2019 年普通高等学校招生全国统一考试

文科数学全国卷三答案与解析

一、选择题：本题考查基础知识和基本运算．每小题 5 分，满分 60 分．

1. ☞**考点：**本题考查集合的交集

✔**答案：**A

✍**解析：**因为 $B=\{x\mid x^2\leqslant 1\}=\{x\mid -1\leqslant x\leqslant 1\}$，所以 $A\cap B=\{-1,0,1\}$．

※**点睛：**本题属于简单的集合运算

（安徽　贾彬）

2. ☞**考点：**本题考查复数的运算性质

✔**答案：**D

✍**解析：** $z=\dfrac{2\mathrm{i}}{1+\mathrm{i}}=\dfrac{2\mathrm{i}(1-\mathrm{i})}{(1+\mathrm{i})(1-\mathrm{i})}=\dfrac{2(\mathrm{i}-\mathrm{i}^2)}{2}=1+\mathrm{i}$．

※**点睛：**利用共轭复数的性质，分母实数化．

（安徽　贾彬）

3. ☞**考点：**本题考查简单的概率计算

✔**答案：**D

✍**解析：**$P=\dfrac{\mathrm{A}_2^2\mathrm{A}_3^3}{\mathrm{A}_4^4}=\dfrac{1}{2}$．

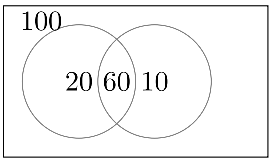
※**点睛：**捆绑法解决相邻问题

（浙江　陈晓）

4. ☞**考点：**集合的运算

✔**答案：**C

✍**解析：**如图所示，



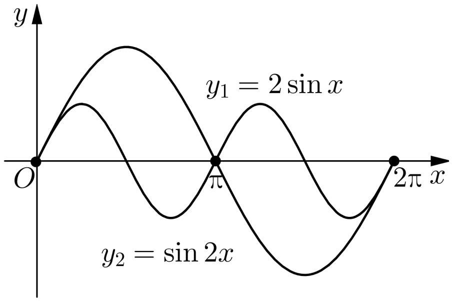
※**点睛：**使用 Venn 图可以更加直观

（河南　时涛）

5. ☞**考点：**本题考查三角函数

✔**答案：**B

✍**解析：**设 $y_1=2\sin x$，$y_2=\sin 2x$，画出 y_1,y_2 的图像如图所示，



(第 5 题解析图)

函数 $f(x)$ 的零点个数即为 y_1 与 y_2 的交点个数. 由图可知,有 3 个交点,故选 B.

※**点睛:** 本题属于基础题,将零点转化为交点是解决问题的关键.

(河北　焦子奇)

6. ☞**考点:** 本题考查等比数列的基本量

✔**答案:** C

✍**解析:** 设 $a_n=a_1\cdot q^{n-1}$,根据题意,

$$\begin{cases}\dfrac{a_1\left(1-q^4\right)}{1-q}=15,\\ a_1q^4=3a_1q^2+4a_1,\end{cases}$$

解得 $a_1=1$,$q=2$,因此 $a_3=4$.

※**点睛:** 方程思想

(宜昌　李云皓)

7. ☞**考点:** 本题考查利用导数研究函数的切线

✔**答案:** D

✍**解析:** 记 $f(x)=a\mathrm{e}^x+x\ln x$,其导函数

$$f'(x)=a\mathrm{e}^x+1-\ln x,$$

根据题意,有

$$\begin{cases}f'(1)=a\mathrm{e}+1=2,\\ f(1)=a\mathrm{e}=2+b,\end{cases}$$

解得 $a=\mathrm{e}^{-1}$,$b=-1$.

