线面积分在数学专业考研中的应用与计算方法

八一

2019 年 10 月 23 日

目录

摘要

本文主要对曲线积分与曲面积分进行方法上的讲解，通过回顾其定义与性质，利用化为参数的定积分法，格林公式，斯托克斯公式，积分与路径无关的等方法解决第二型曲线积分的题目；利用化二重积分、两类曲面积分之间的联系与轮换对称性，求曲面的形心、斯托克斯公式与积分对称性处理第一类曲面积分，而第二类曲面积分常用高斯公式、分面与合一投影法以及其向量形式和参数方程解决，最后对线面积分在往年数学专业考研真题的应用做出相关解答。

1 引言

线面积分是数学分析中的重要知识章节，尤其是第二类线面积分，如何计算成为了本文学习的重难点。掌握其基本的计算方法具有很大的难度，给不少学习者带来了困难，为了使考研同学更好地理解深刻线面积分，本文通过针结合对历年来数学专业考研真题中常见的第二类曲线积分计算题目进行了认真分析。

其实线面积分的联系相当紧密，本质上线面积分无非就是计算定积分，只是曲面积分要经过重积分这一过程，而线面积分本身通过 Stokes 公式计算，而曲线积分则利用 Green 公式与曲面积分利用 Guass 公式都是转化为求重积分.

最后我也给同学们普及下正交变换在线面曲面积分的应用，其实它在重积分与多元函数也有着广泛的意义！

- 线面积分
  - 曲线积分
    - 第一类：对弧长
      - 定义：$\int_L f(x,y)\mathrm{d}s = \lim\limits_{\lambda\to 0}\sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i)\Delta s_i$
      - 计算：$\int_L f(x,y)\mathrm{d}s = \int_\alpha^\beta f(\varphi,\psi)\sqrt{\varphi'^2+\psi'^2}\mathrm{d}t$
    - 第二类：对坐标
      - 定义：$\int_L P(x,y)\mathrm{d}x + Q(x,y)\mathrm{d}y = \lim\limits_{\lambda\to 0}\sum\limits_{i=1}^{n}[P(\xi_i,\eta_i)\Delta x_i + Q(\xi_i,\eta_i)\Delta y_i]$
      - 计算：$\int_L f(x,y)\mathrm{d}s = \int_\alpha^\beta [P(\varphi,\psi)\varphi' + Q(\varphi,\psi)\psi']\mathrm{d}t$
  - 曲面积分
    - 第一类：对面积
      - 定义：$\iint_\Sigma f(x,y,z)\mathrm{d}S = \lim\limits_{\lambda\to 0}\sum\limits_{k=1}^{n} f(\xi_k,\eta_k,\zeta_k)\Delta S_k$
      - 计算：$\iint_\Sigma f(x,y,z)\mathrm{d}S = \iint_{D_{xy}} f(x,y,z(x,y))\sqrt{1+z_x^2(x,y)+z_y^2(x,y)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$
    - 第二类：对坐标
      - 定义：$\iint_\Sigma R(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \lim\limits_{\lambda\to 0}\sum\limits_{k=1}^{n} R(\xi_k,\eta_k,\zeta_k)(\Delta S_k)_{xy}$
      - 计算：$\iint_\Sigma R(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint_{D_{xy}} R(x,y,z(x,y))\mathrm{d}x\mathrm{d}y$
  - 联系
    - 曲线积分: $\int_L P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y = \int_L (P\cos\alpha + Q\cos\beta)\mathrm{d}s$
    - 曲面积分：$\iint_\Sigma (P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma)\mathrm{d}S = \iint_\Sigma P\mathrm{d}y\mathrm{d}z + Q\mathrm{d}y\mathrm{d}x + R\mathrm{d}x\mathrm{d}y$

2 曲线积分

2.1 第一类曲线积分

2.1.1 定义与性质

定义 2.1 (第一类曲线积分) 设 Γ 是空间中一条有限长的光滑曲线，$f(x,y,z)$ 是定义在 Γ 上的一个有界函数，若通过对 Γ 的任意分割和对局部的任意取点，下列“乘积和式极限”

$$\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\Delta s_i = \int_L f(x,y,z)\mathrm{d}s$$

都存在，则称此极限为函数 $f(x,y,z)$ 在曲线 Γ 上对弧长的曲线积分，或第一类曲线积分。其中 $f(x,y,z)$ 为被积函数，Γ 为积分弧段.

注意 如果 L 是 xoy 面上的曲线弧，则定义对弧长的曲线积分为 $\lim\limits_{\lambda\to 0}\sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i)\Delta s_i = \int_L f(x,y)\mathrm{d}s$；如果 L 是闭曲线，则记为 $\oint_L f(x,y)\mathrm{d}s$.

若在 L 上 $f(x,y)\equiv 1$，则 $\oint_L \mathrm{d}s$ 表示什么？ □

性质 1

1. $\int_\Gamma [f(x,y,z)\pm g(x,y,z)]\mathrm{d}s = \int_\Gamma f(x,y,z)\mathrm{d}s \pm \int_\Gamma g(x,y,z)\mathrm{d}s$
2. $\int_\Gamma kf(x,y,z)\mathrm{d}s = k\int_\Gamma f(x,y,z)\mathrm{d}s$
3. $\int_\Gamma f(x,y,z)\mathrm{d}s = \int_{\Gamma_1} f(x,y,z)\mathrm{d}s + \int_{\Gamma_2} f(x,y,z)\mathrm{d}s$
4. 若在 L 上 $f(x,y)\le\varphi(x,y)$，则
$$\int_L f(x,y)\mathrm{d}s \le \int_L \varphi(x,y)\mathrm{d}s$$
5. 设函数 $f(x,y)$ 在 L 上连续，s 为 L 的弧长，则至少存在一点 $(\xi,\eta)\in L$，使得
$$\int_L f(x,y)\mathrm{d}s = f(\xi,\eta)s$$

例 1 计算

$$I = \int_\Gamma (x^2+y^2+z^2)\mathrm{d}s$$

其中 Γ 为:$\begin{cases} x^2+y^2+z^2=\dfrac{9}{2} \\ x+z=1 \end{cases}$ 的交线

解 取 Γ : $\begin{cases} \dfrac{1}{2}\left(x-\dfrac{1}{2}\right)^2+\dfrac{1}{4}y^2=1 \\ x+z=1 \end{cases}$ 化参数方程

$$\Gamma:\begin{cases} x=\sqrt{2}\cos\theta+\dfrac{1}{2} \\ y=2\sin\theta \\ z=\dfrac{1}{2}-\sqrt{2}\sin\theta \end{cases} \quad (0\le\theta\le 2\pi)$$

$$\mathrm{d}s=\sqrt{\left(-\sqrt{2}\sin\theta\right)^2+(2\cos\theta)^2+\left(\sqrt{2}\sin\theta\right)^2}\,\mathrm{d}\theta=2\mathrm{d}\theta$$

即

$$I=\int_\Gamma (x^2+y^2+z^2)\mathrm{d}s=\frac{9}{2}\int_0^{2\pi}2\mathrm{d}\theta=18\pi$$

□

2.2 第二类曲线积分

2.2.1 定义与性质

定义 2.2 (第二类曲线积分) 设 L 为 xoy 平面内从 A 到 B 的一条有向光滑弧，在 L 上定义了一个向量函数

$$\overrightarrow{F}(x,y)=(P(x,y),Q(x,y))$$

若对 L 的任意分割和在局部弧段上任意取点

$$\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}\left[P(\xi_i,\eta_i)\Delta x_i+Q(\xi_i,\eta_i)\Delta y_i\right]=\int_L P(x,y)\mathrm{d}x+Q(x,y)\mathrm{d}y$$

都存在，则称此极限为函数 $\overrightarrow{F}(x,y)$ 在有向曲线弧 L 上对坐标的曲线积分，或第二类曲线积分。其中 $P(x,y),Q(x,y)$ 为被积函数，L 为积分弧段或积分曲线。

性质 2 1. 若 L 可分成 k 条有向光滑曲线弧 $L_i(i=1,2,\cdots,k)$，则

$$\int_L P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y=\sum_{i=1}^{k}\int_{L_i}P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y$$

2. 用 L^- 表示 L 的反向弧，则

$$\int_{L^-}P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y=-\int_L P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y$$

注意 1. 对坐标的曲线积分必须注意积分弧段的方向;

2. 定积分是第二类曲线积分的特例.

□

例 2 计算

$$I=\int_\Gamma (z-y)\mathrm{d}x+(x-z)\mathrm{d}y+(x-y)\mathrm{d}z$$

其中 $\begin{cases} x^2+y^2=1 \\ x-y+z=2 \end{cases}$ ，从 z 轴正向看为顺时针方向.

