int main()

/*Keep on going never give up*/

大学生数学竞赛与考研试题解析

Analysis of College Students' Mathematical Competition and Post-graduate Examination Questions

作者:Hoganbin

Email:hoganbin1995@outlook.com

微信公众号:八一考研数学竞赛

更新:August 9, 2019

版本:3.07

最好的解决办法是自己给出

目　录

1 2019 年浙江省高等数学竞赛试题参考答案 1

2 2019 年合肥工业大学数学竞赛选拔赛 (非数类) 6

3 2019 年四川大学数学竞赛(非数)试题解析 10

4 2019 年江苏省高等数学竞赛 (本一) 试题解析 16

5 2019 年天津市大学数学竞赛 (理工) 试题解析 24

6 第十届全国大学生数学竞赛模拟赛题 31

6.1 模拟赛一 31

6.2 模拟赛二 34

6.3 模拟赛三 36

7 历年名校考研真题解析 40

7.1 华中科技大学 2012 年数学分析试题解析 40

7.2 武汉大学 2018 年数学分析试题解析 43

7.3 中南大学 2010 年数学分析试题解析 47

7.4 浙江大学 2016 年数学分析试题解析 53

7.5 吉林大学 2015 年数学分析试题解析 56

7.6 中国科大 2015 年数学分析试题解析 61

7.7 厦门大学 2014 年数学分析试题解析 65

8 历年数学竞赛真题试题与解析 69

8.1 第十届全国大学生数学竞赛非数类预赛参考答案 69

8.2 第九届全国大学生数学竞赛非数类预赛参考答案 74

8.3 第八届全国大学生数学竞赛数学类决赛试题 79

8.4 第十届全国大学生数学竞赛决赛试题 (非数类) 79

8.5 第十届全国大学生数学竞赛决赛试题 (数学类低年级组) 80

8.6 第十届全国大学生数学竞赛决赛试题 (数学类高年级组) 81

9 2019 年丘成桐数学竞赛 (分析与代数) 试题 83

9.1 个人赛 83

9.2 团体赛 84

10 2019 年北京大学数分高代真题解析 **85**

10.1 数学分析 85

10.2 高等代数 90

11 数学竞赛章节复习 **94**

11.1 积分不等式葵花宝典 94

11.2 竞赛每日一题练习 119

第 1 章 2019 年浙江省高等数学竞赛试题参考答案

题 号	一	二	三	四	五	总 分
满 分	70	20	20	20	20	150
得 分						

考生须知: 1. 本试卷满分为 150 分,全部考试时间总计 120 分钟;

2. 所有答案必须写在答题纸上,写在试题纸上或草稿纸上一律无效;

一、计算题:(每小题 14 分,满分 70 分)

1. 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\tan^n\left(\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{1}{n}\right)$

解: 原式 $=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1+\tan(\frac{1}{n})}{1-\tan(\frac{1}{n})}\right)^n=\exp\left[\lim\limits_{n\to\infty}n\cdot\dfrac{2\tan(\frac{1}{n})}{1-\tan(\frac{1}{n})}\right]=e^2$

注意: 本题源于中科院 2019 年的数学分析第一大题, 也是一道常规题型, 首先我们可以判定极限类型, 其次我们可以利用一些手段和方法去解决极限的计算问题, 例如对于此题来讲, 由于

$$\lim_{n\to+\infty}\tan\left(\frac{\pi}{4}+\frac{1}{n}\right)=1,\quad \lim_{n\to+\infty}n=\infty$$

故极限为 1^∞ 型, 对于此类型极限我们要注意 $x\to 1$ 时,$\ln x\sim x-1$ 这就是本题的思路

变式: 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\sin^{1314520n}\left(\dfrac{\pi}{2}+\dfrac{1}{n}\right)$

2. 求不定积分 $\displaystyle\int\frac{2x+\sin 2x}{(\cos x-x\sin x)^2}\mathrm{d}x$

解: 凑微分

$$\begin{aligned}\int\frac{2x+\sin 2x}{(\cos x-x\sin x)^2}\mathrm{d}x&=2\int\frac{x+\sin x\cos x}{(\cos x-x\sin x)^2}\mathrm{d}x=2\int\frac{x\sec^2 x+\tan x}{(1-x\tan x)^2}\mathrm{d}x\\&=2\int\frac{\mathrm{d}(x\tan x)}{(1-x\tan x)^2}=\frac{2}{1-x\tan x}+C\end{aligned}$$

注意: 学会适当的凑微分, 会使你的过程变得更加简洁. 这个题如果你对这一类凑微分技巧足够熟练,可以很快得到 $\displaystyle\int\frac{2x+\sin 2x}{(\cos x-x\sin x)^2}\mathrm{d}x=2\int\mathrm{d}(\frac{\cos x}{\cos x-x\sin x})$

变式: 尝试着用尽量多的方法计算 $\displaystyle\int\frac{1}{1+\sin 2x}\mathrm{d}x$

3. 求定积分 $\displaystyle\int_0^\pi\cos\left(\sin^2 x\right)\cos x\mathrm{d}x$

解: 原式 $=\displaystyle\int_0^\pi\cos\left(\sin^2 x\right)\cos(\pi-x)\mathrm{d}x=-\int_0^\pi\cos\left(\sin^2 x\right)\cos x\mathrm{d}x=0$

注意：本题考察的是区间再现公式

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_a^b f(a+b-x)\mathrm{d}x$$

需要注意的是 $\cos(\pi-t) = -\cos t$，以及 $A=-A$ 的时候，$A=0$ 即可解出此题

变式：计算定积分 1：$\int_0^{\frac{\pi}{2}} [\cos^2(\cos x)+\sin^2(\sin x)]\mathrm{d}x$

计算定积分 2：$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3 x\left(\sin^4 x\right)\cos^3 x\mathrm{d}x$

4. 如图，将一根铁丝折成两部分，一部分围成一个矩形 $ABED$ 的三条边 AD、DE、EB，另一部分围成一个半圆 ACB，矩形和半圆的面积之和为 1，求铁丝长度的最小值.

解：设 AD 长度为 x，DE 长度为 y，则 $xy+\frac{\pi}{2}\left(\frac{y}{2}\right)^2=1$，铁丝长度为 $2x+y+\pi\cdot\frac{y}{2}$，令 $L(x,y,\lambda)=2x+y+\pi\cdot\frac{y}{2}+\lambda\left(xy+\frac{\pi}{8}y^2-1\right)$，则有

$$\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial x} = 2+\lambda y = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial y} = 1+\frac{\pi}{2}+\lambda x+\frac{\pi}{4}\lambda y = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial \lambda} = xy+\frac{\pi}{8}y^2-1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \sqrt{\frac{2}{4+\pi}} \\ y = 2\sqrt{\frac{2}{4+\pi}} \\ \lambda = -\sqrt{\frac{4+\pi}{2}} \end{cases}$$

故基于问题的实际意义我们可以知道，铁丝长度在 $x=\sqrt{\frac{2}{4+\pi}}$，$y=2\sqrt{\frac{2}{4+\pi}}$ 取得最小值，且最小值为 $2\sqrt{\frac{2}{4+\pi}}+2\sqrt{\frac{2}{4+\pi}}+\pi\cdot\sqrt{\frac{2}{4+\pi}}=\sqrt{2(4+\pi)}$

注意：本题由 2018 年全国研究生入学考试数学一第 16 题改编而来

变式：一根绳长 $(6\pi+4)m$，截成 3 段分别折成两个圆和正方形，其中大圆的半径为小圆的半径的 2 倍，这三段分别多长会使得所得到的三个图形的面积和最小，并求该最小值

5. 定义在 $[-1,1]$ 上的函数 $f(x)=\begin{cases} \frac{1}{2^{n+1}}, & \frac{1}{2^{n+1}}<x\leqslant\frac{1}{2^n} \\ 0, & -1\leqslant x\leqslant 0 \end{cases}$，讨论 $f(x)$ 间断点，求判断其类型.

解：$f(x)$ 可能的间断点为 $x=\frac{1}{2^n}$. 由于

$$\lim_{x\to(2^{-n})^+} f(x) = \frac{1}{2^n},\ \lim_{x\to(2^{-n})^-} f(x) = \frac{1}{2^{n+1}} \Rightarrow \lim_{x\to(2^{-n})^+} f(x) \neq \lim_{x\to(2^{-n})^-} f(x)$$

故 $x=\frac{1}{2^n}$ 为函数 $f(x)$ 的第一类型间断点中的跳跃间断点

注意：本题源自 2016 年全国研究生入学考试数学一选择题，考察了间断点可能会出现的地方以及间断点类型的判定，对应到本题里面，由于是分段给的，所以最大的可能就是出现在分段点.

变式：还是上述的函数，试判定 $f(x)$ 在 $x=0$ 处是否可导

二、(满分 20 分) 求积分

$$\iint_D \left(5y^3+x^2+y^2-2x+y+1\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

其中 $D: 1 \leqslant (x-1)^2+y^2 \leqslant 4 \quad$ 且 $x^2+y^2 \leqslant 1$.

解：由于区域 D 关于 x 轴对称，即有

$$\iint_D \left(5y^3+x^2+y^2-2x+y+1\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint_D \left(x^2+y^2-2x+1\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

令 $\begin{cases} x-1=r\cos\theta \\ y=r\sin\theta \end{cases}$，则 $\mathrm{d}x\mathrm{d}y = r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta$，故有

$$\begin{aligned}
\text{原式} &= \int_{\frac{2}{3}\pi}^{\frac{4}{3}\pi}\mathrm{d}\theta\int_1^{-2\cos\theta} r^2\cdot r\mathrm{d}r = \int_{\frac{2}{3}\pi}^{\frac{4}{3}\pi}\frac{(2\cos\theta)^4-1}{4}\mathrm{d}\theta = 4\int_{\frac{2}{3}\pi}^{\frac{4}{3}\pi}\cos^4\theta\mathrm{d}\theta-\frac{\pi}{6} \\
&= 4\int_{\frac{2}{3}\pi}^{\frac{4}{3}\pi}\cos^4\theta\mathrm{d}\theta-\frac{\pi}{6} = 8\int_0^{\frac{\pi}{3}}\cos^4\theta\mathrm{d}\theta-\frac{\pi}{6} = 8\int_0^{\frac{\pi}{3}}\left(\frac{1+\cos 2\theta}{2}\right)^2\mathrm{d}\theta-\frac{\pi}{6} \\
&= 2\int_0^{\frac{\pi}{3}}(1+\cos 2\theta)^2\mathrm{d}\theta-\frac{\pi}{6} = 2\int_0^{\frac{\pi}{3}}(1+2\cos 2\theta+\frac{1+\cos 4\theta}{2})\mathrm{d}\theta-\frac{\pi}{6} \\
&= 4\int_0^{\frac{\pi}{3}}\cos 2\theta\mathrm{d}\theta+\int_0^{\frac{\pi}{3}}\cos 4\theta\mathrm{d}\theta+\frac{5\pi}{6} = 2\int_0^{\frac{\pi}{3}}\cos\theta\mathrm{d}\theta-\frac{1}{4}\int_0^{\frac{\pi}{3}}\cos\theta\mathrm{d}\theta+\frac{5\pi}{6} \\
&= \frac{7}{4}\int_0^{\frac{\pi}{3}}\cos\theta\mathrm{d}\theta+\frac{5\pi}{6} = \frac{7\sqrt{3}}{8}+\frac{5\pi}{6}
\end{aligned}$$

注意：当我们拿到一个二重积分的时候首先应该是利用轮换对称性，奇偶性等性质进行化简，然后是选择适当的坐标系和计算方法，最后才是计算结果

变式：计算 $\iint_D \left[x^2+2x+y^2+1+\sin(y-2)\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 $D: 1 \leqslant (x-3)^2+(y-2)^2 \leqslant 4$

三、(满分 20 分) 讨论级数 $\sum\limits_{n=2}^{+\infty}\dfrac{(-1)^n}{n^p+(-1)^n}$ 的敛散性，其中 $p>0$.

解：由于 $\sum\limits_{n=2}^{+\infty}\dfrac{(-1)^n}{n^p+(-1)^n} = \sum\limits_{n=2}^{+\infty}\dfrac{(-1)^n[n^p-(-1)^n]}{n^{2p}-1} = \sum\limits_{n=2}^{+\infty}\dfrac{(-1)^n n^p}{n^{2p}-1} - \sum\limits_{n=2}^{+\infty}\dfrac{1}{n^{2p}-1}$

考虑到 $\sum\limits_{n=2}^{+\infty}\dfrac{(-1)^n n^p}{n^{2p}-1}$ 在 $p>1$ 时绝对收敛，在 $0<p\leqslant 1$ 时条件收敛，且 $\sum\limits_{n=2}^{+\infty}\dfrac{1}{n^{2p}-1}$ 在 $p>\dfrac{1}{2}$ 时收敛，在 $0<p\leqslant\dfrac{1}{2}$ 时发散.

故当 $p>1$ 时，原式绝对收敛；当 $\dfrac{1}{2}<p\leqslant 1$ 时，原式条件收敛；当 $0<p\leqslant\dfrac{1}{2}$ 时，原式发散.

注意：解题思路与《数学分析习题课讲义》上册 284 页第十二章例题 12.2.4 一样，可以算作改编题.

变式：讨论级数 $\sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{\sin\frac{n\pi}{4}}{n^p+\sin\frac{n\pi}{4}}$ 的敛散性，其中 $p>0$.

四、**(满分 20 分)** 设由方程 $x+y+z=f\left(x^2+y^2+z^2\right)(*)$ 确定函数 $z=z(x,y)$，

1) 计算 $(y-z)\dfrac{\partial z}{\partial x}+(z-x)\dfrac{\partial z}{\partial y}$.

解：由于 $\dfrac{\partial z}{\partial x}=-\dfrac{1-2xf'(x^2+y^2+z^2)}{1-2zf'(x^2+y^2+z^2)}$ 与 $\dfrac{\partial z}{\partial y}=-\dfrac{1-2yf'(x^2+y^2+z^2)}{1-2zf'(x^2+y^2+z^2)}$，即有

$$
\begin{aligned}
(y-z)\frac{\partial z}{\partial x}+(z-x)\frac{\partial z}{\partial y}&=-(y-z)\cdot\frac{1-2xf'(x^2+y^2+z^2)}{1-2zf'(x^2+y^2+z^2)}-(z-x)\cdot\frac{1-2yf'(x^2+y^2+z^2)}{1-2zf'(x^2+y^2+z^2)}\\
&=x-y.
\end{aligned}
$$

注意：偏导数恒等式计算问题，主要是耐心计算就好了，有的时候可能会用到 $\dfrac{\partial z}{\partial x}=-\dfrac{F'_x}{F'_z}$ 和 $\dfrac{\partial z}{\partial y}=-\dfrac{F'_y}{F'_z}$ 这两个公式，其中 $F(x,y,z)=0$ 确定了 $z=z(x,y)$. 这两个公式十分有用，特别是对付长的比较长的隐函数求导的时候来的更快

2) 如果以 $\vec{n}=(a,b,c)$ 为法向量的平面与 $(*)$ 交为圆，求此法向量.

解：当 $x+y+z$ 为一个常数 d 时，交线方程为 $\begin{cases} x+y+z=d \\ x+y+z=f\left(x^2+y^2+z^2\right)(*)\end{cases}$，

也可以写为

$$
\begin{cases} x+y+z=d \\ d=f\left(x^2+y^2+z^2\right)(*1)\end{cases}
$$

可看到方程 $(*1)$ 是 $f(x^2+y^2+z^2)=d$，即有 $x^2+y^2+z^2=C$，其中 $f(C)=d$，C 为常数，那么再次进行改写交线方程，得 $\begin{cases} x+y+z=d \\ x^2+y^2+z^2=C(*2)\end{cases}$

便得到了一个球面方程 $(*2)$，由于球和平面所截交线为圆，故 $(1,1,1)$ 符合题意，故 $k(1,1,1)$ 符合题意 (其中 k 为任意非 0 常数)

注意：本体可谓是比较难的一道题了，虽然过程没多少，但是思想比较少见

变式：设 u,f 为二阶连续函数，证明：函数 $z=u(x+f(y))$ 满足 $\dfrac{\partial z}{\partial x}\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\dfrac{\partial z}{\partial y}\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}$.

五、**(满分 20 分)** 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上有连续的导函数，证明

$$
\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n}\left[f\left(\frac{k}{n}\right)-f\left(\frac{2k-1}{2n}\right)\right]=\frac{1}{2}(f(1)-f(0))
$$

证明：由泰勒公式知 $f\left(\dfrac{k}{n}\right)-f\left(\dfrac{2k-1}{2n}\right)=f'\left(\dfrac{2k-1}{2n}\right)\cdot\dfrac{1}{2n}+o(\dfrac{1}{n})$

故 $\sum\limits_{k=1}^{n}\left[f\left(\dfrac{k}{n}\right)-f\left(\dfrac{2k-1}{2n}\right)\right]=\sum\limits_{k=1}^{n}\left[f'\left(\dfrac{2k-1}{2n}\right)\cdot\dfrac{1}{2n}+o(\dfrac{1}{n})\right]=\dfrac{1}{2n}\sum\limits_{k=1}^{n}f'\left(\dfrac{2k-1}{2n}\right)+o(1)$

故原式 $=\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1}{2n}\sum\limits_{k=1}^{n}f'\left(\dfrac{2k-1}{2n}\right)+o(1)=\displaystyle\int_0^1 f'(x)\mathrm{d}x=\dfrac{1}{2}(f(1)-f(0))$

注意：首先我得说明下，这个题的出现是在第六届全国大学生数学竞赛 (非数类) 第

六大题和第八届全国大学生数学竞赛 (非数类) 第四大题，以及 1983 年上海交通大学高数竞赛倒数第 2 题，也是 2018 年武汉大学数学分析真题，考研是在竞赛之后，所以有参加过此次竞赛的同学，基本对于此题都是秒，因此鼓励同学们参与数学竞赛，尤其对于报考 34 所自主划线院校的同学，因为考研与竞赛题难度完全相当！

变式：设 $f(x)$ 连续，求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\left[nA-\sum\limits_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)\right]=B$ 存在时，A 和 B 的值.

变式：设 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上有连续的导函数，证明

$$\lim_{n\to\infty} n\left[\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x-\frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(a+k\frac{b-a}{n}\right)\right]=\frac{b-a}{2}[f(a)-f(b)]$$

第 2 章 2019 年合肥工业大学数学竞赛选拔赛 (非数类)

题 号	一	二	三	四	五	六	七	总 分
满 分	15	15	15	10	15	15	15	100
得 分								

考生须知: 1. 学生必须按题号顺序答题；答题时只写答案；请尽量在一张答题纸内作答；

2. 主考教师必须于考试一周前将“试卷 A”、“试卷 B”经教研室主任审批签字；

3. 所有答案必须写在答题纸上，写在试题纸上或草稿纸上一律无效.

一、(15 分) 设 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{(1+x)^{\frac{1}{x}}-\left(A+Bx+Cx^2\right)}{x^3}=D$，求常数 A,B,C,D.

解: 泰勒展开

$$(1+x)^{\frac{1}{x}}=\exp\left(\frac{\ln(1+x)}{x}\right)\xlongequal{taylor}\exp\left(1-\frac{1}{2}x+\frac{1}{3}x^2-\frac{1}{4}x^3+o\left(x^3\right)\right)$$

$$=\exp\left(1+\left(-\frac{1}{2}x+\frac{1}{3}x^2-\frac{1}{4}x^3\right)+\frac{1}{2!}\left(-\frac{1}{2}x+\frac{1}{3}x^2-\frac{1}{4}x^3\right)^2+\frac{1}{3!}\left(-\frac{1}{2}x+\frac{1}{3}x^2-\frac{1}{4}x^3\right)^3+o\left(x^3\right)\right)$$

$$=\exp\left(1-\frac{1}{2}x+\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{8}\right)x^2+\left(-\frac{1}{4}-\frac{1}{6}-\frac{1}{48}\right)x^3+o\left(x^3\right)\right)$$

$$=\exp\left(1-\frac{1}{2}x+\frac{11}{24}x^2-\frac{7}{16}x^3+o\left(x^3\right)\right)$$

因此得到 $A=e,B=-\dfrac{1}{2}e,C=\dfrac{11}{24}e,D=-\dfrac{7}{16}e$

二、(15 分) 设 $f(x)=\arctan\dfrac{1-x}{1+x}$，求 $f^{(2019)}(0)$.

解: 由于 $f'(x)=-\dfrac{1}{1+x^2}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^{n+1}x^{2n}$，即 $f(x)=f(0)+\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n+1}}{2n+1}x^{2n+1}$，因此有

$$f^{(n)}(0)=\begin{cases}\dfrac{\pi}{4}, & n=0\\ 0, & n=2k\\ (-1)^{\frac{n+1}{2}}(n-1)!, & n=2k-1\end{cases}\qquad\left(k\in\mathbb{Z}^{+}\right)$$

故

$$f^{(2019)}(0)=2018!$$

三、(15 分) 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续可导，$f(a)=f(b)=0$，证明：

$$\int_a^b|f(x)|\mathrm{d}x\leqslant\frac{(b-a)^2}{4}\max_{a\leqslant x\leqslant b}\left|f'(x)\right|$$

证明: 令 $M=\max\limits_{a\leqslant x\leqslant b}\left|f'(x)\right|$,由题设易知

$$\int_a^b|f(x)|\mathrm{d}x=\int_a^{\frac{a+b}{2}}|f(x)|\mathrm{d}x+\int_{\frac{a+b}{2}}^b|f(x)|\mathrm{d}x$$

法 1:利用 taylor 公式二阶展开

$$\begin{aligned}\int_a^{\frac{a+b}{2}}|f(x)\mathrm{d}x|&=\int_a^{\frac{a+b}{2}}\left|f(a)+f'(\xi)(x-a)\right|\mathrm{d}x\leqslant M\int_a^{\frac{a+b}{2}}|x-a|\mathrm{d}x\\&=M\int_a^{\frac{a+b}{2}}(x-a)\mathrm{d}x=M\left(\frac{(a+b)^2}{8}-\frac{ab}{2}\right)\end{aligned}$$

同理可得

$$\int_{\frac{a+b}{2}}^b|f(x)|\mathrm{d}x\leqslant M\left(\frac{(a+b)^2}{8}-\frac{ab}{2}\right)$$

两式相加得

$$\int_a^b|f(x)|\mathrm{d}x\leqslant\frac{1}{4}M(b-a)^2$$

法 2:由拉格朗日中值定理

$$f(x)=f'(\xi_1)(x-a),a<\xi_1<x,f(x)=f'(\xi_2)(x-b),x<\xi_2<b$$

因此

$$\begin{aligned}\int_a^b|f(x)|\mathrm{d}x&=\int_a^{\frac{a+b}{2}}\left|f'(\xi_1)\right|(x-a)\,\mathrm{d}x+\int_{\frac{a+b}{2}}^b\left|f'(\xi_2)\right|(b-x)\,\mathrm{d}x\\&\leqslant M\left(\int_a^{\frac{a+b}{2}}(x-a)\mathrm{d}x+\int_{\frac{a+b}{2}}^b(b-x)\mathrm{d}x\right)=\frac{1}{4}M(b-a)^2\end{aligned}$$

即证.

四、(10 分) 计算 $\displaystyle\int\frac{x\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)}{\left(1-x^2\right)^2}\mathrm{d}x$

解: 凑微分

$$\begin{aligned}\int\frac{x\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)}{\left(1-x^2\right)^2}\mathrm{d}x&=\frac{1}{2}\int\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)\mathrm{d}\left(\frac{1}{1-x^2}\right)\\&=\frac{\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)}{2\left(1-x^2\right)}-\frac{1}{2}\int\frac{1}{\left(1-x^2\right)\sqrt{1+x^2}}\mathrm{d}x\end{aligned}$$

又有

$$\begin{aligned}\int\frac{1}{\left(1-x^2\right)\sqrt{1+x^2}}\mathrm{d}x&\xlongequal{x=\frac{1}{t}}-\int\frac{t}{\left(t^2-1\right)\sqrt{t^2+1}}\mathrm{d}t\xlongequal{u^2=t^2+1}-\int\frac{1}{u^2-\left(\sqrt{2}\right)^2}\mathrm{d}u\\&=-\frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\left|\frac{u-\sqrt{2}}{u+\sqrt{2}}\right|+C=-\frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\left|\frac{\sqrt{t^2+1}-\sqrt{2}}{\sqrt{t^2+1}+\sqrt{2}}\right|+C\end{aligned}$$

$$= -\frac{1}{2\sqrt{2}} \ln\left|\frac{\sqrt{x^2+1}-\sqrt{2}x}{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{2}x}\right| + C$$

因此

$$\int \frac{x\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)}{\left(1-x^2\right)^2}\mathrm{d}x = \frac{\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)}{2\left(1-x^2\right)} - \frac{1}{4\sqrt{2}}\ln\left|\frac{\sqrt{x^2+1}-\sqrt{2}x}{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{2}x}\right| + C$$

五、(15 分) 计算积分 $\int_0^1 x^m(\ln x)^n \mathrm{d}x(m,n$ 为自然数$)$

解： 易知

$$\begin{aligned}\int_0^1 x^m(\ln x)^n\,\mathrm{d}x &\xlongequal{x=e^{-t}} \int_0^{\infty} e^{-mt}(-t)^n e^{-t}\mathrm{d}t = (-1)^n\int_0^{\infty} t^n e^{-(m+1)t}\mathrm{d}t\\ &\xlongequal{u=(m+1)t} \frac{(-1)^n}{(m+1)^{n+1}}\int_0^{\infty} u^n e^{-u}\mathrm{d}u = \frac{(-1)^n n!}{(m+1)^{n+1}}\end{aligned}$$

六、(15 分) 设函数 $f(x,y)$ 在区域 $D: x^2+y^2 \leqslant 1$ 上有二阶连续偏导数，且 $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = e^{-(x^2+y^2)}$，计算 $\iint_D\left(x\frac{\partial f}{\partial x}+y\frac{\partial f}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$

解： 法 1：由题设得

$$I = \iint_D\left(x\frac{\partial f}{\partial x}+y\frac{\partial f}{\partial y}\right)\mathrm{d}V = \int_{-1}^{1}\left(\int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} x\frac{\partial f}{\partial x}\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y + \int_{-1}^{1}\left(\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} y\frac{\partial f}{\partial y}\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x$$

令 $u = \frac{\partial f(x,y)}{\partial x}$ 与 $v = \frac{1}{2}\left(x^2+y^2\right)$ 得

$$\begin{aligned}\int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} x\frac{\partial f}{\partial x}\mathrm{d}x &= \left(\frac{1}{2}\left(x^2+y^2\right)\frac{\partial f}{\partial x}\right)\Bigg|_{x=-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} - \int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}}\left(\frac{1}{2}\left(x^2+y^2\right)\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)\mathrm{d}x\\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)\Bigg|_{x=-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} - \int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}}\left(\frac{1}{2}\left(x^2+y^2\right)\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)\mathrm{d}x\end{aligned}$$

$$\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} y\frac{\partial f}{\partial y}\mathrm{d}y = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)\Bigg|_{y=-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} - \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}}\left(\frac{1}{2}\left(x^2+y^2\right)\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right)\mathrm{d}y$$

因此

$$\begin{aligned}I &= \frac{1}{2}\oint_{x^2+y^2=1}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\mathrm{d}y-\frac{\partial f}{\partial y}\mathrm{d}x\right) - \frac{1}{2}\int_D\left(x^2+y^2\right)\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right)\mathrm{d}V\\ &= \frac{1}{2}\int_D\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right)\mathrm{d}V - \frac{1}{2}\int_D\left(x^2+y^2\right)\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right)\mathrm{d}V\\ &= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\int_0^1\left(1-\rho^2\right)e^{-\rho^2}\rho\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\phi = \frac{\pi}{2e}\end{aligned}$$

法 2: 利用极坐标得

$$\iint_D \left(x\frac{\partial f}{\partial x}+y\frac{\partial f}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1\left(\rho\cos\theta\cdot f_x'+\rho\sin\theta\cdot f_y'\right)\rho\mathrm{d}\rho$$
$$=\int_0^1\rho\mathrm{d}\rho\int_0^{2\pi}\left(\rho\cos\theta\cdot f_x'+\rho\sin\theta\cdot f_y'\right)\mathrm{d}\theta$$

记 L_ρ 是半径为 ρ 的圆周, D_ρ 为圆周 L. 包围的区域. 易知 $\rho\cos\theta\mathrm{d}\theta=\mathrm{d}y,\rho\sin\theta\mathrm{d}\theta=-\mathrm{d}x$. 于是上式的内层积分可以看作沿闭曲线 L_ρ.(逆时针方向)的曲线积分 $\oint_{L_p}-f_y'\mathrm{d}x+f_x'\mathrm{d}y$, 则有

$$\int_0^1\rho\mathrm{d}\rho\int_0^{2\pi}\left(\rho\cos\theta\cdot f_x'+\rho\sin\theta\cdot f_y'\right)\mathrm{d}\theta=\int_0^1\rho\left(\oint_{L_p}-f_y'\mathrm{d}x+f_x'\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}\rho$$
$$=\int_0^1\rho\left[\iint_{D_p}\left(f_{xx}''+f_{yy}''\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\right]\mathrm{d}\rho=\int_0^1\rho\left(\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^\rho \mathrm{e}^{-s^2}s\mathrm{d}s\right)\mathrm{d}\rho=\frac{\pi}{2\mathrm{e}}$$

七、(15 分) 计算三重积分

$$I=\iiint_\Omega\frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z}{\left(1+x^2+y^2+z^2\right)^2}$$

其中 Ω 为 $0\leqslant x\leqslant 1,0\leqslant y\leqslant 1,0\leqslant z\leqslant 1$.

解:【官方标准答案】采用“先二后一”, 利用对称性得

$$I=2\int_0^1\mathrm{d}z\iint_D\frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{\left(1+x^2+y^2+z^2\right)^2}$$

其中 $D:0\leqslant x\leqslant 1,0\leqslant y\leqslant x$. 利用极坐标计算二重积分得

$$I=2\int_0^1\mathrm{d}z\int_0^{\frac{\pi}{4}}\mathrm{d}\theta\int_0^{\sec\theta}\frac{r\mathrm{d}r}{\left(1+r^2+z^2\right)^2}=\int_0^1\mathrm{d}z\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left(\frac{1}{1+z^2}-\frac{1}{1+\sec^2\theta+z^2}\right)\mathrm{d}\theta$$

交换积分次序得

$$I=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\mathrm{d}\theta\int_0^1\left(\frac{1}{1+z^2}-\frac{1}{1+\sec^2\theta+z^2}\right)\mathrm{d}z=\frac{\pi^2}{16}-\int_0^{\frac{\pi}{4}}\mathrm{d}\theta\int_0^1\frac{1}{1+\sec^2\theta+z^2}\mathrm{d}z$$

作变量代换 $z=\tan t$ 并利用对称性得

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}}\mathrm{d}\theta\int_0^1\frac{1}{1+\sec^2\theta+z^2}\mathrm{d}z=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\mathrm{d}\theta\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\sec^2 t}{\sec^2\theta+\sec^2 t}\mathrm{d}t=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\mathrm{d}\theta\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\sec^2\theta}{\sec^2\theta+\sec^2 t}\mathrm{d}t$$
$$=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\mathrm{d}\theta\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\sec^2\theta+\sec^2 t}{\sec^2\theta+\sec^2 t}\mathrm{d}t=\frac{1}{2}\times\frac{\pi^2}{16}=\frac{\pi^2}{32}$$

因此

$$I=\frac{\pi^2}{16}-\frac{1}{2}\times\frac{\pi^2}{16}=\frac{\pi^2}{32}$$

第 3 章 2019 年四川大学数学竞赛(非数)试题解析

题 号	一	二	三	四	五	六	七	八	总 分
满 分	30	10	10	10	10	10	10	10	100
得 分									

考生须知: 1. 本试卷满分为 100 分,全部考试时间总计 120 分钟;

2. 所有答案必须写在答题纸上,写在试题纸上或草稿纸上一律无效;

一、填空题:(每小题 6 分,满分 30 分)

1. 曲线 $\begin{cases} z = x^2 + y^2 \\ x + y + z = 1 \end{cases}$ 上的点到原点的距离最大为______.

解: 考虑拉格朗日函数为

$$L = x^2 + y^2 + z^2 + \lambda\left(x^2 + y^2 - z\right) + \mu(x + y + z - 1)$$

则有

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial x} = 2x + 2\lambda x + \mu = 0 \\ \dfrac{\partial L}{\partial y} = 2y + 2\lambda y + \mu = 0 \\ \dfrac{\partial L}{\partial z} = 2z - \lambda + \mu = 0 \\ z = x^2 + y^2 \\ x + y + z = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \pm\dfrac{\sqrt{3}}{2} - \dfrac{1}{2} \\ y = \pm\dfrac{\sqrt{3}}{2} - \dfrac{1}{2} \\ z = 2 \mp \sqrt{3} \end{cases}$$

即点到原点的距离最大 $\mathrm{d}_{\max} = \sqrt{9 + 5\sqrt{3}}$.

2. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n^2}}{e^n} =$______.

解:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n^2}}{e^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\exp\left(n^2 \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)\right)}{e^n} = \lim_{n\to\infty} \exp\left(n^2 \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) - n\right)$$

$$= \lim_{n\to\infty} \exp\left(n^2\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) - n\right) = \exp\left(-\frac{1}{2}\right)$$

3. 以曲线 $\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 1 \\ x + y + z = 1 \end{cases}$ 为准线并平行于 $x = y = z$ 的柱面方程为______.

解: 设 $P(x, y, z)$ 是柱面上的任意一点,过点 P 平行于 $x = y = z$ 的直线与准

线的交点为 $P'(x_0, y_0, z_0)$，则有

$$\begin{cases} x_0^2+y_0^2+z_0^2=1 \\ x_0+y_0+z_0=1 \\ x-x_0=y-y_0=z-z_0=t \end{cases} \Rightarrow x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx-1=0$$

4. $\displaystyle\int_0^1 \frac{x\ln x}{\left(x^2+2019\right)^2}\mathrm{d}x=$______.

解: 分部积分得

$$\int_0^1 \frac{x\ln x}{\left(x^2+2019\right)^2}\mathrm{d}x=-\frac{1}{2}\int_0^1 \ln x\mathrm{d}\frac{1}{\left(x^2+2019\right)}=-\frac{1}{2}\frac{\ln x}{\left(x^2+2019\right)}\bigg|_0^1+\frac{1}{2}\int_0^1 \frac{1}{x\left(x^2+2019\right)}\mathrm{d}x$$

$$=\left[-\frac{1}{2}\frac{\ln x}{\left(x^2+2019\right)}+\frac{1}{8076}\ln\frac{x^2}{x^2+2019}\right]\bigg|_0^1=\frac{1}{8076}\ln\frac{2019}{2020}$$

5. 设 $D=\left\{(x,y)|x^2+y^2\leqslant 1\right\}$，则 $\displaystyle\iint_D \sqrt{25-(3x+4y)^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=$______.

解: 令 $u=\frac{3}{5}x+\frac{4}{5}y, v=-\frac{4}{5}x+\frac{3}{5}y$，则有

$$D'=\left\{(u,v)|u^2+v^2\leqslant 1\right\}, \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}=\begin{vmatrix} \frac{3}{5} & \frac{4}{5} \\ -\frac{4}{5} & \frac{3}{5} \end{vmatrix}=1$$

即换元后有

$$\iint_D \sqrt{25-(3x+4y)^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=5\iint_{D'}\sqrt{1-u^2}\mathrm{d}u\mathrm{d}v=5\int_{-1}^1\mathrm{d}u\int_{-\sqrt{1-u^2}}^{\sqrt{1-u^2}}\sqrt{1-u^2}\mathrm{d}v=\frac{40}{3}$$

二、综合题（每题 10 分，共 70 分）

1. 求极限 $I=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+2x)^{\frac{1}{2x}}-e(1+\sin x)}{x}$.

解:

$$I=\lim_{x\to 0}\frac{(1+2x)^{\frac{1}{2x}}-e\left(1+\sin x\right)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\exp\left(\frac{1}{2x}\ln\left(1+2x\right)\right)-e}{x}-e$$

$$=e\lim_{x\to 0}\frac{\exp\left(\frac{1}{2x}\ln\left(1+2x\right)-1\right)-1}{x}-e=e\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{2x}\ln\left(1+2x\right)-1}{x}-e$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\ln\left(1+2x\right)-2x}{2x^2}-e=e\lim_{x\to 0}\frac{2x-2x^2+o\left(x^2\right)-2x}{2x^2}-e=-2e$$

2. 设函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，且 $f(0)=f(1)$，证明：对于任意的正整数 n，都存在 $\xi\in[0,1]$，使得 $f(\xi)=f\left(\xi+\dfrac{1}{n}\right)$.

解: 令

$$F(x)=f(x)-f\left(x+\frac{1}{n}\right), x\in\left[0,1-\frac{1}{n}\right]$$

则

$$F(0)+F\left(\frac{1}{n}\right)+F\left(\frac{2}{n}\right)+\cdots+F\left(1-\frac{1}{n}\right)=f(0)-f(1)=0$$

若 $F(0), F\left(\frac{1}{n}\right), F\left(\frac{2}{n}\right), \cdots, F\left(1-\frac{1}{n}\right)$ 某个为零，则结论成立；若都非零，则必有两项异号，此时由闭区间上的连续函数的零点定理，结论依然成立.

3. 计算 $I=\lim\limits_{x\to0}\left(\int_0^1 \mathrm{e}^{-xt^2}\mathrm{d}t\right)^{1/x}$

解：

$$I=\lim_{x\to0}\left(\int_0^1 e^{-xt^2}\mathrm{d}t\right)^{1/x}=\lim_{x\to0}\exp\frac{\ln\int_0^1 e^{-xt^2}\mathrm{d}t}{x}=\exp\lim_{x\to0}\frac{\ln\int_0^1 e^{-xt^2}\mathrm{d}t}{x}$$
$$=\exp\lim_{x\to0}\frac{\int_0^1 e^{-xt^2}\mathrm{d}t-1}{x}=\exp\lim_{x\to0}\left(-\int_0^1 t^2e^{-xt^2}\mathrm{d}t\right)=\exp\left(-\int_0^1 t^2\mathrm{d}t\right)$$
$$=\exp\left(-\frac{1}{3}\right)$$

4. 设数列 $\{x_n\}$ 定义为 $x_1=1, x_{n+1}=\sin x_n (n=1,2,\cdots)$，求 $\lim\limits_{x\to0}x_n$ 以及 $\lim\limits_{n\to\infty}nx_n^2$.

解：由数学归纳法得 $0\leqslant x_{n+1}\leqslant x_n\leqslant 1(n=1,2,\cdots)$，即数列 $\{x_n\}$ 单调有界，那么极限 $\lim\limits_{n\to+\infty}x_n$ 必然存在，于是令 $\lim\limits_{n\to+\infty}x_n=A$，两边取极限得 $A=\sin A$，易知有唯一实根 $A=0$. 然后根据 stolz 定理得

$$\lim_{n\to\infty}nx_n^2=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{x_n^{-2}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n+1-n}{x_{n+1}^{-2}-x_n^{-2}}=\lim_{n\to\infty}\frac{x_{n+1}^2x_n^2}{x_n^2-x_{n+1}^2}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{x_n^2\sin x_n^2}{x_n^2-\sin^2 x_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{x_n^3}{(x_n-\sin x_n)}\frac{x_n}{(x_n+\sin x_n)}$$
$$=\frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\frac{x_n^3}{x_n-\sin x_n}=\frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\frac{x_n^3}{\frac{x_n^3}{6}}=3$$

5. 设曲线 $\begin{cases} x^2+z^2=2x \\ y=\sqrt{x^2+z^2} \end{cases}$ 绕 z 轴旋转所产生的曲面所围成的立体为 Ω，计算

$$\iiint_\Omega \sqrt{x^2+y^2+z^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

解：设旋转曲面上任意一点 $P(x,y,z)$ 为曲线上点 $Q(x_0,y_0,z_0)$ 绕 z 轴旋转得

到，则有

$$\begin{cases} x_0^2+z_0^2=2x_0 \\ y_0=\sqrt{x_0^2+z_0^2} \\ z=z_0 \\ x^2+y^2=x_0^2+y_0^2 \end{cases} \Rightarrow \left(x^2+y^2+z^2-4\right)^2=16\left(1-z^2\right)$$

即该曲面方程的球坐标方程为 $r^2=8-16\cos^2\varphi$，即 $\frac{\pi}{4}\leqslant\varphi\leqslant\frac{3\pi}{4}$，因此由球坐标计算得

$$\iiint_{\Omega}\sqrt{x^2+y^2+z^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}}\mathrm{d}\varphi\int_0^{\sqrt{8-16\cos^2\varphi}}r^3\sin\varphi\mathrm{d}r$$
$$=\frac{\pi}{2}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}}\left(8-16\cos^2\varphi\right)^2\sin\alpha\mathrm{d}\varphi=\frac{\pi}{2}\int_{-\frac{\sqrt{2}}{2}}^{\frac{\sqrt{2}}{2}}\left(8-16u^2\right)^2u\mathrm{d}u=\frac{256\sqrt{2}}{15}\pi$$

6. 设 $f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2x+n}$，$g(x)=\int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{d}t}{xt^2+t}$. 证明：

$$g(x)\leqslant f(x)\leqslant\frac{1}{1+x}+g(x)(\forall x>0)$$

并计算 $\lim_{x\to0^+}\frac{f(x)}{\ln x}$.

解： 对给定的 $x>0$，$\varphi(x)=\frac{1}{xt^2+t}$ 在 $(0,+\infty)$ 上严格单调递减.

I. 当 $t\in[n,n+1]$ 时，有

$$\varphi(n)=\frac{1}{n^2x+n}\geqslant\varphi(t)=\frac{1}{xt^2+t}$$

即

$$\frac{1}{n^2x+n}=\int_n^{n+1}\frac{1}{n^2x+n}\mathrm{d}t\geqslant\int_n^{n+1}\frac{1}{xt^2+t}\mathrm{d}t$$
$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2x+n}\geqslant\sum_{n=1}^{\infty}\int_n^{n+1}\frac{1}{xt^2+t}\mathrm{d}t=g(x)$$

II. 当 $t\in[n-1,n]$ 时

$$\varphi(n)=\frac{1}{n^2x+n}\leqslant\varphi(t)=\frac{1}{xt^2+t}$$

$$\frac{1}{n^2x+n}=\int_{n-1}^{n}\frac{1}{n^2x+n}\mathrm{d}t\leqslant\int_{n-1}^{n}\frac{1}{xt^2+t}\mathrm{d}t$$

因此

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2x+n}=\frac{1}{x+1}+\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n^2x+n}$$
$$\leqslant\frac{1}{x+1}+\sum_{n=2}^{\infty}\int_{n-1}^{n}\frac{1}{xt^2+t}\mathrm{d}t=\frac{1}{x+1}+g(x)$$

即

$$g(x)\leqslant f(x)\leqslant\frac{1}{1+x}+g(x)(\forall x>0)$$

由于

$$g(x)=\int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{d}t}{xt^2+t}=\int_1^{+\infty}\left(\frac{1}{t}-\frac{x}{xt+t}\right)\mathrm{d}t$$
$$=[\ln t-\ln(xt+1)]_1^{+\infty}=\ln\frac{t}{xt+1}\bigg|_1^{+\infty}$$
$$=-\ln x+\ln(x+1)$$

即

$$-1+\frac{\ln(x+1)}{\ln x}\leqslant\frac{f(x)}{\ln x}\leqslant\frac{1}{(1+x)\ln x}-1+\frac{\ln(1+x)}{\ln x}$$

于是有 $\lim\limits_{x\to0^+}\left(-1+\dfrac{\ln(x+1)}{\ln x}\right)=-1$ 与 $\lim\limits_{x\to0^-}\left(\dfrac{1}{(1+x)\ln x}-1+\dfrac{\ln(1+x)}{\ln x}\right)=-1$，因此由夹逼定理得

$$\lim_{x\to0^+}\frac{f(x)}{\ln x}=-1$$

7. 设 $P_n(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0$，其中 $a_n\neq0,n\geqslant2$. 求证：$P_n(x)$ 是凸函数当且仅当 $P_n''(x)\leqslant0$ 恒成立.

证明：必要性：若存在 $x_0\in\mathbb{R}$ 使得 $P_n''(x_0)>0$，则由 $P_n''(x_0)$ 的连续性可知，存在 $U(x_0,\delta)$ 使得

$$P_n''(x)>0,\forall x\in(x_0-\delta,x_0+\delta)$$

从而 $P_n''(x_0)$ 在 $(x_0-\delta,x_0+\delta)$ 内为凹函数，这与 $P_n''(x_0)$ 为凸函数矛盾，因此 $P_n''(x_0)$ 是凸函数当且仅当 $P_n''(x_0)\leqslant0$ 成立.

充分性：根据定义只需证明对 $\forall x_1<x_2\in\mathbb{R}$ 成立

$$P_n\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)>\frac{1}{2}\left[P_n(x_1)+P_n(x_2)\right]$$

记 $x_0=\dfrac{x_1+x_2}{2}$，$h=x_2-x_1$，根据泰勒公式，存在 $\xi_1\in(x_1,x_0)$，$\xi_2\in(x_0,x_2)$ 有

$$P_n(x_1)=P_n(x_0)+P_n'(x_0)(-h)+\frac{1}{2}P_n''(\xi_1)(-h)^2$$
$$P_n(x_2)=P_n(x_0)+P_n'(x_0)h+\frac{1}{2}P_n''(\xi_2)h^2$$

将上两式相加为

$$P_n(x_1)+P_n(x_2)=2P_n(x_0)+\frac{1}{2}\left[P_n^{n}(\xi_1)+P_n''(\xi_2)\right]h$$

由于 $P_n''(x)\leqslant 0$,即 $P_n''(\xi_1)+P_n''(\xi_2)\leqslant 0$,因此 $P_n(x_1)+P_n(x_2)\leqslant 2P_n(x_0)$,即

$$P_n(x_0)\geqslant \frac{P_n(x_1)+P_n(x_2)}{2}$$

若 $P_n(x_0)=\dfrac{P_n(x_1)+P_n(x_2)}{2}$,令

$$f(x)=P_n(x)-\left[\frac{P_n(x_1)-P_n(x_2)}{x_1-x_2}(x-x_0)+P_n(x_0)\right]$$

则 $f(x_1)=f(x_0)=f(x_2)=0$,于是由罗尔定理可知,存在 $\eta_1\in(x_1,x_0),\eta_2\in(x_0,x_2)$,使得

$$f'(\eta_1)=f'(\eta_2)=0$$

但是,多项式 $P_n''(x)$ 只有有限个零点,除了这有限个零点外,$P_n''(x)<0$,从而 $P_n'(x)$ 严格单调递减,因此

$$f'(x)=P_n'(x)-\frac{P_n(x_1)-P_n(x_2)}{x_1-x_2}$$

至多有一个零点,这与 $f'(\eta_1)=f'(\eta_2)=0$ 矛盾,所以 $P_n(x_0)>\dfrac{P_n(x_1)+P_n(x_2)}{2}$,即

$$P_n\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)>\frac{1}{2}\left[P_n(x_1)+P_n(x_2)\right]$$

所以由定义可知 $P_n(x)$ 是凸函数.

第 4 章 2019 年江苏省高等数学竞赛 (本一) 试题解析

题 号	一	二	三	四	五	六	七	八	总 分
满 分	32	8	10	10	10	10	10	10	100
得 分									

考生须知: 1. 本试卷满分为 100 分,全部考试时间总计 120 分钟;

2. 所有答案必须写在答题纸上,写在试题纸上或草稿纸上一律无效;

一、填空题 (每小题 4 分,共 32 分)

1. 设 $f(x)=\dfrac{(x-1)(x+2)\cdots(x-99)(x+100)}{(x+1)(x-2)\cdots(x+99)(x-100)}$,则 $f'(1)=$______.

解: 考虑 $f(x)=(x-1)g(x)$,有 $f'(x)=g(x)+(x-1)g'(x)$,即

$$f'(1)=g(1)=-\frac{101}{100}$$

2. 设 $\begin{cases} x=\displaystyle\int_0^{t^2} f(u)\mathrm{d}u \\ y=\left[f\left(t^2\right)\right]^2 \end{cases}$,其中 f 二阶可导,且 $f\neq 0$,则 $\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=$______.

解:

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{4tf'\left(t^2\right)}{2tf\left(t^2\right)}=\frac{2f'\left(t^2\right)}{f\left(t^2\right)}\Rightarrow\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=\frac{2f''\left(t^2\right)}{f'\left(t^2\right)}$$

3. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^3-(\arcsin x)^3}{x^5}=$______.

解:

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^3-(\arcsin x)^3}{x^5}=\lim_{x\to 0}\frac{x^3-\left(x+\frac{x^3}{6}+o\left(x^3\right)\right)^3}{x^5}=\lim_{x\to 0}\frac{x^3-\left(x^3+\frac{1}{2}x^5+\cdots+o\left(x^{11}\right)\right)}{x^5}=-\frac{1}{2}$$

4. $\displaystyle\int \max\left\{x,x^2-x\right\}\mathrm{d}x=$______.

解: 由题易知得

$$f(x)=\max\left\{x,x^2-x\right\}=\begin{cases} x^2-x, & x<0 \\ x, & 0\leqslant x\leqslant 2 \\ x^2-x, & x>2 \end{cases}$$

又有 $\displaystyle\int\left(x^2-x\right)\mathrm{d}x=\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}+C$, $\displaystyle\int x\mathrm{d}x=\frac{x^2}{2}+C$. 由于其为连续函数,即原函数存在,且原函数连续并可导,于是

$$\lim_{x\to 0^-}F(x)=\lim_{x\to 0^+}F(x),\ \lim_{x\to 2^-}F(x)=\lim_{x\to 2^+}F(x)$$

因此

$$F(x)=\begin{cases}\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2+C, & x<0\\ \frac{1}{2}x^2+C, & 0\leqslant x\leqslant 2\\ \frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2+\frac{4}{3}+C, & x>2\end{cases}$$

5. 设 $f(x)=\int_0^1|x-2t|\mathrm{d}t$，则 $\int_0^3 f(x)\mathrm{d}x=$______.

解： 当 $x\in(2,+\infty)$，有 $f(x)=\int_0^1(x-2t)\mathrm{d}t=\left[xt-t^2\right]_0^1=x-1$

当 $x\in[0,2]$，有

$$f(x)=\int_0^{\frac{x}{2}}(x-2t)\mathrm{d}t+\int_{\frac{x}{2}}^1(2t-x)\mathrm{d}t=\frac{1}{2}\left(x^2-2x+2\right)$$

因此

$$\int_0^3 f(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int_0^2\left(x^2-2x+2\right)\mathrm{d}x+\int_2^3(x-1)\mathrm{d}x=\frac{17}{6}$$

6. 设 $f(x)=x^2\int_1^x\frac{\mathrm{d}t}{t^3-3t^2+3t}$，则 $f^{(2019)}(1)$______.

