第一届八一赛数学组 A 类试题解析

1. (本题 15 分) 从点 $P(1,\ 1,\ \dfrac{\sqrt{2}}{2})$ 处引椭球面 $C: 2x^2+3y^2+4z^2=1$ 的切线，切点的轨迹在平面 yOz 上的投影为 Γ，试证明 Γ 为椭圆，并求 Γ 的中心，主方向与面积.

✎ **解:** 椭球面 C 上任意一点 $Q(x_0,\ y_0,\ z_0)$ 的法向量为 $(4x_0,\ 6y_0,\ 8z_0)$，从而 Q 处的切线方程为:

$$(x-x_0)\cdot 4x_0+(y-y_0)\cdot 6y_0+(z-z_0)\cdot 8z_0=0$$

即 $2x_0x+3y_0y+4z_0z=1$

若该切线经过 P 点，则有 $2x_0+3y_0+2\sqrt{2}z_0=1$，也就是说从 P 点引出的切线与椭球面 C 的切点 (x,y,z) 必然满足：$2x+3y+2\sqrt{2}z=1$. 于是切点的轨迹方程为:

$$\begin{cases} 2x+3y+2\sqrt{2}z=1 \\ 2x^2+3y^3+4z^2=1 \end{cases}$$

消去 x 得到切点轨迹在平面 yOz 上的投影方程

$$\Gamma: 15y^2+16z^2+12\sqrt{2}yz-6y-4\sqrt{2}z-1=0$$

Γ 为二次曲线，令 $a_{11}=15,\ a_{22}=16,\ a_{12}=6\sqrt{2},\ b_1=-3,\ b_2=-2\sqrt{2},\ c=-1$,

$$A_0=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 15 & 6\sqrt{2} \\ 6\sqrt{2} & 16 \end{pmatrix}, A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{12} & a_{22} & b_2 \\ b_1 & b_2 & c \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 15 & 6\sqrt{2} & -3 \\ 6\sqrt{2} & 16 & -2\sqrt{2} \\ -3 & -2\sqrt{2} & -1 \end{pmatrix}$$

得到 Γ 的不变量 $I_1=a_{11}+a_{22}=31,\ I_2=|A_0|=168,\ I_3=|A|=-288$，于是 $I_2>0,\ I_1I_3<0$，所以 Γ 为椭圆.

由于 Γ 的中心 $O'(0,\ y,\ z)$ 满足:

$$\begin{cases} a_{11}y+a_{12}z+b_1=15y+6\sqrt{2}z-3=0 \\ a_{12}y+a_{22}z+b_2=6\sqrt{2}y+16z-2\sqrt{2}=0 \end{cases}$$

解得 $y=\dfrac{1}{7},\ z=\dfrac{\sqrt{2}}{14}$，所以 Γ 的中心为 $O'\left(0,\ \dfrac{1}{7},\ \dfrac{\sqrt{2}}{14}\right)$.

Γ 的特征方程为 $|\lambda E-A_0|=\lambda^2-31\lambda+168$，特征根 $\lambda_1=7,\lambda_2=24$.

特征根λ_1对应的单位特征向量$u_1=\left(\dfrac{3\sqrt{17}}{17},\ -\dfrac{2\sqrt{34}}{17}\right)$

特征根λ_2对应的单位特征向量$u_2=\left(\dfrac{2\sqrt{34}}{17},\ \dfrac{3\sqrt{17}}{17}\right)$

所以椭圆 Γ 的主方向为

$$e_1'=\left(0,\frac{3\sqrt{17}}{17},-\frac{2\sqrt{34}}{17}\right), e_2'=\left(0,\frac{2\sqrt{34}}{17},\frac{3\sqrt{17}}{17}\right)$$

在直角坐标系下 $[O';\ e_1',\ e_2']$，Γ 的标准方程为:

$$\begin{cases} \lambda_1y'^2+\lambda_2z'^2+\dfrac{I_3}{\lambda_1\lambda_2}=0 \\ x'=0 \end{cases},\quad 即 \begin{cases} \dfrac{y'^2}{\frac{12}{49}}+\dfrac{z'^2}{\frac{1}{14}}=1 \\ x'=0 \end{cases}$$

