

第十一届全国大学生数学竞赛(非数学类)试题

参考解答及评分标准

一、填空题(每小题6分)

1. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(e^{\sin x} + \sqrt[3]{1 - \cos x}) - \sin x}{\arctan(4\sqrt[3]{1 - \cos x})} = \frac{1}{4}.$

解: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(e^{\sin x} + \sqrt[3]{1 - \cos x}) - \sin x}{\arctan(4\sqrt[3]{1 - \cos x})} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(e^{\sin x} - 1) + \sqrt[3]{1 - \cos x}}{4\sqrt[3]{1 - \cos x}} - \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{4\sqrt[3]{1 - \cos x}}$
 $= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(e^{\sin x} - 1)}{4\left(\frac{x^2}{2}\right)^{1/3}} + \frac{1}{4} - \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{4\left(\frac{x^2}{2}\right)^{1/3}} = \frac{1}{4}.$

2. 设隐函数 $y = y(x)$ 由方程 $y^2(x - y) = x^2$ 所确定, 则 $\int \frac{dx}{y^2} = \frac{3y}{x} - 2\ln\left|\frac{y}{x}\right| + C.$

解: 令 $y = tx$, 则 $x = \frac{1}{t^2(1-t)}, y = \frac{1}{t(1-t)}, dx = \frac{-2+3t}{t^3(1-t)^2} dt,$

这样, $\int \frac{dx}{y^2} = \int \frac{-2+3t}{t} dt = 3t - 2\ln|t| + C = \frac{3y}{x} - 2\ln\left|\frac{y}{x}\right| + C.$

3. 定积分 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{e^x(1+\sin x)}{1+\cos x} dx = e^{\frac{\pi}{2}}.$

解: $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{e^x(1+\sin x)}{1+\cos x} dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{e^x}{1+\cos x} dx + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{1+\cos x} de^x$
 $= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{e^x}{1+\cos x} dx + \frac{\sin x e^x}{1+\cos x} \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \frac{\cos x(1+\cos x) + \sin^2 x}{(1+\cos x)^2} dx$
 $= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{e^x}{1+\cos x} dx + \frac{\sin x e^x}{1+\cos x} \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{e^x}{1+\cos x} dx = e^{\frac{\pi}{2}}.$

4. 已知 $du(x, y) = \frac{ydx - xdy}{3x^2 - 2xy + 3y^2}$, 则 $u(x, y) = \frac{1}{2\sqrt{2}} \arctan \frac{3}{2\sqrt{2}} \left(\frac{x}{y} - \frac{1}{3}\right) + C.$

解: $du(x, y) = \frac{ydx - xdy}{3x^2 - 2xy + 3y^2} = \frac{d\left(\frac{x}{y}\right)}{3\left(\frac{x}{y}\right)^2 - \frac{2x}{y} + 3} = \frac{1}{2\sqrt{2}} d \arctan \frac{3}{2\sqrt{2}} \left(\frac{x}{y} - \frac{1}{3}\right).$

所以, $u(x, y) = \frac{1}{2\sqrt{2}} \arctan \frac{3}{2\sqrt{2}} \left(\frac{x}{y} - \frac{1}{3}\right) + C.$

5. 设 $a, b, c, \mu > 0$, 曲面 $xyz = \mu$ 与曲面 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ 相切, 则 $\mu = \frac{abc}{3\sqrt{3}}$.

解: 根据题意有: $yz = \frac{2x}{a^2} \lambda$, $xz = \frac{2y}{b^2} \lambda$, $xy = \frac{2z}{c^2} \lambda$, 以及

$$\mu = 2\lambda \frac{x^2}{a^2}, \quad \mu = 2\lambda \frac{y^2}{b^2}, \quad \mu = 2\lambda \frac{z^2}{c^2}, \quad \text{从而得: } \mu = \frac{8\lambda^3}{a^2 b^2 c^2}, \quad 3\mu = 2\lambda,$$

$$\text{联立解得: } \mu = \frac{abc}{3\sqrt{3}}.$$

二、(14 分) 计算三重积分 $\iiint_{\Omega} \frac{xyz}{x^2 + y^2} dx dy dz$, 其中 Ω 是由曲面 $(x^2 + y^2 + z^2)^2 = 2xy$ 围成的区域在第一卦限部分.

解: 采用“球面坐标”计算, 并利用对称性, 得

$$\begin{aligned} I &= 2 \int_0^{\frac{\pi}{4}} d\theta \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{\sqrt{2}\sin\varphi\sqrt{\sin\theta\cos\theta}} \frac{\rho^3 \sin^2\varphi \cos\theta \sin\theta \cos\varphi}{\rho^2 \sin^2\varphi} \rho^2 \sin\varphi d\rho && \text{-----5 分} \\ &= 2 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin\theta \cos\theta d\theta \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\varphi \cos\varphi d\varphi \int_0^{\sqrt{2}\sin\varphi\sqrt{\sin\theta\cos\theta}} \rho^3 d\rho \\ &= 2 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin^3\theta \cos^3\theta d\theta \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^5\varphi \cos\varphi d\varphi && \text{-----10 分} \\ &= \frac{1}{4} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin^3 2\theta d\theta \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^5\varphi d(\sin\varphi) \\ &= \frac{1}{48} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 t dt = \frac{1}{48} \cdot \frac{2}{3} = \frac{1}{72}. && \text{-----14 分} \end{aligned}$$

三、(14 分) 设 $f(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上可微, $f(0) = 0$, 且存在常数 $A > 0$, 使得 $|f'(x)| \leq A|f(x)|$ 在 $[0, +\infty)$ 上成立, 试证明: 在 $(0, +\infty)$ 上有 $f(x) \equiv 0$.

证明: 设 $x_0 \in [0, \frac{1}{2A}]$, 使得 $|f(x_0)| = \max \left\{ |f(x)| \mid x \in [0, \frac{1}{2A}] \right\}$, -----5 分

$$|f(x_0)| = |f(0) + f'(\xi)x_0| \leq A|f(x_0)| \frac{1}{2A} = \frac{1}{2}|f(x_0)|, \quad \text{只有 } |f(x_0)| = 0.$$

故当 $x \in [0, \frac{1}{2A}]$ 时, $f(x) \equiv 0$. -----12 分

递推可得, 对所有的 $x \in [\frac{k-1}{2A}, \frac{k}{2A}]$, $k = 1, 2, \dots$, 均有 $f(x) \equiv 0$. -----14 分

四、(14 分) 计算积分 $I = \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{\pi} e^{\sin\theta(\cos\phi - \sin\phi)} \sin\theta d\theta$

解: 设球面 $\Sigma: x^2 + y^2 + z^2 = 1$, 由球面参数方程

$$x = \sin \theta \cos \phi, \quad y = \sin \theta \sin \phi, \quad z = \cos \theta$$

知 $dS = \sin \theta d\theta d\phi$, 所以, 所求积分可化为第一型曲面积分

$$I = \iint_{\Sigma} e^{x-y} dS \quad \text{-----4 分}$$

设平面 $P_t: \frac{x-y}{\sqrt{2}} = t, -1 \leq t \leq 1$, 其中 t 为平面 P_t 被球面截下部分中心到原点距离. 用平面 P_t 分割球面 Σ , 球面在平面 P_t, P_{t+dt} 之间的部分形如圆台外表面状, 记为 $\Sigma_{t,dt}$. 被积函数在其上为 $e^{x-y} = e^{\sqrt{2}t}$. -----8 分

由于 $\Sigma_{t,dt}$ 半径为 $r_t = \sqrt{1-t^2}$, 半径的增长率为 $d\sqrt{1-t^2} = \frac{-tdt}{\sqrt{1-t^2}}$ 就是 $\Sigma_{t,dt}$ 上下底半径之差. 记圆台外表面斜高为 h_t , 则由微元法知 $dt^2 + (d\sqrt{1-t^2})^2 = h_t^2$, 得到 $h_t = \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}$, 所以 $\Sigma_{t,dt}$ 的面积为 $dS = 2\pi r_t h_t = 2\pi dt$, -----12 分

$$I = \int_{-1}^1 e^{\sqrt{2}t} 2\pi dt = \frac{2\pi}{\sqrt{2}} e^{\sqrt{2}t} \Big|_{-1}^1 = \sqrt{2}\pi(e^{\sqrt{2}} - e^{-\sqrt{2}}). \quad \text{-----14 分}$$

五、(14 分) 设 $f(x)$ 是仅有正实根的多项式函数, 满足 $\frac{f'(x)}{f(x)} = -\sum_{n=0}^{+\infty} c_n x^n$. 试证: $c_n > 0$,

($n \geq 0$), 极限 $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n\sqrt[n]{c_n}}$ 存在, 且等于 $f(x)$ 的最小根.

证明: 由 $f(x)$ 为仅有正实根的多项式, 不妨设 $f(x)$ 的全部根为 $0 < a_1 < a_2 < \dots < a_k$, 这样,

$$f(x) = A(x-a_1)^{r_1} \dots (x-a_k)^{r_k},$$

其中 r_i 为对应根 a_i 的重数 ($i = 1, \dots, k, r_k \geq 1$). -----2 分

$$f'(x) = Ar_1(x-a_1)^{r_1-1} \dots (x-a_k)^{r_k} + \dots + Ar_k(x-a_1)^{r_1} \dots (x-a_k)^{r_k-1},$$

所以, $f'(x) = f(x) \left(\frac{r_1}{x-a_1} + \dots + \frac{r_k}{x-a_k} \right)$, 从而, $-\frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{r_1}{a_1} \cdot \frac{1}{1-\frac{x}{a_1}} + \dots + \frac{r_k}{a_k} \cdot \frac{1}{1-\frac{x}{a_k}}$.

-----6 分

若 $|x| < a_1$, 则

$$-\frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{r_1}{a_1} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{x}{a_1} \right)^n + \dots + \frac{r_k}{a_k} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{x}{a_k} \right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{r_1}{a_1^{n+1}} + \dots + \frac{r_k}{a_k^{n+1}} \right) x^n.$$

而 $-\frac{f'(x)}{f(x)} = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$, 由幂级数的唯一性知

$$c_n = \frac{r_1}{a_1^{n+1}} + \dots + \frac{r_k}{a_k^{n+1}} > 0, \quad \text{-----9 分}$$

$$\frac{c_n}{c_{n+1}} = \frac{\frac{r_1}{a_1^{n+1}} + \dots + \frac{r_k}{a_k^{n+1}}}{\frac{r_1}{a_1^{n+2}} + \dots + \frac{r_k}{a_k^{n+2}}} = a_1 \cdot \frac{r_1 + \dots + \left(\frac{a_1}{a_k} \right)^{n+1} r_k}{r_1 + \dots + \left(\frac{a_1}{a_k} \right)^{n+2} r_k}.$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{c_n}{c_{n+1}} = a_1 \cdot \frac{r_1 + 0 + \dots + 0}{r_1 + 0 + \dots + 0} = a_1 > 0, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{c_{n+1}}{c_n} = \frac{1}{a_1}, \quad \text{-----12 分}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \cdot \left(\ln \frac{c_2}{c_1} + \dots + \ln \frac{c_{n+1}}{c_n} \right) = \ln \frac{1}{a_1},$$

$$\sqrt[n]{c_n} = e^{\frac{\ln c_n}{n}} = e^{\frac{\ln c_1}{n} + \frac{1}{n} \left(\ln \frac{c_2}{c_1} + \dots + \ln \frac{c_{n+1}}{c_n} \right)} \rightarrow e^{\ln \frac{1}{a_1}} = \frac{1}{a_1}.$$

从而, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt[n]{c_n}} = a_1$, 即 $f(x)$ 的最小正根. -----14 分

六、(14 分) 设函数 $f(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上具有连续导数, 满足

$$3[3 + f^2(x)]f'(x) = 2[1 + f^2(x)]^2 e^{-x^2},$$

且 $f(0) \leq 1$. 证明: 存在常数 $M > 0$, 使得 $x \in [0, +\infty)$ 时, 恒有 $|f(x)| \leq M$.

证明: 由于 $f'(x) > 0$, 所以 $f(x)$ 是 $[0, +\infty)$ 上的严格增函数, 故 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = L$ (有限或 $+\infty$). 下面证明 $L \neq +\infty$. -----2 分

记 $y = f(x)$, 将所给等式分离变量并积分得 $\int \frac{3+y^2}{(1+y^2)^2} dy = \frac{2}{3} \int e^{-x^2} dx$, 即

$$\frac{y}{1+y^2} + 2 \arctan y = \frac{2}{3} \int_0^x e^{-t^2} dt + C, \quad \text{-----6 分}$$

其中 $C = \frac{f(0)}{1+f^2(0)} + 2 \arctan f(0)$. -----8 分

若 $L = +\infty$, 则对上式取极限 $x \rightarrow +\infty$, 并利用 $\int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$, 得 $C = \pi - \frac{\sqrt{\pi}}{3}$. -----10 分

另一方面, 令 $g(u) = \frac{u}{1+u^2} + 2 \arctan u$, 则 $g'(u) = \frac{3+u^2}{(1+u^2)^2} > 0$, 所以函数 $g(u)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上严格单调增加. 因此, 当 $f(0) \leq 1$ 时, $C = g(f(0)) \leq g(1) = \frac{1+\pi}{2}$, 但

$C > \frac{2\pi - \sqrt{\pi}}{2} > \frac{1+\pi}{2}$, 矛盾, 这就证明了 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = L$ 为有限数.

最后, 取 $M = \max\{|f(0)|, |L|\}$, 则 $|f(x)| \leq M$, $\forall x \in [0, +\infty)$. -----14 分

第十届全国大学生数学竞赛预赛参考答案

非数学类, 2018 年 10 月 27 日



竞赛官方微信公众号: 八一考研数学竞赛

考试形式: 闭卷 考试时间: 150 分钟 满分: 100 分

题号	一	二	三	四	五	六	七	总分
满分	24	8	14	12	14	14	14	100
得分								

注意: 1. 所有答题都须写在试卷密封线右边, 写在其他纸上一律无效.

2. 密封线左边请勿答题, 密封线外不得有姓名及相关标记.

3. 如答题空白不够, 可写在当页背面, 并标明题号.

得分	评卷人	复核人

一、填空题 (本题满分 24 分, 每题 6 分)

1. 设 $\alpha \in (0, 1)$, 则 $\lim_{n \rightarrow +\infty} ((n+1)^\alpha - n^\alpha) = \underline{\hspace{2cm}}$.

【答案】0.

【解析】等价无穷小 $(1+x)^\alpha - 1 \sim \alpha x$, 得

$$\lim_{n \rightarrow \infty} ((n+1)^\alpha - n^\alpha) = \lim_{n \rightarrow \infty} n^\alpha ((1+1/n)^\alpha - 1) = \lim_{n \rightarrow \infty} n^\alpha \times \frac{\alpha}{n} = 0$$

2. 若曲线 $y = f(x)$ 是由 $\begin{cases} x = t + \cos t \\ e^y + ty + \sin t = 1 \end{cases}$ 确定, 则此曲线在 $t = 0$ 对应点处的切线方程为 $\underline{\hspace{2cm}}$.

【答案】 $x + y - 1 = 0$.

【解析】易知 $t = 0$ 处上的曲线为点 $(1, 0)$ ，即方程组对 t 求导得

$$\frac{dx}{dt} = 1 - \sin t, \quad \frac{dy}{dt} = -\frac{y + \cos t}{e^y + t}$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} / \frac{dx}{dt} = -\frac{y + \cos t}{(e^y + 1)(1 - \sin t)} \Rightarrow \frac{dy}{dx}|_{t=0} = -1$$

故曲线在 $t = 0$ 对应点处的切线方程为 $x + y - 1 = 0$.

$$3. \int \frac{\ln(x + \sqrt{1+x^2})}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}} dx = \underline{\hspace{2cm}}.$$

【答案】 $\frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \ln(x + \sqrt{1+x^2}) - \frac{1}{2} \ln(1+x^2) + C.$

【解析】简单的凑微分，如下

$$\begin{aligned} \int \frac{\ln(x + \sqrt{1+x^2})}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}} dx &= \int \ln(x + \sqrt{1+x^2}) d\left(\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right) \\ &= \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \ln(x + \sqrt{1+x^2}) - \int \frac{x}{1+x^2} dx \\ &= \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \ln(x + \sqrt{1+x^2}) - \frac{1}{2} \ln(1+x^2) + C \end{aligned}$$

$$4. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x \sqrt{\cos 2x} \sqrt[3]{\cos 3x}}{x^2} = \underline{\hspace{2cm}}.$$

【答案】 3.

【解析】这题方法很多，简单的等价无穷小，或拆项、洛必达以及泰勒都可以。

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x \sqrt{\cos 2x} \sqrt[3]{\cos 3x}}{x^2} &= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1 - \cos x}{x^2} + \frac{\cos x (1 - \sqrt{\cos 2x} \sqrt[3]{\cos 3x})}{x^2} \right) \\ &= \frac{1}{2} + \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sqrt{\cos 2x} \sqrt[3]{\cos 3x}}{x^2} \\ &= \frac{1}{2} + \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1 - \cos \sqrt{2x}}{x^2} + \frac{\cos \sqrt{2x} (1 - \sqrt[3]{\cos 3x})}{x^2} \right) \\ &= \frac{1}{2} + \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1 - \sqrt{1 + (\cos 2x - 1)}}{x^2} + \frac{1 - \sqrt[3]{1 + (\cos 3x - 1)}}{x^2} \right) \\ &= \frac{1}{2} + \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 2x}{2x^2} + \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 3x}{3x^2} \\ &= 3 \end{aligned}$$

得分	评卷人	复核人

二、解答题 (本题满分 8 分)

设函数 $f(t)$ 在 $t \neq 0$ 时一阶连续可导, 且 $f(1) = 0$, 求函数 $f(x^2 - y^2)$, 使得曲线积分 $\int_L y(2 - f(x^2 - y^2))dx + xf(x^2 - y^2)dy$ 与路径无关, 其中 L 为任一不与直线 $y = \pm x$ 相交的分段光滑闭曲线.

【解析】记 $\begin{cases} P(x, y) = y(2 - f(x^2 - y^2)) \\ Q(x, y) = x + xf(x^2 - y^2) \end{cases}$, 于是

$$\begin{cases} \frac{\partial P(x, y)}{\partial y} = 2 - f(x^2 - y^2) + 2y^2 f'(x^2 - y^2) \\ \frac{\partial Q(x, y)}{\partial x} = f(x^2 - y^2) + 2x^2 f'(x^2 - y^2) \end{cases}$$

由题设可知, 积分与路径无关, 于是有

$$\frac{\partial Q(x, y)}{\partial x} = \frac{\partial P(x, y)}{\partial y} \implies (x^2 - y^2) f'(x^2 - y^2) + f(x^2 - y^2) = 1$$

..... 5 分

记 $t = x^2 - y^2$, 即微分方程

$$tf'(t) + f(t) = 1 \Leftrightarrow (tf(t))' = 1 \Rightarrow tf(t) = y + C$$

又 $f(1) = 0$, 可得 $C = -1$, $f(t) = 1 - \frac{1}{t}$, 从而

$$f(x^2 - y^2) = 1 - \frac{1}{x^2 - y^2}$$

..... 8 分

得分	评卷人	复核人

三、解答题 (本题满分 14 分)

设 $f(x)$ 在区间 $[0, 1]$ 上连续, 且 $1 \leq f(x) \leq 3$. 证明:

$$0 \leq \int_0^1 f(x) dx \int_0^1 \frac{1}{f(x)} dx \leq \frac{4}{3}$$

【证明】由 Cauchy-Schwarz 不等式:

$$\int_0^1 f(x) dx \int_0^1 \frac{1}{f(x)} dx \geq \left(\int_0^1 \sqrt{f(x)} \sqrt{\frac{1}{f(x)}} dx \right)^2 = 1$$

.....4 分

又由基本不等式得:

$$\int_0^1 f(x) dx \int_0^1 \frac{3}{f(x)} dx \leq \frac{1}{4} \left(\int_0^1 f(x) dx + \int_0^1 \frac{3}{f(x)} dx \right)^2$$

再由条件 $1 \leq f(x) \leq 3$, 有 $(f(x) - 1)(f(x) - 3) \leq 0$, 则

$$f(x) + \frac{3}{f(x)} \leq 4 \Rightarrow \int_0^1 \left(f(x) + \frac{3}{f(x)} \right) dx \leq 4$$

.....10 分

即可得

$$1 \leq \int_0^1 f(x) dx \int_0^1 \frac{1}{f(x)} dx \leq \frac{4}{3}$$

.....14 分

得分	评卷人	复核人

四、解答题 (本题满分 12 分)

计算三重积分 $\iiint_{(V)} (x^2 + y^2) dV$, 其中 (V) 是由 $x^2 + y^2 + (z - 2)^2 \geq 4$, $x^2 + y^2 + (z - 1)^2 \leq 9$ 及 $z \geq 0$ 所围成的空间图形.