解： 考虑积分上限 $g(x)=\int_1^x\frac{\mathrm{d}t}{t^3-3t^2+3t}$，有 $g(1)=0$，于是

$$g'(x)=\frac{1}{x^3-3x^2+3x}=\frac{1}{1+(x-1)^3}=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k(x-1)^{3k}$$

$$\Rightarrow\int_1^x g'(x)\mathrm{d}x=g(x)-g(1)=g(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{3k+1}(x-1)^{3k+1}$$

即

$$f(x)=\left[1+2(x-1)+(x-1)^2\right]\int_1^x\frac{\mathrm{d}t}{t^3-3t^2+3t}$$

所以 $n=2019=3\times 673$，即第三项系数 $k=672$. 因此

$$f^{(2019)}(1)=n!a_n=2019!\frac{(-1)^{672}}{3\cdot 672+1}=\frac{2019!}{2017}$$

7. 点 $(-1,6,1)$ 关于直线 $\frac{x-4}{3}=\frac{y+1}{1}=\frac{z+2}{-2}$ 的对称点坐标为______.

解： 过点 $(-1,6,1)$ 且垂直于直线的平面方程为

$$3(x+1)+(y-6)-2(z-1)=0$$

即 $3x+y-2z-1=0$，直线参数方程为

$$x=3t+4,y=-1+t,z=-2-2t$$

代入平面方程得 $t=-1$，即直线与平面的交点为 $(1,-2,0)$，该点为对称两点的中点，由中点坐标公式得

$$\frac{-1+x}{2}=1,\frac{6+y}{2}=-2,\frac{1+z}{2}=0$$

即对称点坐标为 $x=3, y=-10, z=-1$

8. 曲面 $\left(x^2+y^2+z^2+8\right)^2=36\left(x^2+y^2\right)$ 围成的立体的体积是______.

解：曲面为旋转曲面，旋转轴为 z 轴，母线为 $\left(y^2+z^2+8\right)^2=36y^2$，即 $y^2+z^2+8=6y$，整理得

$$(y-3)^2+z^2=1$$

圆心所在点的轨迹为 $L: x^2+y^2=9$，所以由对弧长的曲线积分得

$$V=\int_L \pi \mathbf{d}s=6\pi^2$$

二、**(8 分)** 若函数 $f(x)$ 对任意 $u\neq v$ 都有

$$\frac{f(u)-f(v)}{u-v}=af'(u)+bf'(v)$$

其中 a,b 为正常数且 $a+b=1$，求 $f(x)$ 的表达式.

解：由 $\dfrac{f(u)-f(v)}{u-v}=af'(u)+bf'(v)$ 得

$$\frac{f(v)-f(u)}{v-u}=af'(v)+bf'(u)$$

即两式相减得 $(a-b)\left[f'(u)-f'(v)\right]=0$.

若 $a\neq b$，则对 $u\neq v$, $f'(u)-f'(v)=0$，即 $f'(x)$ 是常数，所以 $f'(x)=C_1$, $f(x)=C_1x+C_2$.

若 $a=b=\dfrac{1}{2}$，在 $\dfrac{f(u)-f(v)}{u-v}=\dfrac{1}{2}f'(u)+\dfrac{1}{2}f'(v)$ 中令 $u=x+h, v=x-h(h\neq 0)$ 得

$$f(x+h)-f(x-h)=h\left[f'(x+h)+f'(x-h)\right]$$

两端对 h 求导得

$$f'(x+h)+f'(x-h)=f'(x+h)+f'(x-h)+h\left[f''(x+h)-f''(x-h)\right]$$

所以 $f''(x+h)-f''(x-h)=0$. 该式表明 $f''(x)$ 为常数，即 $f(x)=C_3x^2+C_4x+C_5$.

三、**(10 分)** 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，在 $(0,1)$ 内可导，$f(0)=f(1)=0$，若 $a\in(0,1)$, $f(a)>0$，证明：存在 $\xi\in(0,1)$，使得 $\left|f'(\xi)\right|>2f(a)$.

证明： 若 $a \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$，则 $\exists \xi \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$，使得

$$f'(\xi) = \frac{f(a) - f(0)}{a - 0} = \frac{f(a)}{a}$$

即 $\left|f'(\xi)\right| > 2f(a)$.

若 $a \in \left(\frac{1}{2}, 1\right)$，则 $\exists \xi \in \left(\frac{1}{2}, 1\right)$，使得

$$f'(\xi) = \frac{f(1) - f(a)}{1 - a} = -\frac{f(a)}{1 - a}$$

即 $\left|f'(\xi)\right| > 2f(a)$.

若 $a = \frac{1}{2}$，则若 $x \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$ 时，$f(x)$ 不是线性函数，则存在 $c \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$，使得 $f(c) > 2f(a)c$ 或 $f(c) < 2f(a)c$.

1. 若 $f(c) > 2f(a)c$，则存在 $\xi \in (0, c) \subset (0, 1)$，使得

$$f'(\xi) = \frac{f(c) - f(0)}{c - 0} = \frac{f(c)}{c}$$

从而有 $\left|f'(\xi)\right| = \left|\frac{f(c)}{c}\right| > 2f(a)$

2. $f(c) < 2f(a)c$，则存在 $\xi \in \left(c, \frac{1}{2}\right) \subset (0, 1)$ 使得

$$f'(\xi) = \frac{f\left(\frac{1}{2}\right) - f(c)}{\frac{1}{2} - c} > \frac{f\left(\frac{1}{2}\right) - 2f(a)c}{\frac{1}{2} - c} = \frac{f(a) - 2f(a)c}{\frac{1}{2} - c} = 2f(a)$$

从而有 $\left|f'(\xi)\right| > 2f(a)$.

四、(10 分) 设 $f(t) = t|\sin t|$

a) 求 $\displaystyle\int_0^{2\pi} f(t)\mathrm{d}t$；

b) 求 $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \frac{\int_0^x f(t)\mathrm{d}t}{x^2}$

解：

(1)

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi} f(t)\,\mathrm{d}t &= \int_0^{\pi} t\sin t\mathrm{d}t + \int_{\pi}^{2\pi} (-t\sin t)\mathrm{d}t \\ &= [-t\cos t + \sin t]\,\Big|_0^{\pi} + [t\cos t - \sin t]\,\Big|_{\pi}^{2\pi} \\ &= \pi + 3\pi = 4\pi\end{aligned}$$

(2)

$$\begin{aligned}\int_0^{n\pi} f(t)\,\mathrm{d}t &= \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \int_{(k-1)\pi}^{k\pi} t\sin t\mathrm{d}t \\ &= \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1}\, [-t\cos t + \sin t]\,\Big|_{(k-1)\pi}^{k\pi}\end{aligned}$$

$$= \sum_{k=1}^{n} (k\pi + (k-1)\pi) = n^2\pi$$

设 $n\pi \leqslant x < (n+1)\pi$，则有

$$n^2\pi = \int_0^{n\pi} f(t)\mathrm{d}t \leqslant \int_0^{x} f(t)\mathrm{d}t \leqslant \int_0^{(n+1)\pi} f(t)\mathrm{d}t = (n+1)^2\pi$$

则 $\dfrac{n^2\pi}{(n+1)^2\pi^2} \leqslant \dfrac{\int_0^x f(t)\mathrm{d}t}{x^2} \leqslant \dfrac{(n+1)^2\pi}{n^2\pi^2}$，由夹逼定理得 $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\int_0^x f(t)\mathrm{d}t}{x^2} = \dfrac{1}{\pi}$.

五、(10 分) 证明：当 $x \geqslant 0, y \geqslant 0$ 时，

$$e^{x+y-2} \geqslant \frac{1}{12}\left(x^2+3y^2\right)$$

证明：令 $f(x,y) = \left(x^2+3y^2\right)e^{-(x+y)}$，有

$$\begin{cases} f_x'(x,y) = 2xe^{-(x+y)} - \left(x^2+3y^2\right)e^{-(x+y)} = 0 \\ f_y'(x,y) = 6ye^{-(x+y)} - \left(x^2+3y^2\right)e^{-(x+y)} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=0, y=0 \\ y=\dfrac{3}{2}, y=\dfrac{1}{2} \end{cases}$$

由于对 $\forall x, y$ 都有

$$\lim_{x\to+\infty} f(x,y) = \lim_{x\to+\infty} \left(x^2+3y^2\right)e^{-(x+y)} = 0$$

$$\lim_{y\to+\infty} f(x,y) = \lim_{y\to+\infty} \left(x^2+3y^2\right)e^{-(x+y)} = 0$$

所以 $f(x,y)$ 只能在点 $(0,0), [\frac{3}{2}, \frac{1}{2}]$、$xy$ 轴正向取到最大值. 在 x 轴正向上有 $f(x,0) = x^2e^{-x}$，由

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f(x,0) = \left(2x - x^2\right)e^{-x} = 0$$

即 $x=2$，则 $(2,0)$ 是 $f(x,y)$ 可能的最大值点；同理 $(0,2)$ 也可能是最大值点. 由于

$$f(0,0) = 0, \quad f\left(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right) = 3e^{-2}$$
$$f(2,0) = 4e^{-2}, f(0,2) = 12\mathrm{e}^{-2}$$

即

$$f(0,0) = 0, f\left(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right) = 3e^{-2}, f(2,0) = 4e^{-2}, f(0,2) = 12e^{-2}$$

因此 $f_{\max} = 12e^{-2}$，即 $f(x,y) = \left(x^2+3y^2\right)e^{-(x+y)} \leqslant 12e^{-2}$，即证.

六、(10 分) 设函数 $z = f(x,y)$ 有连续偏导数且在单位圆周 $L: x^2+y^2=1$ 上的值为零，L 围成的闭区域记为 D，k 为任意常数.

(1) 利用格林公式计算

$$\iint_D \left[(x-ky)f_x'(x,y) + (kx+y)f_y'(x,y) + 2f(x,y)\right]\mathbf{d}x\mathrm{d}y$$

(2) 若 $f(x,y)$ 在 D 上任意点处沿任意方向的方向导数的值都不超过常数 M，证明：

$$\left|\iint_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\right| \leqslant \frac{1}{3}\pi M$$

解：

(1)

$$\begin{aligned}
&\iint_D \left[(x-ky)\, f_x'(x,y) + (kx+y)\, f_y'(x,y) + 2f\,(x,y)\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\
&= \iint_D \left[\frac{\partial}{\partial x}((x-ky)\, f) - \frac{\partial}{\partial y}(-(kx+y)\, f)\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\
&= \int_L [-(kx+y)\, f]\mathrm{d}x + (x-ky)\, f\mathrm{d}y \\
&= \int_L 0\mathrm{d}x + 0\mathrm{d}y = 0
\end{aligned}$$

(2) 由 (1) 得，当 $k=0$ 时有

$$\iint_D f\,(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = -\frac{1}{2}\iint_D \left[xf_x'(x,y) + yf'(x,y)\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

因此

$$\iint_D f\,(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = -\frac{1}{2}\iint_D \left[xf_x'(x,y) + yf'(x,y)\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$\begin{aligned}
&\left|\iint_D f\,(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\right| \leqslant \frac{1}{2}\iint_D xf_x'(x,y) + yf_y'(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\
&\leqslant \frac{1}{2}\iint_D \sqrt{x^2+y^2}\sqrt{\|\, f_x'(x,y)]^2 + [f_y'(x,y)]^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\
&\leqslant \frac{1}{2}M\iint_D \sqrt{x^2+y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \frac{1}{2}M\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1 r^2\mathrm{d}r \\
&= \frac{1}{3}\pi M
\end{aligned}$$

七、(10 分) 设 Σ 是椭球面 $S: x^2+y^2+z^2-yz=1$ 位于平面 $y-2z=0$ 上方的部分，计算曲面积分

$$\iint_\Sigma \frac{(x+1)^2(y-2z)}{\sqrt{5-x^2-3yz}}\mathrm{d}S$$

解： 设 Σ 的方程为 $z=z(x,y)$，则

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{2x}{y-2z}, \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{2y-z}{y-2z}$$

记 $D_{xy}=\left\{(x,y)|x^2+\frac{3}{4}y^2\leqslant 1\right\}$，有

$$\iint_{\Sigma}\frac{(x+1)^2(y-2z)}{\sqrt{5-x^2-3yz}}\mathrm{d}S=\iint_{D_{xy}}\frac{(x+1)^2(y-2z)}{\sqrt{4x^2+5y^2+5z^2-8yz}}\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$
$$=-\iint_{D_{xy}}(x+1)^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y=-\iint_{D_{xy}}x^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y-\iint_{D_{xy}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=-4\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^{\frac{2}{\sqrt{3}}\sqrt{1-x^2}}x^2\mathrm{d}y-\frac{2\pi}{\sqrt{3}}$$
$$=-\frac{8}{\sqrt{3}}\int_0^1 x^2\sqrt{1-x^2}\mathrm{d}x-\frac{2\pi}{\sqrt{3}}=-\frac{8}{\sqrt{3}}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 t\cos^2 t\mathrm{d}t-\frac{2\pi}{\sqrt{3}}$$
$$=-\frac{\pi}{2\sqrt{3}}-\frac{2\pi}{\sqrt{3}}=-\frac{5\pi}{2\sqrt{3}}$$

八、**(10 分)** 求幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n}{8^n(2n-1)}x^{3n-1}$ 的收敛域与和函数.

解：由于

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{(n+1)x^{3n+2}}{8^{n+1}(2n+1)}\frac{8^n(2n-1)}{nx^{3n-1}}\right|=\frac{|x|^3}{8}$$

即当 $x\in(-2,2)$ 时原级数收敛；当 $x=\pm 2$ 时发散，所以收敛域为 $(-2,2)$.

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{8^n(2n-1)}x^{3n-1}=\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{8^n}x^{3n-1}+\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{8^n(2n-1)}x^{3n-1}$$
$$=\frac{x^2}{2(8-x^3)}+\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{8^n(2n-1)}x^{3n-1}$$

当 $x\in[0,2)$ 时，令 $x^3=t^2$，记 $f(t)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{t^{2n-1}}{8^n(2n-1)}$，则 $f'(t)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{t^{2n-2}}{8^n}=\frac{1}{8+t^2}$，即 $f(t)=\frac{1}{4\sqrt{2}}\ln\frac{2\sqrt{2}+t}{2\sqrt{2}}$ 所以

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{8^n(2n-1)}x^{3n-1}=t^{\frac{1}{3}}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{t^{2n-1}}{8^n(2n-1)}=\frac{\sqrt{x}}{4\sqrt{2}}\ln\frac{2\sqrt{2}+x\sqrt{x}}{2\sqrt{2}-x\sqrt{x}}$$

当 $x\in(-2,0)$ 时，令 $x^3=-t^2$，记 $g(t)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n t^{2n-1}}{8^n(2n-1)}$，则 $g'(t)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n t^{2n-2}}{8^n}=-\frac{1}{8+t^2}$，即 $g(t)=-\frac{1}{2\sqrt{2}}\arctan\frac{t}{2\sqrt{2}}$ 所以

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{8^n(2n-1)}x^{3n-1}=-t^{\frac{1}{3}}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n t^{2n-1}}{8^n(2n-1)}=\frac{\sqrt{-x}}{2\sqrt{2}}\arctan\frac{-x\sqrt{-x}}{2\sqrt{2}}$$

综上

$$S(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2}{2\left(8-x^3\right)}+\dfrac{\sqrt{x}}{8\sqrt{2}}\ln\dfrac{2\sqrt{2}+x\sqrt{x}}{2\sqrt{2}-x\sqrt{x}}, & 0\leqslant x<2\\ \dfrac{x^2}{2\left(8-x^3\right)}+\dfrac{\sqrt{-x}}{4\sqrt{2}}\arctan\dfrac{-x\sqrt{-x}}{2\sqrt{2}}, & -2<x<0\end{cases}$$

第 5 章 2019 年天津市大学数学竞赛 (理工) 试题解析

题 号	一	二	三	四	五	六	七	八	九	十	十一	十二	总 分
满 分	15	15	6	6	6	6	7	7	8	8	8	8	100
得 分													

考生须知: 1. 本试卷满分为 100 分,全部考试时间总计 120 分钟;

2. 所有答案必须写在答题纸上,写在试题纸上或草稿纸上一律无效;

一、填空题 (本题 15 分, 每小题 3 分)

1、极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x}\displaystyle\int_0^{2x}(1+2t)^{\frac{1}{t}}\mathrm{d}t=$______.

解:

$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\int_0^{2x}(1+2t)^{\frac{1}{t}}\mathrm{d}t=\lim_{x\to 0}\frac{2(1+4x)^{\frac{1}{2x}}}{1}=2e^2$$

2、定积分 $\displaystyle\int_0^2\left[\tan(x-1)^3+\sqrt{2x-x^2}\right]\mathrm{d}x$______.

解:

$$\int_0^2\left[\tan(x-1)^3+\sqrt{2x-x^2}\right]\mathrm{d}x\xlongequal{t=x-1}\int_{-1}^1\left[\tan t^3+\sqrt{1-t^2}\right]\mathrm{d}t=\frac{\pi}{2}$$

3、函数 $y=f(x)$ 有连续导数, 且 $f'(x)>0$. 已知 $f(1)=4, f'(1)=3$, 则 $y=f(2e^x-1)$ 的反函数在 $y=4$ 的导数 $\left.\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}\right|_{y=4}=$______.

解: 当 $y=4$ 时 $x=0$, 则有

$$\left.\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}\right|_{y=4}=\frac{1}{\left.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{x=0}}=\left.\frac{1}{2e^xf'(2e^x-1)}\right|_{x=0}=\frac{1}{6}$$

4、二元函数 $z=f(x,y)$ 由方程 $y^2z+xe^{z-1}=2x$ 所确定, 则 $f(x,y)$ 在点 $(1,1)$ 处沿着方向性 $\vec{l}=(1,-1)$ 的方向导数 $\left.\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial l}\right|_{(1,1)}=$______.

解:

$$\left.\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}\right|_{(1,1)}=\frac{1}{2},\left.\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\right|_{0,1)}=-1$$

$$\left.\frac{\partial f(x,y)}{\partial l}\right|_{(0,1)}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}-1\cdot\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=\frac{3\sqrt{2}}{4}$$

5、已知平面 π 与平面 $\pi'2x-y-z+2=0$ 关于平面 $\pi'':x-2y+3z+1=0$ 对称, 则平面 π 的方程为______.

解: 设点 $P(x,y,z)\in\pi$ 的对称点是 $P(x',y',z')\in\pi'$, 则有 $\overrightarrow{PP'}=(x'-x,y'-y,z'-z)=$

$t(1,-2,3)$

$$x'=x+t, y'=y-2t, z'=z+3t$$

由 $P\left(x', y', z'\right) \in \pi'$ 可得

$$2x'-y'-z'+2=0$$

即 P, P' 的中点 $\left(\frac{x+x'}{2}, \frac{y+y'}{2}, \frac{z+z'}{2}\right)$ 在平面 π'' 上，则有

$$\left(x+x'\right)-2\left(y+y'\right)+3\left(z+z'\right)+2=0$$

由上式可得所求平面 π 方程为

$$13x-5y-10z+13=0$$

二、单选题 (本题 15 分，每小题 3 分)

1、函数 $f(x)$ 在 x_0 点的某领域内有定义，则极限 $\lim\limits_{h\to 0} \frac{f\left(x_0-\tanh\right)-f\left(x_0\right)}{h}=a$ 存在是函数 $f(x)$ 在 x_0 点可导的条件 (C)

A. 充分非必要条件　　B. 必要非充分条件

C. 充分必要条件　　D. 既非充分条件也非必要条件

2、$f(x)$ 是 $[0,+\infty)$ 上的单调函数，则数列极限 $\lim\limits_{n\to\infty} f(n)$ 存在时函数极限 $\lim\limits_{n\to\infty} f(n)$ 存在的什么条件 (C)

A. 充分非必要条件　　B. 必要非充分条件

C. 充分必要条件　　D. 既非充分条件也非必要条件

3、当 $x\to 1$ 时，$\sqrt[3]{4+\sqrt{15+x^2}}-2$ 是 $k(x-1)^\alpha$ 等价的无穷小，则常数 k 和 α 为 (A)

A. $k=\frac{1}{48}, \alpha=1$　　B. $k=\frac{1}{12}, \alpha=1$

C. $k=\frac{1}{48}, \alpha=\frac{1}{3}$　　D. $k=\frac{1}{12}, \alpha=\frac{1}{3}$

4、函数 $f(u,v)$ 具有连续偏导数，则函数

$$z(x,y)=f\left(2x-3y, x-y^2\right)+x$$

在 $(1,1)$ 点处取到极值的必要条件是 (C)

A. $f_1'(1,1)=0; f_2'(1,1)=0$

B. $f_1'(-1,0)=0; f_2'(-1,0)=0$

C. $f_1'(-1,0)=-2; f_2'(-1,0)=3$

D. $f_1'(-1,0)=2; f_2'(-1,0)=-3$

5、函数 $y=\begin{cases}(1+x)^{\frac{1}{x}} & x>0 \\ e & x=0\end{cases}$ 在区间 $[0,+\infty)$ 上是 (D)

A. 单调递增的无界函数　　B. 不是单调的函数

C. 单调递增的有界函数　　D. 单调递减的有界函数

三、(本题 6 分) 已知 $f(x,y)$ 在点 $(0,1)$ 是可微函数，极限

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(h,1+h)-f(-h,1+2h)}{h}=1$$

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(2h,1+h)-f(h,1-h)}{h}=8$$

求该函数在点 $(0,1)$ 处的微分 $\mathrm{d}f\,(x,y)|_{(0,1)}$.

解： 由题设易知

$$\lim_{h\to 0}\frac{f\,(h,1+h)-f\,(-h,1+2h)}{h}=\lim_{h\to 0}\left[\frac{f\,(h,1+h)-f\,(0,1)}{h}-\frac{f\,(-h,1+2h)-f\,(0,1)}{h}\right]$$
$$=\lim_{h\to 0}\left[\frac{f_x'\,(0,1)\,h+f_y'\,(0,1)\,h+o\,(h)}{h}-\frac{f_x'\,(0,1)\,(-h)+f_y'\,(0,1)\,(2h)+o\,(h)}{h}\right]$$
$$=2f_x'\,(0,1)-f_y'\,(0,1)=1$$

同理

$$\lim_{h\to 0}\frac{f\,(2h,1+h)-f\,(h,1-h)}{h}=f_x'\,(0,1)+2f_y'\,(0,1)=8$$

所以

$$f_x'(0,1)=2,\quad f_y'(0,1)=3$$

因此 $\mathrm{d}f\,(x,y)|_{(0,1)}=2\mathrm{d}x+3\mathrm{d}y$

四、(本题 6 分) 设有曲线段 $L:y=x^3(-a\leqslant x\leqslant a)$, D_n 是 xOy 平面上与 L 距离不超过 n 的点集，即

$$D_n=\left\{(x,y)\left(x-x'\right)^2+\left(y-y'\right)^2\leqslant n^2,\left(x',y'\right)\in L\right\}$$

D_n 的面积为 A_n，试求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{A_n}{n^2}$.

解： 设曲线段 L 的长度为 s，有

$$\pi n^2\leqslant A_n\leqslant\pi\,(n+s)^2\Rightarrow\pi\leqslant\frac{A_n}{n^2}\leqslant\pi\frac{(n+s)^2}{n^2}$$

所以由夹逼法则得 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{A_n}{n^2}=\pi$.

五、(本题 6 分) 求 $f(x)=x\arcsin 2x$ 的 6 阶导数 $f^{(6)}(0)$.

解： 由题意得

$$(\arcsin 2x)'=\frac{2}{\sqrt{1-4x^2}}=2\left[1+2x^2+6x^4+o\left(x^4\right)\right]$$

即

$$\arcsin 2x=2\left[x+\frac{2}{3}x^3+\frac{6}{5}x^5+o\left(x^5\right)\right]$$

则

$$f(x)=2\left[x^2+\frac{2}{3}x^4+\frac{6}{5}x^6+o\left(x^6\right)\right]$$

所以 $\dfrac{f^{(6)}(0)}{6!}=\dfrac{12}{5}$，也就是 $f^{(6)}(0)=\dfrac{12}{5}\cdot 6!$.

六、(本题 6 分) 利用极坐标变换计算二重积分

$$\iint_D \sin\frac{x+y}{x+2y}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

其中 D 是由直线 $x+2y=1$ 与 x 轴、y 轴所围成三角形区域.

解: 令 $x=\rho\cos\theta, y=\rho\sin\theta$ 得 $x+2y=1$，有 $\rho=\dfrac{1}{\cos\theta+2\sin\theta}$，即

$$\begin{aligned}
I&=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^{\frac{1}{\cos\theta+2\sin\theta}}\sin\frac{\cos\theta+\sin\theta}{\cos\theta+2\sin\theta}\rho\mathrm{d}\rho\\
&=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\frac{\cos\theta+\sin\theta}{\cos\theta+2\sin\theta}\frac{1}{(\cos\theta+2\sin\theta)^2}\mathrm{d}\theta\\
&=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\left(1-\frac{\sin\theta}{\cos\theta+2\sin\theta}\right)\mathrm{d}\left(\frac{\sin\theta}{\cos\theta+2\sin\theta}\right)\\
&=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{1}{2}}\sin(1-t)\,\mathrm{d}t=\frac{1}{2}\cos(1-t)\Big|_0^{\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}\left(\cos\frac{1}{2}-\cos 1\right)
\end{aligned}$$

七、(本题 7 分) L 是圆 $x^2+y^2=1$ 所围区域的正向边界，计算曲线积分

$$\oint_L\left|x+1-e^{y^2}\right|\mathrm{d}x+x^3\left(y^2-y^3\right)\mathrm{d}y$$

解: 设 $L':x+1-e^{y^2}=0$，则曲线 L,L' 的交点关于 x 轴对称，交点坐标为

$$P\left(x_0,-y_0\right),Q\left(x_0,y_0\right)\left(y_0>0\right)$$

曲线 L 被分割成两部分: $L_1:x\geqslant x_0, L_2:x\leqslant x_0$，于是

$$\begin{aligned}
I&=\int_{L_1}\left(x+1-e^{y^2}\right)\mathrm{d}x+x^3\left(y^2-y^3\right)\mathrm{d}y+\int_{L_2}-\left(x+1-e^{y^2}\right)\mathrm{d}x+x^3\left(y^2-y^3\right)\mathrm{d}y\\
&=\oint_{L_1+L_3}\left(x+1-e^{y^2}\right)\mathrm{d}x+x^3\left(y^2-y^3\right)\mathrm{d}y+\oint_{L_2+L_3}-\left(x+1-e^{y^2}\right)\mathrm{d}x+x^3\left(y^2-y^3\right)\mathrm{d}y
\end{aligned}$$

其中 L_3 是连接 Q,P 的直线段

$$L_3:x=x_0,y=y_0\to y=-y_0$$

于是由格林公式得

$$I=\iint_{D_1}\left[3x^2\left(y^2-y^3\right)+2ye^{y^2}\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\iint_{D_2}\left[3x^2\left(y^2-y^3\right)-2ye^{y^2}\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

由对称性得

$$
\begin{aligned}
I &= \iint_{D_1+D_2} 3x^2y^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 4\iint_{x\geqslant 0,y\geqslant 0} 3x^2y^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\
&= 12\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^1 \rho^5\cos^2\theta\sin^2\theta\mathrm{d}\rho = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2\theta\sin^2\theta\mathrm{d}\theta \\
&= 2\left(I_2 - I_4\right) = \frac{\pi}{8}
\end{aligned}
$$

八、(本题 7 分) 计算积分 $I = \iint_{\Sigma} z^{\frac{4}{3}}\mathrm{d}S$，其中曲面

$$
\Sigma : x^2+y^2+z^2 = 4
$$

解：

$$
\begin{aligned}
I &= \iint_{\Sigma} z^{\frac{4}{3}}\mathrm{d}S = 2\iint_{x^2+y^2+z^2=4} z^{\frac{4}{3}}\mathrm{d}S = 2\iint_{x^2+y^2\leqslant 4} z^{\frac{4}{3}}\cdot\frac{2}{z}\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\
&= 4\iint_{x^2+y^2\leqslant 4}\left(4-x^2-y^2\right)^{\frac{1}{6}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 4\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^2\left(4-\rho^2\right)^{\frac{1}{6}}\rho\mathrm{d}\rho \\
&= \frac{3\cdot 2^5}{7}\sqrt[3]{2}\pi
\end{aligned}
$$

九、(本题 8 分) 设 Ω 是椭球体 $x^2+2y^2+3z^2\leqslant 6$，Σ 是该椭球体表面的外侧，计算曲面积分

$$
\iint_{\Sigma} x\mathrm{d}y\mathrm{d}z + y\mathrm{d}z\mathrm{d}x + z^2\left[z+\ln\left(x^2+y^2+z^2\right)\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y
$$

解： 记

$$
I_1 = \iint_{\Sigma} x\mathrm{d}y\mathrm{d}z + y\mathrm{d}z\mathrm{d}x + z^3\mathrm{d}x\mathrm{d}y
$$

$$
I_2 = \iint_{\Sigma} z^2\ln\left(x^2+y^2+z^2\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y
$$

则由高斯定理得

$$
\begin{aligned}
I_1 &= \iiint_{\Omega}(2+3z^2)\mathrm{d}V = 2V + \int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} 3z^2A(z)\,\mathrm{d}z = 16\pi + \int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} 3z^2A(z)\,\mathrm{d}z \\
&= 16\pi + 2\int_0^{\sqrt{2}} 3z^2\pi\frac{6-3z^2}{\sqrt{2}}\mathrm{d}z = 16\pi + \frac{48}{5}\pi = \frac{128}{5}\pi
\end{aligned}
$$

$$
I_2 = \iint_{\Sigma} z^2\ln\left(x^2+y^2+z^2\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint_{\Sigma_{\pm}} + \iint_{\Sigma_{\mp}} = 0
$$

因此

$$
\iint_{\Sigma} x\mathrm{d}y\mathrm{d}z + y\mathrm{d}z\mathrm{d}x + z^2\left[z+\ln\left(x^2+y^2+z^2\right)\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \frac{128}{5}\pi
$$

十、(本题 8 分) 设 $f(x)$ 是 $T(T>0)$ 为周期的连续函数，并且 $\int_0^T f(x)\mathrm{d}x = k$，若

$$\lim_{R\to+\infty}\frac{1}{R^\lambda}\iiint_{x^2+y^2+z^2\leqslant R^2} f\left[\left(x^2+y^2+z^2\right)^{\frac{3}{2}}\right]\mathrm{d}V = C \neq 0$$

求常数 λ 与 C.

解：

$$\iiint_{x^2+y^2+z^2\leqslant R^3} f\left[\left(x^2+y^2+z^2\right)^{\frac{3}{2}}\right]\mathrm{d}V = \int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^R f\left(r^3\right)r^2\sin\varphi\mathrm{d}r$$
$$= 4\pi\int_0^R f\left(r^3\right)r^2\mathrm{d}r = \frac{4\pi}{3}\int_0^R f\left(r^3\right)\mathrm{d}r^3 = \frac{4\pi}{3}\int_0^{R^3} f(t)\,\mathrm{d}t$$

设 $nT \leqslant R^3 < (n+1)T$，则

$$\int_0^{R^3} f(t)\mathrm{d}t = \int_0^{nT} f(t)\mathrm{d}t + \int_{nT}^{R^3} f(t)\mathrm{d}t = nk + A(R)$$

由于 $f(x)$ 连续，即 $A(R)$ 有界，则

$$\lim_{R\to+\infty}\frac{1}{R^\lambda}\iiint_{x^2+y^2+z^2\leqslant R^2} f\left[\left(x^2+y^2+z^2\right)^{\frac{3}{2}}\right]\mathrm{d}V = \lim_{R\to+\infty}\frac{4\pi}{3}\frac{nk+A(R)}{R^\lambda}$$

易知 $\lambda = 3$ 且

$$C = \lim_{R\to+\infty}\frac{4\pi}{3}\frac{nk+A(R)}{R^3} = \frac{4k\pi}{3T}$$

十一、(本题 8 分) 直线 $L:\frac{x-1}{2} = y = \frac{z+1}{2}$ 绕直线 $L':x=-y=z$ 旋转得到旋转曲面 Σ，求旋转曲面 Σ 与平面 $\pi_1: x-y+z=0$ 以及 $\pi_2: x-y+z=3$ 所围成立体的体积.

解： 平面 π_1,π_2 均垂直于转轴 L'，可通过作垂直于 L' 的平面去截 Σ 的方法计算体积. 已知平面

$$\pi_s: x-y+z = \sqrt{3}s$$

垂直于旋转轴 L' 且与坐标原点距离为 s，设 $r(s)$ 平面 π 与旋转曲面 Σ 相交所得截痕圆周的半径，坐标原点与平面 π_1,π_2 的距离分别为 $s_1=0, s_2=\sqrt{3}$，所以所求体积为

$$V = \int_0^{\sqrt{3}}\pi r^2(s)\mathrm{d}s$$

平面 π_s 与直线 L 的交点为

$$x = \frac{2s}{\sqrt{3}}+1, y = \frac{s}{\sqrt{3}}, z = \frac{2s}{\sqrt{3}}-1$$

则半径 $r(s)$ 即为该交点到旋转轴 L' 的距离. 因平面 π_s 与坐标原点的距离为 s，所以

$$r^2(s) = x^2 + y^2 + z^2 - s^2 = 2s^2 + 2$$

于是可得体积为

$$V = \int_0^{\sqrt{3}} \pi r^2(s)\mathrm{d}s = \int_0^{\sqrt{3}} \pi\left(2s^2+2\right)\mathrm{d}s = 4\sqrt{3}\pi$$

十二、(本题 8 分) 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上具有 n 阶连续导数，如果

$$\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x = \int_0^1 xf(x)\mathrm{d}x = \cdots = \int_0^1 x^n f(x)\mathrm{d}x = 0$$

证明：存在 $\xi \in (0,1)$，使得 $f^{(n)}(\xi) = 0$.

证明：先证明函数 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 内至少有 $n+1$ 个不同的零点：若 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 内不同零点的个数少于 $n+1$ 个，则函数 $f(ax)$ 在 $(0,1)$ 内的符号改变次数不超过 n 次，不妨设 $f(ax)$ 在 $x_1, x_2, \cdots, x_k$ 处改变符号，其中

$$0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_k < 1, k \leqslant n$$

由此可知，函数 $(x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_k)f(x)$ 在区间 $(0,1)$ 上不变号，

$$\int_0^1 (x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_k)f(x)\mathrm{d}x \neq 0$$

这显然与条件矛盾. 所以 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 内至少有 $n+1$ 个不同的零点. 设 $f(x_1) = f(x_2) = \cdots = f(x_{n+1}) = 0$, $0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n+1} < 1$. 由罗尔中值定理，存在 $\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n$，其中 $x_k < \xi_k < x_{k+1}, (k = 1, 2\cdots, n)$，使得

$$f'(\xi_1) = f'(\xi_2) = \cdots = f'(\xi_n) = 0$$

即 $f'(x)$ 在区间 $(0,1)$ 内至少有 n 个不同的零点，如此递推，得到 $f^{(n)}(x)$ 在区间 $(0,1)$ 内至少有 1 个零点.

第 6 章 第十届全国大学生数学竞赛模拟赛题

6.1 模拟赛一

一、填空题 (本题满分 42 分，每题 7 分)

1. 级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n 4^{2n}\left(\frac{e^x-1}{e^x+1}\right)^{4n+1}$ 的收敛区间是$\underline{-\ln 3<x<\ln 3}$.

2. 设 $y=y(x)$ 由方程 $2x-\int_1^{x+y}e^{-t^2}\mathrm{d}t=xy$ 确定, 则 $y'(0)=\underline{e-1}$.

3. 将 $\int_0^2\mathrm{d}x\int_x^{\sqrt{3}x}f\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)\mathrm{d}y$ 化成极坐标形式的二次积分为$\underline{\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}\mathrm{d}\theta\int_0^{2\sec\theta}f(r)r\mathrm{d}r}$.

4. 不定积分 $\int\frac{(x\cos^3x-\sin x)e^{\sin x}}{\cos^2x}\mathrm{d}x=\underline{xe^{\sin x}-\sec xe^{\sin x}+C}$.

5. 设 $a_n>0(n=1,2,\cdots)$, $\sum_{n=1}^{\infty}a_n=1$, $A_n=\sum_{k=1}^{n}a_k$，求极限 $\lim_{n\to+\infty}\frac{e^{A_n}-e^{A_{n-1}}}{A_n^e-A_{n-1}^e}=\underline{1}$.

6. 计算曲线积分 $\oint_c\left(x+\sqrt{2}y^3z\right)\mathrm{d}x+\left(x-\sqrt{2}y\right)\mathrm{d}y+(x+y+z)\mathrm{d}z=\underline{\frac{1+2\sqrt{2}}{4}\pi}$，其中 c 为 $x^2+2y^2=1$ 与 $x^2+2y^2=-z$ 的交线.

二、解答题 (本题满分 14 分) 求下列定积分：$I=\int_0^1\int_0^1\frac{\sin^{-1}\left(\sqrt{1-x}\sqrt{y}\right)}{\sqrt{1-y}\sqrt{1-y+xy}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$

解：令 $1-x=u^2$，$y=x^2$，可得到：

$$
\begin{aligned}
I&=4\int_0^1\int_0^1\frac{uv\sin^{-1}(uv)}{\sqrt{1-v^2}\sqrt{1-u^2v^2}}\mathrm{d}u\mathrm{d}v\\
&=4\int_0^1\frac{\mathrm{d}v}{\sqrt{1-v^2}}\int_0^1\frac{uv\arcsin(uv)}{\sqrt{1-u^2v^2}}\mathrm{d}u\\
&=4\int_0^1\frac{\mathrm{d}v}{v\sqrt{1-v^2}}\int_0^v\frac{\arcsin u}{\sqrt{1-u}}\mathrm{d}u\\
&=4\int_0^1\frac{v-\sqrt{1-v^2}\arcsin v}{v\sqrt{1-v^2}}\mathrm{d}v\\
&=4\int_0^1\frac{\mathrm{d}v}{\sqrt{1-v^2}}-4\int_0^1\frac{\arcsin v}{v}\mathrm{d}v\\
&=2\pi+4\int_0^1\frac{\ln v}{\sqrt{1-v^2}}\mathrm{d}v
\end{aligned}
$$

这里在对 $\int_0^1\frac{\ln x}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x$ 进行计算，三角变换 $x=\sin\theta$ 得到：原积分得 $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\sin x\mathrm{d}x$。首先说明这是一个著名的广义积分叫 Euler。先证明瑕积分收敛，其次用变量代换计算，而计算这个瑕积分是有一定技巧性的，因为从 $y=\sin x$ 与 $y=\cos x$ 在区间 $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ 面积相

等，直接说根据对称性可知。变量代换$x=\frac{\pi}{2}-t$，可得：

$$
\begin{aligned}
J=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\sin x\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\cos x\mathrm{d}x&=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\ln\sin x+\ln\cos x)\,\mathrm{d}x\\
&=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\ln 2\sin x-\ln 2)\mathrm{d}x
\end{aligned}
$$

$$
令t=2x,J=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\sin t\mathrm{d}t-\frac{\pi}{4}\ln 2\Rightarrow J=\frac{1}{2}J-\frac{\pi}{4}\ln 2\Rightarrow J=-\frac{\pi}{2}\ln 2
$$

所以就有：

$$
I=\int_0^1\int_0^1\frac{\sin^{-1}\left(\sqrt{1-x}\sqrt{y}\right)}{\sqrt{1-y}\sqrt{1-y+xy}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=2\pi\,(1-\ln 2)
$$

三、解答题 (本题满分 14 分) 已知 $F(x,y)=f(x)g(y)=s(\sqrt{x^2+y^2})$，其中 f,g,s 都是连续可微函数，试建立 $f(x)$ 与 $g(y)$ 所满足的微分方程, 并证明：$F(x,y)=\bar{c}e^{c(x^2+y^2)}$，其中 $\bar{c},c$ 为任意常数

解： 由题意易知：

$$
f'(x)g(y)=s'(\sqrt{x^2+y^2})\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}f(x)g'(y)=s'(\sqrt{x^2+y^2})\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}
$$

$$
\Rightarrow yf'(x)g(y)=xf(x)g'(y)
$$

$$
\Rightarrow\frac{f'(x)}{xf(x)}=\frac{g'(y)}{yg(y)}=c_1
$$

其中 c_1 为某常数。因此 $\int\frac{f'(x)}{f(x)}\mathrm{d}x=\int c_1x\mathrm{d}x$，可得到：

$$
\Rightarrow f(x)=Ae^{\frac{1}{2}c_1x^2},g(y)=Be^{\frac{1}{2}y^2}
$$

所以就有

$$
F(x,y)=ABe^{\frac{1}{2}c_1(x^2+y^2)}=\bar{c}e^{c(x^2+y^2)}
$$

四、解答题 (本题满分 15 分) 设 $a>0$，判别级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a^{\frac{n(n+1)}{2}}}{(1+a)(1+a^2)\cdots(1+a^n)}$ 的敛散性.

解： 令级数一般项 b_n，显然：

$$
\lim_{n\to\infty}\frac{b_{n+1}}{b_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{a^{\frac{(n+1)(n+2)}{2}}}{(1+a)(1+a^2)\cdots(1+a^n)(1+a^{n+1})}}{\frac{a^{\frac{n(n+1)}{2}}}{(1+a)(1+a^2)\cdots(1+a^n)}}=\lim_{n\to\infty}\frac{a^{n+1}}{1+a^{n+1}}=\begin{cases}0,a<1\\ \frac{1}{2},a=1\\ 1,a>1\end{cases}
$$

由达朗贝尔判别法知道，当 $a\leqslant 1$ 时级数收敛。

考虑 $a>1$

$$b_n=\frac{a^{\frac{n(n+1)}{2}}}{(1+a)(1+a^2)\cdots(1+a^n)}=\frac{1}{(1+a_1)(1+a_1{}^2)\cdots(1+a_1{}^n)}(0<a_1=\frac{1}{a}<1)$$

令 $c_n=(1+a_1)(1+a_1{}^2)\cdots(1+a_1{}^n)$，显然 $\{c_n\}$ 单增，下证其有界。由 $x>0,\mathrm{e}^x>1+x$ 可知

$$c_n=(1+a_1)(1+a_1{}^2)\cdots(1+a_1{}^n)<\mathrm{e}^{a_1}\mathrm{e}^{a_1{}^2}\cdots\mathrm{e}^{a_1{}^n}=\mathrm{e}^{\frac{a_1-a_1{}^{n+1}}{1-a_1}}<\mathrm{e}^{\frac{a_1}{1-a_1}}$$

从而 $\{c_n\}$ 单调有界则其收敛，且其极限介于 1 与 $e^{\frac{a_1}{1-a_1}}$，从而 $\lim\limits_{n\to\infty}b_n$ 存在，其值大于 0，从而原级数发散。

综上所述: $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{a^{\frac{n(n+1)}{2}}}{(1+a)(1+a^2)\cdots(1+a^n)}$ 当 $0<a\leqslant 1$ 时收敛，当 $a>1$ 时发散.

五、解答题 (本题满分 15 分) 计算 $I=\iint\limits_{\Sigma}(x-a)yz\mathrm{d}x\mathrm{d}y+x^2\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y^2\mathrm{d}z\mathrm{d}x$，其中 Σ 是 $z-c=\sqrt{R^2-(x-a)^2-(y-b)^2}$ 的上侧.

解: 记 $\Sigma_1:(x-a)^2+(y-b)^2\leqslant R^2,z=c$，取下侧，则 Σ 与 Σ_1 构成了外侧的封闭的半球面，由高斯公式:

$$I=\iiint\limits_{(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2\leqslant R^2,z\geqslant c}[2x+2y+y(x-a)]\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

$$-\iint\limits_{\Sigma_1}x^2\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y^2\mathrm{d}z\mathrm{d}x+(x-a)yz\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

对第一项的三重积分作平移变换:$u=x-a,v=y-b,w=z-c$，把原点平移到球心上，其变换的雅克比行列式 $\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)}=1$，所以:

$$\iiint\limits_{(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2\leqslant R^2,z\geqslant c}[2x+2y+y(x-a)]\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

$$=\iiint\limits_{u^2+v^2+w^2\leqslant R^2,w\geqslant 0}[2(u+a+v+b)+u(v+b)]\mathrm{d}u\mathrm{d}v\mathrm{d}w$$

$$=0+\iiint\limits_{u^2+v^2+w^2\leqslant R^2,w\geqslant 0}2(a+b)\mathrm{d}u\mathrm{d}v\mathrm{d}w=2(a+b)\times\frac{1}{2}\times\frac{4}{3}\pi R^3=\frac{4}{3}\pi(a+b)R^3$$

其中利用了对称性。第二项积分为:

$$\iint\limits_{\Sigma_1}x^2\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y^2\mathrm{d}z\mathrm{d}x+(x-a)yz\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint\limits_{\Sigma_1}(x-a)yz\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$= \iint\limits_{(x-a)^2+(y-b)^2\leqslant R^2} (x-a)yc\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint\limits_{u^2+v^2\leqslant R^2} u(v+b)c\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 0$$

其中利用了平移变换和对称性,所以得到:

$$I = \iint\limits_{\Sigma} (x-a)yz\mathrm{d}x\mathrm{d}y + x^2\mathrm{d}y\mathrm{d}z + y^2\mathrm{d}z\mathrm{d}x = \frac{4}{3}\pi(a+b)R^3$$

6.2 模拟赛二

一、填空题 (本题满分 42 分,每题 7 分)

1. $F(x, x+y, x+y+z) = 0$,F 可微,那么 $\frac{\partial F}{\partial y} = \underline{F_2' + F_3'}$.
2. 已知: $y = x^2 \sin x$, 求 $y^{(2013)}(0) = \underline{= -4050156}$.
3. $\{a_n\}, \{b_n\}$ 为正数列, $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n)^n = a > 0$, $\lim\limits_{n\to\infty}(b_n)^n = b > 0$, 又设 p, q 为非负数,且 $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, 求 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{p}a_n + \frac{1}{q}b_n\right)^n = \underline{a^{\frac{1}{p}} \cdot b^{\frac{1}{q}}}$.
4. $\int_0^{\infty} \ln\left(\frac{4}{x^2}+1\right)\ln\left(\frac{9}{x^2}+1\right)\mathrm{d}x = \underline{2\pi(5ln5 - 3ln3 - 2ln2)}$.
5. 微分方程 $y\mathrm{d}x + \sqrt{1+x^2}\mathrm{d}y = 0$ 的通解是 $y = \underline{\frac{c}{x+\sqrt{x^2+1}}}$.
6. 直线 $\begin{cases} x = 2z, \\ y = 1 \end{cases}$ 绕 z 轴旋转一周的方程为:$\underline{x^2 + y^2 - 4z^2 = 1}$.

二、解答题 (本题满分 14 分) 设函数 $f(x) = |x|$.

(1) 求 $f(x)$ 在 $[-\pi, \pi]$ 上的 Fourier 展开式,并写出和函数;

(2) 计算 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^4}$ 和 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4}$.

解: (1) 显然 $f(x) = |x|$ 在 $[-\pi, \pi]$ 上为偶函数,故 $b_n = 0$,就有:

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}\int_0^{\pi} x\mathrm{d}x = \pi$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}\int_0^{\pi} x\cos nx\mathrm{d}x = \frac{2}{\pi n^2}\left[(-1)^n - 1\right]$$

$$f(x) = |x| = \frac{\pi}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{\pi n^2}\left[(-1)^n - 1\right]\cos nx = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}\cos(2n-1)x$$

(2) 由于 *Parseval* 等式,若 $f(x)$ 的 Fourier 级数展开在 $[-\pi, \pi]$ 一致收敛 $f(x)$,则有:

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2 + b_n^2) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)\mathrm{d}x$$

将$f(x)=|x|$代入得到：$\dfrac{\pi^2}{2}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{4}{\pi^2n^4}\left[(-1)^n-1\right]^2=\dfrac{\pi^2}{2}+\dfrac{16}{\pi^2}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{(2n-1)^4}=\dfrac{2\pi^2}{3}$

$$\Rightarrow\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^4}=\frac{\pi^4}{96}$$

又由 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^4}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{(2n-1)^4}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{(2n)^4}=\dfrac{\pi^4}{96}+\dfrac{1}{16}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^4}$，得到 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^4}=\dfrac{\pi^4}{90}$

三、解答题 (本题满分 14 分) 设半径为 R 的球面上均匀分布着某种质量，求其产生的引力场。

解： 取曲面面积微元 $d\sigma$，并设 $M(x,y,z)$ 是其球面上一点，则该球面对 P 的 l 方向引力为 $\overline{F}=\left(F_x,F_y,F_z\right)$，由对称性及球面均匀可知，$F_x=F_y=0$.

利用球面坐标，有：

$$\begin{cases} x=R\sin\theta\cos\varphi \\ y=R\sin\theta\sin\varphi \\ z=R\cos\theta \end{cases}(0\le\theta\le\pi,0\le\varphi\le2\pi),d\sigma=R^2\sin\theta\mathrm{d}\theta d\varphi$$

$$\begin{aligned}
F&=\iint\limits_S\frac{G(z-l)}{\left[x^2+y^2+(z-a)^2\right]^{\frac{3}{2}}}d\sigma=\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\frac{R\cos\theta-l}{\left(R^2+a^2-2aR\cos\theta\right)^{\frac{3}{2}}}R^2\sin\theta\mathrm{d}\theta d\varphi\\
&=2\pi GR^2\int_0^{\pi}\frac{(R\cos\theta-l)\sin\theta}{\left(R^2+l^2-2Rl\cos\theta\right)^{\frac{3}{2}}}\mathrm{d}\theta\left(令t=\sqrt{R^2+l^2-2Rl\cos\theta}\right)\\
&=G\frac{\pi R}{l^2}\int_{|R-l|}^{R-l}\left(\frac{R^2-l^2}{t^2}-1\right)\mathrm{d}t=\frac{1}{l^2}\left(\frac{R-l}{|R-L|}-1\right)\\
&=\begin{cases}-G\dfrac{4\pi R^2}{l^2} & R<l\\ 0 & R>l\end{cases}\quad(其中G为引力系数)
\end{aligned}$$

四、解答题 (本题满分 15 分) 设正值函数 $f\in C[a,b]$，定义 $x_n=\int_a^b f^n(x)\,\mathrm{d}x\ (n\in N)$. 证明：

(1) 对任意 $n\in N$ 成立 $(x_{n+1})^2\leqslant x_nx_{n+2}$;

(2) 数列 $\left\{\dfrac{x_{n+1}}{x_n}\right\}$ 收敛，且有 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_{n+1}}{x_n}=\max\limits_{a\leqslant x\leqslant b}\{f(x)\}$.

证明： (1) 要证 $\left[\int_a^b f^{n+1}(x)\,\mathrm{d}x\right]^2\leqslant\left[\int_a^b f^n(x)\,\mathrm{d}x\right]\left[\int_a^b f^{n+2}(x)\,\mathrm{d}x\right]$，由 Cauchy-Schwarz 不等式

$$\left[\int_a^b f^{n+1}(x)\,\mathrm{d}x\right]^2=\left[\int_a^b f^{\frac{n}{2}}(x)\,f^{\frac{n+2}{2}}\mathrm{d}x\right]^2\leqslant\left[\int_a^b f^n(x)\,\mathrm{d}x\right]\left[\int_a^b f^{n+2}(x)\,\mathrm{d}x\right]$$

所以对于 $\forall n\in N$，显然有 $(x_{n+1})^2\le x_nx_{n+2}$ 成立

(2) 由题意知，$x_n=\int_a^b f^n(x)\,\mathrm{d}x$ 恒为正，且依据 (1) 知可得：$\dfrac{x_{n+1}}{x_n}\leqslant\dfrac{x_{n+2}}{x_{n+!}}$.

