专业:________ 座位号:________ 考场号:________ 所在院校:________ 准考证号:________ 姓名:________

密封线 答题时不要超过此线

# 第十一届全国大学生数学竞赛初赛试卷
## (数学类A卷, 2019年10月)

考试形式: 闭卷　考试时间: 150 分钟　满分: 100 分

| 题号 | 一 | 二 | 三 | 四 | 五 | 六 | 总分 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 满分 | 15 | 15 | 15 | 20 | 15 | 20 | 100 |
| 得分 | | | | | | | |

注意: 1. 所有答题都须写在此试卷纸密封线右边, 写在其它纸上一律无效.
2. 密封线左边请勿答题, 密封线外不得有姓名及相关标记.
3. 如答题空白不够, 可写在当页背面, 并标明题号.

| 得分 | |
|---|---|
| 评阅人 | |

一、(本题 15 分) 空间中有两个圆球面$B_1$和$B_2$, $B_2$包含在$B_1$所围球体的内部, 两球面之间的闭区域为$D$. 设$B$是含在$D$中的一个圆球，它与球面$B_1$和$B_2$均相切. 问：

(i) （4分）$B$的球心轨迹构成的曲面$S$是何种曲面；

(ii) （2分）$B_1$的球心和$B_2$的球心是曲面$S$的何种点.

证明你的论断（9分）.

答：$B$的球心轨迹构成的曲面$S$为旋转椭球面（2分+2分=4分）；$B_1$和$B_2$的球心为$S$的两个焦点（2分）.

证明: 设$B_1$的球心为$O_1$, 半径为$R_1$, $B_2$的球心为$O_2$, 半径为$R_2$. 设$B$是含在$D$中的一个球，球心在$P$点，半径为$r$, 它与球$B_1$和$B_2$均相切. 因为$B$与$B_1$内切，所以$PO_1 = R_1 - r$. 因为$B$与$B_2$外切，所以$PO_2 = R_2 + r$. 于是有

$$PO_1 + PO_2 = R_1 + R_2$$

总是常数.　（4分）

设$\ell$是过球心$O_1$和$O_2$的直线. 因为$B_1$和$B_2$在以$\ell$为不动轴的空间旋转下不变, 故区域$D$也在以$\ell$为不动轴的空间旋转下不变. $B$在以$\ell$为不动轴的空间旋转下保持与$B_1$和$B_2$均相切，它的球心$P$在以$\ell$为不动轴的空间旋转下是一个圆周. 在每个过直线$\ell$的平面$\Sigma$上，由于$PO_1 + PO_2 = R_1 + R_2$总是常数, $B$的球心轨迹$P$在平面$\Sigma$上

是一个椭圆. 故$B$的球心轨迹构成的曲面$S$为旋转椭球，旋转轴为过$O_1$和$O_2$的直线，并且两球心$O_1$和$O_2$为旋转椭球的两个焦点. （9分）

| | |
|---|---|
| 得分 | |
| 评阅人 | |

二、(本题 15 分)设 $\alpha > 0$, $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上非负, 有二阶导函数, $f(0) = 0$, 且在 $[0,1]$ 上不恒为零. 求证: 存在 $\xi \in (0,1)$ 使得

$$\xi f''(\xi) + (\alpha+1)f'(\xi) > \alpha f(\xi).$$

**证明** (反证法) 若结论不对, 则对一切 $x \in [0,1)$ 有

$$xf''(x) + (\alpha+1)f'(x) \leqslant \alpha f(x).$$

这说明函数 $xf'(x) + \alpha f(x) - \alpha \int_0^x f(u)\,du$ 的导数非正, 因而单调递减, 但它在 0 取 0, 故,

$$xf'(x) + \alpha f(x) \leqslant \alpha \int_0^x f(u)\,du,\ x \in [0,1]. \qquad \text{(...... 5分)}$$

因而

$$x^\alpha f'(x) + \alpha x^{\alpha-1} f(x) \leqslant \alpha x^{\alpha-1} \int_0^x f(u)\,du,\ x \in [0,1].$$

将上式在 $[0,x]$ 上积分, 可得

$$\begin{aligned} x^\alpha f(x) &\leqslant \alpha \int_0^x t^{\alpha-1} \left( \int_0^t f(u)\,du \right) dt \\ &\leqslant \alpha \int_0^x t^{\alpha-1} \left( \int_0^x f(u)\,du \right) dt \\ &= x^\alpha \int_0^x f(u)\,du. \end{aligned}$$

故,

$$f(x) \leqslant \int_0^x f(u)\,du. \qquad \text{(...... 10分)}$$

记, $g(x) = \int_0^x f(u)\,du$. 则从上式可得 $g'(x) \leqslant g(x)$. 因此

$$(e^{-x}g(x))' \leqslant 0.$$

这说明 $e^{-x}g(x)$ 在 $[0,1]$ 上递减. 注意到 $g(0) = 0$, 可得 $g(x) \leqslant 0$. 但从 $f(x)$ 非负可知 $g(x) \geqslant 0$. 故, $g(x) \equiv 0$. 从而 $f(x) \equiv 0$. 这与 $f(x)$ 不恒为零矛盾! (...... 15分)

| 得分 | |
|---|---|
| 评阅人 | |

三、（本题15分）设$A$为$n$阶复方阵, $p(x)$为$I-\overline{A}A$的特征多项式,其中$\overline{A}$表$A$的共轭矩阵. 证明：$p(x)$必为实系数多项式.

**证明**：记

$$p(t)=det(tI-(I-A\bar{A}))=det((t-1)I+A\bar{A})$$

为$I-A\bar{A}$的特征多项式. 对任何实数$t$，有

$$(*)\qquad \overline{p(t)}=\overline{det((t-1)I+A\bar{A})}=det((t-1)I+\bar{A}A).$$

（5分）

对任何两个方阵$A$和$B$，有$det(sI+AB)=det(sI+BA)$, 证明如下：取可逆矩阵序列$B_n$使得$B_n\to B$（例如，对充分大的$n$取$B_n=B+\frac{1}{n}I$），则

$$det(sI+AB_n)=det(sB_n^{-1}+A)detB_n=detB_ndet(sB_n^{-1}+A)=det(sI+B_nA).$$

令$n\to\infty$, 得到公式$det(sI+AB)=det(sI+BA)$. 用$B=\bar{A}$代入公式，则有

$$\overline{p(t)}=det((t-1)I+\bar{A}A)=det((t-1)I+A\bar{A})=p(t)$$

对所有的实数$t$成立，故$p(t)$的系数都是实数. （15分）

注：也可通过利用分块矩阵初等变换求$\begin{pmatrix} I & B \\ A & sI\end{pmatrix}$的行列式来证明公式$det(sI-AB)=det(sI-BA)$.具体地：

$$\forall s\neq 0, \begin{pmatrix} I & 0 \\ -A & I\end{pmatrix}\begin{pmatrix} I & B \\ A & sI\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} I & B \\ 0 & sI-AB\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} I & B \\ A & sI\end{pmatrix}\begin{pmatrix} I & 0 \\ -A/s & I\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} I-BA/s & B \\ 0 & sI\end{pmatrix}$$

对上两矩阵等式两边取行列式即得$det(sI-AB)=det(sI-BA)$对一切非零的实数均成立.从而多项式$det(sI-AB)-det(sI-BA)\equiv 0$，因为多项式$det(sI-AB)-det(sI-BA)$至多是n次多项式. 获证.

| 得分 | |
|---|---|
| 评阅人 | |

四、（本题20分）已知$f_1$为实$n$元正定二次型. 令
$V=\{f \mid f$为实$n$元二次型，满足：对任何实数$k$有 $kf+f_1$属于恒号二次型$\}$,
这里恒号二次型为0二次型，正定二次型及负定二次型的总称. 证明：$V$按照通常的二次型加法和数乘构成一个实向量空间，并求这个向量空间的维数.

**证法1**：设$f\in V, f$与 $f_1$ 所对应的二次型矩阵分别为 $A$ 和$B$. 由$B$ 正定可推得

$\exists P$ 可逆，使得 $B=PP^T, A=P\begin{pmatrix}\lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n\end{pmatrix}P^T.$ （10分）

由条件：对任何实数$k$有 $kf+f_1$ 属于恒号二次型可推得 $\lambda_1=\cdots=\lambda_n$.

事实上，若$\lambda_1\neq\lambda_2$. 则由式子

$$kf+f_1=(z_1,\ldots,z_n)P\begin{pmatrix}k\lambda_1+1 & & \\ & \ddots & \\ & & k\lambda_n+1\end{pmatrix}P^T\begin{pmatrix}z_1\\ \vdots\\ z_n\end{pmatrix}$$

知，总可取某实数 $q$, 使得$(q\lambda_1+1)(q\lambda_2+1)<0$. 从而可取两点：$(z_1,\ldots,z_n)P=(0,1,0,\ldots,0)$ 及 $(z_1,\ldots,z_n)P=(1,0,0,\ldots,0)$， $qf+f_1$在该两点取值异号，矛盾.

到此，我们实际上得到$V=\{kf_1|k\in\mathbb{R}\}$.

直接可知，$V$按照通常的二次型加法和数乘构成一个实向量空间，并这个向量空间的维数是 1. 证毕。 （20分）

**证法2**：首先，$V\neq\emptyset$, 因为$0\in V$, 且对任何实数$k$有$kf_1\in V$. （2分）

其次，对任意非零$f\in V$, 若存在$k\in\mathbf{R}$, 使得$kf+f_1\equiv 0$, 则由$f_1$的正定性，可知$k\neq 0$，从而$f=-\frac{1}{k}f_1$; 若对任意的$k\in\mathbf{R}$, $kf+f_1\not\equiv 0$, 则由条件知，$kf+f_1$要么为正定二次型，要么为负定二次型. 断言：$f$和$f_1$必线性相关.

用反证法. 若$f$和$f_1$线性无关，则由$f_1$正定知，存在点$P_1$使得$f_1(P_1)>0$. 此时考察二次型 $g=f_1(P_1)f-f(P_1)f_1$, 由$f$和$f_1$线性无关知$g\not\equiv 0$ (因为$\{f_1(P_1),-f(P_1)\}$是一组不全为零的数), 故存在$P_2$使得

$$(*)\qquad 0\neq g(P_2)=f_1(P_1)f(P_2)-f(P_1)f_1(P_2).$$

此时有

(i) $P_2\neq(0,\cdots,0), f_1(P_2)>0$;

(ii) $f(P_2), f(P_1)$不同时为零.
先考虑$f(P_1)\neq 0$的情形，由(*)式有

$$\frac{f_1(P_1)}{-f(P_1)}f(P_2)+f_1(P_2)=\frac{g(P_2)}{-f(P_1)}\neq 0.$$

令 $k=\frac{f_1(P_1)}{-f(P_1)}$, 由$kf+f_1$ 恒号可知：当$\frac{g(P_2)}{-f(P_1)}>0$时，$\frac{f_1(P_1)}{-f(P_1)}f(P_1)+f_1(P_1)>0$, 明显上述不等式左边为零，矛盾.

当$\frac{g(P_2)}{-f(P_1)}<0$时, 得$\frac{f_1(P_1)}{-f(P_1)}f(P_1)+f_1(P_1)<0$,不等式左边为零，矛盾.

接下来考虑$f(P_2)\neq 0$的情形. 同样由(*)式有

$$-\frac{f_1(P_2)}{f(P_2)}f(P_1)+f_1(P_1)=\frac{g(P_2)}{-f(P_2)}\neq 0.$$

令 $k=-\frac{f_1(P_2)}{f(P_2)}$, 类似地，由$kf+f_1$ 恒号可得矛盾.断言获证. （15分）

现在， $f$与$f_1$ 线性相关，故存在一组不全为0 得数$\lambda_1\mu$, 使得 $\lambda_1 f_1+\mu f=0$.

若$\lambda_1=0$, 则 $\mu\neq 0$, 因此有 $f=-\frac{\lambda_1}{\mu}f_1$. 若$\lambda_1\neq 0$, 则由$\lambda_1 f_1\neq 0$ 知 $\mu\neq 0$, 因此仍然有 $f=-\frac{\lambda_1}{\mu}f_1$.

到此，我们实际上得到$V=\{kf_1|k\in\mathbb{R}\}$. （18分）

最后直接可知， $V$按照通常的二次型加法和数乘构成一个实向量空间，并这个向量空间的维数是 1. （20分）

专业:______ 座位号:______ 考场号:______ 所在院校:______ 准考证号:______ 姓名:______

密封线 答题时不要超过此线

| 得分 | |
|---|---|
| 评阅人 | |

五、（本题15分）设 $\delta > 0$, $\alpha \in (0,1)$, 实数列 $\{x_n\}$ 满足

$$x_{n+1} = x_n\Big(1 - \frac{h_n}{n^\alpha}\Big) + \frac{1}{n^{\alpha+\delta}}, \qquad n \geqslant 1,$$

其中 $\{h_n\}$ 有正的上下界. 证明: $\{n^\delta x_n\}$ 有界.

**证明.** 记 $c := \inf\limits_{n\geqslant 1} h_n$.

由题设可知存在 $N \geqslant 1$ 使得当 $n \geqslant N$ 时, 成立

$$\big|x_{n+1}\big| \leqslant \Big(1 - \frac{c}{n^\alpha}\Big)|x_n| + \frac{1}{n^{\alpha+\delta}}$$

…………………………………………………………………………(+3 分= 3 分)

以及

$$\frac{\delta}{n} \leqslant \frac{c}{2n^\alpha}.$$

…………………………………………………………………………(+3 分= 6 分)

取 $C := \max\Big(N^\delta|x_N|, \dfrac{2}{c}\Big)$. 我们来证明对于 $n \geqslant N$ 成立 $|x_n| \leqslant \dfrac{C}{n^\delta}$. 首先，由 $C$ 的定义知当 $n = N$ 时, 有 $|x_n| \leqslant \dfrac{C}{n^\delta}$. 进一步, 若对某个 $n \geqslant N$ 成立 $|x_n| \leqslant \dfrac{C}{n^\delta}$, 则

$$\begin{aligned} & \big|x_{n+1}\big| - \frac{C}{(n+1)^\delta} \leqslant \Big(1 - \frac{c}{n^\alpha}\Big)\frac{C}{n^\delta} + \frac{1}{n^{\alpha+\delta}} - \frac{C}{(n+1)^\delta} \\ = \ & C\Big(\frac{1}{n^\delta} - \frac{1}{(n+1)^\delta}\Big) - \frac{Cc-1}{n^{\alpha+\delta}} \end{aligned}$$

…………………………………………………………………………(+3 分= 9 分)

$$\leqslant \ \frac{C\delta}{n^{1+\delta}} - \frac{Cc-1}{n^{\alpha+\delta}} \leqslant \frac{Cc}{2n^{\alpha+\delta}} - \frac{Cc-1}{n^{\alpha+\delta}} = -\frac{Cc-2}{2n^{\alpha+\delta}} \leqslant 0.$$

…………………………………………………………………………(+3 分= 12 分)

因此, 由数学归纳法得到当 $n \geqslant N$ 时, 总成立 $|x_n| \leqslant \dfrac{C}{n^\delta}$. 因此, $\{n^\delta x_n\}$ 有界.

…………………………………………………………………………(+3 分= 15 分)

| 得分 | |
|---|---|
| 评阅人 | |

六、（本题20分）设 $f(x)=\dfrac{1}{1+e^x}$.

(i) 证明 $f(x)$ 是 $[0,+\infty)$ 上的凸函数. 进一步, 证明当 $x,y\geqslant 0$ 时成立 $f(x)+f(y)\leqslant f(0)+f(x+y)$.

(ii) 设 $n\geqslant 3$, 试确定集合 $E\equiv\left\{\sum\limits_{k=1}^{n}f(x_k)\Big|\sum\limits_{k=1}^{n}x_k=0,x_1,\dots,x_n\in\mathbb{R}\right\}$.

**解:**

(i) 我们有

$$f'(x)=-\frac{e^x}{(1+e^x)^2},\qquad f''(x)=\frac{e^x(e^x-1)}{(1+e^x)^3}.$$

当 $x\geqslant 0$ 时, 成立 $f''(x)\geqslant 0$. 所以 $f(x)$ 是 $[0,+\infty)$ 上的凸函数.

…………………………………………………… (+4 分= 4 分)

从而 $f'(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上单调增加, 因此对于 $x,y\geqslant 0$, 有

$$f(x+y)-f(x)-f(y)+f(0)=\int_0^y\big(f'(t+x)-f'(t)\big)\,dt\geqslant 0.$$

…………………………………………………… (+2 分= 6 分)

(ii) 由连续性, 易见 $E$ 是一个区间.

…………………………………………………… (+2 分= 8 分)

我们有 $f(x)+f(-x)=1$.

…………………………………………………… (+2 分= 10 分)

下设 $x_1+x_2+\ldots+x_n=0$.

若 $x_1=x_2=\ldots=x_n=0$, 则 $\sum\limits_{j=1}^{n}f(x_j)=\dfrac{n}{2}$.

若 $x_1,x_2,\dots,x_n$ 不全为零, 设其中负数的个数为 $k$, 非负数的个数为 $m$, 则 $m+k=n,1\leqslant k\leqslant n-1$.