【解析】(1) 计算打球 (V_1) 的积分, 利用球坐标换元, 令

$$(V_1) : \begin{cases} x = r \sin \varphi \cos \theta, y = r \sin \varphi \sin \theta, z - 1 = r \cos \varphi \\ 0 \leq r \leq 3, 0 \leq \varphi \leq \pi, 0 \leq \theta \leq 2\pi \end{cases}$$

于是有

$$\iiint_{(V_1)} (x^2 + y^2) dV = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^\pi d\varphi \int_0^3 r^3 \sin^2 \varphi r^2 \sin \varphi = \frac{8}{15} \cdot 3^5 \pi$$

.....4 分

(2) 计算小球 (V_2) 的积分, 利用球坐标换元, 令

$$(V_2): \begin{cases} x = r \sin \varphi \cos \theta, y = r \sin \varphi \sin \theta, z - 2 = r \cos \varphi \\ 0 \leq r \leq 2, 0 \leq \varphi \leq \pi, 0 \leq \theta \leq 2\pi \end{cases}$$

于是有

$$\iiint_{(V_2)} (x^2 + y^2) dV = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^\pi d\varphi \int_0^2 r^2 \sin^2 \varphi r^2 \sin \varphi = \frac{8}{15} \cdot 2^5 \pi$$

.....8 分

(3) 计算大球 $z = 0$ 下部分的积分 V_3 , 利用球坐标换元, 令

$$(V_3): \begin{cases} x = r \cos \theta, y = r \sin \theta, 1 - \sqrt{9 - r^2} \leq z \leq 0 \\ 0 \leq r \leq 2\sqrt{2}, 0 \leq \theta \leq 2\pi \end{cases}$$

于是有

$$\begin{aligned} \iiint_{(V_3)} (x^2 + y^2) dV &= \iint_{r \leq 2\sqrt{2}} r dr d\theta \int_{1-\sqrt{9-r^2}}^0 r^2 dz \\ &= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{2\sqrt{2}} r^3 (\sqrt{9-r^2} - 1) \\ &= \left(124 - \frac{2}{5} \cdot 3^5 + \frac{2}{5} \right) \pi \end{aligned}$$

综上所述有

$$\begin{aligned} \iiint_{(V)} (x^2 + y^2) dV &= \iiint_{(V_1)} (x^2 + y^2) dV - \iiint_{(V_2)} (x^2 + y^2) dV - \iiint_{(V_3)} (x^2 + y^2) dV \\ &= \frac{8}{15} \cdot 3^5 \pi + \frac{8}{15} \cdot 2^5 \pi + \left(124 - \frac{2}{5} \cdot 3^5 + \frac{2}{5} \right) \pi \\ &= \frac{256}{3} \pi \end{aligned}$$

.....12 分

得分	评卷人	复核人

五、解答题 (本题满分 14 分)

设 $f(x, y)$ 在区域 D 内可微, 且 $\sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2} \leq M$, $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$ 是 D 内两点, 线段 AB 包含在 D 内, 证明:

$$|f(x_1, y_1) - f(x_2, y_2)| \leq M|AB|$$

其中 $|AB|$ 表示线段 AB 的长度.

【证明】作辅助函数

$$\varphi(t) = f(x_1 + t(x_2 - x_1), y_1 + t(y_2 - y_1))$$

.....2 分

显然 $\varphi(t)$ 在 $[0, 1]$ 可导, 根据 Lagrange 中值定理, 存在 $c \in (0, 1)$, 使得

$$\varphi(1) - \varphi(0) = \varphi'(c) = \frac{\partial f(u, v)}{\partial u}(x_2 - x_1) + \frac{\partial f(u, v)}{\partial v}(y_2 - y_1)$$

.....8 分

即可得到

$$\begin{aligned} |\varphi(1) - \varphi(0)| &= |f(x_2, y_2) - f(x_1, y_1)| \\ &= \left| \frac{\partial f(u, v)}{\partial u}(x_2 - x_1) + \frac{\partial f(u, v)}{\partial v}(y_2 - y_1) \right| \\ &\leq \sqrt{\left(\frac{\partial f(u, v)}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial f(u, v)}{\partial v}\right)^2} \cdot \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} \\ &\leq M|AB| \end{aligned}$$

.....14 分

得分	评卷人	复核人

六、解答题 (本题满分 14 分)

证明: 对于连续函数 $f(x) > 0$, 有

$$\ln \int_0^1 f(x) dx \geq \int_0^1 \ln f(x) dx$$

【证明】由定积分定义，将 $[0, 1]$ 分 n 等分，可取 $\Delta x = \frac{1}{n}$ ，由“算术平均数 \geq 几何平均数”得：

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right) \geq \sqrt[n]{f\left(\frac{1}{n}\right) \cdots f\left(\frac{n}{n}\right)} = \exp \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \ln f\left(\frac{k}{n}\right)$$

..... 4 分

$$\Rightarrow \int_0^1 f(x) dx \geq \exp \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \ln f\left(\frac{k}{n}\right) = \exp \int_0^1 \ln f(x) dx$$

..... 10 分

然后两边取对数即证

$$\ln \int_0^1 f(x) dx \geq \int_0^1 \ln f(x) dx$$

..... 14 分

或者考虑令 $g(x) = \ln x$ ，则 $g'(x) = \frac{1}{x}$ ， $g''(x) = -\frac{1}{x^2} < 0$ ，所以 $g(x)$ 为凹函数，可由琴声不等式定理即证。

得分	评卷人	复核人

七、解答题（本题满分 14 分）

已知 a_k, b_k 是正数数列，且 $b_{k+1} - b_k \geq \delta > 0, k = 1, 2, \dots$ ， δ 为一切常数，证明：若级数 $\sum_{k=1}^{+\infty} a_k$ 收敛，则级数 $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{k \sqrt[k]{(a_1 a_2 \cdots a_k)(b_1 b_2 \cdots b_k)}}{b_{k+1} b_k}$ 收敛。

【证明】令 $S_k = \sum_{i=1}^k a_i b_i, a_k b_k = S_k - S_{k-1}, S_0 = 0, a_k = \frac{S_k - S_{k-1}}{b_k}, k = 1, 2, \dots$ 4 分

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^N a_k &= \sum_{k=1}^N \frac{S_k - S_{k-1}}{b_k} = \sum_{k=1}^{N-1} \left(\frac{S_k}{b_k} - \frac{S_k}{b_{k+1}} \right) + \frac{S_N}{b_N} \\ &= \sum_{k=1}^{N-1} \frac{b_{k+1} - b_k}{b_k b_{k+1}} S_k + \frac{S_N}{b_N} \geq \sum_{k=1}^{N-1} \frac{\delta}{b_k b_{k+1}} S_k \end{aligned}$$

所以 $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{S_k}{b_k b_{k+1}}$ 收敛。..... 10 分

由算术-几何平均不等式得

$$\sqrt[k]{(a_1 a_2 \cdots a_k)(b_1 b_2 \cdots b_k)} \leq \frac{a_1 b_1 + \cdots + a_k b_k}{k} = \frac{S_k}{k}$$
$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k \sqrt[k]{(a_1 a_2 \cdots a_k)(b_1 b_2 \cdots b_k)}}{b_{k+1} b_k} \leq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{S_k}{b_k b_{k+1}}$$

故结论成立.

.....14 分

装
订
线
内
不
要
答
题

第九届全国大学生数学竞赛预赛参考答案

非数学类, 2017 年 10 月 27 日



竞赛官方微信公众号: 八一考研数学竞赛

考试形式: 闭卷 考试时间: 150 分钟 满分: 100 分

题号	一	二	三	四	五	总分
满分	42	14	14	15	15	100
得分						

注意: 1. 所有答题都须写在试卷密封线右边, 写在其他纸上一律无效.

2. 密封线左边请勿答题, 密封线外不得有姓名及相关标记.

3. 如答题空白不够, 可写在当页背面, 并标明题号.

得分	评卷人	复核人

一、填空题 (本题满分 42 分)

1. 已知可导函数 $f(x)$ 满足 $f(x) \cos x + 2 \int_0^x f(t) \sin t dx = x + 1$, 则 $f(x) =$ _____.

【答案】 $\sin x + \cos x$.

【解析】 两边同时对 x 求导

$$f'(x) \cos x + f(x) \sin x = 1 \implies f'(x) + f(x) \tan x = \sec x.$$

由常数变易法, 从而

$$\begin{aligned} f(x) &= e^{-\int \tan x dx} \left(\int \sec x e^{\int \tan x dx} dx + C \right) = e^{\ln \cos x} \left(\int \frac{1}{\cos x} e^{-\ln \cos x} dx + C \right) \\ &= \cos x \left(\int \frac{1}{\cos^2 x} dx + C \right) = \cos x (\tan x + C) = \sin x + C \cos x \end{aligned}$$

由于 $f(0) = 1$, 故 $f(x) = \sin x + \cos x$.

2. 极限 $\lim_{n \rightarrow 0} \sin^2(\pi\sqrt{n^2+n}) = \underline{\hspace{2cm}}$.

【答案】1

【解析】

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow 0} \sin^2(\pi\sqrt{n^2+n}) &= \lim_{n \rightarrow 0} \sin^2(\pi\sqrt{n^2+n} - n\pi) \\ &= \lim_{n \rightarrow 0} \sin^2\left(\frac{n\pi}{\sqrt{n^2+n}+n}\right) = 1\end{aligned}$$

3. 设 $w = f(u, v)$ 具有二阶连续偏导数, 且 $u = x - cy$, $v = x + cy$, 其中 c 为非零常数。则 $w_{xx} - \frac{1}{c^2}w_{yy} = \underline{\hspace{2cm}}$.

【答案】 $4f_{12}$.

【解析】

$$\begin{aligned}w_x &= f_1 + f_2, w_{xx} = f_{11} + 2f_{12} + f_{22}, w_y = c(f_2 - f_1), \\ w_{yy} &= c \frac{\partial}{\partial x}(f_2 - f_1) = c(cf_{11} - cf_{12} - cf_{21} + cf_{22}) = c^2(f_{11} - 2f_{12} + f_{22}).\end{aligned}$$

所以

$$w_{xx} - \frac{1}{c^2}w_{yy} = 4f_{12}.$$

4. 设 $f(x)$ 有二阶导数连续, 且 $f(0) = f'(0) = 0, f''(0) = 6$, 则 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(\sin^2 x)}{x^4} = \underline{\hspace{2cm}}$.

【答案】3

【解析】 $f(x)$ 在 $x = 0$ 处的泰勒展开式

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{1}{2}f''(\xi)x^2,$$

所以

$$f(\sin^2 x) = \frac{1}{2}f''(\xi)\sin^4 x,$$

于是

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(\sin^2 x)}{x^4} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{2}f''(\xi)\sin^4 x}{x^4} = 3.$$

5. 不定积分 $\int \frac{e^{-\sin x} \sin 2x}{(1 - \sin x)^2} dx = \underline{\hspace{2cm}}$.

【答案】 $\frac{2e^{-\sin x}}{1 - \sin x} + C$.

【解析】 令 $\sin x = v$, 则

$$\begin{aligned} I &= 2 \int \frac{ve^{-v}}{(1-v)^2} dv \\ &= 2 \int \frac{e^{-v}}{v-1} dv + 2 \int \frac{e^{-v}}{(v-1)^2} dv \\ &= 2 \int \frac{e^{-v}}{v-1} dv - 2 \int e^{-v} d\left(\frac{1}{v-1}\right) \\ &= 2 \int \frac{e^{-v}}{v-1} dv - 2\left(\frac{e^{-v}}{v-1} + \int \frac{e^{-v}}{v-1} dv\right) \\ &= -\frac{2e^v}{v-1} + C = \frac{2e^{-\sin x}}{1 - \sin x} + C \end{aligned}$$

6. 记曲面 $z^2 = x^2 + y^2$ 和 $z = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$ 围成空间区域 V , 则三重积分 $\iiint_V z dx dy dz = \underline{\hspace{2cm}}$.

【答案】 2π .

【解析】 使用球面坐标

$$\begin{aligned} I &= \iiint_V z dx dy dz \\ &= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\pi/4} d\varphi \int_0^2 \rho \cos \varphi \cdot \rho^2 \sin \varphi d\rho \\ &= 2\pi \cdot \frac{1}{2} \sin^2 \varphi \Big|_0^{\pi/4} \cdot \frac{1}{4} \rho^4 \Big|_0^2 \\ &= 2\pi \end{aligned}$$

得分	评卷人	复核人

二、解答题 (本题满分 14 分)

设二元函数 $f(x, y)$ 在平面上有连续的二阶导数, 对任意角 α , 定义一元函数

$$g_\alpha(t) = f(t \cos \alpha, t \sin \alpha).$$

若对任何 α 都有 $\frac{dg_\alpha(0)}{dt} = 0$ 且 $\frac{d^2 g_\alpha(0)}{dt^2} > 0$. 证明: $f(0, 0)$ 是 $f(x, y)$ 的极小值.

【证明】由于

$$\frac{dg_{\alpha}(0)}{dt} = (f_x, f_y)_{(0,0)} \begin{pmatrix} \cos \alpha \\ \sin \alpha \end{pmatrix} = 0$$

对一切 α 成立，故 $(f_x, f_y)_{(0,0)} = (0, 0)$ ，即 $(0, 0)$ 是 $f(x, y)$ 的驻点。

.....4 分

记

$$H_f = (x, y) = \begin{pmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{pmatrix} = 0,$$

则

$$\begin{aligned} \frac{d^2 g_{\alpha}(0)}{dt^2} &= \frac{d}{dt} \left[(f_x, f_y) \begin{pmatrix} \cos \alpha \\ \sin \alpha \end{pmatrix} \right]_{(0,0)} \\ &= (\cos \alpha, \sin \alpha) H_f(0, 0) \begin{pmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{pmatrix} > 0 \end{aligned}$$

.....10 分

上式对任何单位向量 $(\cos \alpha, \sin \alpha)$ 成立，故 $H_f(0, 0)$ 是一个正定矩阵，而 $f(0, 0)$ 是 $f(x, y)$ 的极小值。

.....14 分

得分	评卷人	复核人

三、解答题 (本题满分 14 分)

设曲线 Γ 为曲线

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1, x + z = 1, x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0$$

上从点 $A(1, 0, 0)$ 到点 $B(0, 0, 1)$ 的一段, 求曲线积分 $I = \int_{\Gamma} ydx + zdy + xdz$.

【解析】记 Γ_1 为从 B 到 A 的直线段, 则 $x = t, y = 0, z = 1 - t, 0 \leq t \leq 1$,

$$\int_{\Gamma_1} ydx + zdy + xdz = \int_0^1 td(1-t) = -\frac{1}{2}.$$

..... 4 分

设 Γ 和 Γ_1 围成的平面区域 Σ , 方向按右手法则。由 Stokes 公式得到

$$\begin{aligned} \left(\int_{\Gamma} + \int_{\Gamma_1} \right) ydx + zdy + xdz &= \iint_{\Sigma} \begin{vmatrix} dydz & dzdx & dxdy \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ y & z & x \end{vmatrix} \\ &= - \iint_{\Sigma} dydz + dzdx + dxdy. \end{aligned}$$

..... 8 分

右边三个积分都是 Σ 在各个坐标面上的投影面积, 而 Σ 在 xOz 面上的投影面积为零。故

$$I + \int_{\Gamma_1} = - \iint_{\Sigma} dydz + dxdy.$$

曲线 Γ 在 xOy 面上投影的方程为 $\frac{\left(x - \frac{1}{2}\right)^2}{\left(\frac{1}{2}\right)^2} + \frac{y^2}{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2} = 1$ 12 分

又该投影 (半个椭圆) 的面积为 $\iint_{\Sigma} dxdy = \frac{\pi}{4\sqrt{2}}$, 同理 $\iint_{\Sigma} dydz = \frac{\pi}{4\sqrt{2}}$.

所以

$$I = \frac{1}{2} - \frac{\pi}{2\sqrt{2}}.$$

..... 14 分

得分	评卷人	复核人

四、解答题 (本题满分 15 分)

设函数 $f(x) > 0$ 且在实轴上连续, 若对任意实数 t , 有

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-|t-x|} f(x) dx \leq 1,$$

证明: $\forall a, b, a < b$, 有

$$\int_a^b f(x) dx \leq \frac{b-a+2}{2}.$$

【证明】由于 $\forall a, b, a < b$, 有 $\int_a^{+b} e^{-|t-x|} f(x) dx \leq \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-|t-x|} f(x) dx \leq 1$,

因此

$$\int_a^b dt \int_a^b e^{-|t-x|} f(x) dx \leq b-a.$$

.....4 分

然而

$$\int_a^b dt \int_a^b e^{-|t-x|} f(x) dx = \int_a^b f(x) \left(\int_a^b e^{-|t-x|} dt \right) dx,$$

其中

$$\int_a^b e^{-|t-x|} dt = \int_a^x e^{t-x} dt + \int_x^b e^{x-t} dt = 2 - e^{a-x} - e^{x-b}.$$

这样就有

$$\int_a^b f(x) (2 - e^{a-x} - e^{x-b}) dx \leq b-a. \quad (*)$$

.....10 分

即

$$\int_a^b f(x) dx \leq \frac{b-a}{2} + \frac{1}{2} \left[\int_a^b e^{a-x} f(x) dx + \int_a^b e^{x-b} f(x) dx \right].$$

注意到

$$\int_a^b e^{a-x} f(x) dx = \int_a^b e^{-|a-x|} f(x) dx \leq 1, \int_a^b e^{x-b} f(x) dx \leq 1.$$

.....13 分

把以上两个式子代入 (*), 即得结论。

.....15 分

第八届全国大学生数学竞赛预赛试卷参考答案 (非数学类, 2016 年 10 月)

绝密 ★ 启用前

(14 金融工程-白兔兔)

考试形式: 闭卷 考试时间: 150 分钟 满分: 100 分

题 号	一	二	三	四	五	六	总 分
满 分	30	14	14	14	14	14	100
得 分							

注意: 1. 所有答题都须写在试卷密封线右边, 写在其他纸上一律无效.

2. 密封线左边请勿答题, 密封线外不得有姓名及相关标记.

3. 如答题空白不够, 可写在当页背面, 并标明题号.

