第十届全国大学生数学竞赛预赛参考答案

(非数学类, 2018 年 10 月 27 日)

绝密★启用前 (16 数学 – 胡八一)

考试形式：闭卷 考试时间：150 分钟 满分：100 分

题 号	一	二	三	四	五	六	七	总 分
满 分	24	8	14	12	14	14	14	100
得 分								

注意：1. 所有答题都须写在试卷密封线右边, 写在其他纸上一律无效.

2. 密封线左边请勿答题, 密封线外不得有姓名及相关标记.

3. 如答题空白不够, 可写在当页背面, 并标明题号.

省市：________ 学校：________ 姓名：________ 准考证号：________

装 订 线 内 不 要 答 题

得分	评卷人	复核人

一、填空题（本题满分 24 分，每题 6 分）

1. 设 $\alpha \in (0,1)$, 则 $\lim\limits_{n\to+\infty}\left((n+1)^{\alpha}-n^{\alpha}\right)=$______.

【答案】0.

【解析】等价无穷小 $(1+x)^{\alpha}-1 \backsim \alpha x$，得

$$\lim_{n\to\infty}\left((n+1)^{\alpha}-n^{\alpha}\right)=\lim_{n\to\infty}n^{\alpha}\left((1+1/n)^{\alpha}-1\right)=\lim_{n\to\infty}n^{\alpha}\times\frac{\alpha}{n}=0$$

2.若曲线$y=f(x)$是由 $\begin{cases} x=t+\cos t \\ e^{y}+ty+\sin t=1 \end{cases}$ 确定，则此曲线在$t=0$ 对应点处的切线方程为______.

【答案】$x+y-1=0$.

【解析】易知 $t=0$ 处上的曲线为点 $(1,0)$，即方程组对 t 求导得

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=1-\sin t,\ \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=-\frac{y+\cos t}{e^{y}+t}$$

$$\Rightarrow \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\Big/\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=-\frac{y+\cos t}{\left(e^{y}+1\right)(1-\sin t)} \Rightarrow \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\Big|_{t=0}=-1$$

故曲线在 $t=0$ 对应点处的切线方程为 $x+y-1=0$.

3.$\displaystyle\int \frac{\ln\left(1+\sqrt{1+x^{2}}\right)}{\left(1+x^{2}\right)^{\frac{3}{2}}}\mathrm{d}x=$______.

【答案】$\displaystyle\frac{x}{\sqrt{1+x^{2}}}\ln\left(x+\sqrt{1+x^{2}}\right)-\frac{1}{2}\ln\left(1+x^{2}\right)+C$.

【解析】简单的凑微分，如下

$$\begin{aligned}
\int \frac{\ln\left(x+\sqrt{1+x^{2}}\right)}{\left(1+x^{2}\right)^{\frac{3}{2}}}\mathrm{d}x &= \int \ln\left(x+\sqrt{1+x^{2}}\right)\mathrm{d}\left(\frac{x}{\sqrt{1+x^{2}}}\right)\\
&=\frac{x}{\sqrt{1+x^{2}}}\ln\left(x+\sqrt{1+x^{2}}\right)-\int \frac{x}{1+x^{2}}\mathrm{d}x\\
&=\frac{x}{\sqrt{1+x^{2}}}\ln\left(x+\sqrt{1+x^{2}}\right)-\frac{1}{2}\ln\left(1+x^{2}\right)+C
\end{aligned}$$

4.$\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x\sqrt{\cos 2x}\sqrt[3]{\cos 3x}}{x^{2}}=$______.

【答案】3.

【解析】这题方法很多，简单的等价无穷小，或拆项、洛必达以及泰勒都可以.