所以椭圆 Γ 的面积 $S=\pi\cdot\sqrt{\dfrac{12}{49}}\cdot\sqrt{\dfrac{1}{14}}=\dfrac{\sqrt{42}}{49}\pi$. □

2. (本题 15 分) 证明：对于 n 阶实方阵 A,B，若 $E-A^TA$ 与 $E-B^TB$ 是半正定矩阵, 则

$$\left|E-A^TB\right|^2 \geqslant \left|E-A^TA\right|\left|E-B^TB\right|$$

☞ **证明:** 由熟知的结论

$$|E-A^TB|=|E-BA^T|=|E-AB^T|=|E-B^TA|$$

构造矩阵

$$M=\begin{pmatrix} E & -A^T \\ -B & E \end{pmatrix}, N=\begin{pmatrix} E & B^T \\ A & E \end{pmatrix}$$

则

$$\begin{aligned} |M||N| &= |E-BA^T||E-AB^T|=|E-A^TB|^2 \\ &= \begin{pmatrix} E & -A^T \\ -B & E \end{pmatrix}\begin{pmatrix} E & B^T \\ A & E \end{pmatrix}=\begin{vmatrix} E-A^TA & B^T-A^T \\ A-B & E-BB^T \end{vmatrix} \end{aligned}$$

下面用摄动法证明

$$\begin{vmatrix} E-A^TA & B^T-A^T \\ A-B & E-BB^T \end{vmatrix} \geqslant \left|E-A^TA\right|\left|E-B^TB\right|$$

设

$$F(\lambda)=\begin{vmatrix} (1+\lambda)E-A^TA & B^T-A^T \\ A-B & (1+\lambda)E-BB^T \end{vmatrix}$$

由 $E-A^TA$ 与 $E-B^TB$ 半正定知，对任意的 $\lambda>0$，有 $(1+\lambda)E-A^TA$，$(1+\lambda)E-BB^T$ 均正定，故可逆，故对 $F(\lambda)$ 做初等变换得：

$$\begin{aligned} F(\lambda) &= \begin{vmatrix} (1+\lambda)E-A^TA & B^T-A^T \\ A-B & (1+\lambda)E-BB^T \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} (1+\lambda)E-A^TA & B^T-A^T \\ 0 & (1+\lambda)E-BB^T-(A-B)((1+\lambda)E-A^TA)^{-1}(B^T-A^T) \end{vmatrix} \\ &= |(1+\lambda)E-A^TA||(1+\lambda)E-BB^T+(B-A)((1+\lambda)E-A^TA)^{-1}(B^T-A^T)| \end{aligned}$$

由于 $(1+\lambda)E-BB^T$ 正定且 $(B-A)\left((1+\lambda)E-A^TA\right)^{-1}(B^T-A^T)$ 半正定，故

$$|(1+\lambda)E-BB^T+(B-A)((1+\lambda)E-A^TA)^{-1}(B^T-A^T)| \geqslant |(1+\lambda)E-BB^T| \geqslant |E-BB^T|$$

所以 $F(\lambda)\geqslant |E-A^TA||E-BB^T|=|E-A^TA||E-B^TB|$. 对任意的 $\lambda>0$ 成立, 由于 $F(\lambda)$ 是关于 λ 的实系数多项式，故令 λ 趋于 0，则有

$$\begin{vmatrix} E-A^TA & B^T-A^T \\ A-B & E-BB^T \end{vmatrix} \geqslant \left|E-A^TA\right|\left|E-B^TB\right|$$

即证. □

3. (本题 20 分) 设 S 为 R_n 的一个非空闭凸集，A 为 $\mathbb{R}$ 上 $n\times n$ 的矩阵.

(1) 证明：对 $\forall y\notin S$，存在唯一的一个 $\overline{x}$，使得 $\|y-\overline{x}\|=\inf\limits_{x\in S}\|y-x\|$

(2) 证明：对于 $y \notin S$，存在非零向量 p 以及 $\varepsilon > 0$，使得对 $\forall x \in S$，有 $p^T y \geqslant \varepsilon + p^T x$

(3) 证明：$Ax < 0$ 有解的充分必要条件是不存在非零向量 $p \geq 0$ 使得 $A^T p = 0$.