从而对 $\forall n\in N$，有 $\left\{\frac{x_{n+1}}{x_n}\right\}$ 单调递增，设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有最大值 $M=\max\limits_{a\leqslant x\leqslant b}\{f(x)\}$

则有：$\frac{x_{n+1}}{x_n}=\frac{\int_a^b f^{n+1}(x)\,\mathrm{d}x}{\int_a^b f^n(x)\,\mathrm{d}x}\leqslant\frac{M\int_a^b f^n(x)\,\mathrm{d}x}{\int_a^b f^n(x)\,\mathrm{d}x}=M$，即 $\left\{\frac{x_{n+1}}{x_n}\right\}$ 有上界.

所以根据单调有界准则可知 $\left\{\frac{x_{n+1}}{x_n}\right\}$ 收敛，且由 $stolz$ 定理得：

$$\lim_{n\to\infty}\left\{\frac{x_{n+1}}{x_n}\right\}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{x_n}=\max_{a\leqslant x\leqslant b}\{f(x)\}$$

五、解答题 (本题满分 15 分) 设函数 $f(x)$ 在 [0,1] 上可积，且在 $x=1$ 处连续，证明：

(1). $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^1 x^n f(x)\mathrm{d}x=0$；　(2). $\lim\limits_{n\to\infty}(n+1)\int_0^1 x^n f(x)\mathrm{d}x=f(1)$.

证明：(1) 由 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 可积，则必定可界，设 $M=\max\limits_{a\leqslant x\leqslant b}|f(x)|$，则有：

$$\left|\int_0^1 x^n f(x)\,\mathrm{d}x\right|\leqslant\int_0^1 x^n|f(x)|\mathrm{d}x\leqslant M\int_0^1 x^n\mathrm{d}x=\frac{M}{n+1}\to 0\,(n\to\infty)$$

所以 $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^1 x^n f(x)\,\mathrm{d}x=0$

(2) 易知 $(n+1)\int_0^1 x^n f(x)\,\mathrm{d}x=(n+1)\left[\int_0^{1-\frac{1}{\sqrt{n}}} x^n f(x)\,\mathrm{d}x+\int_{1-\frac{1}{\sqrt{n}}}^1 x^n f(x)\,\mathrm{d}x\right]$

由 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 可积，则必定可界，记 $M=\max\limits_{a\leqslant x\leqslant b}|f(x)|$，就有：

$$\lim_{n\to\infty}(n+1)\int_0^{1-\frac{1}{\sqrt{n}}} x^n f(x)\,\mathrm{d}x\leqslant M\lim_{n\to\infty}(n+1)\int_0^{1-\frac{1}{\sqrt{n}}} x^n\mathrm{d}x=M\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^{n+!}\to 0$$

$$\lim_{n\to\infty}(n+1)\int_{1-\frac{1}{\sqrt{n}}}^1 x^n f(x)\,\mathrm{d}x=\lim_{n\to\infty}(n+1)f(\xi_n)\int_{1-\frac{1}{\sqrt{n}}}^1 x^n\mathrm{d}x=f(\xi_n)\left[1-\left(1-\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^{n+1}\right]$$

其中 $\left(1-\frac{1}{\sqrt{n}}<\xi_n<1\right)$，且有：

$$\lim_{n\to\infty}(n+1)f(\xi_n)\left[1-\left(1-\frac{1}{n^2}\right)^{n+1}\right]=f(1)\lim_{n\to\infty}\left[1-\left(1-\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^{n+1}\right]=f(1)$$

所以 $\lim\limits_{n\to\infty}(n+1)\int_0^1 x^n f(x)\,\mathrm{d}x=0+f(1)=f(1)$，得证

6.3 模拟赛三

一、填空题 (本题满分 42 分，每题 7 分)

1. 计算积分 $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos(2nx)\ln\cos x\mathrm{d}x=\underline{\frac{(-1)^{n-1}\pi}{4n}}$.
2. 求 $\iint_D \mathrm{sgn}(xy-1)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\underline{2-4\ln 2}$，其中 $D=\{(x,y)\,|0\le x\le 2,0\le y\le 2\}$
3. 设 $a_0=1$，$a_1=\frac{2}{3}$，满足 $3(n+1)a_{n+1}=3(n-1)a_{n-1}+2a_n$，求 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n\sqrt[3]{n^2}=\underline{\frac{1}{\Gamma(\frac{1}{3})}\cdot\sqrt[3]{2}}$.

4. 求直线 $\begin{cases} y = x \\ z = 0 \end{cases}$ 绕直线 $x-1=y-1=z-1$ 旋转一周所得旋转面的方程 $\underline{x^2+y^2+z^2-2xy-2yz-2xz=0}$.

5. 求 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{2^n n(n+1)}\sum\limits_{k=1}^{n}C_n^k k^2 = \underline{\dfrac{1}{4}}$.

6. 求微分方程的通解 $y'+\dfrac{y}{x}=y^2-\dfrac{1}{x^2}=\underline{\dfrac{x}{xy-1}=\dfrac{C}{x}-\dfrac{x}{2}}$.

二、解答题 (本题满分 14 分) 求极限

$$\lim_{x\to0}\frac{\displaystyle\int_0^x\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n t^{2n+1}}{2^n(2n+1)!}\mathrm{d}t-\frac{x^2}{2}}{x^3\left(\sqrt[3]{x+1}-e^x\right)}$$

解: 注意到

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n t^{2n+1}}{2^n(2n+1)!}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}\left(\frac{t}{\sqrt{2}}\right)^{2n+1}=\sqrt{2}\sin\frac{t}{\sqrt{2}}$$

$$x^3\left(\sqrt[3]{x+1}-e^x\right)=-\frac{2}{3}x^4+o\left(x^4\right)$$

所以就有

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to0}\frac{\displaystyle\int_0^x\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n t^{2n+1}}{2^n(2n+1)!}\mathrm{d}t-\frac{x^2}{2}}{x^3\left(\sqrt[3]{x+1}-e^x\right)}&=\lim_{x\to0}\frac{\displaystyle\int_0^x\sqrt{2}\sin\frac{t}{\sqrt{2}}\mathrm{d}t-\frac{x^2}{2}}{-\dfrac{2}{3}x^4}\\
&=\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{2}\sin\dfrac{x}{\sqrt{2}}-x}{-\dfrac{8}{3}x^3}\\
&=\lim_{x\to0}\frac{\cos\dfrac{x}{\sqrt{2}}-1}{-8x^2}\\
&=\frac{1}{32}
\end{aligned}$$

三、解答题 (本题满分 14 分) 设 $x\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$，证明：

$$\frac{1}{\sin^2 x}-\frac{1}{x^2}<1-\frac{4}{\pi^2}$$

证明: 设 $f(x)=\dfrac{1}{\sin^2 x}-\dfrac{1}{x^2}-(1-\dfrac{4}{\pi^2}), x\in(0,\dfrac{\pi}{2})$，就有：

$$\Rightarrow f'(x)=\frac{2}{\sin^2 x}(\frac{\sin^3 x}{x^3}-\cos x)$$

$$\Rightarrow \ln f'(x) = \ln(2\csc^2 x) + 3(\ln\frac{\sin x}{x} - \frac{1}{3}\ln\cos x)$$

考虑 $g(x) = \ln\frac{\sin x}{x} - \frac{1}{3}\ln\cos x, x \in (0, \frac{\pi}{2})$，就有：

$$g'(x) = -\frac{1}{x\tan x}(\tan x - x - \frac{1}{3}x\tan^2 x)$$

再考虑 $h(x) = \tan x - x - \frac{1}{3}x\tan^2 x, x \in (0, \frac{\pi}{2})$，就有：

$$h'(x) = \frac{2}{3}\tan x\sec^2 x(\sin x\cos x - x) < 0,\ x \in (0, \frac{\pi}{2})$$

则有 $h(x) < h(0) = 0, g'(x) > 0, g(x) > g(0) = 0, f'(x) > 0, f(x) < f(\frac{\pi}{2}) = 0$, 即证.

四、解答题 (本题满分 15 分设 f 是 $[-1,1]$ 上的非负连续函数，满足

$$\int_{-1}^{1} xf(x)\,\mathrm{d}x = 0, \int_{-1}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x = 1$$

证明

$$\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} |x+y| f(x) f(y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y \geqslant \int_{-1}^{1} |x| f(x)\,\mathrm{d}x$$

证明： 令 $g(x) = f(-x), x \in [0,1]$，则有

$$\int_0^1 xf(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 xg(x)\,\mathrm{d}x, \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x + \int_0^1 g(x)\,\mathrm{d}x = 1$$

$$\begin{aligned}
\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} |x+y| f(x) f(y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y &= \int_0^1\int_0^1 |x+y| f(x) f(y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y + \int_0^1\int_0^1 |x+y| g(x) g(y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\
&\quad + 2\int_0^1\int_0^1 |x-y| f(x) g(y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\
&\geqslant \int_0^1\int_0^1 |x+y| f(x) f(y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y + \int_0^1\int_0^1 |x+y| g(x) g(y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\
&= 2\int_0^1 xf(x)\,\mathrm{d}x\int_0^1 f(y)\,\mathrm{d}y + 2\int_0^1 xg(x)\,\mathrm{d}x\int_0^1 g(y)\,\mathrm{d}y \\
&= 2\int_0^1 xf(x)\,\mathrm{d}x\left(\int_0^1 f(y)\,\mathrm{d}y + \int_0^1 g(y)\,\mathrm{d}y\right) \\
&= 2\int_0^1 xf(x)\,\mathrm{d}x \\
&= \int_{-1}^{1} |x| f(x)\,\mathrm{d}x
\end{aligned}$$

即证

五、解答题 (本题满分 15 分) 设 $f \in (0,+\infty)$ 上的连续函数 $f(x)$ 满足，对 $\forall x > 0$, $\lim\limits_{n\to+\infty} f(nx) = 0$，证明：$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$.

证明： 假设存在 $\varepsilon > 0$，$\lim\limits_{k\to\infty} |f(x)| \geqslant 3\varepsilon$，取 $[a_0, b_0] \subset (0,\infty)$. 对 $K_0 > \frac{a_0}{b_0 - a_0}$，有 $kb_0 > (k+1)a_0 (\forall k > K_0)$，此时 (ka_0, kb_0) 与 $((k+1)a_0, (k+1)b_0)$ 相交. 因此 $\bigcup\limits_{k=K_0}^{\infty}(ka_0, kb_0) = (K_0 a_0, +\infty)$.

于是存在 $k_1 \geqslant k_0$ 与 $x_1 \in (k_1 a_0, k_1 b_0)$, 使得 $|f(x_1)| \geqslant 2\varepsilon$. 由于 $f(x)$ 连续,即存在 $\delta_1 \in (0,1)$, 使得 $[\alpha_1, \beta_1] \equiv \left[x_{n_1} - \delta_1, x_{n_1} - \delta_1\right] \subset (k_1 a_0, k_1 b_0)\,|, |f(x)| \geqslant \varepsilon$.

以此类推就有,$k_n > k_{n-1}, [a_k, b_k] \subset [a_{k-1}, b_{k-1}]\,(n = 2, 3...)$, 满足 $0 < b_k - a_k \leq \dfrac{2}{k_n}$, 使得

$$|f(x)| \geqslant \varepsilon, \forall x \in [k_n a_n, k_n b_n]$$

由闭区间套定理,区间列 $[a_n, b_n]$ 有唯一的公共点 $\xi > 0$. 因 $k_n\xi \in [k_n a_n, k_n b_n]$, 所以

$$|f(k_n\xi)| \geqslant \varepsilon, \forall n \geqslant 1$$

所以这与 $\lim\limits_{n\to+\infty} f(n\xi) = 0$ 矛盾,即 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$ 得证.

第 7 章 历年名校考研真题解析

7.1 华中科技大学 2012 年数学分析试题解析

华中科技大学 2012 年数学分析考研真题, 更侧重于数分下册计算题的考察, 以及多元函数等知识点, 难度非常一般, 主要还是基础知识要掌握牢固。

一.(15 分) 计算下列两小问

(a) 求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{\sin x}\right)$.

(b) 设$x_1=\sqrt{2}, x_{n+1}=\sqrt{2x_n}$，证明 $\{x_n\}$ 收敛且求极限.

解: (a) 易知可得:

$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{\sin x}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x-x}{x^2\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{x-\frac{x^3}{6}+o\left(x^3\right)-x}{x^3}=-\frac{1}{6}$$

(b) 归纳法易证: $x_n=\sqrt[2^n]{2^{2^n-1}}$ ，显然有 $\sqrt[2^n]{2}=1$ ，因此 $\{x_n\}$ 收敛且极限为 2.

二.(15 分) 求下列曲线在第一象限围成的图像的面积:

$$y=x^2, 2y=x^2, xy=1, xy=2$$

解: 设区域 $\Omega=\left\{(x,y)\,|x^2\le 2y\le 2x^2, 1\le xy\le 2, x>0, y>0\right\}$ ，那么在变换 $u=\frac{x^2}{y}$, $v=xy$ 下，区域 Ω 被一一对应为:

$$\Omega_1=\{(u,v)\,|1\le u\le 2, 1\le v\le 2\}$$

此时有 $x=\sqrt[3]{uv}$, $y=\sqrt[3]{\frac{v^2}{u}}$, 于是有:

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}=\begin{vmatrix}\frac{1}{3}\sqrt[3]{\frac{v}{u^2}} & \frac{1}{3}\sqrt[3]{\frac{u}{v^2}}\\ -\frac{1}{3}\sqrt[3]{\frac{v^2}{u^4}} & \frac{2}{3}\sqrt[3]{\frac{1}{uv}}\end{vmatrix}=\frac{1}{3u}$$

所以就有所求面积为:

$$\iint_{\Omega}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint_{\Omega_1}\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\mathrm{d}u\mathrm{d}v=\iint_{\Omega_1}\frac{1}{3u}\mathrm{d}u\mathrm{d}v=\frac{1}{3}\int_1^2\mathrm{d}v\int_1^2\frac{1}{u}\mathrm{d}u=\frac{\ln 2}{3}$$

三.(15 分) 求下列圆环 L 的质量：已知圆环为

$$L:\begin{cases} x^2+y^2+z^2=1 \\ x+y+z=0 \end{cases}$$

其线密度为 $\rho(x,y,z)=(x-1)^2+(y-1)^2+(z-1)^2$

解： 注意到在 L 上时，则有：

$$\rho(x,y,z)=(x-1)^2+(y-1)^2+(z-1)^2=\left(x^2+y^2+z^2\right)-2(x+y+z)+3=4$$

因此所求圆环 L 的质量为：

$$\int_L \rho(x,y,z)\,\mathrm{d}s=4\int_L \mathrm{d}s=4S$$

其中 S 为圆环的长度，由题易知，此圆环为单位圆上的大圆，其周长为 2π ，综上所述，圆环 L 的质量为 8π.

四.(15 分) 展开 $f(x)=|\cos x|$ 为 $[-\pi,\pi]$ 上的 Fourier 级数.

解： 由 $f(x)$ 为偶函数，即 $b_n=0\,(n=1,2,\cdots)$，且

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\mathrm{d}x=\begin{cases} -\dfrac{4(-1)^{-\frac{n}{2}}}{\pi\left(n^2-1\right)},n\text{为偶数} \\ 0,n\text{为奇数} \end{cases}$$

所以就有 $f(x)=|\cos x|$ 为 $[-\pi,\pi]$ 上的傅里叶级数为：

$$f(x)=\frac{2}{\pi}-\frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{4k^2-1}\cos 2kx$$

五.(15 分) 求幂级数：

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n+1}{n!}x^n$$

的收敛域与和函数.

解： 令 $a_n=\dfrac{n+1}{n!}x^n$ ，就有：

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+2)\,n!}{(n+1)\,(n+1)!}=\lim_{n\to\infty}\frac{n+2}{(n+1)^2}=0$$

因此该幂级数的收敛域为 R.

又有：

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n+1}{n!}x^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{(n-1)!}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}+x\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n!}=(1+x)\,e^x$$

综上所述幂级数的收敛域为 R 及和函数为 $(1+x)\,e^{x}$.

六.(15 分) 已知 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 为发散的正项级数，S_n 为其部分和，用 Cauchy 收敛原理证明 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{a_n}{S_n}$ 发散.

证明：这个题我们可以逆向思考，只需要证明：

对任意正整数 N，都存在整数 $m>n>N$ 使得 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{a_n}{S_n} > \dfrac{1}{2}$，即发散.

首先我们先取 $n=N+1$，且这里 S_n 是递增，所以此时有：

$$\sum_{k=n}^{m} \frac{a_n}{S_n} > \sum_{k=n}^{m} \frac{a_n}{S_m} = \frac{S_m - S_N}{S_m} = 1 - \frac{S_N}{S_m}$$

由于 S_n 递增且趋于正无穷，所以对于给定的 N 必然存在足够大的正整数 m，使得 $S_m > 2S_N$，此时有：

$$\sum_{k=n}^{m} \frac{a_n}{S_n} > 1 - \frac{S_N}{S_m} > \frac{S_N}{2S_N} = \frac{1}{2}$$

七.(15 分) 已知 $f(x)$ 在 $[0,\infty]$ 上连续，$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ 存在且有限，证明 $f(x)$ 在 $[0,\infty)$ 上有界.

证明：设 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = A$，则存在正整数 N，使得对于任意 $x>N$，就有 $|f(x)-A|<1$. 于是在 $(N,+\infty)$ 上有 $f(x)|<A+1$. 由于 $f(x)$ 在 $[0,N]$ 上连续，因此存在 $M>0$ 使得在 $[0,N]$ 上 $f(x)<M$ 于是取 $L=\max\{|A|+1,M\}$，则有 $f(x)$ 上有 $f(x)|<L$

因此 $f(x)$ 在 $[0,\infty)$ 上有界.

八.(15 分) 已知反常积分 $\int_0^{+\infty} xf(x)\,\mathrm{d}x$，证明含参变量反常积分：

$$I(y) = \int_0^{+\infty} x^y f(x)\,\mathrm{d}x$$

在 $[0,1]$ 上一致收敛.

证明：注意到：

$$I(y) = \int_0^{+\infty} x^y f(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty} xf(x)\cdot x^{y-1}\mathrm{d}x$$

因为反常积分 $\int_0^{+\infty} xf(x)\,\mathrm{d}x$ 收敛且与 y 无关，所以 $\int_0^{+\infty} x^y f(x)\,\mathrm{d}x$ 关于 y 在 $[0,1]$ 上一致收敛. 由于 x^{y-1} 对于固定的 $y\in[0,1]$ 都单调，且 $x\in[1,\infty)$ 时，满足 $|x^{y-1}|\le 1$，即一致有界. 根据 Abel 判别法可知 $I(y)$ 在 $[0,1]$ 上一致收敛.

九.(15 分) 已知 Ω 为三维空间中的有界区域，Ω 的边界为分片光滑的曲面，n 为外法向量，$u(x,y,z)$ 在 Ω 上二阶连续可偏导，求证：

$$\iiint\limits_{\Omega} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \iint_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial n}\mathrm{d}s$$

证明：设 $\vec{n}=(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)$，于是有：

$$\begin{aligned}\iint_{\partial\Omega}\frac{\partial u}{\partial n}\mathrm{d}s&=\iint_{\partial\Omega}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial u}{\partial y}\cos\beta+\frac{\partial u}{\partial z}\cos\gamma\right)\mathrm{d}s\\&=\iint_{\partial\Omega}\frac{\partial u}{\partial x}\mathrm{d}y\mathrm{d}z+\frac{\partial u}{\partial y}\mathrm{d}x\mathrm{d}z+\frac{\partial u}{\partial z}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\&=\iiint\limits_{\Omega}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z\end{aligned}$$

十.(15 分) 已知 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上二阶连续可导，证明：

$$\max_{x\in[0,1]}|f'(x)|\le|f(1)-f(0)|+\int_0^1 f''(x)\,\mathrm{d}x$$

证明：因为 $f'(x)$ 连续，所以 $\max\limits_{x\in[0,1]}|f'(x)$ 可取到.
设 $f(\xi)=\max\limits_{x\in[0,1]}|f'(x)|$，由拉格朗日中值定理得：

$$|f(1)-f(0)|=|\frac{f(1)-f(0)}{1-0}|=f'(u)\text{ 其中}u\in(0,1)$$

又由

$$\int_0^1\left|f''(x)\right|\mathrm{d}x\geqslant\int_\xi^u|f''(x)|\mathrm{d}x\geqslant\left|\int_\xi^u f''(x)\,\mathrm{d}x\right|=\left|f'(u)-f'(\xi)\right|$$

所以就有：

$$|f(1)-f(0)+\int_0^1\left|f''(x)\right|\mathrm{d}x\geqslant\left|f'(u)\right|+\left|f'(u)-f'(\xi)\right|\geqslant f(\xi)=\max_{x\in[0,1]}|f'(x)|$$

7.2 武汉大学 2018 年数学分析试题解析

上一期更文了华科真题，当然也就少不了武大，形成对比很显然武大的真题还是有一定的难度。尤其在本张真题中，难度很高，以至于武汉大学在 2018 年初试线定为“数分高代总分高于 170，单科线高于 57 分”，并招收了部分调剂生，此外武大的高代是考"873 线性代数”。话说多说，直接上题刚吧。

一.(20 分) 一、计算极限：

1. $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=n^2}^{(n+1)^2}\frac{1}{\sqrt{k}}$
2. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\int_0^\pi\sin^n x\cos^6 x\mathrm{d}x}{\int_0^\pi\sin^n x\mathrm{d}x}$
3. 已知 $x_{n+1}=\ln(1+x_n)$，且 $x_1=0$，求 $\lim\limits_{n\to\infty}nx_n$.

解: 1. 放缩可得:

$$2\left(\sqrt{n+1}-1\right) < \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{k}} < 2\sqrt{n} \Rightarrow \frac{2n+2}{n+1} < \sum_{k=n^2}^{(n+1)^2}\frac{1}{\sqrt{k}} < \frac{2n+2}{n}$$

所以由两边夹定理得: $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=n^2}^{(n+1)^2}\frac{1}{\sqrt{k}}=2$

2. 易知

$$\int_0^{\pi}\sin^n x\cos^6 x\mathrm{d}x \leqslant \int_0^{\pi}\sin^n x\cos^2 x\mathrm{d}x = \frac{1}{n+2}\int_0^{\pi}\sin^n x\mathrm{d}x$$

即可得

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\displaystyle\int_0^{\pi}\sin^n x\cos^6 x\mathrm{d}x}{\displaystyle\int_0^{\pi}\sin^n x\mathrm{d}x}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+2}=0$$

3. 由于 $x_{n+1}=\ln(1+x_n)<x_n$, 且 $x_n>0$, 故 x_n 收敛。然后两边取极限得, $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=0$. 即

$$\lim_{n\to\infty}nx_n=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{\frac{1}{x_n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)-n}{\frac{1}{x_{n+1}}-\frac{1}{x_n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{x\ln(1+x)}{x-\ln(1+x)}=2$$

二.(18 分) 设 $f(x), f_1(x)$ 在 $[a,b]$ 区间上连续, $f_{n+1}(x)=f(x)+\int_a^x\sin\{f_n(t)\}\mathrm{d}t$, 证明: $\{f_n\}$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛.

证明: 我们可取 $M=\max\limits_{x\in[a,b]}\{|f(x)|,1\}$, 易知

$$\begin{aligned}|f_2(x)|=\left|f(x)+\int_a^x\sin\{f_1(t)\}\mathrm{d}t\right| &\leqslant |f_1(x)|+\left|\int_a^x\sin\{f_1(t)\}\mathrm{d}t\right|\\ &\leqslant M+M\int_a^x\mathrm{d}t=M+M(x-a)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Rightarrow |f_{n+1}(x)| &\leqslant M+M(x-a)+M\frac{(x-a)^2}{2!}+\cdots+M\frac{(x-a)^n}{n!}\\ &=\sum_{k=0}^{n}M\frac{(x-a)^k}{k!}\leqslant\sum_{k=0}^{n}M\frac{(b-a)^k}{k!}\end{aligned}$$

所以可得 $\{f_n\}$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛 Me^{b-a}.

三.(20 分) 设

$$f(x)=\begin{cases}e^{-\frac{1}{x^2}} & x\neq 0\\ 0 & x=0\end{cases}$$

证明: $f(x)$ 在 $x=0$ 处任意阶导数数存在.

证明: 此题利用数学归纳法, 可证 $\forall n\in Z^+, f^{(n)}(x)=0$.

当 $n=1$ 时，则有

$$f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{e^{-\frac{1}{x^2}}}{x}=0$$

当 $n\geqslant 2$ 时，设 $f^{(n)}(x)=0$, 有

$$f^{(n+1)}(0)=\lim_{x\to 0}\frac{f^{(n)}(x)-f^{(n)}(0)}{x-0}=0$$

即证.

四.(15 分) 已知 $(x_1,x_2,x_3)\in R^3$ ，其中 $u=\dfrac{1}{|x|}$ ，$|x|=\sqrt{x_1^2+x_2^2+x_3^2}$ ，计算：

$$\oiint_S \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial y_j}\mathrm{d}s, i,j=1,2,3$$

其中 $S: x_1^2+x_2^2+x_3^2=R^2$

解：

(a)当 $i=j$ 时，可由对称性知

$$\oiint_S \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial y_j}\mathrm{d}s=\frac{1}{3}\oiint_S\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial x_3^2}\right)\mathrm{d}s$$

且 $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial x_3^2}=0$ ，即 $\displaystyle\oiint_S \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial y_j}\mathrm{d}s=0.$

(b)当 $i\neq j$ 时，可由被积函数与曲面的对称性知

$$\oiint_S \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial y_j}\mathrm{d}s=\frac{1}{3}\oiint_S\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_1\partial x_2}+\frac{\partial^2 u}{\partial x_2\partial x_3}+\frac{\partial^2 u}{\partial x_1\partial x_3}\right)\mathrm{d}s=\oiint_S\left(\frac{x_1x_2+x_2x_3+x_1x_3}{R^5}\right)\mathrm{d}s=0$$

五.(17 分) 讨论求解方程 $f(x)=0$ 的牛顿切线法.

1. 推导牛顿切线法的迭代公式；
2. 在适当条件下，证明牛顿切线法收敛.

解： 1. 假设 $f(x)$ 零点为 $x=x_0$，然后用 x_1 代替 x_0，重复这个过程，不断迭代即可

$$y-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0)$$

$$\Rightarrow 0-f(x_0)=f'(x_0)(x_1-x_0)\Rightarrow x_1=x_0-\frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$

所以所求近似值为 $x_2=x_1-\dfrac{f(x_1)}{f'(x_1)}$ ，因此所得 Newton 迭代公式

$$x_{n+1}=x_n-\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

2. 适当条件下：$f(x)$ 在 $[a,b]$ 上具有二阶连续导数，且满足 (1) $f(a)f(b)<0$ ，(2) $f'(x)$，$f''(x)$ 在 (a,b) 内保号。证明：因为依据 (1) 可知有解，依据 (2) 保号性可知 $f(x)$ 的解

唯一且保持凸性，从而 $x_(n+1)$ 比 x_n 更靠近 x_0，所以 x_n 是单调有界数列，也必定收敛，即证。

六.(15 分) 设 $f(x)$ 连续, 求极限

$$\lim_{n\to\infty}\left(nA-\sum_{k=1}^{n}f\left(\frac{k}{n}\right)\right)=B$$

存在时，A 和 B 的值.

解：首先我得说明下，这个题的出现是在第八届全国大学生数学竞赛 (非数类) 第四大题，考研是在竞赛之后，所以有参加过此次竞赛的同学，基本对于此题都是秒，因此鼓励同学们参与数学竞赛，尤其对于报考 34 所自主划线院校的同学，因为考研与竞赛题难度完全相当！

此题中若要极限存在，则 $A=\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$，所以就有

$$\begin{aligned}
B=\lim_{n\to\infty}\left(nA-\sum_{k=1}^{n}f\left(\frac{k}{n}\right)\right)&=\lim_{n\to\infty}\left(n\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x-\sum_{k=1}^{n}f\left(\frac{k}{n}\right)\right)\\
&=\lim_{n\to\infty}n\left(\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x-\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}f\left(\frac{k}{n}\right)\right)\\
&=\lim_{n\to\infty}n\sum_{k=1}^{n}\int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}}\left(f(x)-f\left(\frac{k}{n}\right)\right)\mathrm{d}x\\
&=\lim_{n\to\infty}n\sum_{k=1}^{n}f'(\xi_k)\int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}}\left(x-\frac{k}{n}\right)\mathrm{d}x\\
&=-\frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}f'(\xi_k)\frac{1}{n}\\
&=-\frac{1}{2}\int_0^1 f'(x)\,\mathrm{d}x\\
&=\frac{f(0)-f(1)}{2}
\end{aligned}$$

七.(20 分) 设 $u_i=u_i(x_1,x_2),i=1,2$ 且关于每个变量均为周期 1 的连续可微函数, 求

$$\iint\limits_{0\leqslant x_1,x_2\leqslant 1}\det\left(\delta_{ij}+\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\right)\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2$$

其中 $\det\left(\delta_{ij}+\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\right)$ 是映射 $x\to(x_1+u_1,x_2+u_2)$ 的雅克比行列式.

解：易知

$$\iint\limits_{0\leqslant x_1,x_2\leqslant 1}\det\left(\delta_{ij}+\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\right)\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2$$

$$
\begin{aligned}
&= \iint\limits_{0\leqslant x_1,x_2\leqslant 1}\left(1+\frac{\partial u_1}{\partial x_1}+\frac{\partial u_2}{\partial x_2}+\frac{\partial u_1}{\partial x_1}\frac{\partial u_2}{\partial x_2}-\frac{\partial u_1}{\partial x_2}\frac{\partial u_2}{\partial x_1}\right)\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2\\
&= 1+\int_0^1 u_1(1,x_2)-u_1(0,x_2)\,\mathrm{d}x_2+\int_0^1 u_2(x_1,0)-u_1(x_1,0)\,\mathrm{d}x_1\\
&+\int_0^1 u_1(1,x_2)\,u_{2x_2}(1,x_2)-u_1(0,x_2)\,u_{2x_2}(0,x_2)\mathrm{d}x_2\\
&+\int_0^1 u_1(x_1,1)\,u_{2x_1}(x_1,1)-u_1(x_1,0)\,u_{2x_1}(x_1,0)\mathrm{d}x_1\\
&= 0
\end{aligned}
$$

八.(25 分) 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上 Riemann 可积，$\varphi(x)$ 是周期为 T 的连续函数.

1. 证明存在阶梯函数使得 $g_\varepsilon(x)$ 使得

$$\int_a^b |f(x)-g_\varepsilon(x)|\mathrm{d}x<\frac{\varepsilon}{2}$$

2. 计算

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b \varphi(nx)\mathrm{d}x$$

3. 证明

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b f(x)\varphi(nx)\mathrm{d}x=\frac{1}{T}\int_0^T\varphi(x)\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

4. 计算

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\ln n}\int_0^T\frac{\varphi(nx)}{x}\mathrm{d}x,\text{其中函数}\frac{\varphi(nx)}{x}$$

证明：请读者自行证明，在裴礼文数分中都能找到证明过程，可参考.

7.3 中南大学 2010 年数学分析试题解析

一.(10 分) 计算极限

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{n^2+n}}\right)$$

解：注意到

$$\frac{1}{\sqrt{n^2+n}}\leqslant\frac{1}{\sqrt{n^2+k}}\leqslant\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}\ (k=1,2,\cdots,n)$$

因此有

$$\frac{n}{\sqrt{n^2+n}}\leqslant\sum_{k=1}^n\frac{1}{\sqrt{n^2+k}}\leqslant\frac{n}{\sqrt{n^2+1}}$$

由于

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt{n^2+n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt{n^2+1}}=1$$

故由夹逼定理就得到

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\dots+\frac{1}{\sqrt{n^2+n}}\right)=1$$

二.(10 分) 设 $f(x)$ 具有二阶导数，在 $x=0$ 的某个去心领域内 $f(x)\neq 0$，且 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=0$, $f''(0)=4$，求

$$\lim_{x\to 0}\left(1+\frac{f(x)}{x}\right)^{\frac{1}{x}}$$

解：这里我们可以利用 L'Hospital 法则

$$\lim_{x\to 0}\left(1+\frac{f(x)}{x}\right)^{\frac{1}{x}}=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x}\ln(1+\frac{f(x)}{x})}=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\frac{f'(x)}{x}-\frac{f(x)}{x^2}}{1+\frac{f(x)}{x}}}$$

由 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=0$ 及 $f(x)$ 的连续性知 $f(0)=0$，因此

$$f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=0$$

由导数定义，

$$f''(0)=\lim_{x\to 0}\frac{f'(x)-f'(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{f'(x)}{x}$$

由 L'Hospital 法则

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{f'(x)}{2x}=\frac{f''(0)}{2}$$

因此，

$$\lim_{x\to 0}\left(1+\frac{f(x)}{x}\right)^{\frac{1}{x}}=e^{\frac{f''(0)}{2}}=e^2$$

三.(10 分) 求曲面 $x=\frac{y^2}{2}+2z^2$ 上平行于 $2x+2y-4z+1=0$ 的切平面方程，并求切点处的法线方程

解：平行于 $2x+2y-4z+1=0$ 的平面族为 $2x+2y-4z+\lambda=0(\lambda\neq 0)$ 联立平面族方程跟椭圆抛物面方程，有

$$\begin{cases}2x=\frac{y^2}{2}+2z^2\\(y+1)^2+4(z-\frac{1}{2})^2+\lambda=2\end{cases}$$

当 $\lambda>2$ 时曲线无交点，当 $\lambda<2$ 时曲线有无穷多个交点，当 $\lambda=2$ 时，有唯一交点因此，切平面为

$$x+y-2z+1=0$$

切点为 $(\frac{1}{2},-1,0)$, 切平面为

$$2x+2y-4z+1=0$$

四.(10 分) 设

$$f(x,y)=\begin{cases} x^2\arctan\dfrac{y}{x}-y^2\arctan\dfrac{x}{y} & xy\neq 0\\ 0 & xy=0\end{cases}$$

当 $xy\equiv 0$ 时，求 $f''_{xy}(x,y)$

解： 当 $x_0y_0\neq 0$ 时

$$f'_x(x_0,y_0)=2x_0\arctan\frac{y_0}{x_0}-y_0$$

当 $x_0=0, y_0\neq 0$ 时，

$$f'_x(x_0,y_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x,y_0)-f(x_0,y_0)}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}\frac{x^2\arctan\frac{y_0}{x}-y_0^2\arctan\frac{x}{y_0}}{x}=-y_0$$

当 $x_0\neq 0, y_0=0$ 时，

$$f'_x(x_0,y_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x,y_0)-f(x_0,y_0)}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}\frac{0-0}{x-x_0}=0$$

当 $x_0=y_0=0$ 时，

$$f'_x(x_0,y_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x,y_0)-f(x_0,y_0)}{x-x_0}\lim_{x\to x_0}\frac{0-0}{x-x_0}=0$$

那么综合有

$$f'_x(x,y)=\begin{cases} =2x_0\arctan\dfrac{y_0}{x_0}-y_0 & xy\neq 0\\ -y & xy=0\end{cases}$$

最后，当 $x_0y_0=0$ 时，

$$f''_{xy}(x_0,y_0)=\lim_{y\to y_0}\frac{f'_x(x_0,y)-f'_x(x_0,y_0)}{y-y_0}=\lim_{y\to y_0}\frac{-y+y_0}{y-y_0}=-1$$

也就是，当 $xy\equiv 0$ 时，$f''_{xy}(x,y)=-1$

五.(10 分) 计算曲面积分

$$\oiint_S(\frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{3}+\frac{z^2}{4})\mathrm{d}s$$

其中 S 是球面 $x^2+y^2+z^2=a^2$。

解： 由对称性，

$$\oiint_S x^2\mathrm{d}s=\oiint_S y^2\mathrm{d}s=\oiint_S z^2\mathrm{d}s=\frac{a^2}{3}S=\frac{4\pi a^4}{3}$$

因此，

$$\oiint_S (\frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{3}+\frac{z^2}{4})\mathrm{d}s=(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4})\frac{4\pi a^4}{3}=\frac{13a^4\pi}{9}$$

六.(10 分) 计算

$$I=\oiint_\Sigma y(x-z)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+x^2\mathrm{d}z\mathrm{d}x+(y^2+xz)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

其中 Σ 是边长为 a 的正立方体的表面，并取外侧.

解：由高斯定理，

$$I=\iiint_V (x+z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=2\iiint_V x\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=0$$

其中 V 为 Σ 包含的内部，后两个等号成立都是利用了 V 的对称性

七.(20 分)

设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，且 $\min\limits_{x\in[a,b]} f(x)=1$，证明

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\int_a^b \frac{\mathrm{d}x}{[f(x)]^n}}=1$$

证明：由 $f(x)\geqslant 1$ 可得

$$\varlimsup_{n\to\infty}\sqrt[n]{\int_a^b \frac{\mathrm{d}x}{[f(x)]^n}}\leqslant \varlimsup_{n\to\infty}\sqrt[n]{\int_a^b \mathrm{d}x}=\varlimsup_{n\to\infty}\sqrt[n]{b-a}=1$$

然后由 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，最小值为 1 知存在 $c\in[a,b]$ 使得 $f(c)=1$，那么，$\forall\varepsilon>0$ 存在 $\delta>0$ 使得 $\forall x\in(x-2\delta,x+2\delta)$ 有 $f(x)<1+\varepsilon$. 令 $[c,d]=[x-\delta,x+\delta]\cap[a,b]\subset[a,b]$ 则 $\forall x\in[c,d]$ 有 $f(x)\leqslant 1+\varepsilon$，那么

$$\varliminf_{n\to\infty}\sqrt[n]{\int_a^b \frac{\mathrm{d}x}{[f(x)]^n}}\geqslant \varliminf_{n\to\infty}\sqrt[n]{\int_c^d \frac{\mathrm{d}x}{[f(x)]^n}}\geqslant \varliminf_{n\to\infty}\int_c^d \frac{1}{(1+\varepsilon)^n}\mathrm{d}x=\varliminf_{n\to\infty}\sqrt[n]{d-c}(1+\varepsilon)=1+\varepsilon$$

由 ε 的任意性

$$\varliminf_{n\to\infty}\sqrt[n]{\int_a^b \frac{\mathrm{d}x}{[f(x)]^n}}\geqslant 1$$

则

$$1\leqslant \varliminf_{n\to\infty}\sqrt[n]{\int_a^b \frac{\mathrm{d}x}{[f(x)]^n}}\leqslant \varlimsup_{n\to\infty}\sqrt[n]{\int_a^b \frac{\mathrm{d}x}{[f(x)]^n}}\leqslant 1$$

因此极限存在，且

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\int_a^b \frac{\mathrm{d}x}{[f(x)]^n}}=\varliminf_{n\to\infty}\sqrt[n]{\int_a^b \frac{\mathrm{d}x}{[f(x)]^n}}=\varlimsup_{n\to\infty}\sqrt[n]{\int_a^b \frac{\mathrm{d}x}{[f(x)]^n}}=1$$

八.(20 分)

设 $\hat{D}$ 是由 $x^2+y^2=1$ 所围成的闭区域，求函数 $f(x,y)=x^2+y^2-ax(a>0)$ 在 $\hat{D}$ 上的最小值和最大值

解： 令 $x=r\cos\theta, y=r\sin\theta(0\leqslant r\leqslant 1, 0\leqslant\theta<2\pi)$, 则

$$z=f(x,y)=r-ar\cos\theta=r(1-a\cos\theta)$$

又因为 $1-a\cos\theta\in[1-a,1+a]$, 因此 $f(x,y)$ 在 $(-1,0)$ 取得最大值 $1+a$，在 (1,0) 处取得最小值 $1-a$。

九.（20 分）

已知 $f(x)$ 二阶可导，且 $f''(x)\leqslant 0$, 试证对任意的三个正数 x_1,x_2,x_3, 有

$$f\left(\frac{x_1+x_2+x_3}{3}\right)\geqslant\frac{1}{3}[f(x_1)+f(x_2)+f(x_3)],$$

并由此证明

$$\frac{3}{\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\frac{1}{x_3}}\leqslant\sqrt[3]{x_1x_2x_3}\leqslant\frac{x_1+x_2+x_3}{3}$$

证明： 首先先证明 $\forall x_1,x_2>0$, 有

$$\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}\leqslant f(\frac{x_1+x_2}{2})$$

事实上，由泰勒定理

$$f(x_1)=f(\frac{x_1+x_2}{2})+f'(\frac{x_1+x_2}{2})(x_1-\frac{x_1+x_2}{2})+\frac{1}{2}f''(\zeta_1)(x_1-\frac{x_1+x_2}{2})^2$$

$$f(x_2)=f(\frac{x_1+x_2}{2})+f'(\frac{x_1+x_2}{2})(x_2-\frac{x_1+x_2}{2})+\frac{1}{2}f''(\zeta_2)(x_2-\frac{x_1+x_2}{2})^2$$

其中 ζ_1,ζ_2 介于 x_1,x_2 之间, 由 $f''(x)\leqslant 0$，得

$$\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}=f(\frac{x_1+x_2}{2})+\frac{f''(\zeta_1)+f''(\zeta_2)}{2}(x_1-\frac{x_1+x_2}{2})^2\leqslant f(\frac{x_1+x_2}{2})$$

然后再证明 $\forall x_1,x_2,x_3,x_4>0$,

$$\frac{f(x_1)+f(x_2)+f(x_3)+f(x_4)}{4}\leqslant f(\frac{x_1+x_2+x_3+x_4}{4})$$

事实上，就有

$$\frac{f(x_1)+f(x_2)+f(x_3)+f(x_4)}{4}\leqslant\frac{f(\frac{x_1+x_2}{2})+f(\frac{x_3+x_4}{2})}{2}\leqslant f(\frac{x_1+x_2+x_3+x_4}{4})$$

现在证明原命题，为此记 $x_4=\dfrac{x_1+x_2+x_3}{3}$, 由 2，有

$$f(x_4)=f(\frac{x_1+x_2+x_3}{3})=f(\frac{x_1+x_2+x_3+x_4}{4})\geqslant\frac{f(x_1)+f(x_2)+f(x_3)+f(x_4)}{4}$$

移项有

$$f(x_4)=f(\frac{x_1+x_2+x_3}{3})\leqslant\frac{f(x_1)+f(x_2)+f(x_3)}{3}$$

在 $(0,\infty)$ 上定义函数 $f(x)=\ln x$ 显然 $f''(x)=-\dfrac{1}{x^2}<0$ 由上原命题，有

$$\ln\left(\frac{x_1+x_2+x_3}{3}\right)\geqslant\frac{\ln x_1+\ln x_2+\ln x_3}{3}$$

整理即有

$$f(\frac{x_1+x_2+x_3}{3})\geqslant\sqrt[3]{x_1x_2x_3}$$

最后利用上式中用 $\dfrac{1}{x_1},\dfrac{1}{x_2},\dfrac{1}{x_3}$ 代替 x_1,x_2,x_3 再两边取倒数即有

$$\frac{x_1+x_2+x_3}{3}\leqslant\sqrt[3]{x_1x_2x_3}$$

十.(15 分)

1、(5 分) 试给出函数序列 $\{f_n(x)\}$ 在区间 $[a,b]$ 上一致收敛于 $f(x)$ 的定义；

2、(10 分) 设函数 $f_0(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积，且 $f_n(x)=\displaystyle\int_a^x f_{n-1}(t)\mathrm{d}t(a\leqslant x\leqslant b),n=1,2,...,$ 证明 $\{f_n(x)\}$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛于 0.

证明：

1、定义：$\forall\varepsilon>0,\exists N>0,\forall n\geqslant N,\forall x\in[a,b]$ 有 $|f_n(x)-f(x)|<\varepsilon$

2、$f_0(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积知 $f_0(x)$ 在 $[a,b]$ 上有界，不妨设 $\forall x\in[a,b],|f_0(x)|<M$，那么

$$|f_1(x)|=\left|\int_a^x f_0(t)\mathrm{d}t\right|\leqslant\int_a^b|f_0(t)|\mathrm{d}t=M(x-a)$$

$$|f_2(x)|=\left|\int_a^x f_1(t)\mathrm{d}t\right|\leqslant\int_a^x M(t-a)\mathrm{d}t=M\frac{(x-a)^2}{2}$$

一般的，当 $|f_k(x)|\leqslant M\dfrac{(x-a)^k}{k!}$ 时，有

$$|f_{k+1}(x)|=\left|\int_a^x f_k(t)\mathrm{d}t\right|\leqslant M\int_a^x\frac{(t-a)^k}{k!}\mathrm{d}t=M\frac{(x-a)^{k+1}}{(k+1)!}$$

由数学归纳法即得 $\forall x\in[a,b],n\in N$,

$$|f_n(x)|\leqslant M\frac{(x-a)^n}{n!}\leqslant M\frac{(b-a)^n}{n!}$$

注意到

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(b-a)^n}{n!}=0$$

所以 $\forall\varepsilon>0,\exists N>0,\forall n>N\left(\dfrac{(b-a)^n}{n!}<\dfrac{\varepsilon}{M}\right)$，那么 $\forall x\in[a,b],|f_n(x)|\leqslant M\dfrac{(b-a)^n}{n!}<\varepsilon$，也就是 $f_n(x)$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛于 0

十一.(15 分)

练习 7.1: 已知 $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\sin\pi x}{x}\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2}$，求 $I(a)=\displaystyle\int_0^{+\infty}e^{-ax}\frac{\sin\pi x}{x}\mathrm{d}x(a>0)$

解：由于 $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\sin\pi x}{x}=\frac{\pi}{2}$ 关于 a 一致收敛，$e^{-ax}\in(0,1]$ 有界，且 e^{-ax} 关于 x 单

调，因此根据 $Abel$ 判别法

$$\int_0^{+\infty} e^{-ax}\frac{\sin \pi x}{x}\mathrm{d}x$$

关于 $a \in (0,\infty)$ 一致收敛, 再根据 $g(x,a) = e^{-ax}\frac{\sin \pi x}{x}$ 在 $[0,+\infty)\times[0,+\infty)$ 上连续知

$$\lim_{a\to 0^+} I(a) = I(0) = \frac{\pi}{2}$$

再由 $|f_a(x,a)| = e^{-ax}|\sin \pi x| \leqslant e^{-ax}$, 而 $a \geqslant a_0 > 0$ 的时，$\int_0^{+\infty} e^{-ax}\mathrm{d}x \leqslant \int_0^{+\infty} e^{-a_0x}\mathrm{d}x$ 收敛，故 $\int_0^{\infty} f_a(x,a)\mathrm{d}x$ 关于 $a\in[a_0,\infty)$ 一致收敛，因此当 $a > a_0$ 时，

$$I'(a) = \int_0^{+\infty} g_a(x,a)\mathrm{d}x = -\frac{1}{1+a^2}$$

由 $\forall a > 0, \exists a_0 > 0 (a > a_0)$, 因此只要 $a > 0$ 就有

$$I'(a) = -\frac{1}{1+a^2}$$

因此当 $a > 0$ 时 $I(a) = -\arctan a + c$, 那么 $\frac{\pi}{2} = I(0) = \lim\limits_{a\to 0^+} I(a) = c$，也就是

$$I(a) = \frac{\pi}{2} - \arctan a$$

7.4 浙江大学 2016 年数学分析试题解析

一、计算题 (共 40 分，每小题 10 分)

1. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt[n]{(n+1)(n+2)\cdots(n+n)}}{n}$
2. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x\sin x - x(1+x)}{(\cos x-1)\ln(1-2x)}$
3. $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin(2n+1)x}{\sin x}\mathrm{d}x$，$n$ 是自然数.
4. $\displaystyle\iint_D x(1+ye^{x^2+y^2})\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，$D$ 是由 $x=-1$，$y=x^3$，$y=1$ 围成的有界闭区域.

解: 根据题意知

1. 由定积分定义得

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[n]{(n+1)(n+2)\cdots(n+n)}}{n} = \lim_{n\to\infty} e^{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\ln\left(1+\frac{i}{n}\right)} = e^{\int_0^1 \ln(1+x)\mathrm{d}x} = \frac{4}{e}$$

2. 由泰勒公式易得

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x\sin x - x(1+x)}{(\cos x-1)\ln(1-2x)} = \lim_{x\to 0}\frac{(1+x+o(x))\left(x-\frac{1}{6}x^3+o\left(x^3\right)\right)-x(1+x)}{x^3} = -\frac{1}{6}$$

3. 令 $I_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin(2n+1)}{\sin x}\mathrm{d}x$，有

$$I_n-I_{n-1}=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin(2n+1)-\sin(2n-1)}{\sin x}\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{2\sin x\cos 2nx}{\sin x}\mathrm{d}x=0$$

因此

$$I_n=I_0=\frac{\pi}{2}$$

或这样

$$I_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin(2n+1)}{\sin x}\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(1+2\sum_{k=1}^{n}\cos 2kx\right)\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2}$$

4. 显然有

$$\iint_D x\left(1+ye^{x^2+y^2}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_{-1}^{0}\left(\int_{-1}^{1}x\left(1+ye^{x^2+y^2}\right)\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x=\int_{-1}^{0}2x\mathrm{d}x=-1$$

二、证明题 (共 40 分，每小题 10 分)

1. 设 A,B 是非空数集，$E=A\quad B$，证明 $supE=\max\{supA,supB\}$
2. 若 $x_n>0$，且 $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}x_n\cdot\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\frac{1}{x_n}=1$，证明数列 $\{x_n\}$ 收敛.

证明：

1. 由题易知显然 E 上下确界均存在，对 $\forall x\in E$，有 $x\in A$ 或 $x\in B$，即 $x\leqslant supA$ 或 $x\leqslant supB$，从而有 $x\leqslant\max\{supA,supB\}$，故 $supE\leqslant\max\{supA,supB\}$; 另一方面对 $\forall x\in A$，有 $x\in E$，即 $x\leqslant supE$，则 $supA\leqslant supB$，同理 $supA\geqslant supB$，故 $supE\geqslant\max\{supA,supB\}$，即证.
2. 由 $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}x_n\cdot\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\frac{1}{x_n}=1$ 可知，$\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}x_n$ 存在且 $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}x_n=A>0$，故数列 $\{x_n\}$ 有界，因此 $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}x_n$ 存在. 又有

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\frac{1}{x_n}=\frac{1}{\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\frac{1}{x_n}}=\frac{1}{A},\ \underline{\lim_{n\to\infty}}\frac{1}{x_n}=A$$

即 $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}x_n=\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}x_n$，所以数列 $\{x_n\}$ 收敛.

三、证明题 (共 15 分) 利用有限覆盖定理证明：有界数列必有收敛子列.

证明： 考虑有界数列 $\{x_n\}$，必然存在一个有界闭集使得 $\{x_n\}\subset A$. 反证：假设 $\{x_n\}$ 无收敛子列，则 $\{x_n\}$ 在 A 无聚点，对 $\forall x\in A$，存在 $\xi_x>0$ 使得 $(x-\xi_x,x+\xi_x)$ 只有数列 $\{x_n\}$ 的有限项，且 $_{x\in A}(x-\xi_x,x+\xi_x)$ 构成了 A 的一个开覆盖，于是存在有限个点 $x_1,x_2\cdots,x_n$ 使得 $A\subset{}^{n}_{i=1}\left(x_i-\xi_{x_i},x_i+\xi_{x_i}\right)$，由于 $\left(x_i-\xi_{x_i},x_i+\xi_{x_i}\right)(i=1,\cdots,n)$ 中只有数列的有限项，这样的 A 只包含 $\{x_n\}$ 中有限项，与条件矛盾. 因此有界数列必有收敛子列.

