2019 年普通高等学校招生全国统一考试

文科数学全国卷二答案与解析

一、选择题:本题考查基础知识和基本运算. 每小题 5 分,满分 60 分.

1. ☞**考点:** 本题考查集合基本运算

✔**答案:** C

✍**解析:** 由已知条件,$A\cap B=(-1,-2)$.

※**点睛:** 集合基本运算一定要熟练掌握.

(西安　张龙刚)

2. ☞**考点:** 本题考查复数的概念和基本运算

✔**答案:** D

✍**解析:** $z=\mathrm{i}(2+\mathrm{i})=-1+2\mathrm{i}$, 则 $\overline{z}=-1-2\mathrm{i}$.

※**点睛:** 熟练掌握复数基本概念和运算.

(西安　张龙刚)

3. ☞**考点:** 本题考查的是向量的坐标运算和基本概念

✔**答案:** A

✍**解析:** $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=(-1,1)$, 所以 $|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|=\sqrt{2}$.

※**点睛:** 向量坐标运算要注意运算规则.

(西安　张龙刚)

4. ☞**考点:** 概率

✔**答案:** B

✍**解析:** 总共有 $\mathrm{C}_5^3=10$ 种情况,满足要求的有 $\mathrm{C}_3^2=6$ 种情况,故概率为 $\dfrac{3}{5}$.

※**点睛:** 组合数

(江西　陈江波)

5. ☞**考点:** 逻辑推理

✔**答案:** A

✍**解析:** 对于 A 选项,甲预测正确,乙、丙预测不正确,满足题意;

对于 B 选项,甲、乙、丙预测都不正确,不满足题意;

对于 C 选项,乙、丙预测都正确,甲预测不正确,不满足题意;

对于 D 选项,甲、丙预测都正确,乙预测不正确,不满足题意.

※**点睛:** 排除法

(江西　陈江波)

6. ☞**考点:** 函数的奇偶性

✔**答案:** D

✍**解析:** 当 $x<0$ 时,$-x>0$,则 $f(-x)=\mathrm{e}^{-x}-1$,而 $f(x)$ 为奇函数,所以 $f(x)=-f(-x)=-\mathrm{e}^{-x}+1$,所以选 D.

※**点睛:** 奇函数满足 $f(-x)=-f(x)$

(江西　陈江波)

7. ☞**考点:** 本题考查空间平面的平行

✔**答案:** B

✍**解析:** 由空间平面平行的判定可知应选 B.

※**点睛:** 紧抓空间平面关系的判定定理

(河南　时涛)

8. ☞**考点:** 本题考查三角函数图象的基本认识

✔**答案:** A

✍**解析:** 由题意可知

$$\frac{T}{2}=\frac{3\pi}{4}-\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{2}$$

所以 $T=\pi,\omega=\dfrac{2\pi}{T}=\dfrac{2\pi}{\pi}=2$. 故选 A.

※**点睛:** 本题属于基础题,同学们还是要多抓基础.

(张家口　饶强)

9. ☞**考点:** 本题考查椭圆和抛物线

✔**答案:** D

✍**解析:** 抛物线的焦点为 $\left(\dfrac{p}{2},0\right)$,故 $p+\left(\dfrac{p}{2}\right)^2=3p$,解得 $p=0$(舍)或 $p=8$.

※**点睛:** 找对等量关系即可

(河南　时涛)

10. ☞**考点:** 本题考查导数

✔**答案:** C

✍**解析:** 因为 $y'=2\cos x-\sin x$,所以 $y'\Big|_{x=\pi}=-2$,故切线方程为 $y+1=-2(x-\pi)$,即 $2x+y-2\pi+1=0$

※**点睛:** 简单的导数计算

(河南　时涛)

11. ☞**考点:** 本题考查恒等变形

✔**答案:** B

✍**解析:** **方法 1:** 因为 $\alpha\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$,所以 $\cos\alpha>0$,又 $2\sin 2\alpha=\cos 2\alpha+1$,由二倍角公式得

$$4\sin\alpha\cos\alpha=2\cos^2\alpha,\ \Rightarrow 2\sin\alpha=\cos\alpha$$

所以

$$\begin{cases}2\sin\alpha=\cos\alpha, \\ \sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1\end{cases}\Rightarrow\sin\alpha=\frac{\sqrt{5}}{5}$$