解 取 Γ 的参数方程

$$x=\cos,y=\sin t,z=2-\cos t+\sin t(2\pi\to 0)$$

即

$$I=-\int_0^{2\pi}(2-\cos t)(-\sin t)+(-2+2\cos t-\sin t)\cos t+(\cos t-\sin t)(\cos t+\sin t)\,\mathrm{d}t=\int_0^{2\pi}\left(1-4\cos^2 t\right)\mathrm{d}t=-2\pi$$

□

2.3 格林公式

先来认识格林，设有平面区域 D 边界 L 的正向：区域的内部靠左

$$\text{区域}D\text{分类}\begin{cases}\text{单连通区域 (无“洞”区域)}\\ \text{多连通区域 (有“洞”区域)}\end{cases}$$

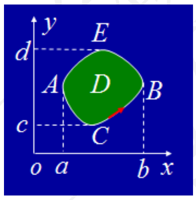
定理 2.1 (格林 (Green) 公式) 设区域 D 是由分段光滑正向曲线 L 围成，函数 $P(x,y),Q(x,y)$ 在 D 上具有连续一阶偏导数，则有

$$\oint_L P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y=\iint_D\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

证明 **情形 1** 若 D 既是 X 型区域，又是 Y 型区域，且

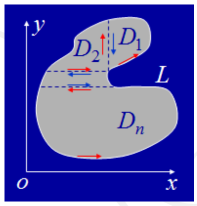
$$D:\begin{cases}\phi_1(x)\le y\le\phi_2(x)\\ a\le x\le b\end{cases},\quad D:\begin{cases}\psi_1(y)\le x\le\psi_2(y)\\ c\le y\le d\end{cases}$$

则有



$$\begin{aligned}\iint_D\frac{\partial Q}{\partial x}\mathrm{d}x\mathrm{d}y&=\int_c^d\mathrm{d}y\int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)}\frac{\partial Q}{\partial x}\mathrm{d}x=\int_c^d Q(\psi_2(y),y)\mathrm{d}y-\int_c^d Q(\psi_1(y),y)\mathrm{d}y\\&=\int_{\widehat{CBE}}Q(x,y)\mathrm{d}y-\int_{\widehat{CAE}}Q(x,y)\mathrm{d}y=\int_{\widehat{CBE}}Q(x,y)\mathrm{d}y-\int_{\widehat{EAC}}Q(x,y)\mathrm{d}y\end{aligned}$$

情形 2 若 D 不满足以上条件，则可通过加辅助线将其分割为有限个上述形式的区域，如图



$$\iint_D\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial x}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\sum_{k=1}^n\iint_{D_k}\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial x}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\sum_{k=1}^n\int_{\partial D_k}P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y=\oint_L P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y$$

证毕 ■

推论 1 正向闭曲线 L 所围区域 D 的面积

$$S=\frac{1}{2}\oint_L x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x$$

如若椭圆 $D:\begin{cases}x=a\cos\theta\\ y=b\sin\theta\end{cases}$，$0\le\theta\ \le2\pi$ 所围成的面积为

$$S=\frac{1}{2}\oint_L x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}(ab\cos^2\theta+ab\sin^2\theta)\mathrm{d}\theta=\pi ab$$

定理 2.2 (平面上曲线积分与路径无关的等价条件) 设 D 是单连通域，函数 $P(x,y),Q(x,y)$ 在 D 内具有一阶连续偏导数，则以下四个条件等价：

(1) 沿 D 中任意光滑闭曲线 L，有 $\oint_L P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y=0$;

(2) 对 D 中任一分段光滑曲线 L，曲线积分 $\oint_L P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y$ 与路径无关，只与起终点有关;

(3) 在 D 内是某一函数 $u(x,y)$ 的全微分，即 $\mathrm{d}u(x,y)=P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y$;

(4) 在 D 内每一点都有 $\dfrac{\partial P}{\partial y}=\dfrac{\partial Q}{\partial x}$.

证明 (1)⇒ (2)：设 L_1,L_2 为 D 内任意两条由 A 到 B 的有向分段光滑曲线，则

$$\int_{L_1}P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y-\int_{L_2}P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y=\int_{L_1}P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y+\int_{L_2^-}P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y=\oint_{L_1+L_2^-}P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y=0$$

即

$$\int_{L_1}P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y=\int_{L_2}P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y$$

注：积分与路径无关时，曲线积分可记为

$$\int_{\widehat{AB}}P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y=\int_A^B P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y$$

(2)⇒ (3)：在 D 内取定点 $A(x_0, y_0)$ 和任意一点 $B(x, y)$，因曲线积分与路径无关，有函数

$$u\,(x,y)=\int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y$$

则

$$\Delta_x u=u\,(x+\Delta x,y)-u\,(x,y)=\int_{(x,y)}^{(x+\Delta x,y)} P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y=\int_x^{x+\Delta x} P\mathrm{d}x=P\,(x+\Delta x,y)\,\Delta x$$

因此

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta_x u}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}P\,(x+\Delta x,y)=P\,(x,y)$$

同理可证 $\dfrac{\partial u}{\partial x}=Q(x,y)$，即 $\mathrm{d}u(x,y)=P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y$.

(3)⇒ (1)：设存在函数 $u(x,y)$ 使得

$$\mathrm{d}u=P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y$$

则

$$\frac{\partial u}{\partial x}=P\,(x,y)\,,\quad \frac{\partial u}{\partial y}=Q\,(x,y)\Rightarrow\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y},\quad \frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial x}$$

由于 P,Q 在 D 内具有连续的偏导数，所以

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial x}$$

从而在 D 内每一点都有 $\dfrac{\partial P}{\partial y}=\dfrac{\partial Q}{\partial x}$.

(4)⇒ (1)：设 L 为 D 中任一分段光滑闭曲线，所围区域为 $D'\subset D$，因此在 D' 上有 $\dfrac{\partial P}{\partial y}=\dfrac{\partial Q}{\partial x}$，利用格林公式得

$$\oint_L P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y=\iint_{D'}\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0$$

■

说明 根据定理2.2 , 若在某区域内 $\dfrac{\partial P}{\partial y}=\dfrac{\partial Q}{\partial x}$，则

(1) 计算曲线积分时, 可选择方便的积分路径;

(2) 求曲线积分时, 可利用格林公式简化计算，若积分路径不是闭曲线, 可添加辅助线;

(3) 可用积分法求 $\mathrm{d}u=P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y$ 在域 D 内的原函数:

取定点 $(x_0,y_0)\in D$ 及动点 $(x,y)\in D$，则原函数为

$$u\,(x,y)=\int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} P\,(x,y)\,\mathrm{d}x+Q\,(x,y)\,\mathrm{d}y=\int_{x_0}^{x} P\,(x,y_0)\,\mathrm{d}x+\int_{y_0}^{y} Q\,(x,y)\,\mathrm{d}y=\int_{y_0}^{y} Q\,(x_0,y)\,\mathrm{d}y+\int_{x_0}^{x} P\,(x,y)\,\mathrm{d}x$$

□

例 3 请用定理2.1和2.2两种方法计算

$$\int_L [e^x\sin y-(b\,(x+y))]\,\mathrm{d}x+(e^x\cos y-ax)\mathrm{d}y$$

其中 a,b 为正数，L 为从 $A(2a,0)$ 沿曲线 $y=\sqrt{2ax-x^2}$ 到 $O(0,0)$ 的弧.

解 法 1：利用格林公式，添加一条从点 $O(0,0)$ 沿 $y=0$ 到点 $A(2a,0)$ 有向直线段 L_1，则有

$$I=\int_{L+L_1}[e^x\sin y-(b\,(x+y))]\,\mathrm{d}x+(e^x\cos y-ax)\mathrm{d}y-\int_{L_1}[e^x\sin y-(b\,(x+y))]\,\mathrm{d}x+(e^x\cos y-ax)\mathrm{d}y=I_1-I_2$$

由格林公式可得

$$\begin{aligned}I_1&=\int_{L+L_1}[e^x\sin y-(b\,(x+y))]\,\mathrm{d}x+(e^x\cos y-ax)\mathrm{d}y=\oint_L P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y=\iint_D\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\&=\iint_D(e^x\cos y-a-(e^x\cos y-b))\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint_D(b-a)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\frac{\pi^2}{2}a^2\,(b-a)\end{aligned}$$

其中 D 为 $L_1\cup L_2$ 所围成的半圆区域，要计算 I_2 由于在 L_1 时，$y=0$，即

$$I_2=I_2=\int_0^{2a}(-bx)\,\mathrm{d}x=-b\frac{x^2}{2}\,\Big|_0^{2a}=-2a^2b$$

即

$$I=I_1-I_2=\frac{\pi^2}{2}a^2(b-a)+2a^2b=\left(\frac{\pi}{2}+2\right)a^2b-\frac{\pi}{2}a^3$$

法 2：利用积分与路径无关化为参数的定积分法求解，可得

$$\int_L\left[e^x\sin y-(b(x+y))\right]\mathrm{d}x+(e^x\cos y-ax)\mathrm{d}y=\int_L e^x\sin y\mathrm{d}x+e^x\cos y\mathrm{d}y-\int_L b(x+y)\mathrm{d}x+ax\mathrm{d}y=I_1-I_2$$

对 I_1 积分与路径无关，即

$$I_1=\int_L e^x\sin y\mathrm{d}x+e^x\cos y\mathrm{d}y=e^x\sin y\,\Big|_{(2a,0)}^{(0,0)}=0$$

对 I_2 取 L 的参数方程为 $\begin{cases}x=a+a\sin t\\ y=a\cos t\end{cases}$ $,t\in[0,\pi]$ 得

$$I_2=\int_L b(x+y)\mathrm{d}x+ax\mathrm{d}y=\int_0^{\pi}(-a^2b\sin t-a^2b\sin t\cos t-a^2b\sin^2 t+a^3\cos^2 t+a^3\cos t)\mathrm{d}t=-2a^2b-\frac{1}{2}\pi a^2+\frac{1}{2}\pi a^3$$

即

$$I=I_1-I_2=\left(\frac{\pi}{2}+2\right)a^2b-\frac{\pi}{2}a^3$$

□

2.4 斯托克斯公式

其后学习下斯托克斯公式，设有空间区域 G，则有

区域G分类 $\begin{cases}\text{空间二维单连通区域 }(G\text{内任一闭曲面围成的区域全属于}G)\\ \text{空间一维单连通区域 }(G\text{内任一闭曲线总可以张一片完全属于}G\text{的曲面})\end{cases}$