☞ **证明:** 本题实际上是一个以凸优化为背景的线性代数题目，本体的最后一问原型即为 Gordan 定理，在优化理论中有很高的地位，相对来说，前两问是有着一定的引导作用来进行题目完整的证明，在问题解答的过程中，不知不觉已经将凸优化中的闭集情况下的凸集分离定理证明出来了，这也是数学分析和线性代数结合的一个典型例子.

(1) 令 $\inf\limits_{x\in S} \|y-x\| = r > 0$，由下确界的定义可知，存在序列 $\left\{x^{(k)}\right\}, x^{(k)} \in S$，使得 $\left\|y - x^{(k)}\right\| \to r$. 首先

$$\begin{aligned} \left\|x^{(k)} - x^{(m)}\right\|^2 &= 2\left\|x^{(k)} - y\right\|^2 + 2\left\|x^{(m)} - y\right\|^2 - 4\left\|\frac{x^{(k)} + x^{(m)}}{2} - y\right\|^2 \\ &\leqslant 2\left\|x^{(k)} - y\right\|^2 + 2\left\|x^{(m)} - y\right\|^2 - 4r^2 \end{aligned}$$

因此 k 和 m 无穷大的时候 $\left\|x^{(k)} - x^{(m)}\right\|$ 趋近于 0，$\left\{x^{(k)}\right\}$ 为柯西列，极限 $\overline{x}$ 存在且 $\overline{x} \in S$.

唯一性：设 $\hat{x} \in S$ 且 $\|y - \overline{x}\| = \|y - \hat{x}\| = r$. 由于 $(\overline{x} + \hat{x})/2 \in S$，则由 Schwartz 不等式，我们有

$$\|y - (\overline{x} + \hat{x})/2\| \leq \frac{1}{2}\|y - \overline{x}\| + \frac{1}{2}\|y - \hat{x}\| = r$$

又 $\left\|y - \dfrac{\overline{x} + \hat{x}}{2}\right\| = \dfrac{1}{2}\|y - \overline{x}\| + \dfrac{1}{2}\|y - \hat{x}\|$，因此 $y - \overline{x} = \lambda(y - \hat{x})$，表明 $\|y - \overline{x}\| = |\lambda|\|y - \hat{x}\|$ 因此 $|\lambda| = 1$，如果 $\lambda = -1$，则显然 $y \in S$，矛盾，所以 $\lambda = 1$，又 $y - \overline{x} = \lambda(y - \hat{x})$，问题得证.

(2) S 为闭凸集，$y \notin S$，由上一问可知存在 $\overline{x} \in S$，使得 $\|y - \overline{x}\| = \inf\limits_{x\in S} \|y - x\|$

令 $p = y - \overline{x}, \varepsilon = p^T(y - \overline{x})$，下面证明这样的 p 和 ε 是符合要求的.

$$p^{\mathrm{T}}(y - x) = p^{\mathrm{T}}(y - \overline{x} + \overline{x} - x) = p^{\mathrm{T}}(y - \overline{x}) + p^{\mathrm{T}}(\overline{x} - x) = \varepsilon + (y - \overline{x})^{\mathrm{T}}(\overline{x} - x)$$

又

$$\begin{aligned} \|y - \overline{x}\|^2 &\leqslant \|y - [\lambda x + (1-\lambda)\overline{x}]\|^2 = \|(y - \overline{x}) + \lambda(\overline{x} - x)\|^2 \\ &= \|y - \overline{x}\|^2 + \lambda^2\|\overline{x} - x\|^2 + 2\lambda(y - \overline{x})^{\mathrm{T}}(\overline{x} - x) \end{aligned}$$

因此 $(y - \overline{x})^T(x - x) + \dfrac{\lambda}{2}\|\overline{x} - x\|^2 \geqslant 0$. 令 $\lambda \to 0$，有 $(y - \overline{x})^T(\overline{x} - x) \geqslant 0$，因此 $p^{\mathrm{T}}(y - x) \geqslant \varepsilon$ 得证.