这个证明从确界到区间套，再结合实数是可数空间，证明闭集族交集为空则存在一个交集为空的子闭集族进一步证明存在一个交集为空的有穷闭集族，至此得到实数的局部紧致性.

四、证明题 (共 15 分) 若 $f(x)$ 定义在 (a,b) 上，证明：若对 (a,b) 内任一收敛点列 $\{x_n\}$，极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\{f(x_n)\}$，则 $f(x)$ 在 (a,b) 上一致收敛.

证明： 假设 $f(X)$ 在 (a,b) 上不一致收敛，则存在 $\varepsilon_0>0$，对 $\forall\delta>0$，存在 $m,n\in(a,b)$ 且

$|m-n|<\delta$，有

$$|f(m)-f(n)|\geqslant \varepsilon_0.$$

这个可由魏尔斯特拉斯定理证明，过程省略. 所以 $\{f_n(x)\}$ 不收敛，与假设矛盾，因此 $f(x)$ 在 (a,b) 上一致收敛.

五、证明题 (共 15 分) 设 $f(x,y)$ 在 $[a,b]$ 上 $[a,b]\times[c,+\infty)$ 连续非负函数，$I(x)=\int_c^{+\infty} f(x,y)\mathrm{d}y$ 在 $[a,b]$ 上连续，证明：$I(x)$ 在 $[a,b]$ 上一致连续.

证明：假设 $f(x,y)\geqslant 0$，若 $I(x)$ 关于 $x\in[a,b]$ 不一致收敛，则存在 $\varepsilon_0>0$，对 $\forall n>c$，总存在 $x_n\in[a,b]$ 使得 $\int_n^{\infty} f(x_n,y)\mathrm{d}y\geqslant\varepsilon_0$. 由于有界数列 $\{x_n\}$ 必有收敛子列，故不妨设 $\{x_n\}$ 收敛，并记 $x_0=\lim\limits_{n\to\infty}x_n\in[a,b]$.

由于反常积分 $\int_c^{\infty} f(x_0,y)\mathrm{d}y$ 收敛，即必存在 A 使得 $\int_A^{\infty} f(x_0,y)\mathrm{d}y\leqslant\frac{\varepsilon_0}{2}$. 且由 $f(x,y)\geqslant 0$ 知，当 $n>A$ 时有

$$\int_A^{\infty} f(x_n,y)\mathrm{d}y\geqslant\int_n^{\infty} f(x_n,y)\,\mathrm{d}y\geqslant\varepsilon_0$$

由于

$$\int_A^{\infty} f(x,y)\mathrm{d}y=\int_c^{\infty} f(x,y)\,\mathrm{d}y-\int_c^{A} f(x,y)\,\mathrm{d}y=I(x)-\int_c^{A} f(x,y)\,\mathrm{d}y$$

及 $I(x)$ 在 $[a,b]$ 连续，根据广义含参量积分的连续性定理知 $\int_c^{A} f(x,y)\mathrm{d}y$ 也连续，于是 $\int_A^{\infty} f(x,y)\mathrm{d}y$ 连续，因此由 $x_0=\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 知

$$\lim_{n\to\infty}\int_A^{\infty} f(x_n,y)\mathrm{d}y=\int_A^{\infty} f(x_0,y)<\frac{\varepsilon_0}{2}$$

这与 $\int_A^{\infty} f(x_n,y)\mathrm{d}y\geqslant\varepsilon_0$ 矛盾，因此 $I(x)$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛.

六、解答题 (共 15 分) 求周期为 2π 的周期函数 $f(x)$ 的 Fourier 级数，其中当 $x\in(-\pi,\pi)$ 时，$f(x)=x^3$；并求级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^6}$ 的和.

解：易知 $f(x)$ 的 Fourier 系数为

$$\begin{aligned}2\pi f(x)&=\int_{-\pi}^{\pi}x^3e^{-inx}\mathrm{d}x=\frac{1}{-in}\int_{-\pi}^{\pi}x^3de^{-inx}\\&=\frac{2(-1)^n\pi^3}{-in}+\frac{3}{in}\int_{-\pi}^{\pi}x^2e^{-inx}\mathrm{d}x\\&=\frac{2(-1)^n\pi^3}{-in}+\frac{3}{n^2}\int_{-\pi}^{\pi}x^2de^{-inx}\\&=\frac{2(-1)^n\pi^3}{-in}+\frac{12(-1)^n}{in^3}\end{aligned}$$

因此

$$f(x)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left[\frac{(-1)^n\pi^2}{-in}+\frac{6(-1)^n}{in^3}\right]$$

由 Parseval 等式及 $\zeta(2)=\frac{\pi^2}{6},\zeta(4)=\frac{\pi^4}{96}$ 得 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^6}=\frac{\pi^6}{945}$

七、证明题 (共 15 分) 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有一阶连续导数，记 $A=\dfrac{1}{b-a}\displaystyle\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 试证明：

$$\int_a^b [f(x)-A]^2\mathrm{d}x \le (b-a)^2\int_a^b |f'(x)|^2\mathrm{d}x$$

证明：令 $g(x)=f(x)-A$，则 $\displaystyle\int_a^b g(x)=0$，且 $g'(x)=f'(x)$，于是要证的不等式转化为

$$\int_a^b g^2(x)\mathrm{d}x \leqslant (b-a)^2\int_a^b |g'(x)|^2\mathrm{d}x$$

这里只需要证明著名的 Poincare 不等式，证明过程利用 Fourier 级数以及 Parseval 等式即可.

$$\int_a^b g^2(x)\mathrm{d}x \leqslant \frac{(b-a)^2}{\pi^2}\int_a^b |g'(x)|^2\mathrm{d}x$$

另解: 利用积分第一中值定理以及柯西-施瓦茨不等式. 由于 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 连续，由积分第一中值定理，$\exists\xi\in(a,b)$ 有

$$f(\xi)=\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=A$$

因此

$$(f(x)-A)^2=(f(x)-f(\xi))^2=\left(\int_\xi^x f'(t)\,\mathrm{d}t\right)^2\leqslant(b-a)\int_a^b |f'(t)|^2\mathrm{d}t$$

两边积分，即证.

八、证明题 (共 15 分) 设 $\varphi(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，$K(x,t)$ 在 $[a,b]\times[a,b]$ 上连续，构造函数列如下：$f_0(x)=\varphi(x)$，$f_n(x)=\varphi(x)+\lambda\displaystyle\int_a^b K(x,t)f_{n-1}(t)\mathrm{d}t$，$n=1,2,\cdots$. 试证明：当 $|\lambda|$ 足够小时，函数列 $\{f_n(x)\}$ 收敛于一连续函数.

证明：假设 $A=\sup\limits_{x\in[a,b]}\displaystyle\int_a^b |K(x,t)|\mathrm{d}t>0$，$B\geqslant|\varphi(x)|\,(x\in[a,b])$，且 $f_n(x)\in C[a,b]$，易知

$$|f_1(x)-f_0(x)|=\left|\lambda\int_a^b K(x,t)\,\varphi(t)\,\mathrm{d}t\right|\leqslant|\lambda|\int_a^b |K(x,t)|\,|\varphi(t)|\,\mathrm{d}t\leqslant|\lambda|\,AB$$

$$|f_2(x)-f_1(x)|=\left|\lambda\int_a^b K(x,t)\,(f_1(x)-f_0(x))\,\mathrm{d}t\right|\leqslant|\lambda|^2B^3\int_a^b (b-a)\,\mathrm{d}t\leqslant|\lambda|^2A^2B$$

归纳可得

$$|f_n(x)-f_{n-1}(x)|\leqslant|\lambda|^nA^nB$$

因此当 $|\lambda|$ 足够小时，级数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}|\lambda|^nA^nB$ 必然收敛，即函数项级数在 $[a,b]$ 一连续函数，于是 $\{f_n(x)\}$ 收敛于一连续函数.

7.5 吉林大学 2015 年数学分析试题解析

一、证明题 (共 50 分，每小题 10 分)

1. 用 $\varepsilon-\delta$ 语言证明 $\displaystyle\lim_{x\to2}\frac{2x^2+x+1}{x^2-1}=\frac{11}{3}$.

2. 用 Cauchy 收敛准则证明数列级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\sin\frac{1}{n}$ 收敛.
3. 用子数列收敛定理证明有界闭区间上的连续函数的有界性.
4. 证明函数 $f(x)=x^2$ 在 $(-\infty,\infty)$ 内连续,但不一致连续.
5. 证明数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(\arctan n^3\right)\sin\frac{1}{n}$ 条件收敛.

证明: 根据题意知

1. 对 $\forall\varepsilon>0$,取 $\delta=\min\left\{\frac{1}{2},\frac{\varepsilon}{16}\right\}$,当 $0<|x-2|<\delta$ 时,有

$$\left|\frac{2x^2+x+1}{x^2-1}-\frac{11}{3}\right|=\frac{|5x+7||x-2|}{|x+1||x-1|}\leqslant\frac{(5|x-2|+17)|x-2|}{(3-|x-2|)(1-|x-2|)}<16|x-2|<\varepsilon$$

即证.

2. 对 $\forall\varepsilon>0$,取 $N=[\frac{1}{\varepsilon}]$,当 $n>N$ 时,对任意正整数 m 有

$$\begin{aligned}\left|\sum_{k=n+1}^{n+m}\frac{1}{k}\sin\frac{1}{k}\right|&\leqslant\sum_{k=n+1}^{n+m}\frac{1}{k}\left|\sin\frac{1}{k}\right|\leqslant\sum_{k=n+1}^{n+m}\frac{1}{k^2}\\&<\sum_{k=n+1}^{n+m}\frac{1}{k\left(k-1\right)}=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+m+1}<\frac{1}{n}<\varepsilon\end{aligned}$$

由 Cauchy 收敛准则,数项级数收敛.

3. 假设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续,且 $f(x)$ 无界,则 $\forall n>0,\exists x_n\in[a,b]$,使得

$$|f\left(x_n\right)|\geqslant n\text{或}\frac{1}{n}\left|f\left(x_n\right)\right|\geqslant 1$$

因为 $\{x_n\}$ 是有界数列, 可根据子数列收敛定理, 存在它的一个收敛子数列 $\{x_{n_k}\}$. 记 $\lim\limits_{k\to\infty}x_{n_k}=c$,由极限的保号性可知 $c\in[a,b]$,且

$$\frac{1}{n_k}\left|f\left(x_{n_k}\right)\right|\geqslant 1,\quad k=1,2,\cdots$$

由 $f(x)$ 的连续性,Heine 定理以及极限的保号性序,有

$$0=0\cdot|f(c)|=\lim_{k\to\infty}\frac{1}{n_k}\left|f\left(x_{n_k}\right)\right|$$

与假设矛盾. 故 $f(x)$ 有界.

4. 证明 $f(x)=x^2$ 在 R 上连续,按定义即可. 至于不一致收敛,取数列

$$a_n=\sqrt{n+1},\quad b_n=\sqrt{y},\quad n=1,2,\ldots$$

则有

$$\lim_{n\to\infty}\left(a_n-b_n\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}=0$$

$$|f\left(a_n\right)-f\left(b_n\right)|=|(n+1)-n|=1>0$$

所以 $f(x)$ 在 R 上不一致收敛.

5. 显然 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\sin\frac{1}{n}$ 收敛，又 $(arctan n^3)$ 单调递增，且 $0\leqslant(arctan n^3)\leqslant\frac{\pi}{2}$，所以根据 $Abel$ 判别法

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(\arctan n^3\right)\sin\frac{1}{n}$$

收敛. 又

$$\left|(-1)^n\left(\arctan n^3\right)\sin\frac{1}{n}\right|\geqslant\left(\arctan n^3\right)\sin\frac{1}{n}\geqslant\frac{1}{2n}$$

这里 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n}$ 发散，所以根据比较判别法

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left|(-1)^n\left(\arctan n^3\right)\sin\frac{1}{n}\right|$$

发散. 因此 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(\arctan n^3\right)\sin\frac{1}{n}$ 条件收敛.

二、计算题 (共 30 分，每小题 10 分)

1. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\int_0^{x^2}\sqrt{t}\sin\left(t^2\right)\mathrm{d}t}{(1-\cos x)\left(e^{x^2}-1\right)}$

2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{n^2}{2^n}$.

3. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{1/n^2}\left(1+\dfrac{2}{n}\right)^{2/n^2}\cdots\left(1+\dfrac{n}{n}\right)^{n/n^2}$

解:

1. 由等价无穷小与洛必达得

$$\lim_{x\to0}\frac{\int_0^{x^2}\sqrt{t}\sin t^2\mathrm{d}t}{(1-\cos x)\left(e^{x^2}-1\right)}=\lim_{x\to0}\frac{2\int_0^{x^2}\sqrt{t}\sin t^2\mathrm{d}t}{x^4}=\lim_{x\to0}\frac{|x|\sin x^4}{x^2}=\lim_{x\to0}|x|x^2=0$$

2. 令

$$S(x)=\sum_{n=1}^{\infty}n^2x^n\Rightarrow\frac{S(x)}{x}=\sum_{n=1}^{\infty}n^2x^{n-1}\Rightarrow\int\frac{S(x)}{x}=\sum_{n=1}^{\infty}nx^n+C_1$$

设 $K(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}nx^n$，得

$$\Rightarrow\frac{K(x)}{x}=\sum_{n=1}^{\infty}nx^{n-1}\Rightarrow\int\frac{K(x)}{x}=\sum_{n=1}^{\infty}x^n+C_2=\frac{1}{1-x}+C_2$$

因此

$$\frac{K(x)}{x}=\frac{1}{(1-x)^2}\Rightarrow K(x)=\frac{x}{(1-x)^2}$$

$$\frac{S(x)}{x}=K'(x)=\frac{1+x}{(1-x)^3}\Rightarrow S(x)=\frac{x(1+x)}{(1-x)^3}$$

所以

$$S\left(-\frac{1}{2}\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{1}{2}\right)^n n^2=(-1)^n\frac{n^2}{2^n}=-\frac{2}{27}$$

3. 取对数，定积分定义即可

$$\text{原式}=e^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{k}{n}\ln\left(1+\frac{k}{n}\right)}=e^{\int_0^1 x\ln(1+x)\mathrm{d}x}=e^{\frac{1}{4}}$$

三、计算题 (共 **45** 分, 每小题 **15** 分)

1. 求多元函数的导数：
(1) 设 z 是由方程 $x+z+(z+y)^2=6$ 确定的 x,y 的函数. 求 $\frac{\partial z}{\partial x},\frac{\partial z}{\partial y},\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$和$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$
(2) 设 $u=x\ln(x+\sin y)(x>1)$，求 $\operatorname{grad} u|_{(2,0)}$ 以及 u 于 $(2,0)$ 处沿方向 $\left(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ 的方向导数.
2. 计算 $\iint_D\sqrt{x^2+y^2}dxdy$.
其中 $D=\left\{(x,y);x\geqslant 0,y\geqslant 0,ax\leqslant x^2+y^2\leqslant a^2\right\},a>0$.
3. 计算 $\iint_S(y-z)dydz+(z-x)dzdx+(x-y)dxdy$，其中 S 为曲面 $x^2+y^2=z^2(0\leqslant z\leqslant h)$ 的下侧.

解：

1. (1) 方程两边微分整理可得到

$$-dx-(2z+2y)dy=(1+2z+2y)dz$$

当 $1+2z+2y\neq 0$，有

$$\mathrm{d}z=-\frac{1}{1+2z+2y}\mathrm{d}x-\frac{2z+2y}{1+2z+2y}\mathrm{d}y$$

因此

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{1}{1+2z+2y},\quad\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{2z+2y}{1+2z+2y}$$

所以就有

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{1}{1+2z+2y}\right)=\frac{2}{(1+2z+2y)^2}\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{2}{(1+2z+2y)^3}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\left(-\frac{1}{1+2z+2y}\right)=\frac{2}{(1+2z+2y)^2}\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{4z+4y}{(1+2z+2y)^3}$$

(2) 设 $l=(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2})$，由题意知，有

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{(2,0)}=\left.\left[\ln(x+\sin y)+\frac{x}{x+\sin y}\right]\right|_{(2,0)}=1+\ln 2,\quad \left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{(2,0)}=\left.\frac{x\cos y}{x+\sin y}\right|_{(2,0)}=1$$

即

$$\operatorname{grad} u|_{(2,0)}=(1+\ln 2,1),\quad \left.\frac{\partial u}{\partial l}\right|_{(2,0)}=\operatorname{grad} u|_{(2,0)}\cdot\frac{l}{|l|}=\frac{1+\sqrt{3}+\ln 2}{2}$$

2. 化极坐标，积分区域为 $a\cos\theta\leqslant r\leqslant a,\quad 0\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{2}$ 得

$$\iint\sqrt{x^2+y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^{\pi/2}\mathrm{d}\theta\int_{a\cos\theta}^{a}r^2\mathrm{d}r=\frac{a^3}{3}\int_0^{\pi/2}(1-\cos^3\theta)\,\mathrm{d}\theta=\frac{a^3}{3}\left(\frac{\pi}{2}-\frac{2}{3}\right)$$

3. 记 $S_0: z=h,(x,y)\in D=\left\{(x,y);x^2+y^2\leqslant h^2\right\}$，曲面定向取上侧，并记 S 与 S_0 所围成的空间区域为 Ω，由高斯公式得

$$\begin{aligned}
&\iint_S (y-z)\,\mathrm{d}y\mathrm{d}z+(z-x)\,\mathrm{d}z\mathrm{d}x+(x-y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\
&=\left(\iint_S+\iint_{S_0}\right)(y-z)\,\mathrm{d}y\mathrm{d}z+(z-x)\,\mathrm{d}z\mathrm{d}x+(x-y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\
&-\iint_{S_0}(y-z)\,\mathrm{d}y\mathrm{d}z+(z-x)\,\mathrm{d}z\mathrm{d}x+(x-y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\
&=\iiint_\Omega\left(\frac{\partial(y-z)}{\partial x}+\frac{\partial(z-x)}{\partial y}+\frac{\partial(x-y)}{\partial z}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z-\iint_D(x-y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\
&=-\int_0^{2\pi}(\cos\theta-\sin\theta)\,\mathrm{d}\theta\int_0^h r^2\mathrm{d}r=0
\end{aligned}$$

四、解答题 (共 10 分) 考虑关于 x 的方程

$$x^n+nx=2n$$

其中 n 为正整数.

1. 证明：对于任意正整数 n，方程有唯一的正实数解.
2. 设 x_n 为方程的正实数解，$n=1,2,\cdots$. 证明数列 $\{x_n\}$ 收敛.
3. 证明数列 $\left\{\frac{x_n^n}{n}\right\}$ 收敛并求其极限值

解：由题意可知

1. 令 $f_n(x)=x^n+nx-2n,x\in\mathbb{R}$，显然 $f_n(x)$ 是 $\mathbb{R}$ 上严格单调递增的连续函数，且有

$$f_n(1)=1-n\leqslant 0,\quad f_n(\sqrt[n]{2n})=n\sqrt[n]{2n}>0,\quad n=1,2,\cdots$$

根据介值定理,对任意的正整数 n,存在唯一的 $x_n \in [1, \sqrt[n]{2n}) \subset \mathbb{R}$,使得 $f_n(x) = 0$,即方程有唯一的正实数解.

2. 根据上问即证,我们得到

$$1 \leqslant x_n \leqslant \sqrt[n]{2n}, \quad n = 1, 2, \cdots$$

由夹逼定理且 $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{2n} = 1$,得 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 1$,所以数列 $\{x_n\}$ 收敛.

3. 由 $x_n^n + nx_n = 2n$ 得

$$\frac{x_n^n}{n} = 2 - x_n$$

因此

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_n^n}{n} = \lim_{n\to\infty} (2 - x_n) = 2 - 1 = 1$$

五、证明题 (共 15 分) 设 $A > 0, C > 0, AC - B^2 > 0$,求证:

$$\int_L \frac{xdy - ydx}{Ax^2 + 2Bxy + Cy^2} = \frac{2\pi}{\sqrt{AC - B^2}}$$

其中 L 为曲线 $x^2 + y^2 = R^2 (R > 0)$ 定向取逆时针方向.

证明:利用极坐标:$x = R\cos\theta, \quad y = \beta\sin\theta, \quad \theta : 0 \to 2\pi$,根据对称性有

$$\begin{aligned}
\int_L \frac{x\mathrm{d}y - y\mathrm{d}x}{Ax^2 + 2Bxy + Cy^2} &= \int_0^{2\pi} \frac{\mathrm{d}\theta}{A\cos^2\theta + 2B\sin\theta\cos\theta + C\sin^2\theta} \\
&= 2\int_0^{\pi} \frac{d(\tan\theta)}{A + 2B\tan\theta + C\tan^2\theta} \\
&= 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d(\tan\theta)}{A + 2B\tan\theta + C\tan^2\theta} + 2\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{d(\tan\theta)}{A + 2B\tan\theta + C\tan^2\theta} \\
&= 2\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{A + 2Bt + Ct^2} + 2\int_{-\infty}^{0} \frac{\mathrm{d}t}{A + 2Bt + Ct^2}, \quad \text{令}(t = \tan\theta) \\
&= 2\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{A + 2Bt + Ct^2} = \frac{2}{C}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\left(t + \frac{B}{C}\right)}{\left(t + \frac{B}{C}\right)^2 + \frac{AC - B^2}{C^2}} \\
&= \frac{2}{C} \cdot \frac{C}{\sqrt{AC - B^2}} \arctan\frac{Ct + B}{\sqrt{AC - B^2}} \Big|_{-\infty}^{+\infty} \\
&= \frac{2\pi}{\sqrt{AC - B^2}}
\end{aligned}$$

即证.

7.6 中国科大 2015 年数学分析试题解析

一.(15 分) 求极限

$$\lim_{x\to+\infty} \left(\sin\frac{1}{x}\right) \int_0^x |\sin t| \mathrm{d}t$$

解: 由等价于放缩得到

$$\lim_{x\to+\infty}\sin\left(\frac{1}{x}\right)\int_0^x|\sin t|dt=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}\int_0^x|\sin t|dt$$

$$\frac{2n}{(n+1)\pi}=\frac{1}{(n+1)\pi}\int_0^{n\pi}|\sin t|dt\leqslant\frac{1}{x}\int_0^x|\sin t|dt\leqslant\frac{1}{n\pi}\int_0^{(n+1)\pi}|\sin t|dt=\frac{2(n+1)}{n\pi}$$

即

$$\lim_{x\to+\infty}\sin\left(\frac{1}{x}\right)\int_0^x|\sin t|dt=\frac{2}{\pi}$$

二.(15 分) 求二元函数 $F(x,y)=\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}+\frac{y}{\sqrt{1+y^2}}$ 在闭区域 $x\geqslant 0, y\geqslant 0, x+y\leqslant 1$ 上的最大值.

解: 易知

$$F(x,y)\leqslant\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}+\frac{1-x}{\sqrt{1+(1-x)^2}}=H(x)$$

得

$$H'(x)=\frac{1}{\sqrt{(1+x^2)^3}}-\frac{1}{\sqrt{\left(1+(1-x)^2\right)^3}}$$

可知当 $0<x<\frac{1}{2}$, $H(x)$ 递增; 当 $\frac{1}{2}<x<1$, $H(x)$ 递减. 即当 $x=y=\frac{1}{2}$, $F(x,y)$ 取到最大值为 $\frac{2\sqrt{5}}{5}$.

三.(15 分) 设 a,b 是正数, 计算二重积分

$$\iint_D\left(x^2+y^2\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

其中 D 是椭圆盘 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\leqslant 1$

解: 利用极坐标, 可令 $x=a\rho\cos\theta, y=b\rho\sin\theta,\quad 0\leqslant\rho\leqslant 1, 0\leqslant\theta\leqslant 2\pi$ 得到

$$\iint_D(x^2+y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^1 ab\rho d\rho\int_0^{2\pi}(a^2\rho^2\cos^2\theta+b^2\rho^2\sin^2\theta)\mathrm{d}\theta=\frac{\pi}{4}ab\left(a^2+b^2\right)$$

四.(15 分) 设 $R>0$, 计算曲面积分

$$\iint_S\left(xy^2+\frac{1}{3}x^3\right)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+yz^2\mathrm{d}\mathrm{d}x+R^3\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

其中 S 是上半球面 $x^2+y^2+z^2=R^2(z\geqslant 0)$ 方向取上.

解: 记 $S_0: z=0, (x,y)\in D=\left\{(x,y); x^2+y^2\leqslant R^2\right\}$, 曲面定向取下, 由高斯公式得

$$\iint\limits_S\left(xy^2+\frac{1}{3}x^3\right)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+yz^2\mathrm{d}z\mathrm{d}x+R^3\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$= \left(\iint\limits_{S} + \iint\limits_{S_0}\right)\left(xy^2 + \frac{1}{3}x^3\right)\mathrm{d}y\mathrm{d}z + yz^2\mathrm{d}z\mathrm{d}x + R^3\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$- \iint\limits_{S_0}\left(xy^2 + \frac{1}{3}x^3\right)\mathrm{d}y\mathrm{d}z + yz^2\mathrm{d}z\mathrm{d}x + R^3\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$= \iiint\limits_{\{x^2+y^2+z^2\leqslant R^2, z>0\}}\left(x^2+y^2+z^2\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z - \iint\limits_{S_0}\left(xy^2 + \frac{1}{3}x^3\right)\mathrm{d}y\mathrm{d}z + yz^2\mathrm{d}z\mathrm{d}x + R^3\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$= \frac{2\pi}{5}R^5 + \pi R^5 = \frac{7\pi}{5}R^5$$

五.(15 分) 计算广义积分

$$\int_0^{+\infty}\frac{1}{1+x^n}\mathrm{d}x\,(n>1)$$

解: 令 $x^n = \tan^2\theta \Rightarrow \mathrm{d}x = \left(\frac{2}{n}\tan^{\frac{2}{n}-1}\theta\right)\sec^2\theta\mathrm{d}\theta$,即有

$$\int_0^{+\infty}\frac{1}{1+x^n}\mathrm{d}x = \frac{2}{n}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\tan^{\frac{2}{n}-1}\theta\mathrm{d}\theta = \frac{2}{n}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{\frac{2}{n}-1}\theta\cos^{1-\frac{2}{n}}\theta\mathrm{d}\theta$$
$$= \frac{1}{n}B\left(\frac{1}{n}, 1-\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n}\frac{\Gamma\left(\frac{1}{n}\right)\Gamma\left(1-\frac{1}{n}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{n}+1-\frac{1}{n}\right)} = \frac{\pi}{n\sin\frac{\pi}{n}}$$

六.(15 分) 设 $n>0$,求证不等式

$$\frac{1}{2n+2} < \int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^n x\mathrm{d}x < \frac{1}{2n}$$

证明: 令 $t = tanx$,则

$$\frac{1}{2(n+1)} = \int_0^1\frac{t^n}{2}\mathrm{d}t < \int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^n x = \int_0^1\frac{t^n}{1+t^2}\mathrm{d}t < \int_0^1\frac{t^n}{2t}\mathrm{d}t = \frac{1}{2n}$$

七.(15 分) 设 $\alpha \in (0,1)$, $\{a_n\}$ 是正严格递增数列,且 $\{a_{n+1}-a_n\}$ 有界,求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(a_{n+1}^{\alpha} - a_n^{\alpha}\right)$

解: 由题易知这里 $\{a_n\}$ 要分类讨论:

- 若 $\{a_n\}$ 有界,则 $a_{n+1}-a_n \to 0$,有

$$a_{n+1}^{\alpha} - a_n^{\alpha} =\leqslant \alpha a_1^{\alpha-1}\left(a_{n+1}-a_n\right) \to 0$$

- 若 $\{a_n\}$ 无界,设 $a_{n+1}-a_n < M$,则

$$a_{n+1}^{\alpha} - a_n^{\alpha} \leqslant \alpha M a_n^{\alpha-1} \to 0$$

综上 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(a_{n+1}^{\alpha} - a_n^{\alpha}\right) = 0.$

八.(15 分) 讨论级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})^{\alpha}\cos n$ 的条件收敛性与绝对收敛性.

解: 分类讨论

- 当 $\alpha \leqslant 0$ 时,级数发散;
- 当 $\alpha > 2$ 时,有

$$\left|(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})^{\alpha}\cos n\right| = \frac{|\cos n|}{(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})^{\alpha}} \leqslant n^{-\frac{\alpha}{2}}$$

级数绝对收敛;

- 当 $0 < \alpha \leqslant 2$,有

$$\left|\sum_{n=1}^{k}\cos n\right| \leqslant \frac{1}{\sin\frac{1}{2}},\ \left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)^{\alpha} = \frac{1}{\left(\sqrt{n+1}+\sqrt{n}\right)^{\alpha}} \to 0 \text{且} \searrow$$

此时级数收敛,又

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{k}\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)^{\alpha}|\cos n| &\geqslant \sum_{n=1}^{k}\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)^{\alpha}\cos^2 n \\ &= \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{k}\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)^{\alpha} - \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{k}\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)^{\alpha}\cos 2n\end{aligned}$$

从而 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})^{\alpha}|\cos n|$ 发散,故级数条件收敛.

九.(15 分) 设 $f(x)$ 是区间 $[0,1]$ 上的连续函数并满足 $0 \leqslant f(x) \leqslant x$,求证

$$\int_0^1 x^2 f(x)\mathrm{d}x \geqslant \left(\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x\right)^2$$

并求使上式成立等式的所有连续函数 $f(x)$.

证明: 令

$$F(x) = \int_0^x t^2 f(t)\,\mathrm{d}t - \left(\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t\right)^2$$

$$F'(x) = x^2 f(x) - 2f(x)\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t = f(x)\left(x^2 - 2\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t\right) \geqslant f(x)\left(x^2 - 2\int_0^x t\,\mathrm{d}t\right) = 0$$

即有

$$\int_0^1 x^2 f(x)\,\mathrm{d}x - \left(\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x\right)^2 = F(1) - F(0) = \int_0^1 F'(x)\mathrm{d}x \geqslant 0$$

得证. 等号成立当且仅当对 $\forall x \in (0,1)$,有

$$f(x)\left(x^2 - 2\int_0^x f(t)dt\right) = 0$$

即 $f(x) = 0$ 或 $f(x) = x$.

十.(15 分) 设 $f(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上有连续的导函数，且

$$\lim_{x\to+\infty}\sup\left|f(x)+f'(x)\right|\leqslant M<+\infty$$

求证：$\lim\limits_{x\to+\infty}\sup|f(x)|\leqslant M$.

证明： 对 $\forall\varepsilon>0,\exists N>a$，当 $x>N$，有 $f'(x)+f(x)\in[-M-\varepsilon,M+\varepsilon]$，构造 $f(x)=e^x$，由柯西中值定理，存在 $\xi_x\in[N,x]$ 使得

$$\frac{f(x)e^x-f(A)e^N}{e^x-e^N}=\frac{\left(f'(\xi_x)+f(\xi_x)\right)e^{\xi_x}}{e^{\xi_x}}=f'(\xi_x)+f(\xi_x)\in[-M-\varepsilon,M+\varepsilon]$$

即

$$\limsup_{x\to+\infty}f(x)=\limsup_{x\to+\infty}\frac{f(x)e^x}{e^x-e^N}=\limsup_{x\to+\infty}\frac{f(x)e^x-f(N)e^N}{e^x-e^N}\leqslant M+\varepsilon$$

由 $\varepsilon>0$ 可知，即证.

7.7 厦门大学 2014 年数学分析试题解析

一.(15 分) 已知 $a_n>0$，级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{a_n}$ 发散，证明级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{a_n+1}$ 也发散.

证明： 设 $S_n=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{a_n}$，由正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{a_n}$ 发散，可知 $\{S_n\}$ 递增且 $\lim\limits_{n\to\infty}S_n=+\infty$，故 $\forall n\in N^+$，$\exists p\in N^+$，使得 $S_n+\frac{1}{2}<\frac{1}{2}S_{n+p}$，这里我们令 $R_n=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{a_n+1}$，则 $\forall n\in N^+,\exists p\in N^+$，有

$$\begin{aligned}R_{n+p}-R_n&=\frac{1}{a_{n+1}+1}+\frac{1}{a_{n+2}+1}\cdots+\frac{1}{a_{n+p}+1}=\frac{\frac{1}{a_{n+1}}}{1+\frac{1}{a_{n+1}}}+\frac{\frac{1}{a_{n+2}}}{1+\frac{1}{a_{n+2}}}\cdots+\frac{\frac{1}{a_{n+p+1}}}{1+\frac{1}{a_{n+p}}}\\&\geqslant\frac{\frac{1}{a_{n+1}}+\cdots+\frac{1}{a_{n+p}}}{1+\frac{1}{a_1}+\cdots+\frac{1}{a_{n+p-1}}+\frac{1}{a_{n+p}}}=\frac{S_{n+p}-S_n}{1+S_{n+p}}\geqslant\frac{S_{n+p}-\frac{1}{2}\left(S_{n+p}-1\right)}{1+S_{n+p}}\\&=\frac{1}{2}\end{aligned}$$

由柯西收敛准则可知 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{a_n+1}$ 发散.

二.(15 分) 若 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上可微，且 $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=0$，证明在 $(0,+\infty)$ 内存在一数列 $\{\xi_n\}$，使得 $\{\xi_n\}$ 单调，$\lim\limits_{n\to\infty}\xi_n=+\infty$，且 $\lim\limits_{n\to\infty}f'(\xi_n)=0$.

证明： 由 $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=0$，则对于 $\varepsilon=\frac{1}{n}$，则 $\exists M>0$，当 $x>\frac{M}{2}$ 时，有 $\left|\frac{f(x)}{x}\right|<\frac{1}{n}$，又 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上可微，可由拉格朗日中值定理，对 $\forall x>0$ 有

$$f(x)-f\left(\frac{x}{2}\right)=f'(\xi)\cdot\frac{x}{2}\quad\left(\xi\in\left(\frac{x}{2},x\right)\right)$$

$$\Rightarrow\left|f'(\xi)\right|=\left|2\cdot\frac{f(x)}{x}-\frac{f\left(\frac{x}{2}\right)}{\frac{x}{2}}\right|\leqslant2\left|\frac{f(x)}{x}\right|+\left|\frac{f\left(\frac{x}{2}\right)}{\frac{x}{2}}\right|$$

则对于 $\varepsilon=\frac{1}{n}$，$\exists M>0$，当 $x>M$ 时，取 $\xi_n\in(\frac{nx}{2},\frac{(2n+1)x}{2})$，显然 $\{\xi_n\}$ 单调，$\lim\limits_{n\to\infty}\xi_n=+\infty$，且 $\lim\limits_{n\to\infty}f'(\xi_n)=0$.

三.(20 分)$a>0,b>0,c>0$，证明不等式：

$$\left(\frac{a+b+c}{3}\right)^{abc}<a^a b^b c^c$$

证明： 设在 $x>0$ 上定义函数 $f(x)=xlnx$，显然 $f''(x)=\frac{1}{x}>0$，即 $f(x)$ 为严格凸函数，可由 Jensen 不等式得

$$f\left(\frac{a+b+c}{3}\right)\leqslant\frac{1}{3}[f(a)+f(b)+f(c)]$$

即

$$\frac{a+b+c}{3}\ln\frac{a+b+c}{3}\leqslant\frac{1}{3}(a\ln a+b\ln b+c\ln c)$$

整理即证.

四.(20 分) 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 可导且导函数连续，证明：

$$\lim_{n\to\infty}n\int_0^1 x^n f(x)dx=f(1)$$

证明： 易知 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 有界且一致收敛，即存在 $M>0$，有 $|f(x)|\leq M$

$$\left|\int_0^1 x^n f(x)\,\mathrm{d}x\right|\leq\int_0^1 Mx^n\,\mathrm{d}x=\frac{M}{n+1}\to 0\quad(当 n\to\infty)$$

又

$$n\int_0^1 x^n f(x)\,\mathrm{d}x=n\int_0^1 x^n\Big(f(x)-f(1)\Big)\,\mathrm{d}x+\frac{n}{n+1}f(1).$$

假设 $\varepsilon>0$，存在 $N<1$，对 $x\in(N,1)$ 使得 $|f(x)-f(1)|<\varepsilon$，有

$$\begin{aligned}\left|n\int_0^1 x^n\Big(f(x)-f(1)\Big)\,\mathrm{d}x\right|&\leq n\int_0^N x^n\Big|f(x)-f(1)\Big|\,\mathrm{d}x+n\int_a^1 x^n\Big|f(x)-f(1)\Big|\,\mathrm{d}x\\&\leq 2M\frac{n}{n+1}N^n+\frac{n}{n+1}\varepsilon\end{aligned}$$

因此

$$\lim_{n\to\infty}n\int_0^1 x^n f(x)dx=f(1)$$

五.(20 分) 设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上连续，令 $f(x)=\frac{1}{n}\sum\limits_{k=0}^{n-1}f\left(x+\frac{k}{n}\right)$，求证：$f(x)$ 在任一闭区间 $[a,b]$ 上一致收敛到函数 $g(x)=\int_0^1 f(x+t)\,\mathrm{d}t$.

证明： 由 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上连续，可知 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛，即有

$$g(x)=\int_0^1 f(x+t)\,\mathrm{d}t=\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}f(\xi_k)\quad\left(其中\xi_k\in\left(x+\frac{k}{n},x+\frac{k+1}{n}\right)\right)$$

对 $\forall\varepsilon>0$,$\exists N=[\frac{1}{\delta}]$,当 $n>N$ 时,有 $\left|x+\frac{k}{n}-\xi_k\right|\leqslant\frac{1}{n}<\delta$,即

$$|f_n(x)-g(x)|=\left|\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\left[f\left(x+\frac{k}{n}\right)-f(\xi)\right]\right|\leqslant\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\left|f\left(x+\frac{k}{n}\right)-f(\xi_k)\right|<\frac{n\varepsilon}{n}=\varepsilon$$

因此 $f(x)$ 在任一闭区间 $[a,b]$ 上一致收敛到函数 $g(x)=\int_0^1 f(x+t)\,\mathrm{d}t$. 或考虑这样，对$\varepsilon>0$, 取$N=\left[\frac{1}{\delta}\right]+1,\forall n>N,x\in[a,b],t\in\left[\frac{k}{n},\frac{k+1}{n}\right]$,有

$$\left|x+\frac{k}{n}-(x-t)\right|=\left|\frac{k}{n}-t\right|\leqslant\frac{1}{n}<\delta\Rightarrow\left|f\left(x+\frac{k}{n}\right)-f(x+t)\right|<\varepsilon$$

$$\begin{aligned}|f_n(x)-g(x)|&=\left|\sum_{k=0}^{n-1}\int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}}\left[f\left(x+\frac{k}{n}\right)-f(x+t)\right]\right|\\&=\sum_{k=0}^{n-1}\int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}}\left|f\left(x+\frac{k}{n}\right)-f(x+t)\right|\mathrm{d}t\\&<\sum_{k=0}^{n-1}\int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}}\varepsilon\mathrm{d}t=\varepsilon\end{aligned}$$

故$\{f_n(x)\}$在$[a,b]$一致收敛于 $\int_0^1 f(x+t)\mathrm{d}t$

六.(20 分) 求第二类曲面积分

$$I=\iint\limits_{x^2+2y^2+3z^2=1}\frac{x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}$$

曲面方向为外侧.

解: 记$r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$, $D:x^2+2y^2+3z^2=1$, $D'=\left\{(x,y,z)\,|x^2+2y^2+3z^2=\varepsilon^2\right\}$, 设$\Omega=D+(-D')$, 由高斯定理

$$\iint\limits_{D+(-D')}P\mathrm{d}y\mathrm{d}z+Q\mathrm{d}z\mathrm{d}x+R\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iiint\limits_{\Omega}\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)=0$$

又 $\cos\alpha=\frac{x}{r},\cos\beta=\frac{y}{r},\cos\gamma=\frac{z}{r}$, 可得

$$\begin{aligned}\iint\limits_{D}\frac{x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{r^3}&=\iint\limits_{D'}\frac{x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{r^3}\\&=\frac{1}{\varepsilon^2}\iint\limits_{D'}\cos\alpha\mathrm{d}y\mathrm{d}z+\cos\beta\mathrm{d}z\mathrm{d}x+\cos\gamma\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\&=\frac{1}{\varepsilon^2}\iint\limits_{D'}\left(\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma\right)\mathrm{d}s\end{aligned}$$

$$= \frac{1}{\varepsilon^2}\iint\limits_{D'} \mathrm{d}s = 4\pi$$

七.(20 分) 设 $f:[a,b]\to R$，在闭区间 $[a,b]$ 上单调递增，且 $f(a)>a, f(b)<b$. 则存在 $\xi\in(a,b)$ 使得 $f(\xi)=\xi$.

证明：由题设 $A(a,f(a))$ 与 $B(b,f(b))$ 分别位于直线 $f(x)=x$ 的上下方，取中点 $c=\dfrac{a+b}{2}$，若点 $C(c,f(c))$ 在直线上，即证. 存在闭区套 $[a,b]\supset[a,b]\supset\ldots\supset[a_n,b_n]\supset\ldots$ 使两端点位于直线上下各一点，有

$$a_n<f\left(a_n\right), f\left(b_n\right)<b_n, b_n-a_n=\frac{b-a}{2^n}\to 0$$

由闭区间套定理，总存在 $\exists\xi\in[a_n,b_n]n=1,2,\cdots$，且 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\lim\limits_{n\to\infty}b_n=\xi$. 根据 f 在 $[a,b]$ 上单调递增，对 $\forall n$ 有 $a_n<b_n$，且 $a_n<f\left(a_n\right)\leqslant f(\xi)\leqslant f\left(b_n\right)<b_n$，又 $\lim\limits_{n\to\infty}(b_n-a_n)=0$，即

$$\lim_{n\to\infty}f\left(b_n\right)=\lim_{n\to\infty}f\left(a_n\right)=f(\xi), a_n\leqslant f(\xi)\leqslant b$$

因此 $f(\xi)=\xi$.

八.(20 分) 设 f 在 $[a,b]$ 可积，证明：对任意的 $\varepsilon>0$，存在连续函数 f_ε 使得

$$\int_a^b|f(x)-f_\varepsilon(x)|\,dx<\varepsilon$$

证明：由 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积，则对 $\varepsilon>0$，分割 $a=x_0<x_1<\cdots<x_i=b$，$\Delta x_i=x_i-x_{i-1}$，使得 $\sum\limits_{i=1}^n m_i\Delta x_i\leqslant\varepsilon$，其中 $m_i=\left\{\sup\limits_{x\in\Delta x_i}f(x),\inf\limits_{x\in\Delta x_i}f(x)\right\}$. 在 $[a,b]$ 上作函数 $f_\varepsilon(x)$ 如下，当 $x\in[x_{i-1},x_i]$ 时，有

$$f_\varepsilon\left(x\right)=f\left(x_{i-1}\right)+\frac{f\left(x_i\right)-f\left(x_{i-1}\right)}{x_\mathrm{i}-x_{\mathrm{i}-1}}\left(x-x_i\right)$$

显然 $f_\varepsilon(x)$ 在 $[a,b]$ 为一次函数，则 $f_\varepsilon\left(x\right)$ 在 $[x_i-1,x_i]$ 上连续，从而 $f_\varepsilon\left(x\right)$ 在 $[a,b]$ 连续，即有

$$\begin{aligned}
\int_a^b\left|f\left(x\right)-f_\varepsilon\left(x\right)\right|\mathrm{d}x&=\sum_{i=1}^n\int_{x_{i-1}}^{x_i}\left|f\left(x\right)-f_\varepsilon\left(x\right)\right|\mathrm{d}x\\
&\leqslant\sum_{i=1}^n\int_{x_{i-1}}^{x_i}m_i\mathrm{d}x=m_i\sum_{i=1}^n\int_{x_{i-1}}^{x_i}\mathrm{d}x\\
&=\sum_{i=1}^n m_i\Delta x_i\leqslant\varepsilon
\end{aligned}$$

得证.

第 8 章 历年数学竞赛真题试题与解析

8.1 第十届全国大学生数学竞赛非数类预赛参考答案

一、填空题 (本题满分 24 分，每题 6 分

1. 设 $\alpha \in (0,1)$，则 $\lim\limits_{n\to+\infty}\left((n+1)^{\alpha}-n^{\alpha}\right)=$______.

【答案】0.

【解析】等价无穷小 $(1+x)^{\alpha}-1 \backsim \alpha x$，得

$$\lim_{n\to\infty}\left((n+1)^{\alpha}-n^{\alpha}\right)=\lim_{n\to\infty}n^{\alpha}\left((1+1/n)^{\alpha}-1\right)=\lim_{n\to\infty}n^{\alpha}\times\frac{\alpha}{n}=0$$

2.若曲线$y=f(x)$是由 $\begin{cases} x=t+\cos t \\ e^{y}+ty+\sin t=1 \end{cases}$ 确定，则此曲线在$t=0$ 对应点处的切线方程为______.

【答案】$x+y-1=0$.

【解析】易知 $t=0$ 处上的曲线为点 $(1,0)$，即方程组对 t 求导得

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=1-\sin t,\ \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=-\frac{y+\cos t}{e^{y}+t}$$

$$\Rightarrow\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\Big/\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=-\frac{y+\cos t}{(e^{y}+1)(1-\sin t)}\Rightarrow\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\Big|_{t=0}=-1$$

故曲线在 $t=0$ 对应点处的切线方程为 $x+y-1=0$.

3. $\displaystyle\int\frac{\ln\left(x+\sqrt{1+x^{2}}\right)}{(1+x^{2})^{\frac{3}{2}}}\mathrm{d}x=$______.

【答案】$\dfrac{x}{\sqrt{1+x^{2}}}\ln\left(x+\sqrt{1+x^{2}}\right)-\dfrac{1}{2}\ln\left(1+x^{2}\right)+C$.

【解析】简单的凑微分，如下

$$\begin{aligned}\int\frac{\ln\left(x+\sqrt{1+x^{2}}\right)}{(1+x^{2})^{\frac{3}{2}}}\mathrm{d}x&=\int\ln\left(x+\sqrt{1+x^{2}}\right)\mathrm{d}\left(\frac{x}{\sqrt{1+x^{2}}}\right)\\&=\frac{x}{\sqrt{1+x^{2}}}\ln\left(x+\sqrt{1+x^{2}}\right)-\int\frac{x}{1+x^{2}}\mathrm{d}x\\&=\frac{x}{\sqrt{1+x^{2}}}\ln\left(x+\sqrt{1+x^{2}}\right)-\frac{1}{2}\ln\left(1+x^{2}\right)+C\end{aligned}$$

4. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos x\sqrt{\cos 2x}\sqrt[3]{\cos 3x}}{x^{2}}=$______.

【答案】3.

【解析】这题方法很多，简单的等价无穷小，或拆项、洛必达以及泰勒都可以.

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x\sqrt{\cos 2x}\sqrt[3]{\cos 3x}}{x^2} &= \lim_{x\to 0}\left(\frac{1-\cos x}{x^2}+\frac{\cos x\left(1-\sqrt{\cos 2x}\sqrt[3]{\cos 3x}\right)}{x^2}\right)\\ &= \frac{1}{2}+\lim_{x\to 0}\frac{1-\sqrt{\cos 2x}\sqrt[3]{\cos 3x}}{x^2}\\ &= \frac{1}{2}+\lim_{x\to 0}\left(\frac{1-\cos\sqrt{2x}}{x^2}+\frac{\cos\sqrt{2x}\left(1-\sqrt[3]{\cos 3x}\right)}{x^2}\right)\\ &= \frac{1}{2}+\lim_{x\to 0}\left(\frac{1-\sqrt{1+(\cos 2x-1)}}{x^2}+\frac{1-\sqrt[3]{1+(\cos 3x-1)}}{x^2}\right)\\ &= \frac{1}{2}+\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 2x}{2x^2}+\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 3x}{3x^2}\\ &= 3\end{aligned}$$

二、解答题 (本题满分 8 分) 设函数 $f(t)$ 在 $t\neq 0$ 时一阶连续可导，且 $f(1)=0$，求函数 $f(x^2-y^2)$，使得曲线积分 $\int_L y\left(2-f\left(x^2-y^2\right)\right)\mathrm{d}x+xf\left(x^2-y^2\right)\mathrm{d}y$ 与路径无关，其中 L 为任一不与直线 $y=\pm x$ 相交的分段光滑闭曲线.

【解析】记 $\begin{cases}P(x,y)=y\left(2-f\left(x^2-y^2\right)\right)\\ Q(x,y)=x+xf\left(x^2-y^2\right)\end{cases}$，于是

$$\begin{cases}\dfrac{\partial P(x,y)}{\partial y}=2-f\left(x^2-y^2\right)+2y^2f'\left(x^2-y^2\right)\\ \dfrac{\partial Q(x,y)}{\partial x}=f\left(x^2+y^2\right)+2x^2f'\left(x^2-y^2\right)\end{cases}$$

由题设可知，积分与路径无关，于是有

$$\frac{\partial Q(x,y)}{\partial x}=\frac{\partial P(x,y)}{\partial y}\Longrightarrow\left(x^2-y^2\right)f'\left(x^2-y^2\right)+f\left(x^2-y^2\right)=1$$

....5 分

记 $t=x^2-y^2$，即微分方程

$$tf'(t)+f(t)=1\Leftrightarrow(tf(y))'=1\Rightarrow tf(t)=y+C$$

又 $f(1)=0$，可得 $C=-1$，$f(t)=1-\dfrac{1}{t}$，从而

$$f\left(x^2-y^2\right)=1-\frac{1}{x^2-y^2}$$

....8 分

三、解答题 (本题满分 14 分) 设 $f(x)$ 在区间 $[0,1]$ 上连续，且 $1 \leqslant f(x) \leqslant 3$. 证明：

$$0 \leqslant \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x \int_0^1 \frac{1}{f(x)}\mathrm{d}x \leqslant \frac{4}{3}$$

【证明】由 Cauchy-Schwarz 不等式：

$$\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x \int_0^1 \frac{1}{f(x)}\mathrm{d}x \geqslant \left(\int_0^1 \sqrt{f(x)}\sqrt{\frac{1}{f(x)}}\mathrm{d}x\right)^2 = 1$$

......................................4 分

又由基本不等式得：

$$\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x \int_0^1 \frac{3}{f(x)}\mathrm{d}x \leq \frac{1}{4}\left(\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x + \int_0^1 \frac{3}{f(x)}\mathrm{d}x\right)^2$$

再由条件 $1 \leq f(x) \leq 3$，有 $(f(x)-1)(f(x)-3) \leq 0$，则

$$f(x) + \frac{3}{f(x)} \leq 4 \Rightarrow \int_0^1 \left(f(x) + \frac{3}{f(x)}\right)\mathrm{d}x \leq 4$$

......................................10 分

即可得

$$1 \leq \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x \int_0^1 \frac{1}{f(x)}\mathrm{d}x \leq \frac{4}{3}$$

......................................14 分

四、解答题 (本题满分 12 分) 计算三重积分 $\iiint_{(V)}(x^2+y^2)\mathrm{d}V$，其中 (V) 是由 $x^2+y^2+(z-2)^2 \geqslant 4, x^2+y^2+(z-1)^2 \leqslant 9$ 及 $z \geqslant 0$ 所围成的空间图形.