定理 2.3 (斯托克斯 (Stokes) 公式) 设光滑曲面 Σ 的边界 Γ 是分段光滑曲线，Σ 的侧与 Γ 的正向符合右手法则，P,Q,R 在包含 Σ 在内的一个空间域内具有连续一阶偏导数，则有

$$\oint_\Gamma P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y+R\mathrm{d}z=\iint_\Sigma\left(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}\right)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+\left(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x}\right)\mathrm{d}z\mathrm{d}x+\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial p}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

为便于记忆，斯托克斯公式还可写作：

$$\oint_\Gamma P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y+R\mathrm{d}z=\iint_\Sigma\begin{vmatrix}\mathrm{d}y\mathrm{d}z & \mathrm{d}z\mathrm{d}x & \mathrm{d}x\mathrm{d}y\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ P & Q & R\end{vmatrix}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

或用第一类曲面积分表示：

$$\oint_\Gamma P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y+R\mathrm{d}z=\iint_\Sigma\begin{vmatrix}\cos\alpha & \cos\beta & \cos\gamma\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ P & Q & R\end{vmatrix}\mathrm{d}S$$

证明 **情形 1** Σ 与平行 z 轴的直线只交于一点，设其方程为

$$\Sigma: z=f(x,y),\ (x,y)\in D_{xy}$$

为确定起见, 不妨设取 Σ 上侧，则有

$$\oint_\Gamma P\mathrm{d}x=\oint_C P(x,y,z(x,y))\mathrm{d}x=-\iint_{D_{xy}}\frac{\partial}{\partial y}P(x,y,z(x,y))\mathrm{d}x\mathrm{d}y=-\iint_{D_{xy}}\left[\frac{\partial P}{\partial y}+\frac{\partial P}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial y}\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y=-\iint_\Sigma\left[\frac{\partial P}{\partial y}+\frac{\partial P}{\partial z}f_y\right]\cos\gamma\mathrm{d}S$$

其中

$$\cos\gamma=\frac{1}{\sqrt{1+f_x^2+f_y^2}},\quad \cos\beta=\frac{-f_y}{\sqrt{1+f_x^2+f_y^2}}\Rightarrow f_y=-\frac{\cos\beta}{\cos\gamma}$$

因此

$$\oint_\Gamma P\,\mathrm{d}x=-\iint_\Sigma\left[\frac{\partial P}{\partial y}-\frac{\partial P}{\partial z}\frac{\cos\beta}{\cos\gamma}\right]\cos\gamma\,\mathrm{d}S=\iint_\Sigma\left[\frac{\partial P}{\partial z}\cos\beta-\frac{\partial P}{\partial y}\cos\gamma\right]\mathrm{d}S=\iint_\Sigma\frac{\partial P}{\partial z}\mathrm{d}z\mathrm{d}x-\frac{\partial P}{\partial y}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

同理可证

$$\oint_\Gamma Q\mathrm{d}y=\iint_\Sigma\frac{\partial Q}{\partial x}\mathrm{d}x\mathrm{d}y-\frac{\partial Q}{\partial z}\mathrm{d}y\mathrm{d}z,\quad \oint_\Gamma R\mathrm{d}z=\iint_\Sigma\frac{\partial R}{\partial y}\mathrm{d}y\mathrm{d}z-\frac{\partial R}{\partial x}\mathrm{d}z\mathrm{d}x$$

■

三式相加，即得斯托克斯公式.

情形 2 曲面 Σ 与平行 z 轴的直线交点多于一个，则可通过作辅助线面把 Σ 分成与 z 轴只交于一点的几部分，在每一部分上应用斯托克斯公式，然后相加由于沿辅助曲线方向相反的两个曲线积分相加刚好抵消，所以对这类曲面斯托克斯公式仍成立，证毕.

注意 如果 Σ 是 xoy 面上的一块平面区域，则斯托克斯公式就是格林公式，故格林公式是斯托克斯公式的特例. □

定理 2.4 (空间曲线积分与路径无关的条件) 设 G 是空间一维单连通域，函数 P,Q,R 在 G 内具有连续一阶偏导数，则下列四个条件相互等价：

(1) 对 G 内任一分段光滑闭曲线 Γ，有 $\oint_\Gamma P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y+R\mathrm{d}z=0$;

(2) 对 G 中任一分段光滑曲线 Γ，曲线积分 $\oint_\Gamma P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y+R\mathrm{d}z$ 与路径无关，只与起终点有关;

(3) 在 G 内是某一函数 $u(x,y)$ 的全微分，即 $\mathrm{d}u(x,y)=P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y+R\mathrm{d}z$;

(4) 在 G 内每一点处都有 $\dfrac{\partial P}{\partial y}=\dfrac{\partial Q}{\partial x}$，$\dfrac{\partial Q}{\partial z}=\dfrac{\partial Q}{\partial y}$，$\dfrac{\partial R}{\partial x}=\dfrac{\partial P}{\partial z}$.

证明 (1)⇒ (2)：设 Γ_1,Γ_2 为 G 内任意两条由 A 到 B 的有向分段光滑曲线，则

$$\int_{\Gamma_1}P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y+R\mathrm{d}z-\int_{\Gamma_2}P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y+R\mathrm{d}z=\int_{\Gamma_1}P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y+R\mathrm{d}z+\int_{\Gamma_2^-}P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y+R\mathrm{d}z=\oint_{\Gamma_1+\Gamma_2^-}P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y+R\mathrm{d}z=0$$

即

$$\int_{\Gamma_1}P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y+R\mathrm{d}z=\int_{\Gamma_2}P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y+R\mathrm{d}z$$

注：积分与路径无关时，曲线积分可记为

$$\int_{\widehat{AB}}P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y+R\mathrm{d}z=\int_A^B P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y+R\mathrm{d}z$$

(2)⇒ (3)：在 G 内取定点 $A(x_0,y_0,z_0)$ 和任意一点 $B(x,y,z)$，因曲线积分与路径无关，有函数

$$u\,(x,y)=\int_{(x_0,y_0,z_0)}^{(x,y,z)}P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y+R\mathrm{d}z$$

则

$$\Delta_x u=u\,(x+\Delta x,y,z)-u\,(x,y,z)=\int_{(x,y,z)}^{(x+\Delta x,y,z)}P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y+R\mathrm{d}z=\int_x^{x+\Delta x}P\mathrm{d}x=P\,(x+\Delta x,y,z)\,\Delta x$$

因此

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta_x u}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}P\,(x+\Delta x,y,z)\,\Delta x=P\,(x,y,z)$$

同理可证 $\dfrac{\partial u}{\partial y}=Q(x,y,z)$, $\dfrac{\partial u}{\partial z}=R(x,y,z)$，即 $\mathrm{d}u(x,y)=P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y+R\mathrm{d}z$.

(3)⇒ (1)：若 (3) 成立, 则存在函数 $u(x,y)$ 使得

$$\mathrm{d}u=P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y+R\mathrm{d}z$$

则

$$\frac{\partial u}{\partial x}=P\,(x,y)\,,\quad \frac{\partial u}{\partial y}=Q\,(x,y)\,,\quad \frac{\partial u}{\partial z}=R\,(x,y)\Rightarrow\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y},\quad \frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial x}$$

由于 P, Q 在 G 内具有连续的偏导数，所以

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x}$$

从而在 D 内每一点都有 $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$，同理可证 $\frac{\partial Q}{\partial z} = \frac{\partial Q}{\partial y}$，$\frac{\partial R}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial z}$.

(4)⇒ (1)：设 Γ 为 G 中任一分段光滑闭曲线，所围空间区域为 $G' \subset G$，因此在 D' 上有 $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$，利用斯托克斯公式可知结论成立得

$$\oint_{\Gamma} P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y + R\mathrm{d}z = \iint_{G'} \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right)\mathrm{d}y\mathrm{d}z + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right)\mathrm{d}z\mathrm{d}x + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial p}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

■

说明 对于空间第二曲线一般解题思路为 $\oint_L P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y + R\mathrm{d}z$：

(1) 若 L 闭合，P, Q, R 对各元偏导数连续，则

$$\oint_L P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y + R\mathrm{d}z = \iint_{\Sigma} \begin{vmatrix} \mathrm{d}y\mathrm{d}z & \mathrm{d}z\mathrm{d}x & \mathrm{d}x\mathrm{d}y \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

(2) 若 L 非闭，其参数方程为

$$\int_{\alpha}^{\beta} [P(x(t), y(t), z(t))x'(t) + Q(x(t), y(t), z(t))y'(t) + R(x(t), y(t), z(t))z'(t)]\mathrm{d}t$$

其中 $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases}$，$\alpha, \beta$ 分别为 L 的起点与终点参数值. □

例 4 设 $L: \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = a^2 \\ x + y + z = 0 \end{cases}$，从 x 轴的正向看它为逆时针方向，请用定理2.3和2.4两种方法计算曲线积分

$$\oint_L y\mathrm{d}x + z\mathrm{d}y + x\mathrm{d}z$$

解 取 Σ 为平面 $z = -x - y, z'_x = z'_y = -1$，取上侧，则 xOy 面的投影为椭圆区域 $x^2 + y^2 + (x + y)^2 = a^2$，也就有

$$\left(\sqrt{2}\left(x + \frac{y}{2}\right)\right)^2 + \left(\sqrt{\frac{3}{2}}y\right)^2 = a^2$$

