2019 年普通高等学校招生全国统一考试

数学全国卷一答案与解析

一、选择题:本题考查基础知识和基本运算.每小题 5 分,满分 60 分.

1. ☞**考点:**本题考查集合的交集和解二次不等式

✔**答案:**C

✍**解析:**$N=\{x\mid -2<x<3\}$,$M\cap N=\{x\mid -2<x<2\}$.

※**点睛:**集合题多与二次不等式结合

(河北　宁现丰)

2. ☞**考点:**复数的模长及坐标表示

✔**答案:**C

✍**解析:**设 $z=x+y\mathrm{i}$,则 $|x+y\mathrm{i}-\mathrm{i}|=1$,即 $|x+\mathrm{i}(y-1)|=1$,所以 $x^2+(y-1)^2=1$.

※**点睛:**$z=x+y\mathrm{i}$,模长公式,几何意义

(河北　宁现丰)

3. ☞**考点:**本题考查指数与对数的基本运算

✔**答案:**B

✍**解析:**因为

$$a=\log_2 0.2<\log_2 1=0,$$

$$b=2^{0.2}>2^0=1,$$

$$0<c=0.2^{0.3}<2^0=1,$$

所以 $a<c<b$.

※**点睛:**本题也可以直接将 $y=\log_2 x$、$y=2^x$ 和 $y=0.2^x$ 的图象画出,分别令 $x=0.2$、$x=0.2$ 和 $x=0.3$ 即可

(张家口　饶强)

4. ☞**考点:**本题考查简单的估算能力

✔**答案:**B

✍**解析:**由右图可知

$$\begin{cases}\dfrac{a}{b}=0.618\\[2mm] \dfrac{a+b}{c}=0.618\\[2mm] a<26\\[2mm] c>105\end{cases}$$

一方面,身高

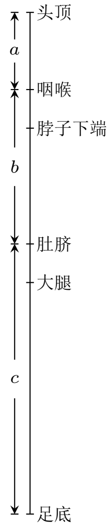
$$H=a+b+c=0.618c+c=1.618c>169.89$$

另一方面,身高

$$\begin{aligned}H&=a+b+c=a+b+\frac{a+b}{0.618}=(a+b)\left(1+\frac{1}{0.618}\right)\\&=\left(a+\frac{a}{0.618}\right)\left(1+\frac{1}{0.618}\right)=a\left(1+\frac{1}{0.618}\right)^2\\&<26\cdot\left(1+\frac{1}{0.618}\right)^2=178.22\end{aligned}$$

所以 $169.89<H<178.22$. 故选 B.

※点睛:选填题有很多种特殊解法,但本人还是推荐用不等式求出其整体的范围,不要养成投机取巧的习惯.



(张家口　饶强)(第 4 题解析图)

5. ☞考点:本题考查函数图象与性质

✔答案:D

✍解析:由

$$f\left(\frac{\pi}{3}\right)=\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\pi}{3}}{\frac{1}{2}+\left(\frac{\pi}{3}\right)^2}=\frac{0.87+1.05}{0.5+\left(\frac{\pi}{3}\right)^2}>1;$$

且

$$f(-x)=\frac{-\sin x-x}{\cos x+x^2}=-f(x)$$

即 $f(x)$ 为奇函数,故选 D.

※点睛:准确把握函数的奇偶性以及特殊值排除法,是解决这类问题的关键.

(山西　廖凯)

6. ☞考点:本题考查概率及其简单应用

✔答案:A

✍解析:一共可能有 $2^6=64$ 种情况,其中满足要求的有 $C_6^3=20$ 种,故概率为 $P=\frac{5}{16}$.

※点睛:读懂题目意思,分清阴爻和阳爻.

(江西　陈江波)

7. ☞考点:本题考查向量的数量积

✔答案:B

✍解析:$(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})\perp\boldsymbol{b}\Rightarrow\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{b}|^2$,则 $\cos<\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}>=\frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{b}|}=\frac{1}{2}$,所以选 B.