方法 2：$\alpha\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$，$2\sin 2\alpha=\cos 2\alpha+1>0$，由

$$\begin{cases}2\sin 2\alpha=\cos 2\alpha+1 \\ \sin^2 2\alpha+\cos^2 2\alpha=1\end{cases}\Rightarrow(\sin 2\alpha-1)^2+\sin^2 2\alpha=1$$

解得 $\sin 2\alpha=\dfrac{4}{5}$，或 $\sin 2\alpha=0$(舍)

又因为 $\cos 2\alpha=2\sin 2\alpha-1=\dfrac{3}{5}$，$\alpha\in(0,\dfrac{\pi}{2})$，$\sin\alpha>0$，所以

$$\sin\alpha=\sqrt{\frac{1-\cos 2\alpha}{2}}=\frac{\sqrt{5}}{5}$$

解法 3：由辅助角公式知

$$\sqrt{5}\left(\sin 2\alpha\cdot\frac{2}{\sqrt{5}}-\cos 2\alpha\cdot\frac{2}{\sqrt{5}}\right)=1$$

令 $\cos\theta=\dfrac{2}{\sqrt{5}}$，$\sin\theta=\dfrac{1}{\sqrt{5}}$，$\theta\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$

$$\sqrt{5}\sin(2\alpha-\theta)=1 \text{ 即 } \sin(2\alpha-\theta)=\frac{1}{\sqrt{5}}=\sin\theta$$

因为 $\alpha\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$，$2\alpha-\theta\in(0,\pi)$，所以

$$2\alpha-\theta=\theta,\text{或 } 2\alpha-\theta+\theta=\pi$$

※**点睛**：本题主要注意三角函数符号的正负

（安徽　贾彬）

12. ☞**考点**：本题考查椭圆离心率

✔**答案**：A

✍**解析**：由于 $|PQ|=|OF|$，又 P,Q 两点在以 OF 为直径的圆上，即可得点 P,Q 关于 x 轴对称且 P,Q 是该圆的直径．设 P 在 x 轴上方，故 $P\left(\dfrac{c}{2},\dfrac{c}{2}\right)$，又 P 在 $x^2+y^2=a^2$ 上，带入可得 $\dfrac{c^2}{2}=a^2$，化简即得 $c=\sqrt{2}a$，$e=\sqrt{2}$.

※**点睛**：快速表示出 P 点的坐标是解决问题的关键．当然，本题还可以联立两个圆的方程，求出 P 点的坐标．

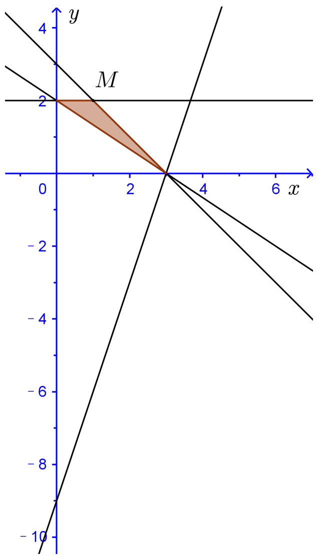
(西安　张龙刚)

二、填空题:本题考查基础知识和基本运算,每小题 5 分,共 20 分.

13. ☞**考点:** 本题考查线性规划,解不等式,直线方程的性质

✔**答案:** 9

✍**解析:** 可行域如图所示. 令 $y=3x-z$,其中 z 的几何意义为直线 $y=3x-z$ 的纵截距的相反数. 当该过可行域的直线的纵截距最小值时,该直线过点 $(3,0)$,此时 $z_{\max}=3\times3-0=9$.



(第 13 题解析图))

※**点睛:** 要注意可行域是否封闭,注意理解目标函数的几何意义.

(山西　廖凯)

14. ☞**考点:** 数学期望.

✔**答案:** 0.98

✍**解析:** 由已知,

$$\frac{10\times0.97+20\times0.98+10\times0.99}{40}=0.98$$

所以,经停该站高铁列车所有车次的平均正点率的估计值为 0.98.

※**点睛:** 本题主要考查学生的理解能力,正确理解题意是关键.

(河北　焦子奇)

15. ☞**考点:** 考查正弦定理,边角互化.

