绝密★启用前　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　试卷类型：B

2019年普通高等院校招生全国统一考试

理科数学

本试卷共23小题，共150分，共5页．考试结束后，将本试卷和答题卡一并收回．

注意事项： 1. 答题前，考生先将自己的姓名、准考证号填写在答题卡上．用2B铅笔将试卷类型（B）填涂在答题卡相应的位置上．将条形码横贴在答题卡右上角“条形码粘贴处”．

2. 作答选择题时，选出每小题答案后，用2B铅笔在答题卡上对应题目选项的答案信息点涂黑；如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其他答案．答案不能答在试卷上．

3. 非选择题必须用黑色字迹的钢笔或签字笔作答，答案必须写在答题卡各题目指定区域内相应位置上；如需改动，先划掉原来的答案，然后再写上新答案；不准使用铅笔和涂改液．不按以上要求作答无效．

4. 考生必须保证答题卡的整洁．考生结束后，将试卷和答题卡一并交回．

一、选择题：本大题共12小题，每小题5分，共60分．在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的．

1. 已知集合 $M=\{x\,|\,-4<x<2\}$，　$N=\{x\,|\,x^2-x-6<0\}$，则 $M\cap N=$

A. $\{x\,|\,-4<x<3\}$　　B. $\{x\,|\,-4<x<-2\}$

C. $\{x\,|\,-2<x<2\}$　　D. $\{x\,|\,2<x<3\}$

2. 设复数 z 满足 $|z-\mathrm{i}|=1$，z 在复平面内对应的点为 (x,y)，则

A. $(x+1)^2+y^2=1$　　B. $(x-1)^2+y^2=1$

C. $x^2+(y-1)^2=1$　　D. $x^2+(y+1)^2=1$

3. 已知 $a=\log_2 0.2$，$b=2^{0.2}$，$c=0.2^{0.3}$，则

A. $a<b<c$　　B. $a<c<b$

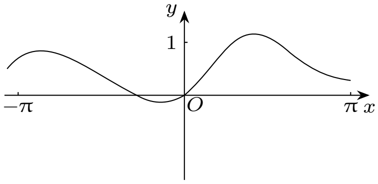
C. $c<a<b$　　D. $b<c<a$

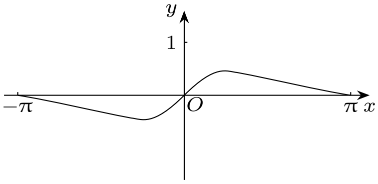
4. 古希腊时期，人们认为最美人体的头顶至肚脐的长度与肚脐至足底的长度之比是 $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$ $\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\approx 0.618\text{，称为黄金分割比例}\right)$，著名的“断臂维纳斯”便是如此．此外，最美人体的头顶至咽喉的长度与咽喉至肚脐的长度之比也是 $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$．若某人满足上述两个黄金分割比例，且腿长为 105 cm，头顶至脖子下端的长度为 26 cm，则其身高可能是

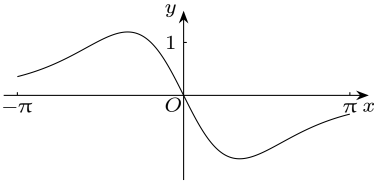
A. 165 cm　　B. 175 cm

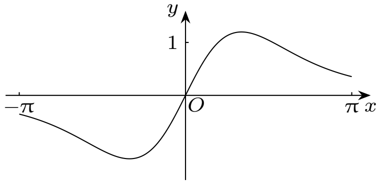
C. 185 cm　　D. 190 cm

5. 函数 $f(x)=\dfrac{\sin x+x}{\cos x+x^2}$ 在 $[-\pi,\pi]$ 的图像大致为

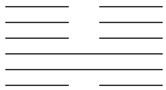
A. 

B. 

C. 

D. 