(3) **必要性**：若 $Ax < 0$ 有解，则存在 $\overline{x}$ 使得 $A\overline{x} < 0$. 若存在非零向量 $p \geq 0$ 使得 $A^{\mathrm{T}}p = 0$，即 $y^p A = 0$. 则 $p^\top A\overline{x} = 0$，因为 $A\overline{x} < 0$，所以 p 的每个分量不可能全部为非负，因此矛盾，必要性得证.

充分性：我们考虑充分性的等价命题: 若 $Ax < 0$ 无解，则存在非零向量 $p \geq 0$ 使得 $A^T p = 0$. 设 $S_1 = \{z|z = Ax, x \in \mathbb{R}^n\}$ 和 $S_2 = \{z|z < 0\}$，显然这两个集合均为凸集，知 $Ax < 0$ 无解，因此 $S_1 \cap S_2 = \varnothing$. 令 $S = S_2 - S_1 = \left\{z|z = x^{(2)} - x^{(1)}, x^{(1)} \in S_1, x^{(2)} \in S_2\right\}$，则 S 为非空闭凸集，而且 $0 \notin S$. 因此若想利用第 (2) 问的结论我们需要进行一些极限逼近操作，我们考虑 S 的闭包 clS，这显然是一个闭集.

i. 如果 $0 \notin clS$，则可以对 clS 利用第二问的结论，对于所有的 $z \in S$ $S \in clS$)，存在非零向量 p，使得 $p^{\mathrm{T}}(0-z) = -p^{\mathrm{T}}z \geqslant \varepsilon$. 因此 $p^{\mathrm{T}}z \leqslant 0$，再者 $z = x^{(2)} - x^{(1)}$, 由 $x^{(2)}$ $x^{(1)}$ 的定义，我们有 $p^T Ax \geqslant p^T y$，其中 $x \in R$ y 0. 当 $x = 0$ 时，我们有 $p^T y \leq 0$，因为 y 0 (y 可以取小于零的任意值)，所以 $p \geq 0$
再令 $p^T Ax \geqslant p^T y$ 中的 y 趋近于 0,我们有 $p^T Ax \geqslant 0$,令 $x = -A^T p$,我们有 $-\|A^T p\| \geqslant 0$，因此 $A^T p = 0$，所以存在 $p \geq 0$ 使得 $A^T p = 0$.

ii. 如果 $0 \in clS$，由于由于 $0 \notin S$，则 $0 \in \partial S$ (意为 S 的边界点集合)，显然存在一个序列 $\left\{y^{(k)}\right\} \notin clS$，使得 $y^{(k)} \to 0$. 每一个 $y^{(k)}$ 则可以对 clS 利用第 (2) 问的结论，$\forall z \in S$（应当注意到 $S \in clS$），存在非零向量 $p^{(k)}$，使得 $p^{(k)T}(y^{(k)} - z) \geq \varepsilon \geq 0$，然后将 $p^{(k)}$ 单位化并记为 $p_*^{(k)}$ ，则 $\left\{p_*^{(k)}\right\}$ 有界，因此必存在收敛子列 $\left\{p_*^{(k_j)}\right\}$，记此收敛子列的极限为 p
令 $p_*^{(k_j)T}(y^{(k)} - z) \geq \varepsilon \geq 0$ 中的 $k_j \to \infty$，我们有 $p^T(0-z) \geq 0$，此时模仿 i 中的操作 $p^{\mathrm{T}}z \leqslant 0$,再者 $z = x^{(2)} - x^{(1)}$,由 $x^{(2)}$ $x^{(1)}$ 的定义,我们有 $p^T Ax \geqslant p^T y$,其中 $x \in R$ $y < 0$. 当 $x = 0$ 时，我们有 $p^T y \leq 0$，因为 $y < 0$ y ＜ 0（y 可以取小于零的任意值），所以 $p \geq 0$.
再令 $p^T Ax \geqslant p^T y$ 中的 y 趋近于 0,我们有 $p^T Ax \geqslant 0$,令 $x = -A^T p$,我们有 $-\|A^T p\| \geqslant 0$，因此 $A^T p = 0$，所以存在 $p \geq 0$ 使得 $A^T p = 0$。

至此证明完毕.