即区域 D：$u^2 + v^2 = a^2$，则有

$$\text{其中} \begin{cases} u = \sqrt{2}\left(x + \frac{y}{2}\right) \\ v = \sqrt{2}y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{u}{\sqrt{2}} - \frac{v}{\sqrt{6}} \\ y = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}v \end{cases}$$

因此利用斯托克斯公式可得

$$\oint_L y\mathrm{d}x + z\mathrm{d}y + x\mathrm{d}z = \iint_{\Sigma} \begin{vmatrix} \mathrm{d}y\mathrm{d}z & \mathrm{d}z\mathrm{d}x & \mathrm{d}x\mathrm{d}y \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ y & z & x \end{vmatrix} \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = -\iint_{\Sigma} \mathrm{d}y\mathrm{d}z + \mathrm{d}z\mathrm{d}x + \mathrm{d}x\mathrm{d}y = -\iint_D (-z'_x - z'_x + 1)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$= 3\iint_D \mathrm{d}x\mathrm{d}y = 3\iint_D \left|\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}\right| \mathrm{d}u\mathrm{d}v = -3\iint_D \frac{1}{\sqrt{3}}\mathrm{d}u\mathrm{d}v = -\sqrt{3}\pi a^2$$

另一种写法：根据斯托克斯公式和轮换对称性可得

$$\oint_L P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y + R\mathrm{d}z = \iint_D \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right)\mathrm{d}y\mathrm{d}z + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right)\mathrm{d}z\mathrm{d}x + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial p}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$= \iint_D (-1)\mathrm{d}y\mathrm{d}z + (-1)\mathrm{d}z\mathrm{d}x + (-1)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 3\iint_D \mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

其中 D 在 xy 平面的投影区域为 $x^2+y^2+xy\le\dfrac{a^2}{2}$，则令

$$\begin{cases} x=\dfrac{u-v}{\sqrt{2}} \\ y=\dfrac{u+v}{\sqrt{2}} \end{cases} \Rightarrow J=\begin{vmatrix} \dfrac{1}{\sqrt{2}} & -\dfrac{1}{\sqrt{2}} \\ \dfrac{1}{\sqrt{2}} & \dfrac{1}{\sqrt{2}} \end{vmatrix}=1，\Omega=\left\{3u^2+v^2\le a^2\right\}$$

即

$$\oint_L y\mathrm{d}x+z\mathrm{d}y+x\mathrm{d}z=-3S_\Omega=-3\frac{\sqrt{3}\pi a^2}{3}=-\sqrt{3}\pi a^2$$

□

3 曲线积分在数学考研真题解答

例 5 (2018.5. 华中师范大学) 设 L 为不过原点的简单闭曲线，取逆时针方向，计算曲线积分：

$$I=\oint_L\frac{-y\mathrm{d}x+x\mathrm{d}y}{x^2+y^2+xy}$$

解 此题分两种情况讨论：

(1) 当原点不在曲线的内部时，则有

$$P\left(x,y\right)=\frac{-y}{x^2+xy+y^2}，Q\left(x,y\right)=\frac{x}{x^2+xy+y^2}$$

易知 $\dfrac{\partial Q}{\partial x}=\dfrac{\partial P}{\partial x}$ 且满足格林公式的条件，即 $I=0$.

(2) 当原点在曲线的内部时，构造曲线 $C:x^2+xy+y^2=r^2$，方向是顺时针，此时 $\displaystyle\oint_{L+C}\frac{-y\mathrm{d}x+x\mathrm{d}y}{x^2+y^2+xy}$ 满足格林公式的条件，即

$$\oint_{L+C}\frac{-y\mathrm{d}x+x\mathrm{d}y}{x^2+y^2+xy}=0\Rightarrow I=-\oint_C\frac{-y\mathrm{d}x+x\mathrm{d}y}{x^2+y^2+xy}$$

作正交变换 $\begin{cases} x=u+v \\ y=u-v \end{cases}$，则曲线 C 变成 uov 平面上的 $\Gamma:3u^2+v^2=r^2$，则

$$令\begin{cases} u=\dfrac{\sqrt{3}}{3}r\cos\theta \\ v=r\sin\theta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=\dfrac{\sqrt{3}}{3}r\cos\theta+r\sin\theta \\ y=\dfrac{\sqrt{3}}{3}r\cos\theta-r\sin\theta \end{cases}，\theta\in[0,2\pi]$$

因此

$$\begin{aligned} I&=-\oint_C\frac{-y\mathrm{d}x+x\mathrm{d}y}{x^2+y^2+xy}=\int_0^{2\pi}\frac{\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}r\cos\theta+r\sin\theta\right)\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}r\sin\theta+r\cos\theta\right)+\left(\frac{\sqrt{3}}{3}r\cos\theta+r\sin\theta\right)\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}r\sin\theta-r\cos\theta\right)}{r^2}\mathrm{d}\theta \\ &=\int_0^{2\pi}-\frac{2\sqrt{3}}{3}\mathrm{d}\theta=-\frac{4\sqrt{3}}{3}\pi \end{aligned}$$

□

例 6 (2015.5. 吉林大学) 设 $A>0,C>0,AC-B^2>0$，求证：

$$\int_L\frac{x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x}{Ax^2+2Bxy+Cy^2}=\frac{2\pi}{\sqrt{AC-B^2}}$$

其中 L 为曲线 $x^2+y^2=R^2(R>0)$ 定向取逆时针方向.

证明 利用极坐标：$\begin{cases} x = R\cos\theta \\ y = R\sin\theta \end{cases}, \theta \in [0, 2\pi]$，根据对称性有

$$\begin{aligned}
\int_L \frac{x\mathrm{d}y - y\mathrm{d}x}{Ax^2 + 2Bxy + Cy^2} &= \int_0^{2\pi} \frac{\mathrm{d}\theta}{A\cos^2\theta + 2B\sin\theta\cos\theta + C\sin^2\theta} = 2\int_0^{\pi} \frac{\mathrm{d}(\tan\theta)}{A + 2B\tan\theta + C\tan^2\theta} \\
&= 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d(\tan\theta)}{A + 2B\tan\theta + C\tan^2\theta} + 2\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{d(\tan\theta)}{A + 2B\tan\theta + C\tan^2\theta} \\
&= 2\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{A + 2Bt + Ct^2} + 2\int_{-\infty}^{0} \frac{\mathrm{d}t}{A + 2Bt + Ct^2}, \quad \text{令}(t = \tan\theta) \\
&= 2\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{A + 2Bt + Ct^2} = \frac{2}{C}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\left(t + \frac{B}{C}\right)}{\left(t + \frac{B}{C}\right)^2 + \frac{AC - B^2}{C^2}} \\
&= \frac{2}{C} \cdot \frac{C}{\sqrt{AC - B^2}} \arctan\frac{Ct + B}{\sqrt{AC - B^2}} \Big|_{-\infty}^{+\infty} \\
&= \frac{2\pi}{\sqrt{AC - B^2}}
\end{aligned}$$

即证. ■

例 7 (2006.10. 哈尔滨工业大学) 计算曲面积分

$$\oint_L \frac{y^2}{\sqrt{1 + x^2}}\mathrm{d}x + \left[2x + 2y\ln\left(x + \sqrt{1 + x^2}\right)\right]\mathrm{d}y$$

其中 L 是圆周 $x^2 + y^2 = 1$ 由 $A(1, 0)$ 依逆时针方向转到 $B(-1, 0)$ 的半圆.

解 补齐 BA 使其成为封闭的半圆，逆时针方向为正向，根据格林公式可得

$$\begin{aligned}
&\oint_L \frac{y^2}{\sqrt{1 + x^2}}\mathrm{d}x + \left[2x + 2y\ln\left(x + \sqrt{1 + x^2}\right)\right]\mathrm{d}y \\
&= \oint_{L+BA} \frac{y^2}{\sqrt{1 + x^2}}\mathrm{d}x + \left[2x + 2y\ln\left(x + \sqrt{1 + x^2}\right)\right]\mathrm{d}y - \oint_{BA} \frac{y^2}{\sqrt{1 + x^2}}\mathrm{d}x + \left[2x + 2y\ln\left(x + \sqrt{1 + x^2}\right)\right]\mathrm{d}y \\
&= \iint_D \left(-\frac{2y}{\sqrt{1 + x^2}} + 2 + \frac{2y}{\sqrt{1 + x^2}}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y - 0 = \iint_D 2\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \pi
\end{aligned}$$

□

例 8 (2005.5. 武汉大学) 计算曲面积分

$$\oint_\Gamma (y^2 - z)\mathrm{d}x + (x - 2yz)\mathrm{d}y + (x - y^2)\mathrm{d}z$$

其中 Ͽ 为曲线 $\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = a^2 \\ x^2 + y^2 = 2bx \end{cases}, z \geq 0, 0 < 2b < a$，从 z 轴的正方向看过去，Ͽ 是逆时针方向

解 曲线 Γ 的参数方程为 $\begin{cases} x = 2b\cos^2\theta \\ y = 2b\cos\theta\sin\theta \\ z = \sqrt{a^2 - 4b^2\cos^2\theta} \end{cases}, \quad \theta \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$，利用函数的奇偶性得

$$\begin{aligned}
\oint_\Gamma (y^2 - z)\mathrm{d}x + (x - 2yz)\mathrm{d}y + (x - y^2)\mathrm{d}z &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} x\mathrm{d}y = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} 2b\cos^2\theta \cdot 2b\left(1 - 2\sin^2\theta\right)\mathrm{d}\theta \\
&= b^2\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (\cos 2\theta + 1)\cos 2\theta\mathrm{d}(2\theta) = b^2\int_{-\pi}^{\pi} \cos^2\theta\mathrm{d}\theta \\
&= b^2\int_{-\pi}^{\pi} \frac{1 + \cos 2\theta}{4}\mathrm{d}(2\theta) = b^2\pi
\end{aligned}$$