6. 我国古代典籍《周易》用“卦”描述万物的变化. 每一“重卦”由从下到上排列的 6 个爻组成，爻分为阳爻“——”和阴爻“– –”，右图就是一重卦. 在所有重卦中随机取一重卦，则该重封恰有 3 个阳爻的概率是

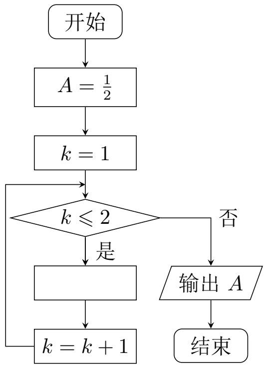


A. $\dfrac{5}{16}$　　B. $\dfrac{11}{32}$　　C. $\dfrac{21}{32}$　　D. $\dfrac{11}{16}$

7. 已知非零向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 满足 $|\boldsymbol{a}|=2|\boldsymbol{b}|$，且 $(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})\perp\boldsymbol{b}$，则 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角为

A. $\dfrac{\pi}{6}$　　B. $\dfrac{\pi}{3}$　　C. $\dfrac{2\pi}{3}$　　D. $\dfrac{5\pi}{6}$

8. 右图是求 $\dfrac{1}{2+\dfrac{1}{2+\dfrac{1}{2}}}$ 的程序框图，图中空白框中应填入



A. $A=\dfrac{1}{2+A}$

B. $A=2+\dfrac{1}{A}$

C. $A=\dfrac{1}{1+2A}$

D. $A=1+\dfrac{1}{2A}$

9. 记 S_n 为等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和. 已知 $S_4=0,a_5=5$ 则

A. $a_n=2n-5$　　B. $a_n=3n-10$

C. $S_n=2n^2-8n$　　D. $S_n=\dfrac{1}{2}n^2-2n$

10. 已知椭圆 C 的焦点为 $F_1(-1,0)$，$F_2(1,0)$，过 F_2 的直线与 C 交于 A,B 两点. 若 $|AF_2|=2|F_2B|$，$|AB|=|BF_1|$，则 C 的方程为

A. $\dfrac{x^2}{2}+y^2=1$　　B. $\dfrac{x^2}{3}+\dfrac{y^2}{2}=1$

C. $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1$　　D. $\dfrac{x^2}{5}+\dfrac{y^2}{4}=1$

11. 关于函数 $f(x)=\sin|x|+|\sin x|$ 有下述四个结论：

① $f(x)$ 为偶函数　　② $f(x)$ 在区间 $\left(\dfrac{\pi}{2},\pi\right)$ 单调递增

③ $f(x)$ 在 $[-\pi,\pi]$ 有 4 个零点　　　　　　④ $f(x)$ 的最大值为 2

其中所有正确结论的编号是

A. ①②④　　　　B. ②④　　　　C. ①④　　　　D. ①③

12. 已知三棱锥 $P-ABC$ 的四个顶点在球 O 的球面上，$PA=PB=PC$，$\triangle ABC$ 是边长为 2 的正三角形，E,F 分别是 PA,AB 的中点，$\angle CEF=90^\circ$，则球 O 的体积为

A. $8\sqrt{6}\pi$　　　　B. $4\sqrt{6}\pi$　　　　C. $2\sqrt{6}\pi$　　　　D. $\sqrt{6}\pi$

二、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分.

13. 曲线 $y=3(x^2+x)\mathrm{e}^x$ 在点 $(0,0)$ 处的切线方程为______.

14. 记 S_n 为等比数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和. 若 $a_1=\frac{1}{3}$，$a_4^2=a_6$，则 $S_5=$______.

15. 甲、乙两队进行篮球决赛，采取七场四胜制（当一队赢得四场胜利时，该队获胜，决赛结束）. 根据前期比赛成绩，甲队的主客场安排依次为“主主客客主客主”. 设甲队主场取胜的概率为 0.6，客场取胜的概率为 0.5，且各场比赛结果相互独立，则甲队以 4∶1 获胜的概率是______.

16. 已知双曲线 $C:\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 的左、右焦点分别为 F_1，F_2，过 F_1 的直线与 C 的两条渐近线分别交于 A,B 两点. 若 $\overrightarrow{F_1A}=\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{F_1B}\cdot\overrightarrow{F_2B}=0$，则 C 的离心率为______.

三、解答题：共 70 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤. 第 17～21 题为必考题，每个试题考生都必须作答. 第 22、23 题为选考题，考生根据要求作答.

（一）必考题：共 60 分.

17.（12 分）

$\triangle ABC$ 的内角 A,B,C 的对边分别为 a,b,c. 设 $(\sin B-\sin C)^2=\sin^2 A-\sin B\sin C$.