不妨设 $x_1,\dots,x_m\geqslant 0,x_{m+1},\dots,x_n<0$. 记 $y_1=-x_{m+1},y_2=-x_{m+2},\dots,y_k=-x_n,x=x_1+\ldots+x_m=y_1+\ldots+y_k$, 则由 (i) 易得

$$f(y_1)+f(y_2)+\ldots+f(y_k)\leqslant(k-1)f(0)+f(x).$$

注意到 $mf\big(\dfrac{x}{m}\big)-f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上严格单减,

…………………………………………………… (+4 分= 14 分)

我们有

$$
\begin{aligned}
& \sum_{j=1}^{n} f(x_j) = \sum_{j=1}^{m} f(x_j) + k - \sum_{j=1}^{k} f(y_j) \\
\geqslant \ & mf\Big(\frac{x}{m}\Big) + k - \Big((k-1)f(0) + f(x)\Big) \\
> \ & \lim_{u\to+\infty} \Big[mf\Big(\frac{u}{m}\Big) + k - \big((k-1)f(0) + f(u)\big)\Big] \\
= \ & \frac{k+1}{2} \geqslant 1.
\end{aligned}
$$

这表明 $\inf E \geqslant 1$ 而 $1 \notin E$.

另一方面, 取 $u > 0$, $x_1 = x_2 = \ldots = x_{n-1} = \frac{u}{n-1}$, $x_n = -u$, 则

$$
\lim_{u\to+\infty} \sum_{j=1}^{n} f(x_j) = \lim_{u\to+\infty} \Big((n-1)f\Big(\frac{u}{n-1}\Big) + 1 - f\big(u\big)\Big) = 1.
$$

因此, $\inf E = 1$.

........................................................................ (+4 分= 18 分)

另一方面, 由 $f(-x) = 1 - f(x)$ 可得

$$
E = \{n - z | z \in E\}.
$$

因此, $\sup E = n - 1$, 且 $n - 1 \notin E$.

所以 $E$ 为开区间 $(1, n-1)$.

........................................................................ (+2 分= 20 分)

# 第十一届全国大学生数学竞赛初赛(数学类B卷)参考答案

一、（本题15分）设$L_1$ 和$L_2$ 是空间中的两条不垂直的异面直线，点$B$是它们公垂线段的中点。点$A_1$ 和$A_2$ 分别在$L_1$ 和$L_2$ 上滑动，使得$A_1B\perp A_2B$. 证明直线$A_1A_2$的轨迹是单叶双曲面。

证明：取公垂线为$z$轴，$B$为原点。取$x$轴使得$L_1$和$L_2$与之夹角相同。此时我们有：

$$L_1:\begin{cases} ax+y=0 \\ z=c, \end{cases}$$

$$L_2:\begin{cases} ax-y=0 \\ z=-c, \end{cases}$$

其中$c>0$. 由于$L_1$ 与$L_2$ 不垂直，$a\neq\pm1$. ············ 4分

设点$A_1$的坐标为$(x_1,y_1,c)$，$A_2$的坐标$(x_2,y_2,-c)$, 则

$$ax_1+y_1=0,\quad ax_2-y_2=0. \tag{1}$$

由$A_1B\perp A_2B$ 得，

$$x_1x_2+y_1y_2-c^2=0. \tag{2}$$

任取$A_1A_2$上的点$M(x,y,z)$，有

$$\frac{x-x_2}{x_1-x_2}=\frac{y-y_2}{y_1-y_2}=\frac{z+c}{2c}. \tag{3}$$

············10分

**消去$x_1,x_2,y_1,y_2$:** 令$\frac{z+c}{2c}=k$, 由(1,3) 得

$$x=kx_1-(k-1)x_2;\quad y=-akx_1-a(k-1)x_2.$$

由(1,2)，$x_1x_2=\frac{c^2}{1-a^2}$. 又$k(k-1)=\frac{z^2-c^2}{4c^2}$, 从而

$$a^2(1-a^2)x^2-(1-a^2)y^2+a^2z^2=a^2c^2,$$

所以轨迹是单叶双曲面。 ············ 15分

二、(本题10 分) 计算$\int_0^{+\infty}\frac{dx}{(1+x^2)(1+x^{2019})}$.

解：我们有

$$\int_0^{+\infty}\frac{dx}{(1+x^2)(1+x^{2019})}=\int_0^{1}\frac{dx}{(1+x^2)(1+x^{2019})}+\int_1^{+\infty}\frac{dx}{(1+x^2)(1+x^{2019})}$$

………… 3分

对上式右端的第二个积分做变换$x=\frac{1}{t}$

得到

$$\int_1^{+\infty}\frac{dx}{(1+x^2)(1+x^{2019})}=\int_0^{1}\frac{t^{2019}}{(1+t^2)(1+t^{2019})}dt$$

………… 7分

于是

$$\int_0^{+\infty}\frac{dx}{(1+x^2)(1+x^{2019})}=\int_0^{1}\frac{dx}{(1+x^2)(1+x^{2019})}+\int_1^{+\infty}\frac{dx}{(1+x^2)(1+x^{2019})}$$

$$=\int_0^{1}\frac{dx}{(1+x^2)(1+x^{2019})}+\int_0^{1}\frac{t^{2019}}{(1+t^2)(1+t^{2019})}dt$$

$$=\int_0^{1}\frac{dx}{1+x^2}=\arctan x|_0^1=\frac{\pi}{4}.$$

………… 10分

三、（本题15分）设数列$\{x_n\}$ 满足

$x_1 > 0,\ x_{n+1} = \ln(1 + x_n), n = 1, 2, \cdots.$

证明：$\{x_n\}$收敛并求其极限.

证明：由于$x_1 > 0$，所以$x_2 = \ln(1+x_1)$。由数学归纳法，$x_n > 0, n = 1, 2, \cdots$.

············ 3分

$$x_{n+1} - x_n = \ln(1 + x_n) - x_n = \frac{1}{1+\xi_n}x_n - x_n = \left(\frac{1}{1+\xi_n} - 1\right)x_n$$

$$= -\frac{\xi_n}{1+\xi_n}x_n < 0,$$

这里$\xi_n \in (0, x_n)$. 所以数列$\{x_n\}$单调减少。 ············ 8分

应用单调有界定理，$\{x_n\}$收敛。 ············ 10分

设$\lim_{n\to\infty} x_n = a \geq 0$. 由$x_{n+1} = \ln(1 + x_n)$, 知$a = \ln(1 + a)$.

令$f(x) = x - \ln(1 + x)$，$f'(x) = 1 - \frac{1}{1+x} > 0,\ x \in (0, +\infty), f(0) = 0$. 从而$x = 0$是$f(x)$在$[0, +\infty)$上的唯一零点，所以$\lim_{n\to\infty} x_n = 0$. ············ 15分

四、（本题15分）设$\{\epsilon_1,\cdots,\epsilon_n\}$ 是$n$ 维实线性空间$V$ 的一组基, 令$\epsilon_1+\epsilon_2+\cdots+\epsilon_n+\epsilon_{n+1}=0$. 证明:
(1) 对$i=1,2,\cdots,n+1$, $\{\epsilon_1,\cdots,\epsilon_{i-1},\epsilon_{i+1},\cdots,\epsilon_{n+1}\}$ 都构成$V$ 的基;
(2) $\forall\alpha\in V$, 在(1)中的$n+1$ 组基中, 必存在一组基使$\alpha$ 在此基下的坐标分量均非负;
(3) 若$\alpha=a_1\epsilon_1+a_2\epsilon_2+\cdots+a_n\epsilon_n$, 且$|a_i|$ $(i=1,2,\cdots,n)$ 互不相同, 则在(1)中的$n+1$ 组基中, 满足(2)中非负坐标表示的基是唯一的.

证明：(1) 若$i=n+1$，显然有$\epsilon_1,\cdots,\epsilon_n$是$V$的一组基. 若$1\le i\le n$，令

$$k_1\epsilon_1+k_2\epsilon_2+\cdots+k_{i-1}\epsilon_{i-1}+k_{i+1}\epsilon_{i+1}+\cdots+k_n\epsilon_n+k_{n+1}\epsilon_{n+1}=0.$$

由于$\epsilon_1+\epsilon_2+\cdots+\epsilon_n+\epsilon_{n+1}=0$，所以有

$$k_{n+1}(\epsilon_1+\epsilon_2+\cdots+\epsilon_n+\epsilon_{n+1})=0$$

$\cdots\cdots\cdots\cdots$ 2分

两式相减得

$$(k_1-k_{n+1})\epsilon_1+\cdots+(k_{i-1}-k_{n+1})\epsilon_{i-1}-k_{n+1}\epsilon_i+(k_{i+1}-k_{n+1})\epsilon_{i+1}+\cdots+(k_n-k_{n+1})\epsilon_n=0.$$

由于$\epsilon_1,\cdots,\epsilon_n$线性无关，故得

$$k_1-k_{n+1}=\cdots=k_{i-1}-k_{n+1}=-k_{n+1}=k_{i+1}-k_{n+1}=\cdots=k_n-k_{n+1}=0$$

从而有

$$k_1=k_2=\cdots=k_{i-1}=k_{i+1}=\cdots=k_n=k_{n+1}=0$$

因此可得$\epsilon_1,\cdots,\epsilon_{i-1},\epsilon_{i+1},\cdots,\epsilon_{n+1}$线性无关，于是(1)得证. $\cdots\cdots\cdots\cdots$ 5分

(2) 由于

$$(\epsilon_1,\cdots,\epsilon_{i-1},\epsilon_i,\epsilon_{i+1},\cdots,\epsilon_n)=(\epsilon_1,\cdots,\epsilon_{i-1},\epsilon_{i+1},\cdots,\epsilon_{n+1})A$$

这里

$$A=\begin{pmatrix} 1 & & & -1 & & & \\ & \ddots & & \vdots & & & \\ & & 1 & -1 & & & \\ & & & -1 & 1 & & \\ & & & -1 & & \ddots & \\ & & & \vdots & & & 1 \\ & & & -1 & & & \end{pmatrix}$$

为两组基之间的过渡矩阵. ………… 7分

$\forall\alpha\in V$，设$\alpha=a_1\epsilon_1+a_2\epsilon_2+\cdots+a_n\epsilon_n$，若$a_1,a_2,\cdots,a_n\geq 0$，则结论正确，否则令$a_i$是负坐标中绝对值最大者，那么

$$\alpha=(\epsilon_1,\epsilon_2,\cdots,\epsilon_n)\begin{pmatrix} a_1\\ a_2\\ \vdots\\ a_n\end{pmatrix}=(\epsilon_1,\cdots,\epsilon_{i-1},\epsilon_{i+1},\cdots,\epsilon_{n+1})A\begin{pmatrix} a_1\\ a_2\\ \vdots\\ a_n\end{pmatrix}$$

$$=(\epsilon_1,\cdots,\epsilon_{i-1},\epsilon_{i+1},\cdots,\epsilon_{n+1})\begin{pmatrix} a_1-a_i\\ \vdots\\ a_{i-1}-a_i\\ a_{i+1}-a_i\\ \vdots\\ a_n-a_i\\ -a_i\end{pmatrix}$$

于是$\epsilon_1,\cdots,\epsilon_{i-1},\epsilon_{i+1},\cdots,\epsilon_{n+1}$即为所求的一组基. ………… 10分

(3) 设$\alpha=a_1\epsilon_1+a_2\epsilon_2+\cdots+a_n\epsilon_n$，且$|a_i|$ $(i=1,2,\cdots,n)$ 互不相同. 设$a_i$是负坐标中绝对值最大者，除了基$\epsilon_1,\cdots,\epsilon_{i-1},\epsilon_{i+1},\cdots,\epsilon_{n+1}$之外，可以证明$\alpha$无论

在哪一组基下的坐标都有负的分量. 事实上，对任意的$k \neq i$ 都有

$$\alpha = (\epsilon_1, \epsilon_2, \cdots, \epsilon_n)\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = (\epsilon_1, \cdots, \epsilon_{k-1}, \epsilon_{k+1}, \cdots, \epsilon_{n+1})\begin{pmatrix} a_1 - a_k \\ \vdots \\ a_i - a_k \\ \vdots \\ a_n - a_k \\ -a_k \end{pmatrix}$$

其中$a_i - a_k < 0$，于是知满足(2)中非负坐标表示的基是唯一的.

$\cdots\cdots\cdots\cdots$ 15分

五、（本题20分）设$A$ 是数域$F$ 上的$n$ 阶矩阵, 若$A^2 = I_n$ ($I_n$ 表示单位矩阵), 则称$A$ 为对合矩阵.试证：
(1) 若$A$ 是$n$ 阶对合矩阵, 则
$$\operatorname{rank}(I_n + A) + \operatorname{rank}(I_n - A) = n;$$
(2) $n$ 阶对合矩阵$A$ 一定可以对角化, 其相似对角形为$\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & -I_{n-r} \end{pmatrix}$, 其中$r = \operatorname{rank}(I_n + A)$;
(3) 若$A, B$ 均是$n$ 阶对合矩阵, 且$AB = BA$, 则存在可逆矩阵$P$, 使得$P^{-1}AP$ 和$P^{-1}BP$ 同时为对角矩阵.

证明：(1) 因为$A^2 = I_n$，故有$I_n - A^2 = 0$ 即$(I_n + A)(I_n - A) = 0$，

于是$\operatorname{rank}(I_n + A) + \operatorname{rank}(I_n - A) \le n$.

又因为$(I_n + A) + (I_n - A) = 2I_n$，所以$\operatorname{rank}(I_n + A) + \operatorname{rank}(I_n - A) \ge \operatorname{rank}(2I_n) = n$.

从而得
$$\operatorname{rank}(I_n + A) + \operatorname{rank}(I_n - A) = n.$$
$\cdots\cdots\cdots\cdots$ 5分

(2) 先证$A$的特征值为1或$-1$. 设$\lambda$为$A$的任一特征值，则存在非零向量$\alpha$，使得$A\alpha = \lambda\alpha$，由$A^2 = I_n$可得
$$\alpha = A^2\alpha = A(A\alpha) = A(\lambda\alpha) = \lambda^2\alpha$$

由$\alpha \ne 0$，可得$\lambda^2 - 1 = 0$，所以有$\lambda = 1$或$\lambda = -1$. $\cdots\cdots\cdots\cdots$ 8分

下证对合矩阵一定可以对角化. 因为$A^2 = I_n$，故$x^2 - 1 = (x+1)(x-1)$为$A$的零化多项式，所以$A$的最小多项式一定为数域$F$ 上互素的一次因式的乘积，从而可知对合矩阵$A$一定可以对角化.

$\cdots\cdots\cdots\cdots$ 10分

又因为对合矩阵$A$的特征值为1或$-1$. 由(1)知特征值$\lambda = 1$的几何重数$r = \operatorname{rank}(I_n + A)$，$\lambda = -1$的几何重数为$n - r = \operatorname{rank}(I_n - A)$，所以其相似对角形为$\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & -I_{n-r} \end{pmatrix}$.

$\cdots\cdots\cdots\cdots$ 12分

可对角化另一证明思路：

[对应于特征值$\lambda = 1$，有$n - \mathrm{rank}(I_n - A)$个线性无关的特征向量，对应于特征值$\lambda = -1$，有$n - \mathrm{rank}(-I_n - A)$个线性无关的特征向量，由(1)知，$A$共有$n - \mathrm{rank}(I_n - A) + n - \mathrm{rank}(-I_n - A) = n$个线性无关的特征向量，从而$A$一定可以对角化，其相似对角形为$\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & -I_{n-r} \end{pmatrix}$. .......... 参照上面证明给分]

(3) 由于$A$为对合矩阵，故存在可逆矩阵$G$，使得

$$G^{-1}AG = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & -I_{n-r} \end{pmatrix}$$

又由$AB = BA$, 则有

$$(G^{-1}AG)(G^{-1}BG) = (G^{-1}BG)(G^{-1}AG).$$

所以$G^{-1}BG = \begin{pmatrix} B_{11} & 0 \\ 0 & B_{22} \end{pmatrix}$为一个准对角矩阵. $\cdots\cdots\cdots\cdots$ 15分

由于$B^2 = I_n$为对合矩阵，故$B_{11}^2 = I_r, B_{22}^2 = I_{n-r}$也是对合矩阵. 由(2)，存在可逆矩阵$G_1, G_2$，使得

$$G^{-1}B_{11}G_1 = \begin{pmatrix} I_s & 0 \\ 0 & -I_{r-s} \end{pmatrix}, \quad G_2^{-1}B_{22}G_2 = \begin{pmatrix} I_t & 0 \\ 0 & -I_{n-r-t} \end{pmatrix}$$

为对角矩阵. 令$P = G\begin{pmatrix} G_1 & 0 \\ 0 & G_2 \end{pmatrix}$，则有$P$可逆，且有$P^{-1}AP, P^{-1}BP$同时为对角矩阵. $\cdots\cdots\cdots\cdots$ 20分

六、（本题15分）设函数$f(x)$ 为闭区间$[a,b]$上的连续凹函数, 满足$f(a)=0, f(b)>0$且$f(x)$在$x=a$处存在非零的右导数. 对$n\geq 2$, 记

$$S_n=\left\{\sum_{k=1}^{n} kx_k:\ \sum_{k=1}^{n} kf(x_k)=f(b),\ x_k\in[a,b]\right\}.$$

(1) 证明对$\forall\alpha\in(0,f(b))$, 存在唯一$x\in(a,b)$ 使得$f(x)=\alpha$;
(2) 求$\lim\limits_{n\to\infty}(\sup S_n-\inf S_n)$.