※点睛：平面向量数量积的应用，夹角公式 $\cos<\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}>=\dfrac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{b}|}$

（江西　陈江波）

8. ☞**考点：**本题考查算法程序框图

✔**答案：**A

✍**解析：**分析代数结构便知，$k\leqslant 2$，要进行两次迭代，每次 $+2$ 后取倒数．由于步骤不多，此题也可代入选项．

※**点睛：**程序框图的循环结构．

（江西　陈江波）

9. ☞**考点：**本题考查等差数列的基本量

✔**答案：**A

✍**解析：**设数列 $\{a_n\}$ 的公差为 d，则

$$S_n=n(5-4d)+\frac{n(n-1)}{2}d,$$

根据题意，有

$$4(5-4d)+6d=0,$$

解得 $d=2$，因此数列 $\{a_n\}$ 的通项为

$$a_n=2n-5,$$

其前 n 项和为

$$S_n=n^2-4n.$$

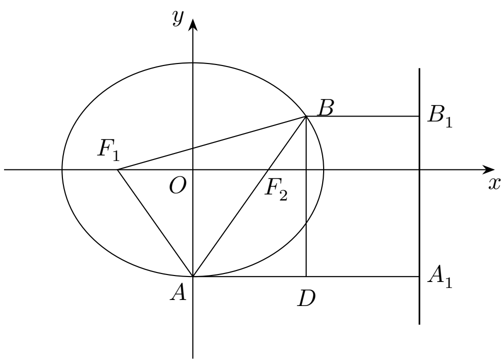
※**点睛：**由 $S_4=0$ 可知 B，C，D 错误．

（宜昌　李云皓）

10. ☞**考点：**本题考查椭圆的第一定义与第二定义

✔**答案：**B

✍**解析：**



（第 10 题解析图）

设 $BF_2=m$. 根据题意,有

$$AF_1=AF_2=2m,BF_1=3m,$$

因此点 A 为椭圆的下顶点. 过 A,B 向椭圆的准线作垂线, 垂足分别为 A_1,B_1, 作 $BD\perp AA_1$,如图所示.

因为 $AF_2=a,BF_2=\dfrac{1}{2}a,BB_1=\dfrac{1}{2}a^2,AA_1=a^2$,故 $AD=\dfrac{1}{2}a^2$,而 $\triangle AOF_2\backsim\triangle BDA$,因此

$$\frac{1}{a}=\frac{\frac{1}{2}a^2}{3a},$$

解得 $a^2=3$,进而 $b^2=2$. 于是椭圆 C 的方程为 $\dfrac{x^2}{3}+\dfrac{y^2}{2}=1$.

※**点睛**:解析几何小题首选几何法.

(宜昌　李云皓)

11. ☞**考点**:本题考查了函数的奇偶性、三角函数的性质、绝对值的化简运算

✔**答案**:C

✍**解析**:对于①,$f(-x)=\sin|-x|+|\sin(-x)|=\sin|x|+|\sin x|=f(x)$,故正确;对于②,当 $x\in\left(\dfrac{\pi}{2},\pi\right)$ 时,$f(x)=\sin x+\sin x=2\sin x$,在 $\left(\dfrac{\pi}{2},\pi\right)$ 上单调递减,故错误;对于③,当 $x\in[-\pi,\pi]$ 时,$f(x)=2|\sin x|=\begin{cases}-2\sin x,-\pi\leqslant x<0,\\2\sin x,0\leqslant x\leqslant\pi,\end{cases}$ 令 $f(x)=0$,解得 $x=-\pi$、0、π 三个根,即 $f(x)$ 有三个零点,故错误;对于④,由 $\sin|x|\le 1,|\sin x|\le 1$,且等号可同时取到$\left(\text{如当 } x=\dfrac{\pi}{2} \text{ 时}\right)$,即 $f(x)_{\max}=2$,故正确. 故选 C.

※**点睛**:对于含有绝对值的函数,需要讨论绝对值内的正负问题,往往化简得到一个分段函数.

(山西　廖凯)

12. ☞**考点**:本题考查立体几何中外接球问题

✔**答案**:D

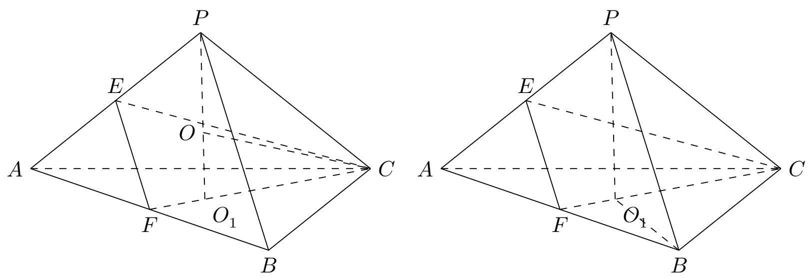
✍**解析**:解法一:易知三棱锥 $P-ABC$ 为正三棱锥,设 $PA=2x$,所以 $EF=x$,$CE=\sqrt{3-x^2}$. 由中线定理可知

$$4CE^2+PA^2=2\left(PC^2+AC^2\right)\Rightarrow 4(3-x^2)+4x^2=2(4x^2+4)\Rightarrow x=\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

所以可得 $PA\perp PB\perp PC$. 设 $OC=R$,则有

$$R^2=\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{6}}{3}-R\right)^2,$$

可得 $R=\dfrac{\sqrt{6}}{2}$. 所以外接球体积为 $\sqrt{6}\pi$.



