

# 第一届“八一杯”大学生网络数学竞赛试题

非数类，满分：140 分，考试时间：150 分钟

比赛时间：2019 年 8 月 1 日上午 9 点至 2019 年 8 月 1 号晚上 8 点



竞赛官方微信公众号：八一考研数学竞赛

题号	一试							二试		满分
	一	二	三	四	五	六	七	A	B	
满分	40	10	10	10	10	10	10	20	20	140
得分										

- 注意事项：**
1. 试题解答请在规定时间内发送到邮箱 [hoganbin1995@outlook.com](mailto:hoganbin1995@outlook.com)，逾期将取消参赛资格，严格遵守比赛纪律，勿翻阅其他参考资料或在各数学群内讨论此份试题；
  2. 要求解答字迹清楚，推荐采用 PDF 格式提交；
  3. 文件命名：参赛科目 + 昵称 (或姓名) + 学校；
  4. 本卷分一试二试，其中一试二试满分为 100 与 40 分，两试得分总和为最终成绩。

## 2019 年第一届“八一杯”大学生网络数学竞赛 数学 I 试题 (满分 100 分)

一、填空题 ( 本题满分 40 分，第 1-5 题每个 3 分，第 6-10 题每个 5 分，考生须全部作答)

1. 计算定积分  $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left( \frac{1}{1+e^x} + \operatorname{arccot} e^x \right) \left( \frac{2e^x}{\sqrt{\pi^2 - 4x^2}} - 2e^{\frac{\pi \sin x}{2}} \cos^2 \frac{x}{2} \right) dx =$ \_\_\_\_\_.

2. 由  $x^y = y^x$  确定的隐函数  $y = y(x)$ ，求  $\frac{d^2 y}{dx^2} =$ \_\_\_\_\_.

3. 求微分方程  $x^2(x-1)y' - x(x-2)y - y^2 = 0$  的通解为\_\_\_\_\_.

4. 在曲面  $(xy + yz + xz)^2 + (x - y + z) = 0$  上点  $(0, 0, 0)$  处的切平面内，求一点  $P$  使得它到点  $M(1, 2, 3)$  与点  $N(-2, 3, -3)$  的距离平方和最小值是\_\_\_\_\_.

5. 若  $a, b$  为正实数，求  $\iint_D y \, dx \, dy =$ \_\_\_\_\_, 其中  $D = \left\{ (x, y) : 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}, 0 \leq y \leq \min \left\{ \frac{a}{\cos x}, \frac{b}{\sin x} \right\} \right\}$

6. (a) 设  $f(x)$  是二阶可导函数，且  $f(1) = -1, f'(1) = -4$ ，存在二元函数  $z = z(x, y)$  使得  $dz = 4[f(x) + 2x^3]y \, dx + [3xf(x) - x^2 f'(x)] \, dy$ ，求  $f(x) =$ \_\_\_\_\_ 和  $z(x, y) =$ \_\_\_\_\_.

(b) 求曲面  $y = 4(x^2 + y^2)^2 + z^4$  所围成的体积  $V =$ \_\_\_\_\_.

7. 计算极限  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \left( \prod_{k=1}^n \frac{2k}{2k-1} \right) \int_{-1}^{\infty} \frac{(\cos x)^{2n}}{2^x} dx \right) = \underline{\hspace{2cm}}$ , 与  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{(-1)^n}{n} \right)^{\csc(\pi\sqrt{1+n^2})} = \underline{\hspace{2cm}}$ .

8. 若  $n$  阶方阵  $A$  和  $B$  的秩分别是  $r$  和  $n-r$ , 求矩阵方程  $AXB = 0$  的通解  $\underline{\hspace{2cm}}$ .

9. (a) 找一幂级数  $f(x)$  是  $\underline{\hspace{2cm}}$ , 使得它满足  $f''(x) + f(x) = 0, f(0) = 0, f'(0) = 1$  成立.