解：(1) 因为函数$f(x)$在$[a,b]$上连续, 于是对$\forall\alpha\in(0,f(b))$在$(a,b)$内至少存在一个点$\xi$使得$f(\xi)=\alpha$. ············ 1分

下面证明满足上述要求的点是唯一的。假设$\xi,\eta\in(a,b)$, 满足$\xi<\eta$ 及$f(\xi)=f(\eta)=\alpha$. 则点$(\eta,f(\eta))=(\eta,\alpha)$落在端点为$(\xi,f(\xi))=(\xi,\alpha),(b,f(b))$的线段的下方，这与函数的凹性矛盾。 ············ 3分

(2) 我们记

$$T_n=\left\{(x_1,x_2,\cdots,x_n):\ \sum_{k=1}^{n} kf(x_k)=f(b),x_k\in[a,b]\right\},\ \ n\geq 2.$$

现对$\forall(x_1,\cdots,x_n)\in T_n$, 由函数的凹性有

$$\frac{2f(b)}{n(n+1)}=\frac{\sum_{k=1}^{n}kf(x_k)}{1+2+\cdots+n}\leq f\left(\frac{x_1+2x_2+\cdots+nx_n}{1+2+\cdots+n}\right)$$

············ 5分

于是，

$$\frac{x_1+2x_2+\cdots+nx_n}{1+2+\cdots+n}\geq f^{-1}\left(\frac{2f(b)}{n(n+1)}\right),$$

即

$$\sum_{k=1}^{n}kx_k\geq\frac{n(n+1)}{2}f^{-1}\left(\frac{2f(b)}{n(n+1)}\right)$$

上面不等式当$x_1=x_2=\cdots=x_n=f^{-1}\left(\frac{2f(b)}{n(n+1)}\right)\in[a,b]$时等号成立。而$(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\left(f^{-1}\left(\frac{2f(b)}{n(n+1)}\right),f^{-1}\left(\frac{2f(b)}{n(n+1)}\right),\cdots,f^{-1}\left(\frac{2f(b)}{n(n+1)}\right)\right)\in T_n$,

于是

$$\inf S_n = \frac{n(n+1)}{2} f^{-1}\left(\frac{2f(b)}{n(n+1)}\right)$$

$\cdots\cdots\cdots\cdots$ 8分

另一方面，连接点$(a, f(a))$与点$(b, f(b))$的直线段落在曲线$y = f(x)$的下方。故有对任意$x \in [a, b]$

$$\frac{f(b)}{b-a}(x-a) \leq f(x),$$

即

$$x \leq \frac{b-a}{f(b)} f(x) + a.$$

于是

$$\sum_{k=1}^{n} k x_k \leq \frac{b-a}{f(b)} \sum_{k=1}^{n} k f(x_k) + \frac{n(n+1)}{2} a = b - a + \frac{n(n+1)}{2} a$$

$\cdots\cdots\cdots\cdots$ 10分

注意，上式的等号当$x_1 = b, x_2 = x_3 = \cdots = x_n = a$时达到。而$(x_1, x_2, \cdots, x_n) = (b, a, a, \cdots, a) \in T_n$, 故有

$$\sup S_n = b - a + \frac{n(n+1)}{2} a$$

$\cdots\cdots\cdots\cdots$ 12分

于是

$$\lim_{n\to\infty}(\sup S_n - \inf S_n) = b - a + \lim_{n\to\infty} \tfrac{n(n+1)}{2}\left(a - f^{-1}\left(\tfrac{2f(b)}{n(n+1)}\right)\right)$$
$$= b - a + f(b) \lim_{n\to\infty} \frac{a - f^{-1}\left(\frac{2f(b)}{n(n+1)}\right)}{\frac{2f(b)}{n(n+1)}}$$
$$= b - a + f(b) \lim_{x\to 0+} \tfrac{a - f^{-1}(x)}{x} = b - a + f(b) \lim_{t\to a^+} \tfrac{a-t}{f(t)}$$
$$= b - a - \tfrac{f(b)}{f'(a)}$$

$\cdots\cdots\cdots\cdots$ 15分

七、（本题10分）设正项级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{a_n}$收敛. 证明级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n^2a_n}{S_n^2}$收敛, 其中$S_n = \sum\limits_{k=1}^{n}a_k$.

证明：记$S_0=0$，$\sigma=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{a_n}$. 则

$$\sum_{n=1}^{N}\frac{n^2a_n}{S_n^2}=\sum_{n=1}^{N}\frac{n^2}{S_n^2}(S_n-S_{n-1})=\frac{1}{a_1}+\sum_{n=2}^{N}\frac{n^2}{S_n^2}(S_n-S_{n-1})$$

$$\leq\frac{1}{a_1}+\sum_{n=2}^{N}\frac{n^2}{S_nS_{n-1}}(S_n-S_{n-1})=\frac{1}{a_1}+\sum_{n=2}^{N}\frac{n^2}{S_{n-1}}-\sum_{n=2}^{N}\frac{n^2}{S_n}$$

$$\frac{1}{a_1}+\sum_{n=1}^{N-1}\frac{(n+1)^2}{S_n}-\sum_{n=2}^{N}\frac{n^2}{S_n}\leq\frac{5}{a_1}+2\sum_{n=2}^{N}\frac{n}{S_n}+\sum_{n=2}^{N}\frac{1}{S_n}\qquad(1)$$

$\cdots\cdots\cdots\cdots$ 4分

由Cauchy不等式

$$\sum_{n=2}^{N}\frac{n}{S_n}\leq\sum_{n=2}^{N}\frac{n}{S_n}\sqrt{a_n}\frac{1}{\sqrt{a_n}}\leq\left(\sum_{n=1}^{N}\frac{n^2a_n}{S_n^2}\right)^{1/2}\cdot\left(\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{a_n}\right)^{1/2}$$ $\cdots\cdots\cdots\cdots$ 6分

则由(1)

$$\sum_{n=1}^{N}\frac{n^2a_n}{S_n^2}\leq\frac{5}{a_1}+2\left(\sum_{n=1}^{N}\frac{n^2a_n}{S_n^2}\right)^{1/2}\cdot\sqrt{\sigma}+\sigma,$$

从而得到

$$\sum_{n=1}^{N}\frac{n^2a_n}{S_n^2}-2\left(\sum_{n=1}^{N}\frac{n^2a_n}{S_n^2}\right)^{1/2}\cdot\sqrt{\sigma}+\sigma\leq\frac{5}{a_1}+2\sigma,$$

$$\left(\sum_{n=1}^{N}\frac{n^2a_n}{S_n^2}\right)^{1/2}\leq\sqrt{\sigma}+\sqrt{2\sigma+5/a_1}.$$

于是级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2a_n}{S_n^2}$收敛。 $\cdots\cdots\cdots\cdots$ 10分

姓名: ______ 准考证号: ______ 所在院校: ______ 考生座位号: ______ 专业: ______

密封线 答题时不要超过此线

# 第十届全国大学生数学竞赛试卷

(数学类, 2018年10月)

考试形式: 闭卷 考试时间: 150 分钟 满分: 100 分

| 题号 | 一 | 二 | 三 | 四 | 五 | 六 | 总分 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 满分 | 15 | 15 | 20 | 15 | 15 | 20 | 100 |
| 得分 | | | | | | | |

注意: 1. 所有答题都须写在此试卷纸密封线右边, 写在其它纸上一律无效.

2. 密封线左边请勿答题, 密封线外不得有姓名及相关标记.

3. 如答题空白不够, 可写在当页背面, 并标明题号.

一、(本题 15 分)在空间直角坐标系中,设马鞍面$S$的方程为$x^2-y^2=2z$. 设$\sigma$为平面$z=\alpha x+\beta y+\gamma$,其中$\alpha,\beta,\gamma$为给定常数. 求马鞍面$S$上点$P$ 的坐标，使得过$P$且落在马鞍面$S$上的直线均平行于平面$\sigma$.

解：设所求$P$点坐标为$P=(a,b,c)$, 满足$a^2-b^2=2c$. 则过$P$的直线可以表为

$$\ell=\ell(t)=(a,b,c)+t(u,v,w),\ \ u^2+v^2+w^2\neq 0,\ \ t\in\mathbb{R}.$$

直线$\ell(t)$落在马鞍面$S$上，得到

$$(u^2-v^2)t^2+2(au-bv-w)t=0, t\in\mathbb{R}.$$

$$au-bv=w,\ \ u^2-v^2=0.$$

于是有

$$v=\varepsilon u,\ \ w=(a-\varepsilon b)u,\ \ \varepsilon=\pm 1.$$

(5分)

于是，过$P$点恰有两条直线落在马鞍面$S$上，为

$$\ell_1=\ell_1(t)=(a,b,c)+tu(1,1,a-b),$$

$$\ell_2=\ell_2(t)=(a,b,c)+tu(1,-1,a+b).$$

这两条直线的方向向量$(1,1,a-b)$和$(1,-1,a+b)$均平行于平面$\sigma$, 而平面$\sigma$的法向量为$(\alpha,\beta,-1)$. 我们得到

$$\alpha+\beta=a-b,\ \ \alpha-\beta=a+b.$$

(10分)

于是

$$a=\alpha,\ \ b=-\beta,\ \ c=\frac{1}{2}(\alpha^2-\beta^2).$$

故所求点$P$的坐标为

$$P=(\alpha,-\beta,\frac{1}{2}(\alpha^2-\beta^2)).$$

(15分)

二、(本题 15 分) $A=(a_{ij})_{n\times n}$ 为$n$ 阶实方阵，满足

1) $a_{11}=a_{22}=\cdots=a_{nn}=a>0$;

2) 对每个$i(i=1,\ldots,n)$, 有$\sum_{j=1}^{n}\mid a_{ij}\mid+\sum_{j=1}^{n}\mid a_{ji}\mid<4a$.

求$f(x_1,\ldots,x_n)=(x_1,\ldots,x_n)A\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}$ 的规范形.

**解:** $f=(x_1,\ldots,x_n)\frac{A+A^T}{2}\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}$. 令$B=(b_{ij})=\frac{A+A^T}{2}$, 则$B$ 为实对称阵，(2分)

且

$$b_{11}=b_{22}=\cdots=b_{nn}=a;$$

$$\sum_{j=1}^{n}|b_{ij}|=\sum_{j=1}^{n}\mid\frac{a_{ij}}{2}+\frac{a_{ji}}{2}\mid<2a$$

结果，$b_{ii}>\sum_{j\neq i}|b_{ij}|$. (5分)

若$\lambda$为$B$的特征值， $\alpha=\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}$ 为关于$\lambda$ 的非零特征向量，记

$$|x_i|=max_{1\leqslant j\leqslant n}|x_j|>0.$$

由于 $B\alpha=\lambda\alpha$,

$$\lambda=\frac{\sum_{j=i}^{n}b_{ij}x_j}{x_i}\geqslant a-\sum_{j\neq i}|b_{ij}|>0.$$

(10分)

专业:______ 考生座位号:______ 所在院校:______ 准考证号:______ 姓名:______

密封线 答题时不要超过此线

故$B$ 为正定矩阵，$f$ 的规范形为$y_1^2+\cdots+y_n^2$.

(15分)

三、（20分）元素皆为整数的矩阵称为整矩阵. 设$n$ 阶方阵$A,B$ 皆为整矩阵.

1) 证明以下两条等价：$i)$ $A$ 可逆且$A^{-1}$ 仍为整矩阵；$ii)$ $A$ 的行列式的绝对值为1.

2) 若又知$A,\ A-2B,\ A-4B,\ \ldots,\ A-2nB,\ A-2(n+1)B,\ \ldots,\ A-2(n+n)B$ 皆可逆，且它们的逆矩阵皆仍为整矩阵.证明：$A+B$ 可逆.

**证明:** 1) $i)\Rightarrow ii)$. 由 $AA^{-1}=I$知$|A|\cdot|A^{-1}|=1$. 注意到$|A|,|A^{-1}|$ 皆为整数. 故$A$ 的行列式的绝对值为1.

$ii)\Rightarrow i)$. 由$AA^*=|A|I$ 知 $A^{-1}=A^*/|A|$ 立即知$i)$ 成立. （10分）

2)考虑多项式$p(x)=|A-xB|^2$. 则由已给条件得 $p(0),p(2),p(4),\ldots,p(4n)$ 的值皆为1. 结果多项式$q(x)=p(x)-1$ 有超过 $2n$ 个的零点，从而得出$q(x)\equiv 0$, 即$p(x)\equiv 1$. 特别地，$p(-1)=|A+B|^2=1$. 故$A+B$ 可逆. 证毕. （20分）

四、（本题15分）设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续可微, 在 $x=0$ 处有任意阶导数, $f^{(n)}(0)=0$ $(\forall n\geqslant 0)$, 且存在常数 $C>0$ 使得

$$|xf'(x)|\leqslant C|f(x)|,\qquad \forall x\in[0,1].$$

证明: (1) $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{f(x)}{x^n}=0$ $(\forall n\geqslant 0)$; (2) 在 $[0,1]$ 上成立 $f(x)\equiv 0$.

**证明:** (1) 由假设, 对任何 $m\geqslant 0$, $f(x)$ 在零点附近有 $m+1$ 阶导数, 从而 $f^{(m)}(x)$ 在 $x=0$ 连续. 因此, $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{f(x)}{x^0}=f(0)=0$. (2分）

对于 $n\geqslant 1$, 利用 L'Hospital 法则,

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)}{x^n}=\lim_{x\to 0^+}\frac{f'(x)}{nx^{n-1}}=\ldots=\lim_{x\to 0^+}\frac{f^{(n)}(x)}{n!}=0.$$

(5分）

(2) 我们有

$$xf(x)f'(x)\leqslant x\,|f(x)|\,|f'(x)|\leqslant C|f(x)|^2,\qquad \forall x\in[0,1].$$

从而

$$\left(\frac{f^2(x)}{x^{2C}}\right)'=\frac{2\Big(xf(x)f'(x)-Cf^2(x)\Big)}{x^{2C+1}}\leqslant 0,\qquad \forall x\in(0,1].$$

(10分）

因此 $\dfrac{f^2(x)}{x^{2C}}$ 在 $(0,1]$ 上单调减少, 从而

$$\frac{f^2(x)}{x^{2C}} \leqslant \left(\frac{f(t)}{t^C}\right)^2, \qquad \forall\, 0<t<x\leqslant 1.$$

所以

$$\frac{f^2(x)}{x^{2C}} \leqslant \lim_{t\to 0^+}\left(\frac{f(t)}{t^C}\right)^2 = 0, \qquad \forall\, x\in(0,1].$$

因此, $f(x)\equiv 0$. (15分)

五、(本题15分)设 $\{a_n\},\{b_n\}$ 是两个数列, $a_n>0(n\geqslant 1)$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ 绝对收敛, 且

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} \leqslant 1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n\ln n}+b_n, \quad n\geqslant 2.$$

求证: (1) $\frac{a_n}{a_{n+1}} < \frac{n+1}{n}\cdot\frac{\ln(n+1)}{\ln n}+b_n\ (n\geqslant 2)$; (2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散.