(第 12 题解析图)

解法二:易知 $AC\perp$ 面 PO_1B,所以 $PB\perp AC$,即 $PB\perp$ 面 PAC. 所以 $PA\perp PB\perp PC$. 将三棱锥放置在边长为 $\sqrt{2}$ 的正方体中,易知外接球的直径为 $\sqrt{6}$,其体积为 $\sqrt{6}\pi$.

※**点睛**:本小题考察常规的外接球问题,注意可从两个方向思考:1. 构建直角三角形求外接球的半径;2. 转化到正方体或长方体内求解外接球半径.

(广东　周险峰)

二、填空题:本题考查基础知识和基本运算,每小题 5 分,共 20 分.

13. ☞**考点**:本题考查了函数某处的切线问题

✔**答案**:$y=3x$

✍**解析**:易得 $y'=3(x^2+3x+1)\mathrm{e}^x$,故该曲线在点 $(0,0)$ 处的切线斜率为 $y'\big|_{x=0}=3$,又由于该切线过 (0,0),故切线方程为 $y=3x$.

※**点睛**:注意求的是函数某处的切线,而不是过某点的切线,即已经确定切点就是 $(0,0)$,无需再求.

(山西　廖凯)

14. ☞**考点**:本题考查了等比数列的通项公式和求和公式.

✔**答案**:$\dfrac{121}{3}$

✍**解析**:由方程 $\left(\dfrac{1}{3}q^3\right)^2=\dfrac{1}{3}q^5\Longrightarrow q=3\Longrightarrow S_5=\dfrac{121}{3}$

※**点睛**:利用等比数列的首项和公比建立方程求解.

(安徽　史飞)

15. ☞**考点**:本题考查独立事件的概率

✔**答案**:0.18

✍**解析**:因为甲队以 $4:1$ 获胜,所以比赛进行了 5 场,且第 5 场甲队获胜,前 4 场中甲队获胜 3 场,输了 1 场,按照甲队比赛情况有:胜胜胜负胜,胜胜负胜胜,胜负胜胜胜,负

胜胜胜胜,$0.6^3\cdot0.5^2+0.6^3\cdot0.5^2+0.6^2\cdot0.4\cdot0.5^2+0.6^2\cdot0.4\cdot0.5^2=0.18$

※**点睛:** 本题关键是理解比赛的规则,并能够利用独立事件求解.

(安徽　史飞)

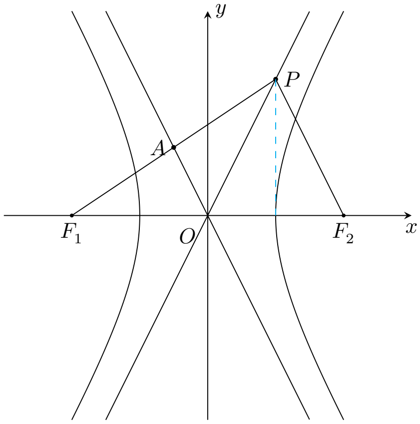
16. ☞**考点:** 双曲线离心率问题

✔**答案:** 2

✍**解析:** 由题意可知:$PF_1\perp PF_2$,所以 $OP=c$. 而 l_{OP}:$y=\frac{a}{b}x$,所以 $P(a,b)$,则 $A\left(\frac{a-c}{2},\frac{b}{2}\right)$,且 $PF_1\perp OA$,所以

$$\frac{\frac{b}{2}}{\frac{a-c}{2}}=-\frac{b}{a},$$

即有 $c=2a$,解得 $e=2$.



(第 16 题解析图)

※**点睛:** 利用平面几何性质得到坐标关系,结合双曲线的渐近线系数与离心率的关系求解,属于常规题.

(广东　周险峰)

三、解答题:共 70 分.