✔**答案:** $\frac{3\pi}{4}$

✍**解析:** 由正弦定理边化角得 $\sin B\sin A+\sin A\cos B=0$. 因为在三角形中,所以

$\sin A>0$,两边同时消去 $\sin A$ 得 $\sin B+\cos B=0$,所以 $\tan A=-1$,因为在三角形中,所以 $A=\dfrac{3\pi}{4}$

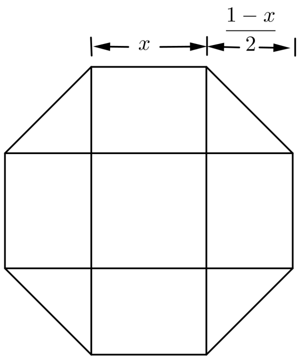
※**点睛:** 在解三角形中,谁转为谁,求 B,则将边转化为角,同时想办法消去 A 即可做出来

(河南　林木)

16. ☞**考点:** 本题考查了立体几何中半正多面体的结构特征

✔**答案:** 22　$\sqrt{2}-1$

✍**解析:** 考虑此半正多面体的正视图,



(第 16 题解析图)

设棱长为 x, 则 $x=\dfrac{1-x}{2}\sqrt{2}\Longrightarrow x=\sqrt{2}-1$

※**点睛:** 本题关键是该几何体的结构进行分析,借助正视图把空间问题转化为平面问题加以解决.

(安徽　史飞)

三、解答题:共 70 分.

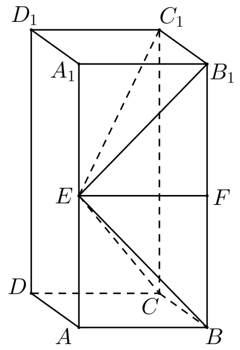
17. ☞**考点:** 本题主要考查了线面垂直的判定、求棱锥的体积.

✔**答案:** 见解析

✍**解析:**(1)证明:因为 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 是长方体,所以 $B_1C_1\perp$ 平面 A_1ABB_1. 又因为 $BE\subset$ 平面 A_1ABB_1,所以 $BE\perp EC$. 又 $BE\perp EC_1$,$B_1C_1\cap EC_1=C_1$,故 $BE\perp$ 平面 EB_1C_1.

(2)由(1)知 $\angle BEB_1=90^\circ$,由题设知 $\mathrm{Rt}\triangle ABE\backsim\mathrm{Rt}\triangle A_1B_1E$,所以 $\angle AEB=\angle A_1EB_1=45^\circ$,故 $AE=AB=3$,$AA_1=2AE=6$. 作 $EF\perp BB_1$,垂足为 F,则 $EF\perp$ 平面 BB_1C_1C,且 $EF=AB=3$. 所以,四棱锥 $E-BB_1C_1C$ 的体积

$$V=\frac{1}{3}\times3\times6\times3=18.$$



(第 17 题解析图)

※**点睛**:求解棱锥体积,选好一组容易求面积的底面和容易求的高是关键.

(山西　廖凯)

18. ☞**考点**:本题主要考查求解数列的通项公式和数列求和.

✔**答案**:见解析

✍**解析**:(1)$2q^2=2\cdot 2q+16\Longrightarrow q=4$或$q=-2$,因为数列各项为正数,所以 $q=4$,所以 $a_n=2\cdot 4^{n-1}=2^{2n-1}$.

(2)$b_n=\log_2 2^{2n-1}=2n-1$,所以数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和为 $1+3+5+\cdots+2n-1=n^2$

※**点睛**:本题利用等比数列的通项公式建立方程,求出公比,等差数列的求和直接采用求和公式即可.

(安徽　史飞)

19. ☞**考点**:考查用样本分布估计总体分布,频率分布表

✔**答案**:见解析

✍**解析**:(1)根据产值增长率频数分布表得,所调查的 100 个企业中产值增长率不低于 40% 的企业频率为

$$\frac{14+7}{100}=0.21;$$

产值负增长的企业频率为

$$\frac{2}{100}=0.02.$$

用样本频率分布估计总体分布得这类企业中产值增长率不低于 40% 的企业比例为 21%,产值负增长的企业比例为 2%.

(2)因为

$$\overline{y}=\frac{1}{100}(-0.10\times 2+0.10\times 24+0.30\times 53+0.50\times 14+0.70\times 7)=0.30,$$

所以

$$
\begin{aligned}
s^2&=\frac{1}{100}\sum_{i=1}^{5}n_i(y_i-\overline{y})^2\\
&=\frac{1}{100}[(-0.40)^2\times2+(-0.20)^2\times24+0^2\times53+0.20^2\times14+0.40^2\times7]\\
&=0.0296
\end{aligned}
$$

因此,$s=\sqrt{0.0296}=0.02\times\sqrt{74}\approx0.17$.

所以,这类企业产值增长率的平均数与标准差的估计值分别为 0.30,0.17.