一 (填空题, 本题满分 30 分, 共 5 小题, 每小题 6 分)

1. 若 $f(x)$ 在点 $x = a$ 可导, 且 $f(a) \neq 0$, 则 $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{f(a + \frac{1}{n})}{f(a)} \right)^n = \underline{\hspace{2cm}}$

解

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{f(a + \frac{1}{n})}{f(a)} \right)^n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{f(a) + f'(a)\frac{1}{n} + o(\frac{1}{n})}{f(a)} \right)^n = e^{\frac{f'(a)}{f(a)}}$$

2. 若 $f(1) = 0$, $f'(1)$ 存在, 则极限 $I = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(\sin^2 x + \cos x) \tan 3x}{(e^{x^2} - 1) \sin x} = \underline{\hspace{2cm}}$

解

$$\begin{aligned} I &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(\sin^2 x + \cos x) \tan 3x}{(e^{x^2} - 1) \sin x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(\sin^2 x + \cos x) \times 3x}{x^2 \times x} = 3 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(\sin^2 x + \cos x)}{x^2} \\ &= 3 \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{f(\sin^2 x + \cos x) - f(1)}{\sin^2 x + \cos x - 1} \cdot \frac{\sin^2 x + \cos x - 1}{x^2} \right) \\ &= 3f'(1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - \frac{1}{2}x^2 + o(x^2)}{x^2} \\ &= \frac{3}{2}f'(1) \end{aligned}$$

3. 设 $f(x)$ 有连续导数, 且 $f(1) = 2$. 记 $z = f(e^x y^2)$, 若 $\frac{\partial z}{\partial x} = z$, 则当 $x > 0$, $f(x) = \underline{\hspace{2cm}}$

解 由题设得 $\frac{\partial z}{\partial x} = f'(e^x y^2) e^x y = f(e^x y^2)$, 令 $u = e^x y^2$,

得到当 $u > 0$ 有 $f'(u)u = f(u)$, 即 $\frac{f'(u)}{f(u)} = \frac{1}{u}$, 从而 $(\ln f(u))' = (\ln u)'$
所以有 $\ln f(u) = \ln u + C_1$, $f(u) = Cu$. 再而由初始条件得 $f(u) = 2u$
故当 $x > 0$ 有 $f(x) = 2x$

4. 设 $f(x) = e^x \sin 2x$, 则 $f^{(4)}(0) = \underline{\hspace{2cm}}$

解 由 Taylor 展开式得

$$f(x) = \left[1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + o(x^3) \right] \left[2x - \frac{1}{3!}(2x)^3 + o(x^4) \right]$$

所以 $f(x)$ 展开式的 4 次项 $\frac{-1}{3!}(2x)^3 \times x + \frac{1}{3!}x^3 \times (2x) = -x^4$, 从而 $\frac{f^{(4)}(x)}{4!} = 1$,

故 $f^{(4)}(0) = 24$

5. 曲面 $z = \frac{x^2}{2} + y^2$ 平行于平面 $2x + 2y - z = 0$ 的切平面方程为 $\underline{\hspace{2cm}}$

解 该曲面在点 (x_0, y_0, z_0) 的切平面的法向量为 $(x_0, 2y_0, -1)$ 。又该切平面于
已知平面平行, 从而两平面法向量平行, 故 $\frac{x_0}{2} = \frac{2y_0}{2} = \frac{-1}{-1}$

从而 $x_0 = 2, y_0 = 1$, 得 $z_0 = \frac{x_0^2}{2} + y_0^2 = 3$, 从而所求切平面为

$$2(x - 2) + 2(y - 1) - (z - 3) = 0$$

即

$$2x + 2y - z = 3$$

二 (本题满分 14 分)

设 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 可导, $f(0) = 0$, 且当 $x \in (0, 1)$, $0 < f'(x) < 1$.

试证当 $a \in (0, 1)$, $\left(\int_0^a f(x) dx \right)^2 > \int_0^a f^3(x) dx$.

证明 设 $F(x) = \left(\int_0^x f(t) dt \right)^2 - \int_0^x f^3(t) dt$, 则 $F(0) = 0$ 且要证明 $F'(x) > 0$

设 $g(x) = 2 \int_0^x f(t) dt - f^2(x)$, 则 $F'(x) = f(x)g(x)$

由于 $f(0) = 0$, $f'(x) > 0$, 故 $f(x) > 0$,

从而只要证明 $g(x) > 0, x > 0$

而 $g(0) = 0$, 我们只要证明 $g'(x) > 0, 0 < x < a$

而 $g'(x) = 2f(x)[1 - f'(x)] > 0$, 得证

三 (本题满分 14 分)

某物体所在的空间区域为 $\Omega: x^2 + y^2 + 2z^2 \leq x + y + 2z$,

密度函数为 $x^2 + y^2 + z^2$, 求质量

$$M = \iiint_{\Omega} (x^2 + y^2 + z^2) \, dx \, dy \, dz$$

解 由于 $\Omega: \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 + 2\left(z - \frac{1}{2}\right)^2 \leq 1$, 是一个椭球

其体积为 $V = \frac{4\pi}{3}\pi$, 作变换 $u = x - \frac{1}{2}, v = y - \frac{1}{2}, w = \sqrt{2}\left(z - \frac{1}{2}\right)$

将 Ω 变为单位球 $\Sigma: u^2 + v^2 + w^2 \leq 1$, 而

$$J = \frac{\partial(u, v, w)}{\partial(x, y, z)} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} \end{vmatrix} = \sqrt{2}$$

故 $du \, dv \, dw = \sqrt{2} \, dx \, dy \, dz$ 且

$$M = \frac{1}{\sqrt{2}} \iiint_{\Sigma} \left[\left(u + \frac{1}{2}\right)^2 + \left(v + \frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{w}{\sqrt{2}} + \frac{1}{2}\right)^2 \right] du \, dv \, dw$$

因一次项积分都是 0, 故

$$M = \frac{1}{\sqrt{2}} \iiint_{\Sigma} \left(u^2 + v^2 + \frac{w^2}{2}\right) du \, dv \, dw + A$$

其中 $A = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4}\right) V = \frac{\pi}{\sqrt{2}}$

记

$$I = \iiint_{\Sigma} (u^2 + v^2 + w^2) \, du \, dv \, dw = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} d\theta \int_0^1 r^2 \cdot r^2 \sin \theta \, dr = \frac{4\pi}{5}$$

由于 u^2, v^2, w^2 在 Σ 上积分都是 $\frac{I}{3}$, 故

$$M = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6}\right) I + A = \frac{5\sqrt{2}}{6}\pi$$

四 (本题满分 14 分)

设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[0, 1]$ 上具有连续导数, $f(0) = 0$, $f(1) = 1$.

证明:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n \left(\int_0^1 f(x) dx - \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right) \right) = -\frac{1}{2}$$

解 n 等分区间 $[0, 1]$, 分点为 $0 = x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n = 1$.

记 $h = \frac{1-0}{n} = \frac{1}{n}$, 则 $x_k = 0 + kh = kh$, $x_k - x_{k-1} = h$, $k = 1, 2, \cdots, n$.

$$\begin{aligned} & \lim_{n \rightarrow \infty} n \left(\int_0^1 f(x) dx - \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right) \right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} n \left(\sum_{k=1}^n \int_{x_{k-1}}^{x_k} f(x) dx - \sum_{k=1}^n h f(x_k) \right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} n \sum_{k=1}^n \int_{x_{k-1}}^{x_k} (f(x) - f(x_k)) dx \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} n \sum_{k=1}^n \int_{x_{k-1}}^{x_k} \frac{f(x) - f(x_k)}{x - x_k} \cdot (x - x_k) dx \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} n \sum_{k=1}^n \frac{f(\xi_k) - f(x_k)}{\xi_k - x_k} \cdot \int_{x_{k-1}}^{x_k} (x - x_k) dx \quad \xi_k \in (x_{k-1}, x_k) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} n \sum_{k=1}^n f'(\eta_k) \left(-\frac{1}{2} (x_k - x_{k-1})^2 \right) \quad \eta_k \in (\xi_k, x_k) \\ &= -\frac{1}{2} \lim_{n \rightarrow \infty} (1-0) \sum_{k=1}^n f'(\eta_k) h \\ &= -\frac{1}{2} \int_0^1 f'(x) dx \\ &= \frac{1}{2} (f(1) - f(0)) = -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

五 (本题满分 14 分)

设函数 $f(x)$ 在区间 $[0, 1]$ 上连续, 且 $I = \int_0^1 f(x) dx \neq 0$.

证明: 在 $(0, 1)$ 内存在不同的两点 x_1, x_2 使得

$$\frac{1}{f(x_1)} + \frac{1}{f(x_2)} = \frac{2}{I}$$

证明 设 $F(x) = \frac{1}{I} \int_0^x f(t) dt$ 则 $F(0) = 0$, $F(1) = 1$.

由介值定理, 存在 $\xi \in (0, 1)$ 使得 $F(\xi) = \frac{1}{2}$

在两个子区间 $(0, \xi)$, $(\xi, 1)$ 分别应用拉格朗日中值定理:

$$F'(x_1) = \frac{f(x_1)}{I} = \frac{F(\xi) - F(0)}{\xi - 0} = \frac{1/2}{\xi}, \quad x_1 \in (0, \xi)$$

$$F'(x_2) = \frac{f(x_2)}{I} = \frac{F(1) - F(\xi)}{1 - \xi} = \frac{1/2}{1 - \xi}, \quad x_2 \in (\xi, 1)$$

$$\frac{I}{f(x_1)} + \frac{I}{f(x_2)} = \frac{1}{F'(x_1)} + \frac{1}{F'(x_2)} = \frac{\xi}{1/2} + \frac{1 - \xi}{1/2} = 2$$

六 (本题满分 14 分)

设 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 可导, 且

$$f(x) = f(x + 2) = f(x + \sqrt{3})$$

用 Fourier 级数理论证明 $f(x)$ 为常数

证明 由 $f(x) = f(x + 2)$ 知 $f(x)$ 为以 2 为周期的周期函数,

其 Fourier 系数分别为:

$$a_n = \int_{-1}^1 f(x) \cos n\pi x \, dx \quad b_n = \int_{-1}^1 f(x) \sin n\pi x \, dx$$

由 $f(x) = f(x + \sqrt{3})$ 知

$$\begin{aligned} a_n &= \int_{-1}^1 f(x + \sqrt{3}) \cos n\pi x \, dx \\ &= \int_{-1+\sqrt{3}}^{1+\sqrt{3}} f(t) \cos n\pi(t - \sqrt{3}) \, dt \\ &= \int_{-1+\sqrt{3}}^{1+\sqrt{3}} f(t) (\cos n\pi t \cos \sqrt{3}n\pi + \sin n\pi t \sin \sqrt{3}n\pi) \, dt \\ &= \cos \sqrt{3}n\pi \int_{-1+\sqrt{3}}^{1+\sqrt{3}} f(t) \cos n\pi t \, dt + \sin \sqrt{3}n\pi \int_{-1+\sqrt{3}}^{1+\sqrt{3}} f(t) \sin n\pi t \, dt \\ &= \cos \sqrt{3}n\pi \int_{-1}^1 f(t) \cos n\pi t \, dt + \sin \sqrt{3}n\pi \int_{-1}^1 f(t) \sin n\pi t \, dt \end{aligned}$$

所以 $a_n = a_n \cos \sqrt{3}n\pi + b_n \sin \sqrt{3}n\pi$

同理可得 $b_n = b_n \cos \sqrt{3}n\pi + a_n \sin \sqrt{3}n\pi$

联立

$$\begin{cases} a_n &= a_n \cos \sqrt{3}n\pi + b_n \sin \sqrt{3}n\pi \\ b_n &= b_n \cos \sqrt{3}n\pi + a_n \sin \sqrt{3}n\pi \end{cases}$$

得 $a_n = b_n = 0$ ($n = 1, 2, \dots$)

而 $f(x)$ 可导, 其 Fourier 级数处处收敛于 $f(x)$, 所以

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) = \frac{a_0}{2}$$

其中 $a_0 = \int_{-1}^1 f(x) dx$ 为常数

2015 年第七届预赛（非数学类）参考答案

一、每小题 6 分，共计 30 分。

(1) 极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} n \left(\frac{\sin \frac{\pi}{n}}{n^2+1} + \frac{\sin \frac{2\pi}{n}}{n^2+2} + \cdots + \frac{\sin \pi}{n^2+n} \right) = \underline{\frac{2}{\pi}}$ 。

解：由于 $\frac{1}{n+1} \sum_{i=1}^n \sin \frac{i}{n} \pi \leq \sum_{i=1}^n \frac{\sin \frac{i}{n} \pi}{n + \frac{i}{n}} \leq \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \sin \frac{i}{n} \pi$ ，而

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+1} \sum_{i=1}^n \sin \frac{i}{n} \pi = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{(n+1)\pi} \frac{\pi}{n} \sum_{i=1}^n \sin \frac{i}{n} \pi = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \sin x dx = \frac{2}{\pi},$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \sin \frac{i}{n} \pi = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\pi} \frac{\pi}{n} \sum_{i=1}^n \sin \frac{i}{n} \pi = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \sin x dx = \frac{2}{\pi}。$$

所以所求极限是 $\frac{2}{\pi}$ 。

(2) 设函数 $z = z(x, y)$ 由方程 $F(x + \frac{z}{y}, y + \frac{z}{x}) = 0$ 所决定，其中 $F(u, v)$ 具有连续偏导

数，且 $xF_u + yF_v \neq 0$ 。则 $x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} = \underline{z - xy}$ 。（本小题结果要求不显含 F 及其

偏导数）

解：方程对 x 求导，得到 $\left(1 + \frac{1}{y} \frac{\partial z}{\partial x}\right) F_u + \left(\frac{1}{x} \frac{\partial z}{\partial x} - \frac{z}{x^2}\right) F_v = 0$

即 $x \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{y(zF_v - x^2 F_u)}{xF_u + yF_v}$ 。

同样，方程对 y 求导，得到 $y \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{x(zF_u - y^2 F_v)}{xF_u + yF_v}$ 。

于是 $x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{z(xF_u + yF_v) - xy(xF_u + yF_v)}{xF_u + yF_v} = z - xy$

(3) 曲面 $z = x^2 + y^2 + 1$ 在点 $M(1, -1, 3)$ 的切平面与曲面 $z = x^2 + y^2$ 所围区域的体积为

$\underline{\frac{\pi}{2}}$ 。

解：曲面 $z = x^2 + y^2 + 1$ 在点 $M(1,-1,3)$ 的切平面： $2(x-1) - 2(y+1) - (z-3) = 0$ ，

即 $z = 2x - 2y - 1$ 。联立 $\begin{cases} z = x^2 + y^2 \\ z = 2x - 2y - 1 \end{cases}$ ，

得到所围区域的投影 D 为： $(x-1)^2 + (y+1)^2 \leq 1$ 。

所求体积 $V = \iint_D [(2x-2y-1) - (x^2+y^2)] dx dy = \iint_D [1 - (x-1)^2 - (y+1)^2] dx dy$

令 $\begin{cases} x-1 = r \cos t \\ y+1 = r \sin t \end{cases}$ ， $V = \int_0^{2\pi} dt \int_0^1 (1-r^2) r dr = \frac{\pi}{2}$ 。

(4) 函数 $f(x) = \begin{cases} 3, & x \in [-5, 0) \\ 0, & x \in [0, 5) \end{cases}$ 在 $(-5, 5]$ 的傅立叶级数在 $x=0$ 收敛的值 3/2。

解：由傅里叶收敛定理，易知 $f(0)=3/2$ 。

(5) 设区间 $(0, +\infty)$ 上的函数 $u(x)$ 定义为 $u(x) = \int_0^{+\infty} e^{-xt^2} dt$ ，则 $u(x)$ 的初等函数表达式为

$\frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{x}}$ 。

【解】 由于 $u^2(x) = \int_0^{+\infty} e^{-xt^2} dt \int_0^{+\infty} e^{-xs^2} ds = \iint_{s \geq 0, t \geq 0} e^{-x(s^2+t^2)} ds dt$ ，故有

$$u^2(x) = \int_0^{\pi/2} d\varphi \int_0^{+\infty} e^{-x\rho^2} \rho d\rho = \frac{\pi}{4x} \int_0^{+\infty} e^{-x\rho^2} d_\rho(x\rho^2) = -\frac{\pi}{4x} e^{-x\rho^2} \Big|_{\rho=0}^{\rho=+\infty} = \frac{\pi}{4x}。$$

所以 $u(x) = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{x}}$ 。

二、(12 分) 设 M 是以三个正半轴为母线的半圆锥面，求其方程。

解：显然， $O(0,0,0)$ 为 M 的顶点， $A(1,0,0), B(0,1,0), C(0,0,1)$ 在 M 上。由 A, B, C 三点决定的平面 $x+y+z=1$ 与球面 $x^2+y^2+z^2=1$ 的交线 L 是 M 的准线。-----4 分

设 $P(x,y,z)$ 是 M 上的点， (u,v,w) 是 M 的母线 OP 与 L 的交点，则 OP 的方程为 $\frac{x}{u} = \frac{y}{v} = \frac{z}{w} = \frac{1}{t}$ ，

即 $u=xt, v=yt, w=zt$ 。-----8 分

代入准线方程，得 $\begin{cases} (x+y+z)t = 1 \\ (x^2+y^2+z^2)t^2 = 1 \end{cases}$ 。

消除 t ，得到圆锥面 M 的方程 $xy + yz + zx = 0$ 。-----12 分

三、(12 分) 设 $f(x)$ 在 (a,b) 内二次可导, 且存在常数 α, β , 使得对于 $\forall x \in (a,b)$

$$f'(x) = \alpha f(x) + \beta f''(x),$$

则 $f(x)$ 在 (a,b) 内无穷次可导。

证明 1. 若 $\beta = 0$ 。

对于 $\forall x \in (a,b)$, 有

$$f'(x) = \alpha f(x), \quad f''(x) = \alpha f'(x) = \alpha^2 f(x), \dots, f^{(n)}(x) = \alpha^n f(x)。$$

从而 $f(x)$ 在 (a,b) 内无穷次可导。-----4 分

2. 若 $\beta \neq 0$ 。对于 $\forall x \in (a,b)$, 有

$$f''(x) = \frac{f'(x) - \alpha f(x)}{\beta} = A_1 f'(x) + B_1 f(x), \quad (1)$$

其中 $A_1 = 1/\beta, B_1 = \alpha/\beta$ 。-----6 分

因为 (1) 右端可导, 从而

$$f'''(x) = A_1 f''(x) + B_1 f'(x)。-----8 分$$

$$\text{设 } f^{(n)}(x) = A_1 f^{(n-1)}(x) + B_1 f^{(n-2)}(x), n > 1, \text{ 则 } f^{(n+1)}(x) = A_1 f^{(n)}(x) + B_1 f^{(n-1)}(x)。$$

故 $f(x)$ 任意阶可导。-----12 分

四、(14 分) 求幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^3 + 2}{(n+1)!} (x-1)^n$ 的收敛域与和函数

$$\text{解: 因 } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^3 + 2}{(n+2)(n^3 + 2)} = 0。$$

固收敛半径 $R = +\infty$, 收敛域为 $(-\infty, +\infty)$ 。-----4 分

由

$$\frac{n^3 + 2}{(n+1)!} = \frac{(n+1)n(n-1)}{(n+1)!} + \frac{n+1}{(n+1)!} + \frac{1}{(n+1)!} = \frac{1}{(n-2)!} + \frac{1}{n!} + \frac{1}{(n+1)!} \quad (n \geq 2)$$

及幂级数 $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(n-2)!} (x-1)^n$, $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (x-1)^n$ 和 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+1)!} (x-1)^n$ 的收敛域皆为 $(-\infty, +\infty)$ 得

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^3+2}{(n+1)!} (x-1)^n = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(n-2)!} (x-1)^n + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (x-1)^n + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+1)!} (x-1)^n。$$