※**点睛:** 基本初等函数的导数及其简单应用

(宜昌　李云皓)

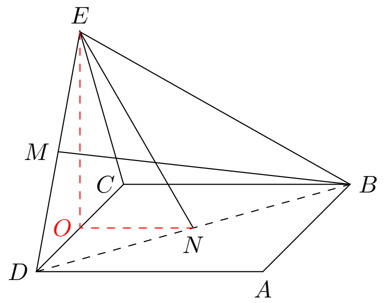
8. ☞**考点:** 本题考查空间直线的位置关系

✔**答案:** B

✍**解析:** 在 $\triangle BDE$ 中,BM,EN 为该平面直线,故 BM,EN 相交非异面.

取 BC 中点 O,设 $AB=2$,则 $EN=\sqrt{EO^2+ON^2}=2$,由 $BC\perp CD\Rightarrow BC\perp$ 面

CDE,$BE=BD=2\sqrt{2}$,$BM=\sqrt{BE^2-EM^2}=\sqrt{7}$. 故 $BM\neq EN$.



(第 8 题解析图)

※点睛:也可以使用平行四边形四边对角线定理进行计算

(河南　时涛)

9. ☞**考点:**本题考查算法框图

✔**答案:**C

✍**解析:**由题意,

$$s=\sum_{i=0}^{7}\left(\frac{1}{2}\right)^i=\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^7}{1-\frac{1}{2}}=2-\frac{1}{2^6}.$$

※**点睛:**本题实质是等比数列求和

(浙江　陈晓)

10. ☞**考点:**本题考查双曲线的几何形状

✔**答案:**B

✍**解析:**由题意,不妨设点 P 在双曲线的右支上,F 是右焦点,F' 是左焦点. 由题意,$|OP|=|OF|=|OF'|=3$,所以 $\triangle PFF'$ 为直角三角形. 设 $|PF'|=m$,$|PF|=n$,则

$$\begin{cases}m-n=2a=4,\\ m^2+n^2=36.\end{cases}$$

解得 $mn=10$. 所以 $S_{\triangle OPF}=\frac{1}{2}S_{\triangle PFF'}=\frac{1}{4}mm=\frac{5}{2}$.

※**点睛:**合理使用几何性质,解析几何不解析.

(浙江　陈晓)

11. ☞**考点:**本题考查二元一次不等式组及其平面区域,简易逻辑

✔**答案:**A

✍**解析:**点 $(3,3)\in D$,故命题 p 为真命题;点 $(2,9)\in D$,故命题 q 为假命题. 所以真命题为 $p\vee q$ 和 $p\wedge\neg q$.

※**点睛:**线性规划结合简易逻辑.　　(浙江　陈晓)

12. ☞**考点:** 本题考查利用函数的单调性和奇偶性比较大小

✔**答案:** C

✍**解析:** 因为 $f\left(\log_3\dfrac{1}{4}\right)=f(\log_3 4)$,$\log_3 4>1$,$1>2^{-2/3}>2^{-3/2}>0$,又因为函数 $f(x)$ 在区间 $(0,+\infty)$ 上单调递减,所以 $f(2^{-3/2})>f(2^{-2/3})>f\left(\log_3\dfrac{1}{4}\right)$.

※**点睛:** 本题要抓住函数的单调性和奇偶性,并利用指数函数和对数函数的性质判断取值范围和比较大小关系.

(安徽 史飞)

二、填空题:本题考查基础知识和基本运算,每小题 5 分,共 20 分.

13. ☞**考点:** 本题考查向量数量积的坐标运算

✔**答案:** $-\dfrac{\sqrt{2}}{10}$

✍**解析:** 由题知,$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=2\times(-8)+2\times 6=-4$,$|\boldsymbol{a}|=\sqrt{2^2+2^2}=2\sqrt{2}$,$|\boldsymbol{b}|=\sqrt{(-8)^2+6^2}=10$,所以

$$\cos<\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}>=\frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|}=\frac{-4}{2\sqrt{2}\times 10}=-\frac{\sqrt{2}}{10}$$

※**点睛:** 熟记数量积的坐标表示

(安徽 贾彬)

14. ☞**考点:** 本题考查数列基本量计算, 等差数列前 n 项和

✔**答案:** 100

✍**解析:** 因为数列 $\{a_n\}$ 是等差数列,设数列 $\{a_n\}$ 的公差为 d,由题知

$$\begin{cases}a_1+2d=5,\\ a_1+6d=13,\end{cases}$$

解得 $a_1=1$,$d=2$. 所以

$$s_{10}=10a_1+\frac{10(10-1)}{2}\times d=10+90=100.$$

※**点睛:** 已知数列类型, 首先考虑性质简化, 其次基本量计算; 未知数列类型, 首先是否有明显特征可构造, 否则, 不完全归纳.