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x\sqrt{\cos 2x}\sqrt[3]{\cos 3x}}{x^{2}} &= \lim_{x\to 0}\left(\frac{1-\cos x}{x^{2}}+\frac{\cos x\left(1-\sqrt{\cos 2x}\sqrt[3]{\cos 3x}\right)}{x^{2}}\right)\\
&=\frac{1}{2}+\lim_{x\to 0}\frac{1-\sqrt{\cos 2x}\sqrt[3]{\cos 3x}}{\boldsymbol{x}^{2}}\\
&=\frac{1}{2}+\lim_{x\to 0}\left(\frac{1-\cos\sqrt{2\boldsymbol{x}}}{\boldsymbol{x}^{2}}+\frac{\cos\sqrt{2\boldsymbol{x}}\left(1-\sqrt[3]{\cos 3\boldsymbol{x}}\right)}{\boldsymbol{x}^{2}}\right)\\
&=\frac{1}{2}+\lim_{x\to 0}\left(\frac{1-\sqrt{1+(\cos 2\boldsymbol{x}-1)}}{\boldsymbol{x}^{2}}+\frac{1-\sqrt[3]{1+(\cos 3\boldsymbol{x}-1)}}{\boldsymbol{x}^{2}}\right)\\
&=\frac{1}{2}+\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 2\boldsymbol{x}}{2\boldsymbol{x}^{2}}+\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 3\boldsymbol{x}}{3\boldsymbol{x}^{2}}\\
&=3
\end{aligned}$$

得分	评卷人	复核人

二、解答题（本题满分 8 分)

设函数 $f(t)$ 在 $t\neq 0$ 时一阶连续可导，且 $f(1)=0$，求函数 $f(x^2-y^2)$，使得曲线积分 $\int_L y\left(2-f\left(x^2-y^2\right)\right)\mathrm{d}x+xf\left(x^2-y^2\right)\mathrm{d}y$ 与路径无关，其中 L 为任一不与直线 $y=\pm x$ 相交的分段光滑闭曲线.

【解析】记 $\begin{cases} P(x,y)=y\left(2-f\left(x^2-y^2\right)\right) \\ Q(x,y)=x+xf\left(x^2-y^2\right) \end{cases}$，于是

$$\begin{cases} \dfrac{\partial P(x,y)}{\partial y}=2-f\left(x^2-y^2\right)+2y^2f'\left(x^2-y^2\right) \\ \dfrac{\partial Q(x,y)}{\partial x}=f\left(x^2+y^2\right)+2x^2f'\left(x^2-y^2\right) \end{cases}$$

由题设可知，积分与路径无关，于是有

$$\frac{\partial Q(x,y)}{\partial x}=\frac{\partial P(x,y)}{\partial y}\Longrightarrow\left(x^2-y^2\right)f'\left(x^2-y^2\right)+f\left(x^2-y^2\right)=1$$

....5 分

记 $t=x^2-y^2$，即微分方程

$$tf'(t)+f(t)=1\Leftrightarrow(tf(y))'=1\Rightarrow tf(t)=y+C$$

又 $f(1)=0$，可得 $C=-1$，$f(t)=1-\dfrac{1}{t}$，从而

$$f\left(x^2-y^2\right)=1-\frac{1}{x^2-y^2}$$

....8 分

得分	评卷人	复核人

三、解答题 (本题满分 14 分)

设 $f(x)$ 在区间 $[0,1]$ 上连续，且 $1 \le f(x) \le 3$. 证明：

$$0 \le \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x \int_0^1 \frac{1}{f(x)}\mathrm{d}x \le \frac{4}{3}$$

【证明】由 Cauchy-Schwarz 不等式：

$$\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x \int_0^1 \frac{1}{f(x)}\mathrm{d}x \ge \left(\int_0^1 \sqrt{f(x)}\sqrt{\frac{1}{f(x)}}\mathrm{d}x\right)^2 = 1$$

…………………………………4 分

又由基本不等式得：

$$\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x \int_0^1 \frac{3}{f(x)}\mathrm{d}x \le \frac{1}{4}\left(\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x + \int_0^1 \frac{3}{f(x)}\mathrm{d}x\right)^2$$

再由条件 $1 \le f(x) \le 3$，有 $(f(x)-1)(f(x)-3) \le 0$，则

$$f(x) + \frac{3}{f(x)} \le 4 \Rightarrow \int_0^1 \left(f(x) + \frac{3}{f(x)}\right)\mathrm{d}x \le 4$$

…………………………………10 分

即可得

$$1 \le \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x \int_0^1 \frac{1}{f(x)}\mathrm{d}x \le \frac{4}{3}$$

…………………………………14 分

得分	评卷人	复核人

四、解答题 (本题满分 12 分)

计算三重积分 $\iiint_{(V)} (x^2+y^2)\mathrm{d}V$，其中 (V) 是由 $x^2+y^2+(z-2)^2 \ge 4$，$x^2+y^2+(z-1)^2 \le 9$ 及 $z \ge 0$ 所围成的空间图形.

