2020 年数学分析与高等代数名校真题汇总

作者： 八一

2020 年 2 月 17 日

真题目录

前言

距离过去 20 年考研结束已经快两个半月多了，这里我排版了一份 20 年考研数学分析与高等代数各名校真题，给更多想报考名校的考生一份更踏实的复习，尤其通过今年的考题来揣摩下出题老师的命题趋势，这样对你要所报考院校有个更好的把握.

17 级的同学们开始陆续为 21 考研备战，**因疫情无情，“停课不停学”**，学生不得于在家复习，而在家里学习可能就不那么有自主性，包括你的自律有时也会跟不上，不知道如何计划，其实这种迷茫完全取决自己内心的想法，在没有校园生活的学习环境，你是不是又能坚持每日早起的生活，如果你是下定决心要考研，就已经早早地做好了考研计划，这里所用**数分教材**无非就是经典的华东师大，然后再选一本习题参考较多的裴礼文作为主教材，其次以徐森林、陈纪修、伍胜健、周民强、陈天权、谢惠民等数分讲义为辅助，**高代教材**这里主要参考石生明为主，其次包括张贤科与蓝以中和丘维声等人编著为辅。

下面真题主要包括以下名校：北京大学、中国科学院大学、北京师范大学、同济大学、兰州大学、浙江大学、哈尔滨工业大学、华东师范大学、上海交通大学、中国科学技术大学、武汉大学、南开大学、华南理工大学、天津大学、中国海洋大学、南京大学与中山大学，以及中山大学、大连理工大学、四川大学、电子科技大学、湖南大学、华中科技大学、厦门大学、吉林大学、重庆大学与东南大学缺高等代数真题，其它 8 所院校我还需要补充但缺少，分别是北京理工大学、中国人民大学、中国农业大学、北京航空航天大学、西安交通大学、西北工业大学、山东大学与东北大学，如你有我以上缺少的试题可发送至邮箱hoganbin1995@outlook.com.

最后致谢所有提供真题的朋友，包括汪铃、Xionger、腿毛哥、小李、biu、16 应化、学酥以及数学专业考研真题群 (639019816) 的群友分享，同时也感谢张祖锦老师为数学专业考研每天分享的真题集和学习讲义，扬哥的数学专业考研辅导，以及向老师分享有关考研当中的数学技巧，期待 21 考研的同学们能一站成功！

——作者：八一

第 1 章 北京大学

1.1 2020 年数学分析考研真题

考生须知：

1. 本试卷满分为 150 分，全部考试时间总计 180 分钟；
2. 所有答案必须写在答题纸上，写在试题纸上或草稿纸上一律无效。

---

1. (15 分) 定义在 $[a,b]$ 上的函数 $f(x)$ 满足：任取 $x_0 \in [a,b]$，均有 $\lim\limits_{x\to x_0}\sup f(x) \le f(x_0)$，试问 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上是否有最大值？若有给出证明；若没有，举出反例.
2. (15 分) 判断 $f(x)=\dfrac{x}{1+x\cos^2 x}$ 在 $[0,+\infty)$ 是否一致连续？并说明理由.
3. (15 分) 已知函数 $f(x)$ 在 $[1,+\infty)$ 上连续且满足：对任意的 $x,y\in[1,+\infty)$ 有
$$f(x+y)\le f(x)+f(y)$$
问：$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}$ 是否存在？若存在，给出证明；若不存在，举出反例.
4. (15 分) 已知函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续单调增加，且 $f(x)\ge 0$，记
$$s=\frac{\int_0^1 xf(x)\mathrm{d}x}{\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x}$$
(1). (7 分) 证明：$s\ge\dfrac{1}{2}$；

(2). (8 分) 比较 $\displaystyle\int_0^s f(x)\mathrm{d}x$ 与 $\displaystyle\int_s^1 f(x)\mathrm{d}x$ 的大小 (可以用物理或几何直觉).
5. (15 分) 根据 $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2}$，计算 $\displaystyle\int_0^{+\infty}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2\mathrm{d}x$，并说明计算依据.
6. (15 分) 在承认平面 Green 公式的前提下证明如下特殊情况下的 Stokes 公式
$$\oint_\Gamma R(x,y,z)\mathrm{d}z=\iint_\Sigma \frac{\partial R}{\partial y}\mathrm{d}y\mathrm{d}z-\frac{\partial R}{\partial x}\mathrm{d}z\mathrm{d}x$$
7. (20 分)

(1). (10 分) 设 $0<p<1$，求 $f(x)=\cos px$ 在 $[-\pi,\pi]$ 上的 Fourier 级数，并求出其和函数；

(2). (10 分) 证明余元公式

$$\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{-p}\mathrm{d}x = \frac{\pi}{\sin(p\pi)}$$

8. (20 分) 设 C_r 为半径为 r 的圆周，$f(x,y)$ 满足 $f(0,0)=0, \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=x^2+y^2, f(x,y)$ 是 $\mathbb{C}^2$ 的，计算

$$A(r)=\int_{C_r} f(x,y)\mathrm{d}S$$

9. (20 分) 设 $q_k \geq p_k > 0, q_{k+1}-q_k \geq p_k + p_{k+1}$ 且 $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k \ln p_k = +\infty$，记

$$\begin{aligned} T_{p_k,q_k}(x) \triangleq & \frac{\cos(q_k+p_k)x}{p_k}+\frac{\cos(q_k+p_k-1)x}{p_k-1}+\cdots+\frac{\cos(q_k+1)x}{1} \\ & -\frac{\cos(q_k-1)x}{1}-\frac{\cos(q_k-2)x}{2}-\cdots-\frac{\cos(q_k-p_k)x}{p_k} \end{aligned}$$

设 $a_k \geq 0, \sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k < +\infty, f(x)=\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k T_{p_k,q_k}(x)$.

(1). 证明：$f(x)$ 是在 $\mathbb{R}$ 上连续，且以 2π 为周期的周期函数.

(2). 判断并证明：$f(x)$ 的 Fourier 级数在 $x=0$ 处的收敛性.

1.2 2020 年高等代数考研真题

考生须知：

1. 本试卷满分为 150 分，全部考试时间总计 180 分钟；
2. 所有答案必须写在答题纸上，写在试题纸上或草稿纸上一律无效。

---

1. (15 分) 设 $V_0=\{0\}, V_1, V_2, \cdots, V_n=\{0\}$ 是 $n+1$ 有限维线性空间，定义线性变换 $\varphi_i: V_i \to V_{i+1}, i=1,2,\cdots,n-1$，若对 $i=0,1,2,\cdots,n-1$ 均有 $\mathrm{Ker}\varphi_{i+1}=\mathrm{Im}\varphi_i$ 中，证明：

$$\sum_{i=0}^{n}(-1)^i \mathrm{V_i}=0$$

2. (15 分) 设 $c_0, c_1, \cdots, c_{k+1}$ 是 $k+1$ 个复数，证明：存在唯一一个次数不超过 k 的复系数多项式函数 $p(x)$ 使得 $p(0)=c_0, p(1)=c_1, \cdots, p(k)=c_k$，且这样的多项式是唯一的.
3. (20 分) 设 A 是秩为 r 的实对称矩阵，证明：必存在一个非零的 r 阶主子式使得它的行列式非零，并且任意一个非零的 r 阶主子式符号相同.

4. (20 分) 设 n 阶方阵 $A=(a_{ij})_{n\times n}$ 可相似对角化，它的特征值为 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$，每个特征值 λ_i 的特征子空间都由一族特征向量 $\alpha_{ij_1},\cdots,\alpha_{ij_n}$ 张成，设 $A^*=(A_{ij})_{n\times n}$ 是 a_{ij} 对应的代数余子式，求 A^* 的特征值和特征向量.

5. (15 分) 设 φ 是一个线性变换，$\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_k$ 是 φ 的特征值，证明：φ 可对角化的充分必要条件是对 φ 的每一个特征值入 λ，均有

$$\dim(\operatorname{Im}(\lambda id-\varphi))=\dim\left(\operatorname{Im}(\lambda id-\varphi)^2\right)$$

其中 id 为恒等变换.

6. (15 分) 设 n 是欧氏空间 V 中的单位向量，定义镜像变换 $\sigma:\sigma(\alpha)=\alpha-2(\alpha,\eta)\eta$，其中 $(-,-)$ 表示内积.

(1). 证明：σ 为正交变换;

(2). 证明：V 的任意正交变换都可以表示成若干镜像变换的乘积.

7. (15 分) 已知向量了 $|\vec{u}|,|\vec{v}|,|\vec{w}|,$，或满足 $|\vec{u}|=|\vec{v}|=|\vec{w}|>0,\vec{u}\cdot\vec{v}=\vec{v}\cdot\vec{w}=\vec{w}\cdot\vec{u}$，若对任意非零向量 $|\vec{x}|$，均存在实数 a,b,c，使得 $\vec{x}\times\vec{u}=a\vec{u}+b\vec{v}+c\vec{w},\vec{x}\times\vec{v}=a\vec{v}+b\vec{w}+c\vec{u}$，证明：

$$\vec{x}\times\vec{w}=a\vec{w}+b\vec{u}+c\vec{v}$$

8. (20 分) 设平面直角坐标系下二次曲线的方程为

$$x^2+2y^2+6xy+8x+10y+6=0$$

(1). 证明：γ 是双曲线.

(2). 求的长半轴和短半轴的方程与长轴和短轴长，并且说明哪条与 γ 相交.

9. (20 分) 求椭圆 $x^2+8y^2+4xy+10x+12y+4=0$ 的内接三角形的面积的最大值.

第 2 章　中国科学院大学

2.1　2020 年数学分析考研真题

考生须知：

1. 本试卷满分为 150 分，全部考试时间总计 180 分钟；
2. 所有答案必须写在答题纸上，写在试题纸上或草稿纸上一律无效。

---

1. (15 分) 计算极限

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[5]{1+3x^4}-\sqrt{1-2x}}{\sqrt[3]{1+x}-\sqrt{1+x}}$$

2. (15 分) 设

$$x_0=\alpha,\quad x_1=\beta,\quad x_{n+1}=\frac{2}{3}x_n+\frac{1}{3}x_{n-1}\quad (n\geq 1)$$

证明：数列 $\{x_n\}$ 收敛，并求出极限值.

3. (15 分) 判断下列极限是否存在, 并说明理由:

$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\int_0^{\sin x}\sin\frac{1}{t}\cos t^2\mathrm{d}t$$

4. (15 分) 设函数 $f(x)$ 在区间 $[0,n]$ (n 是一个正整数) 上连续，并且 $f(0)=f(n)$. 证明: 存在点 $x_0\in[0,n-1]$，使得 $f(x_0=f(x_0+1))$.

5. (15 分)

(1). $I_1=\displaystyle\int_0^1\frac{x^b-x^a}{\ln x}\mathrm{d}x(a,b>0)$;

(2). $I_2=\displaystyle\int_0^1\frac{\ln(1+x)}{1+x^2}\mathrm{d}x$.

6. (15 分) 设 $\mathscr{D}$ 是 Oxy 平面上由曲线 $y=\sqrt{x}$ 和直线 $y=x$ 所围成的图形，求 $\mathscr{D}$ 绕直线 $y=x$ 旋转产生的旋转体体积.

7. (15 分) 求函数 $f(x,y,z)=\ln x+\ln y+3\ln z$ 在球面 $x^2+y^2+z^2=5R^2(x,y,z>0)$ 上的最大值.

8. (15 分) 证明：

$$\frac{\sqrt{3}}{2}\pi<\int_0^1\sqrt{\frac{x^2-x+1}{x-x^2}}\mathrm{d}x<\pi$$

9. (15 分) 讨论级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+(-1)^n}{n} x^n$ 的敛散性.

10. (15 分) 证明：

$$\left| \int_{100}^{200} \frac{x^3}{x^4+x-1} \mathrm{d}x - \ln 2 \right| < \frac{1}{3} \cdot 10^{-6}$$

2.2 2020 年高等代数考研真题

考生须知：

1. 本试卷满分为 150 分，全部考试时间总计 180 分钟；
2. 所有答案必须写在答题纸上，写在试题纸上或草稿纸上一律无效。

---

1. (20 分) 若整系数多项式 $f(x)$ 有根 $\frac{p}{q}$，其中 p, q 为互素的整数，证明：

(1). $q-p|f(1), q+p|f(-1)$.

(2). 对任意整数 m，有 $(mq-p)|f(m)$.

2. (18 分) 记 $|M|$ 为矩阵 M 的行列式，证明下列结论：

(1). 已知 A, B 为实 n 阶方阵，证明

$$\begin{vmatrix} A & B \\ -B & A \end{vmatrix} = |A+\sqrt{-1}B| \cdot |A-\sqrt{-1}B|$$

(2). 设 A 是 $m \times n$ 矩阵，B 是 $n \times n$ 矩阵，I_k 表示 k 阶单位矩阵，则

$$\lambda^n |\lambda I_m - AB| = \lambda^m |\lambda I_n - BA|$$

其中 λ 是复数.

3. (18 分) 已知 n 阶方阵 A 满足 $A^2 = I_n$，试问：

$$r(I_n+A) + r(I_n-A) = ?$$

并证明结论.

4. (18 分) 设 A 是 n 阶实对称正定矩阵，B 是 n 阶实对称半正定矩阵.

(1). 证明：$|A+B| \geq |A| + |B|$

(2). 当 $n \geq 2$ 时，试问：在什么条件下有 $|A+B| > |A| + |B|$，并证明.

5. (18 分) 设 n 阶复方阵 A 的全部特征值为 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$，求 A 的伴随矩阵 A^* 的全部特征值.

6. (18 分) 已知实对称矩阵

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 2 & 5 & -4 \\ -2 & -4 & 5 \end{pmatrix}$$

(1). 求正交矩阵 Q，使得 $Q^{-1}AQ$ 为对角阵;

(2). 求解矩阵方程 $X^2=A$.

7. (18 分) 设 λ 是非零复数，k 是正整数，$J_n(\lambda)$ 表示特征值为 λ 的 n 阶若尔当块.

(1). 求 $(J_n(\lambda))^k$ 的若当标准型;

(2). 证明：$J_n(\lambda)$ 有 k 次方根，即存在 n 阶复方阵 B 使得 $B^k=J_n(\lambda)$;

(3). 证明：任意 n 阶可逆复方阵 A 都有 k 次方根.

8. (20 分) n 阶实方阵 P 称为正交矩阵，如果 $PP'=I_n$；n 阶实方阵 R 称为反射矩阵，如果 R 正交相似于对角 $\operatorname{diag}(-1,1,\cdots,1)$，证明：每个二阶正交矩阵都能写成反射矩阵的乘积.

9. (20 分) 设 $\mathbb{R}[x]_n$ 表示实数域 $\mathbb{R}$ 上所有次数小于 $n(>1)$ 的多项式之集，它是实数域上 n 维线性空间，导算子 $\mathscr{D}:\mathscr{D}f(x)=f'(x),\forall f(x)\in\mathbb{R}[x]_n$ 是 $\mathbb{R}[x]_n$ 上的线性变换.

(1). 对于任意实数 a，证明：平移算子 $\mathscr{S}_af(x)=f(x+a),\forall f(x)\in\mathbb{R}[x]_n$ 是 $\mathbb{R}[x]_n$ 上的线性变换，且存在一个多项式 $g(x)\in\mathbb{R}[x]_n$ 使得 $\mathscr{S}_a=g(\mathscr{D})$;

(2). 分别求出 $\mathscr{S}_a,\mathscr{D}$ 在基 $1,x,\dfrac{x^2}{2!},\cdots,\dfrac{x^{n-1}}{(n-1)!}$ 下的矩阵.