(安徽 贾彬)

15. ☞**考点:** 考查椭圆方程的几何性质与简单计算

✔**答案:** $(3,\sqrt{15})$

✍**解析:** 由 $\triangle MF_1F_2$ 为等腰三角形可知 M 是以 $F_1(-4,0)$ 为圆心,以 $r=2c=8$ 为半

径的圆 $(x+4)^2+y^2=64$ 上一个点. 又因为 M 为 C 上一点且在第一象限，联立

$$\begin{cases}\dfrac{x^2}{36}+\dfrac{y^2}{20}=1\\(x+4)^2+y^2=64\end{cases}$$

解得 $M(3,\sqrt{15})$.

※**点睛**：判断等腰三角形谁是底边是这道题的关键

（河南　林木）

16. ☞**考点**：本题考常见几何体的体积

✔**答案**：118.8

✍**解析**：根据题意，有

$$\begin{aligned}V_{\text{模型}}&=V_{ABCD-A_1B_1C_1D_1}-V_{O-EFGH}\\&=6\cdot6\cdot4-\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{1}{2}\cdot4\cdot6\right)\cdot3\\&=132\ (\mathrm{cm}^3),\end{aligned}$$

从而所需原料的质量为 $132\cdot0.9=118.8\ (\mathrm{g})$.

※**点睛**：解决简单的应用问题.

（宜昌　李云皓）

三、解答题：共 70 分.

17. ☞**考点**：本题考查简单的统计

✔**答案**：见解析

✍**解析**：（1）由已知得 $0.70=a+0.20+0.15$，故

$$a=0.35,$$

$$b=1-0.05-0.15-0.70=0.10.$$

（2）甲离子残留百分比的平均值的估计值为

$$2\times0.15+3\times0.20+4\times0.30+5\times0.20+6\times0.10+7\times0.05=4.05.$$

乙离子残留百分比的平均值的估计值为

$$3\times0.05+4\times0.10+5\times0.15+6\times0.35+7\times0.20+8\times0.15=6.00.$$

※**点睛**：读懂题意是关键

（浙江　陈晓）

18. ☞**考点**：本题主要考查正余弦定理，两角和差公式，三角形面积公式

✔**答案**：见解析

✍**解析**：（1）由题设及正弦定理得 $\sin A\sin\dfrac{A+C}{2=\sin B\sin A}$. 因为 $\sin A\neq 0$，所以

$$\sin\frac{A+C}{2}=\sin B.$$

由 $A+B+C=\pi$，可得 $\sin\dfrac{A+C}{2}=\cos\dfrac{B}{2}$. 故

$$\cos\frac{B}{2}=2\sin\frac{B}{2}\cos\frac{B}{2},$$

因为 $\cos\dfrac{B}{2}\neq 0$，故 $\sin\dfrac{B}{2}=\dfrac{1}{2}$，因此 $B=60^\circ$.