【解析】(1) 计算打球 (V_1) 的积分，利用球坐标换元，令

$$(V_1): \begin{cases} x = r\sin\varphi\cos\theta, y = r\sin\varphi\sin\theta, z-1 = r\cos\varphi \\ 0 \le r \le 3, 0 \leqslant \varphi \le \pi, 0 \leqslant \theta \le 2\pi \end{cases}$$

省市：________ 学校：________ 姓名：________ 准考证号：________

装 订 线 内 不 要 答 题

于是有

$$\iiint_{(V_1)}\left(x^2+y^2\right)\mathrm{d}V=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^{3}r^3\sin^2\varphi r^2\sin\varphi=\frac{8}{15}\cdot 3^5\pi$$

......................................4 分

(2) 计算小球 (V_2) 的积分，利用球坐标换元，令

$$(V_2):\begin{cases}x=r\sin\varphi\cos\theta,y=r\sin\varphi\sin\theta,z-2=r\cos\varphi\\0\le r\le 2,0\le\varphi\le\pi,0\le\theta\le 2\pi\end{cases}$$

于是有

$$\iiint_{(V_2)}\left(x^2+y^2\right)\mathrm{d}V=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^{2}r^2\sin^2\varphi r^2\sin\varphi=\frac{8}{15}\cdot 2^5\pi$$

......................................8 分

(3) 计算大球 $z=0$ 下部分的积分 V_3，利用球坐标换元，令

$$(V_3):\begin{cases}x=r\cos\theta,y=r\sin\theta,1-\sqrt{9-r^2}\le z\le 0\\0\le r\le 2\sqrt{2},0\le\theta\le 2\pi\end{cases}$$

于是有

$$\begin{aligned}\iiint_{(V_3)}\left(x^2+y^2\right)\mathrm{d}V&=\iint_{r\le 2\sqrt{2}}r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta\int_{1-\sqrt{9-r^2}}^{0}r^2\mathrm{d}z\\&=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{2\sqrt{2}}r^3\left(\sqrt{9-r^2}-1\right)\\&=\left(124-\frac{2}{5}\cdot 3^5+\frac{2}{5}\right)\pi\end{aligned}$$

综上所述有

$$\begin{aligned}\iiint_{(V)}\left(x^2+y^2\right)\mathrm{d}V&=\iiint_{(V_1)}\left(x^2+y^2\right)\mathrm{d}V-\iiint_{(V_2)}\left(x^2+y^2\right)\mathrm{d}V-\iiint_{(V_3)}\left(x^2+y^2\right)\mathrm{d}V\\&=\frac{8}{15}\cdot 3^5\pi+\frac{8}{15}\cdot 2^5\pi+\left(124-\frac{2}{5}\cdot 3^5+\frac{2}{5}\right)\pi\\&=\frac{256}{3}\pi\end{aligned}$$

......................................12 分

得分	评卷人	复核人

五、解答题（本题满分 14 分）

设 $f(x,y)$ 在区域 D 内可微，且 $\sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2}\leq M$，$A\left(x_1,y_1\right),B\left(x_2,y_2\right)$ 是 D 内两点，线段 AB 包含在 D 内，证明：

$$\left|f\left(x_1,y_1\right)-f\left(x_2,y_2\right)\right|\leq M|AB|$$

其中 $|AB|$ 表示线段 AB 的长度.