第 3 章　北京师范大学

3.1　2020 年数学分析真题

考生须知：

1. 本试卷满分为 150 分，全部考试时间总计 180 分钟；
2. 所有答案必须写在答题纸上，写在试题纸上或草稿纸上一律无效。

---

1. 计算极限
$$\lim_{x\to+\infty} x^3\left(\sqrt[3]{\frac{x^3+x}{x^6+x^5+1}}-\sin\frac{1}{x}\right)$$

2. 证明级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ 与 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} 2^{n-1}a_{2^n}$ 同敛散.

3. 证明 $f(x)=\sqrt{x}\ln x$ 在 $(0,+\infty)$ 上一致连续.

4. 证明曲面方程 $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}+z^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}$ 的切平面在各坐标轴上的截距是常数.

5. 计算三重积分
$$\iiint_{\Omega}\left|x^2+y^2-1\right|\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$
其中 Ω 是 $x^2+y^2=2z$ 与 $z=2$ 所围成的区域.

6. 计算含参积分
$$\int_0^{+\infty}\frac{\cos bx-\cos ax}{x}\mathrm{d}x$$
其中 $b>a>0$ 为常数.

7. 若 $\overrightarrow{A}$ 表示区域 A 的闭包，$\overrightarrow{A}$ 有界，且 $f(x)$ 在 $\overrightarrow{A}$ 上连续，在 A 上可导，对 $\forall x\in\vec{A}\setminus A$ 有 $f(x)=0$，试证：存在 $\theta\in A$ 使得 $f'(\theta)=0$.

8. 若对 $\forall x_0\in[a,b]$，且 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 存在且有限，试证：f 在 $[a,b]$ 上至多有可数多个间断点，并且在 $[a,b]$ 上黎曼可积.

9. 若函数 $f(x)=\dfrac{\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{-x}}{\mathrm{e}^{\pi}+\mathrm{e}^{\pi}}$

   (1). 计算 $f(x)$ 在 $[-\pi,\pi]$ 上的 Fourier 级数；

   (2). 计算级数 (具体记不清，是利用第 (1) 问级数求 $f(\pi)$ 的值).

3.2 2019 年高等代数真题

考生须知：

1. 本试卷满分为 150 分，全部考试时间总计 180 分钟；
2. 所有答案必须写在答题纸上，写在试题纸上或草稿纸上一律无效。

解析几何

1. 已知点在直线上的垂足，求坐标和线段的长度.
2. 将直线绕轴旋转，求这个旋转曲面的方程，并就可能的值讨论这是什么曲面.
3. 求经过直线的直圆柱面方程.
4. 已知二次曲面的方程，判断曲面类型并求对称平面的方程.

高等代数

1. 若 f 是域 $\mathbb{F}$ 上的多项式，对 $\forall x$ 有 $f(x)=f(x+a)$，其中 a 为常数且不为 0，试证：$f(x)$ 是常数多项式.
2. 若 A 是 $m\times n$ 矩阵，B 是 m 维列向量.

   (1). $\text{rank}(A^TA)$=$\text{rank}(A)$

   (2). 形如 $A^TAX=A^TB$ 的方程一定有解.
3. 若 A,B 均为 n 阶方阵，试证：$(AB)^*=B^*A^*$.
4. 已知实对称矩阵 A，且 $|A|<0$，证明：$\exists x$，有 $x^TAx<0$
5. 设 σ 有限维向量空间上的线性变换，证明：σ 是同构映射，当且仅当是单射与满射.

第 4 章 同济大学

4.1 2020 年数学分析考研真题

考生须知：

1. 本试卷满分为 150 分，全部考试时间总计 180 分钟；
2. 所有答案必须写在答题纸上，写在试题纸上或草稿纸上一律无效。

---

1. (10 分) 设函数 $f(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上连续且 $f(0)=1$，计算

$$\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^{x^2}\left(x-\sqrt{t}\right)f(t)\,\mathrm{d}t}{x^2\ln(1+x)}$$

2. (15 分) 用任一实数理论完备性定理证明闭区间连续函数的有界性定理.

3. (15 分) 已知 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上一致连续，且对每一个固定的 $x\in[0,+\infty)$ 成立 $\lim\limits_{n\to\infty}f(x+n)=0$，证明：当 $n\to\infty$ 时，函数列 $\{f(x+n)\}$ 在 $[0,1]$ 上一致收敛至 0.

4. (15 分) 确定实数 p 的取值范围，使平面无界区或 $D=(x,y|x\geq 1,0\leq y\leq \frac{1}{x^p})$ 绕 x 轴旋转一周所得旋转体的体积有限而其表面积无限，并计算该旋转体的体积.

5. (15 分) 曲面 $\Sigma:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$ 围成的有限区域记为 Ω，其中 $a,b,c>0$，记 Σ 在 $P_0(x_0,y_0,z_0)$ 在点处的切平面 $\prod_0$，计算积分

$$\int_\Omega f(p)\mathrm{d}V$$

其中 $f(p)$ 是 p 到平面 $\prod_0$ 距离的平方.

6. (20 分) 设函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上二阶可导，且 $f''(x)<0$，并满足 $f(0)=f(1)=0$，试证明：
   (1) 对任意整数 n，存在唯一 $x_n\in(0,1)$ 使得 $f'(x_n)=\dfrac{M}{n}$，其中 M 是 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上的最大值;
   (2) $\{x_n\}$ 收敛且 $\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)=M$

7. (20 分) 设 $a_0=1,a_{n+1}=a_n+\dfrac{1}{(n+1)!},n\in\mathbb{N}$，求幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx_n$ 的收敛域以及和函数.

8. (20 分) 说明方程 $2x^2+y^2+z+e^x=1$ 可确定唯一的具有连续偏导数，并且定义在全平面上的隐函数 $z=z(x,y)$，求 $z=z(x,y)$ 的极值.
9. (20 分) 指出函数

$$\phi(r)=\int_0^{+\infty} e^{-x^2}\cos(xr)\mathrm{d}x$$

定义域并用初等函数表示 $\phi(r)$.

4.2 2020 年高等代数考研真题

考生须知：

1. 本试卷满分为 150 分，全部考试时间总计 180 分钟；
2. 所有答案必须写在答题纸上，写在试题纸上或草稿纸上一律无效。

---

1. 已知 $\sqrt{2}-\sqrt{3}$ 是首项系数为 1 且不可约的有理多项式 $f(x)$ 的根，求 $f(x)$ 且证明 $f(x)$ 不可约.
2. 已知 $F(x)=x^n-1$，试证：

   (1). $F(x)$ 没有重根；

   (2). 已知 $w_1,w_2,\cdots,w_n$ 是 $F(x)$ 的根 $(w_i\neq 1, i=1,2,\cdots,n)$，证明：

$$(1-w_1)(1-w_2)\cdots(1-w_n)=n$$

3. 已知一个 $m\times n$ 的矩阵 $A=a(i,j)$，且 $a(i,j)=\min(i,j)$，求 $|A|$ 及 A^{-1}.
4. 已知 A 和 B 都是矩阵，证明 $r(A)=r(B)$ 的充要条件是存在可逆矩阵 C 使得 $A=ABC$.
5. 已知矩阵 $\lambda E-A$ 与以下矩阵等价

$$\begin{pmatrix} -\lambda-4 & & \\ & \lambda-2 & \\ & & \lambda-4 \end{pmatrix}$$

求 A 的特征多项式、最小多项式、初等因子以及不变因子.

6. 已知 $f(x_1,x_2,x_3)=2ax_1^2+2ax_2^2+2ax_3^3-2x_1x_2-2x_1x_3+2x_2x_3$

   (1). 求存在矩阵 Q 使得 $X=QY$ 的标准形；

   (2). 求 a 为何值时，$f(x_1,x_2,x_3)$ 的二次型矩阵的秩为 2.

第 5 章　兰州大学

5.1　2020 年数学分析考研真题

考生须知：

1. 本试卷满分为 150 分，全部考试时间总计 180 分钟；
2. 所有答案必须写在答题纸上，写在试题纸上或草稿纸上一律无效。

---

1. 一、计算题 (每小题 5 分，共 50 分)

(1). 对 $\forall\alpha \in \mathbb{R}$，试证：

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 (1+x^n)^\alpha \mathrm{d}x = 1$$

(2). 计算曲面积分

$$I = \iint_S \frac{\mathrm{d}\sigma}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}\sqrt{\frac{x^2}{a^4}+\frac{y^2}{b^4}+\frac{z^2}{c^4}}}$$

其中 S 为椭球面 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1\,(a,b,c>0)$.

(3). 计算曲线积分

$$\oint_L \left(y^2+z^2\right)\mathrm{d}x + \left(z^2+x^2\right)\mathrm{d}y + \left(x^2+y^2\right)\mathrm{d}z$$

其中 L 是 $x^2+y^2+z^2=2Rx$ 与 $x^2+y^2=2rx$ 的交线，且 $0<r<R$.

(4). 若 $F(x)=\displaystyle\int_0^x \sin\frac{1}{t}\mathrm{d}t$，求 $F'(0)$.

(5). 计算极限 $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\left(\int_0^x \mathrm{e}^{t^2}\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{x^2}}$

2. (10 分) 若 $f(x)$ 在 $[-1,1]$ 上连续且二次可微，且 $M=\sup\limits_{x\in[-1,1]}|f''(x)|$，$f(0)=0$，试证：

$$\left|\int_{-1}^1 f(x)\,\mathrm{d}x\right| \le \frac{M}{3}$$

3. 三.(15 分) 若 $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 收敛，且 $f(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上一致连续，证明：$\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=0$.

4. 四.(15 分) 若 $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 收敛，且 $f(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 单调，证明：$\lim\limits_{x\to\infty} xf(x)=0$.

5. 五.(15 分) 若连续函数列 $\{f_n(x)\}$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛于 $f(x)$，证明：$\{f_n(x)\}$ 在 $[a,b]$ 上等度连续.

6. 六.(15 分) 讨论

$$\int_0^{\infty}\frac{\sin\left(x+\frac{1}{x}\right)}{x^{\alpha}}\mathrm{d}x$$

收敛性与绝对收敛性.

7. 七.(15 分) 若 $f(x)$ 在 $[0,2\pi]$ 上连续可微，试证：

$$\lim_{n\to\infty} n\int_0^{2\pi} f(x)\sin nx\mathrm{d}x = f(0)-f(2\pi)$$

5.2 2020 年高等代数考研真题

考生须知：

1. 本试卷满分为 150 分，全部考试时间总计 180 分钟；
2. 所有答案必须写在答题纸上，写在试题纸上或草稿纸上一律无效。

---

1. (22 分)

(1). $f(x),g(x)\in P[x]$ 分别是首项系数为 1, 3 次多项式，且 $f(x)\neq g(x)$，证明：

$$x^4+x^2+1\mid f\left(x^3\right)+x^4g\left(x^3\right)$$

则 $(f(x),g(x))=(x-1)(x+1)$.

(2). 证明：实系数多项式 $f(x)$ 可以拆分为两个实系数多项式平方和的充要条件是，对 $\forall a\in\mathbb{R}$，有 $f(a)\geq 0$.

2. (18 分) 计算题

(1). (8 分)

$$D_n=\begin{vmatrix} x_1 & a & \cdots & a\\ b & x_2 & \cdots & a\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ b & b & \cdots & x_n\end{vmatrix}$$

(2). (10 分)

$$D_n=\begin{vmatrix}1+x_1 & 1+x_1^2 & \cdots & 1+x_1^n\\ 1+x_2 & 1+x_2^2 & \cdots & 1+x_2^n\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ 1+x_n & 1+x_n^2 & \cdots & 1+x_n^n\end{vmatrix}$$

3. (15 分)

(1). 若 n 阶实矩阵 A 满足 $\left|a_{ij}\right|>\sum\limits_{j\neq i}\left|a_{ij}\right|$，则 $|A|\neq 0$;

(2). 若 n 阶实矩阵 A 满足 $a_{ij}>\sum\limits_{j\neq i}\left|a_{ij}\right|$，则 $|A|>0$;

4. (23 分)

(1). (10 分) 设 A 为 $m\times n$ 矩阵，B 为 $n\times s$ 矩阵，C 为 $s\times t$ 矩阵，试证：

$$\operatorname{rank}(AB)+\operatorname{rank}(BC)-\operatorname{rank}(B)\leq\operatorname{rank}(ABC)$$

(2). (13 分) 证明：实系数矩阵特征值均为实根的充要条件是存在正交矩阵 T，使得 $T^{-1}AT$ 为三角阵.

5. 已知 P 为一数域，且 $f(x),g(x)\in P[x],(f(x),g(x))=1$，若 A 是 n 阶矩阵，$V=\{\alpha|f(A)g(A)\alpha\}$，$V_1=\{\alpha|f(A)\alpha\}$，$V_2=\{\alpha|g(A)\alpha\}$，证明：$V$ 是 V_1 与 V_2 的直和.

6. 若二次型 $f(x_1,\cdots,x_n)=l_1^2+\cdots+l_p^2-l_{p+1}^2-\cdots-l_{p+q}^2$，其中 l_i 是 $x_1,\cdots,x_n$ 的齐次线性函数，证明：二次型 $f(x_1,\cdots,x_n)$ 正惯性指数小于等于 p.

7. 设 σ 是 n 维几里得空间 V 上的一个对称变换，ε 是单位变换，σ 的特征多项式为

$$P(x)=(x-\lambda_1)^{r_1}(x-\lambda_2)^{r_2}\cdots(x-\lambda_m)^{r_m}$$

其中 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_m$ 互不相同，$r_i\geq 1,i=1,2,\cdots,m$，证明：对 $i=1,2,\cdots,m$，且 ε 表示 V 上的恒等变换.

$$\ker(\sigma-\lambda_i\varepsilon)=\ker(\sigma-\lambda_i\varepsilon)^{r_i}$$

8. 已知二次曲面方程 $x^2+ay^2+z^2+2bxy+2xz+2yz=4$，经正交变换后得到椭圆柱面方程 $y_1^2+4z_1^2=4$，求 a,b 的值以及所做的正交变换.

第 6 章 浙江大学

6.1 2020 年数学分析考研真题

考生须知：

1. 本试卷满分为 150 分，全部考试时间总计 180 分钟；
2. 所有答案必须写在答题纸上，写在试题纸上或草稿纸上一律无效。

---

1. 计算题

   (1). 求极限 $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\cos\frac{\pi\cos x}{2}}{\sin\sin^2 x}$;

   (2). 求广义积分 $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\sin^2 x}{x^2}\mathrm{d}x$;

   (3). 求和 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{3n-1}$

   (4). 求曲线积分
   $$\int_L\left(y^2-z^2\right)\mathrm{d}x+\left(x^2-z^2\right)\mathrm{d}y+\left(x^2-y^2\right)\mathrm{d}z$$
   其中 L 是 $\{(x,y,z)|0\le x\le a,0\le y\le a,0\le z\le a\}$ 与 $x+y+z=\dfrac{3a}{2}$ 的交线, 从 z 轴正向看为逆时针.

2. 利用闭区间套定理证明确界原理.
3. 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可导，$f(0)=0$，对 $\forall x\in[a,b]$，有 $|f(x)|\ge|f'(x)|$，试证：$f(x)\equiv 0,x\in[a,b]$.
4. 若在 $[a,b]$ 上的黎曼可积函数列 $\{f_n(x)\}$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛于 $f(x)$. 证明：$f(x)$ 在 $[a,b]$ 上也黎曼可积，并且
   $$\lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n(x)\mathrm{d}x=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$$
5. 设函数列 $\{f_n(x)\}$ 在有限闭区间 $[a,b]$ 上连续，如果对每一个 $x\in[a,b]$，数列 $\{f_n(x)\}$ 单调递减趋于 $f(x)$. 证明：$\{f_n(x)\}$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛于 $f(x)$.
6. 若函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可导并且 $f'_+(a)<f'_-(b)$. 证明: 对任意 $A:f'_+(a)<A<f'_-(b)$，均存在 $\xi\in(a,b)$ 使得 $f'(\xi)=A$.