（1）求 A；

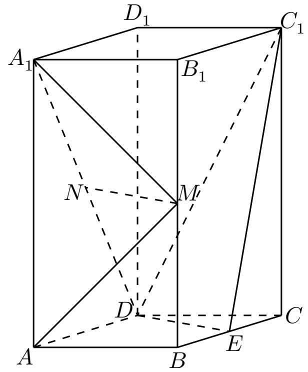
（2）若 $\sqrt{2}a+b=2c$，求 $\sin C$.

18.（12 分）

如图，直四棱柱 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的底面是菱形，$AA_1=4$，$AB=2$，$\angle BAD=60^\circ$，E,M,N 分别是 BC,BB_1,A_1D 的中点.

（1）证明：$MN\parallel$ 平面C_1DE；

（2）求二面角 $A-MA_1-N$ 的正弦值.



19.（12 分）

已知抛物线 $C:y^2=3x$ 的焦点为 F，斜率为 $\frac{3}{2}$ 的直线 l 与 C 的交点为 A,B，与 x 轴的交点为 P.

（1）若 $|AF|+|BF|=4$，求 l 的方程；

（2）若 $\overrightarrow{AP}=3\overrightarrow{PB}$，求 $|AB|$.

20.（12 分）

已知函数 $f(x)=\sin x-\ln(1+x)$，$f'(x)$ 为 $f(x)$ 的导数，证明：

（1）$f'(x)$ 在区间 $\left(-1,\frac{\pi}{2}\right)$ 存在唯一极大值点；

（2）$f(x)$ 有且仅有 2 个零点.

21.（12 分）

为治疗某种疾病，研制了甲、乙两种新药，希望知道哪种新药更有效，为此进行动物试验. 试验方案如下：每一轮选取两只白鼠对药效进行对比试验. 对于两只白鼠，随机选一只施以甲药，另一只施以乙药. 一轮的治疗结果得出后，再安排下一轮试验. 当其中一种药治愈的白鼠比另一种药治愈的白鼠多 4 只时，就停止试验，并认为治愈只数多的药更有效. 为了方便描述问题，约定：对于每轮试验，若施以甲药的白鼠治愈且施以乙药的白鼠未治愈则甲药得 1 分，乙药得 -1 分：若施以乙药的白鼠治愈且施以甲药的白鼠未治愈则乙药得 1 分，甲药得 -1 分；若都治愈或都未治愈则两种药均得 0 分. 甲、乙两种药的治愈率分别记为 α 和 β，一轮试验中甲药的得分记为 X.

（1）求 X 的分布列；

（2）若甲药、乙药在试验开始时都赋予 4 分，$p_i(i=0,1,\cdots,8)$ 表示“甲药的累计得分为 i 时，最终认为甲药比乙药更有效”的概率，则

$$p_0=0,p_8=1,p_i=ap_{i-1}+bp_i+cp_{i+1}(i=1,2,\cdots,7),$$

其中

$$a=P(X=-1),b=P(X=0),c=P(X=1).$$

假设 $\alpha=0.5,\beta=0.8$.

（i）证明：$\{p_{i+1}-p_i\}(i=0,1,2,\cdots,7)$ 为等比数列；

（ii）求 p_4，并根据 p_4 的值解释这种试验方案的合理性.

（二）选考题：共 **10** 分．请考生再第 **22**、**23** 题中任选一题作答．如果多做，则按所做的第一题计分．

22.［选修 4—4：坐标系与参数方程］（10 分）

在直角坐标系 xOy 中，曲线 C 的参数方程为 $\begin{cases} x=\dfrac{1-t^2}{1+t^2} \\ y=\dfrac{4t}{1+t^2} \end{cases}$（$t$ 为参数）．以坐标原点 O 为极点，x 轴的正半轴为极轴建立极坐标系，直线 l 的极坐标方程为 $2\rho\cos\theta+\sqrt{3}\rho\sin\theta+11=0$.

（1）求 C 和 l 的直角坐标方程；

（2）求 C 上的点到 l 距离的最小值．

23.［选修 4—5：不等式选讲］（10 分）

已知 a,b,c 为正数，且满足 $abc=1$．证明：

（1）$\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}\leqslant a^2+b^2+c^2$；

（2）$(a+b)^3+(b+c)^3+(c+a)^3\geqslant 24$.

录入：　江西　胡八一

绘图：　合肥　向禹

排版：　浙江　陈晓