17. ☞**考点:** 本题主要考查正余弦定理及两角和差公式

✔**答案:** 见解析

✍**解析:** (1)由正弦定理得,$b^2+c^2-2bc=a^2-bc$,即 $b^2+c^2-a^2=bc$,由余弦定理得

$$\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\frac{1}{2},$$

所以 $A=\frac{\pi}{3}$.

(2)由正弦定理得,$\sqrt{2}\sin A+\sin B=2\sin C$,又 $B+C=\frac{2\pi}{3}$,$B=\frac{2\pi}{3}-C$,所以

$$\sqrt{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}+\sin\left(\frac{2\pi}{3}-C\right)=2\sin C,$$

化简得

$$\sin\left(C-\frac{\pi}{6}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2},$$

所以 $C-\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{4}$ 或 $C-\frac{\pi}{6}=\frac{3\pi}{4}$(舍去). 于是,

$$\sin C=\sin\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{6}\right)=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}.$$

※**点睛:** 正余弦定理及两角和差公式在解三角形中的灵活运用.

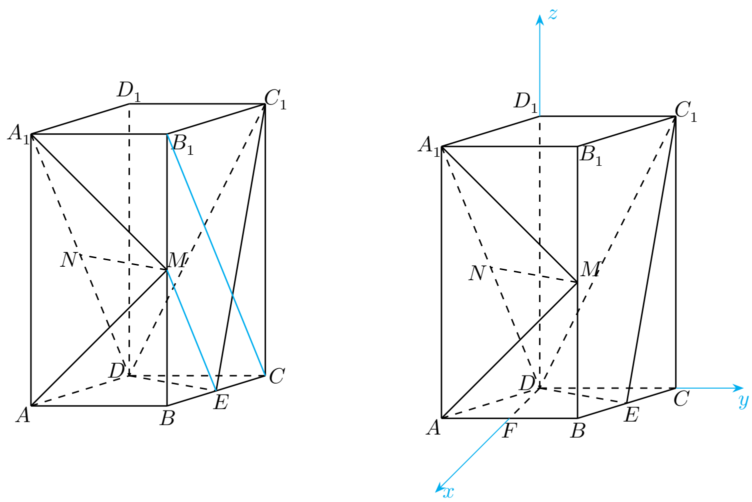
(河北　宁现丰)

18. ☞**考点:** 本题考查空间点、线、面的位置关系,空间角的求解,考查空间想象能力和运算求解能力

✔**答案:** 见解析

✍**解析:**(1)连接 ME,B_1C,则四边形 $MNDE$ 为平行四边形,如图所示. 根据题意,可得

$$\left.\begin{aligned}MN\parallel DE,\\ DE\subset C_1DE,\end{aligned}\right\}\Longrightarrow MN\parallel C_1DE.$$



(第 18 题解析图)

(2)取 AB 的中点 F,以 D 为原点,分别以射线 DF,DC 为 x,y 轴的正半轴,建立空间

直角坐标系 $D-xyz$. 由题意知各点坐标如下:

$$A\left(\sqrt{3},-1,0\right),A_1\left(\sqrt{3},-1,4\right),M\left(\sqrt{3},1,2\right),N\left(\frac{\sqrt{3}}{2},-\frac{1}{2},2\right),$$

于是平面 AA_1M 的法向量

$$\boldsymbol{n}=(1,0,0),$$

平面 NA_1M 的法向量

$$\boldsymbol{m}=\left(-\sqrt{3},1,1\right),$$

于是所求二面角的正弦值为

$$\sin\theta=\sqrt{1-\left(\frac{\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{m}}{|\boldsymbol{n}|\cdot|\boldsymbol{m}|}\right)^2}=\frac{\sqrt{10}}{5}.$$

※**点睛**:用空间向量解决立体几何问题简洁明了,容易得分.

(宜昌　李云皓)

19. ☞**考点**:本题考查直线与圆锥曲线的位置关系

✔**答案**:见解析

✍**解析**:(1)设 $A(3a^2,3a)$,$B(3b^2,3b)$,则直线 AB 的斜率为 $\frac{3}{2}$,得

$$\frac{3a-3b}{3a^2-3b^2}=\frac{3}{2}\Rightarrow a+b=\frac{2}{3},$$

由抛物线性质得

$$|AF|+|BF|=4\Rightarrow\left(3a^2+\frac{3}{4}\right)+\left(3b^2+\frac{3}{4}\right)=4\Rightarrow a^2+b^2=\frac{5}{6}.$$