7. 证明: 积分 $\int_a^{+\infty} f(x,u)\mathrm{d}x$ 在 $[\alpha,\beta]$ 上一致收敛的充要条件是：对任意单调递增趋于正无穷的数列 $\{A_n\}\,(A_1=a)$，函数项级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}\int_{A_n}^{A_{n+1}} f(x,u)\mathrm{d}x$$

在 $[\alpha,\beta]$ 上一致收敛.

6.2 2020 年高等代数考研真题

考生须知：

1. 本试卷满分为 150 分，全部考试时间总计 180 分钟；
2. 所有答案必须写在答题纸上，写在试题纸上或草稿纸上一律无效。

---

1. 若

$$s(x)=\begin{cases}\dfrac{x}{|x|}, & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}$$

已知 $A=(a_{ij}),a_{ij}=s(i-j)$, 求 $|A|$.

2. 若 x,y,z 为复数，证明：x,y,z 在复平面上共线当且仅当 $\begin{vmatrix} x & y & z\\ \bar{x} & \bar{y} & \bar{z}\\ 1 & 1 & 1\end{vmatrix}=0$

3. 若 A,B 为实方阵，存在 n 阶可逆复方阵 X，使得 $XA+2BX=O$，证明：存在 n 阶可逆实方阵 Y，使得 $YA+2BY=O$.

4. 若 A,B 为可逆实方阵，证明：存在唯一的负定阵 P 和正交阵 Q，使得 $A=PQ$.

5. 若 $A_i(i=1,2,\cdots,s)$ 为 n 阶复方阵，$\sum_{i=1}^{s}A_i=I_n,\mathrm{rank}\,(A_i)=r_j(i=1,2,\cdots,s)$ 证明：

$$A_iA_j=\delta_{ij}A_j(i,j=1,2,\cdots,s)\text{当且仅当}\sum_{i=1}^{s}r_i=n$$

6. 设 V 是复向量空间，U,W 是 V 的子空间，p,q 是 W 中的向量，且

$$p+U=\{p+u|u\in U\},q+W=\{p+w|w\in W\}$$

若 $p+U=q+W$，证明：$U=W$.

7. 设 A 为 n 阶复方阵，且 A 为幂零阵，即存在正整数 s，使得 $A^s=O$，令 $\mathrm{e}^A=\sum_{i=0}^{\infty}\frac{1}{i!}A^i$，证明：$\mathrm{e}^A$ 与 I_n+A 相似.

8. 设 V 是 n 维复线性空间，$B=\{v_1,v_2,\cdots,...v_n\}$ 是 V 的一组基，$J=(a_{ij})\,(i,j=1,2,\cdots,s)$ 为 n 阶方阵，$a_{ij}=1$ 当且仅当 $j=i+1(i=1,22,\cdots,n-1)$，否则 $a_{ij}=0$. 已知 V 上线性变换 $\mathscr{A}$ 关于基 B 的矩阵为 $\lambda In+J$. 令 V_s 为 V 的由基 B 中的前 s 个向量 $v_1,v_2,\cdots,v_s$ 生成的子空间 $(s=1,2,\cdots,n)$，证明：

   (1). V_s 为 V 上的 $\mathscr{A}$ 的不变子空间，且 $(\mathscr{A}-\lambda\mathscr{E})^s(v)=0$ 当且仅当 $v\in V_s$.

   (2). 若 W 是 V 的 s 维 $\mathscr{A}$ 的不变子空间 $(1\le s\le n)$，则 $W=V$.

9. 设 $\mathrm{e}_1,\mathrm{e}_2,\cdots,\mathrm{e}_n$ 是欧氏空间 V 的一组标准正交基 (每个 e_i 长度为 1 且这 n 个向量两两正交)，$v_1,v_2,\cdots,v_n$ 是 V 中的 n 个向量，且 $\|\mathrm{e}_i-v_i\|<\frac{1}{\sqrt{n}}(i=1,2,\cdots,n)$，证明：$v_1,v_2,\cdots,v_n$ 是 V 的一组基.

10. 设 $f_i(x)=a_{i0}+a_{i1}x+\cdots+a_{i,n-1}x^{n-1}+a_{in}x^n(i=0,1,\cdots,n)$，且这些 a_{ij} 皆为整数，设 $A=(a_{ij})(i,j=0,1,\cdots,n)$ 为相应的 $n+1$ 阶方阵. 证明：

    (1). 对于任意正整数 k，$(f_0(k),f_1(k),\cdots,f_n(k))\,||A|$

    (2). 存在 $n+1$ 阶方阵 B 使得 $AB=I_{n+1}$ 的充分必要条件是存在 $n+1$ 个互不相同的整数 $b_0,b_1,\cdots,b_n$，使得 $n+1$ 阶方阵 $(f_i(b_j))\,(i,j=0,1,\cdots,n)$ 满足 $|D|=\prod_{0\le i<j\le n}(b_j-b_i)$

第 7 章　哈尔滨工业大学

7.1　2020 年数学分析考研真题

考生须知：

1. 本试卷满分为 150 分，全部考试时间总计 180 分钟；
2. 所有答案必须写在答题纸上，写在试题纸上或草稿纸上一律无效。

---

1. 判断下列命题成立与否，并给出证明.

   (1). $f(x)$ 在 $x=0$ 的任意邻域上无界，则当 $x\to 0$ 时，$f(x)$ 为无穷大；

   (2). 数列 $\{a_n\}$ 的无穷多个子列都收敛于 a，是否可以判定 $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = a$；

   (3). 设 $f(x)$ 在有限闭区间 $[a,b]$ 上处处可导，则 $f(x)$ 有界.

   (4). 非负数列 $\{u_n\}$ 满足 $u_n = o\left(\dfrac{1}{n}\right)$，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛.

   (5). 设 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 上的偏导数都存在，则 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 处连续.

2. 设 $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = a$，证明：

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{2}a_1+\frac{2}{3}a_2+\cdots+\frac{n}{n+1}a_n}{n}=a$$

3. 叙述闭区间连续函数的 Cantor 定理，并证明.

4. 若函数 $f(x)$ 在 $(0,a]$ 上可导，且

   (1). $\sqrt{x}f'(x)$ 在 $(0,a]$ 上有界，求证：$f(x)$ 在 $(0,a]$ 上一致连续;

   (2). $\lim\limits_{x\to 0^+}\sqrt{x}f'(x)$ 在 $(0,a]$ 上存在，求证：$f(x)$ 在 $(0,a]$ 上一致连续;

5. 函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上具有连续的二阶导数，则存在 $c\in[a,b]$，使得

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=(b-a)f\left(\frac{a+b}{2}\right)+\frac{1}{24}(b-a)^3f''(c)$$

6. 讨论 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\ln\left(1+\dfrac{(-1)^n}{n^p}\right)$ 的收敛性和绝对收敛性 $(p>0)$.

7. (1). 函数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 在区间 I 上一致收敛，求证其通项 $u_n(x)$ 在 I 上一致收敛于 0 .

(2). 讨论级数 $\sum_{n=1}^{\infty} 2^n \sin \frac{1}{3^n x}$ 在 $x>0$ 上的一致收敛性.

8. (1). 试证: 方程在 $(0,0)$ 的充分小邻域上确定唯一的连续函数 $y=y(x)$，使得 $y(0)=0$.

(2). 讨论 $y=y(x)$ 在 $x=0$ 处的可微性.

(3). 求极限 $\lim_{x\to 0} \frac{y(x)}{x}$.

9. 求极限

$$\lim_{t\to 0^+} \frac{1}{t^4} \iiint\limits_{x^2+y^2+z^2\le t^2} \sin\sqrt{x^2+y^2+z^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

10. 计算曲面积分

$$I=\iint_S (x^2+az^2)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+\left(y^2+ax^2\right)\mathrm{d}z\mathrm{d}x+\left(z^2+ay^2\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

其中 S 为上半球 $z=\sqrt{a^2-x^2-y^2}$ 的上侧.

7.2 2020 年高等代数考研真题

考生须知:

1. 本试卷满分为 150 分，全部考试时间总计 180 分钟；
2. 所有答案必须写在答题纸上，写在试题纸上或草稿纸上一律无效。

---

1. 当 n 满足什么条件时，x^2n+x^n+1 不可约.

2. 已知 $f(x)=x^3-49x-120$ 的根为 a,b,c，求

$$\begin{vmatrix} s_0 & s_1 & s_2 \\ s_1 & s_2 & s_3 \\ s_2 & s_3 & s_4 \end{vmatrix}$$

其中 $s_i=a^i+b^i+c^i$.

3. 求

$$\begin{pmatrix} 3 & 2m & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 2m & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 2m & 0 \\ 1 & m & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & m & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

的秩，其中 $m \in \mathbb{R}$.

4. 已知 A 为 $n \times n$ 阶实矩阵，且 $A^2 = -AA'$，是否有 $A = -A'$？若正确给出证明，错误举出反例.
5. 已知 A 为实矩阵，问：是否存在可逆矩阵 P，使得 $P'\left(AA' + A + \bar{A}'\right)P = A'A + A + A'$？若正确给出证明，错误举出反例.
6. 已知 A, B 为 4×4 阶的正定矩阵，且 $A^4 = B^4$，问；是否有 $A = B$ 成立？若正确给出证明，错误举出反例.

第 8 章　华东师范大学

8.1　2020 年数学分析考研真题

考生须知：

1. 本试卷满分为 150 分，全部考试时间总计 180 分钟；
2. 所有答案必须写在答题纸上，写在试题纸上或草稿纸上一律无效。

---

1. 判断下列命题是否正确, 若正确给出证明, 若错误举出反例 (每小题 6 分，共 36 分)

(1). $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A$ 的充要条件：对任意的正整数 k，存在 $n > N$，当 $n > N$ 时，有

$$|a_n - A| < \frac{k}{k^2+1}$$

(2). 若 $f(x)$ 在 $x=0$ 的某邻域内有定义，且

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(-x)}{2x}$$

存在，则 $f'(0)$ 存在.

(3). 若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积，则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有原函数.

(4). 若 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，且 $\displaystyle\int_0^1 f^2(x)\mathrm{d}x = 0$，则 $f(x)\equiv 0, x\in[0,1]$.

(5). 若级数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 与 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 都收敛，则 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ 也收敛.

(6). 设 x_0 是 $f(x)$ 的一个极小值点，则一定存在 $\delta > 0$，使得 $f(x)$ 在 $(x_0-\delta, x_0)$ 上单调递减，在 $(x_0, x_0+\delta)$ 上单调递增.

2. 计算题（每小题 8 分，共 40 分）

(1). $\displaystyle\int_0^{2\pi}\sqrt{1+\sin x}\,\mathrm{d}x$

(2). $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sin\sin x - \tan\tan x}{x^3}$

(3). $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{3^n(2n+1)}$

(4). 计算

$$\iint_{\Sigma}\left(z^2+x\right)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+\sqrt{z}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

其中 Σ 为抛物面 $z=\dfrac{x^2+y^2}{2}$ 在平面 $z=0$ 与 $z=2$ 之间的部分，方向取下侧.

(5). 已知 $\lim\limits_{n\to+\infty}a_n=A$，求 $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{a_{n+k}}{n+k}$

3. 证明题 (第 1 题 14 分，2-5 题 15 分, 共 74 分) 计算题

(1). 设 $a_n>0,n=0,1,2,\cdots,S_n=a_1+a_2+\cdots+a_n$，试证：$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 与 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{a_n}{s_n}$ 具有相同的敛散性.

(2). 已知数列 $\{a_n\}$ 非负其有界，证明:

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_1^n+a_2^n+\cdots+a_n^n}=\sup_{n\geq 1}a_n$$

(3). 设

$$Q(x)=\begin{cases} q,x=\dfrac{p}{q}\in(0,1),p,q\text{为互素的正整数}\\ 0,(0,1)\text{上的其它点}\end{cases}$$

证明: 对任意的 $x_0\in(0,1)$ 以及任意的 $\delta>0$，在 $U(x_0,\delta)\cap(0,1)$ 上无界.

(4). 若 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，且 $\int_0^1 f^2(x)\mathrm{d}x=0$，则 $f(x)\equiv 0,x\in[0,1]$.

(5). 设 $u_n(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，且 $u_n(x)\geq 0,n=1,2,\cdots$. 设 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 在 $[a,b]$ 上收敛于 $f(x)$. 证明：$f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有最小值.

(6). 设 $f(x)$ 是定义在 $[0,+\infty)$ 上的非负函数且可微，满足 $\int_0^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x$ 收敛. 证明: 存在趋于正无穷的数列 $\{x_n\}$ 使得

$$\lim_{n\to\infty}\left[f^2(x_n)+\left|f'(x)\right|^2\right]=0$$

8.2 2020 年高等代数考研真题

考生须知：

1. 本试卷满分为 150 分，全部考试时间总计 180 分钟；
2. 所有答案必须写在答题纸上，写在试题纸上或草稿纸上一律无效。

1. 设 $A=\begin{pmatrix} -2 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & b \\ a & \frac{2}{3} & 0 \end{pmatrix}$，求所有 a,b 的值，使得 A 是幂零矩阵 (矩阵 A 称为幂零矩阵是指存在正整数 k 使得 $A^k=O$).

2. 设 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n,\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n$ 是线性空间 V 中的 $2n$ 个向量. 已知对任意的 $1\le k\le n$ 及 $1\le i_i<\cdots<i_k\le n$，有 $\alpha_{i1},\alpha_{i2},\cdots,\alpha_{ik}$ 线性相关当且仅当 $\beta_{i1},\beta_{i2},\cdots,\beta_{ik}$ 线性相关：证明：向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 的秩与向量组 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n$ 的秩相同.

3. 已知 $n\ge 2,a,b\in\mathbb{C}$，求

$$A=\begin{vmatrix} a & a & a & a & \cdots \\ a & b & b & b & \cdots \\ a & b & a & a & \cdots \\ a & b & b & b & \cdots \\ a & b & a & b & a \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{vmatrix}$$

4. 设 $A=\begin{pmatrix} \frac{7}{4} & -\frac{3}{4} & \frac{\sqrt{6}}{4} \\ -\frac{3}{4} & \frac{7}{4} & -\frac{\sqrt{6}}{4} \\ \frac{\sqrt{6}}{4} & -\frac{\sqrt{6}}{4} & \frac{7}{2} \end{pmatrix}$

   (1). 求一个正交矩阵 P，使得 $P'AP$ 是对角矩阵.

   (2). 求

$$f(x_1,x_2,x_3)=\frac{7}{4}x_1^2+\frac{7}{4}x_2^2+\frac{7}{2}x_3^2-\frac{3}{2}x_1x_2-\frac{\sqrt{6}}{2}x_2x_3+\frac{\sqrt{6}}{2}x_1x_3$$

   在单位球面 $S^2=\left\{(x_1,x_2,x_3)\in\mathbb{R}^3 | x_1^2+x_2^2+x_3^2=1\right\}$ 上能取到的最大值，并求出能取到最大值的所有 (x_1,x_2,x_3).

5. 已知矩阵 $A\in M_n\in(\mathbb{C})$ 满足 $A+A^2+\frac{1}{2!}A^3+\frac{1}{3!}A^4+\cdots+\frac{1}{2019!}A^{2020}=O$，证明：$A$ 可对角化.

6. 设 $A,B\in M_n(\mathbb{C})$，令 $L(A,B)=\{X\in M_n(\mathbb{C}) | AXB=O\}$

   (1). 验证 $L(A,B)$ 是 $M_n\in(\mathbb{C})$ 的线性子空间；

   (2). 设 $\operatorname{rank}(A)=r,\operatorname{rank}(B)=s$，求 $\dim L(A,B)$(用 m,r,s 表示).

7. 设 A,B,C 是二阶复方阵，且 A,B,C 在 $M_2(\mathbb{C})$ 中线性无关. 证明：存在复数 x_1,x_2,x_3 使得 $x_1A+x_2B+x_3C$ 是可逆矩阵.