(b) 计算极限

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{n2^m + 1} \int_0^{x^2} \frac{\pi (\sqrt[4]{1+t} - 1) \sin t^4}{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{((n-1)!)^2 (2t)^{2n}}{(2n)!} \int_0^1 \frac{(1-2x) \ln(1-x)}{x^2 - x + 1} dx} dx}{x^2 (x - \tan x) \ln(x^2 + 1) \left[ \left( \frac{2 \arctan \frac{y}{x}}{\pi} \right)^y - 1 \right]}$$

10. (a) 计算三重积分

$$\iiint_{\Omega} \cos(2x - y + z) dx dy dz$$

其中  $\Omega$  为球面  $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$ .

(b) 计算曲线积分

$$\int_L e^{-(x^2-y^2)} [x(1-x^2-y^2) dx + y(1+x^2+y^2) dy]$$

其中  $L$  为平面上从  $A(0,0)$  到  $B(1,1)$  的曲线  $y = x^2$  上的弧段.

微信公众号管理员. 八一 供题

## 二、解答题 ( 本题满分 10 分)

已知  $F(n)$ , 且  $F(1) = F(2) = 1$ , 对于  $F(n)$  有  $F(n+1) = \alpha F(n) + \beta F(n-1)$ .

(1) 求  $F(n)$  的通项;

(2) 若  $\alpha = \beta = 1$ , 求  $\lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=2}^N \frac{F(n)}{F(n-1)F(n+1)}$ .

华中科技大学. 郭晓光 供题

### 三、解答题 ( 本题满分 10 分)

设  $f(x)$  为  $[0, 1]$  上的非负连续函数, 证明

$$\int_0^1 \frac{f^{2020}(x)}{2018} dx + \int_0^1 \frac{f^{2017}(x)}{2021} dx \geq \int_0^1 \frac{f^{2019}(x)}{2019} dx + \int_0^1 \frac{f^{2018}(x)}{2020} dx$$

中国科学技术大学. 向禹 供题

### 四、解答题 ( 本题满分 10 分)

设函数  $f(x)$  在  $[0, n]$  上可导,  $n \in \mathbb{N}^*$  且  $n > 2$ , 并满足

$$\int_0^1 f(x) dx = \frac{\int_0^2 f(x) dx}{2} = \frac{\int_0^3 f(x) dx}{3} = \dots = \frac{\int_0^n f(x) dx}{n}$$

(1) 证明: 存在实数  $T$ , 使得关于  $x$  的方程:  $f(x) = T$  至少有  $n$  个不等实根;

(2) 设函数  $g(x)$  在  $[0, n]$  上可导, 证明: 存在实数  $M$ , 使得关于  $x$  的方程:

$$f'(x) = g'(x)[M - f(x)]$$

至少有  $n - 1$  个不等实根.

吉林大学. 董翔 供题

### 五、解答题 ( 本题满分 10 分)

某曲面  $D$  上的任意一点与  $P_0(1, 1, 1)$  所在的直线始终与直线  $x - 1 = y - 1 = z - 1$  的夹角为  $\theta_0$ .

(1) 求曲面  $D$  的方程;

(2) 当  $\theta_0 = \frac{\pi}{6}$  时, 球面  $(x - 1)^2 + (y - 1)^2 + (z - 1)^2 = 1$  被曲面  $D$  所截的曲面为  $\Sigma$ , 曲面  $\Sigma$  在平面  $z = 1$  的上半部分为  $\Sigma_1$ , 下半部分为  $\Sigma_2$ .

- 当曲面  $\Sigma_1$  和  $\Sigma_2$  的电荷面密度均为  $\rho$  时, 求  $P_0$  点处的电场强度  $\vec{E}$ .
- 当曲面  $\Sigma_1$  带电荷密度为  $\rho$ ,  $\Sigma_2$  的电荷密度为  $-\rho$ , 求  $P_0$  处的电场强度  $\vec{E}$ .

提示: 点  $A(x_0, y_0, z_0)$  电荷  $+q$  对点  $B(x, y, z)$  产生电场  $\vec{E}$  为  $\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{|\vec{r}|^3} \vec{r}$ , 其中  $\vec{r} = \overrightarrow{AB}$ .

