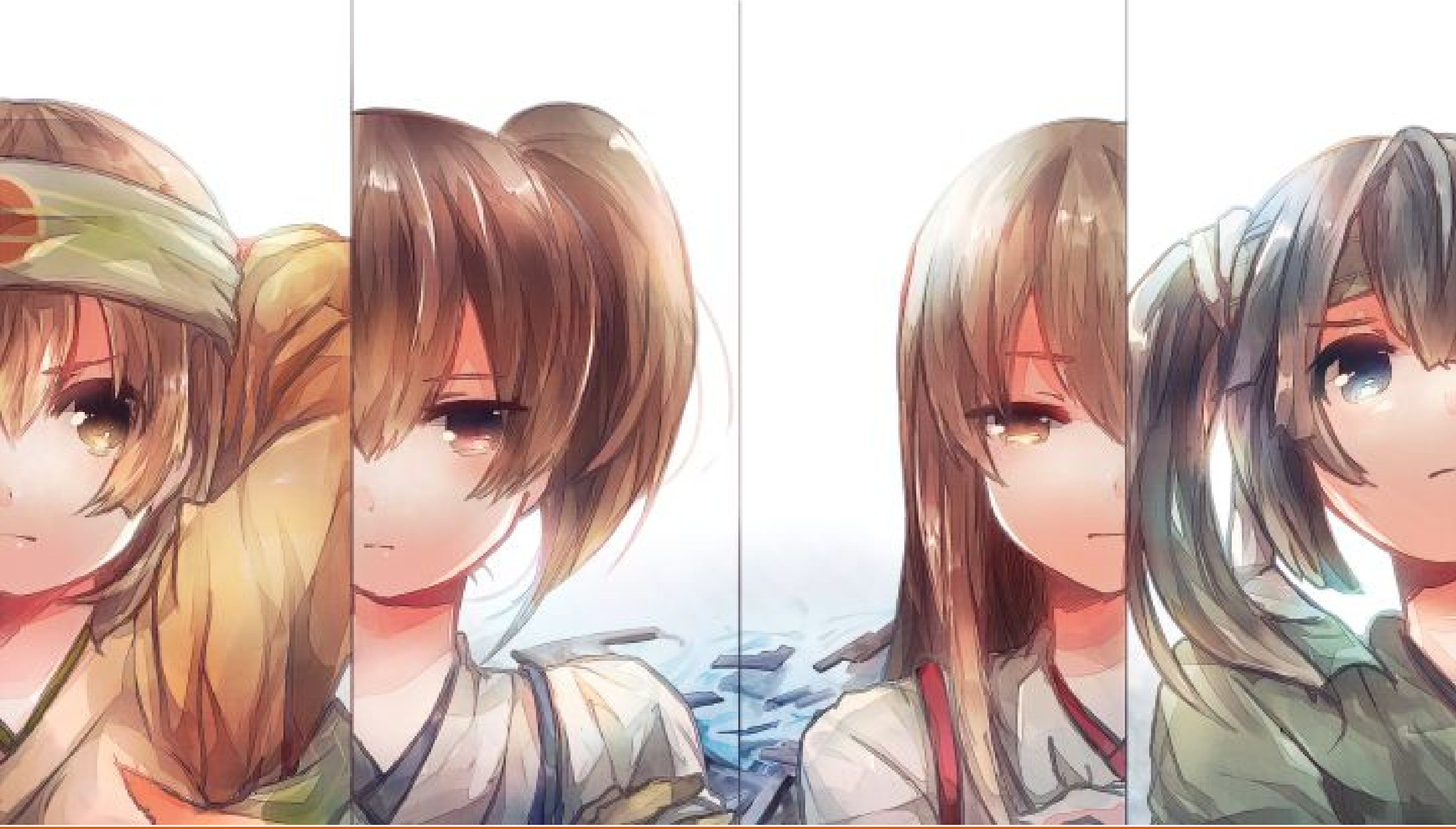

考研数学竞赛经典例选

作者：hoganbin

Email：hoganbin1995@outlook.com

微信公众号：八一考研数学竞赛

更新：April 18, 2019

版本：3.06

最好的解决方法是自己给出。

第 1 章 数学竞赛经典题目

1.1 第一部分

1. 计算无穷积分：
   (a). $I=\int_0^{+\infty}\frac{1-\cos x}{x}e^{-x}\mathrm{d}x$
   (b). $I=\int_0^{+\infty}\frac{\ln x}{x^2+3x+9}\mathrm{d}x$
2. 设 $f(x)$ 是二次可微函数，满足 $f(0)=1, f'(0)=1$. 且对于任意的 $x\geq 0$ 有 $f''(x)-5f'(x)+6f(x)\geq 0$. 证明：对 $\forall x\geq 0$ 时，有 $f(x)\geq 3e^{2x}-2e^{3x}$.
3. 设函数 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上连续且严格单调递增，$f(x)=0, a>0, b>0$，证明：
$$ab\leq\int_0^a f(x)\mathrm{d}x+\int_0^b g(y)\mathrm{d}y$$
   其中 $g(y)$ 是 $f(x)$ 的反函数.
4. 已知 $f(t)$ 在区间 $[a,x]$ 上连续，在点 a 处可导且 $f'(a)\neq 0$. 设 $g(x)$ 在区间 $[a,x]$ 连续且不变号，并且 $g(a)\neq 0$，若 $\int_a^x f(t)g(t)\mathrm{d}t=f(\xi)\int_a^x g(t)\mathrm{d}t, \xi\in(a,b)$，则 $\lim\limits_{x\to a}\frac{\xi-a}{x-a}$.
5. 已知函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上三阶可导，且 $f(0)=-1, f(1)=0, f'(0)=0$. 证明：对于任意的 $x\in(0,1)$，存在 $\xi\in(0,1)$，使得
$$f(x)=-1+x^2+\frac{x^2(x-1)}{6}f'''(\xi)$$
6. 计算二重积分
$$I=\iint_D\sqrt{\frac{2x-x^2-y^2}{x^2+y^2-2x+2}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$
   其中 D 为 $(x-1)^2+y^2=1(y\geq 0)$，$y\leq x-1$ 与 $y=0$ 围成的区域.
7. 设 $I_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x\mathrm{d}x$，证明：
   (a). $\lim\limits_{n\to\infty}I_n=0$.
   (b). 讨论 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}I_n^a$ 的敛散性.
8. 求和 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\right)\frac{1}{2^n}$