8. 证明：

(1). 已知 $A \in M_n \in (\mathbb{C})$，若存在可逆矩阵 $B \in M_n \in (\mathbb{C})$，使得 $A = B^{-1}\bar{B}$，则 $A^{-1} = \bar{A}$.

(2). 设可逆矩阵 $A \in M_n(\mathbb{C})$ 满足 $A^{-1} = \bar{A}$，证明：存在可逆矩阵 $B \in \{a\bar{A} + bE | a, b \in \mathbb{C}\}$ 使得 $A = B^{-1}\bar{B}$，其中 $\bar{A}$ 为 A 的共轭矩阵，E 为单位矩阵。

9. 设 n 为奇数，$A, B \in M_n(\mathbb{C})$ 且 $A^2 = O$，证明：$AB - BA$ 不可逆.

第 9 章　上海交通大学

9.1　2020 年数学分析考研真题

考生须知：

1. 本试卷满分为 150 分，全部考试时间总计 180 分钟；
2. 所有答案必须写在答题纸上，写在试题纸上或草稿纸上一律无效。

---

1. 判断题 (5×6=30 分). 若正确给出证明，若错误举出反例.

(1). 若数列 $\{x_n\}$ 收敛且 $a_n>0$，则 $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{a_{n+1}}{a_n}=1$.

(2). 若函数 $f(x)$ 在点 x_0 二阶可导，则函数 $f(x)$ 在点 x_0 附近连续;

(3). 若函数 $f(x),g(x)$ 在 $[a,b]$ 上可导，且 $a=\min\limits_{x\in[a,b]}g(x), b=\max\limits_{x\in[a,b]}g(x)$，则存在 $\xi\in[a,b]$ 使得

$$f(b)-f(a)=f'(g(\xi))(b-a)$$

(4). 若级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 与 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$ 收敛，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n+b_n)^2$ 也收敛.

(5). 设 D 为凸区域，若函数 $f(x,y)$ 在 D 内满足 $f_x(x,y)=0$，则 $f(x,y)$ 的取值与 x 无关.

2. 计算题 (5×10=50 分).

(1). 计算极限

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}}{\ln\left(\sin^4 x+1\right)}$$

(2). 已知 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=A$，函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上连续，且

$$g(x)=\begin{cases}\dfrac{\int_0^x f(t)\mathrm{d}t}{x}, & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}$$

求 $g'(x)$，并讨论 $g'(x)$ 在 $x=0$ 的连续性.

(3). 计算第二型曲线积分

$$I_{\mathrm{e}}=\oint_C \frac{x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x}{4x^2+y^2}$$

其中 C 是以 $(1,0)$ 为圆心，以 2 为半径的圆，方向取逆时针.

(4). 无

(5). 设 $I_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^2(nt)}{\sin t}\mathrm{d}t$，计算 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{I_n}{\ln n}$

3. 证明题 (5×14=60 分).

(1). 设数列 $\{x_n\}$ 满足 $\lim\limits_{n\to\infty}(x_{n+1}-x_n)=0$，用 $\varepsilon-N$ 语言证明：$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x_n}{n}=0$.

(2). 设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 恒正，且对 $\forall x_0\in[a,b]$，有 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=c,x_0>0$. 证明：存在 $c>0$，使得对 $\forall x\in[a,b]$，有 $f(x)\le c$.

(3). 设函数 $f(x)$ 二阶连续可导，证明：存在 $\xi\in(a,b)$，使得

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=f\left(\frac{a+b}{2}\right)(b-a)+\frac{f''(\xi)}{24}(b-a)^3$$

(4). 设数列 $\{x_n\}$ 有极限 L，证明：$f(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_nx^n$ 在 $(-1,1)$ 有定义，且

$$\lim_{x\to1^-}(1-x)f(x)=L$$

(5). 设函数 $f(x,y,z)$ 在 Ω 内连续偏导数，证明以下两个条件等价.

I. 对于 Ω 内任意闭合双侧曲面 Σ 有

$$\iint_\Sigma f(x,y,z)(x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z\mathrm{d}x\mathrm{d}y)$$

II. 对 $\forall\lambda>0,\forall(x,y,z)\in\Omega$, 有 $f(\lambda x,\lambda y,\lambda z)=\lambda^{-3}f(x,y,z)$ 成立.

9.2 2020 年高等代数考研真题

考生须知：

1. 本试卷满分为 150 分，全部考试时间总计 180 分钟；
2. 所有答案必须写在答题纸上，写在试题纸上或草稿纸上一律无效。

---

1. 已知复数域上不可约多项式均为一次多项式.

(1). 证明：实数域上正次数多项式均为一次多项式或二次多项式的乘积;

(2). 写出实数域上所有的不可约多项式.

2. 设 A 是数域 F 上的 n 阶矩阵，证明：

(1). 如果 A 与所有对角矩阵可交换，则 A 也是对角矩阵;

(2). 如果 A 与所有矩阵可交换，则 A 是数量矩阵.

3. 设

$$A=\begin{pmatrix} 3 & -2 & 3 & 2 & 5 \\ 5 & -3 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & -3 & -5 & 0 & -7 \\ 2 & -2 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix} 1 & 0 & a & b & c \\ 0 & 1 & d & e & f \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

已知存在可逆矩阵 P，使得 $PA=B$.

(1). 求下列两个子空间的各一组基:

$$N(A)=\{x\in\mathbb{R}^5|AX=O\}\ R(A')\text{即}A\text{的行空间 }A'\text{的列空间}$$

(2). 求 $R(A)$ 的一组基，并求 A 的每个列向量在该组基下的坐标;

(3). 以 $W^{\perp}$ 表示 W 的正交补，求 $N^{\perp}(A')$ 的一组标准正交基.

(4). 求一个 4×2 的矩阵 L 与一个 2×5 的矩阵 R，使得 $A=LR$.

4. 设 $V=\mathbb{R}[x]_n$ 是次数小于 n 的全体实系数多项式构成的实线性空间，$f'(x)$ 表示多项式 $f(x)$ 的导数，定义 V 上的线性变换. 如下:

$$\sigma: f(x)\mapsto xf'(x)-f(x), \forall f(x)\in V$$

(1). 求 σ 的特征值与特征向量;

(2). 记 σ 的核空间与像空间分别为 $\mathrm{Ker}(\sigma)$ 与 $\mathrm{Im}(\sigma)$. 判断 $V=\mathrm{Ker}(\sigma)\oplus\mathrm{Im}(\sigma)$ 是否成立? 并说明理.

5. 设 $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

(1). 求 A 的若尔当标准型 J;

(2). 设 k 是正整数，求 A^k 的若尔当标准型;

(3). 求 $B=\begin{pmatrix} A & A \\ A & A \end{pmatrix}$ 的若尔当标准型.

6. 设 A 是可逆矩阵.

(1). 证明：$A'A$ 是正定矩阵；

(2). 证明：是否成立

$$B=\begin{pmatrix} AA'+A'A & AA' \\ AA' & AA'+A'A \end{pmatrix}$$

为正定矩阵.

7. 实方阵 P 称为正交投影矩阵，如果 $p^2=P'=P$，设 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 是实 n 维向量空间 $\mathbb{R}^n$ 的一组线性无关的向量.

(1). 证明：存在唯一的正交投影矩阵 P，使得 P 的零空间 $N(P)$(即方程组 $PX=O$ 的解空间) 由 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 生成.

(2). 设 $s=2,\alpha_1=(1,0,0)',\alpha_2=(0,1,1)'$，请写出第一问中的矩阵 P.

8. 设 A 是 $m\times n$ 阶实矩阵，证明：存在 $m\times n$ 阶非负实对角矩阵 D(即所有行标与列标相同的元素均非负，其余元素均为 0) 与两个正交矩阵 U,V，使得 $A=UDV$(即矩阵 A 的奇异值分解).

9. 记 $M_n(F)$ 是数域 F 上全体 n 阶矩阵构成的向量空间，符号 $\mathrm{tr}(X)$ 表示 X 的迹. 证明：映射 $\mathrm{tr}: X\mapsto \mathrm{tr}(X)$ 是 $M_n(F)$ 到 F 的满足性质 $\sigma(XY)=\sigma(YX)$ 以及 $\sigma(I)=n$ 的唯一线性变换 σ.

10. 设 A,B 是向量空间 V 的两个子空间.

(1). 证明：商空间 $A/(A\cap B)$ 与商空间 $(A+B)/B$ 同构.

(2). 证明：$(A+B)/(A\cap B)=A/(A\cap B)\oplus B/(A\cap B)$.

第 10 章 中国科学技术大学

10.1 2020 年数学分析考研真题

考生须知：

1. 本试卷满分为 150 分，全部考试时间总计 180 分钟；
2. 所有答案必须写在答题纸上，写在试题纸上或草稿纸上一律无效。

---

1. 计算题 (每小题 10 分)

(1). 求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}-\cos x}{\sin(x^2)}$

(2). 设 $f(x)$ 连续，已知 $f(0)\neq 0$ ，计算

$$\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^x f(t)(x-t)\mathrm{d}t}{x\int_0^x f(2x-2t)\mathrm{d}t}$$

(3). 已知 $z=f(x^2-2y,g(xy))$，且 f 二阶连续可微，g 二阶可微，求 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$.

(4). 求积分

$$\iiint_V\left(\sqrt{x^2+y^2+z^2}+x^5+y^2\sin y\right)\mathrm{d}V$$

其中 V 为 $x^2+y^2+z^2=2z$ 所围成的区域.

2. (15 分) 计算曲面积分

$$\iint_S\frac{x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{(4x^2+2y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}$$

其中 S 是曲面 $x^2+y^2+z^2=1$，取外侧.

3. (15 分) 已知 f 是 $(0,+\infty)$ 的连续函数，满足 $x=f(x)\mathrm{e}^{f(x)}$，求证：

(1). $f(x)$ 单调递增;

(2). $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$;

(3). $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{\ln x}=1$.

4. (15 分) 证明:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\cos[(2n+1)\pi x]}{(2n+1)^2}=\frac{\pi^2}{8}-\frac{\pi^2}{4}|x|,\quad |x|\le 1$$

并且计算 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ 和 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4}$.

5. (15 分) 讨论积分 $\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x^u}$ 的绝对收敛性与条件收敛性.

6. (15 分) 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 连续，并且满足对 $\forall x\in[0,1]$, $\int_x^1 f(t)\mathrm{d}t\ge\frac{1-x^2}{2}$，证明

$$\int_0^1 f^2(t)\mathrm{d}t\ge\frac{1}{3}$$

7. (15 分) 设 $f\in C^{\infty}[-1,1]$

(1). 证明:

$$f(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k+\frac{1}{n!}\int_0^x(x-t)^n f^{(n+1)}(t)\mathrm{d}t$$

其中 n 是正整数.

(2). 若 $f^{(n)}(x)\ge 0$ 对所有 $n\in\mathbb{N}, x\in[-1,1]$ 都成立，证明: f 在 $[-1,1]$ 上可以展开成幂级数.

8. (15 分) 设 $f_n(x)$ 在 $[a,b]$ 上可微，并且存在 $M>0$ 使得对所有的 $x\in[a,b]$ 及所有的 n 都有 $|f_n'(x)|\le M$. 若 $f_n(x)$ 在 $[a,b]$ 上收敛到 $f(x)$，求证：$f_n(x)$ 在 $[-1,1]$ 上是一致收敛到 $f(x)$ 的.

9. (10 分) 设 $g(x)$ 在 $[0,1]$ 上单调递增，证明

$$\lim_{y\to+\infty}\int_0^1 g(x)\frac{\sin(xy)}{x}\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2}g\left(0^+\right)$$

10.2 2020 年高等代数考研真题

考生须知：

1. 本试卷满分为 150 分，全部考试时间总计 180 分钟；
2. 所有答案必须写在答题纸上，写在试题纸上或草稿纸上一律无效。

---

1. 填空题 (5×6=30 分)

(1). 直线 l 与平面 π[?]，则 l 与 π 的夹角是______，直线到平面的投影方程方程是______，直线 l 绕 y 轴旋转而得的曲面方程是______

(2). 矩阵 $\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 1 & -4 \end{pmatrix}^{2020}$ =______；行列式 $\det\left(I_4 - \alpha\alpha^T\right)$ =______，其中 $\alpha = (1,1,0,-2)^T$.

(3). 若矩阵

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & \\ -1 & a & 1 \\ & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

的正惯性指数为 2，则 a 的范围是______.

(4). 考虑标准欧式空间 $\mathbb{R}^4$，设 U 是 $\cdots$ 张成的子空间，V 是 $\cdots$ 张成的子空间，则 $U \cap V$ 的维数是______，$U^{\perp} \cap V$ 的维数是______

(5). 设方阵

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & a \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

可以对角化，则 a =______，A 的最小多项式是______.

2. 给定二次曲面 $\cdots$，试用正交变换和平移将它化为标准方程，并判断其曲面类型.

3. 设 A 是不可对角化的 n 阶复方阵，试证：存在非零方阵 B 使得 $AB = BA$ 且 $A^n = O$.

4. 在 $M_2(\mathbb{C})$ 上定义线性变换

$$\mathscr{A} : X \longrightarrow AX, A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

求 $\mathscr{A}$ 的特征值，特征向量以及若当标准型.

5. 给定行向量组集合 S =?，试求它的极大无关组并证明其结论.

6. 设 A 为 n 阶实对称矩阵，b 是 n 维列向量，证明：$A-bb^T$ 正定当且仅当 A 正定且 $b^TA^{-1}b < 1$.

第 11 章 武汉大学

11.1 2020 年数学分析考研真题

考生须知：

1. 本试卷满分为 150 分，全部考试时间总计 180 分钟；
2. 所有答案必须写在答题纸上，写在试题纸上或草稿纸上一律无效。

---

1. (15 分) 若 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a(a>0)$, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0$，计算 $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n^{b_n}-1}{b_n}$
2. (15 分) 设 $f(x,y,z) = x^y y^z z^x$，求 $f(x,y,z)$ 的全微分以及二阶偏导数.
3. (15 分) 计算不定积分
$$\int \frac{x^2+1}{(x^2-2x+2)^2}\mathrm{d}x$$
4. (15 分) 计算
$$\iiint_\Omega (x+y-z)(y+z-x)(z+x-y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$
其中 $\Omega = \{(x,y,z)|0 \le x+y-z \le 1, 0 \le y+z-x \le 1, 0 \le z+x-y \le 1\}$.
5. (15 分) 讨论级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n^n}{a^n n!}$.
6. (15 分) 若级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n \cos^n x$ 在 $[0,2\pi]$ 上收敛，试问是否一致收敛并说明理由.
7. (15 分) 设 $f(x) = \sin, x \in [0,\pi]$，试讲 $f(x)$ 展开成余弦级数，并讨论其收敛性.
8. (15 分) 证明：当 $x \in (0,1)$ 时，存在 θ_n，使得
$$\frac{1}{1-x} = \frac{(1-\theta_n)^n \cdot (1+n)}{(1-\theta_n x)^{n+2}}$$
并求 $\lim\limits_{x\to 0} \theta_n$
9. (15 分) 若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有连续的二阶导数，$f(a)f(b)<0, f'(x)f''(x) \ne 0 (x \in [a,b])$

(1). 证明：$f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有唯一的零点；

(2). 假设

$$x_n = x_{n-1} - \frac{f(x_{n-1})}{f'(x_{n-1})}, x_0 = \begin{cases} a, & f'(x)f''(x) < 0 \\ b, & f'(x)f''(x) > 0 \end{cases}$$

设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的零点为 ξ，证明：$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \xi$ 且 $|x_n - \xi| \le \dfrac{|f(x_n)|}{m}$，其中 $m = \min\limits_{x\in[a,b]} \{|f'(x)|\}$.