【解析】(1) 计算打球 (V_1) 的积分，利用球坐标换元，令

$$(V_1):\begin{cases} x = r\sin\varphi\cos\theta, y = r\sin\varphi\sin\theta, z-1 = r\cos\varphi \\ 0 \leqslant r \leqslant 3, 0 \leqslant \varphi \leqslant \pi, 0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi \end{cases}$$

于是有

$$\iiint_{(V_1)}(x^2+y^2)\,\mathrm{d}V = \int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta \int_0^{\pi}\mathrm{d}\varphi \int_0^3 r^3\sin^2\varphi r^2\sin\varphi = \frac{8}{15}\cdot 3^5\pi$$

......................................4 分

(2) 计算小球 (V_2) 的积分，利用球坐标换元，令

$$(V_2):\begin{cases} x = r\sin\varphi\cos\theta, y = r\sin\varphi\sin\theta, z-2 = r\cos\varphi \\ 0 \leqslant r \leqslant 2, 0 \leqslant \varphi \leqslant \pi, 0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi \end{cases}$$

于是有

$$\iiint_{(V_2)} (x^2+y^2)\,\mathrm{d}V = \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\theta \int_0^{\pi} \mathrm{d}\varphi \int_0^{2} r^2 \sin^2\varphi r^2 \sin\varphi = \frac{8}{15}\cdot 2^5\pi$$

....8 分

(3) 计算大球 $z=0$ 下部分的积分 V_3，利用球坐标换元，令

$$(V_3):\begin{cases} x=r\cos\theta, y=r\sin\theta, 1-\sqrt{9-r^2}\leqslant z\leqslant 0 \\ 0\leqslant r\leqslant 2\sqrt{2}, 0\leqslant\theta\leqslant 2\pi \end{cases}$$

于是有

$$\begin{aligned}\iiint_{(V_3)} (x^2+y^2)\,\mathrm{d}V &= \iint_{r\leqslant 2\sqrt{2}} r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta \int_{1-\sqrt{9-r^2}}^{0} r^2\mathrm{d}z \\ &= \int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta \int_0^{2\sqrt{2}} r^3\left(\sqrt{9-r^2}-1\right) \\ &= \left(124-\frac{2}{5}\cdot 3^5+\frac{2}{5}\right)\pi\end{aligned}$$

综上所述有

$$\begin{aligned}\iiint_{(V)} (x^2+y^2)\,\mathrm{d}V &= \iiint_{(V_1)} (x^2+y^2)\,\mathrm{d}V - \iiint_{(V_2)} (x^2+y^2)\,\mathrm{d}V - \iiint_{(V_3)} (x^2+y^2)\,\mathrm{d}V \\ &= \frac{8}{15}\cdot 3^5\pi + \frac{8}{15}\cdot 2^5\pi + \left(124-\frac{2}{5}\cdot 3^5+\frac{2}{5}\right)\pi \\ &= \frac{256}{3}\pi\end{aligned}$$

....12 分

五、解答题 (本题满分 14 分) 设 $f(x,y)$ 在区域 D 内可微，且 $\sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2}\leqslant M$，$A(x_1,y_1), B(x_2,y_2)$ 是 D 内两点，线段 AB 包含在 D 内，证明：

$$|f(x_1,y_1)-f(x_2,y_2)|\leqslant M|AB|$$

其中 $|AB|$ 表示线段 AB 的长度.

【证明】作辅助函数

$$\varphi(t)=f(x_1+t(x_2-x_1)\cdot y_1+t(y_2-y_1))$$

....2 分

显然 $\varphi(t)$ 在 $[0,1]$ 可导，根据 Lagrange 中值定理，存在 $c\in(0,1)$，使得

$$\varphi(1)-\varphi(0)=\varphi'(c)=\frac{\partial f(u,v)}{\partial u}(x_2-x_1)+\frac{\partial f(u,v)}{\partial v}(y_2-y_1)$$

……………………………………8 分

即可得到

$$\begin{aligned}|\varphi(1)-\varphi(0)| &= |f(x_2,y_2)-f(x_1,y_1)| \\ &= \left|\frac{\partial f(u,v)}{\partial u}(x_2-x_1)+\frac{\partial f(u,v)}{\partial v}(y_2-y_1)\right| \\ &\leqslant \sqrt{\left(\frac{\partial f(u,v)}{\partial u}\right)^2+\left(\frac{\partial f(u,v)}{\partial v}\right)^2}\cdot\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2} \\ \leqslant M|AB|\end{aligned}$$

……………………………………14 分

六、解答题 (本题满分 14 分)

证明：对于连续函数 $f(x)>0$，有

$$\ln\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x \geqslant \int_0^1 \ln f(x)\,\mathrm{d}x$$

【证明】由定积分定义，将 $[0,1]$ 分 n 等分，可取 $\Delta x=\frac{1}{n}$，由"算术平均数 $\geqslant$ 几何平均数"得：

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) \geqslant \sqrt[n]{f\left(\frac{1}{n}\right)\cdots f\left(\frac{n}{n}\right)} = \exp\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\ln f\left(\frac{k}{n}\right)$$

……………………………………4 分

$$\Rightarrow \int_0^1 f(x)\mathrm{d}x \geqslant \exp\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\ln f\left(\frac{k}{n}\right) = \exp\int_0^1 \ln f(x)\mathrm{d}x$$

……………………………………10 分

然后两边取对数即证

$$\ln\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x \geqslant \int_0^1 \ln f(x)\,\mathrm{d}x$$

……………………………………14 分

或者考虑令 $g(x)=\ln x$，则 $g'(x)=\frac{1}{x}$，$g''(x)=-\frac{1}{x^2}<0$，所以 $g(x)$ 为凹函数，可由琴声不等式定理即证.

七、解答题 (本题满分 8 分) 已知 a_k, b_k 是正数数列，且 $b_{k+1}-b_k\geqslant\delta>0, k=1,2,\cdots$，$\delta$ 为一切常数，证明：若级数 $\sum\limits_{k=1}^{+\infty}a_k$ 收敛，则级数 $\sum\limits_{k=1}^{+\infty}\frac{k\sqrt[k]{(a_1a_2\cdots a_k)(b_1b_2\cdots b_k)}}{b_{k+1}b_k}$ 收敛.

【证明】令 $S_k=\sum\limits_{i=1}^{k}a_ib_i$，$a_kb_k=S_k-S_{k-1}$，$S_0=0$，$a_k=\frac{s_k-S_{k-1}}{b_k}$，$k=1,2,\cdots$ 4

分

$$\sum_{k=1}^{N} a_k = \sum_{k=1}^{N} \frac{S_k - S_{k-1}}{b_k} = \sum_{k=1}^{N-1}\left(\frac{S_k}{b_k} - \frac{S_k}{b_{k+1}}\right) + \frac{S_N}{b_N}$$
$$= \sum_{k=1}^{N-1} \frac{b_{k+1} - b_k}{b_k b_{k+1}} S_k + \frac{S_N}{b_N} \geqslant \sum_{k=1}^{N-1} \frac{\delta}{b_k b_{k+1}} S_k$$

所以 $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{S_k}{b_k b_{k+1}}$ 收敛. .... 10 分

由算术-几何平均不等式得

$$\sqrt[k]{(a_1 a_2 \cdots a_k)(b_1 b_2 \cdots b_k)} \leqslant \frac{a_1 b_1 + \cdots + a_k b_k}{k} = \frac{S_k}{k}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k\sqrt[k]{(a_1 a_2 \cdots a_k)(b_1 b_2 \cdots b_k)}}{b_{k+1} b_k} \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} \frac{S_k}{b_k b_{k+1}}$$

故结论成立.

.... 14 分

8.2 第九届全国大学生数学竞赛非数类预赛参考答案

一、填空题 (本题满分 42 分,每题 7 分)

1. 已知可导函数 $f(x)$ 满足 $f(x)\cos x + 2\int_0^x f(t)\sin t\mathrm{d}x = x+1$,则 $f(x) =$______.

【答案】$\sin x + \cos x$.

【解析】两边同时对 x 求导

$$f'(x)\cos x + f(x)\sin x = 1 \Longrightarrow f'(x) + f(x)\tan x = \sec x.$$

由常数变易法,从而

$$\begin{aligned} f(x) &= \mathrm{e}^{-\int \tan x \mathrm{d}x}\left(\int \sec x \mathrm{e}^{\int \tan x \mathrm{d}x} \mathrm{d}x + C\right) \\ &= \mathrm{e}^{\ln\cos x}\left(\int \frac{1}{\cos x}\mathrm{e}^{-\ln\cos x}\mathrm{d}x + C\right) \\ &= \cos x\left(\int \frac{1}{\cos^2 x}\mathrm{d}x + C\right) \\ &= \cos x(\tan x + C) = \sin x + C\cos x \end{aligned}$$

由于 $f(0) = 1$,故 $f(x) = \sin x + \cos x$.

2. 极限 $\lim\limits_{n\to 0} \sin^2(\pi\sqrt{n^2+n}) =$______.

【答案】1

【解析】

$$\begin{aligned}\lim_{n\to 0}\sin^2(\pi\sqrt{n^2+n}) &= \lim_{n\to 0}\sin^2(\pi\sqrt{n^2+n}-n\pi)\\ &= \lim_{n\to 0}\sin^2\left(\frac{n\pi}{\sqrt{n^2+n}+n}\right)=1\end{aligned}$$

3. 设 $w=f(u,v)$ 具有二阶连续偏导数，且 $u=x-cy, v=x+cy$，其中 c 为非零常数。则 $w_{xx}-\frac{1}{c^2}w_{yy}=$______.

【答案】$4f_{12}$.

【解析】

$$w_x=f_1+f_2, w_{xx}=f_{11}+2f_{12}+f_{22}, w_y=c(f_2-f_1),$$

$$w_{yy}=c\frac{\partial}{\partial x}(f_2-f_1)=c(cf_{11}-cf_{12}-cf_{21}+cf_{22})=c^2(f_{11}-2f_{12}+f_{22}).$$

所以

$$w_{xx}-\frac{1}{c^2}w_{yy}=4f_{12}.$$

4. 设 $f(x)$ 有二阶导数连续，且 $f(0)=f'(0)=0, f''(0)=6$，则 $\lim_{n\to 0}\frac{f(\sin^2 x)}{x^4}=$______.

【答案】3

【解析】$f(x)$ 在 $x=0$ 处的泰勒展开式

$$f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{1}{2}f''(\xi)x^2,$$

所以

$$f(\sin^2 x)=\frac{1}{2}f''(\xi)\sin^4 x,$$

于是

$$\lim_{n\to 0}\frac{f(\sin^2 x)}{x^4}=\lim_{n\to 0}\frac{\frac{1}{2}f''(\xi)\sin^4 x}{x^4}=3.$$

5. 不定积分 $\int\frac{\mathrm{e}^{-\sin x}\sin 2x}{(1-\sin x)^2}\mathrm{d}x=$______.

【答案】$\frac{2\mathrm{e}^{-\sin x}}{1-\sin x}+C$.

【解析】令 $\sin x=v$，则

$$\begin{aligned}I&=2\int\frac{v\mathrm{e}^{-v}}{(1-v)^2}\mathrm{d}v\\ &=2\int\frac{\mathrm{e}^{-v}}{v-1}\mathrm{d}v+2\int\frac{\mathrm{e}^{-v}}{(v-1)^2}\mathrm{d}v\\ &=2\int\frac{\mathrm{e}^{-v}}{v-1}\mathrm{d}v-2\int\mathrm{e}^{-v}\mathrm{d}\left(\frac{1}{v-1}\right)\\ &=2\int\frac{\mathrm{e}^{-v}}{v-1}\mathrm{d}v-2\left(\frac{\mathrm{e}^{-v}}{v-1}+\int\frac{\mathrm{e}^{-v}}{v-1}\mathrm{d}v\right)\\ &=-\frac{2\mathrm{e}^{v}}{v-1}+C=\frac{2\mathrm{e}^{-\sin x}}{1-\sin x}+C\end{aligned}$$

6. 记曲面 $z^2=x^2+y^2$ 和 $z=\sqrt{4-x^2-y^2}$ 围成空间区域 V，则三重积分 $\iiint_V z\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$ =______.

【答案】2π.

【解析】使用球面坐标

$$
\begin{aligned}
I &= \iiint_V z\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z \\
&= \int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\pi/4}\mathrm{d}\varphi\int_0^2 \rho\cos\varphi\cdot\rho^2\sin\varphi\mathrm{d}\rho \\
&= 2\pi\cdot\frac{1}{2}\sin^2\varphi\Big|_0^{\pi/4}\cdot\frac{1}{4}\rho^4\Big|_0^2 \\
&= 2\pi
\end{aligned}
$$

二、解答题 (本题满分 14 分) 设二元函数 $f(x,y)$ 在平面上有连续的二阶导数，对任意角 α，定义一元函数

$$g_\alpha(t)=f(t\cos\alpha,t\sin\alpha).$$

若对任何 α 都有 $\frac{\mathrm{d}g_\alpha(0)}{\mathrm{d}t}=0$ 且 $\frac{\mathrm{d}^2g_\alpha(0)}{\mathrm{d}t^2}>0$。证明：$f(0,0)$ 是 $f(x,y)$ 的极小值。

【证明】由于

$$\frac{\mathrm{d}g_\alpha(0)}{\mathrm{d}t}=(f_x,f_y)_{(0,0)}\begin{pmatrix}\cos\alpha\\ \sin\alpha\end{pmatrix}=0$$

对一切 α 成立，故 $(f_x,f_y)_{(0,0)}=(0,0)$，即 $(0,0)$ 是 $f(x,y)$ 的驻点。

....4 分

记

$$H_f=(x,y)=\begin{pmatrix}f_{xx} & f_{xy}\\ f_{yx} & f_{yy}\end{pmatrix}=0,$$

则

$$
\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}^2g_\alpha(0)}{\mathrm{d}t^2} &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[(f_x,f_y)\begin{pmatrix}\cos\alpha\\ \sin\alpha\end{pmatrix}\right]_{(0,0)} \\
&= (\cos\alpha,\sin\alpha)H_f(0,0)\begin{pmatrix}f_{xx} & f_{xy}\\ f_{yx} & f_{yy}\end{pmatrix}>0
\end{aligned}
$$

....10 分

上式对任何单位向量 $(\cos\alpha,\sin\alpha)$ 成立，故 $H_f(0,0)$ 是一个正定矩阵，而 $f(0,0)$ 是 $f(x,y)$ 的极小值。

....14 分

三、解答题 (本题满分 14 分) 设曲线 Γ 为曲线

$$x^2+y^2+z^2=1, x+z=1, x\geqslant 0, y\geqslant 0, z\geqslant 0$$

上从点 $A(1,0,0)$ 到点 $B(0,0,1)$ 的一段，求曲线积分 $I=\int_\Gamma y\mathrm{d}x+z\mathrm{d}y+x\mathrm{d}z$.

【解析】记 Γ_1 为从 B 到 A 的直线段，则 $x=t, y=0, z=1-t, 0\leqslant t\leqslant 1$,

$$\int_{\Gamma_1} y\mathrm{d}x+z\mathrm{d}y+x\mathrm{d}z=\int_0^1 t\mathrm{d}(1-t)=-\frac{1}{2}.$$

....4 分

设 Γ 和 Γ_1 围成的平面区域 $\sum$，方向按右手法则。由 Stokes 公式得到

$$\left(\int_\Gamma+\int_{\Gamma_1}\right)y\mathrm{d}x+z\mathrm{d}y+x\mathrm{d}z=\iint_\Sigma\begin{vmatrix}\mathrm{d}y\mathrm{d}z & \mathrm{d}z\mathrm{d}x & \mathrm{d}x\mathrm{d}y\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ y & z & x\end{vmatrix}$$

$$=-\iint_\Sigma \mathrm{d}y\mathrm{d}z+\mathrm{d}z\mathrm{d}x+\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

....8 分

右边三个积分都是 $\sum$ 在各个坐标面上的投影面积，而 $\sum$ 在 xOz 面上的投影面积为零。故

$$I+\int_{\Gamma_1}=-\iint_\Sigma \mathrm{d}y\mathrm{d}z+\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

曲线 Γ 在 xOy 面上投影的方程为 $\dfrac{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2}{\left(\frac{1}{2}\right)^2}+\dfrac{y^2}{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2}=1.$ .... 12 分

又该投影(半个椭圆)的面积为 $\iint_\Sigma \mathrm{d}x\mathrm{d}y=\dfrac{\pi}{4\sqrt{2}}$, 同理 $\iint_\Sigma \mathrm{d}y\mathrm{d}z=\dfrac{\pi}{4\sqrt{2}}$.

所以

$$I=\frac{1}{2}-\frac{\pi}{2\sqrt{2}}.$$

....14 分

四、解答题 (本题满分 15 分) 设函数 $f(x)>0$ 且在实轴上连续，若对任意实数 t，有

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-|t-x|}f(x)\mathrm{d}x\leqslant 1,$$

证明：$\forall a,b,a<b$，有

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\leqslant\frac{b-a+2}{2}.$$

【证明】由于 $\forall a,b,a<b$，有 $\int_a^{+b}\mathrm{e}^{-|t-x|}f(x)\mathrm{d}x\leqslant\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-|t-x|}f(x)\mathrm{d}x\leqslant 1,$

因此

$$\int_a^b \mathrm{d}t \int_a^b \mathrm{e}^{-|t-x|} f(x)\mathrm{d}x \leqslant b-a.$$

......................................4 分

然而

$$\int_a^b \mathrm{d}t \int_a^b \mathrm{e}^{-|t-x|} f(x)\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\Big(\int_a^b \mathrm{e}^{-|t-x|}\mathrm{d}t\Big)\mathrm{d}x,$$

其中

$$\int_a^b \mathrm{e}^{-|t-x|}\mathrm{d}t = \int_a^x \mathrm{e}^{t-x}\mathrm{d}t + \int_x^b \mathrm{e}^{x-t} = 2-\mathrm{e}^{a-x}-\mathrm{e}^{x-b}.$$

这样就有

$$\int_a^b f(x)(2-\mathrm{e}^{a-x}-\mathrm{e}^{x-b})\mathrm{d}x \leqslant b-a. \tag{$*$}$$

......................................10 分

即

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \leqslant \frac{b-a}{2}+\frac{1}{2}\Big[\int_a^b \mathrm{e}^{a-x} f(x)\mathrm{d}x + \int_a^b \mathrm{e}^{x-b} f(x)\mathrm{d}x\Big].$$

注意到

$$\int_a^b \mathrm{e}^{a-x} f(x)\mathrm{d}x = \int_a^b \mathrm{e}^{-|a-x|} f(x)\mathrm{d}x \leqslant 1, \int_a^b \mathrm{e}^{x-b} f(x)\mathrm{d}x \leqslant 1.$$

......................................13 分

把以上两个式子代入(∗),即得结论。

......................................15 分

8.3 第八届全国大学生数学竞赛数学类决赛试题

一、填空题 (本题满分 20 分, 共 4 小题, 每小题 5 分)

1. 设 $x^4+3x^2+2x+1=0$ 的 4 个根为 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$. 则行列式 $\begin{vmatrix}\alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \alpha_4\\ \alpha_2 & \alpha_3 & \alpha_4 & \alpha_1\\ \alpha_3 & \alpha_4 & \alpha_1 & \alpha_2\\ \alpha_4 & \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3\end{vmatrix}=$______

2. 设 a 为实数，关于 x 的方程 $3x^4-8x^3-30x^2+72x+a=0$ 有虚根的充分必要条件是 a 满足______

3. 计算曲面积分 $I=\iint_S \dfrac{ax\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z+(x+a)^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$ $(a>0$ 为常数)，其中 $S: z=-\sqrt{a^2-x^2-y^2}$, 取上侧. $I=$ ______

4. 记两特征值为 1, 2 的 2 阶实对称矩阵全体为 Γ. $\forall A\in\Gamma$, a_{21} 表示 A 的 $(2,1)$ 位置元素. 则集合 $\cup_{A\in\Gamma}\{a_{21}\}$ 的最小元 = ______

二、(本题 15 分) 在空间直角坐标系中设旋转抛物面 Γ 的方程为 $z=\frac{1}{2}(x^2+y^2)$. 设 P 为空间中的平面，它交抛物面 Γ 与曲线 C. 问: C 是何种类型的曲线? 证明你的结论.

三、证明题 (本题 15 分) 设 n 阶方阵 A, B 满足: 秩 $(ABA)=$ 秩 (B). 证明: AB 与 BA 相似.

四、(本题 20 分) 对 $\mathbb{R}$ 上无穷次可微的 (复值) 函数 $\varphi(x)$, 称 $\varphi(x)\in\mathscr{S}$. 如果 $\forall m,k\geqslant 0$ 成立 $\sup\limits_{x\in\mathbb{R}}\left|x^m\varphi^{(k)}(x)\right|<+\infty$. 若 $f\in\mathscr{S}$, 可定义

$$\hat{f}(x)=\int_{\mathbb{R}}\hat{f}(y)e^{-2\pi ixy}\,\mathrm{d}y,\ (\forall x\in\mathbb{R}).$$

证明: $\hat{f}(x)\in\mathscr{S}$, 且 $f(x)=\int_{\mathbb{R}}\hat{f}(y)e^{2\pi ixy}\,\mathrm{d}y,\quad \forall x\in\mathbb{R}$

五、 (本题 15 分) 设 $n>1$ 为正整数. 令

$$S_n=\left(\frac{1}{n}\right)^n+\left(\frac{2}{n}\right)^n+\cdots+\left(\frac{n-1}{n}\right)^n$$

1. 证明：数列 S_n 单调增且有界, 从而极限 $\lim\limits_{n\to\infty}S_n$ 存在.
2. 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}S_n$.

六、(本题 20 分) 求证: 常微分方程 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=-y^3+\sin x, x\in[0,2\pi]$ 有唯一的满足 $y(0)=y(2\pi)$ 的解.

8.4 第十届全国大学生数学竞赛决赛试题 (非数类)

一、填空题（本题满分 30 分，每小题 6 分）

1.设函数 $y=\begin{cases}\dfrac{\sqrt{1-a\sin^2x}-b}{x^2}, & x\neq 0\\ 2, & x=0\end{cases}$ 在点 $x=0$ 处连续，则 $a+b$ 的值

为______.

2.设 $a>0$，则 $\int_0^{+\infty}\frac{\ln x}{x^2+a^2}\mathrm{d}x$=______.

3.设曲线 L 是空间区域 $0\leqslant x\leqslant 1, 0\leqslant y\leqslant 1, 0\leqslant z\leqslant 1$ 的表面与平面 $x+y+z=\frac{3}{2}$ 的交线，则 $\left|\oint_L\left(z^2-y^2\right)\mathrm{d}x+\left(x^2-z^2\right)\mathrm{d}y+\left(y^2-x^2\right)\mathrm{d}z\right|$=______.

4.设函数 $z=z(x,y)$ 由方程 $F(x-y,z)=0$ 确定，其中 $F(u,v)$ 具有连续二阶偏导数，则 $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$=______.

5.已知二次型 $f\left(x_1,x_2,\cdots,x_n\right)=\sum_{i=1}^{n}\left(x_i-\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}\right)^2$，则 f 的规范形为______.

二、(本题满分 12 分) 设 $f(x)$ 在区间 $(-1,1)$ 内三阶连续可导，满足 $f(0)=0, f'(0)=1, f''(0)=0, f'''(0)=-1$；又设数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1\in(0,1), a_{n+1}=f\left(a_n\right)(n=1,2,3,\cdots)$，严格单调少且 $\lim_{n\to\infty}a_n=0$，计算 $\lim_{n\to\infty}na_n^2$.

三、(本题满分 12 分) 设 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上具有连续导数，且 $|f(x)|\leqslant 1, f'(x)>0, x\in(-\infty,+\infty)$. 证明：对于 $0<\alpha<\beta$，成立 $\lim_{n\to\infty}\int_\alpha^\beta f'\left(nx-\frac{1}{x}\right)\mathrm{d}x=0$.

四、(本题满分 12 分) 计算三重积分

$$\iiint_\Omega\frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z}{\left(1+x^2+y^2+z^2\right)^2}$$

其中 $\Omega: 0\leqslant x\leqslant 1, 0\leqslant y\leqslant 1, 0\leqslant z\leqslant 1$.

五、(本题满分 12 分) 求级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{5}\cdot\frac{3}{7}\cdot\cdots\cdot\frac{n}{2n+1}\cdot\frac{1}{n+1}$ 之和.

六、(本题满分 11 分) 设 A 是 n 阶幂零矩阵，即满足 $A^2=O$. 证明：若 A 的秩为 r，且 $1\leqslant r<\frac{n}{2}$，则存在 n 阶可逆矩阵 P，使得 $P^{-1}AP=\begin{pmatrix}O & I_r & O\\ O & O & O\end{pmatrix}$，其中 I_r 为 r 阶单位矩阵.

七、(本题满分 11 分) 设 $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$ 为单调递减的正实数列，$\lim_{n\to\infty}u_n=0$，$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ 为一实数列，级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_nu_n$ 收敛，证明：

$$\lim_{n\to\infty}\left(a_1+a_2+\cdots+a_n\right)u_n=0$$

8.5 第十届全国大学生数学竞赛决赛试题 (数学类低年级组)

一、填空题（本题满分 20 分，每小题 5 分）

1.设 A 为实对称方阵，$(1,0,1)$ 和 $(1,2,0)$ 构成共行向量的一个极大无关组. 则有 A=______.

2.设 $y(x) \in C^1[0,1]$ 满足 $x = \begin{cases} \dfrac{\sin y(x)}{y(x)}, & y \in (0,\pi] \\ 1, & y = 0 \end{cases}$. 则 $y'(0)$=______.

3.设 $f(x) = \int_x^{+\infty} e^{-t^2}\mathrm{d}t$，则 $\int_0^{+\infty} xf(x)\mathrm{d}x$=______.

4.设 U 为 8 阶实正交方阵，U 中元素皆为 $\dfrac{1}{2\sqrt{2}}$ 子矩阵的个数记为 t. 则 t 最多为______.

二、**(本题满分 15 分)** 给定空间直角坐标系中的两条直线：l_1 为 z 轴，l_2 过 $(-1,0,0)$ 及 $(0,1,1)$ 两点. 动直线 l 分别与 l_1, l_2 共面，且与平面 $z=0$ 平行.

1.求动直线全体构成的曲面 S 的方程;

2.确定 S 是什么曲面.

三、**(本题满分 15 分)** 证明：任意 n 阶实方阵 A 可以分解成 $A = A_0 + A_1 + A_2$，其中 $A_0 = aI_n$，a 是实数，A_1 与 A_2 都是幂零方阵.

四、**(本题满分 20 分)** 设 $\alpha > 0$, $f(x) \in C^1[0,1]$，且对任何非负整数，n, $f^n(0)$ 均存在且为零. 进一步存在常数 $C > 0$ 使得 $|x^\alpha f'(x)| \leqslant C|f(x)|(\forall x \in [0,1])$. 证明：

(1)若 $\alpha = 1$，则在 $[0,1]$ 上 $f(x) \equiv 0$.

(2)若 $\alpha > 1$，举例说明在 $[0,1]$ 上 $f(x) \equiv 0$ 可以不成立.

五、**(本题满分 15 分)** 设 $c \in (0,1)$, $x_1 \in (0,1)$ 且 $x_1 \neq c\left(1 - x_1^2\right)$, $x_{n+1} = c1 - x_n^2 (n \geqslant 1)$.

证明：$\{x_n\}$ 收敛当且仅当 $c \in \left(0, \dfrac{\sqrt{3}}{2}\right]$.

六、**(本题满分 15 分)** 已知 $a(x), b(x), c(x) \in C(R)$，方程 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = a(x)y^2 + b(x)y + c(x)$ 只有有限个 2π 周期解. 求它的 2π 周期解个数的最大值.

8.6 第十届全国大学生数学竞赛决赛试题 (数学类高年级组)

一、**填空题(本题满分 20 分，每小题 5 分)**

1.设 A 为实对称方阵，$(1,0,1)$ 和 $(1,2,0)$ 构成共行向量的一个极大无关组. 则有 A=______.

2.设 $y(x) \in C^1[0,1]$ 满足 $x = \begin{cases} \dfrac{\sin y(x)}{y(x)}, & y \in (0,\pi] \\ 1, & y = 0 \end{cases}$. 则 $y'(0)$=______.

3.设 $f(x) = \int_x^{+\infty} e^{-t^2}\mathrm{d}t$，则 $\int_0^{+\infty} xf(x)\mathrm{d}x$=______.

4.设 U 为 8 阶实正交方阵，U 中元素皆为 $\dfrac{1}{2\sqrt{2}}$ 子矩阵的个数记为 t. 则 t 最多为______.

二、**(本题满分 15 分)** 给定空间直角坐标系中的两条直线：l_1 为 z 轴，l_2 过 $(-1,0,0)$ 及 $(0,1,1)$ 两点. 动直线 l 分别与 l_1, l_2 共面，且与平面 $z=0$ 平行.

1.求动直线全体构成的曲面 S 的方程;

2.确定 S 是什么曲面.

三、**(本题满分 15 分)** 证明：任意 n 阶实方阵 A 可以分解成 $A = A_0 + A_1 + A_2$，其中

$A_0 = aI_n$, a 是实数, A_1 与 A_2 都是幂零方阵.

四、(本题满分 20 分) 设 $\alpha > 0$, $f(x) \in C^1[0,1]$, 且对任何非负整数, n, $f^n(0)$ 均存在且为零. 进一步存在常数 $C > 0$ 使得 $\left|x^\alpha f'(x)\right| \leqslant C|f(x)|(\forall x \in [0,1])$. 证明:

(1)若 $\alpha = 1$, 则在 $[0,1]$ 上 $f(x) \equiv 0$;

(2)若 $\alpha > 1$, 举例说明在 $[0,1]$ 上 $f(x) \equiv 0$ 可以不成立.

五、(本题满分 10 分) 设 $(R,+,\cdot)$ 为含 $1 \neq 0$ 的结合环, $a, b \in R$. 若 $a + b = ba$, 且关于 x 的方程

$$\begin{cases} x^2 - \left(ax^2 + x^2a\right) + ax^2a = 1 \\ x + a - (ax + xa) + axa = 1 \end{cases}$$

在 R 中有解. 证明: $ab = ba$.

六、(本题满分 10 分) 设 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 可测, 则 $G = \{(x, f(x)); x \in \mathbb{R}\}$ 是 2-维 Lebesgue 零测集.

七、(本题满分 10 分) 在空间直角坐标系中设椭圆抛物面 S 的方程为

$$\gamma(u, v) = \left(u, v, u^2 + \frac{1}{2}v^2\right), (u, v) \in \mathbb{R}^2$$

(i) 求 S 的所有脐点

(ii) 设 σ 为与脐点处切平面平行的平面, 它截 S 于曲线 C, 证明 C 是一个圆周.

八、(本题满分 10 分) 设 $\delta : a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n < b$ 是区间 $[a,b]$ 的一个剖分。用 $S[a,b]$ 表示满足下列条件的分片实系数多项式全体构成的集合: 对任意 $s(x) \in S[a,b]$.

1.$s(x)|_{[x_i, x_{i+1}]}$ 是三次多项式, $i = 0, 1, \cdots, n-1$.

2.$s(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上二阶连续可导.

九、(本题满分 10 分) 设 z_0 是复函数 $w = f(z)$ 的 n 阶极点. 试证明: 一定存在 $\rho > 0$ 及 $R > 0$, 使得对任意 $w \in \{w \in \mathbb{C} : |w| > R$, 函数 $f(z) - w$ 在 $|z - z_0| < \rho$ 中必有 n 个零点。

十、(本题满分 10 分) 设独立随机变量序列 $\{X_n, n \geqslant 1\}$. 满足 $P\left(X_n = \pm n^\theta\right) = \frac{1}{2}$, 其中 $\theta > 0$ 是常数。记 $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$.

(1)当 $\theta > \frac{1}{2}$ 时, 证明 $\frac{S_n}{n}$ 依概率收敛于 0, 即对任意 $\epsilon > 0$, $\lim_{n\to\infty} P\left(\frac{|S_n|}{n} \geqslant \epsilon\right) = 0$.

(2)证明: $\frac{S_n}{\sqrt{\mathrm{Var}(S_n)}} \xrightarrow{D} N(0,1)$, 其中 $\mathrm{Var}(S_n)$ 是表示 S_n 的方差, $\xrightarrow{D}$ 表示以分布收敛.

第 9 章 2019 年丘成桐数学竞赛 (分析与代数) 试题

9.1 个人赛

1. Let $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$be a strictly convex function. Let $u:[0,1]\to\mathbb{R}$ be a continuous function, with

$$\int_0^1 u(x)\mathrm{d}x=0$$

Show that

$$\int_0^1 F(u(x))\mathrm{d}x \leqslant \frac{F\left(\|u\|_{\infty}\right)+F\left(-\|u\|_{\infty}\right)}{2}$$

where $\|u\|_{\infty}:=\sup\limits_{\pi\in[0,1]}|u(x)|$. Also determine when cqunlity occurs.

2. Prove that there sxists a unicersal constant K, for all C^1 function $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$, If $f\in L^1\left(\mathbb{R}^2\right)\cap L^2\left(\mathbb{R}^2\right)$ and $|\nabla f|\in L^2\left(\mathbb{R}^2\right)$, we have the following inequaly:

$$\|f\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}^2 \leqslant K\|f\|_{L^1(\mathbb{R}^2)}\|\nabla f\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}$$

Can you provide constant K so that $K<10$? In the problem, all the L^p-spaces are defined with respect to the Lebesguc measure.

3. Let $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ be a harmonic function. Suppose

$$\lim_{|x|\to\infty}\frac{|f(x)|}{\ln|x|}=0$$

Prove or disprove that f is a constant.

4. (a) Show that there does not exist a holomorphic function f on $\mathbb{C}\backslash\{1,-1\}$so that

$$f'(z)=\frac{1}{\left(z^2-1\right)^{2019}}\quad \text{for all } z\in\mathbb{C}\backslash\{1,-1\}$$

(b) Show that there exist a set $L\subset\mathbb{C}$ and a holomorphic function F on $\mathbb{C}\backslash L$ so that L has Hausdorff dimension 1, and

$$F'(z)=\frac{1}{\left(z^2-1\right)^{2019}}\quad \text{for all } z\in\mathbb{C}\backslash L$$

5. Let $\Omega\subset\mathbb{R}^2$ be a bounded domain with smooth boundary.Prove that, for all $p>1$and $1\leqslant q<\infty$, for all $f\in L^p(\Omega)$, there exist a unique $u\in H_0^1(\Omega)$, such that

$$\Delta u=u^q+f \text{ in } \Omega$$

9.2 团体赛

1. how that there is no hon-zero $f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^2)$ (compactly supported smooth function) so that its Fourier transform $\widehat{f}(\xi)$ is also compactly supported.
2. Prove the following classical interior Schauder estimates:
   There exists a nivcersal constant C, for all smooth compactly supported functiond $u, f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^3)$ with $\Delta u = f$,we have
   $$\| u \|_{C^{2,\alpha}} \leq C \| f \|_{C^{0,\alpha}}$$
   where $0 < \alpha < 1$ and $\| \cdot \|_{C^{k,\alpha}}$ are Hölder norms.
3. Let $(X, \mathcal{A}, \mu)$ be a probability space and let $T : X \to X$ be a a measurable and measure preserving map, i.e, for all $A \in A$, we have $\mu\left(T^{-1}(A)\right) = \mu(A)$. For $A, B \in \mathcal{A}$, if $\mu(A - B) = \mu(B - A) = 0$,we say that $A = B \quad a \cdot e.$
   Assume $A \in \mathcal{A}$ such that $T^{-1}(A) = Aa \cdot e$ Prove that there exists a set $B \in \mathcal{A}$ so that $T^{-1}B = B$ and $A = B \quad a \cdot e.$
4. Is there an cntire function f with infinitcly many zeros, so that for every $r \in (0, 1)$, there exist constants $A_r, B_r < \infty$ such that
   $$|f(z)| \leqslant A_r e^{B_r |z|^r}$$
   for every $z \in \mathbb{C}$?
5. Let $u(t, x, y)$ be a smooth real funtion defined on $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^2$ where $t \in \mathbb{R}$ and $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. We assume that it solves the following semilinear wave equation:
   $$-\frac{\partial^2}{\partial t^2} u + \Delta u = u^3$$
   If the supports of the initial data $u(0, x)$ and $\frac{\partial u}{\partial t}(0, x)$ are compact,prove that,for all $t_0 \in \mathbb{R}$, the supports of $u(t_0, x)$ and $\frac{\partial u}{\partial t}(t_0, x)$ are compact.

第 10 章 2019 年北京大学数分高代真题解析

考生须知: 1. 本试卷满分为 150 分，全部考试时间总计 180 分钟；

2. 所有答案必须写在答题纸上，写在试题纸上或草稿纸上一律无效.

10.1 数学分析

1. (10 分) 讨论数列 $a_n=\sqrt[n]{1+\sqrt[n]{2+\cdots+\sqrt[n]{n}}}$ 的敛散性.

解：显然收敛，考虑到

$$1\leqslant a_n\leqslant\sqrt[n]{n+\sqrt[n]{n+\sqrt[n]{n+\cdots+\sqrt[n]{n}}}}$$

利用 $\sqrt[n]{n+1}\leqslant 2$，即 $1\leqslant a_n\leqslant\sqrt{3}$.

【注】此题改编自谢惠民老师的《数学分析习题课讲义》第二章第二组参考题第一题.

2. (10 分) $f(x)\in C[a,b]$ 且 $f(a)=f(b)$. 求证存在 $x_n,y_n\in[a,b]$, $\lim\limits_{n\to+\infty}(x_n-y_n)=0$ 且 $f(x_n)=f(y_n),\forall n\in\mathbb{N}^*$.

证明：此题应添加条件 $x_n\neq y_n$，则由题设利用介值定理，$\exists c\in\left[a,\dfrac{a+b}{2}\right]$, $s t. f(c)=f\left(c+\dfrac{b-a}{2}\right)$ 即证.

【注】出题老师大意了, 我仔细看了题干几次, 并没有要求 $x_n\neq y_n$, 而且就算添加一些要求仍旧不难, 是送分题.

3. (10 分) 证明 $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}(-1)^k C_n^k\frac{1}{k+m+1}=\sum_{k=0}^{m}(-1)^k C_m^k\frac{1}{k+n+1}$.

证明：令 $f(m,n)=\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\frac{(-1)^k}{m+k+1}$ 经变形处理得到

$$f(m,n)=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-1)^k\int_0^1 x^{m+k}\mathrm{d}x=\int_0^1 x^m\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-1)^k x^k\mathrm{d}x=\int_0^1 x^m(1-x)^n\mathrm{d}x$$

然后变量代换 $t=1-x$，即证 $f(m,n)=f(n,m)$.

【注】几乎完全一样的题目见《数学分析习题课讲义》上册第 334 页第 17 题.

4. (10 分) 若 $\displaystyle\prod_{n=1}^{+\infty}(1+a_n)$ 收敛, 是否有 $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}a_n$ 收敛? 证明或者举出反例.

证明：取 $\ln(1+a_n)=\dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$，则 $a_n=e^{\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}}-1$, $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n-\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}}{1/n}=\dfrac{1}{2}$，因此 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}a_n-\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ 发散，而 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ 收敛，即 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 发散，但此时有 $\displaystyle\prod_{n=1}^{+\infty}(1+a_n)$ 收敛.

【注】此题是对《数学分析习题课讲义》下册第 28, 29 页所述内容的一个补充.

5. (10 分) 设 $f(x)=\sum\limits_{n=1}^{+\infty}x^n\ln x$, 求 $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$.

解：由分部积分，有

$$\int_0^1 x^n\ln x\mathrm{d}x=\frac{1}{n+1}\int_0^1\ln x\mathrm{d}\left(x^{n+1}\right)=\frac{1}{n+1}x^{n+1}\ln x|_0^1-\frac{1}{n+1}\int_0^1 x^n\mathrm{d}x=-\frac{1}{(n+1)^2}$$

$$\int_0^1 x^m\ln^n x\mathrm{d}x=\frac{(-1)^n n!}{(m+1)^{n+1}},\quad (n=0,1,2,...)$$

因此

$$\int_0^1\sum_{n=1}^{\infty}x^n\ln x\mathrm{d}x=\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^1 x^n\ln x\mathrm{d}x=1-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)^2}=1-\frac{\pi^2}{6}$$

【注】此题为北京大学 1987 年数学分析考研真题第四题第二问.

6. (20 分) $f(x)$ 定义在 $(0,+\infty)$, 若 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ 存在, 且 $f''(x)$ 有界. 证明 $\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)=0$.

证明：因 $f''(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 有界, 故 $f'(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上一致连续. $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ 存在, 说明 $\int_1^{+\infty}f'(x)x$ 有意义, 下面证明 $\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)=0$. 若 $\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)\neq 0$, 则存在 $\varepsilon_0>0$, 对于任意的 $x>0,\exists t>x$, 使得$|f'(t)|\geqslant\varepsilon_0$, 于是存在 x_n 单调递增趋于 $+\infty$, 且 $|f'(x_n)|\geqslant\varepsilon_0$. 由一致连续, 对于上述 $\varepsilon_0,\exists\delta_0>0$. 当 $|x-y|<\delta_0$ 时, $|f'(x)-f'(y)|<\varepsilon_0/2$. 从而有

$$\begin{aligned}\left|\int_{x_n}^{x_n+\delta_0}f'(x)x\right|&=\left|\int_{x_n}^{x_n+\delta_0}f'(x)-f'(x_n)+f'(x_n)x\right|\\&\geqslant\left|\int_{x_n}^{x_n+\delta_0}f'(x_n)x\right|-\left|\int_{x_n}^{x_n+\delta_0}f'(x)-f'(x_n)x\right|\\&=\varepsilon_0\delta_0-\frac{\varepsilon_0}{2}\delta_0\\&=\frac{\varepsilon_0\delta_0}{2}.\end{aligned}$$

这与 $\int_1^{+\infty}f'(x)x$ 有意义的 Cauchy 收敛原理矛盾.

【注】改编自一个很经典的题目, 可以见《数学分析习题课讲义》上册第 396 页命题 12.4.1, 陈纪修等人编著的《数学分析》第二版上册第 379 页例 8.2.9, 林源渠、方企勤编的《数学分析解题指南》第 417 页题 7.11 , 裴礼文《数学分析中的典型问题与方法》第二版第 415 页例 4.5.24 .

7. (20 分) 数列 $\{x_n\}$ 有界, 且 $\lim\limits_{n\to+\infty}(x_{n+1}-x_n)=0$,

$$\underline{\lim}_{n\to+\infty}x_n=l,\ \overline{\lim}_{n\to+\infty}x_n=L,-\infty<l<L<+\infty.$$

证明 $\forall c\in[l,L]$, 都有子列收敛于 c.

证明：首先 l 与 L 均是 $\{x_n\}$ 的某个子列的极限. 下面任取 $l<c<L$, 则 $\exists x_{n_1}$, 使得 $\frac{l+c}{2}<$

$x_{n_1} \leqslant c$, 否则 $\forall n \in \mathbb{N}$, 要么 $x_n \leqslant \dfrac{l+c}{2}$, 要么 $x_n > c$, 结合 $\varliminf\limits_{n\to+\infty} x_n = l$, $\varlimsup\limits_{n\to+\infty} x_n = L$, 知 $\{x_n\}$ 中有无穷项小于等于 $\dfrac{l+c}{2}$, 有无穷项大于 c. 从而 $|x_{n+1}-x_n|$ 有无穷多项大于等于 $\dfrac{c-l}{2}$, 矛盾. 类似地, 存在 $n_2 > n_1$ 使得 $\dfrac{x_{n_1}+c}{2} < x_{n_2} \leqslant c$. 以此类推可取一个子列 $\{x_{n_k}\}$,$|x_{n_k}-c| \leqslant \dfrac{c-l}{2^k}$, 此时 $\{x_{n_k}\}$ 的极限为 c.

【注】几乎完全一样的题目见《数学分析习题课讲义》上册 96 页第三章第二组参考题第 10 题.

8. (20 分) $p > 0$, 讨论级数

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin\frac{n\pi}{4}}{n^p + \sin\frac{n\pi}{4}}$$

的绝对敛散性和条件敛散性.

解: 考虑到

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin\frac{n\pi}{4}}{n^p + \sin\frac{n\pi}{4}} - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin\frac{n\pi}{4}}{n^p} = -\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin^2\frac{n\pi}{4}}{(n^p + \sin\frac{n\pi}{4})n^p},$$

故 $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin\frac{n\pi}{4}}{n^p}$ 在 $p > 1$ 时绝对收敛, 在 $0 < p \leqslant 1$ 时条件收敛.

$$\frac{\sin^2\frac{n\pi}{4}}{(n^p + \sin\frac{n\pi}{4})n^p} \sim \frac{\sin^2\frac{n\pi}{4}}{n^{2p}} = \frac{1-\cos\frac{n\pi}{2}}{n^{2p}}, (n \to +\infty),$$

因此 $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin^2\frac{n\pi}{4}}{(n^p + \sin\frac{n\pi}{4})n^p}$ 在 $0 < p \leqslant 1/2$ 时发散, 在 $p > 1/2$ 时绝对收敛.

综上: 当 $p > 1$ 时原级数绝对收敛, 当 $1/2 < p \leqslant 1$ 时原级数条件收敛, 当 $0 < p \leqslant 1/2$ 时原级数发散.

【注】解题思路与《数学分析习题课讲义》上册 284 页第十二章例题 12.2.4 一样, 可以算作改编题.

9. (20 分) 求 $f(x) = \dfrac{2x\sin\theta}{1-2x\cos\theta+x^2}$ 在 $x = 0$ 的 Taylor 展开式, 并求 $\displaystyle\int_0^{\pi} \ln(1-2x\cos\theta+x^2)\mathrm{d}\theta$.

解: 设 $f(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$, 则 $2x\sin\theta = (1-2x\cos\theta+x^2)\left(\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n\right)$, 展开比较 x^n 的系数得 $a_0 = 0, a_1 = 2\sin\theta, a_n - 2\cos\theta\, a_{n-1} + a_{n-2} = 0, n \geqslant 2$. 由数学归纳法易知 $a_n = 2\sin(n\theta), n \in \mathbb{N}$. 于是

$$f(x) = 2\sum_{n=1}^{\infty} \sin(n\theta)\, x^n, x \in (-1, 1).$$

记 $I(x)=\int_0^{\pi}\ln(1-2x\cos\theta+x^2)\mathrm{d}\theta$, 则 $I(0)=0$, 当 $|x|<1$ 时, 有

$$
\begin{aligned}
I'(x)&=\int_0^{\pi}\frac{-2\cos\theta+2x}{1-2x\cos\theta+x^2}\mathrm{d}\theta=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\frac{-2\cos\theta+2x}{1-2x\cos\theta+x^2}\mathrm{d}\theta\\
&=\frac{1}{2}\int_{|z|=1}\frac{1}{iz}\frac{-(z+\frac{1}{z})+2x}{1-(z+\frac{1}{z})x+x^2}\mathrm{d}z=0
\end{aligned}
$$

因此 $I(x)=0, x\in(-1,1)$. 当 $|x|>1$ 时,

$$
I(x)=\int_0^{\pi}\ln(1-2x\cos\theta+x^2)\mathrm{d}\theta=\int_0^{\pi}\ln(x^2)+\ln(1-2\frac{1}{x}\cos\theta+\frac{1}{x^2})\mathrm{d}\theta=\int_0^{\pi}\ln(x^2)\mathrm{d}\theta=2\pi\ln(|x|),
$$

再结合 $I(x)$ 的连续性有

$$
I(x)=\begin{cases}0, & |x|<1\\ 2\pi\ln|x|, & |x|\geqslant 1\end{cases}.
$$

【注】此题前半部分与《数学分析习题课讲义》下册 73 页例题 14.4.5 几乎一模一样, 差别在于多了一个常数 2. 后半部分是一个很经典的积分, 可在各种数学分析教材和习题书的含参变量积分部分找到, 比如张筑生老师《数学分析新讲》第三册第 337 页例 2, 林源渠、方企勤编的《数学分析解题指南》第 304 页例 2 .

10. (20 分) 证明 $\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2}$, 求 $\int_0^{+\infty}\frac{\sin^2(xy)}{x^2}\mathrm{d}x$,.

证明: 法 1:(含参积分)

$$
I(\alpha)=\int_0^{\infty}\frac{\sin x}{x}\mathrm{e}^{-\alpha x}\mathrm{d}x\ (\alpha\geqslant 0)\Rightarrow I'(\alpha)=-\int_0^{\infty}\sin x\mathrm{e}^{-\alpha x}\mathrm{d}x=-\frac{1}{1+\alpha^2}.
$$

$$
\Rightarrow I(\alpha)=\int_{\alpha}^{\infty}\frac{1}{1+u^2}\mathrm{d}u=\frac{\pi}{2}-\arctan\alpha\Rightarrow I=I(0)=\frac{\pi}{2}
$$

法 2:(二重积分)

$$
\begin{aligned}
I&=\int_0^{\infty}\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x=\int_0^{\infty}\sin x\left(\int_0^{\infty}\mathrm{e}^{-xy}\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x\\
&=\int_0^{\infty}\left(\int_0^{\infty}\mathrm{e}^{-xy}\sin x\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y=\int_0^{\infty}\frac{1}{1+y^2}\mathrm{d}y=\frac{\pi}{2}.
\end{aligned}
$$

法 3:(无穷级数)

$$
I=\int_0^{\infty}\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x=\sum_{n=0}^{\infty}\int_{n\frac{\pi}{2}}^{(n+1)\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x.
$$

令 $n=2m$, 再 $x=m\pi+t$ 换元有

$$
\int_{2m\frac{\pi}{2}}^{(2m+1)\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x=(-1)^m\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin t}{m\pi+t}\mathrm{d}t
$$

$$
\Rightarrow I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin t\left(\frac{1}{t}+\sum_{m=1}^{\infty}(-1)^m\frac{2t}{t^2-m^2\pi^2}\right)\mathrm{d}t=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}t=\frac{\pi}{2}.
$$

法 4:(拉普拉斯变换)

$$F(s)=\mathcal{L}(\sin x)=\int_0^{\infty}\mathrm{e}^{-sx}\sin x\mathrm{d}x=\frac{1}{1+s^2}.$$

$$\Rightarrow\int_0^{\infty}\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x=\int_0^{\infty}\mathcal{L}(\sin x)\,\mathrm{d}s=\int_0^{\infty}\frac{1}{s^2+1}\mathrm{d}s=\frac{\pi}{2}.$$

法 5:(留数定理)

$$\begin{aligned}I&=\int_0^{\infty}\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\Im\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\oint_L\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}}{z}\mathrm{d}z\\&=\frac{1}{2}\Im\left(\pi\mathrm{i}\cdot\operatorname{Res}\left(\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}}{z},z=0\right)\right)=\frac{\pi}{2}.\end{aligned}$$

法 6:(傅里叶变换)

$$f(t)=\begin{cases}1, & |t|<1\\ \frac{1}{2}, & |t|=1\\ 0, & |t|>1\end{cases}$$

因此 $f(t)$ 的傅里叶变换为

$$F(x)=\int_{-\infty}^{\infty}f(t)\,e^{-ixt}\mathrm{d}t=\int_{-1}^{1}e^{-ixt}\mathrm{d}t=\frac{e^{ix}-e^{-ix}}{ix}=\frac{2\sin x}{x}$$

所以有

$$\begin{aligned}f(t)&=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}F(x)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}xt}\mathrm{d}x=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin x}{x}\mathrm{e}^{\mathrm{i}xt}\mathrm{d}x\\&=\frac{1}{\pi}\left(\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin x\cos(xt)}{x}\mathrm{d}x+\mathrm{i}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin x\sin xt}{x}\mathrm{d}x\right)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin x\cos(xt)}{x}\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

即

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin x\cos(xt)}{x}\mathrm{d}x=\begin{cases}\pi, & |t|<1\\ \frac{\pi}{2}, & |t|=1\\ 0, & |t|>1\end{cases}.$$

取 $t=1$ 得到

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin x\cos x}{x}\mathrm{d}x=\int_0^{\infty}\frac{2\sin x\cos x}{x}\mathrm{d}x=\int_0^{\infty}\frac{\sin 2x}{x}\mathrm{d}x=\int_0^{\infty}\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2}.$$

解: 根据上述对 Dirichlet 积分的 6 种证明方法,我们很容易知道

$$\int_0^{+\infty}\frac{\sin^2 x}{x^2}\mathrm{d}x=-\left.\frac{\sin^2 x}{x}\right|_0^{+\infty}+\int_0^{+\infty}\frac{2\sin x\cos x}{x}\mathrm{d}x=\int_0^{+\infty}\frac{\sin 2x}{x}dx=\int_0^{+\infty}\frac{\sin 2x}{2x}\mathrm{d}(2x)=\frac{\pi}{2}$$

因此

$$\int_0^{+\infty}\frac{\sin^2(xy)}{x^2}\mathrm{d}x=\begin{cases} y\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\sin^2(xy)}{(xy)^2}\mathrm{d}(xy)=\frac{\pi y}{2},(y>0)\\ 0,(y=0)\\ -y\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\sin^2(-xy)}{(-xy)^2}\mathrm{d}(-xy)=-\frac{\pi y}{2}(y<0)\end{cases}=\frac{\pi|y|}{2}$$

【注】前半部分是 Dirichlet 积分, 与北京大学 2006 年数学分析第 5 题, 2016 年数学分析第 7 题一样, 在各种数学分析教材和习题书上也很常见. 这里给出的证明方法见于张筑生老师《数学分析新讲》第三册第 285 页引理 3; 更常见的证明方法在数学分析教材含参变量积分部分, 是通过引入收敛因子来做; 学了复变函数后也可以用留数定理来证明这个结论. 解决后半部分只需用下分部积分, 与《数学分析习题课讲义》下册 295 页练习题 7 第一小问类似.