**证明** (1) 因为 $\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) > \frac{1}{n+1}\ (n\geqslant 2)$, 所以根据条件, 有

$$\begin{aligned}\frac{a_n}{a_{n+1}} &\leqslant 1+\frac{1}{n}+\frac{n+1}{n\ln n}\cdot\frac{1}{n+1}+b_n\\ &< 1+\frac{1}{n}+\frac{n+1}{n\ln n}\cdot\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)+b_n\\ &= \frac{n+1}{n}\cdot\frac{\ln(n+1)}{\ln n}+b_n.\end{aligned}$$

(5分)

(2) 令 $c_n=(n\ln n)a_n,\ d_n=\frac{n\ln n}{(n+1)\ln(n+1)}\cdot|b_n|$. 则有

$$\frac{c_n}{c_{n+1}} < 1+d_n.$$

取对数, 得

$$\ln c_n-\ln c_{n+1} < \ln(1+d_n) \leqslant d_n.$$

于是

$$\ln c_2-\ln c_n < \sum_{k=2}^{n-1} d_k,,\ (n\geqslant 3).$$

(10分)

由于 $0 \leqslant d_n < |b_n|$, 从 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ 绝对收敛, 可知 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} d_n$ 收敛. 故, 由上式可知存在常数 $c$ 使得

$$c \leqslant \ln c_n,\ n \geqslant 3.$$

即,

$$a_n \geqslant \frac{e^c}{n \ln n},\ n \geqslant 3.$$

于是 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散. (15分）

(2) 法二：由条件

$$\begin{aligned} \ln \frac{a_n}{a_{n+1}} &\leqslant \ln\left(1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n \ln n} + |b_n|\right) \\ &\leqslant \frac{1}{n} + \frac{1}{n \ln n} + |b_n|. \end{aligned}$$

从 3 到 $n$ 求和, 然后利用积分的性质可知存在常数 $C > 0$ 使得

$$\begin{aligned} \ln \frac{a_3}{a_{n+1}} &\leqslant \sum_{k=3}^{n} \left(\frac{1}{k} + \frac{1}{k \ln k} + |b_k|\right) \\ &\leqslant C + \ln n + \ln \ln n. \end{aligned}$$

(10分）

于是

$$a_{n+1} \geqslant \frac{a_3 e^C}{n \ln n}.$$

故，$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散。 (15分）

六、（本题20分）设 $f: \mathbb{R} \to (0, +\infty)$ 是一可微函数, 且对所有 $x, y \in \mathbb{R}$, 有

$$|f'(x) - f'(y)| \leqslant |x - y|^{\alpha},$$

其中 $\alpha \in (0, 1]$ 是常数. 求证: 对所有 $x \in \mathbb{R}$, 有

$$\left|f'(x)\right|^{\frac{\alpha+1}{\alpha}} < \frac{\alpha + 1}{\alpha} f(x).$$

**证明** 对固定的 $x \in \mathbb{R}$, 若 $f'(x) = 0$, 则 (2) 成立. (2分)

若 $f'(x)<0$, 则 $h=(-f'(x))^{\frac{1}{\alpha}}>0$. 根据 Newton-Leibniz 公式和条件, 得

$$\begin{aligned}0<f(x+h)&=f(x)+\int_x^{x+h}f'(t)\,dt\\&=f(x)+\int_x^{x+h}\big(f'(t)-f'(x)\big)\,dt+f'(x)h\\&\leqslant f(x)+\int_x^{x+h}(t-x)^\alpha\,dt+f'(x)h\\&=f(x)+\frac{1}{\alpha+1}h^{\alpha+1}+f'(x)h.\end{aligned}$$

故

$$\frac{1}{\alpha+1}h^{\alpha+1}+f'(x)h+f(x)>0. \tag{3}$$

将 $h=(-f'(x))^{\frac{1}{\alpha}}$ 代入上式, 即得

$$\big|f'(x)\big|^{\frac{\alpha+1}{\alpha}}<\frac{\alpha+1}{\alpha}f(x).$$

(11分)

若 $f'(x)>0$, 则记 $h=(f'(x))^{\frac{1}{\alpha}}$. 根据 Newton-Leibniz 公式和条件, 得

$$\begin{aligned}0<f(x-h)&=-\int_{x-h}^{x}f'(t)\,dt+f(x)\\&=\int_{x-h}^{x}\big(f'(x)-f'(t)\big)\,dt-f'(x)h+f(x)\\&\leqslant\int_{x-h}^{x}(x-t)^\alpha\,dt-f'(x)h+f(x)\\&=\frac{1}{\alpha+1}h^{\alpha+1}-f'(x)h+f(x).\end{aligned}$$

将 $h=(f'(x))^{\frac{1}{\alpha}}$ 代入上式, 仍得

$$\big(f'(x)\big)^{\frac{\alpha+1}{\alpha}}<\frac{\alpha+1}{\alpha}f(x).$$

总之, 始终有 $\big|f'(x)\big|^{\frac{\alpha+1}{\alpha}}<\frac{\alpha+1}{\alpha}f(x)$. 证毕. (20分)

# 第九届中国大学生数学竞赛预赛试卷参考答案
## (数学类, 2017年10月)

考试形式: 闭卷　考试时间: 150 分钟　满分: 100 分

| 题号 | 一 | 二 | 三 | 四 | 五 | 六 | 总分 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 满分 | 15 | 15 | 15 | 20 | 15 | 20 | 100 |
| 得分 | | | | | | | |

注意: 1. 所有答题都须写在此试卷纸密封线右边, 写在其它纸上一律无效.
2. 密封线左边请勿答题, 密封线外不得有姓名及相关标记.
3. 如答题空白不够, 可写在当页背面, 并标明题号.

专业:______ 考生座位号:______ 所在院校:______ 准考证号:______ 姓名:______

密封线　答题时不要超过此线

| 得分 | |
|---|---|
| 评阅人 | |

一、(本题 15 分) 在空间直角坐标系中, 设单叶双曲面$\Gamma$的方程为 $x^2+y^2-z^2=1$. 设$P$为空间中的平面，它交$\Gamma$于一抛物线$C$. 求该平面$P$的法线与$z$-轴的夹角.

**解**：设平面$P$上的抛物线$C$的顶点为$X_0=(x_0,y_0,z_0)$. 取平面$P$上$X_0$处相互正交的两单位向量$\alpha=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$和 $\beta=(\beta_1,\beta_2,\beta_3)$, 使得$\beta$是抛物线$C$在平面$P$上的对称轴方向. 则抛物线的参数方程为

$$X(t)=X_0+t\alpha+\lambda t^2\beta,\ \ t\in\mathbf{R},$$

$\lambda$为不等于0的常数. (5分)

记$X(t)=(x(t),y(t),z(t))$, 则

$$x(t)=x_0+\alpha_1 t+\lambda\beta_1 t^2,\ \ y(t)=y_0+\alpha_2 t+\lambda\beta_2 t^2,\ \ z(t)=z_0+\alpha_3 t+\lambda\beta_3 t^2.$$

因为$X(t)$落在单叶双曲面$\Gamma$上, 代入方程$x^2+y^2-z^2=1$, 我们得到对任意$t$要满足的方程

$$\lambda^2(\beta_1^2+\beta_2^2-\beta_3^2)t^4+2\lambda(\alpha_1\beta_1+\alpha_2\beta_2-\alpha_3\beta_3)t^3+A_1t^2+A_2t+A_3=0,$$

其中$A_1,A_2,A_3$是与$X_0,\alpha,\beta$相关的常数. 于是得到

$$\beta_1^2+\beta_2^2-\beta_3^2=0,\ \ \alpha_1\beta_1+\alpha_2\beta_2-\alpha_3\beta_3=0.$$

(10分)

因为$\{\alpha,\beta\}$是平面$P$上正交的两单位向量, 则有

$$\alpha_1^2+\alpha_2^2+\alpha_3^2=1,\ \beta_1^2+\beta_2^2+\beta_3^2=1,\ \alpha_1\beta_1+\alpha_2\beta_2+\alpha_3\beta_3=0.$$

于是得到

$$\beta_1^2+\beta_2^2=\beta_3^2=\frac{1}{2},\ \alpha_1\beta_1+\alpha_2\beta_2=0,\ \alpha_3=0,\ \alpha_1^2+\alpha_2^2=1;$$

$$\alpha=(\alpha_1,\alpha_2,0),\ \beta=(-\frac{\varepsilon}{\sqrt{2}}\alpha_2,\frac{\varepsilon}{\sqrt{2}}\alpha_1,\beta_3),\ \varepsilon=\pm1.$$

于是得到平面$P$的法向量

$$n=\alpha\times\beta=(A,B,\frac{\varepsilon}{\sqrt{2}}),$$

它与$z$-轴方向$e=(0,0,1)$的夹角$\theta$满足$\cos\theta=n\cdot e=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}$, 为$\frac{\pi}{4}$或$\frac{3\pi}{4}$.　　（15分）

姓名:______ 准考证号:______ 所在院校:______ 考生座位号:______ 专业:______

密封线 答题时不要超过此线

| 得分 | |
|---|---|
| 评阅人 | |

二、(本题 15 分)设 $\{a_n\}$ 是递增数列, $a_1 > 1$. 求证: 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{a_{n+1}-a_n}{a_n \ln a_{n+1}}$ 收敛的充分必要条件是 $\{a_n\}$ 有界. 又问级数通项分母中的 $a_n$ 能否换成 $a_{n+1}$?

**证明** 充分性：若 $\{a_n\}$ 有界, 则可设 $a_n \leqslant M$.

$$\sum_{n=1}^{m} \frac{a_{n+1}-a_n}{a_n \ln a_{n+1}} \leqslant \sum_{n=1}^{m} \frac{a_{n+1}-a_n}{a_1 \ln a_1} = \frac{a_{m+1}-a_1}{a_1 \ln a_1} \leqslant \frac{M}{a_1 \ln a_1}.$$

由此知 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{a_{n+1}-a_n}{a_n \ln a_{n+1}}$ 收敛. (5分)

必要性：设 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{a_{n+1}-a_n}{a_n \ln a_{n+1}}$ 收敛. 由于

$$\ln(a_{n+1}) - \ln(a_n) = \ln\left(1 + \frac{a_{n+1}-a_n}{a_n}\right) \leqslant \frac{a_{n+1}-a_n}{a_n},$$

所以

$$\frac{b_{n+1}-b_n}{b_{n+1}} \leqslant \frac{a_{n+1}-a_n}{a_n \ln a_{n+1}},$$

其中 $b_n = \ln a_n$. 因此, 级数 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{b_{n+1}-b_n}{b_{n+1}}$ 收敛. (10分)

由 Cauchy 收敛准则, 存在自然数 $m$, 使得对一切自然数 $p$, 有

$$\frac{1}{2} > \sum_{n=m}^{m+p} \frac{b_{n+1}-b_n}{b_{n+1}} \geqslant \sum_{n=m}^{m+p} \frac{b_{n+1}-b_n}{b_{m+p+1}} = \frac{b_{m+p+1}-b_m}{b_{m+p+1}} = 1 - \frac{b_m}{b_{m+p+1}}.$$

由此可知 $\{b_n\}$ 有界,因为$p$是任意的. 因而 $\{a_n\}$ 有界. (13分)

题中级数分母的 $a_n$ 不能换成 $a_{n+1}$. 例如: $a_n = e^{n^2}$ 无界, 但 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{a_{n+1}-a_n}{a_{n+1} \ln a_{n+1}}$ 收敛. (15分)

| 得分 | |
|---|---|
| 评阅人 | |

三、证明题（15分）设$\Gamma = \{W_1, W_2, \ldots, W_r\}$为$r$个各不相同的可逆$n$阶复方阵构成的集合. 若该集合关于矩阵乘法封闭(即, $\forall M, N \in \Gamma$,有$MN \in \Gamma$), 证明：$\Sigma_{i=1}^{r} W_i = 0$当且仅当$\Sigma_{i=1}^{r} tr(W_i) = 0$,其中$tr(W_i)$表示$W_i$的迹.

**证明**：必要性：由迹的性质直接知. (2分)

充分性：首先，对于可逆矩阵$W \in \Gamma$，有$WW_1, \ldots, WW_r$各不相同 . 故有

$$W\Gamma \equiv \{WW_1, WW_2, \ldots, WW_r\} = \{W_1, W_2, \ldots, W_r\},$$

即，$W\Gamma = \Gamma, \forall W \in \Gamma$. (7分）

记$S = \Sigma_{i=1}^{r} W_i$, 则 $WS = S, \forall W \in \Gamma$. 进而 $S^2 = rS$, 即， $S^2 - rS = 0$. 若$\lambda$为$S$的特征值，则$\lambda^2 - r\lambda = 0$, 即 $\lambda = 0$或$r$.

结合条件$\Sigma_{i=1}^{r} tr(W_i) = 0$知，$S$的特征值只能为0. 因此有$S - rI$可逆（例如取S的约当分解就可直接看出）

再次注意到 $S(S - rI) = S^2 - rS = 0$，此时右乘 $(S - rI)^{-1}$ 即得$S = 0$.证毕. (15分)

专业:______ 考生座位号:______ 所在院校:______ 准考证号:______ 姓名:______

密封线　答题时不要超过此线

| 得分 | |
| --- | --- |
| 评阅人 | |

四、（本题20分）给定非零实数$a$及实$n$阶反对称矩阵$A$(即, $A$的转置$A^T$等于$-A$), 记矩阵有序对集合$T$为：

$$T = \{(X,Y)|X \in \mathbb{R}^{n\times n}, Y \in \mathbb{R}^{n\times n}, XY = aI + A\},$$

其中$I$为$n$阶单位阵，$\mathbb{R}^{n\times n}$为所有实$n$阶方阵构成的集合。证明：任取$T$中两元：$(X,Y)$和$(M,N)$, 必有$XN + Y^TM^T \neq 0$.

**证明**：反证. 若 $XN + Y^TM^T = 0$,则有

$$N^TX^T + MY = 0.$$

(2分)

另外，由$(X,Y) \in T$得

$$XY + (XY)^T = 2aI,$$

即

$$XY + Y^TX^T = 2aI.$$

类似有

$$MN + N^TM^T = 2aI.$$

因此，

$$\begin{pmatrix} X & Y^T \\ M & N^T \end{pmatrix}\begin{pmatrix} Y & N \\ X^T & M^T \end{pmatrix} = 2a\begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix},$$

(10分)

进而

$$\frac{1}{2a}\begin{pmatrix} Y & N \\ X^T & M^T \end{pmatrix}\begin{pmatrix} X & Y^T \\ M & N^T \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix},$$

得

$$YY^T + NN^T = 0$$

所以

$$Y = 0, N = 0$$

导致$XY = 0$, 与$XY = aI + A \neq 0$矛盾.证毕. (20分)

| 得分 | |
|---|---|
| 评阅人 | |

五、（本题15分）设 $f(x)=\arctan x$, $A$ 为常数. 若

$$B=\lim_{n\to\infty}\Big(\sum_{k=1}^{n}f\big(\frac{k}{n}\big)-An\Big)$$

存在, 求$A,B$.

**解:**

**法 I.** 我们有

$$\begin{aligned} A &= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}f\big(\frac{k}{n}\big)=\int_0^1 f(x)\,dx \\ &= x\arctan x\Big|_0^1-\int_0^1\frac{x}{1+x^2}\,dx=\frac{\pi}{4}-\frac{\ln 2}{2}. \end{aligned}$$

…………………………………………………………………………(6 分)

对于 $x\in\big(\frac{k-1}{n},\frac{k}{n}\big)$, $(1\leqslant k\leqslant n)$, 由中值定理, 存在 $\xi_{n,k}\in\big(\frac{k-1}{n},\frac{k}{n}\big)$ 使得

$$f(x)=f\big(\frac{k}{n}\big)+f'\big(\frac{k}{n}\big)\big(x-\frac{k}{n}\big)+\frac{f''(\xi_{n,k})}{2}\big(x-\frac{k}{n}\big)^2.$$

…………………………………………………………………………(9 分)

于是,

$$\begin{aligned} &\Big|\sum_{k=1}^{n}f\big(\frac{k}{n}\big)-nA+\sum_{k=1}^{n}n\int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}}f'\big(\frac{k}{n}\big)\big(x-\frac{k}{n}\big)\,dx\Big| \\ =\ &\Big|\sum_{k=1}^{n}n\int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}}\Big[f\big(\frac{k}{n}\big)+f'\big(\frac{k}{n}\big)\big(x-\frac{k}{n}\big)-f(x)\Big]\,dx\Big| \\ \leqslant\ & M\sum_{k=1}^{n}n\int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}}\big(x-\frac{k}{n}\big)^2\,dx=\frac{M}{3n}, \end{aligned}$$

其中 $M=\frac{1}{2}\max_{x\in[0,1]}|f''(x)|$.

…………………………………………………………………………(12 分)

因此,

$$\begin{aligned} &\lim_{n\to\infty}\Big(\sum_{k=1}^{n}f\big(\frac{k}{n}\big)-An\Big)=-\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}n\int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}}f'\big(\frac{k}{n}\big)\big(x-\frac{k}{n}\big)\,dx \\ =\ &\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2n}\sum_{k=1}^{n}f'\big(\frac{k}{n}\big)=\frac{1}{2}\int_0^1 f'(x)\,dx=\frac{\pi}{8}. \end{aligned}$$

…………………………………………………………………………(15 分)

专业:__________ 考生座位号:__________ 所在院校:__________ 准考证号:__________ 姓名:__________

密封线 答题时不要超过此线

**法 II.** 我们有

$$
\begin{aligned}
A &= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\big(\frac{k}{n}\big) = \int_0^1 f(x)\,dx \\
&= x\arctan x\Big|_0^1 - \int_0^1 \frac{x}{1+x^2}\,dx = \frac{\pi}{4} - \frac{\ln 2}{2}.
\end{aligned}
$$

……………………………………………………………………………(6 分)

对于 $x\in\big(\frac{k-1}{n},\frac{k}{n}\big)$, $(1\leqslant k\leqslant n)$, 由中值定理, 存在 $\xi_{n,k}\in\big(\frac{k-1}{n},\frac{k}{n}\big)$ 使得

$$
f\big(\frac{k}{n}\big) = f(x) + f'(x)\big(\frac{k}{n}-x\big) + \frac{f''(\xi_{n,k})}{2}\big(\frac{k}{n}-x\big)^2.
$$

……………………………………………………………………………(9 分)

于是,

$$
\begin{aligned}
&\Big|\sum_{k=1}^{n} f\big(\frac{k}{n}\big) - nA - \sum_{k=1}^{n} n\int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} f'(x)\big(\frac{k}{n}-x\big)\,dx\Big| \\
=& \Big|\sum_{k=1}^{n} n\int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} \Big[f\big(\frac{k}{n}\big) - f(x) - f'(x)\big(\frac{k}{n}-x\big)\Big]\,dx\Big| \\
\leqslant& M\sum_{k=1}^{n} n\int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} \big(\frac{k}{n}-x\big)^2\,dx = \frac{M}{3n},
\end{aligned}
$$

其中 $M=\frac{1}{2}\max_{x\in[0,1]}|f''(x)|$.

……………………………………………………………………………(12 分)

因此,

$$
\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty}\Big(\sum_{k=1}^{n} f\big(\frac{k}{n}\big) - An\Big) &= \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} n\int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} f'(x)\big(\frac{k}{n}-x\big)\,dx \\
&= \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} nf'(\eta_{n,k})\int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} \big(\frac{k}{n}-x\big)\,dx \\
&= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{2n}\sum_{k=1}^{n} f'(\eta_{n,k}) = \frac{1}{2}\int_0^1 f'(x)\,dx = \frac{\pi}{8},
\end{aligned}
$$

其中 $\eta_{n,k}\in\big(\frac{k-1}{n},\frac{k}{n}\big)$.