10. (15 分) 设 $B^2 = \{(x,y)|x^2+y^2 \le 1\}, \partial B^2 = \{(x,y)|x^2+y^2=1\}$，证明：不存在连续可微的映射 $g: B^2 \to \mathbb{R}^2$ 满足：$g(B^2) \subseteq \partial B^2$ 且 $g(x,y) = g(xy, x^2-y^2)$.

11.2 2020 年高等代数考研真题

考生须知：

1. 本试卷满分为 150 分，全部考试时间总计 180 分钟；
2. 所有答案必须写在答题纸上，写在试题纸上或草稿纸上一律无效。

---

1. 计算 n 阶行列式

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & \cdots & n-1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 & \cdots & n-2 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & \cdots & n-3 \\ 3 & 2 & 1 & 0 & \cdots & n-4 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ n-1 & n-2 & n-3 & n-4 & \cdots & 0 \end{vmatrix}$$

2. 设 $A_n = (a_{ij})_{n\times n}, i,j \in \mathbb{Z}^+, a_{ij} \in \mathbb{Z}, k \in \mathbb{Z}$ 且 $k \ge 2$，证明：

$$D_n = \begin{vmatrix} a_{11} - \frac{1}{k} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \frac{1}{k} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} - \frac{1}{k} \end{vmatrix} \ne 0$$

3. 已知 A, C 为正定矩阵，若矩阵方程 $AX + XA = C$ 有唯一解 B，证明：B 是正定矩阵.

4. 已知 $\mathscr{M}$ 是 $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ 上的线性变换，$\forall \alpha \in M_{2\times 2}(\mathbb{R}), \mathscr{M}(\alpha) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} \alpha$，试求 $\mathscr{M}$ 的特征值和特征子空间.

5. 已知 A 的特征值都是实数，且 A 的一阶主子式之和和二阶主子式之和都为零，证明：$A^n = O$.
6. 已知多项式 $f_1(x), f_2(x)$ 互素 (即 $(f_1(x), f_2(x)) = 1$)，证明：对 $\forall g(x) \in K[x]$，有
$$(f_1(x)f_2(x), g(x)) = (f_1(x), g(x)) \cdot (f_2(x), g(x))$$
7. 已知 A 是可逆矩阵，证明：$A = QT$，其中 Q 为正交矩阵，T 为非奇异上三角矩阵.
8. 已知 τ 是 n 维欧氏空间上的线性变换，且 $\tau^3 + \tau = 0$，证明：τ 在基下对应的矩阵的迹为 0.
9. 已知 V 为 n 维向量空间，$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ 为一组基，证明：对 $\forall m > n$，必存在 m 个向量组成的向量组，其中任意 n 个线性无关.
10. 已知 A 的特征值全为 1，证明：对任意自然数 s，证明：A 与 A^s 相似.

第 12 章 南开大学

12.1 2020 年数学分析考研真题

考生须知：

1. 本试卷满分为 150 分，全部考试时间总计 180 分钟；
2. 所有答案必须写在答题纸上，写在试题纸上或草稿纸上一律无效。

---

1. (20 分) 求极限
$$\lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{e}^{\arctan x}-\mathrm{e}^{x}}{\tan^3 x}$$
2. (20 分) 判定函数 $f(x)=\dfrac{x^3}{x+1}\sin\dfrac{1}{x}$ 在 $(0,+\infty)$ 上是否一致连续、连续，并说明理由.
3. (30 分) 设 $p>0$，讨论广义积分
$$\int_0^{+\infty}\frac{x^{p-1}}{x^p+1}\cos x\mathrm{d}x$$
的绝对收敛性和条件收敛性.
4. (30 分) 求级数
$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2+1}{n\cdot 2^n}$$
5. (30 分) 求函数 $f(x,y)=y\left(x^2+y^2+\sqrt{2}x-2\right)$ 在闭区域 $D=\left\{(x,y)\,|x^2+y^2\leq 3\right\}$ 中的最大值和最小值.
6. (10 分) 设函数 $f(x)$ 在 $[0,2]$ 可导，在 $(0,2)$ 三次可导，并且
$$\int_0^2 f(x)\mathrm{d}x=8\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$$
证明: 存在 $\xi\in(0,2)$，使得 $f'''(\xi)=0$.
7. (10 分) 设 G 是 $\mathbb{R}$ 中的有界闭区域，其边界 ∂G 是由有限个珠片光滑曲面构成的.$u=\mathbb{C}^2(G)$ 且有 u 在 ∂G 上恒等于 0，
$$\Delta u=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$$
∇u 是 u 的梯度. 证明：对任意 $\lambda>0$ 都有

$$\lambda \iiint_G u^2 \mathrm{d}y\mathrm{d}z + \frac{1}{\lambda}\iiint_G |\Delta u|^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z \geq 2\iiint_G |\nabla u|^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

12.2　2020 年高等代数考研真题

考生须知：

1. 本试卷满分为 150 分，全部考试时间总计 180 分钟；
2. 所有答案必须写在答题纸上，写在试题纸上或草稿纸上一律无效。

---

1. (20 分) 求矩阵

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

的逆矩阵.

2. (30 分) 设矩阵

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

求正交矩阵 Q 与对角矩阵 D，使得 $A = QDQ'$.

3. (30 分) 证明矩阵 $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -2 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ 与矩阵 $B = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 3 \\ 3 & 0 & -4 \\ -2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$ 不相似.

4. (15 分) 已知 $\mathscr{A}, \mathscr{B}$ 是有限维欧氏空间 V 中的线性变换,$\mathscr{B}^*$ 是 $\mathscr{B}$ 的共轭变换,满足 $\mathscr{B}^*\mathscr{A} = \mathscr{O}$，证明 $\mathscr{A} + \mathscr{B}$ 的秩等于 $\mathscr{A}$ 的秩加 $\mathscr{B}$ 的秩.

5. (15 分) 设 $\mu_1, \mu_2, \cdots, \mu_n$ 是 $\mathbb{C}^{n\times 1}$ 的一组基，$l_1, l_2, \cdots, l_m$ 是 $\mathbb{C}^{1\times m}$ 的一组基，证明

$$\{\mu_i l_j | 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m\}$$

是 $\mathbb{C}^{n\times m}$ 的一组基.

6. (10 分) 设 $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ 有 n 个互不相同的特征值 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$，定义 $\mathbb{C}^{n\times n}$ 上的线性变换 ad_A 为

$$\mathrm{ad}_A(B) = AB - BA, \quad B \in \mathbb{C}^{n\times n}$$

证明入；$\lambda_i - \lambda_j (1 \leq i, j \leq n, i \neq j)$ 是 ad_A 的特征值

7. (10 分) 设 $p(x), g(x)$ 是次数不超过 $n(n>1)$ 的实系数多项式. 证明：存在次数不超过 $2n-2$ 的实系数多项式 $F(x,y)$，使得 $F(p(t), g(t))=0$ 对任意的实数 t 都成立.

8. (10 分) 设 B, C 为 n 阶实对称矩阵，且 $|B| \neq 0$，证明存在 n 阶实矩阵 A，使得

$$AB + BA' = C$$

9. (10 分) 设 V 为 n 维实线性空间，如果存在 V 上的可逆线性变换 $\mathscr{A}, \mathscr{B}$，使得等式

$$\mathscr{A}\mathscr{B} - \mathscr{B}\mathscr{A} = \mathscr{B}^2\mathscr{A}$$

成立，求所有正整数 n 的可能取值.

第 13 章 华南理工大学

13.1 2020 年数学分析考研真题

考生须知：

1. 本试卷满分为 150 分，全部考试时间总计 180 分钟；
2. 所有答案必须写在答题纸上，写在试题纸上或草稿纸上一律无效。

---

1. (11 分) 计算

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1+\sqrt[n]{3}}{2}\right)^n$$

2. (11 分) 若 $\alpha>0$，求 $\lim\limits_{x\to+\infty}((x+1)^\alpha-x^\alpha)$.

3. (11 分) 求级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}n^2x^{n-1}$ 的和函数.

4. (11 分) 计算

$$\int_0^{+\infty}\frac{[\sin(5x)-\sin(3x)]\mathrm{e}^{-2x}}{x}\mathrm{d}x$$

5. (13 分) 设 L 为 $y=0$ 与 $y=\sin x, 0\le x\le\pi$ 所围区域的边界，积分方向取正，计算

$$\int_L e^x(1-\cos y)\mathrm{d}x-\mathrm{e}^x(y-\sin y)\mathrm{d}y$$

6. (13 分) 设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上可积，证明：$\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x=0$ 当且仅当对 $f(x)$ 的任意连续点，有 $f(x)=0$.

7. (13 分) 设 $f(x)$ 在 $[0,\infty)$ 上单调递减，且 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$，$f'(x)$ 连续，证明：积分 $\int_0^{+\infty}f'(x)\sin^2 x\mathrm{d}x$ 收敛.

8. (13 分) 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可微且导函数连续，$f(a)=0$，试证：

$$M^2\le(b-a)\int_a^b(f'(x))^2\mathrm{d}x$$

其中 $M=\sup\limits_{x\in[a,b]}|f(x)|$.

9. (13 分) 求曲面 $2x^2+y^2+3z^2=84$ 的切平面，使得该切平面与平面 $4x+y+6z=12$ 平行.
10. (13 分) 设 $f(x)$ 在 $[0,2]$ 上二阶可微，且 $|f(x)|\le 1, |f''(x)|\le 1$，证明：$|f'(x)|\le 2$.
11. (13 分) 已知 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=0, \lim\limits_{n\to\infty} b_n=b$，试证：

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_1b_n+a_2b_{n-1}+\cdots+a_nb_1}{n}=0$$

12. (15 分) 设 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上一致连续，对 $\forall x\ge 0$ 有 $\lim\limits_{n\to\infty} f(x+n)=0$，证明：$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$.

13.2 2020 年高等代数考研真题

考生须知：

1. 本试卷满分为 150 分，全部考试时间总计 180 分钟；
2. 所有答案必须写在答题纸上，写在试题纸上或草稿纸上一律无效。

---

1. (20 分) 已知 $f(x), g(x)\in P[x]$，证明：$(f(x),g(x))=1$ 的充分必要条件是对 $\forall r(x), s(x), \exists q(x), p(x)$ 使得 $p(x)f(x)+r(x)=q(x)g(x)+s(x)$
2. (15 分) 计算 $n+1$ 阶行列式

$$D=\begin{vmatrix} a^n & (a-1)^n & (a-2)^n & \cdots & (a-n)^n \\ a^{n-1} & (a-1)^{n-1} & (a-2)^{n-1} & \cdots & (a-n)^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a & a-1 & a-2 & \cdots & a-n \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \end{vmatrix}$$

3. (20 分) 已知

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

(1). 证明：$A^n=A^{n-2}+A^2-E(n\ge 3)$

(2). A^{2020}.

4. (20 分) 已知 $\alpha_1=(1,2,0), \alpha_2=(1,a+2,-3a), \alpha_3=(-1,-b-2,a+2b), \beta=(1,3,-3)$ 求 a,b 的值使得

(1). β 不可被 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性表出；

(2). β 可被 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 唯一线性表出，并求表达式；

(3). β 可被 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性表出且不唯一，并求表达式.

5. (20 分) 已知 $f(x_1,x_2,\cdots),x_n) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_ix_j$ 正负惯性指数分别为 p,q，且

$$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_p,\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_q$$

为任意 $p+q$ 个正数，证明：存在非退化线性替换 $X=CY$ 使得

$$f(X) = \alpha_1 y_1^2 + \cdots + \alpha_p y_p^2 - \beta_1 y_{p+1}^2 - \cdots - \beta_q y_{p+q}^2$$

6. (20 分) 设 V 是数域 P 上的 n 维线性空间，且 $V=P[x]_n$，$(f(x)) = xf'(x) - f(x), f(x)\in V$

(1). 证明：$\mathscr{A}$ 为线性变换；

(2). 求 $\mathscr{A}^{-1}(0)$ 与 $\mathscr{A}(V)$;

(3). 证明：$V=\mathscr{A}^{-1}(0)\oplus\mathscr{A}(V)$.

7. (20 分) 已知 A,B 为数域 P 上的 n 阶方阵，A 有 n 个互异的特征值，证明：A 的特征向量是 B 的特征向量的充分必要条件是 $AB=BA$.

8. (15 分) 已知 V 是数域 P 上的 n 维线性空间，$\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3,\varepsilon_4$ 是 V 的一组基，$\mathscr{A}$ 在 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3,\varepsilon_4$ 下的矩阵为

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & -2 & -1 \end{pmatrix}$$

求包含 ε_1 的最小不变子空间.

第 14 章　天津大学

14.1　2020 年数学分析考研真题

考生须知：

1. 本试卷满分为 150 分，全部考试时间总计 180 分钟；
2. 所有答案必须写在答题纸上，写在试题纸上或草稿纸上一律无效。

---

1. 填空题 (每小题 5 分，共 50 分)

 (1). 计算 $\lim\limits_{n\to\infty} n(\sqrt{n^2+1}-n)$=______.

 (2). 计算 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\mathrm{e}^x-1-x}{\cos x-1}$=______.

 (3). 若点 $(0,1)$ 满足 $y=x^3+bx^2+c$ 的拐点，则 b,c 所满足的条件是 =______.

 (4). 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n(x-1)^n$ 的收敛域.

 (5). 当且仅当 p 属于______ 何时，无穷积分 $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x\ln x[\ln(\ln x)]^p}$ 收敛 =______.

 (6). 曲线 $x=\cos^3 t, y=\sin^3 t, t\in(0,2\pi)$ 的弧长为______.

 (7). 曲线 $\mathrm{e}^z-z+xy=3$ 在点 $(2,1,0)$ 处的切平面为______.

 (8). 求 $f(x)=x$ 在 $(-\pi,\pi]$ 上的傅里叶展开______..

 (9). 计算 $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{x}{1+\cos 2x}\mathrm{d}x$=______.

 (10). 若 L 为不经过原点的简单闭曲线，方向为逆时针，则 $\displaystyle\int_L\frac{x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x}{x^2+y^2}$=______.

2. (15 分) 计算题

 (1). 求 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^n}{n}$ 在 $(-1,1)$ 上的和函数；

 (2). 求 $\lim\limits_{x\to+\infty}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}\left(\dfrac{1-x}{x}\right)^n$.

3. (15 分) 计算题

(1). 求 $\iiint_{\Omega} x^2+y^2+z^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$，其中 $\Omega=\{(x,y,z)|x^2+y^2+z^2\le 1\}$；

(2). 求 $\iint_{\Sigma} x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 Σ 为 $z=x^2+y^2$ 外侧 $z\in[0,1]$.

4. (10 分) 若 $f(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上连续，且 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ 存在，a 为常数，试证：$f(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上一致连续.

5. (10 分) 若 $f(x)$ 在 $[1,+\infty)$ 上单调，且 $\int_1^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 收敛，试证：$\lim\limits_{x\to+\infty} xf(x)=0$.

6. (10 分) 已知函数 $f(x,y), x=x(u,v), y=y(u,v)$ 二阶可导且满足 $\frac{\partial x}{\partial u}=\frac{\partial y}{\partial v}, \frac{\partial x}{\partial v}=-\frac{\partial y}{\partial u}$ (柯西黎曼方程)，证明：

$$\frac{\partial^2 f}{\partial u^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial v^2}=\left(\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v}-\frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial y}{\partial u}\right)\cdot\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right)$$

7. (10 分) 求由方程 $x^2+y^2+z^4-2x-2y-5z-4=0$ 所确定的 $z=z(x,y)$ 的整数极值点并判断极值点类型.