在抛物线中,直线 AB 的横截距为

$$-3ab=-3\cdot\frac{(a+b)^2-a^2-b^2}{2}=\frac{7}{12},$$

所以直线 l 方程为 $l:y=\frac{3}{2}\left(x-\frac{7}{12}\right)$,即

$$l:y=\frac{3}{2}x-\frac{7}{8}.$$

(2)设 $A(3a^2,3a)$,$B(3b^2,3b)$,则由 $\overrightarrow{AP}=3\overrightarrow{PB}$ 得 $a=-3b$. 结合第(1)问中 $a+b=\frac{2}{3}$,

解得 $a=1,b=-\frac{1}{3}$,所以

$$A(3,3),B\left(\frac{1}{3},-1\right),$$

进而

$$|AB|=\sqrt{\left(3-\frac{1}{3}\right)^2+(3+1)^2}=\frac{4\sqrt{13}}{3}.$$

※**点睛:** 抛物线的性质、坐标之间关系

（江西　陈江波）

20. ☞**考点:** 本题考查函数极值点及函数零点

✔**答案:** 见解析

✍**解析:**（1）函数 $f(x)$ 的导函数为

$$f'(x)=\cos x-\frac{1}{1+x}$$

令 $g(x)=\cos x-\dfrac{1}{1+x}$，则 $g(x)$ 的导函数为

$$g'(x)=-\sin x+\frac{1}{(1+x)^2},x\in\left(-1,\frac{\pi}{2}\right)$$

又因为 $-\sin x$ 在 $\left(-1,\dfrac{\pi}{2}\right)$ 递减，$\dfrac{1}{(1+x)^2}$ 在 $\left(-1,\dfrac{\pi}{2}\right)$ 递减，所以 $g'(x)$ 在 $\left(-1,\dfrac{\pi}{2}\right)$ 递减.

因为，

$$g'(0)=-\sin 0+\frac{1}{(1+0)^2}=1,$$

$$g'\left(\frac{\pi}{2}\right)=-\sin\frac{\pi}{2}+\frac{1}{\left(1+\frac{\pi}{2}\right)^2}=-\frac{\pi^2+4\pi}{(\pi+2)^2}<0,$$

所以 $g'(x)$ 在 $\left(-1,\dfrac{\pi}{2}\right)$ 存在唯一零点，设为 $x_0\in\left(-1,\dfrac{\pi}{2}\right)$ 且 $x_0>0$

x	$(-1,x_0)$	x_0	$\left(x_0,\frac{\pi}{2}\right)$
$g'(x)$	$+$	0	$-$
$g(x)$	↗	极大值	↘

故 $g(x)$ 在 $\left(-1,\dfrac{\pi}{2}\right)$ 存在唯一极大值点，即 $f'(x)$ 在 $\left(-1,\dfrac{\pi}{2}\right)$ 存在唯一极大值点.

（2）$f(x)$ 的定义域为 $(-1,+\infty)$.

① 当 $x\in(-1,0)$ 时，由（1）知，$f'(x)$ 在 $(-1,0)$ 单调递增，$f'(0)=0$，所以 $x\in(-1,0)$

时,$f'(x)<0$,故 $f(x)$ 在 $(-1,0)$ 单调递减,又 $f(0)=0$,从而 $x=0$ 是 $f(x)$ 在 $(-1,0]$ 的唯一零点.

② 当 $x\in\left(-1,\dfrac{\pi}{2}\right)$ 时,由(1)知,$f'(x)$ 在 $(0,x_0)$ 单调递增,在 $\left(x_0,\dfrac{\pi}{2}\right)$ 单调递减, 而 $f'(0)=0$,$f'\left(\dfrac{\pi}{2}\right)<0$,所以存在 $x_1\in\left(x_0,\dfrac{\pi}{2}\right)$,使得 $f'(x_1)=0$.

※**点睛:**隐零点的处理和函数性质的综合应用

(安徽　贾彬)

21. ☞**考点:**本题考查概率与数列综合题型

✔**答案:**见解析

✍**解析:**(1)随机变量 X 的所有可能取值为 $-1,0,1$. 因为

$$P(X=-1)=(1-\alpha)\beta,$$

$$P(X=0)=\alpha\beta+(1-\alpha)(1-\beta),$$

$$P(X=1)=\alpha(1-\beta).$$

所以 X 的分布列为

X	-1	0	1
P	$(1-\alpha)\beta$	$\alpha\beta+(1-\alpha)(1-\beta)$	$\alpha(1-\beta)$

(2)(i)由(1)可得

$$a=P(X=-1)=0.4,b=P(X=0)=0.5,c=P(X=1)=0.1.$$

所以

$$p_i=0.4p_{i-1}+0.5p_i+0.1p_{i+1},$$

即有

$$p_{i+1}-p_i=4(p_i-p_{i-1}),$$

而 $p_1-p_0\neq 0$,所以 $\{p_{i+1}-p_i\}\,(i=0,1,2,\cdots,7)$ 是公比为 4 的等比数列;

(ii)令 $p_1-p_0=t\neq 0$,由(i)可知 $p_{i+1}-p_i=t\cdot 4^i\,(i=0,1,2,\cdots,7)$.