-----7 分

用 $S_1(x)$, $S_2(x)$ 和 $S_3(x)$ 分别表示上式右端三个幂级数的和函数。依据 e^x 的展开式得到

$$S_1(x) = (x-1)^2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (x-1)^n = (x-1)^2 e^{x-1}, \quad S_2(x) = e^{x-1}$$

再由

$$(x-1)S_3(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+1)!} (x-1)^{n+1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} (x-1)^n = e^{x-1} - 1$$

得到, 当 $x \neq 1$ 时 $S_3(x) = \frac{1}{x-1} (e^{x-1} - 1)$ 。-----10 分

又 $S_3(1) = 1$ 。-----12 分

综合以上讨论, 最终得到所给幂级数的和函数

$$S(x) = \begin{cases} (x^2 - 2x + 2)e^{x-1} + \frac{1}{x-1} (e^{x-1} - 1), & x \neq 1 \\ 2 & x = 1 \end{cases} \quad \text{-----14 分}$$

五、(16 分) 设函数 f 在 $[0,1]$ 上连续, 且 $\int_0^1 f(x)dx = 0, \int_0^1 xf(x)dx = 1$ 。试证:

$$(1) \exists x_0 \in [0,1] \text{ 使 } |f(x_0)| > 4$$

$$(2) \exists x_1 \in [0,1] \text{ 使 } |f(x_1)| = 4$$

证明: (1) 若 $\forall x \in [0,1], |f(x)| \leq 4$, 则

$$1 = \int_0^1 \left(x - \frac{1}{2}\right) f(x) dx \leq \int_0^1 \left|x - \frac{1}{2}\right| |f(x)| dx \leq 4 \int_0^1 \left|x - \frac{1}{2}\right| dx = 1 \quad \text{-----4 分}$$

$$\text{因此 } \int_0^1 \left|x - \frac{1}{2}\right| |f(x)| dx = 1。 \text{ 而 } 4 \int_0^1 \left|x - \frac{1}{2}\right| dx = 1,$$

$$\text{故 } \int_0^1 \left|x - \frac{1}{2}\right| (4 - |f(x)|) dx = 0, \quad \text{-----8 分}$$

所以对于任意的 $x \in [0,1], |f(x)| = 4$, 由连续性知 $f(x) \equiv 4$ 或 $f(x) \equiv -4$ 。

这就与条件 $\int_0^1 f(x)dx = 0$ 矛盾。

$$\text{故 } \exists x_0 \in [0,1], \text{ 使 } |f(x_0)| > 4 \quad \text{-----10 分}$$

(2) 先证 $\exists x_2 \in [0,1]$, 使 $|f(x_2)| < 4$ 。若不然, 对任何 $x \in [0,1]$, $|f(x)| \geq 4$ 成立。则, $f(x) \geq 4$ 恒成立, 或者 $f(x) \leq -4$ 恒成立, 与 $\int_0^1 f(x)dx = 0$ 矛盾。再由 $f(x)$ 的连续性 & (1) 的结果, 利用介值定理 $\exists x_1 \in [0,1]$ 使 $|f(x_1)| = 4$ 。-----16 分

六、(16 分) 设 $f(x, y)$ 在 $x^2 + y^2 \leq 1$ 上有连续的二阶偏导数, $f_{xx}^2 + 2f_{xy}^2 + f_{yy}^2 \leq M$ 。若 $f(0,0) = 0$, $f_x(0,0) = f_y(0,0) = 0$, 证明

$$\left| \iint_{x^2+y^2 \leq 1} f(x, y) dx dy \right| \leq \frac{\pi \sqrt{M}}{4}。$$

证明: 在点 (0,0) 展开 $f(x, y)$ 得

$$f(x, y) = \frac{1}{2} \left(x \frac{\partial}{\partial x} + y \frac{\partial}{\partial y} \right)^2 f(\theta x, \theta y) = \frac{1}{2} \left(x^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} + 2xy \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} + y^2 \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) f(\theta x, \theta y),$$

其中 $\theta \in (0,1)$ 。-----6 分

记 $(u, v, w) = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}, \frac{\partial^2}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) f(\theta x, \theta y)$, 则

$$f(x, y) = \frac{1}{2} (ux^2 + 2vxy + wy^2)。$$

由于 $\|(u, \sqrt{2}v, w)\| = \sqrt{u^2 + 2v^2 + w^2} \leq \sqrt{M}$ 以及 $\|(x^2, \sqrt{2}xy, y^2)\| = x^2 + y^2$, 我们有

$$|(u, \sqrt{2}v, w) \cdot (x^2, \sqrt{2}xy, y^2)| \leq \sqrt{M} (x^2 + y^2),$$

即

$$|f(x, y)| \leq \frac{1}{2} \sqrt{M} (x^2 + y^2)。-----13 分$$

从而

$$\left| \iint_{x^2+y^2 \leq 1} f(x, y) dx dy \right| \leq \frac{\sqrt{M}}{2} \iint_{x^2+y^2 \leq 1} (x^2 + y^2) dx dy = \frac{\pi \sqrt{M}}{4}。-----16 分$$

2014 年第六届全国大学生数学竞赛初赛（非数学类）

试卷及参考答案

一、填空题(共有 5 小题, 每小题 6 分, 共 30 分)

(1) 已知 $y_1 = e^x$ 和 $y_2 = xe^x$ 是齐次二阶常系数线性微分方程的解, 则该微分方程是_____.

【参考解答】: 由解的表达式可知微分方程对应的特征方程有二重根 $r = 1$, 故所求微分方程为

$$y''(x) - 2y'(x) + y(x) = 0.$$

(2) 设有曲面 $S: z = x^2 + 2y^2$ 和平面 $\pi: 2x + 2y + z = 0$, 则与 π 平行的 S 的切平面方程是_____.

【参考解答】: 设 $P_0(x_0, y_0, z_0)$ 是 S 上一点, 则 S 在点 P_0 的切平面方程为 $-2x_0(x - x_0) - 4y_0(y - y_0) + (z - z_0) = 0$. 由于该切平面与已知平面 L 平行, 则

$(-2x_0, -4y_0, 1)$ 平行于 $(2, 2, 1)$, 故存在常数 $k \neq 0$, 使得 $(-2x_0, -4y_0, 1) = k(2, 2, 1)$, 故得

$$x_0 = -1, y_0 = -\frac{1}{2}, z_0 = \frac{3}{2}, \text{ 所以切平面方程就为 } 2x + 2y + z + \frac{3}{2} = 0.$$

(3) 设 $y = y(x)$ 由 $x = \int_1^{y-x} \sin^2\left(\frac{\pi t}{4}\right) dt$ 所确定, 则 $\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=0} =$ _____.

【参考解答】: 易知 $y(0) = 1$, 两边对变量 x 求导, 则

$$1 = \sin^2\left(\frac{\pi}{4}(y-x)\right)(y'-1) \Rightarrow y' = \csc^2\left(\frac{\pi}{4}(y-x)\right) + 1$$

把 $x = 0$ 代入可得 $y' = 3$.

(4) 设 $x_n = \sum_{k=1}^n \frac{k}{(k+1)!}$, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n =$ _____.

【参考解答】: $x_n = \sum_{k=1}^n \frac{k}{(k+1)!} = \sum_{k=1}^n \left[\frac{1}{k!} - \frac{1}{(k+1)!} \right], 1 - \frac{1}{(n+1)!} \rightarrow 1.$

(5) 已知 $\lim_{x \rightarrow 0} \left(1 + x + \frac{f(x)}{x}\right)^{\frac{1}{x}} = e^3$, 则 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x^2} =$ _____.

【参考解答】: 由 $\lim_{x \rightarrow 0} \left(1 + x + \frac{f(x)}{x}\right)^{\frac{1}{x}} = e^3$ 可得 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \ln \left(1 + x + \frac{f(x)}{x}\right) = 3.$

于是 $\frac{1}{x} \ln \left(1 + x + \frac{f(x)}{x}\right) = 3 + \alpha, \alpha \rightarrow 0 (x \rightarrow 0)$, 即有 $\frac{f(x)}{x^2} = \frac{e^{3x+\alpha x} - 1}{x} - 1$, 从而

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{3x+\alpha x} - 1}{x} - 1 = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x + \alpha x}{x} - 1 = 2.$$

第二题: (12 分) 设 n 为正整数, 计算 $I = \int_{e^{-2n\pi}}^1 \left| \frac{d}{dx} \cos \left(\ln \frac{1}{x} \right) \right| dx.$

【参考解答】： $I = \int_{e^{-2n\pi}}^1 \left| \frac{d}{dx} \cos\left(\ln \frac{1}{x}\right) \right| dx = \int_{e^{-2n\pi}}^1 \left| \frac{d}{dx} \cos(\ln x) \right| dx = \int_{e^{-2n\pi}}^1 |\sin(\ln x)| \frac{1}{x} dx$

令 $\ln x = u$ ，则有 $I = \int_{-2n\pi}^0 |\sin(u)| du = \int_0^{2n\pi} |\sin t| dt = 4n \int_0^{\pi/2} |\sin t| dt = 4n$.

第三题：(14 分) 设函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上有二阶导数，且有正常数 A, B 使得

$$|f(x)| \leq A, |f''(x)| \leq B, \text{ 证明：对于任意 } x \in [0,1], \text{ 有 } |f'(x)| \leq 2A + \frac{B}{2}.$$

【参考证明】： 由泰勒公式，有

$$f(0) = f(x) + f'(x)(0-x) + \frac{f''(\xi)}{2}(0-x)^2, \xi \in (0, x)$$

$$f(1) = f(x) + f'(x)(1-x) + \frac{f''(\eta)}{2}(1-x)^2, \eta \in (x, 1)$$

上面两式相减，得到 $f'(x) = f(1) - f(0) - \frac{f''(\eta)}{2}(1-x)^2 + \frac{f''(\xi)}{2}x^2$

由条件 $|f(x)| \leq A, |f''(x)| \leq B$ ，得到 $|f'(x)| \leq 2A + \frac{B}{2}[(1-x)^2 + x^2]$

由于 $(1-x)^2 + x^2$ 在 $[0,1]$ 的最大值为 1，所以有 $|f'(x)| \leq 2A + \frac{B}{2}$.

第四题：(14 分) (1) 设一球缺高为 h ，所在球半径为 R 。证明该球缺的体积为

$$\frac{\pi}{3}(3R-h)h^2, \text{ 球冠的面积为 } 2\pi Rh.$$

(2) 设球体 $(x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2 \leq 12$ 被平面 $P: x+y+z=6$ 所截的小球缺为 Ω 。记球缺上的球冠为 Σ ，方向指向球外，求第二型曲面积分

$$I = \iint_{\Sigma} x dy dz + y dz dx + z dx dy.$$

【参考证明】(1)： 设球缺所在球表面方程为 $x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2$ ，球缺的中心线为 z 轴，且设球缺所在的圆锥顶角为 2α 。

记球缺的区域为 Ω ，则其体积为

$$\iiint_{\Omega} dV = \int_{R-h}^R dz \iint_{D_z} dx dy = \int_{R-h}^R \pi(R^2 - z^2) dz = \frac{\pi}{3}(3R-h)h^2.$$

由于球面的面积微元为 $dS = R^2 \sin \theta d\theta$ ，故球冠的面积为

$$\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\alpha} R^2 \sin \theta d\theta = 2\pi R^2 (1 - \cos \alpha) = 2\pi Rh.$$

(2) 记球缺 Ω 的底面圆为 P_1 ，方向指向球缺外，且记 $J = \iint_{P_1} x dy dz + y dz dx + z dx dy$ 。由高斯

公式，有 $I + J = \iiint_{\Omega} 3dV = 3V(\Omega)$ ，其中 $V(\Omega)$ 为 Ω 的体积。由于平面 P 的正向单位法向

量为 $\frac{-1}{\sqrt{3}}(1,1,1)$ ，故 $J = \frac{-1}{\sqrt{3}} \iint_{P_1} (x+y+z) dS = \frac{-6}{\sqrt{3}} \sigma(P_1) = -2\sqrt{3}\sigma(P_1)$ ，

其中 $\sigma(P_1)$ 为 P_1 的面积。故 $I = 3V(\Omega) - J = 3V(\Omega) + 2\sqrt{3}\sigma(P_1)$ 。

因为球缺底面圆心为 $Q(2,2,2)$ ，而球缺的顶点为 $D(3,3,3)$ ，故球缺的高度为

$h = |QD| = \sqrt{3}$. 再由(1)所证并代入 $h = \sqrt{3}$ 和 $R = 2\sqrt{3}$ 得

$$I = 3 \cdot \frac{\pi}{3} (3R - h) h^2 + 2\sqrt{3}\pi (2Rh - h^2) = 33\sqrt{3}\pi.$$

第五题：(15分) 设 f 在 $[a, b]$ 上非负连续，严格单增，且存在 $x_n \in [a, b]$ 使得

$$[f(x_n)]^n = \frac{1}{b-a} \int_a^b [f(x)]^n dx, \text{ 求 } \lim_{n \rightarrow \infty} x_n.$$

【参考解答】：考虑特殊情形： $a=0, b=1$ 。下面证明 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 1$ 。

首先， $x_n \in [0, 1]$ ，即 $x_n \leq 1$ ，只要证明 $\forall \varepsilon > 0 (\varepsilon < 1)$ ， $\exists N, \forall n > N$ 时， $1 - \varepsilon < x_n$ 。由 f 在 $[0, 1]$ 上严格单增，就是要证明 $f^n(1 - \varepsilon) < [f(x_n)]^n = \int_0^1 [f(x)]^n dx$ 。

由于 $\forall c \in (0, 1)$ ，有 $\int_c^1 [f(x)]^n dx > f^n(c)(1 - c)$ 。取 $c = 1 - \frac{\varepsilon}{2}$ ，则 $f(1 - \varepsilon) < f(c)$ ，即 $\frac{f(1 - \varepsilon)}{f(c)} < 1$ ，于是 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{f(1 - \varepsilon)}{f(c)} \right]^n = 0$ ，所以 $\exists N, \forall n > N$ 时有 $\left[\frac{f(1 - \varepsilon)}{f(c)} \right]^n < \frac{\varepsilon}{2} = 1 - c$ 。即 $f^n(1 - \varepsilon) < [f(c)]^n (1 - c) \leq \int_c^1 [f(x)]^n dx \leq \int_0^1 [f(x)]^n dx = f^n(x_n)$ 。

从而 $1 - \varepsilon < x_n$ ，由 ε 的任意性得 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 1$ 。

再考虑一般情形。令 $F(t) = f(a + t(b - a))$ ，由 f 在 $[a, b]$ 上非负连续，严格单增，知 F 在 $[0, 1]$ 上非负连续，严格单增。从而 $\exists t_n \in [0, 1]$ ，使得 $F^n(t_n) = \int_0^1 F^n(t) dt$ ，且 $\lim_{n \rightarrow \infty} t_n = 1$ 。即

$$f^n(a + t_n(b - a)) = \int_0^1 f^n(a + t(b - a)) dt.$$

记 $x_n = a + t_n(b - a)$ ，则有 $[f(x_n)]^n = \frac{1}{b-a} \int_a^b [f(x)]^n dx$ ，且 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a + (b - a) = b$ 。

第六题：(15分) 设 $A_n = \frac{n}{n^2 + 1} + \frac{n}{n^2 + 2^2} + \cdots + \frac{n}{n^2 + n^2}$ ，求 $\lim_{n \rightarrow \infty} n \left(\frac{\pi}{4} - A_n \right)$ 。

【参考解答】：令 $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ ，因 $A_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{1}{1+i^2/n^2}$ ，所以有 $\lim_{n \rightarrow \infty} A_n = \int_0^1 f(x) dx = \frac{\pi}{4}$ 。

记 $x_i = \frac{i}{n}$ ，则 $A_n = \sum_{i=1}^n \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x_i) dx$ ，故 $J_n = n \sum_{i=1}^n \int_{x_{i-1}}^{x_i} [f(x) - f(x_i)] dx$ 。

由拉格朗日中值，存在 $\zeta_i \in (x_{i-1}, x_i)$ 使得 $J_n = n \sum_{i=1}^n \int_{x_{i-1}}^{x_i} f'(\zeta_i)(x - x_i) dx$ 。

记 m_i, M_i 分别是 $f'(x)$ 在 $[x_{i-1}, x_i]$ 上的最大值和最小值，则 $m_i \leq f'(\zeta_i) \leq M_i$ ，故积分 $\int_{x_{i-1}}^{x_i} f'(\zeta_i)(x - x_i) dx$ 介于 $m_i \int_{x_{i-1}}^{x_i} (x - x_i) dx, M_i \int_{x_{i-1}}^{x_i} (x - x_i) dx$

之间，所以存在 $\eta_i \in (x_{i-1}, x_i)$ 使得 $\int_{x_{i-1}}^{x_i} f'(\zeta_i)(x - x_i) dx = -f'(\eta_i)(x_i - x_{i-1})^2 / 2$ 。

于是，有 $J_n = -\frac{n}{2} \sum_{i=1}^n f'(\eta_i)(x_i - x_{i-1})^2 = -\frac{1}{2n} \sum_{i=1}^n f'(\eta_i)$ 。从而

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n \left(\frac{\pi}{4} - A_n \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} J_n = -\frac{1}{2} \int_0^1 f'(x) dx = -\frac{1}{2} [f(1) - f(0)] = \frac{1}{4}.$$

第五届全国大学生数学竞赛预赛试卷 评分细则

一、(共 4 小题,每小题 6 分,共 24 分) 解答下列各题 .

1. 求极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \sin \pi \sqrt{1 + 4n^2}\right)^n$.

解 $\because \sin\left(\pi\sqrt{1+4n^2}\right) = \sin\left(\pi\sqrt{1+4n^2} - 2n\pi\right) = \sin \frac{\pi}{2n\pi + \pi\sqrt{1+4n^2}}$ (2 分)

$$\begin{aligned} \text{原式} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \sin \frac{\pi}{2n\pi + \pi\sqrt{1+4n^2}}\right)^n \\ &= \exp \left[\lim_{n \rightarrow \infty} n \ln \left(1 + \sin \frac{\pi}{2n\pi + \pi\sqrt{1+4n^2}}\right) \right] \end{aligned} \quad (2 \text{ 分})$$

$$\begin{aligned} &= \exp \left(\lim_{n \rightarrow \infty} n \sin \frac{\pi}{2n\pi + \pi\sqrt{1+4n^2}} \right) \\ &= \exp \left(\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\pi n}{2n\pi + \pi\sqrt{1+4n^2}} \right) = e^{\frac{1}{4}} \end{aligned} \quad (2 \text{ 分})$$

2 证明广义积分 $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx$ 不是绝对收敛的.

证. 记 $a_n = \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{|\sin x|}{x} dx$, 只要证明 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ 发散. (2 分)

$$\text{因为 } a_n \geq \frac{1}{(n+1)\pi} \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} |\sin x| dx = \frac{1}{(n+1)\pi} \int_0^{\pi} \sin x dx = \frac{2}{(n+1)\pi}. \quad (3 \text{ 分})$$

而 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2}{(n+1)\pi}$ 发散, 故 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ 发散. (1 分)

3. 设函数 $y = y(x)$ 由 $x^3 + 3x^2y - 2y^3 = 2$ 所确定. 求 $y(x)$ 的极值.

解 方程两边对 x 求导, 得

$$3x^2 + 6xy + 3x^2y' - 6y^2y' = 0 \quad (1 \text{ 分})$$

故 $y' = \frac{x(x+2y)}{2y^2-x^2}$, 令 $y' = 0$, 得 $x(x+2y) = 0 \Rightarrow x = 0$ 或 $x = -2y$.