8. (10 分) 若 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上二阶可导，且有 $|f(x)|\le M_0, \left|f''(x)\right|\le M_1$，证明：$\left|f'(x)\right|\le\sqrt{2M_0M_1}$

9. (10 分) 设 $\theta\in(-1,1)$，试证：

$$\int_0^{\pi}\ln(1+\theta\cos x)\mathrm{d}x=\pi\ln\frac{1+\sqrt{1-\theta^2}}{2}$$

14.2 2020 年高等代数考研真题

考生须知：

1. 本试卷满分为 150 分，全部考试时间总计 180 分钟；
2. 所有答案必须写在答题纸上，写在试题纸上或草稿纸上一律无效。

---

1. 已知 $f(x),g(x)$ 为数域 K 上的多项式，m 为大于 1 的正整数，证明：

$$g^m(x)|f^m(x)\text{当且仅当}g(x)|f(x)$$

2. 已知 $A=(a_{ij})$ 为 n 阶矩阵，且 $a_{ij}=\begin{cases} n, & i=j\\ -1, & i\ne j\end{cases}$ $(1\le i,j\le n)$，求 $|A|$.

3. 已知 $ABA=C$，其中 $A=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&4&2\\1&-1&0\end{pmatrix}, C=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$，试求 B 的伴随矩阵 B^*.

4. 已知 $A=\begin{pmatrix}1 & -2020 & 2020\\ 0 & 2 & -1\\ 0 & a & 4\end{pmatrix}$ 有一个二重特征根.

(1). 求 A 的最小多项式以及若尔当标准形.

(2). 若 A 相似于对角矩阵，求 A^{2020}.

5. 已知 A 为 n 阶方阵，且 $A^r=0(r\in\mathbb{N}^+)$，证明：$E+2A$ 为可逆矩阵.

6. 已知 τ 为线性空间 $\mathbb{R}^3$ 上的线性变换，且 τ 在基 v_1,v_2,v_3 下的矩阵为 $\begin{pmatrix}3 & 0 & 3\\ 3 & 3 & 0\\ -3 & 6 & 3\end{pmatrix}$，求 τ 在基 $u_1=(2,0,0),u_2=(0,2,0),u_3=(0,0,2)$ 下的矩阵.

7. 设 $K^{n\times n}$ 为数域 K 上全体 n 阶方阵构成的线性空间.V_1 为 K 上全体 n 阶对称方阵构成的子空间，V_2 为 K 上全体 n 阶反对称方阵构成的子空间，证明：

$$K^{n\times n}=V_1\oplus V_2$$

8. 在 $\mathbb{R}^n$ 中定义双线性函数

$$f(x,y)=\sum_{i=1}^{n}x_iy_i+\frac{1}{2}\sum_{\substack{i\neq j\\ 1\leq i,j\leq n}}x_ix_j$$

其中 $x=(x_1,x_2,\cdots,x_n),y=(y_1,y_2,\cdots,y_n)$，问：$f(x,y)$ 是否为 $\mathbb{R}^n$ 上的内积？若是请证明，若不是，请说明理由.

9. 已知 A 为复数域上的 n 阶矩阵，且存在正整数 m 使得 $A^m=E$. 证明：

(1). A 与对称矩阵相似.

(2). A 的特征值为 m 次单位根.

10. 已知 $f(x),g(x)$ 为数域 K 上的两个一元多项式，证明：存在 K 上非零二元多项式 $p(x,y)$，使得 $p(f(x),g(x))\equiv 0$.

第 15 章　中国海洋大学

15.1　2020 年数学分析考研真题

考生须知：

1. 本试卷满分为 150 分，全部考试时间总计 180 分钟；
2. 所有答案必须写在答题纸上，写在试题纸上或草稿纸上一律无效。

---

1. 计算题

(1). $\lim\limits_{x\to 0}\lim\limits_{n\to\infty}\left(\cos x\cdot\cos\dfrac{x}{2}\cdot\cos\dfrac{x}{2^2}\cdots\cos\dfrac{x}{2^n}\right)$

(2). $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\left(x^2+y^2\right)^{x^2y^2}$

2. 判断下列命题是否正确，正确的给予证明，错误的给出反例.

(1). 若函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，且对 $\forall x\in[a,b]$，都有 $f(x)>0$，则 $\exists r>0$，对 $\forall x\in[a,b]$，有 $f(x)>r$.

(2). 若函数 $f(x)$ 可导，则其导函数 $f'(x)$ 不存在第二类间断点.

(3). 若级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_{2n-1}+a_{2n})$ 收敛，且 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛.

3. 设函数 $f(x)$ 在 $(a,+\infty)$ 内可导，且 $\lim\limits_{x\to a^+}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=A$，证明：在 $(a,+\infty)$ 内至少存在一点 ξ，使得 $f'(\xi)=0$.

4. 若 E 是非空有上界的实数集，设 $\sup E=a$，且 $a\neq E$，证明：存在数列 $\{x_n\}\subseteq E$，使得 $x_n<x_{n+1},n=1,2,\cdots$，且 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$.

5. 设 $f(x)=\displaystyle\int_0^{+\infty}e^{-t^2}\cos 2xt\,dt$，证明：

(1). $f(x)$ 满足微分方程 $f'(x)+2xf(x)=0$；

(2). $f(x)=\dfrac{\sqrt{\pi}}{2}\mathrm{e}^{-x^2}$

6. 设函数

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{\sqrt{|xy|}}{x^2+y^2}\sin\left(x^2+y^2\right), & x^2+y^2\neq 0\\ 0, & x^2+y^2=0\end{cases}$$

试问

(1). 函数 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处是否连续？为什么？

(2). 函数 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处是否可微？为什么？

7. 若函数列 $\{g_n(x)\}$ 满足下列条件：

(1). $g_n(x)$ 在 $[-1,1]$ 上非负连续，且 $\lim\limits_{n\to+\infty}\int_{-1}^{1} g_n(x)\mathrm{d}x = 1.$

(2). $\forall c \in (0,1)$，$\{g_n(x)\}$ 在 $[-1,-c]$ 与 $[c,1]$ 上一致收敛于 0.

证明：对 $[-1,1]$ 上的任意连续函数 $f(x)$，有

$$\lim_{n\to+\infty}\int_{-1}^{1} f(x)\,g_n(x)\,\mathrm{d}x = f(0)$$

8. 设 $\{a_n\}$ 是正的单调递增数列，证明：级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(1-\dfrac{a_n}{a_{n+1}}\right)$ 收敛的充分必要条件是数列 $\{a_n\}$ 有界。

9. 计算封闭曲面 $\left(x^2+y^2+z^2\right)^2 = a^3 z (a>0)$ 所围立体的体积.

15.2 2020 年高等代数考研真题

考生须知：

1. 本试卷满分为 150 分，全部考试时间总计 180 分钟；
2. 所有答案必须写在答题纸上，写在试题纸上或草稿纸上一律无效。

---

1. 填空题 (8×5=40 分)

(1). 若多项式 $f(x)$ 除以 $x-2$ 的余式为 3，除以 $x-3$ 的余式为 4，则 $f(x)$ 除以 x^2-5x+6 的余式为______.

(2). 设四阶行列式 D_4 的第三行元素为 $-1,0,2,3$，第四行元素对应的余子式分别是 $5,10,a,5$，则 $a=$______.

(3). 设 $\alpha,\beta,\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3,\gamma_4$ 都是四维行向量，四阶矩阵 $A=\begin{pmatrix}\alpha\\2\gamma_2\\\gamma_3\\\gamma_4\end{pmatrix}$， $B=\begin{pmatrix}\beta\\\gamma_2\\p_3\\2\gamma_4\end{pmatrix}$，且行列式 $|A|=2,|B|=1$，则行列式 $|2A-B|=$______.

(4). 若实对称矩阵 A 与 $B=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&2\\0&2&0\end{pmatrix}$ 矩阵合同，则二次型 $X'AX$ 的正惯性指数是______.

(5). 当 t 满足______ 时，二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+2x_2^2+(1-t)x_3^2+2tx_1x_2+2x_1x_3$ 是正定的.

(6). 已知 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 与 β_1,β_2,β_3 是 3 维向量空间的两组基，若向量 γ 在这两组基下的坐标分别为 $(x_1,x_2,x_3)'$ 与 $(y_1,y_2,y_3)'$，且 $y_1=x_1,y_2=x_1+x_2,y_3=x_1+x_2+x_3$，则由基 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 到 β_1,β_2,β_3 的过渡矩阵为______.

(7). 已知 P 是数域，向量空间 P^3 上的线性变换 $\mathscr{A}$ 为：对 $\forall(a,b,c)\in P^3$，有

$$\mathscr{A}(a,b,c=(a+2b-c,b+c,a+b-2c))$$

则线性变换 $\mathscr{A}$ 的秩为______.

(8). 在二维实向量空间 $\mathbb{R}^2$ 中定义内积如下：对 $\forall x=(x_1,x_2)\in\mathbb{R}^2,\forall Y=(y_1,y_2)\in\mathbb{R}^2$，有 $(X,Y)=3x_1y_1+x_2y_2$，求向量 $\alpha=(1,1,),\beta=(0,2)$ 的夹角余弦 $\cos\langle\widehat{\alpha,\beta}\rangle=$______.

2. 设

$$f(x)=(x-1)(x-2)\cdots(x-(2n-1))+1$$

其中 n 为大于 1 的非负整数，证明：$f(x)$ 在有理数域上不可约.

3. 设 A 为 n 阶方阵，证明：

(1). 若 k 是正整数，α 是 $A^{k+1}X=0$ 的解，α 不是 $A^{k+1}X=0$ 的解，则 $\alpha,A\alpha,A^2\alpha\cdots,A^k\alpha$ 线性无关.

(2). 当正整数 $k\geq n$ 时，必有 $r(A^{k+1})=r(A^k)$

4. 设矩阵 A 的伴随矩阵

$$A^*=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\1&0&1&0\\0&-3&0&8\end{pmatrix}$$

且 $ABA^{-1}=BA^{-1}+3E$

(1). 计算行列式 $|A|$;

(2). 求矩阵 B.

5. 已知矩阵

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ a & 1 & 0 & 0 \\ a_1 & b & 2 & 0 \\ a_2 & b_1 & c & 2 \end{pmatrix}$$

与对角矩阵相似，问：$a, a_1, a_2, b, b_1, b_2, c$ 满足什么条件？

6. 已知矩阵

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & -3 & 6 \\ 2 & -2 & 4 \end{pmatrix}$$

(1). 求出 A 的特征矩阵的等价标准形；

(2). 写出 A 的不变因子，行列式因子，初等因子；

(3). 写出 A 的特征多项式和最小多项；

(4). 写出 A 的有理标准形和若尔当标准形.

7. 设 $\mathscr{F}$ 是 n 维欧几里得空间 V 的对称变换，证明：$\mathscr{F}$ 的像子空间 $\mathrm{Im}\mathscr{F}$ 是 $\mathscr{F}$ 的核子空间 $\mathrm{Ker}\mathscr{F}$ 的正交补.

第 16 章 南京大学

16.1 2020 年数学分析考研真题

考生须知:

1. 本试卷满分为 150 分，全部考试时间总计 180 分钟;
2. 所有答案必须写在答题纸上，写在试题纸上或草稿纸上一律无效。

---

1. 解答题 (15×7=105 分)

(1). 计算极限

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)-\ln(1+\sin x)}{x^3}$$

(2). 已知函数 $f(x)$ 满足 $|f'(x)|<\frac{1}{2}$，证明：存在唯一的 x，使得 $f(x)=x$.

(3). 举例：$f(x)$ 在 $[0,1]$ 上可积，但 $F(x)=\int_0^x f(x)\mathrm{d}x$ 在 $[0,1]$ 上不可导；若增加条件 $f(x)$ 单调，证明 $F(x)$ 存在单侧导数 (不需要举例).

(4). 已知函数 $f(x)$ 二阶连续可微，且是周期为 1 的周期函数，设 $a_n=\int_0^1 f(x)\cos 2\pi nx\mathrm{d}x$，证明：$\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$ 收敛.

(5). 已知幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}x^n$，求收敛半径，并判断端点处是否收敛。

(6). 计算第二型曲线积分

$$\int_L\frac{x\mathrm{d}y-(y-1)\mathrm{d}x}{x^2+(y-1)^2}$$

其中 L 为 $x^2+\frac{y^2}{4}=1$.

(7). 已知

$$f_n(x)=\begin{cases}x^n\sqrt{\ln\frac{1}{x}}, & 0<x\leqslant 1\\ 0, & x=0\end{cases}$$

证明：$\sum_{n=1}^{\infty}f_n(x)$ 一致收敛.

2. (15 分) 计算第一型曲面积分

$$\iint\limits_{x^2+y^2+z^2=1} x\cos(x+y+z)\mathrm{d}\sigma$$

3. (15 分) 设 $r>0$，B_r 是以 r 为半径，原点为圆心的 n 维球域，F 是 $B_r(0)$ 上 C' 函数，且 $F(\overrightarrow{0})=0, JF(\overrightarrow{0})=E$. 证明：对 $\forall\varepsilon>0,\exists\delta_0>0,\forall 0<\delta<\delta_0$，有

$$B_{(1-\varepsilon)\delta}(0)<F\left(B_\delta(0)\right)\subset B_{(1+\varepsilon)\delta}(0)$$

4. (15 分) 已知 $u\left(\overrightarrow{x}\right)$ 是 $B_1(0)$ 连续，在 $B_1(0)$ 有连续偏导，$B_1(0)$ 是 n 维单位圆球，且 $u|_{\partial B}=0, u(\overrightarrow{0})=-l<0$，证明：$B_L(0)\subset\nabla u\left(B_1(0)\right)$，其中 ∇u 为梯度：$B_1(0)\to\mathbb{R}^n$.

5. (15 分) 已知函数 $f(x)$ 是 (a,b) 上的解析函数，即存在一点 $x_0\in(a,b)$，使得 $f(x)$ 敛于其 x_0 处的泰勒级数. 若存在一点列 $x_n\in(a,b)$，使得 $\lim\limits_{n\to+\infty}x_n=x_0$，且对 $\forall n\in\mathbb{N}^+$，有 $f(x_n)=0$，证明：$f(x)\equiv 0$

16.2 2020 年高等代数考研真题

考生须知：

1. 本试卷满分为 150 分，全部考试时间总计 180 分钟；
2. 所有答案必须写在答题纸上，写在试题纸上或草稿纸上一律无效。

---

1. 给出一个具体的 4×4 的矩阵，求 $r(A)$ 以及 A^*.
2. 已知 $\alpha=\sqrt{2}+\sqrt{-5}$

   (1). 求包含 α 的最小数域 $\mathbb{F}$;

   (2). 证明：上问所求的 $\mathbb{F}$ 为数域 $\mathbb{Q}$ 上的线性空间，并求一组基.

3. 已知多项式 $f(x)=x^7+7x^2+2$

   (1). 证明：$f(x)$ 在 $\mathbb{Q}$ 上不可约;

   (2). 证明：$f(x)$ 至少存在一个实根;

   (3). 对 $\beta\in\mathbb{Q}$，存在 $u(x)\in\mathbb{Q}[x]$，使得 $u(\alpha)=\dfrac{1}{\alpha-\beta}$

4. 已知复对称矩阵 A 的二次型 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=X'AX$ 可约，即存在两个非常数多项式，使得

$$f\left(x_1,x_2,\cdots,x_n\right)=f_1\left(x_1,x_2,\cdots,x_n\right)f_2\left(x_1,x_2,\cdots,x_n\right)$$

   证明：$|A|\equiv 0$.

5. 已知 A 是 $m \times n$ 的矩阵，且 $r(A) = r$，并且定义

$$M(A) = \{\beta \in P^{n\times n} | AX = \beta \text{有解}\}$$

(1). 证明：$M(A)$ 是 P^n 的子空间，并求其维数;

(2). 给出一个具体的 4×4 的矩阵 A，求 $M(A)$ 的一组基.

6. 给出一个具体的秩为 1 的矩阵，求若尔当标准形和最小多项式.