（2）由题设及（1）知 $\triangle ABC$ 的面积为

$$S_{\triangle ABC}=\frac{\sqrt{3}}{4}a.$$

由正弦定理得

$$a=\frac{c\sin A}{\sin C}=\frac{\sin(120^\circ-C)}{\sin C}=\frac{\sqrt{3}}{2\tan C}+\frac{1}{2}.$$

由于 $\triangle ABC$ 为锐角三角形，故 $0^\circ<A<90^\circ$，$0^\circ<C<90^\circ$. 由（1）知 $A+C=120^\circ$，所以 $30^\circ<C<90^\circ$，故 $\dfrac{1}{2}<a<2$，从而 $\dfrac{\sqrt{3}}{8}<S_{\triangle ABC}<\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

因此，$\triangle ABC$ 面积的取值范围是 $\left(\dfrac{\sqrt{3}}{8},\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

※**点睛**：正余弦定理及两角和差公式在解三角形中的灵活运用

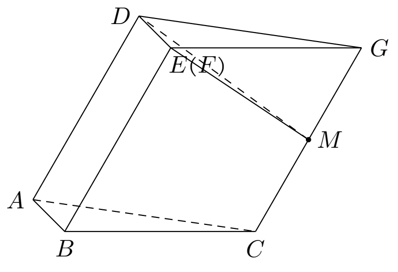
（河北　宁现丰）

19. ☞**考点**：本题考查空间点、线、面的位置关系，空间角的求解.

✔**答案**：见解析

✍**解析**：（1）由已知得 $AD\parallel BE$，$CG\parallel BE$，所以 $AD\parallel CG$. 故 AD，CG 确定一个平面，从而 A，C，G，D 四点共面.

由已知得 $AB\perp BE$，$AB\perp BC$，故 $AB\perp$ 平面 $BCGE$. 又因为 $AB\subset$ 平面 ABC，所以平面 $ABC\perp$ 平面 $BCGE$.



（第 19 题解析图）

(2)取 CG 的中点 M,连接 EM,DM. 因为 $AB /\!/ DE$,$AB\perp$ 平面 $BCGE$,所以 $DE\perp$ 平面 $BCGE$,故 $DE\perp CG$.

由已知,四边形 $BCGE$ 是菱形,且 $\angle EBC=60^\circ$ 得 $EM\perp CG$,故 $CG\perp$ 平面 DEM. 因此,$DM\perp CG$.

在 $\mathrm{Rt}\triangle DEM$ 中,$DE=1$,$EM=\sqrt{3}$,故 $DM=2$. 所以四边形 $ACGD$ 的面积为 4.

※**点睛**:垂直关系的证明是解决第(2)题的关键

(浙江　陈晓)

20. ☞**考点**:本题考查含参函数在定义域内单调性, 闭区间函数极值、最值.

✔**答案**:见解析

✍**解析**:(1)函数 $f(x)$ 的导函数为

$$f'(x)=6x^2-2ax=2x(3x-a)$$

若 $a=0$,则当 $x\in\mathbf{R}$ 时恒有 $f'(x)>0$,$f(x)$ 的单调递增区间是 $\mathbf{R}$;

若 $a<0$,列表如下:

x	$\left(-\infty,\dfrac{a}{3}\right)$	$\dfrac{a}{3}$	$\left(\dfrac{a}{3},0\right)$	0	$(0,+\infty)$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	极大值	$\searrow$	极小值	$\nearrow$

若 $a>0$,列表如下:

x	$(-\infty,0)$	0	$\left(0,\dfrac{a}{3}\right)$	$\dfrac{a}{3}$	$\left(\dfrac{a}{3},+\infty\right)$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	极大值	$\searrow$	极小值	$\nearrow$

综上,当 $a=0$ 时,$f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增;当 $a<0$ 时,$f(x)$ 在 $\left(\dfrac{a}{3},0\right)$ 单调递减,在 $\left(-\infty,\dfrac{a}{3}\right)$,$(0,+\infty)$ 单调递增;当 $a>0$ 时,$f(x)$ 在 $\left(0,\dfrac{a}{3}\right)$ 单调递减,在 $(-\infty,0)$,$\left(\dfrac{a}{3},+\infty\right)$ 单调递增.