□

例 9 (2005.3. 北京师范大学) 计算曲面积分

$$\oint_C \frac{-y\mathrm{d}x + x\mathrm{d}y}{x^2 + y^2}$$

其中 $C: \dfrac{x^2}{4} + y^2 = 1$ 以逆时针方向为正方

解 由于 $P(x,y)=\dfrac{-y}{x^2+y^2}$， $Q(x,y)=\dfrac{x}{x^2+y^2}$，即

$$\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{y^2-x^2}{\left(x^2+y^2\right)^2},(x,y)\neq(0,0)$$

所以 $\oint_C \dfrac{-y\mathrm{d}x+x\mathrm{d}y}{x^2+y^2}$ 与积分路径无关，在由 C 和包含于 C 内的小圆令 $C_0: x^2+y^2=\varepsilon^2,\varepsilon>0$ 充分小，所围成的区域 D 内应用 Gren 公式，即有

$$I=\oint_C \frac{-y\mathrm{d}x+x\mathrm{d}y}{x^2+y^2}=\oint_{C_0} \frac{-y\mathrm{d}x+x\mathrm{d}y}{x^2+y^2}=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta=2\pi$$

□

例 10 (2019.10. 八一杯) 计算曲面积分

$$\int_L e^{-\left(x^2-y^2\right)}\left[x\left(1-x^2-y^2\right)\mathrm{d}x+y\left(1+x^2+y^2\right)\mathrm{d}y\right]$$

其中 L 为平面上从 $A(0,0)$ 到 $B(1,1)$ 的曲线 $y=x^2$ 上的弧度.

解 设曲线 L 与线段 AB 围成的区域为 D，易知

$$D=\left\{(x,y)\,|x^2\leq y\leq x,0\leq x\leq 1\right\}$$

记

$$P(x,y)=e^{-\left(x^2-y^2\right)}x\left(1-x^2-y^2\right),\quad Q(x,y)=e^{-\left(x^2-y^2\right)}y\left(1+x^2+y^2\right)$$

在 D 内有

$$\frac{\partial P(x,y)}{\partial y}=\frac{\partial Q(x,y)}{\partial x}=-2e^{-\left(x^2-y^2\right)}xy\left(x^2+y^2\right)$$

根据 Green 公式有

$$\int_L-\int_{\overline{AB}} e^{-\left(x^2-y^2\right)}\left[x\left(1-x^2+y^2\right)\mathrm{d}x+y\left(1+x^2+y^2\right)\mathrm{d}y\right]=\iint_D\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0$$

注意到 $\overrightarrow{AB}: y=x(x:0\to 1)$，因此

$$\int_L e^{-\left(x^2-y^2\right)}\left[x\left(1-x^2-y^2\right)\mathrm{d}x+y\left(1+x^2+y^2\right)\mathrm{d}y\right]=\int_{\overrightarrow{AB}} e^{-\left(x^2-y^2\right)}\left[x\left(1-x^2+y^2\right)\mathrm{d}x+y\left(1+x^2+y^2\right)\mathrm{d}y\right]=2\int_0^1 x\mathrm{d}x=1$$

□

4 曲面积分

曲面积分是数学分析多元函数积分学的重要内容，如何计算曲面积分是学习中的重点和难点，为使考研学生能够深刻理解曲面积分，我将带大家细讲这块：

4.1 第一类型曲面积分

4.1.1 定义与性质

定义 4.1 (第一类曲面积分) 设 Σ 为光滑曲面，$f(x,y,z)$ 是定义在 Σ 上的一个有界函数，若对 Σ 做任意分割和局部区域任意取点，“乘积和式极限”

$$\lim_{\lambda\to 0}\sum_{k=1}^n f\left(\xi_k,\eta_k,\zeta_k\right)\Delta S_k=\iint_\Sigma f(x,y,z)\mathrm{d}S$$

都存在，则称此极限为函数 $f(x,y,z)$ 在曲面 Σ 上对面积的曲面积分或第一类曲面积分。其中 $f(x,y,z)$ 为被积函数，Σ 为积分曲面，$\mathrm{d}S$ 为面积元素。

性质 3 (积分的存在性) 若 $f(x,y,z)$ 在光滑曲面 Σ 上连续，则对面积的曲面积分存在.

性质 4 (对积分域的可加性) 若 Σ 是分片光滑的，若分成两个光滑曲面 Σ_1,Σ_2，则有

$$\iint_\Sigma f(x,y,z)\mathrm{d}S=\iint_{\Sigma_1} f(x,y,z)\mathrm{d}S+\iint_{\Sigma_2} f(x,y,z)\mathrm{d}S$$

性质 5 (线性) 设 k_1, k_2 为常数，则

$$\iint_{\Sigma}[k_1 f(x,y,z) \pm k_2 g(x,y,z)]\mathrm{d}S = k_1\iint_{\Sigma} f(x,y,z)\mathrm{d}S \pm k_2\iint_{\Sigma} f(x,y,z)\mathrm{d}S$$

定理 4.1 设有光滑曲面

$$\Sigma : z = z(x,y),\ (x,y) \in D_{xy}$$

$f(x,y,z)$ 在 Σ 上连续，则曲面积分 $\iint_{\Sigma} f(x,y,z)\mathrm{d}S$ 存在，且有

$$\iint_{\Sigma} f(x,y,z)\mathrm{d}S = \iint_{D_{xy}} f(x,y,z(x,y))\sqrt{1+z_x^2(x,y)+z_y^2(x,y)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

证明 由定义4.1知

$$\lim_{\lambda\to 0}\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k,\eta_k,\zeta_k)\Delta S_k = \iint_{\Sigma} f(x,y,z)\mathrm{d}S$$

又有

$$\Delta S_k = \iint_{(\Delta\sigma_k)_{xy}}\sqrt{1+z_x^2(x,y)+z_y^2(x,y)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \sqrt{1+z_x^2(\xi_k',\eta_k')+z_y^2(\xi_k',\eta_k')}(\Delta\sigma_k)_{xy}$$

$$\begin{aligned}\iint_{\Sigma} f(x,y,z)\mathrm{d}S &= \lim_{\lambda\to 0}\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k,\eta_k,(\xi_k,\eta_k))\sqrt{1+z_x^2(\xi_k',\eta_k')+z_y^2(\xi_k',\eta_k')}(\Delta\sigma_k)_{xy}\\ &= \lim_{\lambda\to 0}\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k,\eta_k,(\xi_k,\eta_k))\sqrt{1+z_x^2(\xi_k,\eta_k)+z_y^2(\xi_k,\eta_k)}(\Delta\sigma_k)_{xy}\\ &= \iint_{D_{xy}} f(x,y,z(x,y))\sqrt{1+z_x^2(x,y)+z_y^2(x,y)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\end{aligned}$$ ■

说明 1. 如果曲面方程为 $x = x(y,z)$, $(y,z) \in D_{yz}$或$y = y(x,z)$, $(x,z) \in D_{xz}$ 可有类似的公式；

2. 如果曲面为参数方程，若曲面为参数方程 $\mathrm{d}S$ 的表达式，也可将对面积的曲面积分转化为对参数的二重积分。 □

例 11 设 Σ 是四面体 $x+y+z \le 1, x \ge 0\ y \ge 0, z \ge 0$ 的表面积，计算

$$I = \oiint_{\Sigma}\frac{1}{(1+x^2+y^2)}\mathrm{d}S$$

解 在四面体的四个面上

平面方程	$\mathrm{d}S$	投影域
$z = 1-x-y$	$\sqrt{3}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$	$D_{xy}: 0 \le x \le 1, 0 \le y \le 1-x$
$z = 0$	$\mathrm{d}x\mathrm{d}y$	$D_{xy}: 0 \le x \le 1, 0 \le y \le 1-x$
$y = 0$	$\mathrm{d}z\mathrm{d}x$	$D_{zx}: 0 \le z \le 1, 0 \le x \le 1-z$
$x = 0$	$\mathrm{d}y\mathrm{d}z$	$D_{yz}: 0 \le z \le 1, 0 \le y \le 1-z$

因此

$$I = \left(\sqrt{3}+1\right)\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^{1-x}\frac{1}{(1+x+y)^2}\mathrm{d}y + \int_0^1\mathrm{d}z\int_0^{1-z}\frac{1}{(1+x)^2}\mathrm{d}x + \int_0^1\mathrm{d}z\int_0^{1-z}\frac{1}{(1+y)^2}\mathrm{d}y = \frac{3-\sqrt{3}}{2} + \left(\sqrt{3}-1\right)\ln 2$$ □

例 12 计算曲面积分

$$\iint_{\Sigma}\frac{1}{z}\mathrm{d}S$$

其中 Σ 是球面 $x^2+y^2+z^2 \le a^2$ 被平面 $z = h(0 < h < a)$ 截出的顶部。

解 由题设易知 $\Sigma : z = \sqrt{a^2-x^2-y^2}, (x,y) \in D_{xy}$，$D_{xy}: x^2+y^2 \le a^2-h^2$，且有

$$\sqrt{1+z_x^2+z_y^2} = \frac{a}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}$$