厦门大学. 酸奶 供题

六、解答题 ( 本题满分 10 分)

若有数列  $\{a_n\}$  是一收敛数列且  $y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ , 使得  $y$  满足  $xy'' - y' + 4x^3y = 0$  通解, 对  $n \geq 4$ , 试证:  $a_n = -\frac{4}{n(n-2)}a_{n-4}$ . 并求证在  $a_0 = 1, a_2 = 0$  情况下通解为  $y = \cos x^2$ , 且求与之对应  $y$  在  $a_0 = 0, a_2 = 1$  的通解.

剑桥大学. 面码 供题

七、解答题 ( 本题满分 10 分)

已知数列  $\{a_n\}$  中,  $n \in N_+, a_1 = 2$ , 且满足  $\sum_{k=1}^n a_k = \frac{1}{2}(n+1)(a_n+1) - 1$ .

(1) 若设  $b_n \in \mathbb{R}$  ( $n = 1, 2, 3 \dots$ ), 其中  $\mathbb{R}$  为实数集, 如果级数  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{a_n^2}$  收敛, 试求解以下极限:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{k=1}^n \frac{b_k}{a_k}}{a_n}$$

(2) 若级数  $\left| \sum_{n=1}^{\infty} b_n \right| < +\infty$ , 试求解以下极限:  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{k=1}^n a_k b_k}{a_n}$ .

吉林大学. 董翔 供题



# 2019 年第一届“八一杯”大学生网络数学竞赛

## 数学 II 试题（满分 40 分）

【注意】考生需要对 AB 两题进行作答，我们将按考生所给过程计算步骤分，全部作答完全正确计 40 分，二试作为非数组拔高题，可供考生进行挑战自己。

### A.(本题满分 20 分)

等离子体是一种被电离的离子化的气体，通常被称为物质的第四态，它不仅广泛存在于我们的日常生活中，宇宙中更是有百分之九十九的物质以等离子态存在，假设现在有一种等离子体，完全由质子和电子组成，其中的电势满足泊松方程  $\nabla^2 \Phi = -\frac{e}{\epsilon_0} (n_i - n_e)$ ，电子的速度分布满足  $f_e(\vec{v}) = n_i \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{\frac{3}{2}} e^{-\frac{1}{2} \vec{v}^2 - e\Phi}$  其中  $\epsilon_0$  为真空介电常数， $n_i$  和  $n_e$  分别为质子和电子密度。

(1) 求质子密度  $n_i$  和电子密度  $n_e$  之间的关系；

(2) 试在合适的坐标系中求出一级近似下  $\Phi$  的表达式。

温馨提示：因为正负电荷的存在，所以等离子体的电势不满足库仑势  $\Phi = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r}$ ，但是当电荷之间距离比较小的时候，可以认为它们产生的电势满足该式。

可能用到的公式：

$$\begin{aligned}\vec{v}^2 &= v_x^2 + v_y^2 + v_z^2 \\ \nabla^2 f &= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} \\ \nabla^2 f &= \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left( \rho \frac{\partial f}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} \\ \nabla^2 f &= \frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2} (rf) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial f}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2}\end{aligned}$$

中国科学院大学. 李博 供题

B.( 本题满分 20 分)

(1) 求  $f(x) = \cos(\alpha x)$  ( $\alpha \notin \mathbb{Z}$ ) 在  $[-\pi, \pi]$  上的 Fourier 级数, 并证明:

$$1 = \frac{\sin(\pi\alpha)}{\pi} \left( \frac{1}{\alpha} + 2\alpha \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^m}{\alpha^2 - m^2} \right)$$

(2) 定义  $G = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln \cot t \, dt$ , 并利用 (1) 中结论, 证明:

$$\textcircled{1} e^{\frac{2G}{\pi} - \frac{1}{2}} = \lim_{m \rightarrow \infty} \prod_{n=1}^{2m} \left( 1 - \frac{2}{2n+1} \right)^{n(-1)^n};$$

$$\textcircled{2} e^{\frac{4G}{\pi}} = \lim_{m \rightarrow \infty} \left[ \frac{3^3 \cdot 7^7 \cdot 11^{11} \cdots (4m-1)^{4m-1}}{1^1 \cdot 5^5 \cdot 9^9 \cdots (4m-3)^{4m-3}} \right]^2 \frac{(4m+3)^{2m+1}}{(4m+1)^{6m+1}}.$$

