2019 年普通高等学校招生全国统一考试

(全国卷，2019 年 6 月 7 日)

考试形式: 闭卷　　考试时间: 120 分钟　　满分: 150 分

绝密★启用前　　解题人：Hoganbin　　微信公众号：八一考研数学竞赛

注意事项: 1. 答题前，考生先将自己的姓名、准考证号填写在答题卡上。用 2B 铅笔将试卷类型（B）填涂在答题卡相应的位置上。将条形码横贴在答题卡右上角“条形码粘贴处”。

2. 作答选择题时，选出每小题答案后，用 2B 铅笔在答题卡上对应题目选项的答案信息点涂黑；如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其他答案。答案不能答在试卷上。

3. 非选择题必须用黑色字迹的钢笔或签字笔作答，答案必须写在答题卡各题目指定区域内相应位置上；如需改动，先划掉原来的答案，然后再写上新答案；不准使用铅笔和涂改液。不按以上要求作答无效。

4. 考生必须保证答题卡的整洁。考生结束后，将试卷和答题卡一并交回。

对 2019 年全国卷导数压轴大题试题解析

离 19 年高考数学结束两天了，分析全国三套文理科，共 6 张试题的导数大题，难度均中等. 比如 2019 年卷 1 理科数学第 1 问是 17 年卷 2 的 21 题改编，是基于导函数有一个零点 $x=0$，由对数变指数，或增加参数，发现导函数有一个零点 $x=0$ 可得导函数在 $(-1,\dfrac{\pi}{2})$ 的零点，从而判断其单调性，研究三角函数零点问题，逐个区间分析法是常用思想. 下面请看试题详解：

2019· 全国新课标 I 卷理 20

已知函数 $f(x)=\sin x-\ln(x+1)$，$f'(x)$ 为 $f(x)$ 的导数，证明：

(1) $f'(x)$ 在区间 $(-1,\dfrac{\pi}{2})$ 存在唯一极大值点;

(2) $f(x)$ 有且仅有两个零点.

证明：

(1) 易知 $f'(x)=\cos x-\dfrac{1}{1+x}, f''(x)=-\sin x+\dfrac{1}{(1+x)^2}$，通过观察二阶导函数的单调性，可得 $f''(x)$ 在 $(-1,\dfrac{\pi}{2})\searrow$. 由于 $f''(0)>0, f''\left(\dfrac{\pi}{2}\right)<0$，即 $f''(x)$ 在 $(-1,\dfrac{\pi}{2})$ 有唯一零点为 x_0.

当 $x\in(-1,x_0)$ 时，$f''(x)>0, f'(x)\nearrow$；当 $x\in\left(x_0,\dfrac{\pi}{2}\right)$ 时，$f''(x)<0, f'(x)\searrow$.

因此 $f'(x)$ 在区间 $(-1,\dfrac{\pi}{2})$ 存在唯一极大值点;

(2) 注意到 $f(x)$ 定义域 $(-1,+\infty)$ 且 $f'(0)=0$.

①考虑 $x\in\left(-1,\dfrac{\pi}{2}\right)$，由 (1) 知 $f(x)$ 在 $(-1,0)\searrow$，在 $(0,x_0)\nearrow$，在 $(x_0,\dfrac{\pi}{2})$ 单减，因为对 $\forall x\in(-1,0)$，有 $f(x)<f(0)=0$，且 $f(x_0)>f(0)=0$，$f\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=1-\ln\left(1+\dfrac{\pi}{2}\right)>0$，即 $f(x)$ 在 $(-1,\dfrac{\pi}{2})$ 有唯一零点;

②考虑 $x\in\left[\dfrac{\pi}{2},\pi\right)$，由于 $f'(x)<0$，可知 $f(x)\searrow$，因为 $f\left(\dfrac{\pi}{2}\right)>0, f(\pi)<0$，即即 $f(x)$ 在 $x\in\left[\dfrac{\pi}{2},\pi\right)$ 有唯一零点;

③考虑 $x\in(\pi,+\infty)$，由于 $f(x)<1-\ln(1+\pi)<0$，即无零点.

即证 $f(x)$ 有且仅有两个零点.

2019· 全国新课标 I 卷文 20

已知函数 $f(x)=2\sin x-x\cos x-x$，$f'(x)$ 为 $f(x)$ 的导数，证明：

(1) $f'(x)$ 在区间 $(0,\pi)$ 存在唯一零点；

(2) 若 $x\in[0,\pi]$ 时，$f(x)\geq ax$，求 a 的取值范围.

证明：

(1) 当 $x \in (0,\pi)$ 时，有 $f'(x) = \cos x + x\sin x - 1, f''(x) = x\cos x$. 当 $x \in \left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$ 时，有 $f''(x) > 0$; 当 $x \in \left(\dfrac{\pi}{2}, \pi\right)$，有 $f''(x) < 0$. 即 $f'(x)_{极大值} = f'\left(\dfrac{\pi}{2}\right) > 0$，且 $f'(0) = 0, f'(\pi) = -2$，因此 $f'(x)$ 在区间 $(0,\pi)$ 存在唯一零点；

(2) 由 (1) 知 $f'(x)$ 在区间 $(0,\pi)$ 存在唯一零点，即存在 x_0 使得 $f'(x_0) = 0$，则 $f(x)$ 在 $[0, x_0] \nearrow$，在 $[x_0, \pi] \searrow$，又 $f(0) = 0, f(\pi) = 0$, 即 $f(x)$ 在 $[0,\pi]$ 有 $f(x) \geq 0$，要使 $f(x) \geq ax$ 则 $a \leq 0$.

