对该商场服务满意的比率为 $40/80=0.8$, 其概率为 80%.

女顾客中对该商场服务满意的比率为 $30/50=0.6$, 其概率为 60%.

(2) $K^2=\dfrac{100\times(40\times 20-30\times 10)^2}{50\times 50\times 70\times 30}\approx 4.762$ 由于 $4.762>3.841$, 因此有 95% 的把握

认为男女顾客对该商场服务的评价是有差异的.

※**点睛:** 统计知识在生活中的应用

(江西 胡八一)

18. ☞**考点:** 本题考查了等差数列的性质、解不等式

✔**答案:** 见解析

✍**解析:**(1)设 $\{a_n\}$ 的公差为 d. 由 $S_9=-a_5$ 得 $a_1+4d=0$. 由 $a_3=4$ 得 $a_1+2d=4$,解得 $a_1=8, d=-2$. 故 $\{a_n\}$ 的通项公式为 $a_n=10-2n$.

(2)由(1)得 $a_1=-4d$,故 $a_n=(n-5)d, S_n=\dfrac{n(n-9)d}{2}$. 由 $a_1>0$ 知 $d<0$,故 $S_n \geqslant a_n$ 等价于 $n^2-11n+10 \leqslant 0$,解得 $1 \leqslant n \leqslant 10$. 故 n 的取值范围是 $\{n|1 \leqslant n \leqslant 10, n \in \mathbf{N}^*\}$.

※**点睛:** 注意(2)中 n 是正整数.

(山西 廖凯)

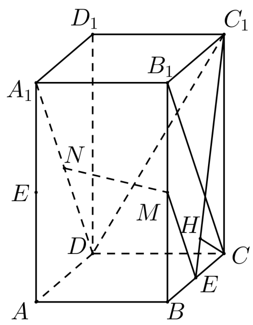
19. ☞**考点:** 本题考查空间点、线、面的位置关系,空间距离的求解,考查空间想象能力和运算求解能力

✔**答案:** 见解析

✍**解析:**(1)连接 ME, B_1C,由题设易知

$$ME \underline{\underline{/\!/}} \frac{1}{2}B_1C \underline{\underline{/\!/}} \frac{1}{2}A_1D \underline{\underline{/\!/}} DN$$

因此四边形 $MNDE$ 为平行四边形,即 $MN \underline{\underline{/\!/}} ED$,而 $MN \not\subset$ 平面C_1DE, $DE \subset$ 平面C_1DE,所以 $MN /\!/$ 平面 C_1DE 得证.



(第 19 题解析图)

(2)作 $CH \perp C_1E$ 交于 C_1E 于点 H,有

$$\left\{\begin{array}{l} CH \perp BC \\ DE \perp C_1C \end{array}\right. \Rightarrow DE \perp \text{平面}C_1CE \Rightarrow DE \perp CH \Rightarrow CH \perp \text{平面}C_1DE$$

又 $CE=1, C_1C=4$,即 $C_1E=\sqrt{17}$,则有 $CH=\dfrac{CE \cdot C_1C}{C_1E}=\dfrac{4\sqrt{17}}{17}$.

因此点 C 到平面的距离为 $\dfrac{4\sqrt{17}}{17}$.

※**点睛:** 面面垂直的性质定理是作平面垂线的依据

(江西 胡八一)

20. ☞**考点:** 本题主要考查函数的零点存在性定理的运用,导数的运算及其应用,同时考查逻辑思维能力和综合应用能力

✔**答案:** 见解析

✍**解析:**(1) $f'(x)=\cos x+x\sin x-1 \Longrightarrow f''(x)=x\cos x$,则在 $\left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$ 上, $f''(x)>$

0，$f'(x)$ 单调递增；在 $\left(\dfrac{\pi}{2},\ \pi\right)$ 上，$f''(x)<0$，$f'(x)$ 单调递减. 且 $f\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=\dfrac{\pi}{2}-1>0$，$f(\pi)=-2<0$，所以 $f'(x)$ 在区间 $(0,\pi)$ 存在唯一零点；

（2）由（1）知 $f(x)_{\min}=f(0)=f(\pi)=0$，则 $f(\pi)=0\geqslant a\pi\Longrightarrow a\leqslant 0$，另一方面，当 $a\leqslant 0$ 时，$f(x)\geqslant 0\geqslant ax$ 成立.

※**点睛**：函数的单调性是函数的重要性质，利用函数的导数判断函数的单调性，进而利用零点的存在性定理和数形结合思想解题.