即

$$\iint_{\Sigma}\frac{1}{z}\mathrm{d}S = \iint_{D_{xy}}\frac{a}{a^2-x^2-y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y = a\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\sqrt{a^2-h^2}}\frac{r}{a^2-r^2}\mathrm{d}r = 2\pi a\left(-\frac{1}{2}\ln\left(a^2-r^2\right)\right)\Big|_0^{\sqrt{a^2+h^2}} = 2\pi a\ln\frac{a}{h}$$ □

4.1.2 计算方法

下面介绍计算第一类曲面积分的各类方法，给出相应的求解思路，供考研学子灵活使用。

方法 4.1.1 (化二重积分) 若将 Σ 投影 xOy 坐标面，则有

$$\iint_{\Sigma} f(x,y,z)\,\mathrm{d}S=\iint_{D_{xy}} f(x,y,z(x,y))\sqrt{1+z_x^2(x,y)+z_y^2(x,y)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

此方法可总结为“一代一投一换”，其中**一代**是是将曲面 Σ 的方程 $z=z(x,y)$ 代入被积函数 $f(x,y,z)$ 中，**一投**是将曲面 Σ 投影到 xOy 坐标面上 (投影为 D_{xy})，**一换**是将面积元素 $\mathrm{d}S$ 换成 $\sqrt{1+z_x^2(x,y)+z_y^2(x,y)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

方法 4.1.2 (化第二类曲面积分) 利用两类曲面积分之间的关系，可将第一类曲面积分化为第二类曲面积分计算，即

$$\iint_{\Sigma}(P\cos\alpha+Q\cos\beta+R\cos\gamma)\mathrm{d}S=\iint_{\Sigma}P\mathrm{d}y\mathrm{d}z+Q\mathrm{d}y\mathrm{d}x+R\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

其中 $\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma$ 为有向曲面 Σ 在点 (x,y,z) 处的法向量的方向余弦.

方法 4.1.3 (利用曲面的形心) 曲面的形心可以方便计算第一类曲面积分，记曲面的形心坐标为 $(\bar{x},\bar{y},\bar{z})$，则

$$\bar{x}=\frac{\iint_{\Sigma}x\mathrm{d}S}{\iint_{\Sigma}\mathrm{d}S},\bar{y}=\frac{\iint_{\Sigma}y\mathrm{d}S}{\iint_{\Sigma}\mathrm{d}S},\bar{z}=\frac{\iint_{\Sigma}z\mathrm{d}S}{\iint_{\Sigma}\mathrm{d}S}$$

方法 4.1.4 (利用轮换对称性) 若将曲面 Σ 表达式中的变量 x,y,z 按顺序互换，即 $x\to y\to z\to x$ ，而曲面 Σ 表达式不变，则有

$$\iint_{\Sigma} f(x)\,\mathrm{d}S=\iint_{\Sigma} f(y)\,\mathrm{d}S=\iint_{\Sigma} f(z)\,\mathrm{d}S$$

此外还有当积分曲面 Σ 为圆柱面时利用**元素法**可将第一类曲面积分化为第一类曲线积分，以及利用**斯托克斯公式**可以将第一类曲面积分化为第二类曲线积分计算，或者利用**积分曲面 Σ 对称性与被积函数 $f(x,y,z)$ 的奇偶性**简化第一类曲面积分等等各类方法。

4.2 第二类曲面积分

4.2.1 定义与性质

定义 4.2 (第二类曲面积分) 设 Σ 为光滑的有向曲面，在 Σ 上定义了一个向量场 $A=(P(x,y,z),Q(x,y,z),R(x,y,z))$，若对 Σ 的任意分割和在局部面元上任意取点，下列极限都存在

$$\lim_{\lambda\to 0}\sum_{k=1}^{n}\left[P(\xi_k,\eta_k,\zeta_k)(\Delta S_k)_{yz}+Q(\xi_k,\eta_k,\zeta_k)(\Delta S_k)_{zx}+R(\xi_k,\eta_k,\zeta_k)(\Delta S_k)_{xy}\right]$$

则称此极限为向量场 A 在有向曲面上对坐标的曲面积分，或第二类曲面积分。记作

$$\iint_{\Sigma}P\mathrm{d}y\mathrm{d}z+Q\mathrm{d}z\mathrm{d}x+R\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

其中 P,Q,R 为被积函数，Σ 为积分曲面。

说明 则对坐标的曲面积分也常写成如下向量形式

$$\iint_{\Sigma}P\mathrm{d}y\mathrm{d}z+Q\mathrm{d}z\mathrm{d}x+R\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint_{\Sigma}\vec{A}\cdot\vec{n}\,\mathrm{d}S=\iint_{\Sigma}\vec{A}\cdot\mathrm{d}\vec{S}$$

其中 Σ 正侧的单位法向量为 $\vec{n}=(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)$. □

性质 6 1. 若 $\Sigma=\bigcup\limits_{i=1}^{k}\Sigma_i$，且 Σ_i 之间无公共内点，则

$$\iint_{\Sigma}\vec{A}\cdot\mathrm{d}\vec{S}=\sum_{i=1}^{k}\iint_{\Sigma_i}\vec{A}\cdot\mathrm{d}\vec{S}$$

2. 用 Σ^- 表示 Σ 的反向曲面，则有

$$\iint_{\Sigma^-}\vec{A}\cdot\mathrm{d}\vec{S}=-\iint_{\Sigma}\vec{A}\cdot\mathrm{d}\vec{S}$$

定理 4.2 设光滑曲面 $\Sigma: z=z(x,y),(x,y)\in D_{xy}$ 取上侧，$R(x,y,z)$ 是 Σ 上的连续函数，则

$$\iint_{\Sigma} R(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint_{D_{xy}} R(x,y,z(x,y))\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

证明 由定义4.1，且 Σ 取上侧，即 $(\Delta S_k)_{xy}=(\Delta\sigma_k)_{xy}$，$\zeta_k=z(\xi_k,\eta_k)$，则有

$$\iint_{\Sigma} R(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{k=1}^{n} R(\xi_k,\eta_k,\zeta_k)(\Delta S_k)_{xy}=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{k=1}^{n} R(\xi_k,\eta_k,z(\xi_k,\eta_k))(\Delta\sigma_k)_{xy}=\iint_{D_{xy}} R(x,y,z(x,y))\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$ ■

说明 如果积分曲面 Σ 取下侧，则

$$\iint_{\Sigma} R(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=-\iint_{D_{xy}} R(x,y,z(x,y))\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

- 若 $\Sigma: x=x(y,z),(y,z)\in D_{yz}$，则有

$$\iint_{\Sigma} P(x,y,z)\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\pm\iint_{D_{xy}} P(x(y,z),y,z)\mathrm{d}y\mathrm{d}z\ (\text{前正后负})$$

- 若 $\Sigma: y=y(z,x),(z,x)\in D_{zx}$，则有

$$\iint_{\Sigma} Q(x,y,z)\mathrm{d}z\mathrm{d}x=\pm\iint_{D_{xy}} Q(x,y(z,x),z)\mathrm{d}z\mathrm{d}x\ (\text{右正左负})$$ □

性质 7 (轮换对称性) 如果将曲面 $u(x,y,z)=0$ 中的 x,y,z 换成 y,z,x 后，$u(y,z,x)=0$，那么在这个曲面上的积分

$$\iint_{\Sigma} f(x,y,z)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint_{\Sigma} f(y,z,x)\,\mathrm{d}y\mathrm{d}z,\quad \iint_{\Sigma} f(x,y,z)\,\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\iint_{\Sigma} f(y,z,x)\,\mathrm{d}z\mathrm{d}x,\quad \iint_{\Sigma} f(x,y,z)\,\mathrm{d}z\mathrm{d}x=\iint_{\Sigma} f(y,z,x)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

定理 4.3 设有向闭曲面 Σ 光滑或分片光滑，关于 yOz 面对称，取外侧。若连续函数 $P(x,y,z)$ 是关于 x 的奇函数，则

$$\iint_{\Sigma} P(x,y,z)\mathrm{d}y\mathrm{d}z=2\iint_{\Sigma_1} P(x,y,z)\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

其中 Σ_1 是 Σ 位于 yOz 面相应于 x 轴正半轴方向的部分．若 $P(x,y,z)$ 为偶函数，则

$$\iint_{\Sigma} P(x,y,z)\mathrm{d}y\mathrm{d}z=0$$

定理 4.4 设曲面 Σ 是光滑或分片光滑的有向曲面，Σ 关于变量具有轮换对称性，函数 $f(x,y,z)$ 在 Σ 上连续，则成立

$$\iint_{\Sigma} f(x,y,z)\,\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\iint_{\Sigma} f(y,z,x)\,\mathrm{d}z\mathrm{d}x=\iint_{\Sigma} f(z,x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

例 13 计算

$$I=\oiint_{\Sigma}\frac{2x}{R^3}\mathrm{d}y\mathrm{d}z+\frac{2y}{R^3}\mathrm{d}z\mathrm{d}x+\frac{2z}{R^3}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

其中 $\Sigma: x^2+y^2+z^2=R^2(R>0)$

解 此题中 Σ 既关于坐标面对称，同时也具有轮换对称性，可利用定理 4.3 和定理4.4可得

$$I=6\oiint_{\Sigma}\frac{z}{R^3}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=12\iint_{\Sigma_1}\frac{z}{R^3}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=12\iint_{D_{xy}}\frac{\sqrt{R^2-x^2-y^2}}{R^3}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=8\pi$$