(2)当 $0<a<3$ 时,由(1)知,$f(x)$ 在 $\left(0,\dfrac{a}{3}\right)$ 单调递减,在 $\left(\dfrac{a}{3},1\right)$ 上单调递增,于是

$$m=f\left(\frac{a}{3}\right)=-\frac{a^3}{27}+2$$

$$M=\max\{f(0,f(1)\}=\begin{cases}4-a, & 0<a<2,\\ 2, & 2\leqslant a<3.\end{cases}$$

所以

$$M-m=\begin{cases}2-a+\dfrac{a^3}{27}, & 0<a<2,\\ \dfrac{a^3}{27}, & 2\leqslant a<3.\end{cases}$$

当 $0<a<2$ 时,可知 $2-a+\dfrac{a^3}{27}$ 单调递减,所以 $M-m$ 的取值范围是 $\left(\dfrac{8}{27},2\right)$.

当 $2\leqslant a<3$ 时,$\dfrac{a^3}{27}$ 单调递增,所以 $M-m$ 的取值范围是 $\left[\dfrac{8}{27},1\right)$.

综上,$M-m$ 的取值范围是 $\left[\dfrac{8}{27},2\right)$.

※**点睛:** 合理对参数 a 进行讨论,注意两问的联系.

(浙江　陈晓)

21. ☞**考点:** 本题考查直线与抛物线的位置关系

✔**答案:** 见解析

✍**解析:**(1)设 $D\left(t,-\dfrac{1}{2}\right)$,$A(x_1,y_1)$,则 $x_1^2=2y_1$. 由于 $y'=x$,所以切线 DA 的斜率为 x_1,故

$$\frac{y_1+\dfrac{1}{2}}{x_1-t}=x_1,$$

整理得

$$2tx_1-2y_1+1=0.$$

设 $B(x_2,y_2)$,同理可得

$$2tx_2-2y_2+1=0.$$

故直线 AB 的方程为

$$2tx-2y+1=0.$$

所以直线 AB 过定点 $\left(0,\dfrac{1}{2}\right)$.

(2)由(1)得直线 AB 的方程为 $y=tx+\dfrac{1}{2}$. 联立

$$\begin{cases}y=tx+\dfrac{1}{2},\\ y=\dfrac{x^2}{2},\end{cases}$$

可得 $x^2-2tx-1=0$. 于是

$$x_1+x_2=2t, x_1x_2=-1, y_1+y_2=t(x_1+x_2)=2t^2+1.$$

设 M 为线段 AB 的中点，则 $M\left(t,t^2+\dfrac{1}{2}\right)$. 由于 $\overrightarrow{EM}\perp\overrightarrow{AB}$，而 $\overrightarrow{EM}=(t,t^2-2)$，$\overrightarrow{AB}$ 与向量 $(1,t)$ 平行，所以

$$t+(t^2-2)t=0.$$

解得 $t=0$ 或 $t=\pm1$.
当 $t=0$ 时，$|\overrightarrow{EM}|=2$，所求圆的方程为

$$x^2+\left(y-\frac{5}{2}\right)^2=4.$$

当 $t=\pm1$ 时，$|\overrightarrow{EM}|=\sqrt{2}$，所求圆的方程为

$$x^2+\left(y-\frac{5}{2}\right)^2=2.$$

※**点睛**：同构式的灵活应用是解题的关键

（浙江　陈晓）

22. ☞**考点**：考查坐标系与参数方程，求极坐标方程，求极坐标

✔**答案**：见解析

✍**解析**：（1）由题意知，弧 $\overset{\frown}{AB}$ 所在圆的直角坐标方程为 $(x-1)^2+y^2=1$，由

$$\begin{cases} x=\rho\cos\theta \\ y=\rho\sin\theta \end{cases}$$

化简得 M_1 的极坐标方程为

$$\rho=2\cos\theta, \theta\in[0,\frac{\pi}{4}].$$

同理，弧 $\overset{\frown}{BC}$ 所在圆的直角坐标方程为 $x^2+(y-1)^2=1$，则 M_2 的极坐标方程为

$$\rho=2\sin\theta, \theta\in[\frac{\pi}{4},\frac{3\pi}{4}].$$

弧 $\overset{\frown}{CD}$ 所在圆的直角坐标方程为 $(x+1)^2+y^2=1$，则 M_3 的极坐标方程为

$$\rho=-2\cos\theta, \theta\in[\frac{3\pi}{4},\pi].$$

（2）由 $|OP|=\sqrt{3}$，设点 P 极坐标为 $(\sqrt{3},\theta)$，联立

$$M_1:\ \begin{cases}\rho=2\cos\theta\\ \rho=\sqrt{3}\end{cases},\theta\in\left[0,\frac{\pi}{4}\right],$$

