

第一届“八一杯”大学生网络数学竞赛试题

数学组 B 类，满分：100 分，考试时间：150 分钟

比赛时间：2019 年 8 月 1 日上午 9 点至 2019 年 8 月 1 号晚上 8 点



竞赛官方微信公众号：八一考研数学竞赛

题号	一	二	三	四	五	六	总分
满分	15	15	20	15	15	20	100
得分							

- 注意事项：**
1. 试题解答请在规定时间内发送到邮箱 hoganbin1995@outlook.com，逾期将取消参赛资格，严格遵守比赛纪律，勿翻阅其他参考资料或在各数学群内讨论此份试题；
 2. 要求解答字迹清楚，推荐采用 PDF 格式提交；
 3. 文件命名：参赛科目 + 昵称 (或姓名) + 学校。

1. (本题 15 分) P 为直线 $l: x - 2 = \frac{y - 3}{2} = \frac{z - 1}{3}$ 上一点，从 P 点引椭球面 $C: 2x^2 + 3y^2 + 4z^2 = 1$ 的切线，切点构成的曲线 Γ 与 l 平行，求 P 点的坐标。

毛毛 供题

2. (本题 15 分) 设 A 是 $m \times n$ ， $A^H A$ 的 n 个特征值为 $\sigma_1^2 \geq \sigma_2^2 \geq \dots \geq \sigma_n^2$. 证明：

$$\sigma_k^2 = \max_{C_k} \min_{x \in C_k, x \neq 0} \frac{x^H A^H A x}{x^H x}$$

其中 C_k 为 n 维线性空间 C^n 的任意 k 维子空间， A^H 为 A 的共轭转置矩阵。

武汉大学. 王鹏辉 供题

3. (本题 20 分) 设矩阵 $A = \begin{pmatrix} Q_1 & Q_2 \\ Q_3 & Q_4 \end{pmatrix} \in M_{2n \times 2n}(\mathbb{R})$ 满足

$$A^T A = I_{2n}, A^T \begin{pmatrix} 0 & I_n \\ -I_n & 0 \end{pmatrix} A = \begin{pmatrix} 0 & I_n \\ -I_n & 0 \end{pmatrix}$$

其中 $Q_1, Q_2, Q_3, Q_4 \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$. 证明: $B = Q_1 + iQ_2$ 是酉矩阵 (即 $\overline{B}^T B = I_n$)

武汉大学. 尚镇冰 供题

4. (本题 15 分) 设 $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n e^{-n} \cos nx$, 求证

(1) $\max_{0 \leq x \leq 2\pi} |f(x)| \geq \frac{2}{e}$;

(2) $f'(x)$ 存在;

(3) $\max_{0 \leq x \leq 2\pi} |f'(x)| \geq \frac{2}{\pi e}$

高等数学贴吧小吧主.9899 供题

5. (本题 15 分) 已知正项级数 $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{a_k}$ 收敛, 常数 $p > 0$, 证明: 级数 $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^{p+1}}{a_1 + 2^p a_2 + \cdots + k^p a_k}$ 也收敛.

中国科学技术大学. 向禹 供题

6. (本题 20 分)

(1) 若 $r \in (-1, 1)$, 对 $\forall \theta \in \mathbb{R}$, 试证:

$$\frac{1-r^2}{1-2r \cos \theta + r^2} = 1 + 2 \sum_{k=1}^{+\infty} r^k \cos k\theta$$

(2) 设 $x \in \mathbb{R}$ 使得 $f(x^+) = f(x^-)$ 存在, 试证:

$$\lim_{r \rightarrow 1^-} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{1-r^2}{1-2r \cos(x-t) + r^2} f(t) dt = \frac{1}{2} [f(x^+) + f(x^-)]$$

若 f 在 \mathbb{R} 上连续, 试证此收敛关于 $x \in \mathbb{R}$ 是一致的.

微信公众号管理员. 八一 供题