2019· 全国新课标 II 卷理 20

已知函数 $f(x) = \ln x - \dfrac{x+1}{x-1}$.

(1) 讨论 $f(x)$ 的单调性，并证明 $f(x)$ 有且仅有两个零点；

(2) 设 x_0 是 $f(x)$ 的一个零点，证明曲线 $y = \ln x$ 在点 $A(x_0, \ln x_0)$ 处的切线也是曲线 $y = e^x$ 的切线.

证明：

(1) 这里 $x > 0$ 且 $x \neq 1$，有 $f'(x) = \dfrac{1}{x} + \dfrac{2}{(x-1)^2} > 0$，则 $f(x)$ 在定义域 $(0,1) \cup (1,+\infty)$ 上 $\nearrow$.

$$f\left(\frac{1}{e}\right) = \frac{2}{e-1} > 0, f\left(\frac{1}{e^2}\right) = \frac{e^2+1}{e^2-1} - 2 < 0, f\left(\sqrt{e}\right) = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{e}+1}{\sqrt{e}-1} < 0, f\left(e^2\right) = 2 - \frac{e^2+1}{e^2-1} > 0$$

由于 $\left(\dfrac{1}{e}, \dfrac{1}{e^2}\right) \in (0,1)$ 与 $\left(\sqrt{e}, e^2\right) \in (1,+\infty)$，且 $f\left(\dfrac{1}{e}\right) f\left(\dfrac{1}{e^2}\right) < 0, f\left(\sqrt{e}\right) f\left(e^2\right) < 0$，即 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 和 $(1,+\infty)$ 上各有一个零点，即证 $f(x)$ 有且仅有两个零点；

(2) 由题设易知 $f(x0 = 0)$，有 $\ln x_0 = \dfrac{x_0+1}{x_0-1} = 1 + \dfrac{2}{x_0-1}$. 因曲线 $y = \ln x, y' = \dfrac{1}{x}$，即在 $A(x_0, \ln x_0)$ 处切线方程为：$y - \ln x_0 = \dfrac{1}{x_0}(x - x_0) \Rightarrow y = \dfrac{1}{x_0}x + \dfrac{2}{x_0-1}$.

设该切线与 $y=e^{x}$ 切于 $B\,(m,e^{m})$，即有 $e^{m}=\dfrac{1}{x_0}$ 且 $e^{m}=\dfrac{1}{x_0}x+\dfrac{2}{x_0-1}$，则 $\dfrac{1}{x_0}=\dfrac{1}{x_0}m+\dfrac{2}{x_0-1}\Rightarrow m=-\ln x_0$.

因此曲线 $y=\ln x$ 在点 $A(x_0,\ln x_0)$ 处的切线也是曲线 $y=e^{x}$ 的切线且切点为 $B\left(-\ln x_0,\dfrac{1}{x_0}\right)$.

2019· 全国新课标 II 卷文 21

已知函数 $f(x)=(x-1)\ln x-x-1$.

(1) $f(x)$ 存在唯一极值点；

(2) $f(x)=0$ 有且仅有两个实根，且两个实根互为倒数.

证明：

(1) 易知 $f'(x)=\dfrac{x-1}{x}+\ln x-1=\ln x-\dfrac{1}{x}, x\in(0,+\infty)$，即 $f'(x)>0\nearrow$，又 $f'(1)<0, f'(2)>0$，即存在唯一 $x_0\in(1,2)$ 使得 $f'(x_0)=0$.

当 $x<x_0$ 时，$f'(x_0)<0\searrow$; 当 $x>x_0$ 时，$f'(x_0)\nearrow$.

因此 $f(x)$ 存在唯一极值点.

(2) 由于 $f(x_0)<f(1)=-2, f\left(e^{2}\right)=e^{2}-3>0$，即 $f(x)$ 在 $(x_0,+\infty)$ 有唯一零点 t，则 $f(t)=0$.

考虑 $t>x_0>1$，得 $\dfrac{1}{t}<1<x_0$，有 $f\left(\dfrac{1}{t}\right)=\dfrac{1}{t}f(t)=0$，即 $f(x)$ 在 $(0,x_0)$ 有唯一零点 $\dfrac{1}{t}$.

故 $f(x)=0$ 有且仅有两个实根，且两个实根互为倒数.

2019· 全国新课标 III 卷理 20

已知函数 $f(x)=2x^{3}-ax^{2}+b$.

(1) 讨论 $f(x)$ 的单调性；

(2) 是否存在 a,b，使得 $f(x)$ 在区间 $[0,1]$ 的最小值为 -1，最大值为 1？若存在，求出 a,b 的所有值，若不存在，说明理由.