10.2 高等代数

考生须知: 1. 本试卷满分为 150 分，全部考试时间总计 180 分钟；

2. 所有答案必须写在答题纸上，写在试题纸上或草稿纸上一律无效;

3. 注：本试题中 r(A) 表示矩阵 A 的秩；E_{ij} 表示第 i 行第 j 列元素为 1，其余元素全为 0 的矩阵；A^T 表示矩阵 A 的转置；$|A|$ 表示矩阵 A 的行列式.

1. (20 分) 设 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 是 $\mathbb{R}^m$ 上线性无关的列向量组,$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s$ 是 $\mathbb{R}^n$ 上线性无关的列向量组. 求证: 若有实数 c_{ij} 使得 $\sum\limits_{i=1}^{r}\sum\limits_{j=1}^{s}c_{ij}\alpha_i\beta_j^T=\mathbf{0}$, 则 $c_{ij}=0, i=1,2,\cdots,r, j=1,2,\cdots,s$.

证明：令 $A=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r), B=(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s), C=(c_{ij})_{r\times s}$, 则 $\mathbf{0}=\sum\limits_{i=1}^{r}\sum\limits_{j=1}^{s}c_{ij}\alpha_i\beta_j^T=ACB^T$, 因为 r$(A)=r$, 因此 $CB^T=\mathbf{0}$, 于是 $BC^T=\mathbf{0}$, 又因为 r$(B)=s$, 因此 $C^T=\mathbf{0}$, 因此 $c_{ij}=0, i=1,2,\cdots,r, j=1,2,\cdots,s$.

2. (20 分) 实数域上的 3 阶方阵 A 满足 $AA^T=A^TA$, 且 $A\neq A^T$.

(a). 证明存在正交矩阵 P, 使得 $P^TAP=\begin{pmatrix} a&0&0\\0&b&c\\0&-c&b\end{pmatrix}$, 其中 a,b,c 都是实数.

(b). 若 $A=\sum\limits_{i=1}^{3}\sum\limits_{j=1}^{3}a_{ij}E_{ij}, AA^T=A^TA=I_3$, 且 $|A|=1$. 证明 1 是 A 的一个特征值, 并求特征值 1 对应的特征向量.

证明：

(a). 由于 $A\in M_3(\mathbb{R})$, 故必有一个实的特征值为 a, 对应的一个单位特征向量为 ξ_1, 将 ξ_1 扩充为一组标准正交基 ξ_1,ξ_2,ξ_3, 则 $A\xi_1=a\xi_1$, 设 $P=(\xi_1,\xi_2,\xi_3)$, 则有

$$P^TAP=P^T(a\xi_1,A\xi_2,A\xi_3)=\begin{pmatrix} a&\alpha^T\\ \mathbf{0}&B\end{pmatrix}$$

因为 $AA^T=A^TA$,所以 $(P^TAP)(P^TAP)^T=(P^TAP)^T(P^TAP)$,即

$$\begin{pmatrix} a & \alpha^T \\ \mathbf{0} & B \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & \mathbf{0} \\ \alpha & B^T \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a & \mathbf{0} \\ \alpha & B^T \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & \alpha^T \\ \mathbf{0} & B \end{pmatrix}$$

于是 $\begin{pmatrix} a^2+\alpha^T\alpha & \alpha^TB^T \\ B\alpha & BB^T \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a^2 & a\alpha^T \\ a\alpha & B^TB+\alpha\alpha^T \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{cases} \alpha=\mathbf{0} \\ BB^T=B^TB \end{cases}$

因此 $P^TAP=\begin{pmatrix} a & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & B \end{pmatrix}$. 设 $B=\begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix}$,则 $\begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e & g \\ f & h \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} e & g \\ f & h \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix}$,

$$\Longrightarrow \begin{pmatrix} e^2+f^2 & eg+fh \\ ge+fh & g^2+h^2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} e^2+g^2 & ef+gh \\ fe+gh & f^2+h^2 \end{pmatrix}, \Longrightarrow f^2=g^2$$

必定有 $f=-g\neq 0$, 否则与 $A^T\neq A$ 矛盾,令 $f=c$, 则 $c(e-h)=-c(e-h)$, $\Longrightarrow$ $e=h$, 记 $e=b$, 则 $P^TAP=\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & c \\ 0 & -c & b \end{pmatrix}$, 其中 a,b,c 都是实数.

(b). 因为 $AA^T=A^TA=I_3$ 且 $|A|=1$, 于是 $|I_3-A|=|A^TA-A|=|A^T-I_3||A|=|A||A-I_3|=-|I_3-A|$, $\Longrightarrow$ $|I_3-A|=0$, 于是 1 是 A 的一个特征值, $(I_3-A)X=0$ 的非零解即为特征值 1 对应的特征向量.

【注】实际上考的正规变换矩阵的正交相似标准型，在蓝以中老师的高等代数学习指南第 306 页有更一般性的结论, 在丘维声老师高等代数创新教材下册也能找到类似的题目.

3. (20 分) $A\in M_n(\mathbb{C})$, A 的特征值为 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$. 定义 $M_n(\mathbb{C})$ 上的线性变换 T 为

$$T: M_n(\mathbb{C}) \longrightarrow M_n(\mathbb{C})$$
$$B \longmapsto AB-BA$$

(a). 求变换 T 的特征值;

(b). 若 A 可对角化, 证明 T 也可对角化.

证明：

(a). 设 λ 是 T 的特征值, $B, B\neq\mathbf{0}$ 是对应的一个特征向量,则 $T(B)=\lambda B$, 即为 $AB-BA=\lambda B \iff AB=B(\lambda E+A) \iff A$与$\lambda E+A$ 有相同的特征值 $\iff \lambda_i=\lambda+\lambda_j$, $i,j=1,2,\cdots,n \iff \lambda\in\{\lambda_i-\lambda_j|i,j=1,2,\cdots,n\}$, 即 T 的特征值构成的集合为 $\{\lambda_i-\lambda_j|i,j=1,2,\cdots,n\}$, 特别地,0 始终是 T 的特征值.

(b). 因 A 可对角化, 于是 A 有 n 个线性无关的特征向量, 设 $A\xi_i=\lambda_i\xi_i, i=1,2,\cdots,n$, 令 $P=(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n)$, 则 $P^{-1}AP=\mathrm{diag}\{\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n\}$, 于是 $T(P^{-1}E_{ij}P)=(\lambda_i-\lambda_j)P^{-1}E_{ij}P$, 这说明 $P^{-1}E_{ij}P$ 是 T 的特征向量, 于是 T 有 n^2 个线性无关的特征向量, 从而 T 也可对角化.

【注】用到丘维声老师高等代数创新教材下册 301 页例 27 给出的一个结论: 设 A,B 分别是 n 阶, m 阶复方阵,则矩阵方程 $AX-XB=\mathbf{0}$ 只有零解的充分必要条件是 A 与 B 没有公共特征值. 与此题相关的题目：中国科学技术大学线性代数考研试题 2013 年第 10 题,2009 年第 7 题.

4. (20 分) 设 $A\in M_n(\mathbb{R})$, $A^T=A$, $S=\{X|X^TAX=0, X\in\mathbb{R}^n\}$.

(a). 求 S 为 $\mathbb{R}^n$ 中的一个子空间的充要条件并证明;

(b). 若 S 为 $\mathbb{R}^n$ 中的一个子空间, 求 $\dim S$.

证明:

(a). A 半正定或者半负定.

(b). $\dim S = n - r$.

【注】详细解答见丘维声老师高等代数创新教材下册 440、441 页例 13 及例 14

5. (20 分) 设 $\varepsilon > 0$ 是事先给定的正数, 证明对任意的 n 阶实方阵 A, 存在一个 n 阶对角矩阵 D, D 的每个对角元为 ε 或 $-\varepsilon$ 中的一个, 使得 $|A + D| \neq 0$.

证明: 根据 Jordan-Chevally 分解定理, 可设 $A = g(A) + h(A)$, 其中 $g(A)$ 为对角矩阵而 $h(A)$ 为幂零矩阵. 若 $g(A)$ 的特征值不同时含有 ε 和 $-\varepsilon$, 则取 $D = \varepsilon I_n$或$D = -\varepsilon I_n$ 即可; 若 $g(A) = S$ 的特征值同时含有 ε 和 $-\varepsilon$, 则不妨设 $S = \mathrm{diag}\{\varepsilon I_{n_1}, -\varepsilon I_{n_2}, *, \cdots, *\}$, 其中 $*$ 表示元素不是 ε 或 $-\varepsilon$, 设 S 的不同特征值为 $\varepsilon, -\varepsilon, \lambda_3, \cdots, \lambda_s$, 由 Lagrange 插值公式知存在次数不超过 s 的多项式 $f(x)$, 使得 $f(\varepsilon) = \varepsilon$, $f(-\varepsilon) = -\varepsilon$, $f(\lambda_i) = -\varepsilon, i = 3, 4, \cdots, s$, 则 $f(S) = f(g(A)) = \mathrm{diag}\{\varepsilon I_{n_1}, -\varepsilon I_{n-n_1}\}$, 令 $D = f(S)$ 即可.

【注】Jordan-Chevally 分解定理可在蓝以中老师高等代数简明教程第二版下册第 161 页找到证明.

6. (15 分) 设$l_1 : \begin{cases} x + y + z + 1 = 0 \\ x + 2y + 3z + 3 = 0 \end{cases}$, $l_2 : \dfrac{x-1}{1} = \dfrac{y-1}{2} = \dfrac{z-1}{3}$, 求这两条直线的距离和公垂线的方程.

解: 两直线的距离为 $\dfrac{1}{\sqrt{21}}$, 公垂线的方程为 $\dfrac{x - 1/6}{4} = \dfrac{y + 1/3}{1} = \dfrac{z + 5/6}{-2}$.

7. (20 分) 在空间中有三条直线 l_1, l_2, l_3 两两异面, 且不平行于同一个平面, 证明空间中与这三条直线都共面的直线的并集是一个单叶双曲面.

证明: 设 l_i 的方向向量为 (a_i, b_i, c_i), 过点 (x_i, y_i, z_i), $i = 1, 2, 3$. 设 (x, y, z) 为与三条直线 l_1, l_2, l_3 共面的直线上一点，设 (a, b, c) 为该条直线的方向向量, 则 $\begin{vmatrix} a & b & c \\ a_i & b_i & c_i \\ x - x_i & y - y_i & z - z_i \end{vmatrix} = 0, i = 1, 2, 3$. 于是得到一个关于 a, b, c 的线性方程组. 因为 $(a, b, c) \neq \mathbf{0}$, 于是系数矩阵的行列式为 0, 即

$$\begin{vmatrix} b_1(z-z_1) - c_1(y-y_1) & c_1(x-x_1) - a_1(z-z_1) & a_1(y-y_1) - b_1(x-x_1) \\ b_2(z-z_2) - c_2(y-y_2) & c_2(x-x_2) - a_2(z-z_2) & a_2(y-y_2) - b_2(x-x_2) \\ b_3(z-z_3) - c_3(y-y_3) & c_3(x-x_3) - a_3(z-z_3) & a_3(y-y_3) - b_3(x-x_3) \end{vmatrix} = 0$$

, 化简得到一个关于 x, y, z 的二次方程, 从而与直线 l_1, l_2, l_3 都共面的直线的并集是个二次曲面,【注】意到 l_1, l_2, l_3 在上述曲面中，从而不能是柱面和锥面, 又因为 l_1, l_2, l_3 不平行于同一个平面, 从而是一个单叶双曲面.

【注】只是把北京大学 2018 年解析几何的第二个计算题变成了证明题，在丘维声老师解析几何第三版第 106 页有类似题.

8. (15 分) 证明平面与双曲抛物面的交线不可能是一个椭圆.

证明: 以给定平面为 $x0y$ 平面建立空间直角坐标系, 设双曲抛物面的方程为

$$\begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} + a_0 = 0, a_{ij} = a_{ji}, i, j = 1, 2, 3.$$

平面与曲面的交线的方程为 $\begin{cases} \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} + a_0 = 0 \\ z = 0 \end{cases}$,

若交线是椭圆, 则 $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ 为正定矩阵, 又因为曲面是双曲抛物面, 因此 $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ 的特征值为一正一负一个为 0, 于是存在 $x, y \in \mathbb{R}$, 使得 $\begin{cases} xa_{11} + ya_{21} = a_{31} \\ xa_{12} + ya_{22} = a_{32} \\ xa_{13} + ya_{23} = a_{33} \end{cases}$,

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} + y \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix} + x \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{12} & a_{13} \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} + y^2 \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} + x^2 \begin{vmatrix} a_{22} & a_{12} \\ a_{12} & a_{11} \end{vmatrix} \\ &= (1 + x^2 + y^2) \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} > 0 \end{aligned}$$

这与特征值为一正一负一个为 0 矛盾, 因此平面与双曲抛物面的交线不可能是一个椭圆.

第 11 章 数学竞赛章节复习

11.1 积分不等式葵花宝典

柯西—施瓦茨不等式在学习数学中被广泛应用，并在高等数学、微积分、概率论和线性代数等方面都有涉及，其所体现的形式也不同，能在欧式空间两向量的内积运算得到统一，与均值不等式有一定差异，是一个十分重要的不等式。灵活运用柯西—施瓦茨不等式能够解决很多数学上的难题，例如证明不等式、三角形求解、方程求解和最值计算等，可以很好地将这些问题完美地解决。

回过头我们再想在考研数学中如何搞定柯西—施瓦茨不等式，那八一就给大家介绍一下常用的四种证明思想，并给出相关推论 (其中相关推论留给读者自行思考)，然后利用柯西—施瓦茨不等式来证明某些例子。

由于柯西-施瓦茨不等式在实数域、微积分、n 维欧氏空间、概率空间有着重要意义，且有不同形式的推广和应用，这里我重点讲解它在微积分中的推广及其应用。

定理 11.1. 方法 1:连续函数柯西-施瓦茨不等式

设 $f(x), g(x)$ 在 $[a, b]$ 上可积，则有

$$\left(\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x\right)^2 \leqslant \int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x \int_a^b g^2(x)\mathrm{d}x$$

等号成立的必要条件是存在常数 k 使得 $f(x) = kg(x)$.

证明：法 1: 利用判别式. 对任意的 $\lambda \in R$ 有 $[f(x)+\lambda g(x)]^2 \geqslant 0$，则 $\int_a^b [f(x)+\lambda g(x)]^2\mathrm{d}x \geqslant 0$，即对任意的 $\lambda \in R$ 有

$$\int_a^b [f(x)+\lambda g(x)]^2\mathrm{d}x = \lambda^2 \int_a^b g^2(x)\mathrm{d}x + 2\lambda \int_a^b f(x)g(x)g(x)g(x)g(x)\mathrm{d}x + \int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x \geqslant 0$$

因此上述关于 λ 的一元二次方程的判别式 $\Delta \leqslant 0$，故

$$\Delta = \left(2\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x\right)^2 - 4\int_a^b f^2(x)\,\mathrm{d}x \int_a^b g^2(x)\,\mathrm{d}x \leqslant 0$$

也就有

$$\left(\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x\right)^2 \leqslant \int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x \int_a^b g^2(x)\mathrm{d}x$$

法 2: 构造函数. 令 $F(x) = \int_a^x f^2(t)\mathrm{d}t \int_a^x g^2(t)\mathrm{d}t - \left[\int_a^x f(t)g(t)\mathrm{d}t\right]^2$，显然 $F(a) = 0$.

$$F'(x) = f^2(x)\int_a^x g^2(t)\,\mathrm{d}t + g^2(x)\int_a^x f^2(t)\,\mathrm{d}t - 2f(x)g(x)\int_a^x f(t)g(t)\,\mathrm{d}t$$

$$
\begin{aligned}
&= \int_a^x \left[f^2(x) g^2(t) - 2f(x) g(x) f(t) g(t) + g^2(x) f^2(t)\right] \mathrm{d}t \\
&= \int_a^x [f(x) g(t) - g(x) f(t)]^2 \mathrm{d}t \geqslant 0
\end{aligned}
$$

故 $F(x)$ 在 $x \geqslant a$ 上单增,因此 $F(x) \geqslant F(a) = 0$,于是 $F(b) \geqslant F(a) = 0$,即证.

法 3: 二重积分. 由轮换性可知

$$
\begin{aligned}
&\int_a^b f^2(x)\,\mathrm{d}x \int_a^b g^2(x)\,\mathrm{d}x - \left[\int_a^b f(x) g(x)\,\mathrm{d}x\right]^2 \\
&= \int_a^b f^2(x)\,\mathrm{d}x \int_a^b g^2(y)\,\mathrm{d}y - \int_a^b f(x) g(x)\,\mathrm{d}x \int_a^b f(y) g(y)\,\mathrm{d}y \\
&= \int_a^b \int_a^b \left[f^2(x) g^2(y) - f(x) g(x) f(y) g(y)\right] \mathrm{d}x\mathrm{d}y \\
&= \frac{1}{2} \int_a^b \int_a^b \left[f^2(x) g^2(y) - 2f(x) g(x) f(y) g(y) + f^2(y) g^2(x)\right] \mathrm{d}x\mathrm{d}y \\
&= \frac{1}{2} \int_a^b \int_a^b [f(x) g(y) - f(y) g(x)]^2\, \mathrm{d}x\mathrm{d}y \geqslant 0
\end{aligned}
$$

即证.

法 4: 定积分性质. 由题意可知，对区间 $[a,b]$ 进行 n 等分，分点为 $x_i = a + \frac{b-a}{n} i, i = 1,2,\cdots,n$,根据定积分定义有

$$
\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^n f(x_i) g(x_i) \cdot \frac{b-a}{n}
$$

$$
\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^n f^2(x_i) \cdot \frac{b-a}{n}, \int_a^b g^2(x)\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^n g^2(x_i) \cdot \frac{b-a}{n}
$$

由上式可得 $\left(\sum_{i=1}^n f(x_i) g(x_i)\right)^2 \leqslant \left(\sum_{i=1}^n f^2(x_i)\right)\left(\sum_{i=1}^n g^2(x_i)\right)$，根据极限的保号性可知即证成立.

推论 11.1

设 $f(x), g(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积,则有 Minkowski 不等式

$$
\sqrt{\int_a^b (f(x) + g(x))^2 \mathrm{d}x} \leqslant \sqrt{\int_a^b f^2(x)\,\mathrm{d}x} + \sqrt{\int_a^b g^2(x)\,\mathrm{d}x}
$$

♡

推论 11.2

设 $f(x), g(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积,且 $f(x) > 0, g(x) > 0$,则有 Holder 不等式

$$
\int_a^b f(x) g(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \left(\int_a^b f^p(x)\,\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_a^b g^q(x)\,\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{q}}
$$

其中 $p, q > 0, \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

♡

推论 11.3

设 $f(x),g(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积，且 $f(x)>0,g(x)>0$，当 $p\in(1,+\infty)$ 时，则有

$$\left(\int_a^b (f(x)+g(x))^p \mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}} \leqslant \left(\int_a^b f^p(x)\,\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_a^b g^p(x)\,\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}}$$

♡

推论 11.4

设 $f_1(x),\quad f_2(x),\quad \cdots, f_n(x)$ 均在 $[a,b]$ 上可积，则有

$$\begin{vmatrix} \int_a^b f_1^2(x)\,\mathrm{d}x & \int_a^b f_1(x)f_2(x)\,\mathrm{d}x & \dots & \int_a^b f_1(x)f_n(x)\,\mathrm{d}x \\ \int_a^b f_2(x)f_1(x)\,\mathrm{d}x & \int_a^b f_2^2(x)\,\mathrm{d}x & \cdots & \int_a^b f_2(x)f_n(x)\,\mathrm{d}x \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \int_a^b f_n(x)f_1(x)\,\mathrm{d}x & \int_a^b f_n(x)f_2(x)\,\mathrm{d}x & \cdots & \int_a^b f_n^2(x)\,\mathrm{d}x \end{vmatrix} \geqslant 0$$

等号成立的条件是当且仅当 n 个函数组 $f_1(x),\quad f_2(x),\quad \cdots, f_n(x)$ 线性相关. ♡

推论 11.5

设 $f_1(x),\quad f_2(x),\quad \cdots, f_n(x)$ 均在 $[a,b]$ 上可积，则有

$$\left|\int_a^b f_1(x)f_2(x)\cdots f_n(x)\,\mathrm{d}x\right| \leqslant \left(\int_a^b |f_1^n(x)|\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{n}} \dots \left(\int_a^b |f_n^n(x)|\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{n}}$$

等号成立的条件是当且仅当 n 个函数组 $f_1(x),\quad f_2(x),\quad \cdots, f_n(x)$ 线性相关. ♡

定理 11.2. 方法 2:多元函数柯西-施瓦茨不等式

设二元函数 $f(x,y),g(x,y)$ 在平面区域 D 内可积，则有

$$\left(\iint_D f(x,y)g(x,y)d\sigma\right)^2 \leqslant \left(\iint_D f^2(x,y)d\sigma\right)\left(\iint_D g^2(x,y)d\sigma\right)$$

♡

证明：由于 $\iint_D (f(x,y)+\lambda g(x,y))^2 d\sigma \geqslant 0$，其中 λ 是任意实数，则有

$$\iint_D f^2(x,y)d\sigma + 2\lambda\iint_D f(x,y)g(x,y)d\sigma + \lambda^2\iint_D g^2(x,y)d\sigma \geqslant 0$$

因此上述关于 λ 的一元二次方程，且 $\iint_D g^2(x,y)d\sigma \geqslant 0$，其判别式 $\Delta \leqslant 0$，故

$$\Delta = \left(2\iint_D f(x,y)g(x,y)d\sigma\right)^2 - 4\iint_D f^2(x,y)d\sigma\iint_D g^2(x,y)d\sigma \leqslant 0$$

由此即可得 $\left(\iint_D f(x,y)g(x,y)d\sigma\right)^2 \leqslant \left(\iint_D f^2(x,y)d\sigma\right)\left(\iint_D g^2(x,y)d\sigma\right)$

推论 11.6

设二元函数 $f(x,y),g(x,y)$ 在平面区域 D 内非负可积函数，则有

$$\left(\iint_D (f(x,y)\cdot g(x,y))^{\frac{1}{2}}d\sigma\right)^2 \leqslant \left(\iint_D f(x,y)d\sigma\right)\left(\iint_D g(x,y)d\sigma\right)$$

♡

推论 11.7

设二元函数 $f(x,y),g(x,y)$ 在平面区域 D 内非负可积函数，且在区域 D 上可积函数 $g(x,y)\geqslant m>0, m\in R$，则有

$$\left(\iint_D f(x,y)d\sigma\right)^2 \leqslant \left(\iint_D f(x,y)g(x,y)d\sigma\right)\left(\iint_D \frac{f(x,y)}{g(x,y)}d\sigma\right)$$

或

$$\left(\iint_D f(x,y)d\sigma\right)^2 \leqslant \left(\iint_D g(x,y)d\sigma\right)\left(\iint_D \frac{f^2(x,y)}{g(x,y)}d\sigma\right)$$

♡

以上推广的证明八一均省略，均易证.

下面我们直接利用柯西—施瓦茨不等式证明一些不等式：

例 11.1: 设 $f(x)$ 在区间 $[0,1]$ 上连续，且 $1\leqslant f(x)\leqslant 3$，证明：

$$1\le \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x\int_0^1 \frac{1}{f(x)}\mathrm{d}x \le \frac{4}{3}$$

证明： 由 Cauchy-Schwarz 不等式：

$$\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x\int_0^1 \frac{1}{f(x)}\mathrm{d}x \geqslant \left(\int_0^1 \sqrt{f(x)}\sqrt{\frac{1}{f(x)}}\mathrm{d}x\right)^2 = 1$$

又由基本不等式得：

$$\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x\int_0^1 \frac{3}{f(x)}\mathrm{d}x \le \frac{1}{4}\left(\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x + \int_0^1 \frac{3}{f(x)}\mathrm{d}x\right)^2$$

再由条件 $1\le f(x)\le 3$，有 $(f(x)-1)(f(x)-3)\le 0$，则

$$f(x)+\frac{3}{f(x)}\le 4 \Rightarrow \int_0^1\left(f(x)+\frac{3}{f(x)}\right)\mathrm{d}x \le 4$$

即可得

$$1\le \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x\int_0^1 \frac{1}{f(x)}\mathrm{d}x \le \frac{4}{3}$$

例 11.2: 已知 $f(x)\geqslant 0$, 在 $[a,b]$ 上连续, $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=1$, k 为任意实数, 求证

$$\left(\int_a^b f(x)\cos kx\mathrm{d}x\right)^2+\left(\int_a^b f(x)\sin kx\mathrm{d}x\right)^2\leqslant 1$$

证明: 对所求证的不等式左边利用 Cauchy-Schwarz 不等式

$$\left(\int_a^b f(x)\cos kx\mathrm{d}x\right)^2\leqslant\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\cdot\int_a^b f(x)\cos^2 kx\mathrm{d}x=\int_a^b f(x)\cos^2 kx\mathrm{d}x \tag{11.1.1}$$

同理可得

$$\left(\int_a^b f(x)\sin kx\mathrm{d}x\right)^2\leqslant\int_a^b f(x)\sin^2 kx\mathrm{d}x \tag{11.1.2}$$

然后 (1.1) 与 (1.2) 式相加即证.

例 11.3: 设 $f(x)$ 在区间 $[0,1]$ 上连续, 且 $f(x)>0, x\in[0,1]$, 证明:

$$\frac{\int_0^1 f^3(x)\mathrm{d}x}{\int_0^1 f^2(x)\mathrm{d}x}\geqslant\frac{\int_0^1 f^2(x)\mathrm{d}x}{\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x}$$

证明: 由 Cauchy-Schwarz 不等式:

$$\begin{aligned}\int_0^1 f^3(x)\,\mathrm{d}x\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x&=\int_0^1\left(f^{\frac{3}{2}}(x)\right)^2\mathrm{d}x\cdot\int_0^1\left(f^{\frac{1}{2}}(x)\right)^2\mathrm{d}x\\&\geqslant\left(\int_0^1\left(f^{\frac{3}{2}}(x)\,f^{\frac{1}{2}}(x)\right)\mathrm{d}x\right)^2\\&=\left(\int_0^1 f^2(x)\,\mathrm{d}x\right)^2\end{aligned}$$

即证.

例 11.4: 设函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上有连续的导函数, 且 $f(a)=0$ 证明:

$$\int_a^b f^2(x)\,\mathrm{d}x\leqslant\frac{(b-a)^2}{2}\int_a^b f'^2(x)\,\mathrm{d}x$$

证明: 由 N-L 公式, $f(x)=f(x)-f(a)=\int_a^x f'^2(x)\,\mathrm{d}t$, 于是由 Cauchy-Schwarz 得

$$f^2(x)=\left[\int_a^x f'(t)\cdot 1\mathrm{d}t\right]^2\leqslant\int_a^x f'^2(t)\,\mathrm{d}t\int_a^x 1^2\mathrm{d}t\leqslant(x-a)\int_a^b f'^2(t)\,\mathrm{d}t\ (x\geqslant a)$$

然后通过比较定理可得

$$\int_a^b f^2(x)\,\mathrm{d}x\leqslant\int_a^b(x-a)\mathrm{d}x\int_a^b f'^2(t)\,\mathrm{d}t=\frac{(b-a)^2}{2}\int_a^b f'^2(x)\,\mathrm{d}x$$

例 11.5: 设 $f(x):[0,1]\to\mathbb{R}$ 且 $\int_0^1 xf(x)\mathrm{d}x=0$, 证明

$$\int_0^1 f^2(x)\mathrm{d}x \geqslant 4\left(\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x\right)^2$$

证明: 由 Cauchy-Schwarz 不等式得

$$\begin{aligned}\left(\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x\right)^2 &= \left(\int_0^1\left(1-\frac{3}{2}x\right)f(x)\mathrm{d}x\right)^2\\ &\leqslant \int_0^1\left(1-\frac{3}{2}x\right)^2\mathrm{d}x\cdot\int_0^1 f^2(x)\mathrm{d}x\\ &= \frac{1}{4}\int_0^1 f^2(x)\mathrm{d}x\end{aligned}$$

即证.

例 11.6: 设 $f\in C^2[a,b]$, $f(a)=f(b)=0$, $f'(a)=1$, $f'(b)=0$, 证明

$$\int_a^b (f''(x))^2\mathrm{d}x \geq \frac{4}{b-a}$$

证明: 对 $\forall c\in[a,b]$ 有

$$\int_a^b (x-c)f''(x)\mathrm{d}x=(c-a)-\int_a^b f'(x)\mathrm{d}x=c-a$$

由 Cauchy-Schwarz 不等式得

$$(c-a)^2=\left(\int_a^b (x-c)f''(x)\mathrm{d}x\right)^2\leqslant\int_a^b (x-c)^2\mathrm{d}x\int_a^b\left(f''(x)\right)^2\mathrm{d}x$$

即

$$\int_a^b\left(f''(x)\right)^2\mathrm{d}x\geqslant\frac{(c-a)^2}{\int_a^b (x-c)^2\mathrm{d}x}=\frac{3}{(b-a)\left[\left(\frac{b-c}{c-a}\right)^2-\frac{b-c}{c-a}+1\right]}$$

考虑 $\dfrac{b-c}{c-a}=\dfrac{1}{2}$, 则 $c=\dfrac{a+2b}{3}$, 可得

$$\int_a^b\left(f''(x)\right)^2\mathrm{d}x\geqslant\frac{4}{b-a}$$

例 11.7: 设 $f(x):[0,1]\to\mathbb{R}$ 是可微函数, 且 $f(0)=f(1)=-\dfrac{1}{6}$, 求证

$$\int_0^1 (f'(x))^2\mathrm{d}x\geq 2\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x+\frac{1}{4}$$

证明: 对 $\forall t \in \mathbb{R}$, 由 Cauchy-Schwarz 不等式得

$$\left(\int_0^1 (x+t)f'(x)\mathrm{d}x\right)^2 \leqslant \int_0^1 (x+t)^2\mathrm{d}x \int_0^1 \left(f'(x)\right)^2 \mathrm{d}x$$

即

$$\frac{3}{3t^2+3t+1}\left(\frac{1}{6}+\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x\right)^2 \leqslant \int_0^1 \left(f'(x)\right)^2 \mathrm{d}x$$

考虑 $m=\dfrac{3}{3t^2+3t+1}$, 则原不等式成立只需证明下式不等式恒成立

$$m\left(\frac{1}{6}+\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x\right)^2 \geqslant 2\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x+\frac{1}{4}$$

因此

$$\left(\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x+\frac{1}{6}-\frac{1}{m}\right)^2+\left(\frac{1}{36}-\frac{1}{4m}\right)-\left(\frac{1}{6}-\frac{1}{m}\right)^2 \geqslant 0$$

令 $\dfrac{1}{36}-\dfrac{1}{4m}=\left(\dfrac{1}{6}-\dfrac{1}{m}\right)^2$, 解得 $m=12$, 即 $t=-\dfrac{1}{2}$. 因此

$$\int_0^1 \left(f'(x)\right)^2 \mathrm{d}x \geqslant 2\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x+\frac{1}{4}$$

例 11.8: 设 $f(x):[0,1]\to\mathbb{R}$ 上的连续可微函数, 且 $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} f(x)\mathrm{d}x=0$, 求证

$$\int_0^1 (f'(x))^2\mathrm{d}x \geq 12\left(\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x\right)^2$$

证明: 由 Cauchy-Schwarz 不等式可得

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \left(f'(x)\right)^2 \mathrm{d}x \int_0^{\frac{1}{2}} x^2\mathrm{d}x \geqslant \left(\int_0^{\frac{1}{2}} xf'(x)\mathrm{d}x\right)^2=\left(\frac{1}{2}f\left(\frac{1}{2}\right)\right)^2 \Rightarrow \int_0^{\frac{1}{2}} \left(f'(x)\right)^2 \mathrm{d}x \geqslant 24\left(\frac{1}{2}f\left(\frac{1}{2}\right)\right)^2$$

同理可得

$$\int_{\frac{1}{2}}^1 (1-x)^2\mathrm{d}x \int_{\frac{1}{2}}^1 \left(f'(x)\right)^2 \mathrm{d}x \geqslant \left(\int_{\frac{1}{2}}^1 (1-x)f'(x)\mathrm{d}x\right)^2=\left(\int_{\frac{1}{2}}^1 f(x)\mathrm{d}x-\frac{1}{2}f\left(\frac{1}{2}\right)\right)^2$$

即

$$\int_{\frac{1}{2}}^1 \left(f'(x)\right)^2 \mathrm{d}x \geqslant 24\left(\int_{\frac{1}{2}}^1 f(x)\mathrm{d}x-\frac{1}{2}f\left(\frac{1}{2}\right)\right)^2$$

根据 $2\left(a^2+b^2\right) \geqslant (a+b)^2$ 得

$$\begin{aligned}\int_0^1 \left(f'(x)\right)^2 \mathrm{d}x &\geqslant 24\left(\frac{1}{2}f\left(\frac{1}{2}\right)\right)^2+24\left(\int_{\frac{1}{2}}^1 f(x)\mathrm{d}x-\frac{1}{2}f\left(\frac{1}{2}\right)\right)^2\\ &\geqslant 12\left(\frac{1}{2}f\left(\frac{1}{2}\right)+\int_{\frac{1}{2}}^1 f(x)\mathrm{d}x-\frac{1}{2}f\left(\frac{1}{2}\right)\right)^2=12\left(\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x\right)^2\end{aligned}$$

注意：设 $f(x):[a,b]\to\mathbb{R}$ 是连续可微函数，且 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=0$，求证：

$$\left(\int_a^{2b-a} f(x)\,\mathrm{d}x\right)^2\leq\frac{2(b-a)^3}{3}\int_a^{2b-a}\left(f'(x)\right)^2\mathrm{d}x$$

例 11.9: 设 $f(x):[0,1]\to\mathbb{R}$ 上的连续函数，且 $\int_0^1 f^3(x)\mathrm{d}x=0$，求证

$$\int_0^1 f^4(x)\mathrm{d}x\geqslant\frac{27}{4}\left(\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x\right)^4$$

证明：令 $I_n=\int_0^1 f^n(x)\mathrm{d}x$，显然 $I_2\geqslant I_1^2$. 对 $\forall m\in\mathbb{R}$ 由 Cauchy-Schwarz 不等式可得

$$\left(\int_0^1\left(m+f^2(x)\right)\cdot f(x)\mathrm{d}x\right)^2\leqslant\int_0^1\left(m+f^2(x)\right)^2\mathrm{d}x\cdot\int_0^1 f^2(x)\mathrm{d}x$$

化简可得

$$\left(I_2-I_1^2\right)m^2+2I_2^2m+I_2I_4\geqslant 0$$

由判别式 $\Delta\leqslant 0$ 得

$$I_4\geqslant\frac{I_2^3}{I_2-I_1^2}$$

故本题只需证明

$$\frac{I_2^3}{I_2-I_1^2}\geqslant\frac{27}{4}I_1^4$$

由均值不等式得

$$\left(I_2-I_1^2\right)I_1^4=\frac{1}{2}\left(2I_2-2I_1^2\right)\cdot I_1^2\cdot I_1^2\leqslant\frac{4}{27}I_2^3$$

即

$$\int_0^1 f^4(x)\mathrm{d}x\geqslant\frac{27}{4}\left(\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x\right)^4$$

例 11.10: 设 $f(x)$ 是 $[0,1]$ 上的连续可微函数，且 $f(1)=0$，试证明：

$$\int_0^1|f(x)|^2\mathrm{d}x+\left(\int_0^1|f(x)|\,\mathrm{d}x\right)^2\leqslant 4\int_0^1 x^2\left|f'(x)\right|^2\mathrm{d}x$$

证明：考虑到 $g(x)=\int_0^1|f(x)|\mathrm{d}x$，由 Cauchy-Schwarz 不等式，我们有

$$4\left(\int_0^1 x\left|f'(x)\right|\cdot|f(x)|\,\mathrm{d}x+g(x)\int_0^1 x\left|f'(x)\right|\mathrm{d}x\right)^2\leqslant 4\int_0^1 x^2\left|f'(x)\right|^2\mathrm{d}x\left(\int_0^1(|f(x)|+g(x))^2\mathrm{d}x\right)$$

由题设，我们应该注意到

$$\int_0^1 x\left|f'(x)\right|\cdot|f(x)|\,\mathrm{d}x\geqslant\left|\int_0^1 xf'(x)\,\mathrm{d}x\right|=\frac{1}{2}\int_0^1|f(x)|^2\mathrm{d}x$$

$$\int_0^1 |f(x)|\mathrm{d}x = \int_0^1 \left|\int_x^1 f'(t)\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \int_0^1 \int_x^1 |f(t)|\mathrm{d}t = \int_0^1 x\left|f'(x)\right|\mathrm{d}x$$

$$\Rightarrow \left(\int_0^1 |f(x)|^2\mathrm{d}x + 2g(x)\int_0^1 |f(x)|\mathrm{d}x\right)^2 \leqslant 4\int_0^1 x^2\left|f'(x)\right|^2\mathrm{d}x\left(\int_0^1 (|f(x)|+g(x))^2\mathrm{d}x\right)$$

因此我们只需要证明

$$\left[\int_0^1 |f(x)|^2\mathrm{d}x + \left(\int_0^1 |f(x)|\mathrm{d}x\right)^2\right]\left(\int_0^1 (f(x)+g(x))^2\mathrm{d}x\right) \leqslant \left(\int_0^1 |f(x)|^2\mathrm{d}x + 2g(x)\int_0^1 |f(x)|\mathrm{d}x\right)^2$$

经化简 $\left(\int_0^1 |f(x)|\mathrm{d}x\right)^4 \geqslant 0$ 显然成立,即证.

定理 11.3. 方法 3:琴声不等式

若函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续,且 $m \leqslant f(x) \leqslant M$,又 $g(x)$ 是 $[m,M]$ 上的连续的凸函数,则有:

$$g\left(\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right) \leq \frac{1}{b-a}\int_a^b g(f(x))\mathrm{d}x$$

若 $g(x)$ 是 $[m,M]$ 上的连续凹函数时,上式中的不等号相反.

例 11.11: 证明:对于连续函数 $f(x)>0$,有

$$\ln\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x \geqslant \int_0^1 \ln f(x)\mathrm{d}x$$

证明: 令 $g(x)=\ln x$,则 $g'(x)=\frac{1}{x}$,$g''(x)=-\frac{1}{x^2}<0$,所以 $g(x)$ 为凹函数,可由上式琴声不等式定理,可得

$$\ln\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x \geqslant \int_0^1 \ln f(x)\mathrm{d}x$$

或利用定积分定义,将 $[0,1]$ 分 n 等分,可取 $\Delta x=\frac{1}{n}$,由"算术平均数 $\geqslant$ 几何平均数"得:

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right) \geqslant \sqrt[n]{f\left(\frac{1}{n}\right)\cdots f\left(\frac{n}{n}\right)} = \exp\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n \ln f\left(\frac{k}{n}\right)$$

$$\Rightarrow \int_0^1 f(x)\mathrm{d}x \geqslant \exp\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n \ln f\left(\frac{k}{n}\right) = \exp\int_0^1 \ln f(x)\mathrm{d}x$$

然后两边取对数即证.

定义 11.1. 琴声不等式

若函数 $f(x)$ 在区间 I 上是凸,且 $x_1,x_2,\cdots,x_n\in I$,就有:

$$\frac{f(x_1)+f(x_2)+\cdots+f(x_n)}{n} \geqslant f\left(\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}\right)$$

对于严格凸函数，等式成立当且仅当 $x_1=x_2=\cdots=x_n$.
若函数 $f(x)$ 在区间 I 上是凸，且 $x_1,x_2\in I$，就有：

$$Rf\left(x_1\right)+(1-R)f\left(x_2\right)\geqslant f\left(Rx_1+(1-R)x_2\right)$$

例 11.12: 设 $f(x)$ 在 $[a,b](a\geqslant 0)$ 上有二阶导数，且在 $[a,b]$ 上有 $f''(x)\geqslant 0$，求证：

$$\int_a^b tf(t)\,\mathrm{d}t\leq\frac{2b-a}{6}[(2b+a)f(b)+(2a+b)f(a)]$$

证明： 利用琴声不等式，对于任意 $R\in[0,1]$，则有：

$$Rf\left(x_1\right)+(1-R)f\left(x_2\right)\geqslant f\left(Rx_1+(1-R)x_2\right)$$

所以再令 $t=xb+(1-x)a$ 有：

$$\begin{aligned}\int_a^b tf(t)\,\mathrm{d}t&=(b-a)\int_0^1[xb+(1-x)a]f(xb+(1-x)a)\\&\leq(b-a)\int_0^1[xb+(1-x)a][xf(b)+(1-x)f(a)]\,\mathrm{d}x\\&\leq\frac{2b-a}{6}[(2b+a)f(b)+(2a+b)f(a)]\end{aligned}$$

定理 11.4. 方法 4：斯蒂文森不等式

设在区间 $[a,b]$ 上，$g_1(x),g_2(x)$ 连续，$f(x)$ 一阶可导，对任意 $x\in[a,b]$，都成立以下不等式：$\int_a^x g_1(t)\mathrm{d}t\leqslant\int_b^x g_2(t)\mathrm{d}t$，且 $\int_a^b g_1(t)\mathrm{d}t\leqslant\int_a^b g_2(t)\mathrm{d}t$. 若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上单调递减，则 $\int_a^b f(x)g_1(t)\mathrm{d}t\leqslant\int_a^b f(x)g_2(t)\mathrm{d}t$；若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上单调递减则不等式变号。

例 11.13: 证明：

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x}{1+x^2}\mathrm{d}x\leq\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x}{1+x^2}\mathrm{d}x$$

证明： 对任意 $x\in[0,\frac{\pi}{2}]$，有 $1-\cos x\leqslant\sin x$，即得到 $\int_0^x\sin t\mathrm{d}t\leq\int_0^x\cos t\mathrm{d}t$，显然有 $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin x\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos x\mathrm{d}x=1$，且函数 $\frac{1}{1+x^2}$ 在 $[0,\frac{\pi}{2}]$ 上单调递减，所以可以利用斯蒂文森不等式，若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上单调递减，则 $\int_a^b f(x)g_1(t)\mathrm{d}t\leqslant\int_a^b f(x)g_2(t)\mathrm{d}t$，即有：

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x}{1+x^2}\mathrm{d}x\leq\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x}{1+x^2}\mathrm{d}x$$

注意：此题证法可利用 Chebyshew 不等式，另解见例 36.

定理 11.5. 方法 5:积分中值定理法

- 积分第一中值定理:设 $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ 为一连续函数,$g:[a,b]\to\mathbb{R}$,且 $g(x)$ 可积函数在积分区间不变号,那么存在一点 $\xi\in[a,b]$ 使得

$$\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x=f(\xi)\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$$

- 积分第二中值定理:若 $f(x),g(x)$ 在 $[a,b]$ 上黎曼可积且 $g(x)$ 在 $[a,b]$ 上单调,则存在 $\xi\in[a,b]$ 使得

$$\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x=g(a)\int_a^\xi g(x)\mathrm{d}x+g(b)\int_\xi^b g(x)\mathrm{d}x$$

例 11.14: 设 $a>0$, $f(x)$ 在 $[0,a]$ 上连续可导,证明:

$$|f(0)|\leqslant\frac{1}{a}\int_0^a|f(x)|\,\mathrm{d}x+\int_0^a\left|f'(x)\right|\mathrm{d}x$$

证明: 由积分第一中值定理,有

$$\frac{1}{a}\int_0^a|f(x)|\,\mathrm{d}x=|f(\xi)|\,,\xi\in[0,a]$$

又由

$$\int_0^a\left|f'(x)\right|\mathrm{d}x\geqslant\int_0^\xi\left|f'(x)\right|\mathrm{d}x\geqslant\left|\int_0^\xi f'(\xi)\mathrm{d}x\right|=|f(\xi)-f(0)|\geqslant|f(0)|-|f(\xi)|$$

即

$$\frac{1}{a}\int_0^a|f(x)|\,\mathrm{d}x+\int_0^a\left|f'(x)\right|\mathrm{d}x\geqslant|f(\xi)|+|f(0)|-|f(\xi)|=f(0)$$

例 11.15: 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续可导,证明:

$$\left|f\left(\frac{1}{2}\right)\right|\leqslant\int_0^1|f(x)|\,\mathrm{d}x+\frac{1}{2}\int_0^1\left|f'(x)\right|\mathrm{d}x$$

证明: 由积分第一中值定理,有 $\int_0^{\frac{1}{2}}|f(x)|\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}|f(\xi)|,\xi\in\left[0,\frac{1}{2}\right]$.

再由 $N-L$ 公式,$f(\frac{1}{2})=f(\xi)+\int_\xi^{\frac{1}{2}}f'(x)\mathrm{d}x$,所以有:

$$\left|f\left(\frac{1}{2}\right)\right|\leqslant|f(\xi)|+\int_0^{\frac{1}{2}}\left|f'(x)\right|\mathrm{d}x\leqslant 2\int_0^{\frac{1}{2}}|f(x)|\,\mathrm{d}x\int_0^{\frac{1}{2}}\left|f'(x)\right|\mathrm{d}x\quad(1)$$

$$\left|f\left(\frac{1}{2}\right)\right|\leqslant|f(\xi)|+\int_{\frac{1}{2}}^1\left|f'(x)\right|\mathrm{d}x\leqslant 2\int_{\frac{1}{2}}^1|f(x)|\,\mathrm{d}x\int_{\frac{1}{2}}^1\left|f'(x)\right|\mathrm{d}x\quad(2)$$

用 (1) 与 (2) 式相加即证.

例 11.16: 设 $f(x):[0,1]\to\mathbb{R}$ 是连续函数，且 $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=\int_0^1 xf(x)\mathrm{d}x$，证明：存在 $\xi\in(0,1)$，使得 $\int_0^{\xi} f(x)\mathrm{d}x=0$.

证明: 令 $F(x)=\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$，则有

$$\int_0^1 F(x)\mathrm{d}x=\int_0^1\int_0^x f(t)\mathrm{d}t\mathrm{d}x=\int_0^1(1-x)f(x)\mathrm{d}x=0$$

由积分第一中值定理可得，存在 $\xi\in(0,1)$，使得 $\int_0^{\xi} f(x)\mathrm{d}x=0$.

定理 11.6. 方法 6:微分中值定理法

- 罗尔中值定理：若函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，在开区间 (a,b) 内可导，且满足 $f(a)=f(b)$，那么在 (a,b) 内至少存在一点 ξ，使得 $f'(\xi)=0$.
- 拉格朗日中值定理：若函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，在开区间 (a,b) 内可导，那么在 (a,b) 内至少存在一点 ξ，使得 $f'(\xi)=\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$.
- 柯西中值定理：若函数 $f(x),g(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，在开区间 (a,b) 内可导，且 $g'(x)$ 在 (a,b) 内每一点均不为 0，那么在 (a,b) 内至少存在一点 ξ，使得
$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$$
- 泰勒中值定理：若函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上 n 阶连续，在开区间 (a,b) 内 $n+1$ 可导，对任意 $x\in(a,b)$ 内，至少存在一点 $\xi\in(a,b)$，使得
$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\cdot\cdot+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+R_n(x)$$
其中 $R_n(x)=\dfrac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$ 为拉格朗日余项.

例 11.17: 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有一阶连续导数，$f(a)=f(b)=0$，求证：

$$\int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x\le\frac{(b-a)^2}{4}M$$

其中 M 为 $|f'(x)|$ 在 $[a,b]$ 上的最大值。

证明: 由拉格朗日中值定理得：

$$\begin{cases} f(x)=f'(\xi_1)(x-a),\xi_1\in(a,x)\\ f(x)=f'(\xi_1)(x-b),\xi_1\in(x,b)\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}|f(x)|\le M(x-a)\\ |f(x)|\le M(b-x)\end{cases}$$

则由定积分性质得：

$$\begin{aligned}\int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x &= \int_a^{\frac{a+b}{2}} |f(x)|\mathrm{d}x + \int_{\frac{a+b}{2}}^b |f(x)|\mathrm{d}x \\ &\leqslant \int_a^{\frac{a+b}{2}} M(x-a)\mathrm{d}x + \int_{\frac{a+b}{2}}^b M(b-x)\mathrm{d}x \\ &= \frac{(b-a)^2}{4}M\end{aligned}$$

例 11.18: 设 $f(x):[0,1]\to\mathbb{R}$ 是连续函数，且 $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x = \int_0^1 xf(x)\mathrm{d}x$，证明：存在 $\xi\in(0,1)$，使得 $\int_0^{\xi} xf(x)\mathrm{d}x = 0$.

证明： 令 $F(x)=\int_0^x f(t)\mathrm{d}t, G(x)=\frac{1}{x}\int_0^x F(t)\mathrm{d}t$，则有

$$G(0)=G(1)=0, G'(x)=\frac{xF(x)-\int_0^x F(t)\mathrm{d}t}{x^2}$$

由罗尔定理可得，存在 $\xi\in(0,1)$，使得

$$\xi F(\xi)-\int_0^{\xi} F(t)\mathrm{d}t = \int_0^{\xi} xF'(x)\mathrm{d}x = 0$$

即

$$\int_0^{\xi} xf(x)\mathrm{d}x = 0$$

例 11.19: 设 $f(x)$ 在 $[0,2]$ 上有一阶连续导数，满足 $f'(x)|\leqslant 1, f(0)=f(2)=1$，求证：

$$1\leqslant \int_0^2 f(x)\mathrm{d}x \leqslant 3$$

证明： 由拉格朗日中值定理得：

$$f(x)-f(0)=f'(\xi_1)x,\quad \xi_1\in(0,x)$$

$$f(x)-f(2)=f'(\xi_2)(x-2),\quad \xi_2\in(x,2)$$

即

$$f(x)\geqslant 1-x, f(x)\geqslant x-1 \text{与} f(x)\leqslant 1+x, f(x)\leqslant 3-x$$

因此

$$\int_0^2 f(x)\mathrm{d}x \geqslant \int_0^1(1-x)\mathrm{d}x+\int_1^2(x-1)\mathrm{d}x = 1$$

与

$$\int_0^2 f(x)\mathrm{d}x \leqslant \int_0^1(1+x)\mathrm{d}x+\int_1^2(3-x)\mathrm{d}x = 3$$

即证.