□

4. (本题 15 分) 已知复系数多项式

$$f(x) = x^k + c_1 x^{k-1} + c_2 x^{k-2} + \cdots + c_{k-1}x + c_k$$

证明：对多项式 $f(x)$ 的任意一根 z，都有

$$|z| \leq 2 \cdot \max\left\{|c_1|, \sqrt{|c_2|}, \sqrt[3]{|c_3|}, \cdots, \sqrt[k]{|c_k|}\right\}$$

☞ **证明:** 引理：令复数 z_1,z_2,$\cdots$,z_k 是下述复系数多项式的根，设 $r_{\max} = \max\{|z_1|, |z_2|, \cdots, |z_k|\}$;

$$f(x) = x^k + c_1 x^{k-1} + c_2 x^{k-2} + \cdots + c_{k-1}x + c_k$$

① 对于满足 $r^k > |c_1| r^{k-1} + |c_2| r^{k-2} + \cdots + |c_{k-1}| r + |c_k|$ 的任意正实数 r，都有 $r > r_{\max}$;

② 对于满足 $r > r_{\max}$ 的正实数 r，不一定有 $r^k > |c_1| r^{k-1} + |c_2| r^{k-2} + \cdots + |c_{k-1}| r + |c_k|$.

首先先证明引理：定义两个复系数多项式整函数 $f(z) = z^k + c_1 z^{k-1} + c_2 z^{k-2} + \cdots + c_{k-1}z + c_k$ 与 $g(z) = z^k$，于是有

$$h(z) = c_1 z^{k-1} + c_2 z^{k-2} + \cdots + c_{k-1}z + c_k = f(z) - g(z) \in \mathrm{C}$$

记正实数 $r = |z|$ 则有 $r^k = |g(z)|$，结合引理中的条件知，若 r 满足 $r^k > |c_1| r^{k-1} + |c_2| r^{k-2} + \cdots + |c_{k-1}| r + |c_k|$，则有：

$$|h(z)| \leq |c_1| r^{k-1} + |c_2| r^{k-2} + \cdots + |c_{k-1}| r + |c_k| < r^k = |g(z)|$$

整函数 $g(z) = z^k$ 与 $f(z) = g(z) + h(z)$ 在闭圆盘 $|z| \leq r$ 内解析，根据 Rouche 定理，

整函数 $g(z)=z^k$ 与 $f(z)=g(z)+h(z)$ 在开圆盘 $|z|<r$ 内有相同数量的零点。

整函数 $g(z)=z^k$ 在闭圆盘 $|z|\le r$ 内必有k 个零点；

故整函数 $f(z)=g(z)+h(z)$ 在闭圆盘 $|z|\le r$ 内也有 k 个零点。

于是就表明了方程 $f(z)=0$ 根的模长的最大值 $r_{\max}<r$，引理得证。

设 $r_1=2\cdot\max\left\{|c_1|,\sqrt{|c_2|},\sqrt[3]{|c_3|},\cdots,\sqrt[k]{|c_k|}\right\}$，于是

$$\begin{aligned}r_1&=2\cdot\max\left\{|c_1|,\sqrt{|c_2|},\sqrt[3]{|c_3|},\cdots,\sqrt[k]{|c_k|}\right\}\\&=2\cdot\max_{1\le j\le k}\sqrt[j]{|c_j|}=\max_{1\le j\le k}\sqrt[j]{2^j\,|c_j|}\end{aligned}$$

对所有正实数$r>r_1$（即 $r>\max\limits_{1\le j\le k}\sqrt[j]{2^j\,|c_j|}$）可推出 $r^j>2^j\,|c_j|\Rightarrow\dfrac{1}{2^j}>\dfrac{|c_j|}{r^j}$，因此：

$$1=\sum_{j=1}^{+\infty}\frac{1}{2^j}>\sum_{j=1}^{k}\frac{1}{2^j}>\sum_{j=1}^{k}\frac{|c_j|}{r^j}$$

那么，可得出 $r^k>|c_1|r^{k-1}+|c_2|r^{k-2}+\cdots+|c_{k-1}|r+|c_k|$，根据上述引理，必有 $r>r_{\max}$，

又根据满足 $r>r_1$ 条件的正实数 r 的任意性，故有 $r_1\ge r_{\max}$，命题得证。

（蓝色部分为较难思考到的部分）

□

5. 设 $f(x)\in C^1[0,+\infty)$, 且 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$, 已知积分 $I=\displaystyle\int_0^{+\infty}t^{a+1}f'(t)\,\mathrm{d}t$ 对某个常数 $a>-1$ 收敛, 证明: 积分 $\displaystyle\int_0^{+\infty}t^a f(t)\,\mathrm{d}t$ 收敛, 并且等于 $-\dfrac{I}{a+1}$.