证明：

(1) 易知 $f'(x)=6x\left(x-\dfrac{a}{3}\right)\Rightarrow f'(x)=0\Rightarrow x=0$或$\dfrac{a}{3}$，对 a 分类讨论：

①当 $a=0$ 时，有 $f'(x)>0$，即 $f(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上 $\nearrow$;

②当 $a>0$ 时，有 $f(x)$ 在 $(-\infty,0)\cup\left(\dfrac{a}{3},+\infty\right)\nearrow$，在 $\left(0,\dfrac{a}{3}\right)\searrow$；

③当 $a<0$ 时，有 $f(x)$ 在 $\left(-\infty,\dfrac{a}{3}\right)\cup(0,+\infty)\nearrow$，在 $\left(\dfrac{a}{3},0\right)\searrow$；

(2) 由上问易知

①当 $a\le 0$ 时，有 $f(x)$ 在 $[0,1]\nearrow$，则

$$\begin{cases} f(x)_{\max}=f(1)=2-a+b=1 \\ f(x)_{\min}=f(0)=b=-1 \end{cases}\Rightarrow\begin{cases} a=0 \\ b=-1 \end{cases}\ (\text{符合})$$

②当 $a\ge 3$ 时，有 $f(x)$ 在 $[0,1]\searrow$，则

$$\begin{cases} f(x)_{\max}=f(0)=b=1 \\ f(x)_{\min}=f(1)=2-a+b=-1 \end{cases}\Rightarrow\begin{cases} a=4 \\ b=1 \end{cases}\ (\text{符合})$$

③当 $a\in(0,3)$ 时，有 $f(x)$ 在 $[0,\dfrac{a}{3}]\searrow$，在 $[\dfrac{a}{3},1]\nearrow$，则

$$\begin{cases} f(x)_{\max}=\begin{cases} f(1)=2-a+b=1 \\ f(0)=b=1 \end{cases} \\ f(x)_{\min}=f\left(\dfrac{a}{3}\right)=\dfrac{2a^3}{27}-\dfrac{a^3}{9}+b=-1 \end{cases}\Rightarrow\begin{cases} \begin{cases} a=3\sqrt[3]{2} \\ b=1 \end{cases} \\ \begin{cases} a=\pm3\sqrt{3}\text{或}a=0 \\ b=\dfrac{a^3}{27}-1 \end{cases} \end{cases}\ (\text{均与}a\in(0,3)\text{矛盾, 不符合})$$

综上当 $\begin{cases} a=0 \\ b=-1 \end{cases}$ 与 $\begin{cases} a=4 \\ b=1 \end{cases}$ 时，$f(x)$ 在区间 $[0,1]$ 的最小值为 -1，最大值为 1.

2019· 全国新课标 III 卷文 20

已知函数 $f(x)=2x^3-ax^2+2$.

(1) 讨论 $f(x)$ 的单调性;

(2) 当 $0<a<3$ 时，记 $f(x)$ 在区间 $[0,1]$ 的最大值为 M，最小值为 m，求 $M-m$ 的取值范围.

证明:

(1) 易知 $f'(x)=6x\left(x-\frac{a}{3}\right)\Rightarrow f'(x)=0\Rightarrow x=0$或$\frac{a}{3}$，对 a 分类讨论:

①当 $a=0$ 时，有 $f'(x)>0$，即 $f(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上 $\nearrow$;

②当 $a>0$ 时，有 $f(x)$ 在 $(-\infty,0)\cup\left(\frac{a}{3},+\infty\right)\nearrow$，在 $\left(0,\frac{a}{3}\right)\searrow$;

③当 $a<0$ 时，有 $f(x)$ 在 $\left(-\infty,\frac{a}{3}\right)\cup(0,+\infty)\nearrow$，在 $\left(\frac{a}{3},0\right)\searrow$;

(2) 当 $a\in(0,3)$ 时，有 $f(x)$ 在 $[0,\frac{a}{3}]\searrow$，在 $[\frac{a}{3},1]\nearrow$，则

$$\begin{cases} f(x)_{\max}=\begin{cases} f(1)=4-a \\ f(0)=2 \end{cases} \\ f(x)_{\min}=f\left(\frac{a}{3}\right)=-\frac{a^3}{27}+2 \end{cases}\Rightarrow\begin{cases} M=\begin{cases} 4-a,a\in(0,2) \\ 2,a\in[2,3) \end{cases} \\ m=-\frac{a^3}{27}+2 \end{cases}\Rightarrow M-m=\begin{cases} 2-a+\frac{a^3}{27},a\in(0,2) \\ \frac{a^3}{27},a\in[2,3) \end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases} \text{当}a\in(0,2)\text{，可知}2-a+\frac{a^3}{27}\searrow\text{，则}M-m\in\left(\frac{8}{27},2\right) \\ \text{当}a\in[2,3)\text{，可知}\frac{a^3}{27}\nearrow\text{，则}M-m\in\left[\frac{8}{27},1\right). \end{cases}\Rightarrow M-m\in\left[\frac{8}{27},2\right).$$