其中 $\Sigma_1: z=\sqrt{R^2-x^2-y^2}$，$(x,y)\in D_{xy}$，取上侧，而 $D_{xy}=(x,y): x^2+y^2\le R^2$. □

4.2.2 计算方法

下面对第二型曲面积分的计算方法进行了一些归纳与总结，对复习考研与竞赛会很大的帮助。

方法 4.2.1 (化二重积分) 设光滑曲面 $\Sigma: z=z(x,y),(x,y)\in D_{xy}$ 取上侧，$R(x,y,z)$ 是 Σ 上的连续函数，则

$$\iint_{\Sigma} R(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint_{D_{xy}} R(x,y,z(x,y))\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

此方法可总结为**“一代一投一定向”**，其中**一代**是将曲面 Σ 的方程 $z=z(x,y)$ 代入被积函数 $R(x,y,z)$ 中，**一投**是将曲面 Σ 投影到 xOy 坐标面上 (投影为 D_{xy})，**一定向**是由积分曲面 Σ 所选定的一侧来确定面积元素前所带符号的正负，即**上正下负、前正后负与右正左负**。

方法 4.2.2 (高斯公式) 设空间闭区域 Ω 由分片光滑的闭曲面 Σ 所围成，Σ 的方向取外侧函数，P,Q,R 在 Ω 上有连续的一阶偏导数，则有

$$\oiint_{\Sigma} P\mathrm{d}y\mathrm{d}z+Q\mathrm{d}z\mathrm{d}x+R\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iiint_{\Omega}\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial x}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

方法 4.2.3 (斯托克斯公式) 设光滑曲面 Σ 的边界 Γ 是分段光滑曲线，Σ 的侧与 Γ 的正向符合右手法则，P,Q,R 在包含 Σ 在内的一个空间域内具有连续一阶偏导数，则有

$$\iint_{\Sigma}\left(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}\right)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+\left(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x}\right)\mathrm{d}z\mathrm{d}x+\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial p}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\oint_{\Gamma}P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y+R\mathrm{d}z$$

方法 4.2.4 (两类曲面积分的关系) 即可有

$$\iint_{\Sigma}(P\cos\alpha+Q\cos\beta+R\cos\gamma)\mathrm{d}S=\iint_{\Sigma}P\mathrm{d}y\mathrm{d}z+Q\mathrm{d}y\mathrm{d}x+R\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

其中 $\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma$ 为有向曲面 Σ 在点 (x,y,z) 处的法向量的方向余弦.

方法 4.2.5 (分面投影法) 若 Σ 是由 $z=z(x,y)$，则有

$$\iint_{\Sigma}R\left(x,y,z\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\pm\iint_{D_{xu}}R\left[x,y,z\left(x,y\right)\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

同理可有

$$\iint_{\Sigma}P\left(x,y,z\right)\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\pm\int_{D_{yz}}P\left[x\left(y,z\right),y,z\right)]\mathrm{d}y\mathrm{d}z,\quad\iint_{\Sigma}Q\left(x,y,z\right)\mathrm{d}z\mathrm{d}x=\pm\iint_{D_{zx}}Q\left[x,y\left(z,x\right),z\right]\mathrm{d}z\mathrm{d}x$$

方法 4.2.6 (合一投影法) 若 Σ 的方程为 $\Sigma:z=z(x,y),(x,y)\in D_{xy}$，函数 P,Q,R 在 Σ 面上连续，则单位法向量为

$$\bar{e}_n=\{\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma\}=\pm\left\{\frac{-z_x}{\sqrt{z_x^2+z_y^2+1}},\frac{-z_y}{\sqrt{z_x^2+z_y^2+1}},\frac{1}{\sqrt{z_x^2+z_y^2+1}}\right\}$$

又有

$$\begin{aligned}\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\cos\alpha\mathrm{d}S=\frac{\cos\alpha}{\cos\gamma}\cos\gamma\mathrm{d}S=\frac{\cos\alpha}{\cos\gamma}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=-z_x\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\ \mathrm{d}z\mathrm{d}x=\cos\beta\mathrm{d}S=\frac{\cos\beta}{\cos\gamma}\cos\gamma\mathrm{d}S=\frac{\cos\beta}{\cos\gamma}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=-z_y\mathrm{d}x\mathrm{d}y\end{aligned}$$

即

$$\begin{aligned}&\iint_{\Sigma}P\left(x,y,z\right)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+Q\left(x,y,z\right)\mathrm{d}z\mathrm{d}x+R\left(x,y,z\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\&=\pm\iint_{D_{xy}}\left[P\left(x,y,z\left(x,y\right)\right)-z_x\left(x,y\right)\right]+\left[Q\left(x,y,z\left(x,y\right)\right)-z_y\left(x,y\right)\right]+R\left(x,y,z\left(x,y\right)\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\&=\pm\iint_{D_{xy}}P\cdot(-z_x)+Q\cdot(-z_y)+R\mathrm{d}x\mathrm{d}y\end{aligned}$$

此外还有利用**第二型曲面积分的向量形式**计算、**参数方程**或者利用**积分曲面 Σ 对称性与被积函数 $f(x,y,z)$ 的奇偶性**简化第二类曲面积分等等各类方法。

4.3 高斯公式

在认识完曲面积分之后，我们先来熟悉下高斯积分：

定理 4.5 (高斯 (Gauss) 公式) 设空间闭区域 Ω 由分片光滑的闭曲面 Σ 所围成，Σ 的方向取外侧函数，P,Q,R 在 Ω 上有连续的一阶偏导数，则有

$$\iiint_{\Omega}\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial x}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\oiint_{\Sigma}P\mathrm{d}y\mathrm{d}z+Q\mathrm{d}z\mathrm{d}x+R\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\oiint_{\Sigma}(P\cos\alpha+Q\cos\beta+R\cos\gamma)\mathrm{d}S$$

证明 先证：$\displaystyle\iiint_{\Omega}\left(\frac{\partial R}{\partial z}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\oiint_{\Sigma}R\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，设 $\Omega:z_1(x,y)\le z(x,y)\le z_2(x,y)\,(x,y)\in D_{xy}$

情形 1 若 Ω 是 XY 区域，$\Sigma=\Sigma_1\cup\Sigma_2\cup\Sigma_3,\Sigma_1:z=z_1\left(x,y\right),\Sigma_2:z=z_2\left(x,y\right)$，则有

$$\iiint_{\Omega}\frac{\partial R}{\partial z}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\iint_{D_{xy}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)}\frac{\partial R}{\partial z}\mathrm{d}z=\iint_{D_{xy}}\left[R\left(x,y,z_2\left(x,y\right)\right)-R\left(x,y,z_1\left(x,y\right)\right)\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$\oiint_{\Sigma} R\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \left(\iint_{\Sigma_2} + \iint_{\Sigma_1} + \iint_{\Sigma_3}\right) R\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint_{D_{xy}} R\left(x,y,z_2\left(x,y\right)\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y - \iint_{D_{xy}} R\left(x,y,z_1\left(x,y\right)\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

因此

$$\iiint_{\Omega} \frac{\partial R}{\partial z}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \oiint_{\Sigma} R\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

情形 2 若 Ω 不是 XY 区域，则可引进辅助面将其分割成若干个 XY 型区域，在辅助面正反两侧面积分正负抵消，故上式仍成立.

同理可证

$$\iiint_{\Omega} \frac{\partial P}{\partial x}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \oiint_{\Sigma} P\mathrm{d}y\mathrm{d}z,\quad \iiint_{\Omega} \frac{\partial Q}{\partial y}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \oiint_{\Sigma} Q\mathrm{d}z\mathrm{d}x$$

三式相加，即得所证 Gauss 公式

$$\iiint_{\Omega}\left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial x} + \frac{\partial R}{\partial z}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \oiint_{\Sigma} P\mathrm{d}y\mathrm{d}z + Q\mathrm{d}z\mathrm{d}x + R\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

■

例 14 设 Σ 为曲面 $z = 2 - x^2 - y^2, 1 \le z \le 2$ 取上侧，计算

$$I = \iint_{\Sigma} (x^3 z + x)\mathrm{d}y\mathrm{d}z - x^2 yz\mathrm{d}z\mathrm{d}x - x^2 z^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

解 作取下侧的辅助面

$$\Sigma_1 : z = 1, (x,y) \in D_{xy} : x^2 + y^2 \le 1$$

$$I = \oiint_{\Sigma+\Sigma_1} - \iiint_{\Sigma_1} = \iiint_{\Omega} \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z - (-1)\iint_{D_{xy}} (-x^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1 r\mathrm{d}r\int_1^{2-r^2}\mathrm{d}z - \int_0^{2\pi}\cos^2\theta\mathrm{d}\theta\int_0^1 r^3\mathrm{d}r = \frac{\pi}{4}$$

□

5 曲面积分在数学考研真题解答

例 15 (2013.9. 武汉大学) 计算曲面积分：

$$I = \iint\limits_{\Sigma} (x^2 + y^2 + z^2)^{-\frac{3}{2}}(\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4} + \frac{z^2}{c^4})^{-\frac{1}{2}}\mathrm{d}S$$

其中 Σ 为椭球面 $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1(a,b,c > 0)$.