……………………………………………………………………………(15 分)

**法 III.** 我们有

$$
\begin{aligned}
A &= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\big(\frac{k}{n}\big) = \int_0^1 f(x)\,dx \\
&= x\arctan x\Big|_0^1 - \int_0^1 \frac{x}{1+x^2}\,dx = \frac{\pi}{4} - \frac{\ln 2}{2}.
\end{aligned}
$$

$\cdots\cdots$(6 分)

对于 $x \in \left(\frac{k-\frac{1}{2}}{n}, \frac{k+\frac{1}{2}}{n}\right)$, $(1 \leqslant k \leqslant n)$, 由中值定理, 存在 $\xi_{n,k} \in \left(\frac{k-\frac{1}{2}}{n}, \frac{k+\frac{1}{2}}{n}\right)$ 使得

$$f(x) = f\left(\frac{k}{n}\right) + f'\left(\frac{k}{n}\right)\left(x - \frac{k}{n}\right) + \frac{f''(\xi_{n,k})}{2}\left(x - \frac{k}{n}\right)^2.$$

$\cdots\cdots$(9 分)

于是,

$$\begin{aligned}
&\Big|\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) - nA - n\int_1^{1+\frac{1}{2n}} f(x)\,dx + n\int_0^{\frac{1}{2n}} f(x)\,dx\Big| \\
= \ &\Big|\sum_{k=1}^{n} n\int_{\frac{k-\frac{1}{2}}{n}}^{\frac{k+\frac{1}{2}}{n}} \left[f\left(\frac{k}{n}\right) - f(x) + f'\left(\frac{k}{n}\right)\left(\frac{k}{n} - x\right)\right] dx\Big| \\
\leqslant \ &M\sum_{k=1}^{n} n\int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} \left(\frac{k}{n} - x\right)^2 dx = \frac{M}{3n},
\end{aligned}$$

其中 $M = \frac{1}{2}\max_{x\in[0,1]} |f''(x)|$.

$\cdots\cdots$(12 分)

因此,

$$\begin{aligned}
&\lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) - An\right) = \lim_{n\to\infty} n\int_1^{1+\frac{1}{2n}} f(x)\,dx - \lim_{n\to\infty} n\int_0^{\frac{1}{2n}} f(x)\,dx \\
= \ &\frac{f(1)}{2} - \frac{f(0)}{2} = \frac{\pi}{8}.
\end{aligned}$$

$\cdots\cdots$(15 分)

姓名:________ 准考证号:________ 所在院校:________ 考生座位号:________ 专业:________

密封线 答题时不要超过此线

| 得分 | |
|---|---|
| 评阅人 | |

六、（本题20分）设 $f(x)=1-x^2+x^3 \quad (x\in[0,1])$, 计算以下极限并说明理由

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\int_0^1 f^n(x)\ln(x+2)\,dx}{\int_0^1 f^n(x)\,dx}.$$

**解:** 易见 $f(x)$ 连续. 注意到 $f(x)=1-x^2(1-x)$, 我们有

$$0<f(x)<1=f(0)=f(1),\qquad \forall x\in(0,1).$$

…………………………………………………………………(3 分)

任取 $\delta\in(0,\frac{1}{2})$, 我们有 $\eta=\eta_\delta\in(0,\delta)$ 使得

$$m_\eta\equiv\min_{x\in[0,\eta]}f(x)>M_\delta\equiv\max_{x\in[\delta,1-\delta]}f(x).$$

…………………………………………………………………(6 分)

于是当 $n\geqslant\frac{1}{\delta^2}$ 时,

$$\begin{aligned}
0 &\leqslant \frac{\int_\delta^1 f^n(x)\,dx}{\int_0^\delta f^n(x)\,dx}=\frac{\int_{1-\delta}^1 f^n(x)\,dx}{\int_0^\delta f^n(x)\,dx}+\frac{\int_\delta^{1-\delta} f^n(x)\,dx}{\int_0^\delta f^n(x)\,dx}\\
&= \frac{\int_0^\delta \big(1-x(1-x)^2\big)^n\,dx}{\int_0^\delta \big(1-x^2(1-x)\big)^n\,dx}+\frac{\int_\delta^{1-\delta} f^n(x)\,dx}{\int_0^\delta f^n(x)\,dx}\\
&\leqslant \frac{\int_0^\delta \big(1-\frac{x}{4}\big)^n\,dx}{\int_0^\delta \big(1-x^2\big)^n\,dx}+\frac{\int_\delta^{1-\delta} f^n(x)\,dx}{\int_0^\eta f^n(x)\,dx}\\
&\leqslant \frac{\int_0^\delta \big(1-\frac{x}{4}\big)^n\,dx}{\int_0^{\frac{1}{\sqrt{n}}} \big(1-\frac{x}{\sqrt{n}}\big)^n\,dx}+\frac{(1-2\delta)M_\delta^n}{\eta m_\eta^n}\\
&= \frac{\frac{4}{n+1}\Big(1-\big(1-\frac{\delta}{4}\big)^{n+1}\Big)}{\frac{\sqrt{n}}{n+1}\Big(1-\big(1-\frac{1}{n}\big)^{n+1}\Big)}+\frac{(1-\delta)}{\eta}\Big(\frac{M_\delta}{m_\eta^n}\Big)^n.
\end{aligned}$$

从而

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\int_\delta^1 f^n(x)\,dx}{\int_0^\delta f^n(x)\,dx}=0.$$

…………………………………………………………………(14 分)

==============================================

(**注:** 可以用多种写法说明上述极限成立. 原则上, 给出

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\int_\delta^{1-\delta} f^n(x)\,dx}{\int_0^\delta f^n(x)\,dx}=0$$

可以给 4 分, 给出

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\int_{1-\delta}^{1} f^n(x)\,dx}{\int_0^\delta f^n(x)\,dx}=0$$

给 4 分. )

==========================================================

对于 $\varepsilon\in(0,\ln\frac{5}{4})$, 取 $\delta=2(e^\varepsilon-1)$, 则 $\delta\in(0,\frac{1}{2})$, $\ln\frac{2+\delta}{2}=\varepsilon$.

另一方面, 由前述结论, 存在 $N\geqslant 1$ 使得当 $n\geqslant N$ 时有

$$\frac{\int_\delta^1 f^n(x)\,dx}{\int_0^\delta f^n(x)\,dx}\leqslant\varepsilon.$$

从而又有

$$\begin{aligned}
&\left|\frac{\int_0^1 f^n(x)\ln(x+2)\,dx}{\int_0^1 f^n(x)\,dx}-\ln 2\right|=\frac{\int_0^1 f^n(x)\ln\frac{x+2}{2}\,dx}{\int_0^1 f^n(x)\,dx}\\
\leqslant\ &\frac{\int_0^\delta f^n(x)\ln\frac{x+2}{2}\,dx}{\int_0^\delta f^n(x)\,dx}+\frac{\int_\delta^1 f^n(x)\ln\frac{x+2}{2}\,dx}{\int_0^\delta f^n(x)\,dx}\\
\leqslant\ &\ln\frac{\delta+2}{2}+\frac{\ln 2\int_\delta^1 f^n(x)\,dx}{\int_0^\delta f^n(x)\,dx}\\
\leqslant\ &\varepsilon(1+\ln 2).
\end{aligned}$$

因此

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\int_0^1 f^n(x)\ln(x+2)\,dx}{\int_0^1 f^n(x)\,dx}=\ln 2.$$

..................................................................(20 分)

# 第八届全国大学生数学竞赛预赛试卷参考答案
## (数学类, 2016年10月)

一、 (本题 15 分) 设 $S$ 是空间中的一个椭球面. 设方向为常向量 $V$ 的一束平行光线照射 $S$, 其中的部分光线与 $S$ 相切, 它们的切点在 $S$ 上形成一条曲线 $\Gamma$.

证明：$\Gamma$ 落在一张过椭球中心的平面上.

**证明 1** 在空间中取直角坐标系, 记椭球面 $S$ 的方程为

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1,\ \ V=(\alpha,\beta,\gamma).$$

设 $(x,y,z)\in\Gamma$, 则光束中的光线

$$\ell(t)=(x,y,z)+t(\alpha,\beta,\gamma),t\in\mathbb{R}$$

是椭球面 $S$ 的切线. ........ (8分 )

由于每条切线与椭球面有且仅有一个交点，故 $t=0$ 是方程

$$\frac{(x+t\alpha)^2}{a^2}+\frac{(y+t\beta)^2}{b^2}+\frac{(z+t\gamma)^2}{c^2}=1$$

的唯一解. 由于 $(x,y,z)\in\Gamma\subset S$, 上述方程化为

$$\left(\frac{\alpha^2}{a^2}+\frac{\beta^2}{b^2}+\frac{\gamma^2}{c^2}\right)t^2+2\left(\frac{\alpha}{a^2}x+\frac{\beta}{b^2}y+\frac{\gamma}{c^2}z\right)t=0.$$

这个方程只有 $t=0$ 的唯一解, 当且仅当

$$\frac{\alpha}{a^2}x+\frac{\beta}{b^2}y+\frac{\gamma}{c^2}z=0.$$

这是一个过原点的平面方程, 故 $\gamma$ 落在过椭球面中心的一张平面上. ........(15分)

**证明 2** 在空间中做仿射变换，将椭球面映成圆球面. .......... ( 5分 )
这时平行光束映成平行光束，切线映成切线，切点映成切点，椭球中心映成球面中心. ........ ( 10分 )
由于平行光束照圆球面的所有切线的切点是一个大圆，它落在过球心的平面上，而仿射变换将平面映成平面，故 $\Gamma$ 落在一张过椭球面中心的平面上. ....... ( 15分 )

二、 (本题 15 分) 设 $n$ 为奇数, $A, B$ 为两个实 $n$ 阶方阵, 且 $BA = 0$. 记 $A + J_A$ 的特征值集合为 $S_1$, $B + J_B$ 的特征值集合为 $S_2$, 其中 $J_A, J_B$ 分别表示 $A$ 和 $B$ 的 Jordan 标准型. 求证 $0 \in S_1 \cup S_2$.

**证明** 由秩不等式 $\operatorname{rank} A + \operatorname{rank} B \leqslant \operatorname{rank}(BA) + n$ 得 $\operatorname{rank} A + \operatorname{rank} B \leqslant n$. 结果 $\operatorname{rank} A \leqslant \frac{n}{2}$ 或 $\operatorname{rank} B \leqslant \frac{n}{2}$. ..........(5分)

注意到 $n$ 为奇数，故有 $\operatorname{rank} A < \frac{n}{2}$ 或 $\operatorname{rank} B < \frac{n}{2}$ 成立。 .........(10分)

若 $\operatorname{rank} A < \frac{n}{2}$, 则 $\operatorname{rank}(A + J_A) \leqslant \operatorname{rank} A + \operatorname{rank} J_A < n$, 此时, $0 \in S_1$;

若 $\operatorname{rank} B < \frac{n}{2}$, 则 $\operatorname{rank}(B + J_B) \leqslant \operatorname{rank} B + \operatorname{rank} J_B < n$, 此时, $0 \in S_2$. 最终总有 $0 \in S_1 \cup S_2$. ........(15分)

三、(本题 20 分) 设 $A_1,\ldots,A_{2017}$ 为 2016 阶实方阵。证明关于 $x_1,\ldots,x_{2017}$ 的方程 $\det(x_1A_1+\cdots+x_{2017}A_{2017})=0$ 至少有一组非零实数解, 其中 det 表示行列式.

**证明** 记

$$A_1=(p_1^{(1)},\cdots,p_{2016}^{(1)}),\ldots,A_{2017}=(p_1^{(2017)},\cdots,p_{2016}^{(2017)}).$$

.........(5分)

考虑线性方程组

$$x_1p_1^{(1)}+\cdots+x_{2017}p_1^{(2017)}=0$$

..........(10分)

由于未知数个数大于方程个数，故该线性方程组必有非零解 $(c_1,\cdots,c_{2017})$. 从而 $c_1A_1+\cdots+c_{2017}A_{2017}$ 的第一列为 0，更有

$$\det(c_1A_1+\cdots+c_{2017}A_{2017})=0.$$

证毕。 ...........(20分)

四、 (本题 20 分) 设 $f_0(x)$ 和 $f_1(x)$ 是 $[0,1]$ 上正连续函数, 满足 $\int_0^1 f_0(x)\,dx \leqslant \int_0^1 f_1(x)\,dx$. 设

$$f_{n+1}(x)=\frac{2f_n^2(x)}{f_n(x)+f_{n-1}(x)},\ n=1,2,\cdots.$$

求证: 数列 $a_n=\displaystyle\int_0^1 f_n(x)\,dx,\ n=0,1,2,\cdots$ 单调递增且收敛.

**证明** 因为

$$\begin{aligned}&\int_0^1 \frac{f_1^2(x)}{f_1(x)+f_0(x)}\,dx-\int_0^1 \frac{f_0^2(x)}{f_1(x)+f_0(x)}\,dx\\ =&\int_0^1 \frac{f_1^2(x)-f_0^2(x)}{f_1(x)+f_0(x)}\,dx=\int_0^1 f_1(x)\,dx-\int_0^1 f_0(x)\,dx\geqslant 0.\end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned}a_2-a_1=&\quad 2\int_0^1 \frac{f_1^2(x)}{f_1(x)+f_0(x)}\,dx-\int_0^1 f_1(x)\,dx\\ &=\int_0^1 \frac{f_1^2(x)}{f_1(x)+f_0(x)}\,dx-\int_0^1 \frac{f_1(x)f_0(x)}{f_1(x)+f_0(x)}\,dx\\ &\geqslant \frac12\int_0^1 \frac{f_1^2(x)+f_0^2(x)}{(f_1(x)+f_0(x))}\,dx-\int_0^1 \frac{f_1(x)f_0(x)}{f_1(x)+f_0(x)}\,dx\\ &=\int_0^1 \frac{(f_1(x)-f_0(x))^2}{2(f_1(x)+f_0(x))}\,dx\geqslant 0.\end{aligned}$$

归纳地可以证明 $a_{n+1}\geqslant a_n,\ n=1,2,\cdots.$ ............(5分)

由于 $f_0,f_1$ 是正连续函数, 可取常数 $k\geqslant 1$ 使得 $f_1\leqslant kf_0$. 设 $c_1=k$. 根据递推关系可以归纳证明

$$f_n(x)\leqslant c_nf_{n-1}(x), \tag{1}$$

............(10分)

其中 $c_{n+1}=\frac{2c_n}{c_n+1},\ n=0,1,\cdots.$ 易证 $\{c_n\}$ 单调递减趋于 1, 且 $\frac{c_n}{c_n+1}\leqslant\frac{k}{k+1}$.