※**点睛:** 用样本分布估计总体分布,能够根据频率分布表计算均值和方差

(河南　林木)

20. ☞**考点:** 考查椭圆的几何性质,焦点三角形

✔**答案:** 见解析

✍**解析:**(1)连接 PF_1,由 $\triangle POF_2$ 为等边三角形可知在 $\triangle F_1PF_2$ 中,$\angle F_1PF_2=90^\circ$,$|PF_2|=c$,$|PF_1=\sqrt{3}c$,由椭圆定义可知 $2a=c+\sqrt{3}c=(1+\sqrt{3}c)$,故 C 的离心率 $e=\sqrt{3}-1$.

(2)由题意可知,满足条件的点 $P(x,y)$ 存在当且仅当

$$\frac{1}{2}|y_c|\cdot2c=16,\frac{y}{x+c}\cdot\frac{y}{x-c}=-1,\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1.$$

即

$$
\begin{cases}
c|y_c|=16, & ①\\
x^2+y^2=c^2, & ②\\
\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1, & ③
\end{cases}
$$

解得 $b=4$ 且

$$x^2=\frac{a^2}{c^2}(c^2-b^2).$$

所以 $c^2\geqslant b^2$,从而

$$a^2=b^2+c^2\geqslant2b^2=32,$$

故 $a\geqslant4\sqrt{2}$. 当 $b=4,a\geqslant4\sqrt{2}$ 时,存在满足条件的 P.

所以 $b=4,a$ 的取值范围为 $[4\sqrt{2},+\infty)$.

※**点睛:** 椭圆的几何性质, 综合考查了学科综合素养

(河南　林木)

21. ☞**考点:** 本题主要考查函数的极值点,函数零点的判断

✔**答案**:见解析

✍**解析**:(1)$f(x)$ 的定义域为 $(0,+\infty)$. 由题意

$$f'(x)=\frac{x-1}{x}+\ln x-1=\ln x-\frac{1}{x}.$$

因为 $y=\ln x$ 单调递增,$y=\dfrac{1}{x}$ 单调递减,所以 $f'(x)$ 单调递增.

又

$$f'(1)=-1<0,f'(2)=\ln 2-\frac{1}{2}=\frac{\ln 4-1}{2}>0,$$

故存在唯一 $x_0\in(1,2)$,使得 $f'(x_0)=0$.
又当 $x<x_0$ 时,$f'(x)<0$,$f(x)$ 单调递减;当 $x>x_0$ 时,$f'(x)>0$,$f(x)$ 单调递增.
因此 $f(x)$ 存在唯一的极值点.
(2)由(1)知 $f(x_0)<f(1)=-2$,又 $f(\mathrm{e}^2)=\mathrm{e}^2-3>0$,所以 $f(x)=0$ 在 $(x_0,+\infty)$ 内存在唯一根 x_1,也即 $f(x_1)=0$.

欲证 $f(x)$ 有且仅有两实根且互为倒数,由 $x_1>x_0>1$ 得 $\dfrac{1}{x_1}<1<x_0$. 故只需说明

$$f\left(\frac{1}{x_1}\right)=0.$$

因为

$$f\left(\frac{1}{x_1}\right)=\left(\frac{1}{x_1}-1\right)\ln\frac{1}{x_1}-\frac{1}{x_1}-1=\frac{f(x_1)}{x_1}=0.$$

所以 $\dfrac{1}{x_1}$ 是 $f(x)=0$ 在 $(0,x_1)$ 的唯一根.

综上,$f(x)=0$ 有且仅有两个实根,且两个实根互为倒数.

※**点睛**:第一问根据极值点的定义,常规求导处理,第二问难度较大,紧扣第一问所证结论,由因导果,只需验证即可.

(西安　张龙刚)

22. ☞**考点**:本题主要考查极坐标方程与直角坐标的互换、点到直线的距离.

✔**答案**:见解析

✍**解析**:(1)解法一:令 $\theta_0=\dfrac{\pi}{3}$,则 $\rho_0=4\sin\theta_0=2\sqrt{3}$.