将 $x = 0$ 和 $x = -2y$ 代入所给方程, 得

$$\begin{cases} x=0 \\ y=-1 \end{cases} \quad \text{和} \quad \begin{cases} x=-2 \\ y=1 \end{cases}. \quad (2 \text{ 分})$$

又

$$y'' = \frac{(2y^2 - x^2)(2x + 2xy' + 2y) + (x^2 + 2xy)(4yy' - 2x)}{(2y^2 - x^2)^2} \bigg|_{\substack{x=0 \\ y=-1 \\ y'=0}} = -1 < 0,$$

$$y'' \bigg|_{\substack{x=-2 \\ y=1 \\ y'=0}} = 1 > 0.$$

故 $y(0) = -1$ 为极大值, $y(-2) = 1$ 为极小值. (3 分)

4. 过曲线 $y = \sqrt[3]{x} (x \geq 0)$ 上的点 A 作切线, 使该切线与曲线及 x 轴所围成的平面图形的面积为 $\frac{3}{4}$, 求点 A 的坐标.

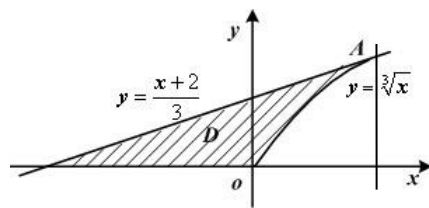
解 设切点 A 的坐标为 $(t, \sqrt[3]{t})$, 曲线过 A 点的切线方程为

$$y - \sqrt[3]{t} = \frac{1}{3\sqrt[3]{t^2}}(x - t) \quad (2 \text{ 分})$$

令 $y = 0$, 由上式可得切线与 x 轴交点的横坐标 $x_0 = -2t$

\therefore 平面图形的面积 $S = \triangle Ax_0t$ 的面积 - 曲边梯形 otA 的面积

$$S = \frac{1}{2} \sqrt[3]{t} \cdot 3t - \int_0^t \sqrt[3]{x} dx = \frac{3}{4} t \sqrt[3]{t} = \frac{3}{4} \Rightarrow t = 1, \therefore A \text{ 的坐标为 } (1, 1). \quad (4 \text{ 分})$$



二、(12 分) 计算定积分 $I = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{x \sin x \cdot \arctan e^x}{1 + \cos^2 x} dx$.

$$\begin{aligned} \text{解} \quad I &= \int_{-\pi}^0 \frac{x \sin x \cdot \arctan e^x}{1 + \cos^2 x} dx + \int_0^{\pi} \frac{x \sin x \cdot \arctan e^x}{1 + \cos^2 x} dx \\ &= \int_0^{\pi} \frac{x \sin x \cdot \arctan e^{-x}}{1 + \cos^2 x} dx + \int_0^{\pi} \frac{x \sin x \cdot \arctan e^x}{1 + \cos^2 x} dx \quad (4 \text{ 分}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \int_0^{\pi} (\arctan e^x + \arctan e^{-x}) \frac{x \sin x}{1 + \cos^2 x} dx \\ &= \frac{\pi}{2} \int_0^{\pi} \frac{x \sin x}{1 + \cos^2 x} dx \quad (2 \text{ 分}) \end{aligned}$$

$$= \left(\frac{\pi}{2} \right)^2 \int_0^{\pi} \frac{\sin x}{1 + \cos^2 x} dx \quad (4 \text{ 分})$$

$$= - \left(\frac{\pi}{2} \right)^2 \arctan(\cos x) \bigg|_0^{\pi} = \frac{\pi^3}{8} \quad (2 \text{ 分})$$

三、(12 分) 设 $f(x)$ 在 $x=0$ 处存在二阶导数 $f''(0)$, 且 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = 0$. 证明: 级数

$\sum_{n=1}^{\infty} \left| f\left(\frac{1}{n}\right) \right|$ 收敛.

证 由于 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续, 且 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = 0$,

$$\text{则 } f(0) = \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} \cdot x = 0, \quad (2 \text{ 分})$$

$$f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = 0. \quad (2 \text{ 分})$$

应用罗比达法则,

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(x)}{2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(x) - f'(0)}{2(x-0)} = \frac{1}{2} f''(0). \quad (3 \text{ 分})$$

所以

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left| f\left(\frac{1}{n}\right) \right|}{\frac{1}{n^2}} = \frac{1}{2} |f''(0)|. \quad (2 \text{ 分})$$

由于级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ 收敛, 从而 $\sum_{n=1}^{\infty} \left| f\left(\frac{1}{n}\right) \right|$ 收敛. (3 分)

四、(10 分) 设 $|f(x)| \leq \pi, f'(x) \geq m > 0 (a \leq x \leq b)$, 证明 $\left| \int_a^b \sin f(x) dx \right| \leq \frac{2}{m}$.

证 因为 $f'(x) \geq m > 0 (a \leq x \leq b)$, 所以 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上严格单增, 从而有反函数. (2 分)

设 $A = f(a), B = f(b)$, φ 是 f 的反函数, 则

$$0 < \varphi'(y) = \frac{1}{f'(x)} \leq \frac{1}{m}, \quad (3 \text{ 分})$$

又 $|f(x)| \leq \pi$, 则 $-\pi \leq A < B \leq \pi$, 所以

$$\left| \int_a^b \sin f(x) dx \right| \stackrel{x=\varphi(y)}{=} \left| \int_A^B \varphi'(y) \sin y dy \right| \quad (3 \text{ 分})$$

$$\leq \int_0^\pi \frac{1}{m} \sin y dy = \frac{2}{m} \quad (2 \text{ 分})$$

五、(14 分) 设 Σ 是一个光滑封闭曲面, 方向朝外. 给定第二型的曲面积分

$$I = \iiint_{\Sigma} (x^3 - x) dy dz + (2y^3 - y) dz dx + (3z^3 - z) dx dy.$$

试确定曲面 Σ , 使得积分 I 的值最小, 并求该最小值.

解. 记 Σ 围成的立体为 V , 由高斯公式,

$$I = \iiint_V (3x^2 + 6y^2 + 9z^2 - 3) dv = 3 \iiint_V (x^2 + 2y^2 + 3z^2 - 1) dx dy dz. \quad (3 \text{ 分})$$

为了使得 I 达到最小, 就要求 V 是使得 $x^2 + 2y^2 + 3z^2 - 1 \leq 0$ 的最大空间区域, 即

$$V = \{(x, y, z) \mid x^2 + 2y^2 + 3z^2 \leq 1\}. \quad (3 \text{ 分})$$

所以 V 是一个椭球, Σ 是椭球 V 的表面时, 积分 I 最小.

$$\text{为求该最小值, 作变换 } \begin{cases} x = u \\ y = v / \sqrt{2} \\ z = w / \sqrt{3} \end{cases} \text{ 则 } \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, w)} = \frac{1}{\sqrt{6}}, \text{ 有}$$

$$I = \frac{3}{\sqrt{6}} \iiint_{u^2 + v^2 + w^2 \leq 1} (u^2 + v^2 + w^2 - 1) du dv dw. \quad (4 \text{ 分})$$

使用球坐标变换, 我们有

$$I = \frac{3}{\sqrt{6}} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi d\theta \int_0^1 (r^2 - 1) r^2 \sin \theta dr = -\frac{4\sqrt{6}}{15} \pi. \quad (4 \text{ 分})$$

六、(14 分) 设 $I_a(r) = \int_C \frac{ydx - xdy}{(x^2 + y^2)^a}$, 其中 a 为常数, 曲线 C 为椭圆 $x^2 + xy + y^2 = r^2$, 取正

向. 求极限 $\lim_{r \rightarrow +\infty} I_a(r)$.

$$\text{解. 作变换 } \begin{cases} x = (u - v) / \sqrt{2} \\ y = (u + v) / \sqrt{2} \end{cases},$$

曲线 C 变为 uov 平面上的 $\Gamma: \frac{3}{2}u^2 + \frac{1}{2}v^2 = r^2$, 也是取正向 (2 分)

且有 $x^2 + y^2 = u^2 + v^2$, $ydx - xdy = vdu - udv$,

$$I_a(r) = \int_\Gamma \frac{vdu - udv}{(u^2 + v^2)^a}. \quad (2 \text{ 分})$$

$$\text{作变换 } \begin{cases} u = \sqrt{\frac{2}{3}}r \cos \theta \\ v = \sqrt{2}r \sin \theta \end{cases}, \text{ 则有 } vdu - udv = -\frac{2}{\sqrt{3}}r^2 d\theta$$

$$I_a(r) = -\frac{2}{\sqrt{3}}r^{2-2a} \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{(2\cos^2 \theta / 3 + 2\sin^2 \theta)^a} = -\frac{2}{\sqrt{3}}r^{2-2a} J_a,$$

$$\text{其中 } J_a = \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{(2\cos^2 \theta / 3 + 2\sin^2 \theta)^a}, \quad 0 < J_a < +\infty. \quad (3 \text{ 分})$$

因此当 $a > 1$ 和 $a < 1$, 所求极限分别为 0 和 $-\infty$. (2 分)

而当 $a=1$,

$$J_1 = \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{2 \cos^2 \theta} = \int_0^{\pi/2} \frac{dt}{2 \tan^2 t} = 4 \int_0^{+\infty} \frac{dt}{1+t^2} = \sqrt{3} \pi. \quad (3 \text{ 分})$$

故所求极限为

$$\lim_{r \rightarrow +\infty} I_a(r) = \begin{cases} 0, & a > 1 \\ -\infty, & a < 1 \\ -2\pi, & a = 1 \end{cases}. \quad (2 \text{ 分})$$

七、(14 分) 判断级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}}{(n+1)(n+2)}$ 的敛散性, 若收敛, 求其和.

解: (1) 记 $a_n = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}$, $u_n = \frac{a_n}{(n+1)(n+2)}$, $n=1, 2, 3, \dots$.

因为 n 充分大时

$$0 < a_n = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} < 1 + \int_1^n \frac{1}{x} dx = 1 + \ln n < \sqrt{n}, \quad (3 \text{ 分})$$

所以 $u_n \leq \frac{\sqrt{n}}{(n+1)(n+2)} < \frac{1}{n^{3/2}}$ 而 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{3/2}}$ 收敛, 所以 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛. (2 分)

$$(2) \quad a_k = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{k} \quad (k=1, 2, \dots)$$

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=1}^n \frac{1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{k}}{(k+1)(k+2)} = \sum_{k=1}^n \frac{a_k}{(k+1)(k+2)} = \sum_{k=1}^n \left(\frac{a_k}{k+1} - \frac{a_k}{k+2} \right) \\ &= \left(\frac{a_1}{2} - \frac{a_1}{3} \right) + \left(\frac{a_2}{3} - \frac{a_2}{4} \right) + \dots + \left(\frac{a_{n-1}}{n} - \frac{a_{n-1}}{n+1} \right) + \left(\frac{a_n}{n+1} - \frac{a_n}{n+2} \right) \end{aligned} \quad (2 \text{ 分})$$

$$= \frac{1}{2} a_1 + \frac{1}{3} (a_2 - a_1) + \frac{1}{4} (a_3 - a_2) + \dots + \frac{1}{n+1} (a_n - a_{n-1}) - \frac{1}{n+2} a_n \quad (2 \text{ 分})$$

$$= \left(\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{n \cdot (n-1)} \right) - \frac{1}{n+2} a_n = 1 - \frac{1}{n} - \frac{1}{n+2} a_n. \quad (2 \text{ 分})$$

因为 $0 < a_n < 1 + \ln n$

所以 $0 < \frac{a_n}{n+2} < \frac{1 + \ln n}{n+2}$ 且 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + \ln n}{n+2} = 0$. 所以 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{n+2} = 0$.

于是 $S = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = 1 - 0 - 0 = 1$. 证毕. (3 分)

第四届全国大学生数学竞赛预赛试题

（非数学类）参考答案及评分标准

一、（本题共 5 小题，每小题各 6 分，共 30 分）解答下列各题（要求写出重要步骤）。

(1) 求极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} (n!)^{\frac{1}{n^2}}$;

(2) 求通过直线 $L: \begin{cases} 2x + y - 3z + 2 = 0 \\ 5x + 5y - 4z + 3 = 0 \end{cases}$ 的两个相互垂直的平面 π_1 和 π_2 ，使其中一个平面过点

$(4, -3, 1)$;

(3) 已知函数 $z = u(x, y)e^{ax+by}$ ，且 $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = 0$ ，确定常数 a 和 b ，使函数 $z = z(x, y)$ 满足方程

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} - \frac{\partial z}{\partial x} - \frac{\partial z}{\partial y} + z = 0;$$

(4) 设函数 $u = u(x)$ 连续可微， $u(2) = 1$ ，且 $\int_L (x + 2y)udx + (x + u^3)udy$ 在右半平面上与路径无关，

求 $u(x)$;

(5) 求极限 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt[3]{x} \int_x^{x+1} \frac{\sin t}{\sqrt{t + \cos t}} dt$.

解

(1) 因为 $(n!)^{\frac{1}{n^2}} = e^{\frac{1}{n^2} \ln(n!)}$ (1 分)

而 $\frac{1}{n^2} \ln(n!) \leq \frac{1}{n} \left(\frac{\ln 1}{1} + \frac{\ln 2}{2} + \cdots + \frac{\ln n}{n} \right)$ ，且 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln n}{n} = 0$ (3 分)

所以 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left(\frac{\ln 1}{1} + \frac{\ln 2}{2} + \cdots + \frac{\ln n}{n} \right) = 0$,

即 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} \ln(n!) = 0$ ，故 $\lim_{n \rightarrow \infty} (n!)^{\frac{1}{n^2}} = 1$ (2 分)

(2) 过直线 L 的平面束为

$$\lambda(2x + y - 3z + 2) + \mu(5x + 5y - 4z + 3) = 0$$

即 $(2\lambda + 5\mu)x + (\lambda + 5\mu)y - (3\lambda + 4\mu)z + (2\lambda + 3\mu) = 0$ ， (2 分)

若平面 π_1 过点 $(4, -3, 1)$ ，代入得 $\lambda + \mu = 0$ ，即 $\mu = -\lambda$ ，从而 π_1 的方程为

$$3x+4y-z+1=0, \quad \dots\dots\dots (2 \text{ 分})$$

若平面束中的平面 π_2 与 π_1 垂直, 则

$$3 \cdot (2\lambda + 5\mu) + 4 \cdot (\lambda + 5\mu) + 1 \cdot (3\lambda + 4\mu) = 0$$

解得 $\lambda = -3\mu$, 从而平面 π_2 的方程为 $x - 2y - 5z + 3 = 0$, $\dots\dots\dots (2 \text{ 分})$

$$(3) \quad \frac{\partial z}{\partial x} = e^{ax+by} \left[\frac{\partial u}{\partial x} + au(x+y) \right], \quad \frac{\partial z}{\partial y} = e^{ax+by} \left[\frac{\partial u}{\partial y} + bu(x+y) \right], \quad \dots\dots\dots (2 \text{ 分})$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = e^{ax+by} \left[b \frac{\partial u}{\partial x} + a \frac{\partial u}{\partial y} + abu(x,y) \right]. \quad \dots\dots\dots (2 \text{ 分})$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} - \frac{\partial z}{\partial x} - \frac{\partial z}{\partial y} + z = e^{ax+by} \left[(b-1) \frac{\partial u}{\partial x} + (a-1) \frac{\partial u}{\partial y} + (ab-a-b+1)u(x,y) \right],$$

若使 $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} - \frac{\partial z}{\partial x} - \frac{\partial z}{\partial y} + z = 0$, 只有

$$(b-1) \frac{\partial u}{\partial x} + (a-1) \frac{\partial u}{\partial y} + (ab-a-b+1)u(x,y) = 0, \quad \text{即 } a=b=1. \quad \dots\dots\dots (2 \text{ 分})$$

$$(4) \quad \text{由 } \frac{\partial}{\partial x}(u[x+u^3]) = \frac{\partial}{\partial y}((x+2y)u) \text{ 得 } (x+4u^3)u' = u, \text{ 即 } \frac{dx}{du} - \frac{1}{u}x = 4u^2 \quad \dots\dots (2 \text{ 分})$$

方程通解为

$$x = e^{\ln u} \left(\int 4u^2 e^{-\ln u} du + C \right) = u \left(\int 4u du + C \right) = u(2u^2 + C) \quad \dots\dots\dots (3 \text{ 分})$$

$$\text{由 } u(2)=1 \text{ 得 } C=0, \text{ 故 } u = \left(\frac{x}{2} \right)^{1/3}. \quad \dots\dots\dots (1 \text{ 分})$$

(5) 因为当 $x > 1$ 时,

$$\left| \sqrt[3]{x} \int_x^{x+1} \frac{\sin t}{\sqrt{t+\cos t}} dt \right| \leq \sqrt[3]{x} \int_x^{x+1} \frac{dt}{\sqrt{t-1}} \quad \dots\dots\dots (3 \text{ 分})$$

$$\leq 2\sqrt[3]{x} (\sqrt{x} - \sqrt{x-1}) = 2 \frac{\sqrt[3]{x}}{\sqrt{x} + \sqrt{x-1}} \rightarrow 0 (x \rightarrow \infty), \quad \dots\dots\dots (2 \text{ 分})$$

$$\text{所以 } \lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt[3]{x} \int_x^{x+1} \frac{\sin t}{\sqrt{t+\cos t}} dt = 0. \quad \dots\dots\dots (1 \text{ 分})$$

二、(本题 10 分) 计算 $\int_0^{+\infty} e^{-2x} |\sin x| dx$

解 由于

$$\begin{aligned}\int_0^{n\pi} e^{-2x} |\sin x| dx &= \sum_{k=1}^n \int_{(k-1)\pi}^{k\pi} e^{-2x} |\sin x| dx \\ &= \sum_{k=1}^n \int_{(k-1)\pi}^{k\pi} (-1)^{k-1} e^{-2x} \sin x dx \dots\dots\dots (3 \text{ 分})\end{aligned}$$

应用分部积分法

$$\int_{(k-1)\pi}^{k\pi} (-1)^{k-1} e^{-2x} \sin x dx = \frac{1}{5} e^{-2k\pi} (1 + e^{2\pi}) \dots\dots\dots (2 \text{ 分})$$

所以

$$\int_0^{n\pi} e^{-2x} |\sin x| dx = \frac{1}{5} (1 + e^{2\pi}) \sum_{k=1}^n e^{-2k\pi} = \frac{1}{5} (1 + e^{2\pi}) \frac{e^{-2\pi} - e^{-2(n+1)\pi}}{1 - e^{-2\pi}} \dots\dots\dots (2 \text{ 分})$$

当 $n\pi \leq x < (n+1)\pi$ 时

$$\int_0^{n\pi} e^{-2x} |\sin x| dx \leq \int_0^x e^{-2x} |\sin x| dx < \int_0^{(n+1)\pi} e^{-2x} |\sin x| dx,$$

令 $n \rightarrow \infty$, 由两边夹法则, 得

$$\int_0^{\infty} e^{-2x} |\sin x| dx = \lim_{x \rightarrow \infty} \int_0^x e^{-2x} |\sin x| dx = \frac{1}{5} \frac{e^{2\pi} + 1}{e^{2\pi} - 1} \dots\dots\dots (3 \text{ 分})$$

注: 如果最后不用夹逼法则, 而用 $\int_0^{\infty} e^{-2x} |\sin x| dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{n\pi} e^{-2x} |\sin x| dx = \frac{1}{5} \frac{e^{2\pi} + 1}{e^{2\pi} - 1}$, 需先说明

$\int_0^{\infty} e^{-2x} |\sin x| dx$ 收敛.

三、(本题 10 分) 求方程 $x^2 \sin \frac{1}{x} = 2x - 501$ 的近似解. 精确到 0.001.