7. 已知 $A = I_n$，且 $r(I_n - A) = r$，对于 $n \times n$ 阶矩阵 X 定义线性变换

$$\sigma(A) = AX$$

求 σ 的特征多项式以及所有特征子空间的维数.

8. 设 A 是 n 级正交矩阵且 $|A| = 1$，

$$f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n$$

是 A 的特征多项式，证明：

(1). 当 n 为偶数，对任意的 $0 \leqslant i \leq n$，有 $a_i = a_{n-i}$;

(2). 当 n 为奇数，对任意的 $0 \leqslant i \leqslant n$，有 $a_i = -a_{n-i}$

(3). 当 $n = 2$ 时，存在正交矩阵 B 使得 $A = B^2$.

9. 已知 A, B, C 是正定矩阵，且 ABC 是对称矩阵，证明：ABC 是正定矩阵.

第 17 章 中山大学

17.1 2020 年数学分析考研真题

考生须知:

1. 本试卷满分为 150 分，全部考试时间总计 180 分钟；
2. 所有答案必须写在答题纸上，写在试题纸上或草稿纸上一律无效。

---

1. 求不定积分 $\int x^2 \arctan x \mathrm{d}x$.
2. 已知 $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=0,\ \lim\limits_{x\to 0} g(x)=0$，试证：
$$\lim_{x\to 0}\frac{(1+f(x))^{\frac{1}{f(x)}}-(1+g(x))^{\frac{1}{g(x)}}}{f(x)-g(x)}=-\frac{\mathrm{e}}{2}$$
3. 求幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{a^n}{n}+\frac{b^n}{n^2}\right)x^n\ (a>0,b>0)$ 的收敛区间.
4. 若 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上可导，$f'(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，证明：
$$f_n(x)=n\left[f\left(x+\frac{1}{n}\right)-f(x)\right]$$
在 $[a,b]$ 上一致收敛.
5. 已知 $z=z(x,y)$，且 $x^2+y^2+z^2+xz+yz+xy=6$，求 z 的极值。
6. 证明曲线的法向量为：$\pm\left(F'_{x_0}(x_0,y_0,z_0),F'_{y_0}(x_0,y_0,z_0),F'_{z_0}(x_0,y_0,z_0)\right)$
7. 若
$$f(x,y)=\begin{cases}(x^2+y^2)^a\sin\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} & (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$
(1). 当 a 取何值时，$f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 处可微.
(2). 当 a 取何值时，$\dfrac{\partial f}{\partial x}$ 和 $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ 在 $(0,0)$ 处连续.
8. 一个补平面然后高斯公式的计算题 (补的那个平面积分为 0)

9. 计算
$$\int_L y\left(\frac{y}{2x^2}+1\right)\mathrm{d}x-\left(\frac{y}{x}+x\right)\mathrm{d}y$$
其中 L 为从点 $A(1,1)$ 沿 $(x-2)^2+(y-2)^2=1$ 逆时针到点 $B(3,3)$.

10. 若 Σ 为曲面 $z+1=\sqrt{x^2+y^2}$ 与 $z=0$ 和 $z=1$ 所围，求该曲面的表面积.

11. 求 $\lim\limits_{n\to+\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{\sin\frac{k\pi}{n}}{\sqrt{n^2+k}}$ 的极限.

12. 证明: $\tan x\sin^2 x>x^3, x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$.

13. 判断级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sqrt[n]{\frac{1}{n}}\sin n\sin\frac{1}{n}$ 的敛散性.

17.2　2020 年高等代数考研真题

考生须知:

1. 本试卷满分为 150 分，全部考试时间总计 180 分钟；
2. 所有答案必须写在答题纸上，写在试题纸上或草稿纸上一律无效。

---

1. 已知矩阵 $A=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&2&0\\1&0&1\end{pmatrix}$

   (1). 求所有与 A 可交换的矩阵；

   (2). 若 $AB+E=A^2+B$，求 B.

2. 已知 2 阶矩阵 A 的特征值为 $1,2$，求 $|A^*-2A+E|$.

3. 已知 5 阶矩阵
$$A=\begin{pmatrix}0&1&1&1&1\\1&0&1&1&1\\1&1&0&1&1\\1&1&1&0&1\\1&1&1&1&0\end{pmatrix}$$
求正交矩阵 P，使得 $P^{-1}AP$ 为对角阵.

4. 已知 5 阶矩阵

$$J=\begin{pmatrix}0&1&0&0&0\\0&0&1&0&0\\0&0&0&1&0\\0&0&0&0&1\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}$$

求 J^2 的若尔当标准型.

5. 已知 $A_1,A_2,\cdots,A_s(s\geq 2)$ 为数域 $\mathbb{K}$ 上的 n 阶矩阵，且 $A_1A_2\cdots A_s=O$，证明：

$$r(A_1)+r(A_2)+\cdots+r(A_s)\leq(s-1)n$$

6. 已知 C 为 Q 上的线性空间，$f(x)$ 是 $Q[x]$ 中的一个 n 次不可约因式，$\alpha\in\mathbb{C}$ 是 $f(x)$ 的一个根，且

$$Q[x]=\left\{a_0+a_1\alpha+a_2\alpha^2+\cdots+a_{n-1}\alpha^{n-1}|\alpha_i\in Q,i=1,2,\cdots,n-1\right\}$$

(1). 证明：$Q[x]$ 是 C 的一个有限维子空间，求 $Q[x]$ 的一组基；

(2). 设 $\beta\in Q[x],\beta\neq 0$，证明：存在 $r\in Q[x]$，使得 $\beta_r=1$.

7. 设 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 是互不相同的数，$V\in R_n[x]$，定义 V 到 R 上的映射 L_i 为 $L_i(f(x))=f(x_i)$，且对 $\forall f(x)\in\mathbb{R}_n(x),i=1,2,\cdots,n$，试证：

(1). $L_1,L_2,\cdots,L_n$ 为 V 的对偶空间 V^* 的一组基；

(2). 存在 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$，使得对 $\forall f(x)\in V$ 有

$$\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=\sum_{i=1}^{m}\lambda_i f(x)$$

8. 已知 σ 为 n 维欧氏空间 V 上的可逆线性变换，并且具有性质 α 与 β 正交，则 $\sigma(\alpha),\sigma(\beta)$ 正交，证明：存在 $K\in\mathbb{R}$，使得 $k\sigma$ 为正交变换.

9. 定义 $V=M_2(\mathbb{R})$ 的二元函数如下：$\forall A,B\in M_2(\mathbb{R}),f(A,B)=|A+B|-|A|-|B|$

(1). 证明：f 是 V 上的对称双线性函数；

(2). 求 f 在基 $E_{11}=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix},E_{12}=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix},E_{21}=\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix},E_{22}=\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}$ 下的矩阵以及 f 的符号差.

第 18 章 大连理工大学

18.1 2020 年数学分析考研真

考生须知：

1. 本试卷满分为 150 分，全部考试时间总计 180 分钟；
2. 所有答案必须写在答题纸上，写在试题纸上或草稿纸上一律无效。

一、证明题 (6 × 10=60 分)

1. 若 $h(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，且 $h(0)=0$，求证：

$$g_n(x)=\int_0^x h\left(s^n\right)\mathrm{d}s$$

在 $[0,1]$ 上一致收敛.

2. 已知 $g \in C[0,+\infty)$ $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=c\in\mathbb{R}$，试证：

$$\lim_{n\to\infty} n\int_0^{+\infty}\frac{g(x)}{n^2+x^2}\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2}c$$

3. 设 $r>1, \{a_n\}$ 是正项数列，满足 $n\ln\dfrac{a_n}{a_{n+1}}>r$，试证：$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛.

4. 已知

$$\begin{cases} \mathrm{e}^x+f(x,y) & =u^2 \\ \mathrm{e}^y-f(x,y) & =v^2 \end{cases}$$

且 $f(0,0)=0$，试证：$(1,1)$ 领域 (u,v) 唯一确定的 (x,y).

5. 设 $f(x)$ 连续可微，J 为 $f(x)$ 其 Jacobi 矩阵. 试证：$f(x)$ 是凸函数的充分必要条件是对 $\forall a$，都有 $f(x)\geq f(a)+Jf(a)f'(a)$.

6. 设 $L:\dfrac{x^2}{25}+\dfrac{y^2}{16}=1$，试求

$$\int_L\frac{y^3\mathrm{d}x-xy^2\mathrm{d}y}{\left(x^2+y^2\right)^2}$$

7. 若 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=A$ 存在且为有限数. 求证: A 一致连续.

8. 试求
$$\lim_{x\to 1}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{3^n}\cos\left(n\pi x^3\right)$$
9. 计算
$$\lim_{x\to\infty} 2x\left[\left(1+\frac{1}{x}\right)^x-\mathrm{e}\right]$$
10. 判断 $\int_1^{+\infty}(-1)^{[x]}\mathrm{d}x$ 的敛散性.

二、计算题

1. 计算二重积分
$$\iint_D \mathrm{e}^{\frac{x-y}{x+y}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$
其中 $D=\{(x,y)|x\geq 0,y\geq 0,x+y\geq 1\}$
2. 设 a 是有理数，且非整数，求 $f(x)=\cos ax$ 在 $[-\pi,\pi)$ 的傅里叶级数.

三、简答题

1. 设 $f(x,u)$ 在 $[0,+\infty)\times[a,b]$ 上连续，对 $\forall u\in[a,b)$，$\int_0^{+\infty}f(x,u)\mathrm{d}x$ 收敛，$\int_0^{+\infty}f(x,b)\mathrm{d}x$ 发散，求证：$\int_0^{+\infty}f(x,u)\mathrm{d}x$ 在 $[a,b)$ 上不一致收敛.
2. 设 $g(x,y)=|xy|$，判定其在 $(0,0)$ 处的可微性.
3. 设 $f(x,y)=\mathrm{e}^{ay}\cos(\ln x)$，求
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{1}{a^2x^2}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}+\frac{\partial f}{\partial x}$$
4. 设 $f(x)$ 在 (a,b) 上至多有第一类间断点，且有
$$f(\frac{x+y}{2})\leq\frac{f(x)+f(y)}{2}$$
求证：$f(x)$ 连续.

第 19 章 四川大学

19.1 2020 年数学分析考研真题

考生须知：

1. 本试卷满分为 150 分，全部考试时间总计 180 分钟；
2. 所有答案必须写在答题纸上，写在试题纸上或草稿纸上一律无效。

一、计算题

1. 设 $f'(x)$ 在 $x=0$ 的无穷邻域内存在，且有 $f(0)=f'(0)=0$，令
$$x_n = f\left(\frac{1}{n^2}\right)+f\left(\frac{2}{n^2}\right)+\cdots+f\left(\frac{n}{n^2}\right)$$
求 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$.

2. 计算 $\displaystyle\int \frac{1}{1+x^4}\mathrm{d}x$.

3. 计算二重积分
$$\iint_D \frac{(x+y)\ln\left(1+\frac{y}{x}\right)}{\sqrt{1-x-y}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$
其中 D 为 $x=0, y=0, x+y=1$ 所围成的区域.

4. 计算曲线积分
$$I=\oint_L [x\cos(n,x)+y\cos(n,y)]\mathrm{d}S$$
其中 $(n,x),(n,y)$ 分别是由 x 轴，y 轴正向与 L 的外法向量 n 之间的夹角，L 为逐渐光滑的简单闭曲线.

5. 计算曲面积分
$$\iint_S \frac{x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+z^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{x^2+y^2+z^2}$$
其中 S 是曲面 $x^2+y^2=r^2$ 以及 $z=r, z=-r(r>0)$ 所围成的区域

二、证明题

1. $f(x)$ 在 $[a,b]$ 可积，$F(x)$ 在 $[a,b]$ 连续，在 (a,b) 内除有限个点外都有 $F'(x)=f(x)$，则
$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = F(b)-F(a)$$

2. 若函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上三阶可导，且 $f(x), f'''(x)$ 在 $(\infty,+\infty)$ 上有界，证明 $f'(x)$ 与 $f''(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上有界.

3. 若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n\mathrm{e}^{-nx}$ 在 $(0,+\infty)$ 上收敛，试证级数在 $[0,+\infty)$ 上不一致收敛.

4. 若 $x_0=a, 0<a<\dfrac{\pi}{2}$，且 $x_n=\sin x_{n-1}$，求证：$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{\dfrac{n}{3}}x_n=1$.

5. 若 $f(x)=\dfrac{x+2}{x+1}\sin\dfrac{1}{x}, a>0$，试证：$f(x)$ 在 $(0,a)$ 内非一致收敛又在 $[a,+\infty)$ 上一致收敛.

6. 证明广义积分 $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{1+x^2\sin^2 x}$ 发散.

7. 若 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上可积，试证：

$$\lim_{y\to 0^+}\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-xy}f(x)\,\mathrm{d}x=\int_0^{+\infty}f(x)\,\mathrm{d}x$$

第 20 章　电子科技大学

20.1　2020 年数学分析考研真题

考生须知：

1. 本试卷满分为 150 分，全部考试时间总计 180 分钟；
2. 所有答案必须写在答题纸上，写在试题纸上或草稿纸上一律无效。

一、填空题

1. 计算极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1^2+3^2+\cdots+(2n+1)^2}{n^3}=$______.
2. 求 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{n^n}{n!}x^n$ 的收敛半径______.
3. 求极限 $\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{\int_0^{x^2}\sin\sqrt{t}\,\mathrm{d}t}{x^3}=$______.
4. 若 $z=f\left(x^2+y^2+z^2,xyz\right)$，且 f 可微，求 $\dfrac{\partial z}{\partial x}$______.
5. 叙述 $f_n(x)$ 一致收敛到 $f(x)$ 的定义______.

二、计算题

1. 若 $F(x)=\int_0^y(x+y)f(x)\mathrm{d}x$，其中 $f(x)$ 为可微函数，求 $F''(y)$.
2. 已知函数 $z=x^2y(3-x-y)$，且 $x,y\geq0,x+y\leq4$，求其最大值和最小值.
3. 计算曲面积分
$$\iint_{\Sigma}x^2\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y^2\mathrm{d}x\mathrm{d}z+z^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$
其中 $\Sigma:z=\sqrt{x^2+y^2}(0\leq z\leq1)$
4. 计算曲线积分
$$\oint_L\frac{x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x}{x^2+y^2}$$
其中 L 为不经过原点的简单闭曲线，方向为逆时针.

三、证明题

1. 已知函数 $f(x)$ 为 $[0,1]$ 上的连续函数，且 $f(0)=f(1)=0, g(x)=x^2f(x)$，试证：存在 $\xi\in(0,1)$，使得 $g''(\xi)=0$.
2. 若 $f(x)$ 为 $[0,1]$ 连续可微函数，且 $f(0)-f(1)=1$，试证：$\int_0^1[f'(x)]^2\mathrm{d}x=1$.
3. 证明：$\sum_{n=1}^{\infty}x^a\mathrm{e}^{-nx}$ 在 $x\in[\delta,+\infty),(\delta>0)$ 上一致收敛.
4. 证明：含参变量积分 $\int_0^{+\infty}a\mathrm{e}^{-ax}\mathrm{d}x$ 在 $[\delta,+\infty),(\delta>0)$ 一致收敛.
5. 若数列 $\{a_n\}$ 单调递增且有界，恒正，试证：$\sum_{n=1}^{\infty}(1-\frac{a_n}{a_{n+1}})$ 收敛.
6. 若 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，x_n 为此区间的基本数列，试证：$f(x_n)$ 也为基本数列.
7. 设 $0<a_n<1, a_{n+1}=a_n(1-a_n)$，试证：

   (1) $\lim_{n\to\infty}na_n=1$; (2) $\lim_{n\to\infty}\frac{n(1-na_n)}{\ln n}=1$.

