试卷类型: 数学竞赛

第一届八一杯大学生网络数学竞赛试题

数学组 B 类,满分:100 分,考试时间:150 分钟

比赛时间: 2019 年 8 月 1 日上午 9 点至 2019 年 8 月 1 号晚上 8 点



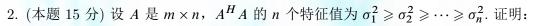
竞赛官方微信公众号: 八一考研数学竞赛

题 号	_	<u> </u>	111	四	五.	六	总 分
满分	15	15	20	15	15	20	100
得分							

注意事项: 1. 试题解答请在规定时间内发送到邮箱hoganbin1995@outlook.com, 逾期将取消参赛资格,严格遵守比赛纪律,勿翻阅其他参考资料或在各数学群内讨论此份试题;

- 2. 要求解答字迹清楚, 推荐采用 PDF 格式提交;
- 3. 文件命名:参赛科目+昵称(或姓名)+学校.
- 1. (本题 15 分)P 为直线 $l: x-2=\frac{y-3}{2}=\frac{z-1}{3}$ 上一点,从 P 点引椭球面 $C: 2x^2+3y^2+4z^2=1$ 的切线,切点构成的曲线 Γ 与 l 平行,求 P 点的坐标.

毛毛 供题



$$\sigma_k^2 = \max_{C_k} \min_{x \in C_k, x \neq 0} \frac{x^H A^H A x}{x^H x}$$

其中 C_k 为 n 维线性空间 C^n 的任意 k 维子空间, A^H 为 A 的共轭转置矩阵.

武汉大学. 王鹏辉 供题



3. (本题 20 分) 设矩阵
$$A = \begin{pmatrix} Q_1 & Q_2 \\ Q_3 & Q_4 \end{pmatrix} \in M_{2n \times 2n} (\mathbb{R})$$
 满足

$$A^{T} A = I_{2n}, A^{T} \begin{pmatrix} 0 & I_{n} \\ -I_{n} & 0 \end{pmatrix} A = \begin{pmatrix} 0 & I_{n} \\ -I_{n} & 0 \end{pmatrix}$$

其中 $Q_1,Q_2,Q_3,Q_4\in M_{n\times n}(\mathbb{R})$. 证明: $B=Q_1+iQ_2$ 是酉矩阵 (即 $\overline{B}^TB=I_n$)

武汉大学. 尚镇冰 供题

4. (本题 15 分) 设
$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} ne^{-n} \cos nx$$
, 求证

- $(1) \max_{0 \le x \le 2\pi} |f(x)| \ge \frac{2}{e};$
- (2) f'(x) 存在;
- $(3) \max_{0 \le x \le 2\pi} \left| f'(x) \right| \ge \frac{2}{\pi e}$

高等数学贴吧小吧主.9899 供题

5. (本题 15 分) 已知正项级数 $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{a_k}$ 收敛, 常数 p>0, 证明: 级数 $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^{p+1}}{a_1+2^pa_2+\cdots+k^pa_k}$ 也收敛.

中国科学技术大学. 向 為 供题

- 6. (本题 20 分)
 - (1) 若 $r \in (-1,1)$, 对 $\forall \theta \in \mathbb{R}$, 试证:

$$\frac{1 - r^2}{1 - 2r\cos\theta + r^2} = 1 + 2\sum_{k=1}^{+\infty} r^k \cos k\theta$$

(2) 设 $x \in \mathbb{R}$ 使得 $f(x^+) = f(x^-)$ 存在, 试证:

$$\lim_{r \to 1^{-}} \frac{1}{2\pi} \int_{0}^{2\pi} \frac{1 - r^{2}}{1 - 2r \cos(x - t) + r^{2}} f(t) dt = \frac{1}{2} \left[f\left(x^{+}\right) + f\left(x^{-}\right) \right]$$

若 f 在 \mathbb{R} 上连续,试证此收敛关于 $x \in \mathbb{R}$ 是一致的.

微信公众号管理员. ハー 供题