解 由泰勒公式 $\sin t = t - \frac{\sin(\theta t)}{2} t^2 \quad (0 < \theta < 1) \dots\dots\dots (2 \text{ 分})$

令 $t = \frac{1}{x}$ 得 $\sin \frac{1}{x} = \frac{1}{x} - \frac{\sin\left(\frac{\theta}{x}\right)}{2x^2},$

代入原方程得

$$x - \frac{1}{2} \sin\left(\frac{\theta}{x}\right) = 2x - 501 \quad \text{即 } x = 501 - \frac{1}{2} \sin\left(\frac{\theta}{x}\right) \dots\dots\dots (4 \text{ 分})$$

由此知 $x > 500$, $0 < \frac{\theta}{x} < \frac{1}{500}$

$$|x - 501| = \frac{1}{2} \left| \sin \left(\frac{\theta}{x} \right) \right| \leq \frac{1}{2} \frac{\theta}{x} < \frac{1}{1000} = 0.001$$

所以, $x = 501$ 即为满足题设条件的解 (4 分)

四、(本题 12 分) 设函数 $y = f(x)$ 的二阶可导, 且 $f''(x) > 0, f(0) = 0, f'(0) = 0$, 求

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3 f(u)}{f(x) \sin^3 u}$, 其中 u 是曲线 $y = f(x)$ 上点 $p(x, f(x))$ 处的切线在 x 轴上的截距.

解: 曲线 $y = f(x)$ 在点 $p(x, f(x))$ 处的切线方程为

$$Y - f(x) = f'(x)(X - x),$$

令 $Y = 0$, 则有 $X = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$, 由此 $u = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$, (3 分)

且有

$$\lim_{x \rightarrow 0} u = \lim_{x \rightarrow 0} \left(x - \frac{f(x)}{f'(x)} \right) = - \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{f(x) - f(0)}{x}}{\frac{f'(x) - f'(0)}{x}} = \frac{f'(0)}{f''(0)} = 0. \text{ (2 分)}$$

由 $f(x)$ 在 $x = 0$ 处的二阶泰勒公式

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2}x^2 + o(x^2) = \frac{f''(0)}{2}x^2 + o(x^2) \text{ (2 分)}$$

得

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{u}{x} &= 1 - \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{xf'(x)} = 1 - \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{f''(0)}{2}x^2 + o(x^2)}{xf'(x)} \\ &= 1 - \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f''(0) + o(1)}{\frac{f'(x) - f'(0)}{x}} = 1 - \frac{1}{2} \frac{f''(0)}{f''(0)} = \frac{1}{2} \text{ (3 分)} \end{aligned}$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3 f(u)}{f(x) \sin^3 u} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3 \left(\frac{f''(0)}{2} u^2 + o(u^2) \right)}{u^3 \left(\frac{f''(0)}{2} x^2 + o(x^2) \right)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{u} = 2 \text{ (2 分)}$$

五、(本题 12 分) 求最小实数 C , 使得满足 $\int_0^1 |f(x)| dx = 1$ 的连续的函数 $f(x)$ 都有

$$\int_0^1 f(\sqrt{x}) dx \leq C$$

解 由于 $\int_0^1 |f(\sqrt{x})| dx = \int_0^1 |f(t)| 2t dt \leq 2 \int_0^1 |f(t)| dt = 2$, (4 分)

另一方面, 取 $f_n(x) = (n+1)x^n$, 则 $\int_0^1 |f_n(x)| dx = \int_0^1 f_n(x) dx = 1$ (3 分)

而 $\int_0^1 f_n(\sqrt{x}) dx = 2 \int_0^1 t f_n(t) dt = 2 \frac{n+1}{n+2} = 2 \left(1 - \frac{1}{n+2} \right) \rightarrow 2 \ (n \rightarrow \infty)$ (3 分)

因此最小的实数 $C = 2$ (2 分)

六、(本题 12 分) 设 $f(x)$ 为连续函数, $t > 0$ 。 区域 Ω 是由抛物面 $z = x^2 + y^2$ 和球面 $x^2 + y^2 + z^2 = t^2 \ (t > 0)$ 所围起来的部分. 定义三重积分

$$F(t) = \iiint_{\Omega} f(x^2 + y^2 + z^2) dv.$$

求 $F(t)$ 的导数 $F'(t)$.

解法 1. 记 $g = g(t) = \frac{\sqrt{1+4t^2}-1}{2}$, 则 Ω 在 xy 面上的投影为 $x^2 + y^2 \leq g$ (2 分)

在曲线 $S: \begin{cases} x^2 + y^2 = z \\ x^2 + y^2 + z^2 = t^2 \end{cases}$ 上任取一点 (x, y, z) , 则原点到的点的射线和 z 轴的夹角

为 $\theta_t = \arccos \frac{z}{t} = \arccos \frac{g}{t}$. 取 $\Delta t > 0$, 则 $\theta_t > \theta_{t+\Delta t}$. 对于固定的 $t > 0$, 考虑积分差

$F(t+\Delta t) - F(t)$, 这是一个在厚度为 Δt 的球壳上的积分. 原点到球壳边缘上的点的射线和

z 轴夹角在 $\theta_{t+\Delta t}$ 和 θ_t 之间. 我们使用球坐标变换来做这个积分, 由积分的连续性可知, 存在

$\alpha = \alpha(\Delta t)$, $\theta_{t+\Delta t} \leq \alpha \leq \theta_t$, 使得

$$F(t+\Delta t) - F(t) = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\alpha} d\theta \int_t^{t+\Delta t} f(r^2) r^2 \sin \theta dr. (4 分)$$

这样就有 $F(t+\Delta t) - F(t) = 2\pi(1 - \cos \alpha) \int_t^{t+\Delta t} f(r^2) r^2 dr$. 而当 $\Delta t \rightarrow 0^+$,

$$\cos \alpha \rightarrow \cos \theta_t = \frac{g(t)}{t}, \quad \frac{1}{\Delta t} \int_t^{t+\Delta t} f(r^2) r^2 dr \rightarrow t^2 f(t^2).$$

故 $F(t)$ 的右导数为

$$2\pi \left(1 - \frac{g(t)}{t}\right) t^2 f(t^2) = \pi \left(2t + 1 - \sqrt{1 + 4t^2}\right) t f(t^2). \quad \dots\dots\dots (4 \text{ 分})$$

当 $\Delta t < 0$, 考虑 $F(t) - F(t + \Delta t)$ 可以得到同样的左导数. 因此

$$F'(t) = \pi \left(2t + 1 - \sqrt{1 + 4t^2}\right) t f(t^2) \quad \dots\dots\dots (2 \text{ 分})$$

解法 2.. 令
$$\begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta, \\ z = z \end{cases}$$

则 $\Omega: \begin{cases} 0 \leq \theta \leq 2\pi \\ 0 \leq r \leq a \\ r^2 \leq z \leq \sqrt{t^2 - r^2} \end{cases}$, 其中 a 满足 $a^2 + a^4 = t^2$, $a = \frac{\sqrt{1 + 4t^2} - 1}{2}$ (2 分)

故有

$$F(t) = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^a r dr \int_{r^2}^{\sqrt{t^2 - r^2}} f(r^2 + z^2) dz = 2\pi \int_0^a r \left(\int_{r^2}^{\sqrt{t^2 - r^2}} f(r^2 + z^2) dz \right) dr \quad \dots\dots\dots (2 \text{ 分})$$

从而有

$$F'(t) = 2\pi \left(a \int_{a^2}^{\sqrt{t^2 - a^2}} f(a^2 + z^2) dz \frac{da}{dt} + \int_0^a r f(r^2 + t^2 - r^2) \frac{t}{\sqrt{t^2 - r^2}} dr \right) \dots\dots (4 \text{ 分})$$

注意到 $\sqrt{t^2 - a^2} = a^2$, 第一个积分为 0, 我们得到

$$F'(t) = 2\pi f(t^2) t \int_0^a r \frac{1}{\sqrt{t^2 - r^2}} dr = -\pi t f(t^2) \int_0^a \frac{d(t^2 - r^2)}{\sqrt{t^2 - r^2}},$$

所以 $F'(t) = 2\pi t f(t^2) (t - a^2) = \pi t f(t^2) (2t + 1 - \sqrt{1 + 4t^2}) \quad \dots\dots\dots (4 \text{ 分})$

七、(本题 14 分) 设 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 为正项级数,

(1) 若 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{a_n}{a_{n+1} b_n} - \frac{1}{b_{n+1}} \right) > 0$, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛;

(2) 若 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{a_n}{a_{n+1} b_n} - \frac{1}{b_{n+1}} \right) < 0$, 且 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 发散, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散。

证明: (1) 设 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{a_n}{a_{n+1}b_n} - \frac{1}{b_{n+1}} \right) = 2\delta > \delta > 0$, 则存在 $N \in \mathbf{N}$, 对于任意的 $n \geq N$ 时,

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} \frac{1}{b_n} - \frac{1}{b_{n+1}} > \delta, \quad \frac{a_n}{b_n} - \frac{a_{n+1}}{b_{n+1}} > \delta a_{n+1}, \quad a_{n+1} < \frac{1}{\delta} \left(\frac{a_n}{b_n} - \frac{a_{n+1}}{b_{n+1}} \right), \dots\dots\dots (4 \text{ 分})$$

$$\sum_{n=N}^m a_{n+1} \leq \frac{1}{\delta} \sum_{n=N}^m \left(\frac{a_n}{b_n} - \frac{a_{n+1}}{b_{n+1}} \right) \leq \frac{1}{\delta} \left(\frac{a_N}{b_N} - \frac{a_{m+1}}{b_{m+1}} \right) \leq \frac{1}{\delta} \frac{a_N}{b_N},$$

因而 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 的部分和有上界, 从而 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛. $\dots\dots\dots (4 \text{ 分})$

(2) 若 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{a_n}{a_{n+1}} \frac{1}{b_n} - \frac{1}{b_{n+1}} \right) < \delta < 0$ 则存在 $N \in \mathbf{N}$, 对于任意的 $n \geq N$ 时,

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} < \frac{b_n}{b_{n+1}} \dots\dots\dots (3 \text{ 分})$$

有

$$a_{n+1} > \frac{b_{n+1}}{b_n} a_n > \dots > \frac{b_{n+1}}{b_n} \frac{b_n}{b_{n-1}} \dots \frac{b_{N+1}}{b_N} a_N = \frac{a_N}{b_N} b_{n+1}$$

于是由 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 发散, 得到 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散. $\dots\dots\dots (3 \text{ 分})$

第三届全国大学生数学竞赛预赛试卷

参考答案及评分标准

(非数学类, 2011)

一、(本题共 4 小题, 每题 6 分, 共 24 分) 计算题

1. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^{\frac{2}{x}} - e^2(1 - \ln(1+x))}{x}.$

解: 因为 $\frac{(1+x)^{\frac{2}{x}} - e^2(1 - \ln(1+x))}{x} = \frac{e^{\frac{2}{x} \ln(1+x)} - e^2(1 - \ln(1+x))}{x},$

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\frac{2}{x} \ln(1+x)}}{x} = e^2, \dots\dots\dots 3 \text{ 分}$

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\frac{2}{x} \ln(1+x)} - e^2}{x} = e^2 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\frac{2}{x} \ln(1+x) - 2} - 1}{x} = e^2 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{2}{x} \ln(1+x) - 2}{x}$
 $= 2e^2 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x) - x}{x^2} = 2e^2 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{1+x} - 1}{2x} = -e^2, \dots\dots\dots 5 \text{ 分}$

所以

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^{\frac{2}{x}} - e^2(1 - \ln(1+x))}{x} = 0. \dots\dots\dots 6 \text{ 分}$

2. 设 $a_n = \cos \frac{\theta}{2} \cdot \cos \frac{\theta}{2^2} \cdots \cdots \cos \frac{\theta}{2^n}$, 求 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$.

解: 若 $\theta = 0$, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 1. \dots\dots\dots 1 \text{ 分}$

若 $\theta \neq 0$, 则当 n 充分大, 使得 $2^n > |\theta|$ 时,

$a_n = \cos \frac{\theta}{2} \cdot \cos \frac{\theta}{2^2} \cdots \cdots \cos \frac{\theta}{2^n} = \cos \frac{\theta}{2} \cdot \cos \frac{\theta}{2^2} \cdots \cdots \cos \frac{\theta}{2^n} \cdot \sin \frac{\theta}{2^n} \cdot \frac{1}{\sin \frac{\theta}{2^n}}$
 $= \cos \frac{\theta}{2} \cdot \cos \frac{\theta}{2^2} \cdots \cdots \cos \frac{\theta}{2^{n-1}} \cdot \frac{1}{2} \sin \frac{\theta}{2^{n-1}} \cdot \frac{1}{\sin \frac{\theta}{2^n}}. \dots\dots\dots 4 \text{ 分}$
 $= \cos \frac{\theta}{2} \cdot \cos \frac{\theta}{2^2} \cdots \cdots \cos \frac{\theta}{2^{n-2}} \cdot \frac{1}{2^2} \sin \frac{\theta}{2^{n-2}} \cdot \frac{1}{\sin \frac{\theta}{2^n}} = \frac{\sin \theta}{2^n \sin \frac{\theta}{2^n}}$

这时, $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin \theta}{2^n \sin \frac{\theta}{2^n}} = \frac{\sin \theta}{\theta}. \dots\dots\dots 6 \text{ 分}$

3. 求 $\iint_D \operatorname{sgn}(xy-1)dxdy$, 其中 $D = \{(x, y) | 0 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 2\}$

解: 设 $D_1 = \{(x, y) | 0 \leq x \leq \frac{1}{2}, 0 \leq y \leq 2\}$

$$D_2 = \{(x, y) | \frac{1}{2} \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq \frac{1}{x}\}$$

$$D_3 = \{(x, y) | \frac{1}{2} \leq x \leq 2, \frac{1}{x} \leq y \leq 2\}. \quad \dots\dots\dots 2 \text{ 分}$$

$$\iint_{D_1 \cup D_2} dxdy = 1 + \int_{\frac{1}{2}}^2 \frac{dx}{x} = 1 + 2 \ln 2, \quad \iint_{D_3} dxdy = 3 - 2 \ln 2. \quad \dots\dots\dots 4 \text{ 分}$$

$$\iint_D \operatorname{sgn}(xy-1)dxdy = \iint_{D_3} dxdy - \iint_{D_2 \cup D_3} dxdy = 2 - 4 \ln 2. \quad \dots\dots\dots 6 \text{ 分}$$

4. 求幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n-1}{2^n} x^{2n-2}$ 的和函数, 并求级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n-1}{2^{2n-1}}$ 的和.

解: 令 $S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n-1}{2^n} x^{2n-2}$, 则其的定义区间为 $(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$. $\forall x \in (-\sqrt{2}, \sqrt{2})$,

$$\int_0^x S(t)dt = \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^x \frac{2n-1}{2^n} t^{2n-2} dt = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n-1}}{2^n} = \frac{x}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{x^2}{2}\right)^{n-1} = \frac{x}{2-x^2}. \quad \dots\dots\dots 2 \text{ 分}$$

$$\text{于是, } S(x) = \left(\frac{x}{2-x^2}\right)' = \frac{2+x^2}{(2-x^2)^2}, \quad x \in (-\sqrt{2}, \sqrt{2}). \quad \dots\dots\dots 4 \text{ 分}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n-1}{2^{2n-1}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n-1}{2^n} \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{2n-2} = S\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{10}{9}. \quad \dots\dots\dots 6 \text{ 分}$$

二、(本题 2 两问, 每问 8 分, 共 16 分) 设 $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ 为数列, a, λ 为有限数, 求证:

1. 如果 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} = a$;

2. 如果存在正整数 p , 使得 $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_{n+p} - a_n) = \lambda$, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{n} = \frac{\lambda}{p}$.

证明: 1. 由 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$, $\exists M > 0$ 使得 $|a_n| \leq M$, 且 $\forall \varepsilon > 0, \exists N_1 \in \mathbb{N}$, 当 $n > N_1$ 时,

$$|a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}. \quad \dots\dots\dots 4 \text{ 分}$$

因为 $\exists N_2 > N_1$, 当 $n > N_2$ 时, $\frac{N_1(M+|a|)}{n} < \frac{\varepsilon}{2}$.

$$\text{于是, } \left| \frac{a_1 + \dots + a_n}{n} - a \right| \leq \frac{N_1(M+|a|)}{n} \frac{\varepsilon}{2} + \frac{(n-N_1)}{n} \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon,$$

所以, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} = a$8 分

2. 对于 $i = 0, 1, \cdots, p-1$, 令 $A_n^{(i)} = a_{(n+1)p+i} - a_{np+i}$, 易知 $\{A_n^{(i)}\}$ 为 $\{a_{n+p} - a_n\}$ 的子列.

由 $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_{n+p} - a_n) = \lambda$, 知 $\lim_{n \rightarrow \infty} A_n^{(i)} = \lambda$, 从而 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{A_1^{(i)} + A_2^{(i)} + \cdots + A_n^{(i)}}{n} = \lambda$.

而 $A_1^{(i)} + A_2^{(i)} + \cdots + A_n^{(i)} = a_{(n+1)p+i} - a_{p+i}$. 所以, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{(n+1)p+i} - a_{p+i}}{n} = \lambda$.

由 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{p+i}}{n} = 0$. 知 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{(n+1)p+i}}{n} = \lambda$12 分

从而 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{(n+1)p+i}}{(n+1)p+i} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{(n+1)p+i} \cdot \frac{a_{(n+1)p+i}}{n} = \frac{\lambda}{p}$

$\forall m \in \mathbb{N}, \exists n, p, i \in \mathbb{N}, (0 \leq i \leq p-1)$, 使得 $m = np + i$, 且当 $m \rightarrow \infty$ 时, $n \rightarrow \infty$.

所以, $\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{a_m}{m} = \frac{\lambda}{p}$16 分

三、(15 分) 设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[-1, 1]$ 上具有连续的三阶导数, 且 $f(-1) = 0, f(1) = 1, f'(0) = 0$.

求证: 在开区间 $(-1, 1)$ 内至少存在一点 x_0 , 使得 $f'''(x_0) = 3$

证. 由马克劳林公式, 得

$$f(x) = f(0) + \frac{1}{2!} f''(0)x^2 + \frac{1}{3!} f'''(\eta)x^3, \quad \eta \text{ 介于 } 0 \text{ 与 } x \text{ 之间}, \quad x \in [-1, 1] \cdots 3 \text{ 分}$$

在上式中分别取 $x = 1$ 和 $x = -1$, 得

$$1 = f(1) = f(0) + \frac{1}{2!} f''(0) + \frac{1}{3!} f'''(\eta_1), \quad 0 < \eta_1 < 1. \quad \cdots 5 \text{ 分}$$

$$0 = f(-1) = f(0) + \frac{1}{2!} f''(0) - \frac{1}{3!} f'''(\eta_2), \quad -1 < \eta_2 < 0. \quad \cdots 7 \text{ 分}$$

$$\text{两式相减, 得} \quad f'''(\eta_1) + f'''(\eta_2) = 6. \quad \cdots 10 \text{ 分}$$

由于 $f'''(x)$ 在闭区间 $[-1, 1]$ 上连续, 因此 $f'''(x)$ 在闭区间 $[\eta_2, \eta_1]$ 上有最大值 M 最小值 m , 从而

$$m \leq \frac{1}{2} (f'''(\eta_1) + f'''(\eta_2)) \leq M \quad \cdots 13 \text{ 分}$$

再由连续函数的介值定理, 至少存在一点 $x_0 \in [\eta_2, \eta_1] \subset (-1, 1)$, 使得

$$f'''(x_0) = \frac{1}{2} (f'''(\eta_1) + f'''(\eta_2)) = 3. \quad \cdots 15 \text{ 分}$$

四、(15 分) 在平面上, 有一条从点 $(a,0)$ 向右的射线, 线密度为 ρ . 在点 $(0,h)$ 处 (其中 $h > 0$) 有一质量为 m 的质点. 求射线对该质点的引力.