则有

$$p_8-p_0=(p_8-p_7)+(p_7-p_6)+\cdots+(p_1-p_0)=\frac{t(1-4^8)}{1-4}=\frac{4^8-1}{3}t=1,$$

所以 $P_1=t=\dfrac{3}{4^8-1}$. 同理 $p_4-p_0=\dfrac{t(1-4^4)}{1-4}$,即

$$p_4=\frac{4^4-1}{3}\times\frac{3}{4^8-1}=\frac{1}{4^4+1}=\frac{1}{257}.$$

此时判定甲药有效即为甲药累计得分 4 分,乙药累计得分为 -4 分,此事件为小概率事件,因此此试验方案合理.

※**点睛:** 本大题考察包含有随机变量的分布列、数列递推关系证明等比数列、以及对应用问题的理解能力考察，对学生的要求较高，特别是如何理解题型背后的意义. 比如:如何理解 $p_i=ap_{i-1}+bp_i+cp_{i+1}$，其实得分为 i 可以分为三种情况，一种是此轮得 0 分,一种是此轮得 -1 分,一种是此轮得 1,并且各自有概率分布所致;还比如如何理解 $p_0=0,p_8=1$,一个是不可能事件,一个是必然事件.

(广东　周险峰)

22. ☞**考点:** 本题主要考查参数方程与直角坐标的互换、点到直线的距离.

✔**答案:** 见解析

✍**解析:**

(1)由曲线 C 的参数方程可知

$$x=\frac{1-t^2}{1+t^2}=-1+\frac{2}{1+t^2},$$

即

$$x+1=\frac{2}{1+t^2},$$

又 $\dfrac{y}{x+1}=2t$,代入上式得

$$x+1=\frac{2}{1+\dfrac{y^2}{4(x+1)^2}},$$

化简得

$$C:\ x^2+\frac{y^2}{4}=1(x\neq-1).$$

又由 l:$2\rho\cos\theta+\sqrt{3}\rho\sin\theta+11=0$ 可得其直角坐标方程 l:$2x+\sqrt{3}y+11=0$。

(2)设 C 上的点为 $(\cos\theta,2\sin\theta)$,故 C 上的点到 l 距离

$$\begin{aligned}d&=\frac{|2\cos\theta+2\sqrt{3}\sin\theta+11|}{\sqrt{4+3}}\\&=\frac{\left|4\sin\left(\theta+\dfrac{\pi}{6}\right)+11\right|}{\sqrt{7}},\end{aligned}$$

故

$$d_{\min}=\frac{|-4+11|}{\sqrt{7}}=\sqrt{7}.$$

※**点睛**：本题（1）中如何灵活消参是关键.

（山西　廖凯）

23. ☞**考点**：不等式选讲

✔**答案**：见解析

✍**解析**：（1）根据题意

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=\frac{bc+ac+ab}{abc}=bc+ac+ab,$$

由均值不等式知

$$bc+ac+ab\le a^2+b^2+c^2,$$

当 $a=b=c$ 时，“$=$”成立. 故原不等式成立.

（2）解法一：

$$\begin{aligned}(a+b)^3+(b+c)^3+(c+a)^3&=(a+b+c)^3+a^3+b^3+c^3-6abc\\&\geqslant 27abc+3abc-6abc=24.\end{aligned}$$

证毕.

解法二：

$$\begin{aligned}(a+b)^3+(b+c)^3+(c+a)^3&\ge 3\sqrt[3]{(a+b)^3(b+c)^3(c+a)^3}\\&=3(a+b)(b+c)(c+a)\\&\ge 3\cdot 2\sqrt{ab}\cdot 2\sqrt{bc}\cdot 2\sqrt{ac}\\&=24\end{aligned}$$

证毕.

※**点睛**：均值不等式，$\dfrac{a+b+c}{3}\ge\sqrt[3]{abc}$

（江西　陈江波）

排版：　浙江　陈晓