第 21 章　湖南大学

21.1　2020 年数学分析考研真题

考生须知：

1. 本试卷满分为 150 分，全部考试时间总计 180 分钟；
2. 所有答案必须写在答题纸上，写在试题纸上或草稿纸上一律无效。

---

1. 计算题

   (1). 已知函数 $f(x)$ 的一个原函数为 $\arctan x$，求 $\int xf'(x)\mathrm{d}x$.

   (2). 求 $\lim\limits_{\alpha\to 0}\int_{\alpha}^{1+\alpha}\frac{1}{1+\alpha+\alpha^2}\mathrm{d}x$.

   (3). 已知 $\begin{cases} x=\varphi(t) \\ y=\varphi(t) \end{cases}$ 且满足 $\varphi'(t)=\mathrm{e}^t+1, \frac{\mathrm{d}^3y}{\mathrm{d}x^3}=\mathrm{e}^t+2t$，求 $\frac{\mathrm{d}^4y}{\mathrm{d}x^4}$.

   (4). 已知 $\lim\limits_{x\to-\infty}(\sqrt{x^2-x+1}-ax-b)=0$，求 a,b 的值.

2. 已知数列 $\{x_n\}$ 满足 $\sum\limits_{k=1}^{n}|x_{k+1}-x_k|\le M$，证明：数列 $\{x_n\}$ 收敛.

3. 讨论 $\begin{cases} x=a(t-\sin t) \\ y=a(1-\cos t) \end{cases}$ $(0\le t<2\pi)$ 的凸性.

4. 证明：$f(x)=\sin\frac{1}{x}$ 在 $(0,1)$ 上不一致连续.

5. 已知 $f(x)\in[a,b]$，且 $f(x)$ 单调递增，证明：$\int_a^b xf(x)\mathrm{d}x\ge\frac{a+b}{2}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$.

6. 已知 $u_n(x)=\frac{\cos nx}{n\sqrt{n}}, x\in(-\infty,+\infty)$，证明：

   (1). $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上一致收敛;

   (2). 设 $S(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x)$，求 $\int_0^{\pi}S(x)\mathrm{d}x$;

   (3). 在区间 $(0,2\pi)$ 上 $S(x)$ 是否可以逐项求导，若可以，求 $S'(x), x\in(0,2\pi)$；若不可，说明理由.

7. 已知

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}, & x^2+y^2\neq 0\\ 0, & x^2+y^2=0\end{cases}$$

证明：$f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 处的偏导数存在，但不可微.

8. 计算第一型曲面积分

$$I=\iint_{\Sigma}\frac{\mathrm{d}S}{\sqrt{x^2+y^2+(z+a)^2}}$$

其中 σ 为 $x^2+y^2+z^2=a^2(z>0)$

9. 已知 $f(x)\in C[0,1]$，二阶导数连续，且 $f(0)=f(1)=0$，对 $\forall x\in(0,1)$，均有 $|f'(x)|\leq A$，试证：$|f'(x)|\leq\dfrac{A}{2}$.

第 22 章　华中科技大学

22.1　2020 年数学分析考研真题

考生须知：

1. 本试卷满分为 150 分，全部考试时间总计 180 分钟；
2. 所有答案必须写在答题纸上，写在试题纸上或草稿纸上一律无效。

---

1. (15 分) 求极限
$$\lim_{n\to\infty}\left[\frac{\sin\frac{x}{n}}{n+1}+\frac{2\sin\frac{2x}{n}}{2n+1}+\frac{3\sin\frac{3}{n}x}{3n+1}+\cdots+\frac{n\sin\frac{n}{n}x}{n^2+1}\right]$$

2. (15 分) 求定积分
$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x\cos x}{a^2\sin^2 x+b^2\cos^2 x}\mathrm{d}x$$

3. (15 分) 求二重积分
$$\iint_D\frac{x}{y^2(1+xy)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$
其中 D 是由 $xy=1, xy=3, y^2=x, y^2=3x$ 围成的区域.

4. (15 分) 求第二型曲线积分

其中 L 是 $(x-1)^2+y^2=4$ 取正向.

5. (15 分) 求
$$f(x)=\begin{cases}-\dfrac{\pi}{4}, & -\pi<x<0\\ \dfrac{\pi}{4}, & 0\le x<\pi\end{cases}$$
的 Fourier 展开式，并求 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}$.

6. (15 分) 设 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上一致连续，在 $[0,+\infty)$ 上连续且
$$\lim_{x\to+\infty}[f(x)-g(x)]=0$$
证明：$g(x)$ 也一致收敛.

7. (15 分) 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上二阶可导，且有 $f'(0)=f'(1)=0$，试证：

$$\exists\xi\in(0,1),\ \text{s.t.}\ \left|f''(\xi)\right|\geq 4|f(1)-f(0)|$$

8. (15 分) 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，且恒正，试证：

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\int_a^b\frac{1}{f(x)}\mathrm{d}x\geq(b-a)^2$$

9. (15 分) 设 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 绝对收敛，证明：

$$\sum_{n=1}^{\infty}(a_1+a_2+\cdots+a_n)a_n$$

10. (15 分) 若 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛，$\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ 是正项级数，b_n 单调递增且 $\lim_{n\to\infty}b_n=+\infty$，试证：

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n}{b_n}=0$$

第 23 章 厦门大学

23.1 2020 年数学分析考研真题

考生须知：

1. 本试卷满分为 150 分，全部考试时间总计 180 分钟；
2. 所有答案必须写在答题纸上，写在试题纸上或草稿纸上一律无效。

---

1. 已知数列 $\{x_k\}$ 满足 $x_{k+1}=\dfrac{x_k^2}{2(x_k-1)}(k=0,1,\cdots)$，且 $x_1>0$，证明：数列 $\{x_k\}$ 收敛，并求其极限.
2. 已知 $a_n=\left(\mathrm{e}-\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n\right)^p$，$p$ 为实数，判断 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 的收敛性并证明.
3. 已知 $f(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上连续可微，且 $|f'(x)|<1$，证明：存在 $0<M<1$，使不等式
$$|f(x)-f(0)|\le M|x|$$
成立.
4. 已知 $f(x)\in\mathbb{C}^2(0,1)$，且 $f(0)=f(1)=0$，x 在 $(0,1)$ 内且 $f(x)\ne0$，证明：
$$\int_0^1\frac{f''(x)}{f(x)}\mathrm{d}x>4$$
5. 已知 $f(x)$，且 $0<a<b$，$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=k$. 证明：
$$\int_0^{+\infty}\frac{f(ax)-f(bx)}{x}\mathrm{d}x=(f(0)-k)\ln\frac{b}{a}$$
6. 证明不等式
$$\sqrt{\frac{\pi}{2}\left(1-\mathrm{e}^{-\frac{u^2}{2}}\right)}\le\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}\mathrm{d}x\le\sqrt{\frac{\pi}{2}\left(1-\mathrm{e}^{-u^2}\right)}(u>0)$$
7. 已知 $2x^2+y^2+z^2+2xy-2x-2y+4z-4=0$，求 $z=z(x,y)$ 的极值.
8. 已知 $\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x$ 绝对收敛，且 $f(x)\in\mathbb{C}(-\infty,+\infty)$，证明：
$$g(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\sin(tx)\,\mathrm{d}t$$
一致连续.

第 24 章　吉林大学

24.1　2020 年数学分析考研真题

考生须知：

1. 本试卷满分为 150 分，全部考试时间总计 180 分钟；
2. 所有答案必须写在答题纸上，写在试题纸上或草稿纸上一律无效。

---

1. 计算题

(1). 求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\mathrm{e}-(1+x)^{\frac{1}{x}}}{x}$

(2). 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}(n!)^{\frac{1}{n^2}}$

(3). 求不定积分 $\displaystyle\int\frac{\mathrm{d}x}{(\sqrt{x}+1)(x+3)}$

(4). 求定积分 $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x}{\sin x+\cos x}\mathrm{d}x$

(5). 设 $u(x,y), v=v(x,y)$ 是由方程组

$$\begin{cases}3x=3\mathrm{e}^{v}+u^{3}\\3y=3\mathrm{e}^{u}+v^{3}\end{cases}$$

确定的隐函数，其中 $\mathrm{e}^{u+v}\neq u^2v^2$，求 $\dfrac{\partial u}{\partial x},\dfrac{\partial u}{\partial y},\dfrac{\partial v}{\partial x},\dfrac{\partial v}{\partial y}$

(6). 求极限

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\ln n}{\ln\left(1^{2019}+2^{2019}+\cdots+n^{2019}\right)}$$

(7). 求数项级数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(2n+1)}$ 的和.

(8). 设

$$f(t)=\iiint_{x^2+y^2+z^2\leq t^2}\mathrm{e}^{x^2+y^2+z^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z, t>0$$

求 $f'(1)$.

(9). 计算第二型曲线

$$I=\int_{\Gamma}\left(2xy^{3}-y^{2}\cos x\right)\mathrm{d}x+\left(1-2y\sin x+3x^{2}y^{2}\right)\mathrm{d}y$$

其中 Γ 是抛物线 $2x=\pi y^{2}$ 上从 $(0,0)$ 到 $\left(\frac{\pi}{2},1\right)$ 的那一段.

2. 用 $\varepsilon-N$ 语言证明：$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{2n+1}=1$

3. 判断数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n}{\sqrt{n}}$ 的敛散性.

4. 求函数 $f(x,y,z)=x^{2}+y^{2}+2z^{2}$ 在区域 $D=\{(x,y,z)||x|+|y|+|z|\leq 1\}$ 上的最值.

5. 设

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{\ln(1+xy)}{x-\sin y}, & x\neq\sin y\\ 0, & x=\sin y\end{cases}$$

试计算 $\lim\limits_{x\to0}\lim\limits_{y\to0}f(x,y)$ 和 $\lim\limits_{y\to0}\lim\limits_{x\to0}f(x,y)$，并判断 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}f(x,y)$ 是否存在？

6. 设函数 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 内可微，且在 $(0,1)$ 内恒有 $\ln x\leq\frac{f(x)}{x}\leq 0$，试证：存在 $\xi\in(0,1)$，使得

$$f'(\xi)=1+\ln\xi$$

7. 证明：方程 $y=x+\frac{1}{2}\arctan$ 在 $\mathbb{R}^{2}$ 内存在唯一连续解 $y=y(x)$.

第 25 章 重庆大学

25.1 2020 年数学分析考研真题

考生须知：

1. 本试卷满分为 150 分，全部考试时间总计 180 分钟；
2. 所有答案必须写在答题纸上，写在试题纸上或草稿纸上一律无效。

---

1. 计算题

(1). 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\cos\frac{\pi}{n}}{n+\frac{1}{2}}+\dfrac{\cos\frac{\pi}{n}}{n+\frac{1}{2^2}}+\cdots+\dfrac{\cos\frac{\pi}{n}}{n+\frac{1}{2^n}}$

(2). 求极限 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{(\sin x-\sin(\sin x))\tan x}{e^{x^4}-1}$

(3). 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\tan^n\left(\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{1}{n}\right)$

2. 设 $x_1\in(0,1)$，且 $x_{n+1}=\arctan x_n$

(1). 证明：$\{x_n\}$ 极限存在，并求极限.

(2). 求 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{x_n}{x_{n+1}}\right)^{\frac{1}{x_n^2}+1}$

3. 判断

$$f(x)=\begin{cases}\sin(\pi x), & x\text{为有理数}\\ 0, & x\text{为无理数}\end{cases}$$

不连续点及其间断类型.

4. 设正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛于 S，求

(1). $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{na_1+(n-1)a_2+\cdots+a_n}{n}$

(2). $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_1+2a_2+\cdots+na_n}{n}$

5. 设 $f(x)$ 是 $[0,+\infty)$ 上的单调递减函数，且 $\int_0^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x<+\infty$，试证：$\lim\limits_{x\to+\infty}xf(x)=0$.

6. 设 $\{f_n(x)\}$ 中每一项 $f_n(x)$ 都是 $[a,b]$ 上的单调函数，证明：若每一项 $f_n(x)$ 的单调性相同，且 $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(a)$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(b)$ 收敛，则 $\{f_n(x)\}$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛.

7. 计算
$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\left(1+\frac{1}{n(n-2)}\right)x^n$$
收敛区间与和函数 $f(x)$.

8. 计算第二型曲面积分
$$\iint_S z\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

9. 计算第一型曲线积分
$$\int_L x^2\mathrm{d}S$$
其中 L 是 $x^2+y^2+z^2=a^2$ 与 $x+y+z=0$ 的交线.

10. 设 $f(x)$ 是 $[0,1]$ 上的连续函数，对 $\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0$，当 $x\in[0,1],|x-x_0|<\delta$ 时，有
$$f(x)<f(x_0)+\varepsilon$$
证明：函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上有上界，且能取到最大值.

第 26 章 东南大学

26.1 2020 年数学分析考研真题

考生须知：

1. 本试卷满分为 150 分，全部考试时间总计 180 分钟；
2. 所有答案必须写在答题纸上，写在试题纸上或草稿纸上一律无效。

---

1. 计算题 ($7\times 7=49$ 分)

(1). 计算极限

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+2^{-n}\right)^n$$

(2). 求极限

$$\lim_{x\to 0^+} x\int_{\sin x}^{1}\frac{\ln t}{t}dt$$

(3). 计算三重积分

$$\iiint_{\Omega} x^2\sqrt{x^2+y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

其中有界区域 Ω 由 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 和 $z=x^2+y^2$ 围成.

(4). 计算

$$\int_0^1\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^4}}\int_0^1\frac{x^2\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^4}}$$

(5). 无

(6). 计算

$$\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-px}\frac{\sin bx-\sin ax}{x}\mathrm{d}x,\quad p>0, b>a>0$$

(7). 求级数

$$\sum_{n=0}^{\infty}a_n$$

其中 $a_n=\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin^n x\cos x\mathrm{d}x$

2. 解答题 ($5\times 10=50$ 分)

(1). 设 $\{a_n\}$ 收敛，$\{b_n\}$ 有界发散，求 $\{a_nb_n\}$ 发散的充要条件.

(2). 设 $g(x)$ 二阶连续可导，且 $g(0)=1$，令

$$f(x)=\begin{cases} g'(0), & x=0 \\ \dfrac{g(x)-\cos x}{x}, & x\neq 0 \end{cases}$$

讨论

I. $f(x)$ 在 $x=0$ 的连续性.

II. $f'(x)$ 的表达式以及 $f'(x)$ 在 $x=0$ 处的连续性.

(3). 设 $f(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上一致收敛，$\varphi(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上连续，且

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)-\varphi(x)=0$$

那么 $\varphi(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上一致连续吗？

(4). 设级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛，同时 $\lim\limits_{n\to\infty} b_n=1$

I. 若 $a_n\geq 0$，请问 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_nb_n$ 是否一定收敛？

II. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_nb_n$ 是否一定收敛？若是，给出证明；若不是，给出反例.

(5). 求原点到 $x^2+y^2=4z$ 与 $x^2+xy+y^2=4$ 交线的最近距离和最远距离.

3. 证明题 $(4\times 10+11=51$ 分)

(1). 设 $f_n(x)=\sin x+\sin^2 x+\cdots+\sin^n x, n\geqslant 2$

I. 证明 $f_n(x)=1$ 在 $(0,\dfrac{\pi}{2})$ 上必有解 x_n.

II. 求 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$.

(2). 设 $f(x)$ 是非负连续函数，同时

$$f(x)\leqslant \int_0^x f^2(t)\mathrm{d}t,\quad x\in\mathbb{R}$$

证明：$f(x)\equiv 0, x\in\mathbb{R}$.

(3). 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上二次可微，$f(0)=f(1)=0$, $\min\limits_{x\in[0,1]} f(x)=-1$，证明：

$$\max_{x\in[0,1]} f''(x)\geqslant 8$$

(4). 无

(5). 叙述有限覆盖定理, 并用有限覆盖定理证明有界数列必有收敛子列.