解得 $\theta=\dfrac{\pi}{6}$，故 $P\left(\sqrt{3},\dfrac{\pi}{6}\right)$.

同理联立

$$M_2:\ \begin{cases}\rho=2\sin\theta,\\ \rho=\sqrt{3}\end{cases},\theta\in\left[\frac{\pi}{4},\frac{3\pi}{4}\right],$$

解得 $\theta=\dfrac{\pi}{3}$ 或 $\theta=\dfrac{2\pi}{3}$. 故 $P\left(\sqrt{3},\dfrac{\pi}{3}\right)$ 或 $P\left(\sqrt{3},\dfrac{2\pi}{3}\right)$.

联立

$$M_3:\ \begin{cases}\rho=-2\cos\theta\\ \rho=\sqrt{3}\end{cases},\theta\in\left[\frac{3\pi}{4},\pi\right]$$

解得 $\theta=\dfrac{5\pi}{6}$，故 $P\left(\sqrt{3},\dfrac{5\pi}{6}\right)$.

综上，P 点的极坐标为

$$P_1\left(\sqrt{3},\frac{\pi}{6}\right),P_2\left(\sqrt{3},\frac{\pi}{3}\right),P_3\left(\sqrt{3},\frac{2\pi}{3}\right),P_4\left(\sqrt{3},\frac{5\pi}{6}\right).$$

※**点睛**：此题着重考查对极坐标系的理解，能够分类讨论，具体问题具体分析.

（河南　林木）

23. ☞**考点**：不等式求最值；不等式的证明.

✔**答案**：见解析

✍**解析**：（1）因为 $x^2+y^2\geqslant 2xy,y^2+z^2\geqslant 2yz,z^2+x^2\geqslant 2zx$，三式相加得：

$$x^2+y^2+z^2\geqslant xy+yz+zx.$$

不等式两边同时加 $2xy+2yz+2zx$ 得

$$(x+y+z)^2\geqslant 3(xy+yz+zx)$$

所以

$$(x-1+y+1+z+1)^2\geqslant 3(x-1)(y+1)+3(y+1)(z+1)+3(z+1)(x-1).$$

因为 $x+y+z=1$，所以

$$4\geqslant 3\left[(x-1)(y+1)+(y+1)(z+1)+(z+1)(x-1)\right],$$

即

$$(x-1)(y+1)+(y+1)(z+1)+(z+1)(x-1)\leqslant\frac{4}{3}.$$

所以

$$(x-1)^2+(y+1)^2+(z+1)^2\geqslant\frac{4}{3}.$$

（当且仅当 $x-1=y+1=z+1$ 时，等号成立）

（2）由（1）知，

$$xy+yz+zx\leqslant\frac{(x+y+z)^2}{3}.$$

因为

$$(x-2)^2+(y-1)^2+(z-a)^2\geqslant\frac{1}{3},$$

所以

$$|x+y+z|\geqslant 1,$$

即

$$|(x-2)+(y-1)+(z-a)|\geqslant 1,$$

所以

$$\begin{cases}-2-a\geqslant 1,\\-2-a\leqslant -1,\end{cases}$$

解得 $a\leqslant -3$ 或 $a\geqslant -1$.

※点睛：本题考查了排序不等式的相关内容，在模拟题中往往以“零点分段讨论法”出现，也提醒考生在备考时应全方位复习.

（河北　焦子奇）

排版：　浙江　陈晓