设 l 上的点为 (ρ,θ),与极轴倾斜角为 α,由 $M\left(2\sqrt{3},\dfrac{\pi}{3}\right)$ 可得 $\alpha=\dfrac{5\pi}{6}$,由 $|OA|=4$,

$\angle POA=\theta_0=\dfrac{\pi}{3}$,可得 $P=\left(2,\dfrac{\pi}{3}\right)$,故直线 l 的极坐标方程为

$$\rho\sin(\theta-\alpha)=2\sin\left(\frac{\pi}{3}-\alpha\right)$$

即

$$\rho\sin\left(\theta-\frac{5\pi}{6}\right)=2\sin\left(\frac{\pi}{3}-\frac{5\pi}{6}\right)\Rightarrow\rho\sin\left(\theta+\frac{\pi}{6}\right)=2\sin\frac{\pi}{2}=1,$$

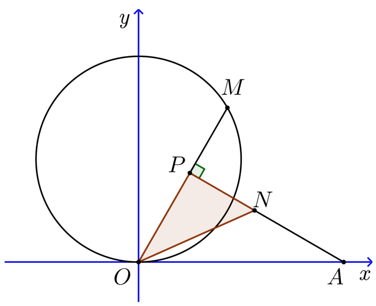
所以 l： $\rho\sin\left(\theta+\frac{\pi}{6}\right)=1$.

解法二：令 $\theta_0=\frac{\pi}{3}$，则 $\rho_0=4\sin\theta_0=2\sqrt{3}$.

由 $|OA|=4,\angle POA=\theta_0=\frac{\pi}{3}$，可得 $P=\left(2,\frac{\pi}{3}\right)$，又 $M\left(2\sqrt{3},\frac{\pi}{3}\right)$.

设 l 上的任一点 $N(\rho,\theta)$， 在 $\mathrm{Rt}\triangle PON$ 中，$\cos\angle PON=\cos\left|\frac{\pi}{3}-\theta\right|=\frac{|OP|}{\rho}$，

即 $l:\rho\cos\left(\theta-\frac{\pi}{3}\right)=2$.



（第 22 题解析图）

（2）设 $P(\rho,\theta)$，则在 $\mathrm{Rt}\triangle AOP$ 中有 $\rho=4\cos\theta$，又 P 在线段 OM 上，当 P 与 M 重合时，$\theta=\frac{\pi}{4}$；当 P 与 O 重合时，$\theta=\frac{\pi}{2}$. 故求 P 点轨迹的极坐标方程为

$$\rho=4\cos\theta,\theta\in\left[\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right].$$

※**点睛**：解析几何注重数形结合而非机械运算，是今后命题的主要方向；曲线方程求解一定要注意变量所能取的范围.

（山西　廖凯）

23. ☞**考点**：本题考查绝对值不等式求解，含参绝对值不等式恒成立

✔**答案**：见解析

✍**解析**：（1）当 $a=1$ 时，$f(x)=|x-1|x+|x-2|(x-1)$.

$$f(x)=\begin{cases}-2(x-1)^2, x<1\\ 2(x-1), & 1\leqslant x<2\\ 2(x-1)^2, & x\geqslant 2\end{cases}$$

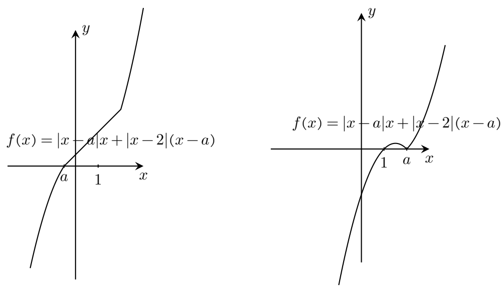
当 $x<1$ 时,$f(x)=-2(x-1)^2<0$;当 $1\leqslant x<2$ 时,$f(x)=2(x-1)\geqslant 0$;当 $x\geqslant 2$ 时,$f(x)=2(x-1)^2>0$. 所以,不等式 $f(x)<0$ 的解集为 $(-\infty,1)$.

(2)函数 $f(x)$ 有两个零点 $a,2$.

当 $a<1,x\in(-\infty,1)$ 时,

$$f(x)=\begin{cases}(a-x)(2x-2),x<a\\ 2(x-a),a\leqslant x<1\end{cases}$$

当 $x<a$ 时,$f(x)=(a-x)(2x-2)<0$;当 $a\leqslant x<1$ 时,$f(x)=2(x-a)\geqslant 0$,不满足条件,舍去.



(第 23 题解析图)

当 $a\geqslant 1,x\in(-\infty,1)$ 时,

$$f(x)=(a-x)x+(2-x)(x-a)=(a-x)(2x-2)<0$$

所以,a 的取值范围是 $[1,+\infty)$.

※点睛:含参绝对值恒成立利用零点分段讨论,也可以找到参数的必要条件再证明,本题 $f(a)=0$,因此 $a\geqslant 1$.

(安徽　贾彬)

排版:　浙江　陈晓