............(15分)

以下证明 $\{a_n\}$ 收敛. 由 (1) 可得 $a_{n+1}\leqslant c_{n+1}a_n$. 因此

$$c_{n+1}a_{n+1}\leqslant \frac{2c_{n+1}}{c_n+1}c_na_n=\frac{4c_n}{(c_n+1)^2}c_na_n\leqslant c_na_n.$$

这说明 $\{c_na_n\}$ 是正单调递减数列, 因而收敛. 注意到 $\{c_n\}$ 收敛到 1, 可知 $\{a_n\}$ 收敛, 且 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n\leqslant c_1a_1=ka_1$. ............(20分)

五、(本题 15 分) 设 $\alpha > 1$. 求证不存在 $[0, +\infty)$ 上的正可导函数 $f(x)$ 满足

$$f'(x) \geqslant f^{\alpha}(x), \ x \in [0, +\infty). \tag{1}$$

**证明** 若 $f(x)$ 是这样的函数, 则 $f'(x) > 0$. 因此 $f(x)$ 是严格递增函数. (1) 式可表示为

$$\left(\frac{1}{\alpha - 1} f^{1-\alpha}(x) + x\right)' \leqslant 0.$$

这说明 $\frac{1}{\alpha-1} f^{1-\alpha}(x) + x$ 是单调递减函数. ............(5分)

因而

$$\frac{1}{\alpha - 1} f^{1-\alpha}(x+1) + (x+1) \leqslant \frac{1}{\alpha - 1} f^{1-\alpha}(x) + x,$$

即,

$$(\alpha - 1) \leqslant f^{1-\alpha}(x) - f^{1-\alpha}(x+1) < f^{1-\alpha}(x).$$

因此

$$f^{\alpha-1}(x) < \frac{1}{\alpha - 1}.$$

于是 $f(x)$ 是有界函数. ............(10分)

从 $f(x)$ 的严格递增性, 可知 $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ 收敛. 由微分中值定理, 存在 $\xi \in (x, x+1)$ 使得

$$f(x+1) - f(x) = f'(\xi) \geqslant f^{\alpha}(\xi) \geqslant f^{\alpha}(x) \geqslant f^{\alpha}(0) > 0.$$

令 $x \to +\infty$, 上式左端趋于零, 可得矛盾! ............(15分)

六、 (本题 15 分) 设 $f(x)$ 和 $g(x)$ 是 $[0,1]$ 区间上的单调递增函数, 满足

$$0 \le f(x), g(x) \le 1, \int_0^1 f(x)dx = \int_0^1 g(x)dx.$$

求证：

$$\int_0^1 |f(x)-g(x)|dx \le \frac{1}{2}.$$

**证明** 由于$f$ 和 $g$ 可用单调阶梯函数逼近，故可不妨设他们都是单调增的阶梯函数。 ............(2分)

令 $h(x)=f(x)-g(x)$, 则对 $\forall x, y \in [0,1]$ 有 $|h(x)-h(y)| \leqslant 1$. ............(5分)

事实上，对 $x \geqslant y$ 我们有

$$-1 \leqslant -(g(x)-g(y)) \leqslant h(x)-h(y) = f(x)-f(y)-(g(x)-g(y)) \leqslant f(x)-f(y) \leqslant 1;$$

对 $x<y$ 有

$$-1 \leqslant f(x)-f(y) \leqslant h(x)-h(y) \leqslant g(y)-g(x) \leqslant 1.$$

现记

$$C_1 = \{x \in [0,1] \mid f(x) \geqslant g(x)\}, \quad C_2 = \{x \in [0,1] \mid f(x) < g(x)\},$$

则 $C_1$ 与 $C_2$ 分别为有限个互不相交区间的并，且由 $\int_0^1 f dx = \int_0^1 g dx$, 有

$$\int_{C_1} h dx = -\int_{C_2} h dx.$$

让 $|C_i|(i=1,2)$ 表示 $C_i$ 所含的那些区间的长度之和, 则 $|C_1|+|C_2|=1$. ............(7分)

于是

$$\begin{aligned}
2\int_0^1 |f-g|dx &= 2\left(\int_{C_1} h dx - \int_{C_2} h dx\right) \\
&\leqslant \left(\frac{|C_2|}{|C_1|}\int_{C_1} h dx + \frac{|C_1|}{|C_2|}\int_{C_2}(-h)dx\right) + \int_{C_1} h dx - \int_{C_2} h dx \\
&= \frac{1}{|C_1|}\int_{C_1} h dx + \frac{1}{|C_2|}\int_{C_2}(-h)dx \\
&\leqslant \sup_{C_1} h + \sup_{C_2}(-h) \\
&\leqslant 1.
\end{aligned}$$

注意，上式中最后一个不等式来自 $|h(x)-h(y)| \leqslant 1$，另外，若有某个 $|C_i|$ 等于 0，则结论显然成立。 ............(15分)

# 第七届中国大学生数学竞赛预赛试卷参考答案及评分标准
## (数学类, 2015年10月)

考试形式: 闭卷　考试时间: 150 分钟　满分: 100 分

一、 (本题 15 分) 设 $L_1$ 和$L_2$是空间中两异面直线.设在标准直角坐标系下直线$L_1$过坐标为$a$的点，以单位向量$v$为直线方向；直线$L_2$过坐标为$b$的点，以单位向量$w$为直线方向.

1) 证明：存在唯一点$P \in L_1$ 和$Q \in L_2$ 使得两点连线$PQ$ 同时垂直于 $L_1$ 和$L_2$.

2)求$P$点和$Q$点坐标(用$a, b, v, w$表示).

**解**：1）过直线$L_2$上一点和线性无关向量 $v$ 和$w$ 做平面$\sigma$，则直线$L_2$落在平面$\sigma$上，且直线$L_1$平行于平面$\sigma$ 。过$L_1$做平面$\tau$ 垂直于平面$\sigma$ ，记两平面交线为$L_1^*$。设两直线$L_1^*$和$L_2$的交点为$Q$, 过$Q$做平面$\sigma$ 的法线，交直线$L_1$为$P$, 则 $PQ$ 同时垂直于$L_1$和$L_2$。 ......(4分)

设$X = P + sv \in L_1$ 和$Y = Q + tw \in L_2$ 也使得$XY$同时垂直于$L_1$和$L_2$，则有

$\overrightarrow{XY} = \overrightarrow{PQ} - sv + tw$垂直于 $v$ 和$w$ ，故有 $-s + (v \cdot w)t = 0$ 和 $-s(v \cdot w) + t = 0$ 。由于$(v \cdot w)^2 < 1$ ，我们得到$s = t = 0$ , 即$X = P$，$Y = Q$，这样的$P$和$Q$存在且唯一。 ......(8分)

2）设$P = a + sv \in L_1$ 和$Q = b + tw \in L_2$ 。因为$\overrightarrow{PQ} = \lambda v \times w$ ，我们得到

$$(b - a) - sv + tw = \lambda v \times w,$$

.......(11分)

于是有

$$(b - a) \cdot v - s + t(v \cdot w) = 0, (b - a) \cdot w - s(v \cdot w) + t = 0$$

故有

$$s = \frac{(b - a) \cdot (v - (v \cdot w)w)}{1 - (v \cdot w)^2}, t = \frac{(a - b) \cdot (w - (v \cdot w)v)}{1 - (v \cdot w)^2}$$

得到

$$P = a + \frac{(b - a) \cdot (v - (v \cdot w)w)}{1 - (v \cdot w)^2}v, Q = b + \frac{(a - b) \cdot (w - (v \cdot w)v)}{1 - (v \cdot w)^2}w.$$

.......(15分)

二、 (本题 20 分) $A$为4阶复方阵，它满足关于迹的关系式：$\mathrm{tr}A^i = i, i = 1,2,3,4.$ 求$A$的行列式.

**解** $|A| = \frac{1}{24}$, 过程如下：

首先，记$A$的4个特征值为$\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$, $A$的特征多项式为 $p(\lambda) = \lambda^4 + a_3\lambda^3 + a_2\lambda^2 + a_1\lambda + a_0$. 则由$p(\lambda) = (\lambda-\lambda_1)(\lambda-\lambda_2)(\lambda-\lambda_3)(\lambda-\lambda_4)$可知

$$\begin{cases} a_3 = -(\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3+\lambda_4) \\ a_2 = \lambda_1\lambda_2+\lambda_1\lambda_3+\lambda_1\lambda_4+\lambda_2\lambda_3+\lambda_2\lambda_4+\lambda_3\lambda_4 \\ a_1 = -(\lambda_1\lambda_2\lambda_3+\lambda_1\lambda_2\lambda_4+\lambda_1\lambda_3\lambda_4+\lambda_2\lambda_3\lambda_4) \\ a_0 = |A| = \lambda_1\lambda_2\lambda_3\lambda_4 \end{cases}$$

其次，由于迹在相似变换下保持不变，故由$A$的约当标准形（或Schur分解）立知

$$\begin{cases} \lambda_1+\lambda_2+\lambda_3+\lambda_4 = 1\cdots\cdots\cdots\cdots(1) \\ \lambda_1^2+\lambda_2^2+\lambda_3^2+\lambda_4^2 = 2\cdots\cdots\cdots\cdots(2) \\ \lambda_1^3+\lambda_2^3+\lambda_3^3+\lambda_4^3 = 3\cdots\cdots\cdots\cdots(3) \\ \lambda_1^4+\lambda_2^4+\lambda_3^4+\lambda_4^4 = 4\cdots\cdots\cdots\cdots(4) \end{cases}$$

......(10分)

由（1）和（2）得

$$a_2 = \lambda_1\lambda_2+\lambda_1\lambda_3+\lambda_1\lambda_4+\lambda_2\lambda_3+\lambda_2\lambda_4+\lambda_3\lambda_4 = -\frac{1}{2}$$

由（1）两边立方得

$$1 = \lambda_1^3+\lambda_2^3+\lambda_3^3+\lambda_4^3+3\lambda_1^2(\lambda_2+\lambda_3+\lambda_4)+3\lambda_2^2(\lambda_1+\lambda_3+\lambda_4)+3\lambda_3^2(\lambda_2+\lambda_1+\lambda_4)+3\lambda_4^2(\lambda_2+\lambda_3+\lambda_1)-6a_1$$

再由（1）（2）（3）即得

$$1 = 3+3\lambda_1^2-3\lambda_1^3+3\lambda_2^2-3\lambda_2^3+3\lambda_3^2-3\lambda_3^3+3\lambda_4^2-3\lambda_4^3-6a_1$$

$$a_1 = -\frac{1}{6}$$

最后，由$p(\lambda) = \lambda^4 - \lambda^3 - \frac{1}{2}\lambda^2 - \frac{1}{6}\lambda + a_0$得

$$\begin{cases} p(\lambda_1) = 0 \\ \quad\vdots \\ p(\lambda_4) = 0 \end{cases}$$

相加得

$$4 - 3 - \frac{1}{2}\times 2 - \frac{1}{6}\times 1 + 4a_0 = 0$$

结果$a_0 = \frac{1}{24}$, 亦即$A$的行列式为$\frac{1}{24}$.□

......(20分)

三、(本题 15 分) 设 $A$ 为 $n$ 阶实方阵，其 $n$ 个特征值皆为偶数. 试证明关于 $X$ 的矩阵方程

$$X + AX - XA^2 = 0$$

只有零解。

**证明** 设$C = I + A$, $B = A^2$, $A$的$n$个特征值为 $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$, 则$B$的$n$个特征值为 $\lambda_1^2, \lambda_2^2, \ldots, \lambda_n^2$; $C$的$n$个特征值为 $\mu_1 = \lambda_1 + 1, \mu_2 = \lambda_2 + 1, \ldots, \mu_n = \lambda_n + 1$; $C$ 的特征多项式为 $p_C(\lambda) = (\lambda - \mu_1)(\lambda - \mu_2)\cdots(\lambda - \mu_n)$.

......(5分)

若$X$为$X + AX - XA^2 = 0$ 的解，则有 $CX = XB$; 进而 $C^2X = XB^2, \cdots, C^kX = XB^k \cdots$, 结果 $0 = p_C(C)X = Xp_C(B) = X(B - \mu_1 I)\cdots(B - \mu_n I)$. 注意到$B$的$n$个特征值皆为偶数，而$C$的$n$个特征值皆为奇数，故

$B - \mu_1 I, \cdots, B - \mu_n I$ 皆为可逆矩阵，结果由 $0 = X(B - \mu_1 I)\cdots(B - \mu_n I)$立得 $X = 0$.□

......(15分)

四、(本题 15 分) 数列 $\{a_n\}$ 满足关系式 $a_{n+1}=a_n+\frac{n}{a_n}, a_1>0$. 求证 $\lim\limits_{n\to\infty} n(a_n-n)$ 存在.

**证明** $a_2=a_1+\frac{1}{a_1}\geqslant 2$. 若 $a_n\geqslant n$, 则

$a_{n+1}-(n+1)=a_n+\frac{n}{a_n}-n-1=(1-\frac{1}{a_n})(a_n-n)\geqslant 0$, 故

$a_n\geqslant n, \forall n\geqslant 2$, 且$a_n-n$单调递减.

......(5分)

令 $b_n=n(a_n-n)$, 则

$b_{n+1}=(n+1)(a_{n+1}-n-1)=(n+1)(a_n+\frac{n}{a_n}-n-1)$

$=(a_n-n)(n+1)(1-\frac{1}{a_n})=(1+\frac{1}{n})(1-\frac{1}{a_n})b_n$

$=(1+\frac{a_n-n}{na_n}-\frac{1}{na_n})b_n=(1+R_n)b_n$, 其中 $R_n=\frac{a_n-n}{na_n}-\frac{1}{na_n}$. 从而 $b_n=b_2\prod_{k=2}^{n-1}(1+R_k)$.

......(10分)

考察$R_n$.

$|R_n|\leqslant|\frac{a_n-n}{na_n}|+\frac{1}{na_n}\leqslant\frac{1+|a_2-2|}{n^2}, n\geqslant 2$.

结果由$\lim\prod_{k=2}^{n-1}(1+R_k)$存在知$\lim\ n(a_n-n)$ 存在.

......(15分)

五、(本题 15 分)设 $f(x)$ 是 $[0,+\infty)$ 上有界连续函数, $h(x)$ 是 $[0,+\infty)$ 上连续函数, 且 $\int_0^{+\infty}|h(t)|\,dt = a < 1$. 构造函数列如下: $g_0(x) = f(x)$,

$$g_n(x) = f(x) + \int_0^x h(t)g_{n-1}(t)\,dt, \quad n = 1, 2, \cdots \tag{1}$$

求证 $\{g_n(x)\}$ 收敛于一个连续函数, 并求其极限函数.

**证明** 记 $M = \sup|f(x)|$. 因而 $|g_0(x)| \leqslant M$. 假设 $|g_{n-1}(x)| \leqslant (1+a+\cdots+a^{n-1})M$. 由 (1) 可得

$$\begin{aligned}|g_n(x)| &\leqslant |f(x)| + \int_0^x |h(t)|\,|g_{n-1}(t)|\,dt \\ &\leqslant M + \int_0^{+\infty}|h(t)|(1+a+\cdots+a^{n-1})M\,dt \\ &= M + a(1+a+\cdots+a^{n-1})M \\ &= (1+a+\cdots+a^{n-1}+a^n)M.\end{aligned}$$

因此 $|g_n(x)| \leqslant \frac{1-a^{n+1}}{1-a}M$. 由 (1) 可得

$$g_n(x) - g_{n-1}(x) = \int_0^x h(t)(g_{n-1}(t) - g_{n-2}(t))\,dt,$$

由此可得

$$\sup|g_n(x) - g_{n-1}(x)| \leqslant a\sup|g_{n-1}(x) - g_{n-2}|.$$

从而

$$\sup|g_n(x) - g_{n-1}(x)| \leqslant a^{n-1}\sup|g_1(x) - g_0(x)| \leqslant a^n M.$$

...........5分

由于 $a \in [0,1)$, 从上面这个式子, 可知函数项级数

$$\sum_{n=1}^{+\infty}(g_n(x) - g_{n-1}(x))$$

在 $[0,+\infty)$ 上一致收敛, 即函数列 $\{g_n(x)\}$ 在 $[0,+\infty)$ 上一致收敛. 因为函数列的每一项都连续, 因而其极限函数 $g(x)$ 也是连续函数. ...........10分

在 (1) 的两边取极限得

$$g(x) = f(x) + \int_0^x h(t)g(t)\,dt. \tag{2}$$

记 $\psi(x) = \int_0^x h(t)g(t)\,dt$, $H(x) = \int_0^x h(t)\,dt$, 则此二函数可导, 且 $\psi'(x) = h(x)g(x)$, $H'(x) = h(x)$. 由 (2) 得

$$\psi'(x) - h(x)\psi(x) = h(x)f(x).$$

因而

$$\left(e^{-H(x)}\psi(x)\right)' = e^{-H(x)}h(x)f(x).$$

两边积分可得

$$e^{-H(x)}\psi(x) = \int_0^x e^{-H(t)}h(t)f(t)\,dt.$$

即,

$$\psi(x) = e^{H(x)}\int_0^x e^{-H(t)}h(t)f(t)\,dt.$$

将此代入 (2) 就得到

$$g(x) = f(x) + e^{H(x)}\int_0^x e^{-H(t)}h(t)f(t)\,dt.$$

..........15分

六、 (本题 20 分) 设 $f(x)$ 是 $\mathbb{R}$ 上有下界或者有上界的连续函数且存在正数 $a$ 使得

$$f(x)+a\int_{x-1}^{x}f(t)\,dt$$

为常数。求证：$f(x)$ 必为常数。

**证明:** 不妨设 $f(x)$ 有下界。设 $m=\inf_{x\in\mathbb{R}}f(x)$, $g(x)=f(x)-m$, 则 $g(x)$ 为非负连续函数，且

$$A=g(x)+a\int_{x-1}^{x}g(t)\,dt \tag{1}$$

为非负常数。 ........5分

由 (1) 知 $g(x)$ 是可微函数，且

$$g'(x)+a\big(g(x)-g(x-1)\big)=0. \tag{2}$$

由此

$$(e^{ax}g(x))'=ae^{ax}g(x-1)\geqslant 0.$$

这说明 $e^{ax}g(x)$ 是递增函数。 ........10分

由 (1), 可得

$$\begin{aligned}A&=g(x)+a\int_{x-1}^{x}e^{at}g(t)e^{-at}\,dt\\&\leqslant g(x)+ae^{ax}g(x)\int_{x-1}^{x}e^{-at}\,dt\\&=g(x)+e^{ax}g(x)\big(e^{-a(x-1)}-e^{-ax}\big)\\&=e^{a}g(x).\end{aligned}$$

由此，可得

$$g(x)\geqslant Ae^{-a}.$$

...... 15分

由 $g(x)$ 的定义知，$g(x)$ 的下确界为零，因此 $A=0$. 再根据 (1) 可知 $g(x)$ 恒等于零，即 $f(x)$ 为常数。 ........20分

姓名: 准考证号: 所在院校: 考生座位号: 专业:

密封线 答题时不要超过此线

# 第六届中国大学生数学竞赛预赛试卷

## (数学类, 2014年10月)

考试形式: 闭卷　考试时间: 150 分钟　满分: 100 分

| 题号 | 一 | 二 | 三 | 四 | 五 | 六 | 总分 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 满分 | 15 | 15 | 15 | 15 | 20 | 20 | 100 |
| 得分 | | | | | | | |

注意: 1. 所有答题都须写在此试卷纸密封线右边, 写在其它纸上一律无效.

2. 密封线左边请勿答题, 密封线外不得有姓名及相关标记.