1.2 第二部分

1. 已知 $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} \mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}$，计算 $I = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-x}\sin x}{x} \mathrm{d}x$.
2. 计算积分：$\int_0^{\pi} x\ln(\sin x)\mathrm{d}x$
3. 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 连续，满足 $f(0)=f(1)=0$，若 $f''(x)$ 在 $(0,1)$ 内存在，且满足 $f''(x)+2f'(x)+f(x) \geq 0$，证明：$\forall x \in [0,1]$，有 $f(x) > 0$.
4. 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 连续，且 $f(x) \geq 0, f^2(x) \leq 1 + 2\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$，对 $x \in [0,1]$，证明：$f(x) \leq 1+x$.
5. 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 连续，求证：
$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 \frac{n}{n^2x^2+1} f(x)\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2} f(0)$$
6. 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 连续，求证：
$$\lim_{n\to\infty} n\int_0^1 x^n f(x)\mathrm{d}x$$
7. 设函数 $g(x)$ 的一阶导数 $g'(x)$ 连续，且 $g(0)=0$，对任意的 x 有 $|g'(x)| \leq g(x)|$，试证：$g(x) \equiv 0$
8. 证明：积分方程 $f(x,y) = 1 + \int_0^x \mathrm{d}u \int_0^y f(u,v)\mathrm{d}v, 0 \leq x \leq 1, \quad 0 \leq y \leq 1$ 至多有一个连续解.
9. 计算 $I = \iint_D \sin\sqrt{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 $D = \left\{(x,y)\middle|\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2} \leq \pi^2\right\}$
10. 数列 a_n 为正数列，且 $\lim\limits_{n\to\infty} n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right) = \lambda$，证明：
    (a). 若 $\lambda < 1$，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散.
    (b). 若 $\lambda > 1$，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛.
11. 设 $f(r,t) = \oint\limits_{x^2+xy+y^2=r^2} \frac{y\mathrm{d}x - x\mathrm{d}y}{(x^2+y^2)^t}$，求极限 $\lim\limits_{r\to\infty} f(r,t)$.
12. 求 $\lim\limits_{r\to\infty} \oint\limits_{x^2+y^2=r^2} \frac{y\mathrm{d}x - x\mathrm{d}y}{(x^2+xy+y^2)^2}$
13. 设数列 $\{x_n\}$ 满足 $|x_{n+1}-x_n| \leq 2^{-n} (n=1,2,\cdots)$，证明：$\lim\limits_{n\to+\infty} x_n$ 存在.
14. 证明：级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sum\limits_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^2n+2mn+mn^2}$ 收敛，并求和.
15. 设数列 $\{a_n\}$ 使得数列 $b_n = pa_n + a_{n+1} (n \in \mathrm{N}^+)$ 收敛，若 $|p|<1$，证明：$\{a_n\}$ 收敛.

16. 设 $f(x)$ 在 R 上连续，且 $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 存在，证明：

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f\left(x-\frac{1}{x}\right)\mathrm{d}x=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$$

17. 设 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上连续，证明：

$$\int_{1}^{e^2} f\left(\frac{e}{x}+\frac{x}{e}\right)\frac{\ln x}{x}\mathrm{d}x=\int_{1}^{e^2} f\left(\frac{e}{x}+\frac{x}{e}\right)\frac{1}{x}\mathrm{d}x$$

18. 设 $x_1=b, x_{n+1}=x_n^2+(1-2a)x_n+a^2(n=1,2,3\cdots)$，求 a 与 b 满足的条件，使得 $\{x_n\}$ 收敛，并求 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$.
19. 设 $x_{n+1}=x_n(2-Ax_n),(n=0,1,2\cdots)$，其中 $A>0$. 确定初始值 x_0，使得 $\{x_n\}$ 收敛.
20. 对于实数对 (x,y)，定义数列 $\{a_n\}$ 且$a_0=x, a_{n+1}=\dfrac{a_n^2+y^2}{2}(n=0,1,2\cdots)$. 设区域 $D=(x,y)$ 使得数列 a_n 收敛，求 D 的面积.
21. 对于 m 个正数 $a_1,a_2,a_3\ldots a_m$，证明：

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\sqrt[n]{a_1}+\sqrt[n]{a_2}+\ldots+\sqrt[n]{a_m}}{m}\right)^n=\sqrt[m]{a_1a_2\ldots a_m}$$

22. 对于 m 个正数 $a_1,a_2,a_3\ldots a_m$，证明：

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{a_1^n+a_2^n+a_3^n+\ldots+a_m^n}{m}\right)^{\frac{1}{n}}=\max\{a_i\}\qquad(i=1,2,3\ldots m)$$

23. 设函数 $f(x)$ 是区间 $[a,b]$ 上的正值连续函数，试求：

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{b-a}\int_a^b f^n(x)\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{n}}$$

24. 设函数 $f(x,y)$ 是区间 $D=[a,b]\times[c,d]$ 上的正值连续函数，试求：

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{(b-a)(d-c)}\iint_D f^n(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\right)^{\frac{1}{n}}$$