（安徽　史飞）

21. ☞**考点**：本题主要考查了圆的性质、抛物线的轨迹方程及其定义

✔**答案**：见解析

✍**解析**：（1）

在 $\odot M$ 中，由垂径定理可知 AB 所在直线的斜率为 -1，M 在 AB 的中垂线上，故 OM 斜率为 1. 设 $M=(a,a)$，令点 A 在第二象限，由 $\odot M$ 与直线 $x+2=0$ 相切可得 $r=a-(-2)$. 又在 $\mathrm{Rt}\triangle AOM$ 中，$OM^2+OA^2=r^2$，即 $r^2=a^2+a^2+2^2=(a+2)^2$，解得 $a=0$ 或 $a=4$， 故 $r=2$ 或 $r=6$.

（2）设 $A=(2\cos\theta,2\sin\theta)$，$|OM|=m$. 由垂径定理可得点 M 的横坐标

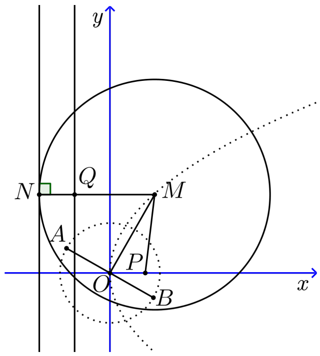
$$x=m\cos\left(\theta-\frac{\pi}{2}\right)=m\sin\theta,$$

点 M 的纵坐标

$$y=m\sin\left(\theta-\frac{\pi}{2}\right)=-m\cos\theta,$$

故 $r=|MN|=2+m\sin\theta$，又 $r=|MA|=\sqrt{2^2+m^2}$，可得

$$(2+m\sin\theta)^2=2^2+m^2,$$



（第 21 题解析图）

化简得 $m^2\cos^2\theta=4m\sin\theta$，所以点 M 的轨迹方程为 $y^2=4x$，即为抛物线.

设该抛物线焦点为 $P(1,0)$，准线 $x=-1$ 交 MN 于 Q，则有

$$|MA|-|MP|=|MN|-|MQ|=|NQ|=1.$$

故存在定点 P，使得当 A 运动时，$|MA|-|MP|$ 为定值 1.

※**点睛**：解析几何要重视曲线的定义与几何性质，而非仅仅是机械式的联立方程、韦达定理；与圆有关的解析几何问题往往通过构造圆的半径、半弦长、圆心到弦的距离作为三边的直角三角形，利用勾股定理求解.

（山西　廖凯）

22. ☞**考点**：本题主要考查参数方程与直角坐标的互换、点到直线的距离.

✔**答案**：见解析

✍解析：（1）由曲线 C 的参数方程可知

$$x=\frac{1-t^2}{1+t^2}=-1+\frac{2}{1+t^2},$$

即

$$x+1=\frac{2}{1+t^2},$$

又 $\frac{y}{x+1}=2t$，代入上式得

$$x+1=\frac{2}{1+\frac{y^2}{4(x+1)^2}},$$

化简得

$$C\text{：}\ x^2+\frac{y^2}{4}=1(x\neq -1).$$

又由 l：$2\rho\cos\theta+\sqrt{3}\rho\sin\theta+11=0$ 可得其直角坐标方程 l：$2x+\sqrt{3}y+11=0$。

（2）设 C 上的点为 $(\cos\theta, 2\sin\theta)$，故 C 上的点到 l 距离

$$\begin{aligned} d=&\frac{|2\cos\theta+2\sqrt{3}\sin\theta+11|}{\sqrt{4+3}}\\ =&\frac{\left|4\sin\left(\theta+\frac{\pi}{6}\right)+11\right|}{\sqrt{7}}, \end{aligned}$$

故

$$d_{\min}=\frac{|-4+11|}{\sqrt{7}}=\sqrt{7}.$$

❊**点睛**：本题（1）中如何灵活消参是关键.

（山西　廖凯）

23. ☞**考点**：不等式选讲

✔**答案**：见解析

✍**解析**：（1）根据题意

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=\frac{bc+ac+ab}{abc}=bc+ac+ab,$$

由均值不等式知

$$bc+ac+ab\le a^2+b^2+c^2,$$

当 $a=b=c$ 时，“=”成立．故原不等式成立．

（2）解法一：

$$(a+b)^3+(b+c)^3+(c+a)^3=(a+b+c)^3+a^3+b^3+c^3-6abc$$
$$\geqslant 27abc+3abc-6abc=24.$$

证毕．

解法二：

$$\begin{aligned}(a+b)^3+(b+c)^3+(c+a)^3 &\geq 3\sqrt[3]{(a+b)^3(b+c)^3(c+a)^3}\\ &=3(a+b)(b+c)(c+a)\\ &\geq 3\cdot 2\sqrt{ab}\cdot 2\sqrt{bc}\cdot 2\sqrt{ac}\\ &=24\end{aligned}$$

证毕.

※点睛：均值不等式，$\dfrac{a+b+c}{3}\geq\sqrt[3]{abc}$

（江西　陈江波）

排版：　浙江　陈晓