解: 在 x 轴的 x 处取一小段 dx , 其质量是 ρdx , 到质点的距离为 $\sqrt{h^2 + x^2}$, 这一小段与质点的引力是

$$dF = \frac{Gm\rho dx}{h^2 + x^2} \quad (\text{其中 } G \text{ 为引力常数}). \quad \dots\dots\dots 5 \text{ 分}$$

这个引力在水平方向的分量为 $dF_x = \frac{Gm\rho x dx}{(h^2 + x^2)^{3/2}}$. 从而

$$F_x = \int_a^{+\infty} \frac{Gm\rho x dx}{(h^2 + x^2)^{3/2}} = \frac{Gm\rho}{2} \int_a^{+\infty} \frac{d(x^2)}{(h^2 + x^2)^{3/2}} = -Gm\rho(h^2 + x^2)^{-1/2} \Big|_a^{+\infty} = \frac{Gm\rho}{\sqrt{h^2 + a^2}} \quad \dots\dots\dots 10 \text{ 分}$$

而 dF 在竖直方向的分量为 $dF_y = \frac{Gm\rho h dx}{(h^2 + x^2)^{3/2}}$, 故

$$F_y = \int_a^{+\infty} \frac{Gm\rho h dx}{(h^2 + x^2)^{3/2}} = \int_{\arctan \frac{a}{h}}^{\pi/2} \frac{Gm\rho h^2 \sec^2 t dt}{h^3 \sec^3 t} = \frac{Gm\rho}{h} \int_{\arctan \frac{a}{h}}^{\pi/2} \cos t dt = \frac{Gm\rho}{h} \left(1 - \sin \arctan \frac{a}{h} \right)$$

所求引力向量为 $\mathbf{F} = (F_x, F_y)$. \dots\dots\dots 15 分

五、(15 分) 设 $z = z(x, y)$ 是由方程 $F(z + \frac{1}{x}, z - \frac{1}{y}) = 0$ 确定的隐函数, 其中 F 具有连续的二阶偏导数,

且 $F_u(u, v) = F_v(u, v) \neq 0$. 求证: $x^2 \frac{\partial z}{\partial x} + y^2 \frac{\partial z}{\partial y} = 0$ 和 $x^3 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + xy(x+y) \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + y^3 \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$.

解: 在方程 $F(z + \frac{1}{x}, z - \frac{1}{y}) = 0$ 两边分别关于 x 、 y 求偏导, 得

$$(\frac{\partial z}{\partial x} - \frac{1}{x^2})F_u + \frac{\partial z}{\partial x} F_v = 0, \quad \frac{\partial z}{\partial y} F_u + (\frac{\partial z}{\partial y} + \frac{1}{y^2})F_v = 0. \quad \dots\dots\dots 5 \text{ 分}$$

由此解得, $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{F_u}{x^2(F_u + F_v)}, \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{-F_v}{y^2(F_u + F_v)}$

所以, $x^2 \frac{\partial z}{\partial x} + y^2 \frac{\partial z}{\partial y} = 0 \quad \dots\dots\dots 10 \text{ 分}$

对上式两边关于 x 和 y 分别求偏导, 得

$$x^2 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + y^2 \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = -2x \frac{\partial z}{\partial x}, \quad x^2 \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + y^2 \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -2y \frac{\partial z}{\partial y}$$

上面第一式乘以 x 加上第二式乘以 y ，并注意到 $x^2 \frac{\partial z}{\partial x} + y^2 \frac{\partial z}{\partial y} = 0$ ，得到

$$x^3 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + xy(x+y) \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + y^3 \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0 \quad \dots\dots\dots 15 \text{ 分}$$

六、(15 分) 设函数 $f(x)$ 连续， a, b, c 为常数， Σ 是单位球面 $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ 。记第一型曲面积分

$$I = \iint_{\Sigma} f(ax + by + cz) dS. \quad \text{求证: } I = 2\pi \int_{-1}^1 f(\sqrt{a^2 + b^2 + c^2} u) du$$

解：由 Σ 的面积为 4π 可见：当 a, b, c 都为零时，等式成立。2 分

当它们不全为零时，可知：原点到平面 $ax + by + cz + d = 0$ 的距离是

$$\frac{|d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}. \quad \dots\dots\dots 5 \text{ 分}$$

设平面 $P_u: u = \frac{ax + by + cz}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$ ，其中 u 固定。则 $|u|$ 是原点到平面 P_u 的距离，从而

$$-1 \leq u \leq 1. \quad \dots\dots\dots 8 \text{ 分}$$

两平面 P_u 和 P_{u+du} 截单位球 Σ 的截下的部分上，被积函数取值为

$$f(\sqrt{a^2 + b^2 + c^2} u). \quad \dots\dots\dots 10 \text{ 分}$$

这部分摊开可以看成是一个细长条。这个细长条的长是 $2\pi\sqrt{1-u^2}$ ，宽是 $\frac{du}{\sqrt{1-u^2}}$ ，它的面积是 $2\pi du$ ，故

我们得证。15 分

第二届中国大学生数学竞赛预赛试卷

参考答案及评分标准

(非数学类, 2010)

一 (本题共 5 小题, 每小题 5 分, 共 25 分)、计算下列各题 (要求写出重要步骤).

(1) 设 $x_n = (1+a) \cdot (1+a^2) \cdots (1+a^{2^n})$, 其中 $|a| < 1$, 求 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$.

解 将 x_n 恒等变形

$$\begin{aligned} x_n &= (1-a)(1+a) \cdot (1+a^2) \cdots (1+a^{2^n}) \frac{1}{1-a} = (1-a^2) \cdot (1+a^2) \cdots (1+a^{2^n}) \frac{1}{1-a} \\ &= (1-a^4) \cdot (1+a^4) \cdots (1+a^{2^n}) \frac{1}{1-a} = \frac{1-a^{2^{n+1}}}{1-a}, \end{aligned}$$

由于 $|a| < 1$, 可知 $\lim_{n \rightarrow \infty} a^{2^n} = 0$, 从而

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \frac{1}{1-a}.$$

(2) 求 $\lim_{x \rightarrow \infty} e^{-x} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{x^2}$.

$$\begin{aligned} \text{解 } \lim_{x \rightarrow \infty} e^{-x} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{x^2} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left[\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x e^{-1} \right]^x \\ &= \exp \left(\lim_{x \rightarrow \infty} \left[\ln \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x - 1 \right] x \right) = \exp \left(\lim_{x \rightarrow \infty} x \left[x \ln \left(1 + \frac{1}{x}\right) - 1 \right] \right) \\ &= \exp \left(\lim_{x \rightarrow \infty} x \left[x \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{2x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right) \right) - 1 \right] \right) = e^{-\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

(3) 设 $s > 0$, 求 $I_n = \int_0^{+\infty} e^{-sx} x^n dx$ ($n=1, 2, \cdots$).

解 因为 $s > 0$ 时, $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-sx} x^n = 0$, 所以,

$$I_n = -\frac{1}{s} \int_0^{+\infty} x^n de^{-sx} = -\frac{1}{s} \left[x^n e^{-sx} \Big|_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} e^{-sx} dx^n \right] = \frac{n}{s} I_{n-1}$$

$$\text{由此得到, } I_n = \frac{n}{s} I_{n-1} = \frac{n}{s} \cdot \frac{n-1}{s} I_{n-2} = \cdots = \frac{n!}{s^n} I_0 = \frac{n!}{s^{n+1}}$$

(4) 设函数 $f(t)$ 有二阶连续的导数, $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, $g(x, y) = f(\frac{1}{r})$, 求 $\frac{\partial^2 g}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 g}{\partial y^2}$.

解 因为 $\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{x}{r}, \frac{\partial r}{\partial y} = \frac{y}{r}$, 所以

$$\frac{\partial g}{\partial x} = -\frac{x}{r^3} f'(\frac{1}{r}), \quad \frac{\partial^2 g}{\partial x^2} = \frac{x^2}{r^6} f''(\frac{1}{r}) + \frac{2x^2 - y^2}{r^5} f'(\frac{1}{r}).$$

$$\text{利用对称性, } \frac{\partial^2 g}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 g}{\partial y^2} = \frac{1}{r^4} f''(\frac{1}{r}) + \frac{1}{r^3} f'(\frac{1}{r})$$

(5) 求直线 $l_1: \begin{cases} x-y=0 \\ z=0 \end{cases}$ 与直线 $l_2: \frac{x-2}{4} = \frac{y-1}{-2} = \frac{z-3}{-1}$ 的距离.

解 直线 l_1 的对称式方程为 $l_1: \frac{x}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z}{0}$. 记两直线的方向向量分别为

$$\vec{l}_1 = (1, 1, 0), \vec{l}_2 = (4, -2, -1), \text{ 两直线上的定点分别为 } P_1(0, 0, 0) \text{ 和 } P_2(2, 1, 3),$$

$$\vec{a} = \overrightarrow{P_1 P_2} = (2, 1, 3).$$

$$\vec{l}_1 \times \vec{l}_2 = (-1, 1, -6). \text{ 由向量的性质可知, 两直线的距离}$$

$$d = \frac{|\vec{a} \cdot (\vec{l}_1 \times \vec{l}_2)|}{|\vec{l}_1 \times \vec{l}_2|} = \frac{|-2+1-18|}{\sqrt{1+1+36}} = \frac{19}{\sqrt{38}} = \sqrt{\frac{19}{2}}$$

二 (本题共 15 分)、 设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上具有二阶导数, 并且

$$f''(x) > 0, \lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = \alpha > 0, \lim_{x \rightarrow -\infty} f'(x) = \beta < 0, \text{ 且存在一点 } x_0, \text{ 使得 } f(x_0) < 0.$$

证明: 方程 $f(x) = 0$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 恰有两个实根.

证 1. 由 $\lim_{x \rightarrow -\infty} f'(x) = \alpha > 0$ 必有一个充分大的 $a > x_0$, 使得 $f'(a) > 0$.

$$f''(x) > 0 \text{ 知 } y = f(x) \text{ 是凹函数, 从而 } f(x) > f(a) + f'(a)(x-a) \quad (x > a)$$

$$\text{当 } x \rightarrow +\infty \text{ 时, } f(+\infty) + f'(a)(x-a) \rightarrow +\infty.$$

故存在 $b > a$, 使得

$$f(b) > f(a) + f'(a)(b-a) > 0 \quad \dots\dots\dots (6 \text{ 分})$$

同样, 由 $\lim_{x \rightarrow -\infty} f'(x) = \beta < 0$, 必有 $c < x_0$, 使得 $f'(c) < 0$.

$f''(x) > 0$ 知 $y = f(x)$ 是凹函数, 从而 $f(x) > f(c) + f'(c)(x - c) \quad (x < c)$

当 $x \rightarrow -\infty$ 时, $f(-\infty) + f'(c)(x - c) \rightarrow +\infty$.

故存在 $d < c$, 使得

$$f(d) > f(c) + f'(c)(d - c) > 0 \quad \dots\dots\dots (10 \text{ 分})$$

在 $[x_0, b]$ 和 $[d, x_0]$ 利用零点定理, $\exists x_1 \in (x_0, b)$, $x_2 \in (d, x_0)$ 使得

$$f(x_1) = f(x_2) = 0 \quad \dots\dots\dots (12 \text{ 分})$$

下面证明方程 $f(x) = 0$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 只有两个实根.

用反证法. 假设方程 $f(x) = 0$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内有三个实根, 不妨设为 x_1, x_2, x_3 , 且 $x_1 < x_2 < x_3$. 对 $f(x)$ 在区间 $[x_1, x_2]$ 和 $[x_2, x_3]$ 上分别应用洛尔定理, 则各至少存在一点 ξ_1 ($x_1 < \xi_1 < x_2$) 和 ξ_2 ($x_2 < \xi_2 < x_3$), 使得 $f'(\xi_1) = f'(\xi_2) = 0$. 再将 $f'(x)$ 在区间 $[\xi_1, \xi_2]$ 上使用洛尔定理, 则至少存在一点 η ($\xi_1 < \eta < \xi_2$), 使 $f''(\eta) = 0$. 此与条件 $f''(x) > 0$ 矛盾. 从而方程 $f(x) = 0$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 不能多于两个根. \dots\dots\dots (15 \text{ 分})

证 2. 先证方程 $f(x) = 0$ 至少有两个实根.

由 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = \alpha > 0$, 必有一个充分大的 $a > x_0$, 使得 $f'(a) > 0$.

因 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上具有二阶导数, 故 $f'(x)$ 及 $f''(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 均连续. 由拉格朗日中值定理, 对于 $x > a$ 有

$$\begin{aligned} f(x) - [f(a) + f'(a)(x - a)] &= f(x) - f(a) - f'(a)(x - a) \\ &= f'(\xi)(x - a) - f'(a)(x - a) = [f'(\xi) - f'(a)](x - a) \\ &= f''(\eta)(\xi - a)(x - a). \end{aligned}$$

其中 $a < \xi < x$, $a < \eta < x$. 注意到 $f''(\eta) > 0$ (因为 $f''(x) > 0$), 则

$$f(x) > f(a) + f'(a)(x-a) \quad (x > a)$$

又因 $f'(a) > 0$, 故存在 $b > a$, 使得

$$f(b) > f(a) + f'(a)(b-a) > 0 \quad \dots\dots\dots (6 \text{ 分})$$

又已知 $f(x_0) < 0$, 由连续函数的中间值定理, 至少存在一点 $x_1 (x_0 < x_1 < b)$ 使得

$$f(x_1) = 0. \text{ 即方程 } f(x) = 0 \text{ 在 } (x_0, +\infty) \text{ 上至少有一个根 } x_1 \quad \dots\dots\dots (7 \text{ 分})$$

$$\text{同理可证方程 } f(x) = 0 \text{ 在 } (-\infty, x_0) \text{ 上至少有一个根 } x_2. \quad \dots\dots\dots (12 \text{ 分})$$

下面证明方程 $f(x) = 0$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 只有两个实根. (以下同证 1) (15 分)

三 (本题共 15 分)、设函数 $y = f(x)$ 由参数方程 $\begin{cases} x = 2t + t^2 \\ y = \psi(t) \end{cases} (t > -1)$ 所确定. 且

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{3}{4(1+t)}, \text{ 其中 } \psi(t) \text{ 具有二阶导数, 曲线 } y = \psi(t) \text{ 与 } y = \int_1^t e^{-u^2} du + \frac{3}{2e} \text{ 在 } t = 1$$

处相切. 求函数 $\psi(t)$.

$$\text{解 因为 } \frac{dy}{dx} = \frac{\psi'(t)}{2+2t}, \quad \frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{1}{2+2t} \cdot \frac{(2+2t)\psi''(t) - 2\psi'(t)}{(2+2t)^2} = \frac{(1+t)\psi''(t) - \psi'(t)}{4(1+t)^3}, \quad \dots\dots\dots (3 \text{ 分})$$

$$\text{由题设 } \frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{3}{4(1+t)}, \quad \text{故 } \frac{(1+t)\psi''(t) - \psi'(t)}{4(1+t)^3} = \frac{3}{4(1+t)}, \quad \text{从而}$$

$$(1+t)\psi''(t) - \psi'(t) = 3(1+t)^2, \quad \text{即 } \psi''(t) - \frac{1}{1+t}\psi'(t) = 3(1+t).$$

$$\text{设 } u = \psi'(t), \text{ 则有 } u' - \frac{1}{1+t}u = 3(1+t),$$

$$u = e^{\int \frac{1}{1+t} dt} \left[\int 3(1+t)e^{-\int \frac{1}{1+t} dt} dt + C_1 \right] = (1+t) \left[\int 3(1+t)(1+t)^{-1} dt + C_1 \right] = (1+t)(3t + C_1). \quad \dots\dots\dots (9 \text{ 分})$$

$$\text{由曲线 } y = \psi(t) \text{ 与 } y = \int_1^t e^{-u^2} du + \frac{3}{2e} \text{ 在 } t = 1 \text{ 处相切知 } \psi(1) = \frac{3}{2e},$$

$$\psi'(1) = \frac{2}{e}. \quad \dots\dots\dots (11 \text{ 分})$$

所以 $u|_{t=1} = \psi'(1) = \frac{2}{e}$, 知 $C_1 = \frac{1}{e} - 3$.

$\psi(t) = \int (1+t)(3t+C_1)dt = \int (3t^2 + (3+C_1)t + C_1)dt = t^3 + \frac{3+C_1}{2}t^2 + C_1t + C_2$, 由

$\psi(1) = \frac{3}{2e}$, 知 $C_2 = 2$, 于是 $\psi(t) = t^3 + \frac{1}{2e}t^2 + (\frac{1}{e}-3)t + 2$ ($t > -1$). ... (15 分)

四 (本题共 15 分)、设 $a_n > 0, S_n = \sum_{k=1}^n a_k$, 证明:

(1) 当 $\alpha > 1$ 时, 级数 $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n}{S_n^\alpha}$ 收敛;

(2) 当 $\alpha \leq 1$, 且 $S_n \rightarrow \infty$ ($n \rightarrow \infty$) 时, 级数 $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n}{S_n^\alpha}$ 发散.

证明 令 $f(x) = x^{1-\alpha}, x \in [S_{n-1}, S_n]$. 将 $f(x)$ 在区间 $[S_{n-1}, S_n]$ 上用拉格朗日中值定理,

存在 $\xi \in (S_{n-1}, S_n)$

$$f(S_n) - f(S_{n-1}) = f'(\xi)(S_n - S_{n-1})$$

$$\text{即 } S_n^{1-\alpha} - S_{n-1}^{1-\alpha} = (1-\alpha)\xi^{-\alpha}a_n \quad \dots\dots\dots(5 \text{ 分})$$

(1) 当 $\alpha > 1$ 时, $\frac{1}{S_{n-1}^{\alpha-1}} - \frac{1}{S_n^{\alpha-1}} = (\alpha-1)\frac{a_n}{\xi^\alpha} \geq (\alpha-1)\frac{a_n}{S_n^\alpha}$. 显然 $\left\{ \frac{1}{S_{n-1}^{\alpha-1}} - \frac{1}{S_n^{\alpha-1}} \right\}$ 的

前 n 项和有界, 从而收敛, 所以级数 $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n}{S_n^\alpha}$ 收敛. (8 分)

(2) 当 $\alpha = 1$ 时, 因为 $a_n > 0, S_n$ 单调递增, 所以

$$\sum_{k=n+1}^{n+p} \frac{a_k}{S_k} \geq \frac{1}{S_{n+p}} \sum_{k=n+1}^{n+p} a_k = \frac{S_{n+p} - S_n}{S_{n+p}} = 1 - \frac{S_n}{S_{n+p}}$$

因为 $S_n \rightarrow +\infty$ 对任意 n , 当 $p \in \mathbb{N}$ $\frac{S_n}{S_{n+p}} < \frac{1}{2}$, 从而 $\sum_{k=n+1}^{n+p} \frac{a_k}{S_k} \geq \frac{1}{2}$. 所以级数

$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n}{S_n^\alpha}$ 发散.(12 分)

当 $\alpha < 1$ 时, $\frac{a_n}{S_n^\alpha} \geq \frac{a_n}{S_n}$. 由 $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n}{S_n}$ 发散及比较判别法, $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n}{S_n^\alpha}$ 发散..... (15 分)

五 (本题共 15 分)、设 l 是过原点, 方向为 (α, β, γ) (其中 $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1$) 的直线, 均匀椭球 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leq 1$ (其中 $0 < c < b < a$, 密度为 1) 绕 l 旋转.