3. 如答题空白不够, 可写在当页背面, 并标明题号.

一、 (本题 15 分) 已知空间的两条直线

$$\begin{aligned} l_1: &\quad \frac{x-4}{1}=\frac{y-3}{-2}=\frac{z-8}{1}, \\ l_2: &\quad \frac{x+1}{7}=\frac{y+1}{-6}=\frac{z+1}{1}. \end{aligned}$$

1）证明 $l_1$ 和 $l_2$ 异面；

2）求 $l_1$ 和 $l_2$ 公垂线的标准方程；

3）求连接 $l_1$ 上的任一点和 $l_2$ 上的任一点线段中点的轨迹的一般方程。

(1) **证明：** $l_1$ 上有点 $r_1=(4,3,8)$，方向向量为 $v_1=(1,-2,1)$。
$l_2$ 上有点 $r_2=(-1,-1,-1)$，方向向量为 $v_2=(7,-6,1)$。
又

$$(r_1-r_2,v_1,v_2)=\begin{vmatrix} 5 & 4 & 9 \\ 1 & -2 & 1 \\ 7 & -6 & 1 \end{vmatrix}\neq 0,$$

故$l_1$ 和 $l_2$ 异面。 (3分)

(2) $l_1$上的任一点 $P_1=r_1+t_1v_1$ 与 $l_2$上的任一点 $P_2=r_2+t_2v_2$ 的连线的方向向量为

$$\begin{aligned} \overrightarrow{P_1P_2} &= r_2-r_1+t_2v_2-t_1v_1 \\ &= (-5+7t_2-t_1,-4-6t_2+2t_1,-9+t_2-t_1). \end{aligned}$$

公垂线的方向向量为

$$v=v_1\times v_2=\begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & -2 & 1 \\ 7 & -6 & 1 \end{vmatrix}=(4,6,8).$$

由 $\overrightarrow{P_1P_2}$ 与 $v$ 平行：

$$(-5+7t_2-t_1):(-4-6t_2+2t_1):(-9+t_2-t_1)=4:6:8$$

得

$$t_1=-1, t_2=0.$$

故点$r_2+0v_2=(-1,-1,-1)$在公垂线上，从而公垂线的标准方程为

$$\frac{x+1}{4}=\frac{y+1}{6}=\frac{z+1}{8}. \tag{9分}$$

(3) $P_1=r_1+t_1v_1$ 与 $P_2=r_2+t_2v_2$ 的中点为

$$\frac{1}{2}(3+t_1+7t_2, 2-2t_1-6t_2, 7+t_1+t_2).$$

因此中点轨迹为一个平面，平面的法向量为

$$v=v_1\times v_2=(4,6,8).$$

又点$\frac{1}{2}(3,2,7)$在平面上，故轨迹的方程为

$$4x+6y+8z-40=0. \tag{15分}$$

二、(本题 15 分) 设$f\in C[0,1]$ 是非负的严格单调增函数。

1）证明：对任意$n\in\mathbb{N}$，存在唯一的 $x_n\in[0,1]$，使得

$$\big(f(x_n)\big)^n=\int_0^1\big(f(x)\big)^n\,dx.$$

2）证明：$\lim_{n\to\infty}x_n=1$.

**证明：** 1）

$$f(0)^n\le\int_0^1\big(f(x)\big)^n\,dx\le f(1)^n,$$

由连续函数的介值性质得到 $x_n$ 的存在性。 (3分)

由于 $f$ 是严格单调函数，$x_n$ 是唯一的。 (5分)

2）对任意的小 $\epsilon>0$, 由 $f$ 的非负性和单调性，

$$\big(f(x_n)\big)^n\ge\int_{1-\epsilon}^1\big(f(1-\epsilon)\big)^n=\epsilon\big(f(1-\epsilon)\big)^n,$$

故

$$f(x_n)\ge\sqrt[n]{\epsilon}f(1-\epsilon),$$

从而

$$\liminf_{n\to\infty}f(x_n)\ge f(1-\epsilon).$$

由 $f$ 的单调性，

$$\liminf_{n\to\infty} x_n \geq 1-\epsilon.$$

由 $\epsilon$ 的任意性, $\lim x_n = 1$. (15分)

三、 (本题 15 分) 设 $V$ 为闭区间 $[0,1]$ 上全体实函数构成的实向量空间，其中向量加法与纯量乘法均为通常的。 $f_1,\ldots,f_n \in V$. 证明以下两条等价：

1）$f_1,\ldots,f_n$ 线性无关；

2）$\exists a_1,\ldots,a_n \in [0,1]$ 使得 $det(f_i(a_j)) \neq 0$, 这里 $det$ 表行列式.

**证明** 2) $\Rightarrow$ 1). 考虑方程 $\lambda_1 f_1 + \cdots + \lambda_n f_n = 0$. 将 $a_1,\ldots,a_n$ 分别代入，得方程组

$$\begin{cases} \lambda_1 f_1(a_1) + \cdots + \lambda_n f_n(a_1) = 0 \\ \qquad\qquad\vdots \\ \lambda_1 f_1(a_n) + \cdots + \lambda_n f_n(a_n) = 0 \end{cases}$$

注意到上述方程组的系数矩阵为 $(f_i(a_j))^T$, 因此由 $det(f_i(a_j)) \neq 0$ 直接知道 $\lambda_1 = \cdots = \lambda_n = 0$. (6分)

1) $\Rightarrow$ 2). 用归纳法. 首先， $n=1$时，结论显然。

其次，设$n=k$时结论真。则$n=k+1$时，由$f_1,\ldots,f_{k+1}$ 线性无关知， $f_1,\ldots,f_k$ 线性无关. 因此$\exists a_1,\ldots,a_k \in [0,1]$ 使得$det(f_i(a_j))_{k\times k} \neq 0$。观察函数

$$F(x) = det\begin{pmatrix} f_1(a_1) & \cdots & f_1(a_k) & f_1(x) \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ f_k(a_1) & \cdots & f_k(a_k) & f_k(x) \\ f_{k+1}(a_1) & \cdots & f_{k+1}(a_k) & f_{k+1}(x) \end{pmatrix}.$$

按最后一列展开得

$$F(x) = \lambda_1 f_1(x) + \cdots + \lambda_k f_k(x) + \lambda_{k+1} f_{k+1}(x),$$

其中 $\lambda_1,\ldots,\lambda_{k+1}$均为常量。注意到 $\lambda_{k+1} \neq 0$, 因此由$f_1,\ldots,f_{k+1}$ 线性无关知 $F(x)$不恒为0, 从而$\exists a_{k+1} \in [0,1]$使得$F(a_{k+1}) \neq 0$. 亦即 $a_1,\ldots,a_{k+1} \in [0,1]$, $det(f_i(a_j)) \neq 0$. 证毕。 (15分)

四、(本题 15 分) 设 $f(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上有二阶导函数, $f(x), f'(x), f''(x)$ 都大于零, 假设存在正数 $a,b$ 使得 $f''(x) \leqslant af(x) + bf'(x)$ 对一切 $x \in \mathbb{R}$ 成立.

(i) 求证: $\lim\limits_{x\to-\infty} f'(x) = 0$;

(ii) 求证: 存在常数 $c$ 使得 $f'(x) \leqslant cf(x)$.

(iii) 求使上面不等式成立的最小常数 $c$.

**证明:** 由条件知 $f$ 及 $f'$ 是单调递增的正函数，因此 $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ 和 $\lim\limits_{x\to-\infty} f'(x)$ 都存在。 (2分)

根据微分中值定理，对任意 $x$ 存在 $\theta_x \in (0,1)$ 使得

$$f(x+1)-f(x)=f'(x+\theta_x)>f'(x)>0.$$

上式左边当 $x\to-\infty$ 时极限为 0，因而有 $\lim\limits_{x\to-\infty} f'(x)=0.$ (5分)

设 $c=\frac{b+\sqrt{b^2+4a}}{2}$. 则 $c>b>0$, 且 $\frac{a}{b-c}=-c$. 于是根据条件有

$$f''(x)-cf'(x)\leqslant (b-c)f'(x)+af(x)=(b-c)(f'(x)-cf(x)).$$

这说明函数 $e^{-(b-c)x}(f'(x)-cf(x))$ 是单调递减的。注意到该函数当 $x\to-\infty$ 时极限为 0，因此有 $f'(x)-cf(x)\leqslant 0$. 即，$f'(x)\leqslant cf(x)$. (10分)

常数 $c$ 是最佳的，这是因为对函数 $f(x)=e^{cx}$ 有 $f''(x)=af(x)+bf'(x)$. (15分)

五、 (本题 20 分) 设 $m$ 为给定的正整数. 证明：对任何的正整数 $n$,$l$, 存在 $m$ 阶方阵 $X$ 使得

$$X^n+X^l=I+\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ m-1 & m-2 & m-3 & \cdots & 1 & 0 \\ m & m-1 & m-2 & \cdots & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

**证明** 1）令 $H=\begin{pmatrix} 0 & & & \\ 1 & \ddots & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & 1 & 0 \end{pmatrix}$, 则所求的方程变为

$$X^n+X^l=2I+2H+3H^2+\cdots+mH^{m-1}.$$

(3分)

2)考察形如 $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ a_1 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ a_2 & a_1 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m-1} & a_{m-2} & a_{m-3} & \cdots & 1 & 0 \\ a_m & a_{m-1} & a_{m-2} & \cdots & a_1 & 1 \end{pmatrix}$ 的矩阵 $X$, 则有 $X=I+a_1H+a_2H^2+\cdots+a_mH^{m-1}$. 结果，

$X^n=(I+a_1H+a_2H^2+\cdots+a_mH^{m-1})^n$

$$=I+(na_1)H+(na_2+f_1(a_1))H^2+\cdots+(na_m+f_{m-1}(a_1,\cdots,a_{m-1}))H^{m-1},$$

其中 $f_1(a_1)$ 由 $a_1$ 确定， …， $f_{m-1}(a_1,\cdots,a_{m-1})$ 由 $a_1,\cdots,a_{m-1}$ 确定.

类似地, 有

$$X^l = I + (la_1)H + (la_2 + g_1(a_1))H^2 + \cdots + (la_m + g_{m-1}(a_1, \cdots, a_{m-1}))H^{m-1}.$$

(12分)

3) 观察下列方程组

$$\begin{cases} (n+l)a_1 = 2, \\ (n+l)a_2 + (f_1(a_1) + g_1(a_1)) = 3, \\ \cdots \\ (n+l)a_m + \big(f_{m-1}(a_1, \ldots, a_{m-1}) + g_{m-1}(a_1, \cdots, a_{m-1})\big) = m. \end{cases}$$

直接可看出该方程组有解。命题得证。 (20分)

六、(本题 20 分) 设 $\alpha \in (0,1)$, $\{a_n\}$ 是正数列且满足

$$\liminf_{n\to\infty} n^\alpha \left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) = \lambda \in (0, +\infty).$$

求证 $\lim\limits_{n\to\infty} n^k a_n = 0$, 其中 $k > 0$.

**证明：** 由条件可知从某项开始 $\{a_n\}$ 单调递减。因此，

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a \geqslant 0.$$

若 $a > 0$, 则当 $n$ 充分大时，

$$\frac{a_n - a_{n+1}}{1/n^\alpha} = n^\alpha \left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) a_{n+1} = \frac{\lambda a}{2} > 0.$$

因为 $\sum\limits_{n+1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ 发散，所以 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (a_n - a_{n+1})$ 也发散，但此级数显然收敛到 $a_1 - a$. 这是矛盾！所以应有 $a = 0$. (10分)

令 $b_n = n^k a_n$. 则有

$$n^\alpha \left(\frac{b_n}{b_{n+1}} - 1\right) = \left(\frac{n}{n+1}\right)^k \left[n^\alpha \left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) - n^\alpha \left((1 + \frac{1}{n})^k - 1\right)\right].$$

因为 $(1 + \frac{1}{n})^k - 1 \sim \frac{k}{n}$ $(n \to \infty)$, 所以由上式及条件可得

$$\liminf_{n\to\infty} n^\alpha \left(\frac{b_n}{b_{n+1}} - 1\right) = \lambda, \ (n \to \infty).$$

因此由开始所证，可得 $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0$, 即，$\lim\limits_{n\to\infty} n^k a_n = 0$. (20分)

密封线 答题时不要超过此线

姓名:______ 准考证号:______ 所在院校:______ 考生座位号:______ 专业:______

# 第五届中国大学生数学竞赛预赛试卷

(数学类, 2013年10月)

考试形式: <u>闭卷</u> 考试时间: <u>150</u> 分钟 满分: <u>100</u> 分

一、(本题 15 分) 平面 $\mathbb{R}^2$ 上两个半径为 $r$ 的圆 $C_1$ 和 $C_2$ 外切于 $P$ 点. 将圆 $C_2$ 沿 $C_1$ 的圆周（无滑动）滚动一周，这时, $C_2$ 上的 $P$ 点也随 $C_2$ 的运动而运动. 记 $\Gamma$ 为 $P$ 点的运动轨迹曲线, 称为心脏线. 现设 $C$ 为以$P$ 的初始位置 (切点) 为圆心的圆, 其半径为 $R$. 记 $\gamma : \mathbb{R}^2 \cup \{\infty\} \to \mathbb{R}^2 \cup \{\infty\}$ 为圆 $C$ 的反演变换，它将 $Q \in \mathbb{R}^2 \backslash \{P\}$ 映成射线 $PQ$ 上的点 $Q'$, 满足 $\overrightarrow{PQ} \cdot \overrightarrow{PQ'} = R^2$. 求证：$\gamma(\Gamma)$ 为抛物线.

**证明** 以 $C_1$ 的圆心 $O$ 为原点建立直角坐标系，使得初始切点 $P = (0, r)$. 将圆 $C_2$ 沿 $C_1$ 的圆周（无滑动）滚动到 $Q$ 点, 记角 $\angle POQ = \theta$, 则 $Q = (r\sin\theta, r\cos\theta)$. 令 $\ell_Q$ 为 $C_1$ 在 $Q$ 点的切线, 它的单位法向为 $\vec{n} = (\sin\theta, \cos\theta)$. 这时, $P$ 点运动到 $P$ 关于直线 $\ell_Q$ 的对称点 $P' = P(\theta)$ 处. 于是, 有

$$\overrightarrow{OP'} = \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{PP'} = \overrightarrow{OP} - 2(\overrightarrow{QP} \cdot \vec{n})\vec{n}. \qquad (5分)$$

故 $P$ 点的运动轨迹曲线(心脏线)为

$$P(\theta) = P' = (2r(1-\cos\theta)\sin\theta, r + 2r(1-\cos\theta)\cos\theta),\ \ 0 \le \theta \le 2\pi. \qquad (8分)$$

容易得到, 圆 $C$ 的反演变换的坐标表示为

$$(\tilde{x}, \tilde{y}) = (0, r) + \frac{R^2}{x^2 + (y-r)^2}(x, y-r). \qquad (11分)$$

将 $(x, y) = P(\theta)$ 代人, 得到

$$(\tilde{x}, \tilde{y}) = \left(\frac{R^2\sin\theta}{2r(1-\cos\theta)}, \frac{R^2\cos\theta}{2r(1-\cos\theta)} + r\right). \qquad (13分)$$

直接计算，得到抛物线方程

$$\tilde{y} = \frac{r}{R^2}\tilde{x}^2 + (r - \frac{R^2}{4r}). \qquad (15分)$$

二、 (本题 10 分) 设 $n$ 阶方阵 $B(t)$ 和 $n\times 1$ 矩阵 $b(t)$ 分别为 $B(t)=(b_{ij}(t))$ 和 $b(t)=\begin{pmatrix} b_1(t) \\ \vdots \\ b_n(t) \end{pmatrix}$, 其中 $b_{ij}(t), b_i(t)$ 均为关于 $t$ 的实系数多项式, $i,j=1,2,\cdots,n$. 记 $d(t)$ 为 $B(t)$ 的行列式, $d_i(t)$ 为用 $b(t)$ 替代 $B(t)$ 的第 $i$ 列后所得的 $n$ 阶矩阵的行列式. 若 $d(t)$ 有实根 $t_0$ 使得 $B(t_0)X=b(t_0)$ 成为关于 $X$ 的相容线性方程组, 试证明: $d(t), d_1(t), \cdots, d_n(t)$ 必有次数 $\geqslant 1$ 的公因式.

**证明** 设 $B(t)$ 的第 $i$ 列为 $B_i(t), i=1,2,\cdots,n$. 断言： $t-t_0$ 是 $d(t), d_1(t), \cdots, d_n(t)$ 的公因式. 反证. 不失一般性，设 $d_1(t_0)\neq 0$，于是

秩$[B(t_0), b(t_0)]=n$, 因为 $d_1(t_0)\neq 0$. (5 分)

注意到秩$B(t_0)\leqslant n-1$, 结果

增广阵$[B(t_0), b(t_0)]$ 的秩 $\neq B(t_0)$ 的秩, (9 分)

从而 $B(t_0)X=b(t_0)$ 不相容. 矛盾. 证毕. (10 分)

六、 (本题 25 分) 设 $\mathbb{R}^{n\times n}$ 为 $n$ 阶实方阵全体, $E_{ij}$ 为 $(i,j)$ 位置元素为 1 其余位置元素为 0 的 $n$ 阶方阵, $i,j=1,2,\cdots,n$. 让 $\Gamma_r$ 为秩等于 $r$ 的实 $n$ 阶方阵全体, $r=0,1,2,\cdots,n$, 并让 $\phi:\ \mathbb{R}^{n\times n}\to\mathbb{R}^{n\times n}$ 为可乘映照, 即满足: $\phi(AB)=\phi(A)\phi(B), \forall\ A,B\in\mathbb{R}^{n\times n}$. 试证明:

(1) $\forall\ A,B\in\Gamma_r$, 秩$\phi(A)=$秩$\phi(B)$.