解 根据 Σ 这个面，我们计算出它的单位外法线向量为 $\vec{n} = \dfrac{(\frac{x}{a^2},\frac{y}{b^2},\frac{z}{c^2})}{\sqrt{\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4} + \frac{z^2}{c^4}}}$，且注意到

$$\frac{x}{a^2}\cdot x + \frac{y}{b^2}\cdot y + \frac{z}{c^2}\cdot z = 1$$

从而根据两类曲面积分之间的转换关系，我们得到

$$I = \iint\limits_{\Sigma} \frac{x\mathrm{d}y\mathrm{d}z + y\mathrm{d}z\mathrm{d}x + z\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{\sqrt{(x^2 + y^2 + z^2)^3}}$$

如此该积分就变得十分简单，运用高斯公式易得 $I = 4\pi$.

□

例 16 (2004.4. 四川大学) 计算曲面积分：

$$\iint_S \frac{\mathrm{d}y\mathrm{d}z}{x} + \frac{\mathrm{d}z\mathrm{d}x}{y} + \frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{z}$$

其中 Σ 为椭球面 $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1(a,b,c > 0)$ 的外侧.

解 由对称性

$$\iint_S \frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{z} = \frac{2}{c}\iint_D \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

其中 $D : \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} \le 1$. 作代换 $x = ar\cos\theta, y = br\sin\theta$，我们有

$$\frac{2}{c}\iint_D \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \frac{2ab}{c}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1 \frac{r\mathrm{d}r}{\sqrt{1 - r^2}} = \frac{4ab}{c}\pi$$

再由轮换对称性可知

$$\iint_S \frac{\mathrm{d}y\mathrm{d}z}{x}=\frac{4bc}{a}\pi,\iint_S \frac{\mathrm{d}z\mathrm{d}x}{y}=\frac{4ac}{b}\pi$$

故

$$\iint_S \frac{\mathrm{d}y\mathrm{d}z}{x}+\frac{\mathrm{d}z\mathrm{d}x}{y}+\frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{z}=4abc(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2})\pi$$

□

例 17 (2000.7.2. 南京大学) 计算曲面积分

$$I=\oiint_S x^2\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y^2\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

其中 S 为 $(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=R^2$，方向取外侧.

解 由高斯公式可得

$$I=\oiint_S x^2\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y^2\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y=2\iiint_V (x+y+z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

其中 $V=\left\{(x,y,z)^{\mathrm{T}}\in\mathbf{R}^3|(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2\leqslant R^2\right\}$，作球坐标变换

$$\begin{cases} x=a+r\sin\phi\cos\theta, & 0\leqslant r<+\infty \\ y=b+r\sin\phi\sin\theta, & 0\leqslant\phi<\pi \\ z=c+r\cos\phi, 0\leqslant\theta\leqslant 2\pi \end{cases}$$

即

$$I=\iiint_V 2(a+b+c+r\sin\phi\cos\theta+r\sin\phi\sin\theta+r\cos\phi)r^2\sin\phi d r d\phi\mathrm{d}\theta=\frac{8\pi(a+b+c)}{3}R^3$$

□

例 18 (2006.7. 大连理工大学) 计算曲面积分

$$I=\iint_S \left(3x+y+z^{12}\right)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+\left(2y+\cos z+x^{12}\right)\mathrm{d}z\mathrm{d}x+\left(3z+\mathrm{e}^{x+y^2}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

其中 S 是曲面 $|x-y+z|+|y-z+x|+|z-x+y|=1$ 的外表面。

解 由高斯公式可得

$$I=\iint_S \left(3x+y+z^{12}\right)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+\left(2y+\cos z+x^{12}\right)\mathrm{d}z\mathrm{d}x+\left(3z+\mathrm{e}^{x+y^2}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iiint_V (3+2+3)\mathrm{d}V=8\iiint_V \mathrm{d}V$$

然后作变量代换

$$\begin{cases} u=x-y+z \\ v=y-z+x \\ w=z-x+y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=\frac{1}{2}(u+v) \\ y=\frac{1}{2}(w+v) \\ z=\frac{1}{2}(u+w) \end{cases}$$

此时有

$$J=\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)}=1, V_1=\{(u,v,w)\,|\,|u|+|v|+|w|\leq 1\}$$

可由对称性得

$$I=8\iiint_V \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=2\iiint_{V_1}\mathrm{d}u\mathrm{d}v\mathrm{d}w=16\int_0^1\mathrm{d}u\int_0^{1-u}\mathrm{d}v\int_0^{1-u-v}\mathrm{d}w=\frac{8}{3}$$

□

例 19 (2019.10. 八一杯) 计算三重积分

$$\iiint_\Omega \cos(2x-y+z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

其中 Ω 为球面 $x^2+y^2+z^2\leq 1$.

解 作旋转变换，即将 xOy 旋转到平面 $2x-y+z$ 的位置上，令 $\varphi=\dfrac{2x-y+z}{\sqrt{6}}$，这时 x 轴与 y 轴被旋转到平面 $\varphi=0$ 内，把它们记为 ξ 与 η 轴，由解析几何知识得

$$|J|=1,\Omega'=\left\{(\xi,\eta,\zeta):\xi^2+\eta^2+\zeta^2\leq 1\right\}$$

$$\iiint_{\Omega} \cos(2x-y+z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \iiint_{\Omega'} \cos\left(\sqrt{6}\varphi\right)\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta\mathrm{d}\varphi$$

利用柱面坐标 $\xi = r\cos\theta, \eta = r\sin\theta, \varphi = \varphi$ 得

$$\begin{aligned}\iiint_{\Omega} \cos(2x-y+z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z &= \int_{-1}^{1} \cos\left(\sqrt{6}\varphi\right)\mathrm{d}\varphi \int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta \int_0^{\sqrt{1-\varphi^2}} r\mathrm{d}r = 2\pi\int_0^1 \left(1-\varphi^2\right)\cos\left(\sqrt{6}\varphi\right)\mathrm{d}\varphi \\ &= \frac{2\pi}{3}\left(\frac{\sin\sqrt{6}}{\sqrt{6}} - \cos\sqrt{6}\right)\end{aligned}$$

□

6 正交变换在线面积分的应用

正交变换是欧氏空间中一类保持度量不变的重要变换，用正交变可换将积分曲面是平面曲线且不易用参数表示的积分化为二维空间的曲线积分，同样对曲面积分也是如此。

定理 6.1 设 A 是为正交矩阵，且其行列式为 1，右手系坐标 $P = (x,y,z)^T$ 在正交变换 $Q = AP$ 形成另一右手坐标系下的 $Q = (u,v,w)^T$，原坐标系下的区域 V_P 相应变换成新坐标系下的曲面 V_Q，则

$$\iiint_P f(P)\mathrm{d}S = \iiint_Q f\left(A^{-1}Q\right)\mathrm{d}S$$

定理 6.2 设光滑曲面 $S: x = (u,v), y = y(u,v).z = z(u,v); (u,v) \in A$，在正交变换

$$X_1 = \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix} = AX = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

之下变成曲面 $S': x_1 = x_1(u,v), y_1 = y_1(u,v), z_1 = z_1(u,v)$，则对于 S 上连续函数 $f(x,y,z)$ 有

$$\iint_S f(X)\mathrm{d}S = \iint_{S'} f\left(A'X\right)\mathrm{d}S'$$

例 20 证明普阿松公式

$$\iint_S f(ax+by+cz)\mathrm{d}S = 2\pi\int_{-1}^1 f(u\sqrt{a^2+b^2+c^2})\mathrm{d}u$$

其中 S 是单位球面 $x^2+y^2+z^2 = 1$.

证明 若 $a = b = c = 0$ 等式恒成立，否则假设 $k = \sqrt{a^2+b^2+c^2}$，令

$$\cos\alpha = \frac{a}{k}, \cos\beta = \frac{b}{k}, \cos\gamma = \frac{c}{k} \Rightarrow \cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$$

考虑正交变换，以单位向量 $(\frac{a}{k}, \frac{b}{k}, \frac{c}{k})$ 扩充一个三阶矩阵 A，有

$$\begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} = A\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

由定理6.2可得

$$\iint\limits_{x^2+y^2+z^2=1} f(ax+by+cz)\mathrm{d}S = \iint\limits_{u^2+v^2+w^2=1} f(ku)\mathrm{d}S$$

即

$$w^2 = 1-u^2-v^2, (u,v) \in D; \frac{\partial w}{\partial u} = -\frac{u}{w}, \frac{\partial w}{\partial v} = -\frac{v}{w}$$

$$\sqrt{1+\left(\frac{\partial w}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial v}\right)^2} = \sqrt{1+\left(\frac{-u}{w}\right)^2 + \left(\frac{-v}{w}\right)^2} = \frac{1}{\sqrt{1-u^2-v^2}}$$

$$\iint\limits_{u^2+v^2+u^2=1} f(ku)\mathrm{d}S = \iint\limits_D f(ku)\frac{1}{\sqrt{1-u^2-v^2}}\mathrm{d}u\mathrm{d}v$$

令 $u = u, v = \sqrt{1-u^2}\sin\theta$，其中 $u \in [-1,1], \theta \in [0,2\pi]$，即

$$\iint_D f(ku)\frac{1}{\sqrt{1-u^2-v^2}}\mathrm{d}u\mathrm{d}v = \int_{-1}^1 f(ku)\mathrm{d}u\int_0^{2\pi}\frac{\sqrt{1-u^2}\cos\theta}{\sqrt{1-u^2}\cos\theta}\mathrm{d}\theta = 2\pi\int_{-1}^1 f(ku)\mathrm{d}u$$

即证

$$\iint_S f(ax+by+cz)\mathrm{d}S = 2\pi\int_{-1}^1 f(u\sqrt{a^2+b^2+c^2})\mathrm{d}u$$

■