注: 如需要交换积分和次序, 默认一致收敛, 不要求证明。

高等数学贴吧吧主.Renascence\_5 供题

# 第一届“八一杯”大学生网络数学竞赛试题

数学组 A 类，满分：100 分，考试时间：150 分钟

比赛时间：2019 年 8 月 1 日上午 9 点至 2019 年 8 月 1 号晚上 8 点



竞赛官方微信公众号：八一考研数学竞赛

题号	一	二	三	四	五	六	总分
满分	15	15	20	15	15	20	100
得分							

- 注意事项：1. 试题解答请在规定时间内发送到邮箱 [hoganbin1995@outlook.com](mailto:hoganbin1995@outlook.com)，逾期将取消参赛资格，严格遵守比赛纪律，勿翻阅其他参考资料或在各数学群内讨论此份试题；
2. 要求解答字迹清楚，推荐采用 PDF 格式提交；
3. 文件命名：参赛科目 + 昵称 (或姓名) + 学校.

1. (本题 15 分) 从点  $P(1, 1, \frac{\sqrt{2}}{2})$  处引椭球面  $C: 2x^2 + 3y^2 + 4z^2 = 1$  的切线，切点的轨迹在平面  $yOz$  上的投影为  $\Gamma$ ，试证明  $\Gamma$  为椭圆，并求  $\Gamma$  的中心，主方向与面积.

毛毛 供题

2. (本题 15 分) 证明：对于  $n$  阶实方阵  $A, B$ ，若  $E - A^T A$  与  $E - B^T B$  是半正定矩阵，则

$$\left| E - A^T B \right|^2 \geq \left| E - A^T A \right| \left| E - B^T B \right|$$

武汉大学. 尚镇冰 供题

3. (本题 20 分) 设  $S$  为  $R_n$  的一个非空闭凸集,  $A$  为  $\mathbb{R}$  上  $n \times n$  的矩阵.

(1) 证明: 对  $\forall y \notin S$ , 存在唯一的一个  $\bar{x}$ , 使得  $\|y - \bar{x}\| = \inf_{x \in S} \|y - x\|$

(2) 证明: 对于  $y \notin S$ , 存在非零向量  $p$  以及  $\varepsilon > 0$ , 使得对  $\forall x \in S$ , 有  $p^T y \geq \varepsilon + p^T x$

(3) 证明:  $Ax < 0$  有解的充分必要条件是存在非零向量  $p \geq 0$  使得  $A^T p = 0$ .

武汉大学. 王鹏辉 供题

4. (本题 15 分) 已知复系数多项式

$$f(x) = x^k + c_1 x^{k-1} + c_2 x^{k-2} + \cdots + c_{k-1} x + c_k$$

证明: 对多项式  $f(x)$  的任意一根  $z$ , 都有

$$|z| \leq 2 \cdot \max \left\{ |c_1|, \sqrt{|c_2|}, \sqrt[3]{|c_3|}, \cdots, \sqrt[k]{|c_k|} \right\}$$

本本蛋蛋 供题

5. (本题 15 分) 设  $f(x) \in C^1[0, +\infty)$ , 且  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ , 已知积分  $I = \int_0^{+\infty} t^{a+1} f'(t) dt$  对某个常数  $a > -1$  收敛, 证明: 积分  $\int_0^{+\infty} t^a f(t) dt$  收敛, 并且等于  $-\frac{I}{a+1}$ .

中国科学技术大学. 向禹 供题

6. (本题 20 分) 设  $b_n$  表示正整数  $n$  的最大素因子, 以及单调递增的正实数列  $\{a_n\}$ . 满足无穷级数  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{na_n}$  收敛, 问无穷级数  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{na_{b_n}}$  是否也是收敛的? 并证明你的结论.