(1) 求其转动惯量; (2) 求其转动惯量关于方向 (α, β, γ) 的最大值和最小值.

解 (1) 设旋转轴 l 的方向向量为 $\mathbf{l} = (\alpha, \beta, \gamma)$, 椭球内任意一点 $P(x, y, z)$ 的径向量 \mathbf{r} , 则点 P 到旋转轴 l 的距离的平方为

$$d^2 = \mathbf{r}^2 - (\mathbf{r} \cdot \mathbf{l})^2 = (1 - \alpha^2)x^2 + (1 - \beta^2)y^2 + (1 - \gamma^2)z^2 - 2\alpha\beta xy - 2\beta\gamma yz - 2\alpha\gamma xz$$

由积分区域的对称性可知

$$\iiint_{\Omega} (2\alpha\beta xy + 2\beta\gamma yz + 2\alpha\gamma xz) dx dy dz = 0, \text{ 其中 } \Omega = \left\{ (x, y, z) \left| \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leq 1 \right. \right\}$$

..... (2 分)

$$\text{而 } \iiint_{\Omega} x^2 dx dy dz = \int_{-a}^a x^2 dx \iint_{\frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leq 1 - \frac{x^2}{a^2}} dy dz = \int_{-a}^a x^2 \cdot \pi bc \left(1 - \frac{x^2}{a^2} \right) dx = \frac{4a^3 bc \pi}{15}$$

$$(\text{或 } \iiint_{\Omega} x^2 dx dy dz = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\pi} d\varphi \int_0^1 a^2 r^2 \sin^2 \varphi \cos^2 \theta \cdot abc r^2 \sin \varphi dr = \frac{4a^3 bc \pi}{15})$$

$$\iiint_{\Omega} y^2 dx dy dz = \frac{4ab^3 c \pi}{15}, \quad \iiint_{\Omega} z^2 dx dy dz = \frac{4abc^3 \pi}{15} \quad \text{..... (5 分)}$$

由转到惯量的定义

$$J_l = \iiint_{\Omega} d^2 dx dy dz = \frac{4abc \pi}{15} ((1 - \alpha^2)a^2 + (1 - \beta^2)b^2 + (1 - \gamma^2)c^2) \quad \text{..... (6 分)}$$

(2) 考虑目标函数 $V(\alpha, \beta, \gamma) = (1 - \alpha^2)a^2 + (1 - \beta^2)b^2 + (1 - \gamma^2)c^2$ 在约束

$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1$ 下的条件极值.

设拉格朗日函数为

$$L(\alpha, \beta, \gamma, \lambda) = (1 - \alpha^2)a^2 + (1 - \beta^2)b^2 + (1 - \gamma^2)c^2 + \lambda(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 - 1)$$

..... (8 分)

$$\text{令 } L_{\alpha} = 2\alpha(\lambda - a^2) = 0, \quad L_{\beta} = 2\beta(\lambda - b^2) = 0, \quad L_{\gamma} = 2\gamma(\lambda - c^2) = 0,$$

$$L_{\lambda} = \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 - 1 = 0$$

解得极值点为 $Q_1(\pm 1, 0, 0, a^2)$, $Q_2(0, \pm 1, 0, b^2)$, $Q_3(0, 0, \pm 1, c^2)$ (12 分)

比较可知, 绕 z 轴 (短轴) 的转动惯量最大, 为 $J_{\max} = \frac{4abc\pi}{15}(a^2 + b^2)$; 绕

x 轴 (长轴) 的转动惯量最小, 为 $J_{\min} = \frac{4abc\pi}{15}(b^2 + c^2)$ (15 分)

六 (本题共 15 分)、设函数 $\varphi(x)$ 具有连续的导数, 在围绕原点的任意光滑的简单闭曲线 C 上, 曲线积分 $\oint_C \frac{2xydx + \varphi(x)dy}{x^4 + y^2}$ 的值为常数.

(1) 设 L 为正向闭曲线 $(x-2)^2 + y^2 = 1$. 证明: $\oint_L \frac{2xydx + \varphi(x)dy}{x^4 + y^2} = 0$;

(2) 求函数 $\varphi(x)$;

(3) 设 C 是围绕原点的光滑简单正向闭曲线, 求 $\oint_C \frac{2xydx + \varphi(x)dy}{x^4 + y^2}$.

解 (1) 设 $\oint_L \frac{2xydx + \varphi(x)dy}{x^4 + y^2} = I$, 闭曲线 L 由 $L_i, i=1, 2$ 组成. 设 L_0 为不经过原点

的光滑曲线, 使得 $L_0 \cup L_1^-$ (其中 L_1^- 为 L_1 的反向曲线) 和 $L_0 \cup L_2$ 分别组成围绕

原点的分段光滑闭曲线 $C_i, i=1, 2$. 由曲线积分的性质和题设条件

$$\begin{aligned} \oint_L \frac{2xydx + \varphi(x)dy}{x^4 + y^2} &= \int_{L_1} + \int_{L_2} \frac{2xydx + \varphi(x)dy}{x^4 + y^2} = \int_{L_2} + \int_{L_0} - \int_{L_0} - \int_{L_1^-} \frac{2xydx + \varphi(x)dy}{x^4 + y^2} \\ &= \oint_{C_1} + \oint_{C_2} \frac{2xydx + \varphi(x)dy}{x^4 + y^2} = I - I = 0 \end{aligned} \quad \text{.....(5 分)}$$

(2) 设 $P(x, y) = \frac{2xy}{x^4 + y^2}, Q(x, y) = \frac{\varphi(x)}{x^4 + y^2}$.

$$\text{令 } \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}, \quad \text{即} \quad \frac{\varphi'(x)(x^4 + y^2) - 4x^3\varphi(x)}{(x^4 + y^2)^2} = \frac{2x^5 - 2xy^2}{(x^4 + y^2)^2}, \quad \text{解得}$$

$$\varphi(x) = -x^2 \quad \text{..... (10 分)}$$

(3) 设 D 为正向闭曲线 $C_a: x^4 + y^2 = 1$ 所围区域, 由(1)

$$\oint_C \frac{2xydx + \varphi(x)dy}{x^4 + y^2} = \oint_{C_a} \frac{2xydx - x^2dy}{x^4 + y^2} \quad \dots\dots\dots (12 \text{ 分})$$

利用 Green 公式和对称性,

$$\oint_{C_a} \frac{2xydx + \varphi(x)dy}{x^4 + y^2} = \oint_{C_a} 2xydx - x^2dy = \iint_D (-4x)dx dy = 0 \quad \dots\dots\dots (15 \text{ 分})$$

姓名：____ 身份证号：____ 所在院校：____ 年级：____ 专业：____

首届中国大学生数学竞赛赛区赛试卷解答

(非数学类, 2009)

考试形式： 闭卷 考试时间： 120 分钟 满分： 100 分.

题 号	一	二	三	四	五	六	七	八	总分
满 分	20	5	15	15	10	10	15	10	100
得 分									

注意：1、所有答题都须写在此试卷纸密封线右边，写在其它纸上一律无效。
2、密封线左边请勿答题，密封线外不得有姓名及相关标记。

得 分	
评阅人	

一、 填空题（每小题 5 分，共 20 分）.

(1) 计算 $\iint_D \frac{(x+y)\ln\left(1+\frac{y}{x}\right)}{\sqrt{1-x-y}} dx dy =$ _____, 其中

区域 D 由直线 $x+y=1$ 与两坐标轴所围三角形区域.

(2) 设 $f(x)$ 是连续函数, 满足 $f(x) = 3x^2 - \int_0^2 f(x) dx - 2$, 则 $f(x) =$ _____.

(3) 曲面 $z = \frac{x^2}{2} + y^2 - 2$ 平行平面 $2x + 2y - z = 0$ 的切平面方程是 _____.

(4) 设函数 $y = y(x)$ 由方程 $xe^{f(y)} = e^y \ln 29$ 确定, 其中 f 具有二阶导数, 且 $f' \neq 1$, 则 $\frac{d^2 y}{dx^2} =$ _____.

答案: $\frac{16}{15}$, $3x^2 - \frac{10}{3}$, $2x + 2y - z - 5 = 0$, $-\frac{[1-f'(y)]^2 - f''(y)}{x^2[1-f'(y)]^3}$.

得 分	
评阅人	

二、(5 分) 求极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{e^x + e^{2x} + \cdots + e^{nx}}{n} \right)^{\frac{e}{x}}$, 其中 n 是给定的正整数.

$$\begin{aligned} \text{解: 原式} &= \lim_{x \rightarrow 0} \exp \left\{ \frac{e}{x} \ln \left(\frac{e^x + e^{2x} + \cdots + e^{nx}}{n} \right) \right\} \\ &= \exp \left\{ \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e(\ln(e^x + e^{2x} + \cdots + e^{nx}) - \ln n)}{x} \right\} \quad \dots\dots\dots (2 \text{ 分}) \end{aligned}$$

其中大括号内的极限是 $\frac{0}{0}$ 型未定式, 由 *L'Hospital* 法则, 有

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e(\ln(e^x + e^{2x} + \cdots + e^{nx}) - \ln n)}{x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e(e^x + 2e^{2x} + \cdots + ne^{nx})}{e^x + e^{2x} + \cdots + e^{nx}} \\ &= \frac{e(1 + 2 + \cdots + n)}{n} = \left(\frac{n+1}{2} \right) e \end{aligned}$$

于是 原式 $= e^{\left(\frac{n+1}{2} \right) e}$. \dots\dots\dots(5 分)

得 分	
评阅人	

三、(15 分) 设函数 $f(x)$ 连续, $g(x) = \int_0^1 f(xt)dt$, 且 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = A$, A 为常数, 求 $g'(x)$ 并讨论 $g'(x)$ 在 $x=0$ 处的连续性.

解: 由题设, 知 $f(0)=0$, $g(0)=0$. \dots\dots\dots(2 分)

令 $u = xt$, 得 $g(x) = \frac{\int_0^x f(u)du}{x}$ ($x \neq 0$) , \dots\dots\dots (5 分)

$$\text{从而 } g'(x) = \frac{xf(x) - \int_0^x f(u)du}{x^2} \quad (x \neq 0) \dots\dots\dots(8 \text{ 分})$$

由导数定义有

$$g'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x f(u)du}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{2x} = \frac{A}{2} \quad \dots\dots\dots(11 \text{ 分})$$

$$\text{由于 } \lim_{x \rightarrow 0} g'(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{xf(x) - \int_0^x f(u)du}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} - \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x f(u)du}{x^2} = A - \frac{A}{2} = \frac{A}{2} = g'(0) ,$$

从而知 $g'(x)$ 在 $x=0$ 处连续. \dots\dots\dots(15 分)

得分	
评阅人	

四、(15 分) 已知平面区域 $D = \{(x, y) | 0 \leq x \leq \pi, 0 \leq y \leq \pi\}$,

L 为 D 的正向边界, 试证:

$$(1) \oint_L x e^{\sin y} dy - y e^{-\sin x} dx = \oint_L x e^{-\sin y} dy - y e^{\sin x} dx ;$$

$$(2) \oint_L x e^{\sin y} dy - y e^{-\sin x} dx \geq \frac{5}{2} \pi^2 .$$

证法一: 由于区域 D 为一正方形, 可以直接用对坐标曲线积分的计算法计算.

$$(1) \text{ 左边} = \int_0^\pi \pi e^{\sin y} dy - \int_\pi^0 \pi e^{-\sin x} dx = \pi \int_0^\pi (e^{\sin x} + e^{-\sin x}) dx , \quad \dots\dots(4 \text{ 分})$$

$$\text{右边} = \int_0^\pi \pi e^{-\sin y} dy - \int_\pi^0 \pi e^{\sin x} dx = \pi \int_0^\pi (e^{\sin x} + e^{-\sin x}) dx , \quad \dots\dots\dots(8 \text{ 分})$$

$$\text{所以 } \oint_L x e^{\sin y} dy - y e^{-\sin x} dx = \oint_L x e^{-\sin y} dy - y e^{\sin x} dx \quad \dots\dots\dots(10 \text{ 分})$$

$$(2) \text{ 由于 } e^{\sin x} + e^{-\sin x} \geq 2 + \sin^2 x , \quad \dots\dots\dots(12 \text{ 分})$$

$$\oint_L x e^{\sin y} dy - y e^{-\sin x} dx = \pi \int_0^\pi (e^{\sin x} + e^{-\sin x}) dx \geq \frac{5}{2} \pi^2 . \quad \dots\dots\dots(15 \text{ 分})$$

证法二: (1) 根据 *Green* 公式, 将曲线积分化为区域 D 上的二重积分

$$\oint_L x e^{\sin y} dy - y e^{-\sin x} dx = \iint_D (e^{\sin y} + e^{-\sin x}) d\delta \quad \dots\dots\dots(4 \text{ 分})$$

$$\oint_L x e^{-\sin y} dy - y e^{\sin x} dx = \iint_D (e^{-\sin y} + e^{\sin x}) d\delta \quad \dots\dots\dots(8 \text{ 分})$$

因为 关于 $y = x$ 对称, 所以 $\iint_D (e^{\sin y} + e^{-\sin x}) d\delta = \iint_D (e^{-\sin y} + e^{\sin x}) d\delta$, 故

$$\oint_L x e^{\sin y} dy - y e^{-\sin x} dx = \oint_L x e^{-\sin y} dy - y e^{\sin x} dx . \quad \dots\dots\dots(10 \text{ 分})$$

$$(2) \text{ 由 } e^t + e^{-t} = 2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^{2n}}{(2n)!} \geq 2 + t^2$$

$$\oint_L x e^{\sin y} dy - y e^{-\sin x} dx = \iint_D (e^{\sin y} + e^{-\sin x}) d\delta = \iint_D (e^{\sin x} + e^{-\sin x}) d\delta \geq \frac{5}{2} \pi^2 .$$

.....(15 分)

得 分	
评阅人	

五、(10 分) 已知 $y_1 = xe^x + e^{2x}$, $y_2 = xe^x + e^{-x}$,

$y_3 = xe^x + e^{2x} - e^{-x}$ 是某二阶常系数线性非齐次微分方程的三个解, 试求此微分方程.

解: 根据二阶线性非齐次微分方程解的结构的知识, 由题设可知: e^{2x} 与 e^{-x} 是相应齐次方程两个线性无关的解, 且 xe^x 是非齐次的一个特解. 因此可以用下述两种解法(6分)

解法一: 故此方程式 $y'' - y' - 2y = f(x)$ (8分)

将 $y = xe^x$ 代入上式, 得

$$f(x) = (xe^x)'' - (xe^x)' - 2xe^x = 2e^x + xe^x - e^x - xe^x - 2xe^x = e^x - 2xe^x ,$$

因此所求方程为 $y'' - y' - 2y = e^x - 2xe^x$ (10分)

解法二: 故 $y = xe^x + c_1e^{2x} + c_2e^{-x}$, 是所求方程的通解,(8分)

由 $y' = e^x + xe^x + 2c_1e^{2x} - c_2e^{-x}$, $y'' = 2e^x + xe^x + 4c_1e^{2x} + c_2e^{-x}$, 消去 c_1, c_2 得所求方程为 $y'' - y' - 2y = e^x - 2xe^x$ (10分)

得 分	
评阅人	

六、(10 分) 设抛物线 $y = ax^2 + bx + 2\ln c$ 过原点, 当 $0 \leq x \leq 1$

时, $y \geq 0$, 又已知该抛物线与 x 轴及直线 $x=1$ 所围图形的面积为 $\frac{1}{3}$. 试确定 a, b, c , 使此图形绕 x 轴旋转一周而成的旋转体的体积 V 最小.

解: 因抛物线过原点, 故 $c=1$

由题设有 $\int_0^1 (ax^2 + bx)dx = \frac{a}{3} + \frac{b}{2} = \frac{1}{3}$. 即 $b = \frac{2}{3}(1-a)$,(2分)

$$\text{而 } V = \pi \int_0^1 (ax^2 + bx)^2 dx = \pi \left[\frac{1}{5}a^2 + \frac{1}{2}ab + \frac{1}{3}b^2 \right]$$

$$= \pi \left[\frac{1}{5}a^2 + \frac{1}{3}a(1-a) + \frac{1}{3} \cdot \frac{4}{9}(1-a)^2 \right]. \quad \dots\dots\dots(5分)$$

$$\text{令 } \frac{dv}{da} = \pi \left[\frac{2}{5}a + \frac{1}{3} - \frac{2}{3}a - \frac{8}{27}(1-a) \right] = 0 ,$$

得 $a = -\frac{5}{4}$, 代入 b 的表达式 得 $b = \frac{3}{2}$. 所以 $y \geq 0$,(8分)

线
封
密

又因 $\frac{d^2v}{da^2}\bigg|_{a=-\frac{5}{4}} = \pi[\frac{2}{5} - \frac{2}{3} + \frac{8}{27}] = \frac{4}{135}\pi > 0$ 及实际情况, 当 $a = -\frac{5}{4}, b = \frac{3}{2}, c = 1$ 时, 体积最小.(10 分)

得 分	
评阅人	

七、(15 分) 已知 $u_n(x)$ 满足

$$u_n'(x) = u_n(x) + x^{n-1}e^x \quad (n \text{ 为正整数}),$$

且 $u_n(1) = \frac{e}{n}$, 求函数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 之和.

解: 先解一阶常系数微分方程, 求出 $u_n(x)$ 的表达式, 然后再求 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 的和.

由已知条件可知 $u_n'(x) - u_n(x) = x^{n-1}e^x$ 是关于 $u_n(x)$ 的一个一阶常系数线性微分方程, 故其通解为

$$u_n(x) = e^{\int dx} (\int x^{n-1} e^x e^{-\int dx} dx + c) = e^x (\frac{x^n}{n} + c), \quad \dots\dots\dots(6 \text{ 分})$$

$$\text{由条件 } u_n(1) = \frac{e}{n}, \text{ 得 } c = 0, \text{ 故 } u_n(x) = \frac{x^n e^x}{n},$$

$$\text{从而 } \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n e^x}{n} = e^x \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}. \quad \dots\dots\dots(8 \text{ 分})$$

$s(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$, 其收敛域为 $[-1, 1)$, 当 $x \in (-1, 1)$ 时, 有

$$s'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} x^{n-1} = \frac{1}{1-x}, \quad \dots\dots\dots(10 \text{ 分})$$

$$\text{故 } s(x) = \int_0^x \frac{1}{1-t} dt = -\ln(1-x) \quad \dots\dots\dots(12 \text{ 分})$$

$$\text{当 } x = -1 \text{ 时, } \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) = -e^{-1} \ln 2. \quad \dots\dots\dots(13 \text{ 分})$$

于是, 当 $-1 \leq x < 1$ 时, 有 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) = -e^x \ln(1-x). \quad \dots\dots\dots(15 \text{ 分})$

得 分	
评阅人	

八、(10 分) 求 $x \rightarrow 1^-$ 时, 与 $\sum_{n=0}^{\infty} x^{n^2}$ 等价的无穷大量.

解: $\int_0^{+\infty} x^{t^2} dt \leq \sum_{n=0}^{\infty} x^{n^2} \leq 1 + \int_0^{+\infty} x^{t^2} dt$,(3 分)

$$\int_0^{+\infty} x^{t^2} dt = \int_0^{+\infty} e^{-t^2 \ln \frac{1}{x}} dt \quad \dots\dots\dots(7 \text{ 分})$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\ln \frac{1}{x}}} \int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{\ln \frac{1}{x}}} \sim \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{1-x}}. \quad \dots\dots\dots(10 \text{ 分})$$