【证明】作辅助函数

$$\varphi(t)=f\left(x_1+t\left(x_2-x_1\right)\cdot y_1+t\left(y_2-y_1\right)\right)$$

……………………………………2 分

显然 $\varphi(t)$ 在 $[0,1]$ 可导，根据 Lagrange 中值定理，存在 $c\in(0,1)$，使得

$$\varphi(1)-\varphi(0)=\varphi'(c)=\frac{\partial f(u,v)}{\partial u}\left(x_2-x_1\right)+\frac{\partial f(u,v)}{\partial v}\left(y_2-y_1\right)$$

……………………………………8 分

即可得到

$$\begin{aligned}\left|\varphi\left(1\right)-\varphi\left(0\right)\right|&=\left|f\left(x_2,y_2\right)-f\left(x_1,y_1\right)\right|\\&=\left|\frac{\partial f\left(u,v\right)}{\partial u}\left(x_2-x_1\right)+\frac{\partial f\left(u,v\right)}{\partial v}\left(y_2-y_1\right)\right|\\&\leq\sqrt{\left(\frac{\partial f\left(u,v\right)}{\partial u}\right)^2+\left(\frac{\partial f\left(u,v\right)}{\partial v}\right)^2}\cdot\sqrt{\left(x_2-x_1\right)^2+\left(y_2-y_1\right)^2}\end{aligned}$$

$$\leq M\left|AB\right|$$

……………………………………14 分

得分	评卷人	复核人

六、解答题（本题满分 14 分）

证明：对于连续函数 $f(x)>0$，有

$$\ln\int_0^1 f\left(x\right)\mathrm{d}x\geq\int_0^1\ln f\left(x\right)\mathrm{d}x$$

【证明】由定积分定义，将 $[0,1]$ 分 n 等分，可取 $\Delta x=\dfrac{1}{n}$，由“算术平均数 $\geq$ 几何平均数”得：

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) \geq \sqrt[n]{f\left(\frac{1}{n}\right)\cdots f\left(\frac{n}{n}\right)}=\exp\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\ln f\left(\frac{k}{n}\right)$$

……………………………………4 分

$$\Rightarrow \int_0^1 f(x)\mathrm{d}x \geq \exp\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\ln f\left(\frac{k}{n}\right)=\exp\int_0^1 \ln f(x)\mathrm{d}x$$

……………………………………10 分

然后两边取对数即证

$$\ln\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x \geq \int_0^1 \ln f(x)\,\mathrm{d}x$$

……………………………………14 分

或者考虑令 $g(x)=\ln x$，则 $g'(x)=\dfrac{1}{x}$，$g''(x)=-\dfrac{1}{x^2}<0$，所以 $g(x)$ 为凹函数，可由琴声不等式定理即证.

得分	评卷人	复核人

七、解答题（本题满分 14 分）

已知 a_k，b_k 是正数数列，且 $b_{k+1}-b_k \geqslant \delta>0, k=1,2,\cdots$，$\delta$ 为一切常数，证明：若级数 $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} a_k$ 收敛，则级数 $\sum\limits_{k=1}^{+\infty}\dfrac{k\sqrt[k]{(a_1a_2\cdots a_k)(b_1b_2\cdots b_k)}}{b_{k+1}b_k}$ 收敛.

【证明】令 $S_k=\sum\limits_{i=1}^{k} a_ib_i, a_kb_k=S_k-S_{k-1}, S_0=0, a_k=\dfrac{s_k-S_{k-1}}{b_k}, k=1,2,\cdots$ 4 分

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{N} a_k&=\sum_{k=1}^{N}\frac{S_k-S_{k-1}}{b_k}=\sum_{k=1}^{N-1}\left(\frac{S_k}{b_k}-\frac{S_k}{b_{k+1}}\right)+\frac{S_N}{b_N}\\&=\sum_{k=1}^{N-1}\frac{b_{k+1}-b_k}{b_kb_{k+1}}S_k+\frac{S_N}{b_N}\geq\sum_{k=1}^{N-1}\frac{\delta}{b_kb_{k+1}}S_k\end{aligned}$$

所以 $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\dfrac{S_k}{b_kb_{k+1}}$ 收敛. ……………………………10 分

由算术-几何平均不等式得

$$\sqrt[k]{(a_1a_2\cdots a_k)(b_1b_2\cdots b_k)} \leq \frac{a_1b_1+\cdots+a_kb_k}{k}=\frac{S_k}{k}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{k\sqrt[k]{(a_1a_2\cdots a_k)(b_1b_2\cdots b_k)}}{b_{k+1}b_k} \leqslant \sum_{k=1}^{\infty}\frac{S_k}{b_kb_{k+1}}$$

故结论成立.

....14 分

装 订 线 内 不 要 答 题