例 11.20: 设 $f(x):[0,1]\to\mathbb{R}$ 是连续函数，且 $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x = \int_0^1 xf(x)\mathrm{d}x$，证明：存在

$\xi \in (0,1)$，使得

(1) $(\xi-1)f(\xi)=f'(\xi)\int_0^{\xi}(x-1)f(x)\mathrm{d}x$

(2) $f(\xi)=f'(\xi)\int_0^{\xi}f(x)\mathrm{d}x$

(3) $\xi f(\xi)=\int_0^{\xi}xf(x)\mathrm{d}x$

(4) $\xi f(\xi)=2\int_{\xi}^{0}xf(x)\mathrm{d}x$

(5) $\xi^2 f(\xi)=\int_0^{\xi}xf(x)\mathrm{d}x$

证明: 令 $F(x)=\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$，且 $\int_0^1 F(x)\mathrm{d}x=0$.

考虑辅助函数

$$G_1(x)=e^{-f(x)}\int_0^x(t-1)f(t)\mathrm{d}t$$

$$G_2(x)=e^{-f(x)}\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t \Rightarrow G_2(x)=-f'(x)e^{-f(x)}\int_0^x f(t)\mathrm{d}t+e^{-f(x)}f(x)$$

$$G_3(x)=e^{-x}\int_0^x tf(t)\,\mathrm{d}t \Rightarrow G_3'(x)=-e^{-x}\int_0^x tf(t)\mathrm{d}t+xe^{-x}f(x)$$

$$G_4(x)=e^{2x}\int_0^x tf(t)\,\mathrm{d}t \Rightarrow G_4'(x)=2e^{2x}\int_0^x tf(t)\mathrm{d}t+xe^{2x}f(x)$$

$$G_5(x)=\frac{1}{x}\int_0^x tf(t)\mathrm{d}x \Rightarrow G_5'(x)=\frac{\int_0^x tf(t)\mathrm{d}t-x^2f(x)}{x^2}$$

由罗尔定理可得，存在 $\xi\in(0,1)$ 使得 $G'(\xi)=0$.

注意: 这里的 G_3 也可以这样构造

$$G_3(x)=x^2\int_0^x f(t)\mathrm{d}t \Rightarrow G_3'(\xi)=2x\int_0^x f(t)\mathrm{d}t+x^2f(x)$$

显然 $G(0)=0$，通过罗尔定理存在 $\xi\in(0,1)$，使得 $G_3'(\xi)=0$.

$$2\xi\int_0^{\xi}f(x)\mathrm{d}x+\xi^2f(\xi)=0\Rightarrow \xi f(\xi)=2\int_{\xi}^{0}f(x)\mathrm{d}x$$

例 11.21: 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上有二阶连续可微，证明：

$$\int_0^1\left|f'(x)\right|\mathrm{d}x\leqslant 9\int_0^1|f(x)|\mathrm{d}x+\int_0^1\left|f''(x)\right|\mathrm{d}x$$

证明: 对 $\forall x_1\in\left[0,\frac{1}{3}\right]$，$x_2\in\left[\frac{2}{3},1\right]$，由拉格朗日中值定理得：

$$\left|f'(\xi)\right|=\left|\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}\right|\leqslant\left|f(x_1)-f(x_2)\right|\leqslant 3\left|f(x_1)\right|+3\left|f(x_2)\right|$$

因此对 $\forall x \in [0,1]$ 有

$$\begin{aligned} \left|f'(x)\right| &= \left|f'(\xi)+\int_{\xi}^{x} f''(t)\mathrm{d}t\right| \leqslant \left|f'(\xi)\right|+\int_{\xi}^{x}\left|f''(t)\right|\mathrm{d}t \\ &\leqslant 3\left|f\left(x_1\right)\right|+3\left|f\left(x_2\right)\right|+\int_0^1\left|f''(x)\right|\mathrm{d}x \end{aligned}$$

在上述不等式两端分别对 x_1, x_2 在 $\left[0,\frac{1}{3}\right],\left[\frac{2}{3},1\right]$ 上进行积分得

$$\begin{aligned} \left|f'(x)\right| &\leqslant 9\int_0^{\frac{1}{3}}|f(x)|\mathrm{d}x+9\int_{\frac{2}{3}}^{1}|f(x)|\mathrm{d}x+\int_0^1\left|f''(x)\right|\mathrm{d}x \\ &\leqslant 9\int_0^1|f(x)|\mathrm{d}x+\int_0^1\left|f''(x)\right|\mathrm{d}x \end{aligned}$$

因此对 x 在 $[0,1]$ 上积分可得

$$\int_0^1\left|f'(x)\right|\mathrm{d}x \leqslant 9\int_0^1|f(x)|\mathrm{d}x+\int_0^1\left|f''(x)\right|\mathrm{d}x$$

例 11.22: 设 $f(x)$ 二阶可导，且 $f''(x)\geqslant 0$ 又 $u(t)$ 为任一函数，对 $a>0$ 试证：

$$\frac{1}{a}\int_0^a f(u(t))\mathrm{d}t \geqslant f\left(\frac{1}{a}\int_0^a u(t)\mathrm{d}t\right)$$

证明： 由泰勒中值定理由

$$f(x)=f\left(x_0\right)+f'\left(x_0\right)\left(x-x_0\right)+\frac{1}{2!}f''(\xi)\left(x-x_0\right)^2. \quad \xi\in\left(x_0,x\right)$$

题设 $f''(x)>0$，即 $f(x)\geqslant f\left(x_0\right)+f'\left(x_0\right)\left(x-x_0\right)$

令 $x_0=\frac{1}{a}\int_0^a u(t)\mathrm{d}t, x=u(t)$，则有

$$f(u(t))\geqslant f\left(\frac{1}{a}\int_0^a u(t)\mathrm{d}t\right)+f\left[\frac{1}{a}\int_0^a u(t)\mathrm{d}t\right]\left(u(t)-\frac{1}{a}\int_0^a u(t)\mathrm{d}t\right)$$

从 0 到 a 的积分有

$$\int_0^a u(t)\mathrm{d}t \geqslant af\left(\frac{1}{a}\int_0^a u(t)\mathrm{d}t\right)+f'\left(\frac{1}{a}\int_0^a u(t)\mathrm{d}t\right)\left[\int_0^a u(t)\mathrm{d}t-\int_0^a u(t)\mathrm{d}t\right]=af\left(\frac{1}{a}\int_0^a u(t)\mathrm{d}t\right)$$

即证

$$\frac{1}{a}\int_0^a f(u(t))\mathrm{d}t \geqslant f\left(\frac{1}{a}\int_0^a u(t)\mathrm{d}t\right)$$

例 11.23: 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 二阶连续可导，$f(a)=f(b)=0, M=\max_{x\in[a,b]}\left|f''(x)\right|$，证明：

$$\left|\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right| \leqslant \frac{(b-a)^3}{12}M$$

证明: 对 $\forall x \in (a,b)$,由泰勒公式可得

$$f(a) = f(x) + f'(x)(a-x) + \frac{1}{2}f''(\xi)(a-x)^2, \quad \xi \in (a,x)$$

$$f(b) = f(x) + f'(x)(b-x) + \frac{1}{2}f''(\xi)(b-x)^2, \quad \eta \in (x,b)$$

两式相加

$$f(x) = f'(x)\left(x - \frac{a+b}{2}\right) - \frac{1}{4}\left[f''(\xi)(a-x)^2 + f''(\eta)(b-x)^2\right]$$

再两边积分

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_a^b f'(x)\left(x-\frac{a+b}{2}\right)\mathrm{d}x - \frac{1}{4}\int_a^b \left[f''(\xi)(a-x)^2 + f''(\eta)(b-x)^2\right]\mathrm{d}x$$

其中

$$\int_a^b f'(x)\left(x-\frac{a+b}{2}\right)\mathrm{d}x = \int_a^b \left(x-\frac{a+b}{2}\right)\mathrm{d}f(x) = -\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$$

于是

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = -\frac{1}{8}\int_a^b \left[f''(\xi)(a-x)^2 + f''(\eta)(b-x)^2\right]\mathrm{d}x$$

因此

$$\left|\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right| \leqslant= \frac{M}{8}\int_a^b \left[(a-x)^2 + (b-x)^2\right]\mathrm{d}x = \frac{M}{12}(b-a)^3$$

注意: 当题目条件出现二阶连续导数,且知某些点函数值时,往往采用泰勒公式.

另解:利用分部积分法导出 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 与 $f''(x)$ 的有关积分关系.

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x &= \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}(x-a) = -\int_a^b f'(x)(x-a)\,\mathrm{d}(x-b)\\ &= \int_a^b f''(x)(x-a)(x-b)\,\mathrm{d}x + \int_a^b f'(x)(x-b)\,\mathrm{d}x\\ &= \int_a^b f''(x)(x-a)(x-b)\,\mathrm{d}x + \int_a^b (x-b)\mathrm{d}x\\ &= \int_a^b f''(x)(x-a)(x-b)\,\mathrm{d}x - \int_a^b f(x)\mathrm{d}x\end{aligned}$$

因此

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_a^b f''(x)(x-a)(x-b)\mathrm{d}x$$

即

$$\begin{aligned}\left|\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\right| &\leqslant \frac{1}{2}M\int_a^b (x-a)(b-x)\mathrm{d}x = \frac{1}{4}M\int_a^b (b-x)\mathrm{d}(x-a)^2\\ &= \frac{1}{4}M\int_a^b (x-a)^2\mathrm{d}x = \frac{M}{12}(b-a)^3\end{aligned}$$

定理 11.7. 方法 7:函数单调法

设 $f'(x)$ 在 (a,b) 内存在且不变号,则当 $f'(x)\geqslant 0$ 时,则 $f(x)$ 在 (a,b) 内单增;当 $f'(x)\leqslant 0$ 时,则 $f(x)$ 在 (a,b) 内单调.

例 11.24: 设 $f(x)$ 在 $[0,b]$ 上有连续且单调递增,当 $a\in[0,b]$ 试证:

$$\int_a^b xf(x)\mathrm{d}x\geqslant \frac{b}{2}\int_0^b f(x)\mathrm{d}x-\frac{a}{2}\int_0^a f(x)\mathrm{d}x$$

证明: 作辅助函数

$$F(u)=\int_a^u xf(x)\,\mathrm{d}x-\frac{u}{2}\int_0^u f(x)\,\mathrm{d}x+\frac{a}{2}\int_0^a f(x)\,\mathrm{d}x\qquad(a\le u\le b)$$

即

$$\begin{aligned}F'(u)&=uf(u)-\frac{1}{2}uf(u)-\frac{1}{2}\int_a^u f(x)\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}uf(u)-\frac{1}{2}\int_a^u f(x)\,\mathrm{d}x\\&=\frac{1}{2}\left[f(u)\cdot(u-0)-\int_0^u f(x)\,\mathrm{d}x\right]=\frac{1}{2}\left[\int_0^u f(u)\,\mathrm{d}x-\int_0^u f(x)\,\mathrm{d}x\right]\\&=\frac{1}{2}\int_0^u[f(u)-f(x)]\mathrm{d}x\geqslant 0\end{aligned}$$

于是由拉格朗日中值定理由

$$F(b)=F(a)+F(\xi)(b-a)=F(\xi)(b-a)\geqslant 0\quad(a<\xi<b)$$

即原不等式恒成立.

例 11.25: 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上二阶可导,且 $f''(x)\geqslant 0$,证明:

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\le\frac{b-a}{2}(f(a)+f(b))$$

证明: 由 $f''(x)\geqslant 0$,则 $f'(x)$ 在 $[a,b]$ 上单增,对任意 $x\in(a,b)$,有:

$$f'(\varphi)=\frac{f(x)-f(a)}{x-a}\le f'(x),\varphi\in(a,x)$$

$$\Rightarrow f(x)\le f(a)+(x-a)f'(x)$$

即有:

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\le\int_a^b f(a)\,\mathrm{d}x+\int_a^b(x-a)f'(x)\,\mathrm{d}x=(b-a)(f(a)+f(b))-\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$$

$$\Rightarrow 2\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\le(b-a)(f(a)+f(b))\Rightarrow\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\le\frac{b-a}{2}(f(a)+f(b))$$

例 11.26: 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上二阶可导,且 $f''(x)\leqslant 0$,证明:

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\leqslant (b-a)f\left(\frac{a+b}{2}\right)$$

证明: $f(x)$ 在 $x_0=\dfrac{a+b}{2}$ 处的一阶泰勒公式为

$$f(x)=f\left(\frac{a+b}{2}\right)+f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\left(x-\frac{a+b}{2}\right)+\frac{f'(\xi)}{2!}\left(x-\frac{a+b}{2}\right)^2$$

其中 $\xi\in(x,\dfrac{a+b}{2})$,利用条件 $f''(x)\leqslant 0$ 可得

$$f(x)\leqslant f\left(\frac{a+b}{2}\right)+f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\left(x-\frac{a+b}{2}\right)$$

两边从 a 到 b 取积分得

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\leqslant (b-a)f\left(\frac{a+b}{2}\right)+f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\int_a^b\left(x-\frac{a+b}{2}\right)\mathrm{d}x=(b-a)f\left(\frac{a+b}{2}\right)$$

即证.

例 11.27: 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上可微,且当 $x\in(0,1)$ 时,$0<f'(x)<1$, $f(0)=0$,试证:

$$\left(\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x\right)^2>\int_0^1 f^3(x)\mathrm{d}x$$

证明: 令 $F(x)=\left(\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x\right)^2-\int_0^1 f^3(x)\mathrm{d}x$,即

$$F'(x)=2f(x)\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t-f^3(x)=f(x)\left[2\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t-f^2(x)\right]$$

由 $x\in(0,1)$ 时,$0<f'(x)<1$, $f(0)=0$,即 $f(x)>0$.

设 $G(x)=2\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t-f^2(x)$,则 $G(0)=0$,有 $G'(x)=2f(x)\big(1-f'(x)\big)>0$,所以 $G(x)>0$,因此当 $x\in(0,1)$ 时,$F'(x)>0$.

例 11.28: 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续且单调递增,试证

$$\int_0^1 xf(x)\mathrm{d}x\geqslant\frac{1}{2}\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$$

证明: 令 $F(x)=\int_0^x tf(t)\mathrm{d}t-\dfrac{x}{2}\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$,即

$$F'(x)=\frac{1}{2}\int_0^x (f(x)-f(t))\mathrm{d}t\geqslant 0$$

可知 $F(x)$ 单调递增,即 $F(1)\geqslant F(0)$,则原不等式成立.

定理 11.8. 方法 8:二重积分法

若函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积，函数 $g(x)$ 在 $[c,d]$ 可积，则二元函数 $F(x,y)=f(x)g(y)$ 在矩阵区域 $D:(x,y):a\leqslant x\leqslant b,c\leqslant y\leqslant d$ 上可积,且有:

$$\iint_D f(x)g(y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\int_c^d g(y)\mathrm{d}y$$

♡

例 11.29: 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上有一阶连续导数,试证:

$$\int_0^1|f(x)|\mathrm{d}x\leqslant\max\left\{\int_0^1\left|f'(x)\right|\mathrm{d}x,\left|\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x\right|\right\}$$

证明: 由题易知

$$\int_0^1|f(x)|\mathrm{d}x=\left|\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x\right|$$

假设存在 $\xi\in(0,1)$,使得 $f(\xi)=0$,有 $f(x)=\displaystyle\int_\xi^x f'(t)\mathrm{d}t$,所以

$$\int_0^1|f(x)|\mathrm{d}x\leqslant\int_0^1\left|\int_\xi^x f'(t)\,\mathrm{d}t\right|\mathrm{d}x\leqslant\int_0^1\int_0^1\left|f'(t)\right|\mathrm{d}t\mathrm{d}x=\int_0^1\left|f'(x)\right|\mathrm{d}x$$

即证.

例 11.30: 设 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上连续,且 $f(x)>0$,证明:

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\int_a^b\frac{1}{f(x)}\mathrm{d}x\geqslant(b-a)^2$$

证明: 记 $D:(x,y)=a\leqslant x\leqslant b,a\leqslant y\leqslant b$,有

$$I=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\int_a^b\frac{1}{f(x)}\mathrm{d}x=\int_a^b f(y)\mathrm{d}y\int_a^b\frac{1}{f(x)}\mathrm{d}x=\iint_D\frac{f(y)}{f(x)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$I=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\int_a^b\frac{1}{f(x)}\mathrm{d}x=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\int_a^b\frac{1}{f(y)}\mathrm{d}y=\iint_D\frac{f(x)}{f(y)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

因此

$$2I=\iint_D\left[\frac{f(x)}{f(y)}+\frac{f(y)}{f(x)}\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y\geqslant 2\iint_D\mathrm{d}x\mathrm{d}y=2(b-a)^2$$

$$\Rightarrow I=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\int_a^b\frac{1}{f(x)}\mathrm{d}x\geqslant(b-a)^2$$

即证.

定义 11.2. 方法 9:定积分性质法

若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上非负可积，则 $\displaystyle\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\leqslant 0$；若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上恒正，则 $\displaystyle\int_a^b f(x)\mathrm{d}x>0$,若 $f(x)$ 与 $g(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积,且 $f(x)\leqslant g(x)$,则 $\displaystyle\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\leqslant$

$\int_a^b g(x)\mathrm{d}x$；若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积，则 $\left|\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\right| \leqslant \int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x$ ♣

例 11.31: 试证：若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，对一切的 $x \in [a,b]$，$f(x) \geqslant 0$，且 $f(x) \neq 0$，则 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x > 0$.

证明： 由题意知，可假设存在一点 $x_0 \in (a,b)$，使得 $f(x_0) > 0$，又由 $f(x)$ 在 x_0 上连续，则存在 $\xi > 0$，当 $x \in (x_0-\xi, x_0+\xi)$ 时，有 $f(x) > 0$，从而我们可以得到：

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \geqslant \int_{x_0-\xi}^{x_0+\xi} f(x_0)\,\mathrm{d}x_0 = 2\xi f(x_0) > 0$$

即证.

例 11.32: 证明：

$$\frac{1}{2} < \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{4-x^2+x^4}}\mathrm{d}x < \frac{\pi}{6}$$

证明： 设

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{4-x^2+x^4}} \Rightarrow f'(x) = \frac{x\left(1-2x^2\right)}{\sqrt{\left(4-x^2+x^4\right)^3}}$$

令 $f'(x) = 0$，得 $x_1 = 0, x_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}$，又 $f(0) = f(1) = \frac{1}{2}, f(\frac{1}{2}) = \frac{1}{\sqrt{2}}$，由积分估计可得：

$$\frac{1}{2} < \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{4-x^2+x^4}}\mathrm{d}x < \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{4-x^2}}\mathrm{d}x = \frac{\pi}{6}$$

即证.

定义 11.3. 方法 10: 留数法

设 D 是复平面上单连通开区域，C 是其边界，函数 $F(z)$ 在 D 内除了有限个奇点 $a_1, a_2, \cdot, a_n$ 外解析，在闭区域 $D+C$ 上除了 $a_1, a_2, \cdot, a_n$ 外连续，则有：

$$\oint_C F(z)\mathrm{d}z = 2\pi i \sum_{i=1}^{n} \operatorname{Res}\left[F(z), a_i\right]$$

♣

例 11.33: 设函数 $f(x)$ 在 $[0,2\pi]$ 上连续，且有 $M = \max\limits_{x\in[0,2\pi]} f(x)$，当 $a > 0$，试证：

$$\int_0^{2\pi} \frac{f(\theta)}{a+\cos\theta}\mathrm{d}\theta \leqslant \frac{2\pi}{\sqrt{a^2-1}} M$$

证明： 令 $z = e^{i\theta}$，则有 $\cos\theta = \frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2} = \frac{z^2+1}{2z}$，所以：

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{a+\cos\theta}\mathrm{d}\theta = \oint_{|z|=1} \frac{1}{iz\left(a+\frac{z^2+1}{2z}\right)}\mathrm{d}z = \oint_{|z|=1} \frac{2}{i\left(z^2+2az+1\right)}\mathrm{d}z$$

$$= -2i\oint_{|z|=1}\frac{1}{\left(z-\left(-a+\sqrt{a^2-1}\right)\right)\left(z-\left(-a-\sqrt{a^2-1}\right)\right)}\mathrm{d}z$$

再令

$$F(z)=\frac{1}{\left(z-\left(-a+\sqrt{a^2-1}\right)\right)\left(z-\left(-a-\sqrt{a^2-1}\right)\right)}$$

显然 $F(z)$ 在 $D:|z|\leqslant 1$ 内有且仅有一个单极点 $-a+\sqrt{a^2-1}1$,根据留数计算公式得:

$$\mathrm{Res}\left[F(z),-a+\sqrt{a^2-1}\right]=\frac{1}{2\sqrt{a^2-1}}$$

则由留数定理得:

$$\int_0^{2\pi}\frac{1}{a+\cos\theta}\mathrm{d}\theta=-2i\frac{2\pi i}{2\sqrt{a^2-1}}=\frac{2\pi}{\sqrt{a^2-1}}$$

因为 $f(\theta)\leqslant M,\dfrac{1}{a+\cos\theta}>0$,所以得

$$\int_0^{2\pi}\frac{f(\theta)}{a+\cos\theta}\mathrm{d}\theta\leqslant M\int_0^{2\pi}\frac{1}{a+\cos\theta}\mathrm{d}\theta=\frac{2\pi}{\sqrt{a^2-1}}M$$

即证.

定理 11.9. 方法 11:Favard 不等式

若函数 $f(x):[0,1]\to\mathbb{R}$ 是一个非负凹函数, 则有

$$\int_0^1 f^p(x)\mathrm{d}x\leqslant\frac{2^p}{p+1}\left(\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x\right)^p$$

证明: 不妨考虑 $f(0)=f(1)=0$, $f(x)$ 有连续的二阶导数,则 $f''(x)<0$,即

$$f(x)=-\int_0^1 K(x,t)f''(t)\mathrm{d}t$$

其中 Green 函数

$$K(x,t)=\begin{cases} t(1-x) & 0\leqslant t\leqslant x\leqslant 1\\ x(1-t) & 0\leqslant x\leqslant t\leqslant 1\end{cases}$$

由 Minkowski 不等式可得

$$\left(\int_0^1 f^p(x)\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}}=\left(\int_0^1\left(\int_0^1 K(x,t)\left(-f''(t)\right)\mathrm{d}t\right)^p\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}}\leqslant\int_0^1\left(\int_0^1 K^p(x,t)\left(-f''(t)\right)^p\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}}\mathrm{d}t$$
$$=\frac{1}{(p+1)^{\frac{1}{p}}}\int_0^1 t(1-t)\left|f''(t)\right|\mathrm{d}t$$

又

$$\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=-\int_0^1\int_0^1 K(x,t)f''(t)\mathrm{d}t\mathrm{d}x=-\int_0^1\int_0^1 K(x,t)f''(t)\mathrm{d}x\mathrm{d}t=-\frac{1}{2}\int_0^1 t(1-t)f''(t)\mathrm{d}t$$

因此

$$\int_0^1 f^p(x)\mathrm{d}x \leqslant \frac{2^p}{p+1}\left(\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x\right)^p$$

例 11.34: 若函数 $f(x):[0,1]\to\mathbb{R}$ 是一个非负凹函数, 且 $f(0)=1$，证明：

$$\int_0^1 xf(x)\mathrm{d}x \leqslant \frac{2}{3}\left(\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x\right)^2$$

证明: 法 1: 令 $F(x)=\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$，利用凹函数性质得到

$$F(x)=x\int_0^1 f[ux+(1-u)\cdot 0]\mathrm{d}u \geqslant x\int_0^1 [uf(x)+(1-u)]\mathrm{d}u=\frac{xf(x)}{2}+\frac{x}{2}$$

考虑

$$I=\int_0^1 xf(x)\mathrm{d}x,\ U=\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$$

即原命题等价于证明: $2U^2-3I\geqslant 0$

又有

$$I=\int_0^1 x\mathrm{d}F(x)=F(1)-\int_0^1 F(x)\mathrm{d}x \leqslant U-\int_0^1\left(\frac{xf(x)}{2}+\frac{x}{2}\right)\mathrm{d}x=U-\frac{I}{2}-\frac{1}{4}$$

因此 $3I\leqslant 2U-\frac{1}{2}$，也就是

$$2U^2-3I\geqslant 2U^2-\left(2U-\frac{1}{2}\right)=2\left(U-\frac{1}{2}\right)^2\geqslant 0$$

即证.

法 2: 令 $F(x)=\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$，利用 $f(t)$ 的凹函数性质得到

$$\frac{f(t)-f(0)}{t}\geqslant\frac{f(x)-f(0)}{x}$$

即有

$$\int_0^1 F(x)\,\mathrm{d}x=\int_0^1\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t\mathrm{d}x\geqslant\int_0^1\int_0^x\left(\frac{f(x)-1}{x}t+1\right)\mathrm{d}t\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int_0^1 (xf(x)+x)\mathrm{d}x$$

因此

$$\int_0^1 xf(x)\mathrm{d}x=F(1)-\int_0^1 F(x)\mathrm{d}x\leqslant\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x-\frac{1}{2}\int_0^1(xf(x)+x)\mathrm{d}x$$

所以

$$\int_0^1 xf(x)\mathrm{d}x\leqslant\frac{2}{3}\left(\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x-\frac{1}{4}\right)\leqslant\frac{2}{3}\left(\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x\right)^2$$

注意:法 1 与法 2 本质上是一样的,但是法 2 写的更为清晰。

例 11.35: 若函数 $f(x):[0,1]\to\mathbb{R}$ 是一个非负凹函数, 且 $f(0)=1$,证明:

$$2\int_0^1 x^2 f(x)\mathrm{d}x+\frac{1}{12}\leqslant\left(\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x\right)^2$$

证明: 法 2: 令 $F(x)=\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$,利用 $f(t)$ 的凹函数性质得到

$$\frac{f(t)-f(0)}{t}\geqslant\frac{f(x)-f(0)}{x}$$

即有

$$\int_0^1 F(x)\,\mathrm{d}x=\int_0^1\int_0^x xf(t)\,\mathrm{d}t\mathrm{d}x\geqslant\int_0^1\int_0^x x\left(\frac{f(x)-1}{x}t+1\right)\mathrm{d}t\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int_0^1 x^2(f(x)+1)\mathrm{d}x$$

因此

$$\int_0^1 x^2 f(x)\mathrm{d}x=F(1)-2\int_0^1 xF(x)\mathrm{d}x\leqslant\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x-\int_0^1\left(x^2 f(x)+x^2\right)\mathrm{d}x$$

所以

$$2\int_0^1 x^2 f(x)\mathrm{d}x+\frac{1}{12}\leqslant\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x-\frac{1}{4}\leqslant\left(\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x\right)^2$$

注意:此题可推广为

$$\frac{p+2}{2}\int_0^1 x^p f(x)\mathrm{d}x+\frac{2pf(0)-(p+1)}{4(p+1)}\leqslant\left(\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x\right)^2\ (p>0)$$

定理 11.10. 方法 12:Chebyshev 不等式

若函数 $f(x),g(x)$ 是 $[a,b]$ 上的连续函数, 且 $f(x),g(x)$ 在 $[a,b]$ 上单调性一致, 则有

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\cdot\int_a^b g(x)\mathrm{d}x\leqslant(b-a)\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x$$

证明: 对 $x,y\in[a,b]$,则 $[f(x)-f(y)][g(x)-g(y)]\geqslant 0$,即

$$f(x)g(x)+f(y)g(y)\geqslant f(x)g(y)+f(y)g(x)$$

对上式关于 x 在 $[a,b]$ 上积分得

$$\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x+(b-a)f(y)g(y)\geqslant g(y)\int_a^b f(x)\mathrm{d}x+f(y)\int_a^b g(x)\mathrm{d}x$$

对上式关于 y 在 $[a,b]$ 上积分得

$$(b-a)\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x+(b-a)\int_a^b f(y)g(y)\mathrm{d}y\geqslant\int_a^b g(y)\mathrm{d}y\int_a^b f(x)\mathrm{d}x+\int_a^b f(y)\mathrm{d}y\int_a^b g(x)\mathrm{d}x$$

将上式中 y 改为 x 即证

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \cdot \int_a^b g(x)\mathrm{d}x \leqslant (b-a)\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x$$

注意：Chebyshev 不等式更一般的不等式形式为：若函数 $f(x),g(x),p(x)$ 是 $[a,b]$ 上的连续函数且 $\forall x\in[a,b]$, $p(x)\geqslant 0$，而 $f(x),g(x)$ 在 $[a,b]$ 上单调性一致，则有

$$\int_a^b p(x)f(x)\mathrm{d}x\int_a^b p(x)g(x)\mathrm{d}x \leqslant \int_a^b p(x)\mathrm{d}(x)\int_a^b p(x)f(x)g(x)\mathrm{d}x$$

1. 如果 $f(x),g(x)$ 单调性不一致，则不等式变号；
2. 此不等式成立的条件可适当减弱，$f(x),g(x),p(x)$ 的连续性可弱化为可积.

例 11.36: 证明：

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x}{1+x^2}\mathrm{d}x \leqslant \int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x}{1+x^2}\mathrm{d}x$$

证明：考虑 $y=\sin x, y=\dfrac{1}{1+x^2}$ 在 $[0,\dfrac{\pi}{2}]$ 上单调性相反，由 Chebyshev 不等式可得

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin x\mathrm{d}x\cdot\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x \geqslant \frac{\pi}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin x\cdot\frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x$$

即

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x}{1+x^2}\mathrm{d}x \leqslant \frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x$$

同理考虑 $y=\cos x, y=\dfrac{1}{1+x^2}$ 在 $[0,\dfrac{\pi}{2}]$ 上单调性相同，由 Chebyshev 不等式可得

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos x\mathrm{d}x\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x \leqslant \frac{\pi}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x}{1+x^2}\mathrm{d}x$$

即

$$\frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x \leqslant \int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x}{1+x^2}\mathrm{d}x$$

因此

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x}{1+x^2}\mathrm{d}x \leqslant \int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x}{1+x^2}\mathrm{d}x$$

例 11.37: 设 $f(x)$ 在区间 $[0,1]$ 上连续，且 $f(x)$ 单调递增，证明：

$$\frac{\int_0^1 xf^2(x)\mathrm{d}x}{\int_0^1 xf(x)\mathrm{d}x} \geqslant \frac{\int_0^1 f^2(x)\mathrm{d}x}{\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x}$$

证明：此题可利用 Chebyshew 不等式的一般形式：

$$\int_a^b p(x)f(x)\mathrm{d}x\int_a^b p(x)g(x)\mathrm{d}x \leqslant \int_a^b p(x)\mathrm{d}(x)\int_a^b p(x)f(x)g(x)\mathrm{d}x$$

其中这里的 $p(x)=f(x), g(x)=x$，且 $f(x), g(x)$ 单调性相同，有

$$\int_0^1 p(x)f(x)\mathrm{d}x\int_0^1 p(x)g(x)\mathrm{d}x\leqslant\int_0^1 p(x)\mathrm{d}x\int_0^1 p(x)f(x)g(x)\mathrm{d}x$$

即

$$\int_0^1 f'(x)\mathrm{d}x\int_0^1 xf(x)\mathrm{d}x\leqslant\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x\int_0^1 xf^2(x)\mathrm{d}x$$

由于 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上恒正，两边同除以 $\int_0^1 xf(x)\mathrm{d}x\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$ 即证.

例 11.38: 设连续函数 $f,g:[0,1]\to(0,+\infty)$ 且 $f(x),\dfrac{g(x)}{f(x)}$ 单调递增，证明：

$$\int_0^1\left(\frac{\int_0^x f(t)\mathrm{d}t}{\int_0^x g(t)\mathrm{d}t}\right)\mathrm{d}x\leqslant 2\int_0^1\frac{f(x)}{g(x)}\mathrm{d}x$$

证明： 由 Chebyshew 不等式可得

$$\int_0^x f(t)\mathrm{d}t\cdot\int_0^x\frac{g(t)}{f(t)}\mathrm{d}t\leqslant x\int_0^x g(t)\mathrm{d}t$$

即

$$\frac{\int_0^x f(t)\mathrm{d}t}{\int_0^x g(t)\mathrm{d}t}\leqslant\frac{x}{\int_0^x\frac{g(t)}{f(t)}\mathrm{d}t}$$

由 Cauchy 不等式得

$$\frac{x^4}{4}=\left(\int_0^x\sqrt{\frac{g(t)}{f(t)}}\sqrt{\frac{t^2f(t)}{g(t)}}\mathrm{d}t\right)^2\leqslant\int_0^x\frac{g(t)}{f(t)}\mathrm{d}t\int_0^x\frac{t^2f(t)}{g(t)}\mathrm{d}t$$

即

$$\frac{\int_0^x f(t)\mathrm{d}t}{\int_0^x g(t)\mathrm{d}t}\leqslant\frac{4}{x^3}\int_0^x\frac{t^2f(t)}{g(t)}\mathrm{d}t$$

因此

$$\begin{aligned}\int_0^1\left(\frac{\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t}{\int_0^x g(t)\,\mathrm{d}t}\right)\mathrm{d}x&\leqslant\int_0^1\int_0^x\frac{4t^2f(t)}{x^3g(t)}\mathrm{d}t\mathrm{d}x=\int_0^1\int_t^1\frac{4t^2f(t)}{x^3g(t)}\mathrm{d}t\\&=2\int_0^1\frac{f(t)}{g(t)}(1-t^2)\,\mathrm{d}t\leqslant 2\int_0^1\frac{f(t)}{g(t)}\mathrm{d}t\end{aligned}$$

定理 11.11. 方法 13:Minkowski 不等式

设 $f(x)$ 是 $\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n$ 上的 Lebesgue 可测函数，则对任意 $1\leqslant p<+\infty$，由

$$\sqrt[p]{\int_{\mathbb{R}^n}\left|\int_{\mathbb{R}^n}f(x,y)\,\mathrm{d}y\right|^p\mathrm{d}x}\leqslant\int_{\mathbb{R}^n}\sqrt[p]{\int_{\mathbb{R}^n}|f(x,y)|^p\mathrm{d}x\mathrm{d}y}.$$

♡

例 11.39: 设 $f(x)$ 是 $[0,1]$ 上的连续可微函数，且 $f(0)=0$，试证明：

$$\int_0^1 \frac{|f(x)|^2}{x^2}\mathrm{d}x \leqslant 4\int_0^1 \left|f'(x)\right|^2 \mathrm{d}x$$

证明：

由闵可夫斯基不等式得

$$\begin{aligned}\sqrt{\int_0^1 \frac{|f(x)|^2}{x^2}\mathrm{d}x} &= \sqrt{\int_0^1 \left(\frac{\int_0^x f'(t)\,\mathrm{d}t}{x}\right)^2 \mathrm{d}x} = \sqrt{\int_0^1 \left(\int_0^1 f'(xt)\,\mathrm{d}t\right)^2 \mathrm{d}x} \\ &\leqslant \int_0^1 \sqrt{\int_0^1 |f'(xt)|^2\,\mathrm{d}x\mathrm{d}t} = \int_0^1 \sqrt{\frac{\int_0^t |f'(x)|^2 \mathrm{d}x}{t}}\mathrm{d}t \\ &\leqslant \sqrt{\int_0^1 |f'(x)|^2 \mathrm{d}x}\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{t}}\mathrm{d}t = 2\sqrt{\int_0^1 |f'(x)|^2 \mathrm{d}x}\end{aligned}$$

两边平方即证.

例 11.40: 设 $f(x)$ 是 $[a,b]$ 上的连续可微函数，且 $f(a)=0$，试证明：

$$\int_a^b |f(x)f'(x)|\mathrm{d}x \le \frac{b-a}{2}\int_a^b |f'(x)|^2 \mathrm{d}x$$

证明： 注意到 $f(a)=0$，则有 $|f'(x)| = \dfrac{\mathrm{d}\left(\int_a^x |f'(t)|\mathrm{d}t\right)}{\mathrm{d}x}$，即

$$\begin{aligned}\int_a^b |f(x)f'(x)|\mathrm{d}x &= \int_a^b \left|\int_a^x f'(t)\,\mathrm{d}t\right| |f'(x)|\,\mathrm{d}x = \int_a^b \left|\int_a^x f'(t)\,\mathrm{d}t\right| \mathrm{d}\left(\int_a^x |f'(t)|\mathrm{d}t\right) \\ &\le \int_a^b \left(\int_a^x |f'(t)|\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}\left(\int_a^x |f'(t)|\mathrm{d}t\right) = \int_a^b \left|\int_a^x f'(t)\,\mathrm{d}t\right| \mathrm{d}\left(\int_a^x |f'(t)|\mathrm{d}t\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(\int_a^x |f'(t)|\mathrm{d}t\right)^2\Bigg|_a^b = \frac{1}{2}\left(\int_a^b 1\cdot|f'(t)|\,\mathrm{d}t\right)^2 \\ &\le \frac{1}{2}\int_a^b 1^2\mathrm{d}t \cdot \int_a^b |f'(t)|^2 \mathrm{d}t = \frac{b-a}{2}\int_a^b |f'(t)|^2 \mathrm{d}x\end{aligned}$$

11.2 竞赛每日一题练习

例 11.41: 求微分方程 $y'' = \dfrac{1}{1+x^2}$ 的通解

解： 令 $y'=p$，则 $y'' = \dfrac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}$，即

$$\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{1+x^2} \Rightarrow p = \arctan x + C_1 \Rightarrow \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \arctan x + C_1 \Rightarrow \mathrm{d}y = (\arctan x + C_1)\,\mathrm{d}x$$

$$y = \int (\arctan x + C_1)\,\mathrm{d}x$$

$$
\begin{aligned}
&= \int \arctan x \mathrm{d}x + C_1 x = x\arctan x - \int \frac{x}{1+x^2}\mathrm{d}x + C_1 x \\
&= x\arctan x - \frac{1}{2}\int \frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}\left(1+x^2\right) + C_1 x \\
&= x\arctan x - \frac{1}{2}\ln\left(1+x^2\right) + C_1 x + C_2
\end{aligned}
$$

例 11.42: 设函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 附近有定义,在 $x=0$ 处可导,并且满足 $f(0)=0$, $f'(0)=1$. 计算极限

$$\lim_{n\to\infty}\left(f\left(\frac{1}{n^2}\right)+f\left(\frac{2}{n^2}\right)+\cdots+f\left(\frac{n}{n^2}\right)\right)$$

解: 由定积分定义可得

$$
\begin{aligned}
&\lim_{n\to\infty}\left(f\left(\frac{1}{n^2}\right)+f\left(\frac{2}{n^2}\right)+\cdots+f\left(\frac{n}{n^2}\right)\right)=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\left(f\left(\frac{i}{n^2}\right)-f(0)\right) \\
&=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{i}{n^2}\cdot f'(0)=f'(0)\int_0^1 x\mathrm{d}x=\frac{1}{2}f'(0)=\frac{1}{2}
\end{aligned}
$$

注意: 此题可以考虑数列极限方法,定义两组数列

$$a_n := f\left(\frac{1}{n^2}\right)+f\left(\frac{2}{n^2}\right)+\cdots+f\left(\frac{n}{n^2}\right),\quad b_n := \frac{1}{n^2}+\frac{2}{n^2}+\cdots+\frac{n}{n^2}$$

则有 $b_n=\dfrac{n+1}{2n}$. 因此 $\lim\limits_{n\to\infty} b_n=\dfrac{1}{2}$,即我们只需证明 $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n-b_n)=0$,就有

$$\lim_{n\to\infty} a_n=\lim_{n\to\infty}\left[(a_n-b_n)+b_n\right]=\lim_{n\to\infty}(a_n-b_n)+\lim_{n\to\infty} b_n=0+\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$$

接下来就是证明 $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n-b_n)=0$ 即可. 对 $\forall\varepsilon>0$, 存在 $N>0$, 使得对 $\forall x\in(0,\dfrac{1}{N})$ 成立 $\left|\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}-1\right|<\varepsilon$, 即 $|f(x)-x|<\varepsilon x$.

特别地对 $\forall n>N$ 以及 $\forall k\in[1,N]$ 成立 $\left|f\left(\dfrac{k}{n^2}\right)-\dfrac{k}{n^2}\right|<\varepsilon\dfrac{k}{n^2}$, 因此对 $\forall n>N$ 有

$$|a_n-b_n|=\left|\sum_{k=1}^{n}\left(f\left(\frac{k}{n^2}\right)-\frac{k}{n^2}\right)\right|\leqslant\sum_{k=1}^{n}\left|f\left(\frac{k}{n^2}\right)-\frac{k}{n^2}\right|<\varepsilon\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n^2}=\varepsilon\frac{n+1}{2n}\leqslant\varepsilon$$

即证 $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n-b_n)=0$

例 11.43: 已知定义在 $x\in\mathbb{R}$ 附近的函数 $f(x)$ 满足 $f(0)=0$,并且 $f'(0)$ 存在,试计算

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(1-\cos x)}{1-\cos x\sqrt{\cos 2x}}$$

解： 由题设易知，因 $f(0)=0, f'(0)$ 存在，所以对 $x\to 0$，有 $f(x)=xf'(0)+o(x)$，因此利用等价无穷小有

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{f(1-\cos x)}{1-\cos x\sqrt{\cos 2x}} &= \lim_{x\to 0}\frac{(1-\cos x)f'(0)}{1-\cos x+\cos x(1-\sqrt{\cos 2x})}\\ &= \lim_{x\to 0}f'(0)\frac{1}{1+\cos x\frac{1-\sqrt{\cos x}}{1-\cos x}}\\ &= \frac{f'(0)}{1+\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\sqrt{\cos 2x}}{1-\cos x}}\end{aligned}$$

又因为

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\sqrt{\cos 2x}}{1-\cos x}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\sqrt{1-2x^2+o\left(x^3\right)}}{\frac{1}{2}x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\left(1-x^2+o\left(x^3\right)\right)}{\frac{1}{2}x^2}=2$$

即 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(1-\cos x)}{1-\cos x\sqrt{\cos 2x}}=\dfrac{1}{2}f'(0)$

例 11.44: 计算极限

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{e^x-1}-\sin x+2\cos x-3}{\tan x-\sin x}$$

解： 注意到

$$\begin{aligned}\tan x-\sin x=\sin x\left(\frac{1}{\cos x}-1\right) &= \left(x-\frac{1}{6}x^3+o\left(x^3\right)\right)\left(\frac{1}{1-\frac{x^2}{2}+o\left(x^3\right)}-1\right)\\ &= \left(x-\frac{1}{6}x^3+o\left(x^3\right)\right)\left(\frac{x^2}{2}+o\left(x^3\right)\right)=\frac{1}{2}x^3+o\left(x^3\right)\end{aligned}$$

再注意到

$$\begin{aligned}&e^{e^x-1}=e^{x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}+o(x^3)}\\ &=1+\left(x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}+o\left(x^3\right)\right)+\frac{1}{2}\left(x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}+o\left(x^3\right)\right)^2+\frac{1}{6}\left(x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}+o\left(x^3\right)\right)^3+o\left(x^3\right)\\ &=1+\left(x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}\right)+\frac{1}{2}\left(x^2+x^3\right)+\frac{1}{6}x^3+o\left(x^3\right)\\ &=1+x+x^2+\frac{5}{6}x^3+o\left(x^3\right)\end{aligned}$$

即有

$$\begin{aligned}e^{e^{x^x}-1}-\sin x+2\cos x-3 &= \left(1+x+x^2+\frac{5}{6}x^3\right)-\left(x-\frac{1}{6}x^3\right)+2\left(1-\frac{x^2}{2}\right)-3+o\left(x^3\right)\\ &= x^3+o\left(x^3\right)\end{aligned}$$

因此
$$\lim_{x\to0}\frac{e^{x-1}-\sin x+2\cos x-3}{\tan x-\sin x}=\lim_{x\to0}\frac{x^3}{\frac{1}{2}x^3}=2$$

例 11.45: 已知实数 α,β 满足
$$\lim_{x\to+\infty}x^\alpha\left(1-\left(x+\frac{1}{2}\right)\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\right)=\beta$$
并且 $\beta\neq0$. 求 α 与 β.

解: 注意到当 $x\to+\infty$ 时有 $\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)=\frac{1}{x}-\frac{1}{2x^2}+\frac{1}{3x^3}+o\left(\frac{1}{x^3}\right)$, 即
$$\begin{aligned}1-\left(x+\frac{1}{2}\right)\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)&=1-\left(x+\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{2x^2}+\frac{1}{3x^3}+o\left(\frac{1}{x^3}\right)\right)\\&=1-\left(1-\frac{1}{2x}+\frac{1}{3x^2}+\frac{1}{2x}-\frac{1}{4x^2}+o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right)\\&=-\frac{1}{12x^2}+o\left(\frac{1}{x^2}\right)\end{aligned}$$
因此 $\alpha=2,\beta=-\frac{1}{12}$.

例 11.46: 设 $f(x):[a,b]\to\mathbb{R}$ 是连续可微函数，且 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=0$，求证：
$$\left(\int_a^{2b-a}f(x)\,\mathrm{d}x\right)^2\leq\frac{2(b-a)^3}{3}\int_a^{2b-a}\left(f'(x)\right)^2\mathrm{d}x$$

解: 这里假设 $a=0,b=\frac{1}{2}$，条件则是 $\int_0^{\frac{1}{2}}f(x)\mathrm{d}x=0$，即要证
$$\left(\int_1^1 f(x)\,\mathrm{d}x\right)^2\leq\frac{1}{12}\int_0^1\left(f'(x)\right)^2\mathrm{d}x$$
由 cauchy 不等式可得
$$\int_0^{\frac{1}{2}}\left(f'(x)\right)^2\mathrm{d}x\int_0^{\frac{1}{2}}x^2\mathrm{d}x\geqslant\left(\int_0^{\frac{1}{2}}xf'(x)\mathrm{d}x\right)^2=\left(\frac{1}{2}f\left(\frac{1}{2}\right)\right)^2\Rightarrow\int_0^{\frac{1}{2}}\left(f'(x)\right)^2\mathrm{d}x\geqslant24\left(\frac{1}{2}f\left(\frac{1}{2}\right)\right)^2$$
同理可得
$$\int_{\frac{1}{2}}^1(1-x)^2\mathrm{d}x\int_{\frac{1}{2}}^1\left(f'(x)\right)^2\mathrm{d}x\geqslant\left(\int_{\frac{1}{2}}^1(1-x)f'(x)\right)^2=\left(\int_{\frac{1}{2}}^1f(x)\mathrm{d}x-\frac{1}{2}f\left(\frac{1}{2}\right)\right)^2$$
即
$$\int_{\frac{1}{2}}^1\left(f'(x)\right)^2\mathrm{d}x\geqslant24\left(\int_{\frac{1}{2}}^1f(x)\mathrm{d}x-\frac{1}{2}f\left(\frac{1}{2}\right)\right)^2$$

根据 $2\left(a^2+b^2\right) \geqslant (a+b)^2$ 得

$$
\begin{aligned}
\int_0^1 \left(f'(x)\right)^2 \mathrm{d}x &\geqslant 24\left(\frac{1}{2} f\left(\frac{1}{2}\right)\right)^2 + 24\left(\int_{\frac{1}{2}}^1 f(x)\mathrm{d}x - \frac{1}{2} f\left(\frac{1}{2}\right)\right)^2 \\
&\geqslant 12\left(\frac{1}{2} f\left(\frac{1}{2}\right) + \int_{\frac{1}{2}}^1 f(x)\mathrm{d}x - \frac{1}{2} f\left(\frac{1}{2}\right)\right)^2 \\
&= 12\left(\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x\right)^2
\end{aligned}
$$

例 11.47: 设方程组 $\begin{cases} x = u + vz \\ y = -u^2 + v + z \end{cases}$ 在点 $(x, y, z) = (2, 1, 1)$ 的某一邻域内确定了隐函数 $u(x, y, z)$ 与 $v(x, y, z)$，且 $u(2, 1, 1) > 0$. 试计算 $\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial z}\right)\Big|_{(2,1,1)}$ 的值.

解: 由题设易知 $u(2, 1, 1) = v(2, 1, 1) = 1$，考虑函数 $\begin{cases} F_1(x, y, z; u, v) = x - u - vz \\ F_2(x, y, z; u, v) = y + u^2 - v - z \end{cases}$，则关于 x, y, z 的隐函数 u, v，由 $F_1 = F_2 = 0$ 决定. 根据隐映射定理得

$$
\begin{aligned}
&\left.\begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial u}{\partial z} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial z} \end{pmatrix}\right|_{(2,1,1)} = -\left.\begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial u} & \frac{\partial F_1}{\partial v} \\ \frac{\partial F_2}{\partial u} & \frac{\partial F_2}{\partial v} \end{pmatrix}^{-1}\right|_{(2,1,1)} \left.\begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x} & \frac{\partial F_1}{\partial y} & \frac{\partial F_1}{\partial z} \\ \frac{\partial F_2}{\partial x} & \frac{\partial F_2}{\partial y} & \frac{\partial F_2}{\partial z} \end{pmatrix}\right|_{(2,1,1)} \\
&= -\left.\begin{pmatrix} -1 & -z \\ 2u & -1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -v \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}\right|_{(u,v)=(1,1)} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & -3 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

因此 $\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial z}\right)\Big|_{(2,1,1)} = \frac{1}{3}(1 + 1 + 0) = \frac{2}{3}$

例 11.48: 设函数 $f(x, y)$ 可微，且满足 $f\left(x, x^3\right) = x^6 + 2x^4$, $f_1'\left(x, x^3\right) = 2x^3 - 3x^2$，求 $f_2'\left(x, x^3\right)$.

解: 两边对 x 求导

$$
f_1' + 3x^2 f_2' = 6x^5 + 8x^3
$$

已知 $f_1'\left(x, x^3\right) = 2x^3 - 3x^2$，即有

$$
2x^3 - 3x^2 + 3x^2 f_2' = 6x^5 + 8x^3
$$

因此 $f_2'(x, y) = 2x^3 + 2x + 1$.

注意: 或者考虑全微分形式

$$
\mathrm{d} f(x, y) = f_x'(x, y)\mathrm{d}x + f_y'(x, y)\mathrm{d}y
$$

所以

$$
\begin{aligned}
\mathrm{d}f\left(x,x^3\right) &= f_1'\left(x,x^3\right)\mathrm{d}x + f_2'\left(x,x^3\right)\mathrm{d}x^3\\
\mathrm{d}\left(x^6+2x^4\right) &= \left(2x^3-3x^2\right)\mathrm{d}x + f_2'\left(x,x^3\right)\mathrm{d}x^3
\end{aligned}
$$

即

$$\left(6x^5+6x^3+3x^2\right)\mathrm{d}x = 3x^2 f_2'\mathrm{d}x$$

有 $f_2'(x,y)=2x^3+2x+1$.