山大附中. 王永喜 供题



# 第一届“八一杯”大学生网络数学竞赛试题

数学组 B 类，满分：100 分，考试时间：150 分钟

比赛时间：2019 年 8 月 1 日上午 9 点至 2019 年 8 月 1 号晚上 8 点



竞赛官方微信公众号：八一考研数学竞赛

题号	一	二	三	四	五	六	总分
满分	15	15	20	15	15	20	100
得分							

- 注意事项：**
1. 试题解答请在规定时间内发送到邮箱 [hoganbin1995@outlook.com](mailto:hoganbin1995@outlook.com)，逾期将取消参赛资格，严格遵守比赛纪律，勿翻阅其他参考资料或在各数学群内讨论此份试题；
  2. 要求解答字迹清楚，推荐采用 PDF 格式提交；
  3. 文件命名：参赛科目 + 昵称 (或姓名) + 学校。

1. (本题 15 分)  $P$  为直线  $l: x - 2 = \frac{y - 3}{2} = \frac{z - 1}{3}$  上一点，从  $P$  点引椭球面  $C: 2x^2 + 3y^2 + 4z^2 = 1$  的切线，切点构成的曲线  $\Gamma$  与  $l$  平行，求  $P$  点的坐标。

毛毛 供题

2. (本题 15 分) 设  $A$  是  $m \times n$ ， $A^H A$  的  $n$  个特征值为  $\sigma_1^2 \geq \sigma_2^2 \geq \dots \geq \sigma_n^2$ . 证明：

$$\sigma_k^2 = \max_{C_k} \min_{x \in C_k, x \neq 0} \frac{x^H A^H A x}{x^H x}$$

其中  $C_k$  为  $n$  维线性空间  $C^n$  的任意  $k$  维子空间， $A^H$  为  $A$  的共轭转置矩阵。

武汉大学. 王鹏辉 供题

3. (本题 20 分) 设矩阵  $A = \begin{pmatrix} Q_1 & Q_2 \\ Q_3 & Q_4 \end{pmatrix} \in M_{2n \times 2n}(\mathbb{R})$  满足

$$A^T A = I_{2n}, A^T \begin{pmatrix} 0 & I_n \\ -I_n & 0 \end{pmatrix} A = \begin{pmatrix} 0 & I_n \\ -I_n & 0 \end{pmatrix}$$

其中  $Q_1, Q_2, Q_3, Q_4 \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$ . 证明:  $B = Q_1 + iQ_2$  是酉矩阵 (即  $\overline{B}^T B = I_n$ )

武汉大学. 尚镇冰 供题

4. (本题 15 分) 设  $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n e^{-n} \cos nx$ , 求证

(1)  $\max_{0 \leq x \leq 2\pi} |f(x)| \geq \frac{2}{e}$ ;

(2)  $f'(x)$  存在;

(3)  $\max_{0 \leq x \leq 2\pi} |f'(x)| \geq \frac{2}{\pi e}$

高等数学贴吧小吧主.9899 供题

5. (本题 15 分) 已知正项级数  $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{a_k}$  收敛, 常数  $p > 0$ , 证明: 级数  $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^{p+1}}{a_1 + 2^p a_2 + \cdots + k^p a_k}$  也收敛.

中国科学技术大学. 向禹 供题

6. (本题 20 分)

(1) 若  $r \in (-1, 1)$ , 对  $\forall \theta \in \mathbb{R}$ , 试证:

$$\frac{1-r^2}{1-2r \cos \theta + r^2} = 1 + 2 \sum_{k=1}^{+\infty} r^k \cos k\theta$$

(2) 设  $x \in \mathbb{R}$  使得  $f(x^+) = f(x^-)$  存在, 试证:

$$\lim_{r \rightarrow 1^-} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{1-r^2}{1-2r \cos(x-t) + r^2} f(t) dt = \frac{1}{2} [f(x^+) + f(x^-)]$$

若  $f$  在  $\mathbb{R}$  上连续, 试证此收敛关于  $x \in \mathbb{R}$  是一致的.

微信公众号管理员. 八一 供题