☞ **证明:** 令 $F(x)=\int_0^x t^a f(t)\,\mathrm{d}t, G(x)=\int_0^x t^{a+1}f'(t)\,\mathrm{d}t$, 首先有

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\big(t^{a+1}f(t)\big)=(a+1)t^a f(t)+t^{a+1}f'(t),\tag{1}$$

注意到 $F'(x)=x^a f(x)$, 将 (1) 式在 $[0,x]$ 上积分可得

$$x^{a+1}f(x)=(a+1)F(x)+G(x)=xF'(x)\tag{2}$$

由此我们得到

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\big(x^{-a-1}F(x)\big)&=-(a+1)x^{-a-2}F(x)+x^{-a-1}F'(x)\\&=x^{-a-2}\big(-(a+1)F(x)+xF'(x)\big)=-x^{-a-2}G(x).\end{aligned}$$

又当 $x\to+\infty$ 时, $G(x)\to I$, 所以

$$G(x)=I-\int_x^{+\infty}tf'(t)\,\mathrm{d}t=I+o(1)\quad(x\to+\infty).\tag{3}$$

那么由此得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\big(t^{-a-1}F(t)\big)=It^{-a-2}+o(t^{-a-2})\quad(t\to+\infty).\tag{4}$$

由 (2) 知 $(a+1)x^{-a-1}F(x)+x^{-a-1}G(x)=f(x)$, 令 $x\to+\infty$, 由题意知 $f(x)\to 0, G(x)\to I$, 所以

$$\lim_{x\to+\infty}\left(x^{-a-1}F(x)\right)=0.$$

将 (4) 在 $[x,+\infty)$ 上积分可得

$$\begin{aligned}-\frac{F(x)}{x^{a+1}}=\left(t^{-a-1}F(t)\right)\Big|_x^{+\infty}&=\frac{I}{(a+1)x^{a+1}}+\int_x^{+\infty}o(t^{-a-2})\,\mathrm{d}t\\&=\frac{I}{(a+1)x^{a+1}}+o(x^{-a-1})\quad(x\to+\infty).\end{aligned}$$

即 $F(x)=-\dfrac{I}{a+1}+o(1), x\to+\infty$, 这就是说 $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}F(x)=\int_0^{+\infty}t^a f(t)\,\mathrm{d}t=-\frac{I}{a+1}$. □

6. (本题 20 分) 设 b_n 表示正整数 n 的最大素因子，以及单调递增的正实数列 $\{a_n\}$. 满足无穷级数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{na_n}$ 收敛, 问无穷级数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{na_{b_n}}$ 是否也是收敛的? 并证明你的结论.

☞ **证明:** 设 m 为正整数，定义

$$G(m)=\sum_{p(n)\le n}\frac{1}{n}=\sum_{p\le m}\left(1+\frac{1}{p}+\frac{1}{p^2}+\cdots\right)=\prod_{p\le m}\left(1-\frac{1}{p}\right)^{-1}\le k\ln(m+1)$$

其中 k 为常数. 故

$$\begin{aligned}\prod_{p\le N}\frac{1}{nf(p(n))}&=\sum_{m=1}^{N}\frac{G(m)-G(m-1)}{f(m)}\\&\le\sum_{m=1}^{N-1}k\ln(m+1)\left(\frac{1}{f(m)}-\frac{1}{f(m+1)}\right)+\frac{k\ln(N+1)}{f(N)}\\&=\sum_{m=1}^{N}\frac{k\ln(m+1)-k\ln m}{f(m)}<\sum_{m=1}^{N}\frac{k}{mf(m)}\end{aligned}$$

故无穷级数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{na_{b_n}}$ 是收敛. □