因为

$$
\begin{aligned}
\int \mathrm{d}f\left(x,x^3\right) = f\left(x,x^3\right)+C &= \int f_1'\mathrm{d}x + \int f_3'\mathrm{d}x^3\\
&= \frac{1}{2}x^4 - x^3 + \int f_3'\mathrm{d}x^3
\end{aligned}
$$

因此

$$
\begin{aligned}
\int f_3'\mathrm{d}x^3 = \int f_3' 3x^2\mathrm{d}x &= x^6+2x^4+x^3-\frac{1}{2}x^4+C\\
&= x^6+\frac{3}{2}x^4+x^3+C
\end{aligned}
$$

所以

$$3x^2 f_2' = 6x^5+6x^3+3x^2 \Rightarrow f_2'\left(x,x^3\right) = 3x^3+2x+1$$

例 11.49: 设 $x,y,z\in\mathbb{R}^+$，求方程组 $\begin{cases} x^2+y^2+z^2=1\\ 7x^3+14y^3+21z^3=6\end{cases}$ 的解.

解: 考虑 $f(x)=7x^3+14y^3+21z^3$ 在约束 $x^2+y^2+z^2=1$ 的极值，构造拉格朗日函数

$$L(x,y,z)=7x^3+14y^3+21z^3+\lambda\left(x^2+y^2+z^2-1\right)$$

因此

$$
\begin{cases}
L_x = 21x^2+2\lambda x=0\\
L_y = 42y^2+2\lambda y=0\\
L_z = 63z^2+2\lambda z=0\\
x^2+y^2+z^2=1
\end{cases}
\Longrightarrow
\begin{cases}
x=-\dfrac{2\lambda}{21}=\dfrac{2\lambda}{21}(-1)\\
y=-\dfrac{2\lambda}{42}=\dfrac{2\lambda}{21}\left(-\dfrac{1}{2}\right)\\
-\dfrac{1}{3})
\end{cases}
$$

$$
\begin{aligned}
x^2+y^2+z^2=1 &\Longrightarrow \left(\frac{2\lambda}{21}\right)^2\left(1+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}\right)=1 \Longrightarrow \lambda=-9\\
&\Longrightarrow x=\frac{6}{7},y=\frac{3}{7},z=\frac{2}{7}
\end{aligned}
$$

故 $f_{\min}=\dfrac{1}{49}\left(6^3+2\times 3^3+3\times 2^3\right)=6$，因此方程组的解为 $x=\dfrac{6}{7},y=\dfrac{3}{7},z=\dfrac{2}{7}$.

例 11.50: 求球面 $x^2+y^2+z^2=14$ 在点 $(1,2,3)$ 处的切平面及法线方程.

解: 考虑 $F(x,y,z)=x^2+y^2+z^2-14$，有

$$n=\left(F_x,F_y,F_z\right)=(2x,2y,2z)\Longrightarrow n|_{(1,2,3)}=(2,4,6)$$

所以在点 $(1,2,3)$ 处此球面的切平面方程

$$2(x-1)+4(y-2)+6(z-3)=0\Rightarrow x+2y+3z-14=0$$

法线方程

$$\frac{x-1}{1}=\frac{y-2}{2}=\frac{z-3}{3}\Rightarrow\frac{x}{1}=\frac{y}{2}=\frac{z}{3}$$

例 11.51: 求差分方程 $\Delta^2y_x-y_x=5$ 的通解.

注意: 要求熟悉二阶差分的定义，以及特解. 原方程的通解为 $y_x=C\cdot 2^x-5$. 源于 2018 年考研数三第 11 题.

解: 根据二阶差分的定义可得

$$\Delta^2y_x=\Delta y_{x+1}-\Delta y_x=(y_{x+2}-y_{x+1})-(y_{x+1}-y_x)=y_{x+2}-2y_{x+1}+y_x$$

由 $\Delta^2y_x-y_x=5$ 得 $y_{x+2}-2y_{x+1}=5$.

先求齐次方程的通解, 由差分方程的特征方程 $\lambda-2=0$，即齐次方程通解为 $Y=C\cdot 2^x$. 由于 1 不是特征根, 于是假设原差分方程的特解为 $y_x^*=A$, 带入非齐次方程知特解为 $y_x^*=-5$, 于是原方程的通解为 $y_x=C\cdot 2^x-5$.

例 11.52: 以 P_A,P_B 分别表示 A,B 两个商品的价格, 设商品 A 的需求函数 $Q_A=500-P_A^2-P_AP_B+2P_B^2$，则当 $P_A=10,P_B=20$ 时, 问商品 A 的需求量对自身价格的弹性 $\eta_{AA}\,(\eta_{AA}>0)$.

注意: 此题源于 2019 年考研数三第 12 题，对需求弹性公式的了解.$\eta_{AA}=0.4$.

解: 由需求弹性公式可得

$$\eta_{AA}=\left|\frac{P_A}{P_B}\frac{\partial Q_A}{\partial P_A}\right|=\left|\frac{P_A}{500-P_A^2-P_AP_B+2P_B^2}(-2P_A-P_B)\right|=\frac{P_A\,(2P_A+P_B)}{500-P_A^2-P_AP_B+2P_B^2}$$

代入 $P_A=10,P_B=20$ 得 $\eta_{AA}=0.4$.

例 11.53: 求下列定积分

$$I=\int_0^{2\pi}\sqrt{1+\cos x}\mathrm{d}x,\qquad J=\int_0^{2\pi}\frac{1}{a+\cos x}\mathrm{d}x,a>1$$

注意: 提示本题源于 2019 年中科院数学分析第 4 题，考查三角积分且分段估计换元. 参考解答: $I=4\sqrt{2},J=\dfrac{2\pi}{\sqrt{a^2-1}}$

解：

$$I=\int_0^{2\pi}\sqrt{1+\cos x}\mathrm{d}x=\int_0^{2\pi}\sqrt{2\cos^2\frac{x}{2}}\mathrm{d}x=\sqrt{2}\int_0^{2\pi}\left|\cos\frac{x}{2}\right|\mathrm{d}x=4\sqrt{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos x\mathrm{d}x=4\sqrt{2}$$

$$\begin{aligned}J&=\int_0^{2\pi}\frac{1}{a+\cos x}\mathrm{d}x=\int_0^{\pi}\frac{\mathrm{d}x}{a+\cos x}+\int_{\pi}^{2\pi}\frac{\mathrm{d}x}{a+\cos x}\xlongequal{t=2\pi-u}2\int_0^{\pi}\frac{1}{a+\cos t}\mathrm{d}t\\&\xlongequal{y=\frac{t}{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{a+\cos 2y}\mathrm{d}y=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sec^2 y}{(a-1)\sec^2 y+2}\mathrm{d}y=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sec^2 y}{a+1+(a-1)\tan^2 y}\mathrm{d}y\\&\xlongequal{u=\tan y}4\int_0^{\infty}\frac{\mathrm{d}u}{a+1+(a-1)u^2}=\frac{2\pi}{\sqrt{a^2-1}}\end{aligned}$$

例 11.54: 设函数 $f(x)$ 满足 $f(x+\Delta x)-f(x)=2xf(x)\Delta x+o(\Delta x)(\Delta x\to 0)$，且 $f(0)=2$，求 $f(1)$.

注意：导数的定义，以及二阶微分方程的通解求法. 源于 2018 年考研数三第 12 题. $f(1)=2e$

解：在等式 $f(x+\delta x)-f(x)=2xf(x)\Delta x+o(\Delta x)$ 两边同除以 Δx，并令 $\Delta x\to 0$ 得 $f'(x)=2xf(x)$，解得 $f(x)=C\mathrm{e}^{x^2}$. 由 $f(0)=2$ 得 $C=2$，即 $f(1)=2e$.

例 11.55: 已知 $f(u,v)$ 具有二阶连续偏导数，且 $g(x,y)=xy-f(x+y,x-y)$，求 $\dfrac{\partial^2 g}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 g}{\partial x\partial y}+\dfrac{\partial^2 g}{\partial y^2}$.

注意：这个题是对于学生要求多元函数中复合函数的链式偏导例子，该题源于 2019 年考研数三 16 题，参考答案：$\dfrac{\partial^2 g}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 g}{\partial x\partial y}+\dfrac{\partial^2 g}{\partial y^2}=1-3f''_{11}(x+y,x-y)-f''_{22}(x+y,x-y)$

解：直接计算可得

$$\begin{aligned}\frac{\partial g}{\partial x}&=y-f'_1-f'_2\cdot\frac{\partial g}{\partial y}=x-f'_1+f'_2\\\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}&=-f''_{11}-f''_{12}-f''_{21}-f''_{22}=-f''_{11}-2f''_{12}-f''_{22}\\\frac{\partial^2 g}{\partial x\partial y}&=1-f''_{11}+f''_{12}-f''_{21}+f''_{22}=1-f''_{11}+f''_{22}\\\frac{\partial^2 g}{\partial y^2}&=-f''_{11}+f''_{12}+f''_{21}-f''_{22}=-f''_{11}+2f''_{12}-f''_{22}\end{aligned}$$

代入即可得

$$\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 g}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2 g}{\partial y^2}=1-3f''_{11}(x+y,x-y)-f''_{22}(x+y,x-y)$$

例 11.56: 计算下列二重积分：

$$\iint_D x(y+1)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

其中 $D:x^2+y^2\geqslant 1,x^2+y^2\leqslant 2x$

解: 积分区域关于 x 轴对称，xy 是关于 y 的奇函数，因此 $\iint_D xy\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0$，则有

$$\iint_D x\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}}\mathrm{d}\theta\int_1^{2\cos\theta}\rho\cos\theta\cdot\rho\mathrm{d}\rho=\frac{\sqrt{3}}{4}+\frac{2}{3}\pi$$

因此原式 $\iint_D x(y+1)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\frac{\sqrt{3}}{4}+\frac{2}{3}\pi$.

例 11.57: 计算

$$\iint_D\left(\sqrt{x^2+y^2}+2y^3\right)\mathrm{d}\sigma$$

其中 D 是由圆 $x^2+y^2=4$ 与 $(x-1)^2+y^2=1$ 所围成的平面区域.

解: 设 $D_1:(x-1)^2+y^2=1$, $D_2:x^2+y^2=4$，由积分区域的对称性和被积函数的奇偶性得 $\iint_D 2y^3\mathrm{d}\sigma=0$.

$$\begin{aligned}\iint_D\left(\sqrt{x^2+y^2}+2y^3\right)\mathrm{d}\sigma&=\iint_D\sqrt{x^2+y^2}\mathrm{d}\sigma=\iint_{D_2}\sqrt{x^2+y^2}\mathrm{d}\sigma-\iint_{D_1}\sqrt{x^2+y^2}\mathrm{d}\sigma\\&=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^2\rho^2\mathrm{d}\rho-\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^{2\cos\theta}\rho^2\mathrm{d}\rho=\frac{16\pi}{3}-\frac{32}{9}\end{aligned}$$

例 11.58: 设函数 $f(x)$ 连续，$f(0)=0$，且在 $x=0$ 处可导，求极限

$$\lim_{t\to0^+}\frac{1}{t^4}\iint_{x^2+y^2\leqslant t^2}f\left(x^2+y^2\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

解: 易知 $\iint_{x^2+y^2\leqslant t^2}f\left(x^2+y^2\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^t f\left(\rho^2\right)\rho\mathrm{d}\rho=2\pi\int_0^t f\left(\rho^2\right)\rho\mathrm{d}\rho$

因此

$$\begin{aligned}\lim_{t\to0^+}\frac{1}{t^4}\iint_{x^2+y^2\leqslant t^2}f\left(x^2+y^2\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y&==\lim_{t\to0^+}\frac{2\pi\int_0^t f\left(\rho^2\right)\rho\mathrm{d}\rho}{t^4}=2\pi\lim_{t\to0^+}\frac{f\left(t^2\right)t}{4t^3}\\&=\frac{\pi}{2}\lim_{t\to0^+}\frac{f\left(t^2\right)-f(0)}{t^2-0}=\frac{\pi}{2}f'(0)\end{aligned}$$

例 11.59: 计算三重积分

$$\iiint_\Omega\left(x^2+y\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

其中 Ω 是由 $z=x^2+y^2, z=4$ 所围成的立体.

解: 很容易知 $\iiint_\Omega y\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=0$ 因此

$$\iiint_\Omega\left(x^2+y\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\iiint_\Omega x^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+\iiint_\Omega y\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\iiint_\Omega x^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

投影区域为 $\begin{cases} x^2+y^2=4 \\ z=0 \end{cases}$，选择柱坐标 $\Omega \begin{cases} 0\le\theta\le 2\pi \\ 0\le\rho\le 2 \\ \rho^2\le z\le 4 \end{cases}$

$$\iiint_\Omega (x^2+y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\int_0^{2\pi}\cos^2\theta\mathrm{d}\theta\int_0^2\rho^3\mathrm{d}\rho\int_{\rho^2}^4\mathrm{d}z=\frac{16}{3}\pi$$

例 11.60: 改变积分次序

$$\int_0^1\mathrm{d}y\int_{\frac{1}{2}y^2}^{\sqrt{3-y^2}}f(x,y)\mathrm{d}x$$

解: 可先根据题中的 Y 型积分画出其积分区域，再转化成关于 X 型积分.

积分区域 D : $\begin{cases} \frac{1}{2}y^2\le x\le\sqrt{3-y^2} \\ 0\le y\le 1 \end{cases}$，即积分区域 $D=D_1\cup D_2\cup D_3, D_1$: $\begin{cases} 0\le x\le\frac{1}{2} \\ 0\le y\le\sqrt{2x} \end{cases}$

与 D_2 : $\begin{cases} \frac{1}{2}\le x\le\sqrt{2} \\ 0\le y\le 1 \end{cases}$，$D_3$: $\begin{cases} \sqrt{2}\le x\le\sqrt{3} \\ 0\le y\le\sqrt{3-x^2} \end{cases}$ 因此

$$I=\int_0^{\frac{1}{2}}\mathrm{d}x\int_0^{\sqrt{2x}}f(x,y)\mathrm{d}y+\int_{\frac{1}{2}}^{\sqrt{2}}\mathrm{d}x\int_0^1 f(x,y)\mathrm{d}y+\int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{3}}\mathrm{d}x\int_0^{\sqrt{3-x^2}}f(x,y)\mathrm{d}y$$

例 11.61: 设 $f(x),g(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续且单调增加，求证：

$$(b-a)\int_a^b g(x)f(x)\mathrm{d}x\geqslant\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\int_a^b g(x)\mathrm{d}x$$

解: 考虑 $I=(b-a)\int_a^b g(x)f(x)\mathrm{d}x-\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\int_a^b g(x)\mathrm{d}x$，则有

$$I=\int_a^b\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x\mathrm{d}y-\int_a^b\int_a^b f(x)g(y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_a^b\int_a^b f(x)[g(x)-g(y)]\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

同理 $I=\int_a^b\int_a^b f(y)[g(y)-g(x)]\mathrm{d}x\mathrm{d}y$

因此 $2I=\int_a^b\int_a^b[f(x)-f(y)][g(x)-g(y)]\mathrm{d}x\mathrm{d}y\geqslant 0$，则 $I\geqslant 0$ 得证.

例 11.62: 曲线 $\begin{cases} x^2=2z \\ y=0 \end{cases}$ 绕 z 轴一周生成的曲面与 $z=1, z=2$ 所围成立体区域 Ω，求 $\iiint_\Omega(x^2+y^2+z^2)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$

解: 法 1：曲面方程为 $x^2+y^2=2z$，记 $D(z):x^2+y^2\leqslant(\sqrt{2z})^2$，则有

$$\iiint_{\Omega}(x^2+y^2+z^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\int_1^2\mathrm{d}z\iint_{D(z)}(x^2+y^2+z^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$
$$=\int_1^2\mathrm{d}z\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\sqrt{2z}}(\rho^2+z^2)\rho\mathrm{d}\rho=2\pi\int_1^2(z^2+z^3)\mathrm{d}z=\frac{73}{6}\pi$$

法 2：

$$\iiint_{\Omega}(x^2+y^2+z^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^2\rho\mathrm{d}\rho\int_{\frac{\rho^2}{2}}^2(\rho^2+z^2)\mathrm{d}z-\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\sqrt{2}}\rho\mathrm{d}\rho\int_{\frac{\rho^2}{2}}^1(\rho^2+z^2)\mathrm{d}z$$
$$=2\pi\int_0^2\left(2\rho^3-\frac{1}{2}\rho^5+\frac{8}{3}\rho-\frac{1}{24}\rho^7\right)\mathrm{d}\rho-2\pi\int_0^{\sqrt{2}}\left(\rho^3-\frac{1}{2}\rho^5+\frac{1}{3}\rho-\frac{1}{24}\rho^7\right)\mathrm{d}\rho$$
$$=\frac{40}{3}\pi-\frac{7}{6}\pi=\frac{73}{6}\pi$$

例 11.63: 设 $F(t)=\iiint_{x^2+y^2+z^2\leqslant t^2}f\left(x^2+y^2+z^2\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$，其中 $f(u)$ 为连续函数，$f'(u)$ 存在，且 $f(0)=0,f'(0)=1$，求 $\lim\limits_{t\to0}\dfrac{F(t)}{t^5}$

解: 先用球坐标系求三重积分，再洛必达即可. 由

$$F(t)=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\pi}\sin\varphi\mathrm{d}\varphi\int_0^t r^2f\left(r^2\right)\mathrm{d}r=4\pi\int_0^t r^2f\left(r^2\right)\mathrm{d}r$$

即 $F'(t)=4\pi t^2f\left(t^2\right),F(0)=0$，则有

$$\lim_{t\to0}\frac{F(t)}{t^5}=\lim_{t\to0}\frac{F'(t)}{5t^4}=\lim_{t\to0}\frac{4\pi t^2f\left(t^2\right)}{5t^4}$$
$$=\frac{4\pi}{5}\lim_{t\to0}\frac{f\left(t^2\right)}{t^2}=\frac{4\pi}{5}\lim_{t\to0}\frac{f\left(t^2\right)-f(0)}{t^2}$$
$$=\frac{4\pi}{5}\lim_{u\to0}\frac{f(u)-f(0)}{u}=\frac{4\pi}{5}f'(0)=\frac{4}{5}\pi$$

例 11.64: 求密度为 ρ 的均匀球体对于过球心的一条轴 l 的转动惯量。

解: 取球心为坐标原点,z 轴与轴 l 重合, 又设球的半径为 a , 则球体所占空间闭区域

$$\Omega=\left\{(x,y,z)|x^2+y^2+z^2\leqslant a^2\right\}$$

所求转动惯量即球体对于 z 轴的转动惯量为

$$I_z=\iiint_{\Omega}\left(x^2+y^2\right)\rho\mathrm{d}V=\rho\iiint_{\Omega}\left(r^2\sin^2\varphi\cos^2\theta+r^2\sin^2\varphi\sin^2\theta\right)r^2\sin\varphi\mathrm{d}r\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}\theta$$
$$=\rho\iiint_{\Omega}r^4\sin^3\varphi\mathrm{d}r\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}\theta=\rho\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\pi}\sin^3\varphi\mathrm{d}\varphi\int_0^a r^4\mathrm{d}r$$
$$=\rho\cdot2\pi\cdot\frac{a^5}{5}\int_0^{\pi}\sin^3\varphi\mathrm{d}\varphi=\frac{2}{5}\pi a^5\rho\cdot\frac{4}{3}=\frac{2}{5}a^2M$$

其中 $M=\dfrac{4}{3}\pi a^3\rho$ 为球体的质量.

例 11.65:【2005 数学二】设区域 $D=\{(x,y)|x^2+y^2\leqslant 4,x\geqslant 0,y\geqslant 0\}$, $f(x)$ 为 D 上的正值连续函数,a,b 为常数,计算

$$\iint_D \frac{a\sqrt{f(x)}+b\sqrt{f(y)}}{\sqrt{f(x)}+\sqrt{f(y)}}\mathrm{d}\sigma$$

解: 由于未知 $f(x)$ 的具体形式,可直接考虑轮换对称性,有

$$\begin{aligned}&\iint_D \frac{a\sqrt{f(x)}+b\sqrt{f(y)}}{\sqrt{f(x)}+\sqrt{f(y)}}\mathrm{d}\sigma=\iint_D \frac{a\sqrt{f(y)}+b\sqrt{f(x)}}{\sqrt{f(y)}+\sqrt{f(x)}}\mathrm{d}\sigma\\&=\frac{1}{2}\iint_D\left[\frac{a\sqrt{f(x)}+b\sqrt{f(y)}}{\sqrt{f(x)}+\sqrt{f(y)}}+\frac{a\sqrt{f(y)}+b\sqrt{f(x)}}{\sqrt{f(y)}+\sqrt{f(x)}}\right]\mathrm{d}\sigma\\&=\frac{a+b}{2}\iint_D\mathrm{d}\sigma=\frac{a+b}{2}\cdot\frac{1}{4}\pi\cdot 2^2=\frac{a+b}{2}\pi\end{aligned}$$

例 11.66:【2009 数学一】设 $\Omega=\{(x,y,z)|x^2+y^2+z^2\leqslant 1\}$,则

$$\iiint_\Omega z^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

解: 本题考查三重积分的计算, 可以用轮换对称性, 也可以直接计算

法 1: 由轮换对称性,有 $\iiint_\Omega x^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\iiint_\Omega y^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\iiint_\Omega z^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$,即

$$\iiint_\Omega z^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\frac{1}{3}\iiint_\Omega\left(x^2+y^2+z^2\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\frac{1}{3}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^\pi\mathrm{d}\varphi\int_0^1 r^2\cdot r^2\sin\varphi\mathrm{d}r=\frac{4}{15}\pi$$

法 2:

$$\begin{aligned}&\iiint_\Omega z^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^\pi\mathrm{d}\varphi\int_0^1 r^2\sin\varphi r^2\cos^2\varphi\mathrm{d}r\\&=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^\pi\cos^2\varphi\mathrm{d}(-\cos\varphi)\int_0^1 r^4\mathrm{d}r=2\pi\cdot\frac{1}{5}\left(\frac{-\cos^3\varphi}{3}\right)\Big|_0^\pi=\frac{4}{15}\pi\end{aligned}$$

例 11.67:【2013 数学三】计算二重积分

$$I=\iint_D \mathrm{e}^{-(x^2+y^2\pi)}\sin\left(x^2+y^2\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

其中积分区域 $D=\{(x,y)|x^2+y^2\leqslant\pi\}$

解: 很显然利用极坐标进行变换 $x=\rho\cos\theta,y=\rho\sin\theta$,有

$$I=\mathrm{e}^\pi\iint_D \mathrm{e}^{-(x^2+y^2)}\sin\left(x^2+y^2\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\mathrm{e}^\pi\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\sqrt{\pi}}\rho\mathrm{e}^{-\rho^2}\sin\rho^2\mathrm{d}\rho$$

$$= \frac{e^{\pi}}{2}\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\sqrt{\pi}} e^{-\rho^2}\sin\rho^2 d\rho^2$$

然后令 $t=\rho^2$，有 $I=\pi e^{\pi}\int_0^{\pi} e^{-t}\sin t dt$，考虑到

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi} e^{-t}\sin t dt &= -\int_0^{\pi}\sin t de^{-t} = -\left(e^{-t}\sin t|_0^{\pi} - \int_0^{\pi} e^{-t}\cos t dt\right) = -\int_0^{\pi}\cos t de^{-t}\\ &= -\left(e^{-t}\cos t|_0^{\pi} + \int_0^{\pi} e^{-t}\sin t dt\right) = e^{-\pi}+1-\int_0^{\pi} e^{-t}\sin t dt\end{aligned}$$

即 $\int_0^{\pi} e^{-t}\sin t dt = \frac{1}{2}\left(1+e^{-\pi}\right)$，所以 $I=\frac{\pi e^{\pi}}{2}\left(1+e^{-\pi}\right)=\frac{\pi}{2}\left(1+e^{\pi}\right)$.

例 11.68:【2011 数学二】设平面区域 D 由 $y=x$，圆 $x^2+y^2=2y$ 与 y 轴所组成，则二重积分 $\iint_D xyd\sigma$.

解: 利用选择 X 型积分

$$\begin{aligned}\iint_D xyd\sigma &= \int_0^1 xdx\int_x^{1+\sqrt{1-x^2}} ydy = \int_0^1 x\left(\frac{y^2}{2}\right)\Bigg|_x^{1+\sqrt{1-x^2}} dx\\ &= \int_0^1 x\left(1+\sqrt{1-x^2}-x^2\right)dx = \frac{7}{12}\end{aligned}$$

例 11.69:【2005 数学二】计算二重积分

$$\iint_D \left|x^2+y^2-1\right| d\sigma$$

其中 $D=\{(x,y)|0\leqslant x\leqslant 1, 0\leqslant y\leqslant 1\}$

解: 利用积分的可加性分区域积分，记 $D_1=\left\{(x,y)|x^2+y^2\leqslant 1,(x,y)\in D\right\}$ 与 $D_2=\left\{(x,y)\left|x^2+y^2>1,(x,y)\in D\right.\right\}$，则有

$$\begin{aligned}&\iint_D \left|x^2+y^2-1\right| d\sigma = -\iint_{D_1}\left(x^2+y^2-1\right)dxdy + \iint_{D_2}\left(x^2+y^2-1\right)dxd\\ &= -\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta\int_0^1\left(\rho^2-1\right)\rho d\rho + \iint_D\left(x^2+y^2-1\right)dxdy - \iint_{D_1}\left(x^2+y^2-1\right)dxdy\\ &= \frac{\pi}{8}+\int_0^1 dx\int_0^1\left(x^2+y^2-1\right)dy - \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta\int_0^1\left(\rho^2-1\right)\rho d\rho = \frac{\pi}{4}-\frac{1}{3}\end{aligned}$$

例 11.70: 设 $f\in\mathbb{C}^2[a,b]$, $f(a)=f(b)=0$, $f'(a)=1$, $f'(b)=0$, 证明

$$\int_a^b (f''(x))^2 dx \geq \frac{4}{b-a}$$

证明: 对 $\forall c \in [a,b]$ 有

$$\int_a^b (x-c)f''(x)\mathrm{d}x = (c-a) - \int_a^b f'(x)\mathrm{d}x = c-a$$

由 Cauchy-Schwarz 不等式得

$$(c-a)^2 = \left(\int_a^b (x-c)f''(x)\mathrm{d}x\right)^2 \leqslant \int_a^b (x-c)^2\mathrm{d}x \int_a^b \left(f''(x)\right)^2 \mathrm{d}x$$

即

$$\int_a^b \left(f''(x)\right)^2 \mathrm{d}x \geqslant \frac{(c-a)^2}{\int_a^b (x-c)^2\mathrm{d}x} = \frac{3}{(b-a)\left[\left(\frac{b-c}{c-a}\right)^2 - \frac{b-c}{c-a} + 1\right]}$$

考虑 $\dfrac{b-c}{c-a} = \dfrac{1}{2}$, 则 $c = \dfrac{a+2b}{3}$, 可得

$$\int_a^b \left(f''(x)\right)^2 \mathrm{d}x \geqslant \frac{4}{b-a}$$

例 11.71: 设 $f(x):[0,1]\to\mathbb{R}$ 上的连续可微函数, 且 $\displaystyle\int_0^{1/2} f(x)\mathrm{d}x = 0$, 求证

$$\int_0^1 (f'(x))^2\mathrm{d}x \geq 12\left(\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x\right)^2$$

证明: 由 Cauchy-Schwarz 不等式可得

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \left(f'(x)\right)^2 \mathrm{d}x \int_0^{\frac{1}{2}} x^2\mathrm{d}x \geqslant \left(\int_0^{\frac{1}{2}} x f'(x)\mathrm{d}x\right)^2 = \left(\frac{1}{2}f\left(\frac{1}{2}\right)\right)^2 \Rightarrow \int_0^{\frac{1}{2}} \left(f'(x)\right)^2 \mathrm{d}x \geqslant 24\left(\frac{1}{2}f\left(\frac{1}{2}\right)\right)^2$$

同理可得

$$\int_{\frac{1}{2}}^1 (1-x)^2\mathrm{d}x \int_{\frac{1}{2}}^1 \left(f'(x)\right)^2 \mathrm{d}x \geqslant \left(\int_{\frac{1}{2}}^1 (1-x)f'(x)\mathrm{d}x\right)^2 = \left(\int_{\frac{1}{2}}^1 f(x)\mathrm{d}x - \frac{1}{2}f\left(\frac{1}{2}\right)\right)^2$$

即

$$\int_{\frac{1}{2}}^1 \left(f'(x)\right)^2 \mathrm{d}x \geqslant 24\left(\int_{\frac{1}{2}}^1 f(x)\mathrm{d}x - \frac{1}{2}f\left(\frac{1}{2}\right)\right)^2$$

根据 $2\left(a^2+b^2\right) \geqslant (a+b)^2$ 得

$$\begin{aligned}\int_0^1 \left(f'(x)\right)^2 \mathrm{d}x &\geqslant 24\left(\frac{1}{2}f\left(\frac{1}{2}\right)\right)^2 + 24\left(\int_{\frac{1}{2}}^1 f(x)\mathrm{d}x - \frac{1}{2}f\left(\frac{1}{2}\right)\right)^2 \\ &\geqslant 12\left(\frac{1}{2}f\left(\frac{1}{2}\right) + \int_{\frac{1}{2}}^1 f(x)\mathrm{d}x - \frac{1}{2}f\left(\frac{1}{2}\right)\right)^2 = 12\left(\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x\right)^2\end{aligned}$$

例 11.72: 设 $f(x):[0,1]\to\mathbb{R}$ 上的连续函数, 且 $\int_0^1 f^3(x)\mathrm{d}x=0$, 求证

$$\int_0^1 f^4(x)\mathrm{d}x \geq \frac{27}{4}\left(\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x\right)^4$$

证明: 令 $I_n=\int_0^1 f^n(x)\mathrm{d}x$, 显然 $I_2\geqslant I_1^2$. 对 $\forall m\in\mathbb{R}$ 由 Cauchy-Schwarz 不等式可得

$$\left(\int_0^1 (m+f^2(x))\cdot f(x)\mathrm{d}x\right)^2 \leqslant \int_0^1 (m+f^2(x))^2\,\mathrm{d}x\cdot\int_0^1 f^2(x)\mathrm{d}x$$

化简可得

$$\left(I_2-I_1^2\right)m^2+2I_2^2m+I_2I_4\geqslant 0$$

由判别式 $\triangle\leqslant 0$ 得

$$I_4\geqslant\frac{I_2^3}{I_2-I_1^2}$$

故本题只需证明

$$\frac{I_2^3}{I_2-I_1^2}\geqslant\frac{27}{4}I_1^4$$

由均值不等式得

$$\left(I_2-I_1^2\right)I_1^4=\frac{1}{2}\left(2I_2-2I_1^2\right)\cdot I_1^2\cdot I_1^2\leqslant\frac{4}{27}I_2^3$$

即

$$\int_0^1 f^4(x)\mathrm{d}x\geqslant\frac{27}{4}\left(\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x\right)^4$$

例 11.73: 设 $f(x):[0,1]\to\mathbb{R}$ 是可微函数, 且 $f(0)=f(1)=-\frac{1}{6}$, 求证

$$\int_0^1 (f'(x))^2\mathrm{d}x\geq 2\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x+\frac{1}{4}$$

证明: 对 $\forall t\in\mathbb{R}$, 由 Cauchy-Schwarz 不等式得

$$\left(\int_0^1 (x+t)f'(x)\mathrm{d}x\right)^2\leqslant\int_0^1 (x+t)^2\mathrm{d}x\int_0^1\left(f'(x)\right)^2\mathrm{d}x$$

即

$$\frac{3}{3t^2+3t+1}\left(\frac{1}{6}+\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x\right)^2\leqslant\int_0^1\left(f'(x)\right)^2\mathrm{d}x$$

考虑 $m=\dfrac{3}{3t^2+3t+1}$, 则原不等式成立只需证明下式不等式恒成立

$$m\left(\frac{1}{6}+\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x\right)^2\geqslant 2\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x+\frac{1}{4}$$

因此

$$\left(\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x+\frac{1}{6}-\frac{1}{m}\right)^2+\left(\frac{1}{36}-\frac{1}{4m}\right)-\left(\frac{1}{6}-\frac{1}{m}\right)^2\geqslant 0$$

令 $\frac{1}{36}-\frac{1}{4m}=\left(\frac{1}{6}-\frac{1}{m}\right)^2$，解得 $m=12$，即 $t=-\frac{1}{2}$. 因此

$$\int_0^1 \left(f'(x)\right)^2 \mathrm{d}x \geqslant 2\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x+\frac{1}{4}$$

例 11.74: 计算不定积分：

1. $\int \sqrt{\frac{1-2x}{1+2x}}\mathrm{d}x \quad \left(\frac{1}{2}\sqrt{1-4x^2}-\arctan\sqrt{\frac{1-2x}{1+2x}}+C\right)$
2. $\int \frac{\mathrm{d}x}{(2x^2+1)\sqrt{x^2+1}}. \quad \left(\arctan\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right)+C\right)$
3. $\int \frac{x+\sin x}{1+\cos x}\mathrm{d}x. \quad \left(x\tan\frac{x}{2}+C\right)$
4. $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sin 2x+2\sin x}. \quad \left(\frac{1}{8}\tan^2\frac{x}{2}+\frac{1}{4}\ln\left|\tan\frac{x}{2}\right|+C\right)$
5. $\int \frac{1-\sin x-\cos x}{1+\sin^2 x}\mathrm{d}x. \quad \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\arctan(\sqrt{2}\tan x)+\frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\left|\frac{\sqrt{2}+\cos x}{\sqrt{2}-\cos x}\right|-\arctan(\sin x)+C\right)$
6. $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sin x\cos^4 x}. \quad \left(\frac{1}{3\cos^3 x}+\frac{1}{\cos x}-\ln|\csc x+\cot x|+C\right)$
7. $\int \frac{\ln x}{(1-x)^2}\mathrm{d}x. \quad \left(\frac{\ln x}{1-x}+\ln\left|\frac{x-1}{x}\right|+C\right)$

例 11.75: 计算定积分：

1. $\lim\limits_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n^3}\sqrt{n^2-k^2}. \quad \left(\frac{1}{3}\right)$
2. $\int_0^{\pi}\frac{\mathrm{d}x}{a^2\sin^2 x+b^2\cos^2 x}(a,b>0). \quad \left(\frac{1}{ab}\arctan\left(\frac{a}{b}\tan x\right)\right)$
3. $\int_0^{+\infty} x^{2013}e^{-\frac{1}{2}x^2}\mathrm{d}x. \quad (2012!!)$
4. $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{(1+x)\cos x}{1+\sin^2 x}\mathrm{d}x. \quad \left(\frac{\pi}{2}\right)$
5. $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^1\frac{x^n}{1+x}\mathrm{d}x. \quad (0)$
6. $\int_0^{2\pi}\left(\sin^3 x e^{\cos x}+5\sin^4\frac{x}{2}\right)\mathrm{d}x. \quad \left(\frac{15}{4}\pi\right)$

例 11.76: 证明：$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x\mathrm{d}x=\frac{n-1}{n}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\sin^{n-2}x\mathrm{d}x$

证明： 法 1：贝塔函数与伽玛函数的定义

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x\mathrm{d}x=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x\mathrm{d}x=\mathrm{B}\left(\frac{1+n}{2},\frac{1}{2}\right)=\frac{\Gamma\left(\frac{1+n}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(1+\frac{n}{2}\right)}=\frac{\frac{n-1}{2}}{\frac{n}{2}}\frac{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}=\frac{n-1}{n}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\sin^{n-2}x\mathrm{d}x$$

法 2：分部积分

$$\begin{aligned}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x\mathrm{d}x&=-\sin^{n-1}x\cos x\Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}+\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos x\times(n-1)\sin x^{n-2}x\cos x\mathrm{d}x\\&=(n-1)\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\sin^{n-2}x\cos^2 x\mathrm{d}x=(n-1)\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(\sin^{n-2}x-\sin^n x)\mathrm{d}x\end{aligned}$$

$$= (n-1)\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-2} x\mathrm{d}x - (n-1)\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x\mathrm{d}x$$

$$\Rightarrow n\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x\mathrm{d}x = (n-1)\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-2} x\mathrm{d}x \Rightarrow \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x\mathrm{d}x = \frac{n-1}{n}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-2}\mathrm{d}x$$

例 11.77: 计算下列极限 (1) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\int_1^x \cos\frac{1}{t}\mathrm{d}t}{x}$， (2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^x \cos\frac{1}{t}\mathrm{d}t}{x}$

解:

(1) 对 $\forall t \geqslant 1$，有 $\frac{1}{t} \in (0,1]$，即 $\cos\frac{1}{t} \geqslant \cos 1$，则有 $\int_1^x \cos\frac{1}{t}\mathrm{d}t \geqslant \int_1^x \cos 1\mathrm{d}t = (x-1)\cos 1$,因此 $\lim\limits_{x\to\infty}\int_1^x \cos\frac{1}{t}\mathrm{d}t = \infty$,则有 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\int_1^x \cos\frac{1}{t}\mathrm{d}t}{x} \xlongequal{L'Hospital} \lim\limits_{x\to\infty}\cos\frac{1}{x} = \cos 0 = 1$

(2) 分部后洛必达

$$\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^x \cos\frac{1}{t}\mathrm{d}t}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{\int_0^x -t^2\mathrm{d}\left(\sin\frac{1}{t}\right)}{x} \xlongequal{L'Hospital} 2\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^x t\sin t\mathrm{d}t}{x} = 2\lim_{x\to 0} x\sin x = 0$$

例 11.78: 计算下列极限

$$\lim_{x\to 0^+}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^x}$$

解: 法 1:黎曼和即可

$$\lim_{x\to 0^+}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^x} = \lim_{x\to 0^+} -\left(1-2^{1-x}\right)\zeta(x) = \zeta(0) = -\frac{1}{2}$$

法 2:根据 $\dfrac{1}{n^x} = \dfrac{1}{\Gamma(x)}\int_0^{\infty} t^{x-1}e^{-nt}\mathrm{d}t$,则有

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^x} = \frac{1}{\Gamma(x)}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\int_0^{\infty} t^{x-1}e^{-nt}\mathrm{d}t = \frac{1}{\Gamma(x)}\int_0^{\infty}\left(\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n e^{-nt}\right)t^{x-1}\mathrm{d}t$$
$$= -\frac{1}{\Gamma(1+x)}\int_0^{\infty}\frac{1}{e^t+1}\mathrm{d}t^x = -\frac{1}{\Gamma(1+x)}\int_0^{\infty}\frac{1}{e^{t^{\frac{1}{x}}}+1}\mathrm{d}t$$

由于 $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{1}{e^{t^{\frac{1}{x}}}+1} = \theta(x) = \begin{cases}\frac{1}{2}, & t\in[0,1) \\ \frac{1}{e+1}, & t=1 \\ 0, & t\in(1,\infty)\end{cases}$,即有

$$\lim_{x\to 0^+}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^x} = -\frac{1}{\Gamma(1)}\int_0^{\infty}\theta(t)\mathrm{d}t = -\int_0^1\frac{1}{2}\mathrm{d}t = -\frac{1}{2}$$

例 11.79: 计算积分

$$\int_0^{\pi} \ln(2+\cos x)\,\mathrm{d}x$$

解: 易知 $\int_0^{\pi} \ln(2+\cos x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} \ln(2+\cos x)\,\mathrm{d}\theta = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \ln(2+\cos x)\,\mathrm{d}x$.

由 Gauss's Mean-value theorem 可得

$$4\pi\ln\left(\sqrt{3}+2\right) = \int_0^{2\pi}\left(\ln\left(\sqrt{3}+2+e^{ix}\right)+\ln\left(\sqrt{3}+2+e^{-ix}\right)\right)\mathrm{d}x$$

$$= \int_0^{2\pi}\ln\left[\left(\sqrt{3}+2\right)^2+2\left(\sqrt{3}+2\right)\cos x+1\right]\mathrm{d}x = \int_0^{2\pi}\ln\left[4\left(2+\sqrt{3}\right)+2\left(2+\sqrt{3}\right)\cos x\right]\mathrm{d}x$$

$$= \int_0^{2\pi}\ln\left(2\left(2+\sqrt{3}\right)\right)\mathrm{d}x + \int_0^{2\pi}\ln(2+\cos x)\,\mathrm{d}x = 2\pi\ln\left(2\left(2+\sqrt{3}\right)\right) + \int_0^{2\pi}\ln(2+\cos x)\,\mathrm{d}x$$

即 $\int_0^{2\pi}\ln(2+\cos x)\,\mathrm{d}x = 2\pi\ln\left(\frac{\left(2+\sqrt{3}\right)^2}{2\left(2+\sqrt{3}\right)}\right) \Rightarrow \int_0^{\pi}\ln(2+\cos x)\,\mathrm{d}x = \pi\ln\left(\frac{2+\sqrt{3}}{2}\right)$.

例 11.80: 计算积分 $\int_0^1 \frac{x}{1+e^x}\mathrm{d}x$

解: 由 $\frac{1}{1+e^x} = \frac{1}{e^x\left(1+e^{-x}\right)} = e^{-x}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k e^{-kx} = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k e^{-(k+1)x}$, 即

$$\int_0^1 \frac{x}{1+e^x}\mathrm{d}x = \int_0^1\left(\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k e^{-(k+1)x}x\right)\mathrm{d}x = \sum_{k=0}^{\infty}\left((-1)^k\int_0^1 e^{-(k+1)x}x\,\mathrm{d}x\right)$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty}\left((-1)^k\int_0^{k+1} e^{-t}\left(\frac{x}{k+1}\right)\frac{1}{k+1}\mathrm{d}t\right) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(k+1)^2}\gamma(2,k+1)$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(k+1)^2}\left(\gamma(1,k+1)-(k+1)e^{-(k+1)}\right)$$

注意: (1) $\int \frac{x^n}{1+e^x}\mathrm{d}x = \sum_{k=0}^{n-1} x^{n-i-1}(-1)^n\frac{n!}{(n-i)!}\mathrm{Li}_{i+2}\left(-e^x\right)+(-1)^{n+1}x^{n+1}+(-1)^n\ln\left(e^x+1\right)$

(2) $\int_{-1}^{1}\frac{x}{1+e^x}\mathrm{d}x = \mathrm{Li}_2\left(-\frac{1}{e}\right)-\mathrm{Li}_2(-e)+1-2\ln(1+e)$

例 11.81: 计算级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(2n-1)x}{2n-1}$$

解: 构造关于 t 变量的幂级数 $f(t) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(2n-1)x\times t^{2n-1}}{2n-1}$, 可得到 $f(1) =$

$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(2n-1)x}{2n-1}$，且 $f(t)$ 在 $[0,1]$ 上处处收敛，即有

$$f'(t)=\sum_{n=1}^{\infty}\sin(2n-1)x\times t^{2n-2}\Rightarrow f'(t)=\frac{\sin x\left(1+t^2\right)}{t^4-2t^2\cos 2x+1}\text{，且 } f(0)=0$$

根据阿贝尔定理有

$$f(1)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(2n-1)x}{2n-1}=\int_0^1 f'(t)\,\mathrm{d}t=\int_0^1\frac{\sin x\left(1+t^2\right)}{t^4-2t^2\cos 2x+1}\mathrm{d}t=\frac{\pi}{4}$$

例 11.82: 计算极限

$$\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\frac{e^{\frac{x}{2}}(\cos x-\sin x)}{\sqrt{\cos x}}\mathrm{d}x$$

解: 易知

$$\begin{aligned}\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\frac{e^{\frac{x}{2}}(\cos x-\sin x)}{\sqrt{\cos x}}\mathrm{d}x&=\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}2\left[\frac{1}{2}e^{\frac{x}{2}}\sqrt{\cos x}-\frac{1}{2}e^{\frac{x}{2}}\frac{\sin x}{\sqrt{\cos x}}\right]\mathrm{d}x\\&=2\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\mathrm{d}\left(e^{\frac{x}{2}}\sqrt{\cos x}\right)=2e^{\frac{x}{2}}\sqrt{\cos x}\,|_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}=2\times\sqrt{\frac{\sqrt{2}}{2}}\left(e^{x}-e^{-x}\right)\\&=4\times\frac{2^{\frac{1}{4}}}{\sqrt{2}}\sin\mathrm{h}\frac{\pi}{8}=2^{\frac{5}{4}}\sin\mathrm{h}\frac{\pi}{8}\end{aligned}$$

补充:双曲正弦函数 $f(x)=\sin\mathrm{h}x=\frac{e^x-e^{-x}}{2}$，$f'(x)=\cos\mathrm{h}x$，$f''(x)=\sin\mathrm{h}x$，$\sin\mathrm{h}x=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$

例 11.83: 计算积分

$$\int_0^z\frac{\ln^m(1-x)}{1+x}\mathrm{d}x$$

解:

$$\begin{aligned}&\int_0^z\frac{\ln^m(1-x)}{1+x}\mathrm{d}x\overset{y=1-x}{=\!=\!=}\frac{1}{2}\int_1^{1-z}\frac{\ln^m y}{1-\frac{y}{2}}\mathrm{d}y\\&=\ln^m(1-z)\ln\left(\frac{1+z}{2}\right)-m\int_0^1\frac{\ln^{m-1}y\ln\left(1-\frac{y}{2}\right)}{y}\mathrm{d}y+(-1)^{m+1}m!Li_{m+1}\left(\frac{1}{2}\right)\\&=\ln^m(1-z)\ln\left(\frac{1+z}{2}\right)+(-1)^{m+1}m!Li_{m+1}\left(\frac{1}{2}\right)-m!\sum_{j=0}^{m-1}(-1)^{j-1}\frac{\ln^{m-j-1}(1-z)}{(m-j-1)!}Li_{j+2}\left(\frac{1-z}{2}\right)\\&=\ln^m(1-z)\ln\left(\frac{1+z}{2}\right)+(-1)^{m+1}m!Li_{m+1}\left(\frac{1}{2}\right)+m!\sum_{j-1}^{m}(-1)^{j-1}\frac{\ln^{m-j}(1-z)}{(m-j)!}Li_{j+1}\left(\frac{1-z}{2}\right)\end{aligned}$$

注意:1. $\int_0^z\frac{\ln^m x}{1+x}\mathrm{d}x=m!\sum\limits_{j=0}^{m}(-1)^{j+1}\frac{\ln^{m-j}z}{(m-j)!}Li_{j+1}(-z)$

2. $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln^n x}{1-x}\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{\ln^n(1-x)}{x}dx = (-1)^n n!\zeta(n+1)$

3. $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln^n(1-x)}{1+x}\mathrm{d}x = (-1)^n n! Li_{n+1}\left(\frac{1}{2}\right)$

4. $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln^n x}{1+x}\mathrm{d}x = \left(1-2^{-n}\right)(-1)^n n!\zeta(n+1)$

例 11.84: 求解其通解

$$y'' + y = \frac{1}{\cos x}$$

解: 一般做法:

$$y'' + y = \frac{1}{\cos x} \Rightarrow y''\cos x + y\cos x = 1 \Rightarrow \left(y'\cos x + y\sin x\right)' = 1$$

$$\Rightarrow y'\cos x + y\sin x = x + C \Rightarrow \cos x dy + y\sin x dx = (x+C)\,\mathrm{d}x$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\cos x}\mathrm{d}y + \frac{y\sin x}{\cos^2 x}dx = \frac{x+C}{\cos^2 x}dx \Rightarrow d\left(\frac{y}{\cos x}\right) = \frac{x+C}{\cos^2 x}\mathrm{d}x$$

因此 $\displaystyle\frac{y}{\cos x} = \int \frac{x+C}{\cos^2 x}\mathrm{d}x = x\tan x + \ln|\cos x| + C\tan x + C_1$,即通解为

$$y = x\sin x + C\sin x + C_1\cos x + \cos x\ln|\cos x|$$

八一做法:令 $y = u\cos x$,原式得 $u'' - 2u'\tan x = \dfrac{1}{\cos^2 x}$,再令 $\begin{cases} u'' = v' \\ u' = v \end{cases}$,得 $v' - 2v\tan x = \dfrac{1}{\cos^2 x}$

$$\Rightarrow v = e^{\int 2\tan x\mathrm{d}x}\left(\int \frac{1}{\cos^2 x}e^{\int -2\tan x\mathrm{d}x}\mathrm{d}x + C\right) = \frac{1}{\cos^2 x}(x + C_1)$$

$$\Rightarrow u = (x + C_1)\tan x + \ln\cos x + C_2$$

因此

$$y = \cos x\left[(x+C_1)\tan x + \ln\cos x + C_2\right] = x\sin x + C_1\sin x + C_2\cos x + \cos x\ln|\cos x|$$

例 11.85: 计算一道加边后极限

$$\lim_{t\to 0}\frac{1}{t}\left[\left(\frac{\sum_{k=1}^n a_k^t}{n}\right)^{\frac{1}{t}} - \left(\prod_{k=1}^n a_k\right)^{\frac{1}{n}}\right]$$

解： 首先很容易易知

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\sum_{k=1}^m a_k^{\frac{1}{n}}}{m}\right)^n=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{\sum_{k=1}^m a_k^{\frac{1}{n}}-m}{m}\right)^{n\cdot\left(\frac{m}{\sum_{k=1}^m a_k^{\frac{1}{n}}-m}\right)\cdot\left(\frac{\sum_{k=1}^m a_k^{\frac{1}{n}}-m}{m}\right)}$$

$$=\exp\lim_{n\to\infty}n\cdot\frac{\sum_{k=1}^m a_k^{\frac{1}{n}}-m}{m}=\exp\frac{1}{m}\lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=1}^m a_k^{\frac{1}{n}}-1\right)=\exp\frac{1}{m}\sum_{k=1}^m \ln a=\left(\prod_{k=1}^m a_k\right)^{\frac{1}{m}}$$

因此有

$$\begin{aligned}
\lim_{t\to 0}\frac{1}{t}\left[\left(\frac{\sum_{k=1}^n a_k^t}{n}\right)^{\frac{1}{t}}-\left(\prod_{k=1}^n a_k\right)^{\frac{1}{n}}\right]&=\lim_{t\to 0}\left(\prod_{k=1}^n a_k\right)^{\frac{1}{n}}\cdot\frac{1}{t}\left[\ln\left(\frac{\sum_{k=1}^n a_k^t}{n}\right)^{\frac{1}{t}}-\ln\left(\prod_{k=1}^n a_k\right)^{\frac{1}{n}}\right]\\
&=\lim_{t\to 0}\left(\prod_{k=1}^n a_k\right)^{\frac{1}{n}}\cdot\frac{1}{t^2}\left[\ln\left(\sum_{k=1}^n a_k^t\right)-\ln n-\frac{t}{n}\ln\left(\prod_{k=1}^n a_k\right)\right]\\
&=\lim_{t\to 0}\frac{\left(\prod_{k=1}^n a_k\right)^{\frac{1}{n}}}{n}\cdot\left[\frac{n\ln\left(\sum_{k=1}^n a_k^t\right)-n\ln n-t\ln\left(\prod_{k=1}^n a_k\right)}{t^2}\right]\\
&=\lim_{t\to 0}\frac{1}{2t}\left[\frac{n\left(\sum_{k=1}^n a_k^t\ln a_k\right)}{\sum_{k=1}^n a_k^t}-\ln\left(\prod_{k=1}^n a_k\right)\right]\cdot\frac{\left(\prod_{k=1}^n a_k\right)^{\frac{1}{n}}}{n}\\
&=\frac{\left(\prod_{k=1}^n a_k\right)^{\frac{1}{n}}}{2n^2}\cdot\left[n\left(\sum_{k=1}^n \ln^2 a_k\right)-\ln^2\left(\prod_{k=1}^k a_k\right)\right]
\end{aligned}$$