(2) 若 $\phi(0)=0$, 且存在某个秩为 1 的矩阵 $W$ 使得 $\phi(W)\neq 0$, 则必存在可逆方阵 $R$ 使得 $\phi(E_{ij})=RE_{ij}R^{-1}$ 对一切 $E_{ij}$ 皆成立, $i,j=1,2,\cdots,n$.

**证明**: (1) $A,B\in\Gamma_r$ 表明 $A$ 可表为 $A=PBQ$, 其中 $P,Q$ 可逆. (1 分)

结果 $\phi(A)=\phi(P)\phi(B)\phi(Q)$, 从而 秩$\phi(A)\leqslant$秩$\phi(B)$. (3 分)

对称地有 秩$\phi(B)\leqslant$秩$\phi(A)$. 即有, 秩$\phi(A)=\phi(B)$. (5 分)

(2) 考察矩阵集合 $\{\phi(E_{ij})|i,j=1,2,\cdots,n\}$. 先考察 $\phi(E_{11}),\cdots,\phi(E_{nn})$. 由 (1) 知 $\phi(E_{ij})$ 为非零阵, 特别地, $\phi(E_{ii})$ 为非零幂等阵, 故存在单位特征向量 $w_i$ 使得

$$\phi(E_{ii})w_i=w_i,\quad i=1,2,\cdots,n.$$

从而得向量组: $w_1,w_2,\cdots,w_n$. (7 分)

此向量组有如下性质:

a) $\phi(E_{ii})w_k=\begin{cases}\phi(E_{ii})\phi(E_{kk})w_k=\phi(E_{ii}E_{kk})w_k=0, & k\neq i \text{ 时} \\ w_i, & k=i \text{ 时}.\end{cases}$

b) $w_1,w_2,\cdots,w_n$ 线性无关, 从而构成 $\mathbb{R}^n$ 的基, 矩阵 $W=[w_1,w_2,\cdots,w_n]$ 为可逆阵. 事实上, 若 $x_1w_1+\cdots+x_nw_n=0$, 则在两边用 $\phi(E_{ii})$ 作用之, 得 $x_i=0$, $i=1,2,\cdots,n$. (11 分)

c) 当 $k\neq j$ 时, $\phi(E_{ij})w_k=\phi(E_{ij})\phi(E_{kk})w_k=\phi(E_{ij}E_{kk})w_k=0$;

当 $k=j$ 时, 令 $\phi(E_{ij})w_k=b_{1j}w_1+\cdots+b_{ij}w_i+\cdots+b_{nj}w_n$. 两边分别用

专业:______ 考生座位号:______ 所在院校:______ 准考证号:______ 姓名:______

密封线 答题时不要超过此线

$\phi(E_{11}),\cdots,\phi(E_{i-1\ i-1}),\phi(E_{i+1\ i+1}),\cdots,\phi(E_{nn})$ 作用之, 得

$$0=\phi(E_{11}E_{ij})w_j=\phi(E_{11})\phi(E_{ij})w_k=b_{1j}w_1,\cdots,$$
$$0=\phi(E_{nn}E_{ij})w_j=\phi(E_{nn})(b_{1j}w_1+\cdots+b_{ij}w_i+\cdots+b_{nj}w_n)=b_{nj}w_n,$$

即有

$$b_{1j}=\cdots=b_{i-1\ j}=b_{i+1\ j}=\cdots=b_{nj}=0.$$

从而 $\phi(E_{ij})w_j=b_{ij}w_i$, 进一步, $b_{ij}\neq 0$, 否则有 $\phi(E_{ij})[w_1,\cdots,w_n]=0$, 导致 $\phi(E_{ij})$ 为零阵, 不可能. (15 分)

这样通过计算 $\phi(E_{ij})w_j\ i,j=1,2,\cdots,n$, 我们得到 $n^2$ 个非零的实数:

$$\begin{matrix} b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ b_{n1} & \cdots & b_{nn} \end{matrix}$$

注意到 $E_{mr}E_{rs}=E_{ms}$, 从而

$$b_{ms}w_m=\phi(E_{ms})w_s=\phi(E_{mr})\phi(E_{rs})w_s=\phi(E_{mr})b_{rs}w_r=b_{rs}b_{mr}w_m$$

因此有 $b_{mr}b_{rs}=b_{ms}$. (17 分)

最后, 令 $v_i=b_{i1}w_i,\ i=1,2,\cdots,n$. 则有

$$\phi(E_{ij})v_k=\begin{cases}0, & k\neq j \text{ 时}\\ \phi(E_{ij})b_{j1}w_j=b_{j1}b_{ij}w_i=b_{i1}w_i=v_i, & k=j \text{ 时}.\end{cases} \quad (21\text{ 分})$$

令 $R=[v_1,\cdots,v_n]$, 则 $R=[w_1,\cdots,w_n]\begin{pmatrix} b_{11} & & \\ & \ddots & \\ & & b_{n1}\end{pmatrix}$ 为可逆矩阵, 且

$$\phi(E_{ij})R=\phi(E_{ij})[v_1,\cdots,v_n]=[0,\cdots,0,v_i,0\cdots,0]=[v_1,\cdots,v_n]E_{ij}$$

即, $\phi(E_{ij})=RE_{ij}R^{-1}$. 证毕. (25 分)

三、 (本题 15 分) 设 $f(x)$ 在区间 $[0,a]$ 上有二阶连续导数, $f'(0)=1$, $f''(0)\neq 0$, 且 $0<f(x)<x$, $x\in(0,a)$. 令

$$x_{n+1}=f(x_n),\quad x_1\in(0,a).$$

(1) 求证 $\{x_n\}$ 收敛并求极限; (2) 试问 $\{nx_n\}$ 是否收敛? 若不收敛, 则说明理由. 若收敛, 则求其极限.

**证明** (1) 由条件 $0<x_2=f(x_1)<x_1$, 归纳地可证得 $0<x_{n+1}<x_n$, 于是 $\{x_n\}$ 有极限, 设为 $x_0$. 由 $f$ 的连续性, 及 $x_{n+1}=f(x_n)$ 得 $x_0=f(x_0)$. 又因为当 $x>0$ 时, $f(x)>x$, 所以只有 $x_0=0$. 即, $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=0$. (5 分)

(2) 由 Stolz 定理和 L'Hospital 法则,

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}nx_n&=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{1/x_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{1/x_{n+1}-1/x_n}\\&=\lim_{n\to\infty}\frac{x_{n+1}x_n}{x_n-x_{n+1}} &&\text{(8分)}\\&=\lim_{n\to\infty}\frac{x_nf(x_n)}{x_n-f(x_n)}=\lim_{x\to0}\frac{xf(x)}{x-f(x)}\\&=\lim_{x\to0}\frac{f(x)+xf'(x)}{1-f'(x)}=\lim_{x\to0}\frac{2f'(x)+xf''(x)}{-f''(x)}\\&=-\frac{2}{f''(0)} &&\text{(15分)}\end{aligned}$$

四、 (本题 15 分) 设 $a>1$, 函数 $f:\ (0,+\infty)\to(0,+\infty)$ 可微. 求证存在趋于无穷的正数列 $\{x_n\}$ 使得

$$f'(x_n)<f(ax_n),\ n=1,2,\cdots.$$

**证明** 若结论不对, 则存在 $x_0>0$ 使得当 $x\geqslant x_0$ 时, 有 $f'(x)\geqslant f(ax)>0$. (5分)

于是当 $x>x_0$ 时, $f(x)$ 严格递增, 且由微分中值定理

$$\begin{aligned}f(ax)-f(x)=f'(\xi)(a-1)x&\geqslant f(a\xi)(a-1)x\\&>f(ax)(a-1)x.\end{aligned}$$

但这对于 $x>\frac{1}{a-1}$ 是不能成立的. (10分)

五、(本题 20 分) 设 $f:[-1,1]\to\mathbb{R}$ 为偶函数, $f$ 在 $[0,1]$ 上单调递增, 又设 $g$ 是 $[-1,1]$ 上的凸函数, 即对任意 $x,y\in[-1,1]$ 及 $t\in(0,1)$ 有

$$g(tx+(1-t)y)\leqslant tg(x)+(1-t)g(y).$$

求证:
$$2\int_{-1}^{1} f(x)g(x)\,dx \geqslant \int_{-1}^{1} f(x)\,dx \int_{-1}^{1} g(x)\,dx.$$

**证明** 由于 $f$ 为偶函数, 可得

$$\int_{-1}^{1} f(x)g(x)\,dx = \int_{-1}^{1} f(x)g(-x)\,dx. \tag{2分}$$

因而

$$\begin{aligned} 2\int_{-1}^{1} f(x)g(x)\,dx &= \int_{-1}^{1} f(x)(g(x)+g(-x))\,dx \\ &= 2\int_{0}^{1} f(x)(g(x)+g(-x))\,dx. \qquad (1) \end{aligned}$$

(7分)

因为 $g(x)$ 为凸函数, 所以函数 $h(x)=g(x)+g(-x)$ 在 $[0,1]$ 上递增. (10分)

故对任意 $x,y\in[0,1]$, 有

$$(f(x)-f(y))(h(x)-h(y))\geqslant 0.$$

因而

$$\int_0^1\int_0^1 (f(x)-f(y))(h(x)-h(y))\,dxdy \geqslant 0. \tag{15分}$$

由此可得

$$\begin{aligned} 2\int_0^1 f(x)h(x)\,dx &\geqslant 2\int_0^1 f(x)\,dx\cdot\int_0^1 h(x)\,dx \\ &= \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} f(x)\,dx\cdot\int_{-1}^{1} h(x)\,dx \\ &= \int_{-1}^{1} f(x)\,dx\cdot\int_{-1}^{1} g(x)\,dx. \qquad (20分) \end{aligned}$$

结合 (1) 即得结论.

# 试题解答

1：（ 15 分） 设 $\Gamma$ 为椭圆抛物面 $z=3x^2+4y^2+1$. 从原点作 $\Gamma$ 的切锥面. 求切锥面方程.

**解答**：设 $(x,y,z)$ 为切锥面上的点（非原点）. 存在唯一 $t$ 使得 $t(x,y,z)$ 落在椭圆抛物面上（ 5 分）. 于是有 $tz=(3x^2+4y^2)t^2+1$, 并且这个关于 $t$ 的二次方程只有一个根（ 10 分）. 于是，判别式

$$\Delta=z^2-4(3x^2+4y^2)=0.$$

这就是所求的切锥面方程（ 15 分）. □

2：（ 15 分）设 $\Gamma$ 为抛物线， $P$ 是与焦点位于抛物线同侧的一点. 过 $P$ 的直线 $L$ 与 $\Gamma$ 围成的有界区域的面积记为 $A(L)$. 证明： $A(L)$ 取最小值当且仅当 $P$ 恰为 $L$ 被 $\Gamma$ 所截出的线段的中点.

**解答**：不妨设抛物线方程为 $y=x^2$, $P=(x_0,y_0)$（ 1 分）. $P$ 与焦点在抛物线的同侧，则 $y_0>x_0^2$（ 2 分）. 设 $L$ 的方程为 $y=k(x-x_0)+y_0$. $L$ 与 $\Gamma$ 的交点的 $x$ 坐标满足 $x^2=k(x-x_0)+y_0$, 有两个解 $x_1<x_2$ 满足

$$x_1+x_2=k,\ x_1x_2=kx_0-y_0$$

（ 6 分）. $L$ 与 $x$ 轴， $x=x_1, x=x_2$ 构成的梯形面积 $D=\frac{1}{2}(x_1^2+x_2^2)(x_2-x_1)$, 抛物线与 $x$ 轴， $x=x_1, x=x_2$ 构成区域的面积为 $\int_{x_1}^{x_2}x^2\,dx=\frac{1}{3}(x_2^3-x_1^3)$（ 8 分）. 于是有

$$A(L)=\frac{1}{2}(x_1^2+x_2^2)(x_2-x_1)-\frac{1}{3}(x_2^3-x_1^3)=\frac{1}{6}(x_2-x_1)^3$$

$$\begin{aligned}36A(L)^2&=(x_2-x_1)^6=((x_1+x_2)^2-4x_1x_2)^3=(k^2-4kx_0+4y_0)^3\\&=((k-2x_0)^2+4(y_0-x_0^2))^3\geq 64(y_0-x_0^2)^3.\end{aligned}$$

（ 12 分）, 等式成立当且仅当 $A(L)$ 取最小值, 当且仅当 $k=2x_0$, 即 $x_1+x_2=2x_0$（ 15 分）. □

3: （ 10 分）设 $f\in C^1[0,+\infty), f(0)>0, f'(x)\geq 0\forall x\in[0,+\infty)$.
已知 $\int_0^{+\infty}\frac{1}{f(x)+f'(x)}\,dx<+\infty$, 求证： $\int_0^{+\infty}\frac{1}{f(x)}\,dx<+\infty$.

**解答**：由于 $f'(x)\geq 0$, 有

$$0\leq\int_0^N\frac{1}{f(x)}\,dx-\int_0^N\frac{1}{f(x)+f'(x)}\,dx=\int_0^N\frac{f'(x)}{f(x)(f(x)+f'(x))}\,dx$$

（ 1 分）. 取极限

$$\lim_{N\to+\infty}\int_0^N \frac{f'(x)}{f(x)(f(x)+f'(x))}\,dx \le \lim_{N\to+\infty}\int_0^N \frac{f'(x)}{f(x)^2}\,dx$$

$$= \lim_{N\to+\infty}(-\frac{1}{f(x)})\mid_0^N \le \frac{1}{f(0)}$$

（ 8 分）. 故由已知条件有

$$\int_0^{+\infty}\frac{1}{f(x)}\,dx \le \int_0^{+\infty}\frac{1}{f(x)+f'(x)}\,dx + \frac{1}{f(0)} < +\infty$$

（ 10 分）.

4: （ 10 分）设 $A, B, C$ 均为实 $n$ 阶正定矩阵， $P(t) = At^2 + Bt + C$, $f(t) = detP(t)$, 其中 $t$ 为未定元， $detP(t)$ 表示 $P(t)$ 的行列式. 若 $\lambda$ 为 $f(t)$ 的根，试证明： $Re(\lambda) < 0$, 这里 $Re(\lambda)$ 表示 $\lambda$ 的实部.

**解答**：设 $\lambda$ 为 $f(t)$ 的根，则有 $detP(t) = 0$, 从而 $P(t)$ 的 $n$ 个列线性相关. 于是存在 $\alpha \neq 0$ 使得 $P(\lambda)\alpha = 0$, 进而 $\alpha^* P(\lambda)\alpha = 0$. （ 4 分）
具体地,

$$\alpha^* A\alpha\lambda^2 + \alpha^* B\alpha\lambda + \alpha^* C\alpha = 0.$$

令 $a = \alpha^* A\alpha$, $b = \alpha^* B\alpha$, $c = \alpha^* C\alpha$, 则由 $A, B, C$ 皆为正定矩阵知 $a > 0, b > 0, c > 0$, 且

$$\lambda = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

（ 6 分）. 注意到，当 $b^2 - 4ac \geq 0$ 时， $\sqrt{b^2 - 4ac} < b$, 从而

$$Re\lambda = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} < 0;$$

（ 8 分）. 当 $b^2 - 4ac < 0$ 时，$\sqrt{b^2 - 4ac} = i\sqrt{4ac - b^2}$, 从而 $Re\lambda = -b/2a < 0$.
□

5: （ 10 分）已知 $\frac{(1+x)^n}{(1-x)^3} = \sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i, |x| < 1$, $n$ 为正整数. 求 $\sum_{i=0}^{n-1} a_i$.

**解答**：由于 $\sum_{i=0}^{n-1} a_i$ 恰为 $\frac{(1+x)^n}{(1-x)^3} \cdot \frac{1}{1-x}$ 展开式中 $x^{n-1}$ 的系数（ 2 分），而

$$\frac{(1+x)^n}{(1-x)^4} = \frac{(2-(1-x))^n}{(1-x)^4} = \sum_{i=0}^{n}(-1)^i C_n^i 2^{n-i}(1-x)^{i-4},$$

其 $x^{n-1}$ 项系数等于

$$2^n(1-x)^{-4}-n2^{n-1}(1-x)^{-3}+\frac{n(n-1)}{2}2^{n-2}(1-x)^{-2}-\frac{n(n-1)(n-2)}{6}2^{n-3}(1-x)^{-1}$$

的 $x^{n-1}$ 项系数（ 6 分），也就等于

$$\frac{2^n}{3!}((1-x)^{-1})'''-\frac{n2^{n-1}}{2!}((1-x)^{-1})''$$

$$+\frac{n(n-1)}{2}2^{n-2}((1-x)^{-1})'-\frac{n(n-1)(n-2)}{6}2^{n-3}(1-x)^{-1}$$

的 $x^{n-1}$ 项系数，它等于

$$\frac{2^n}{3!}(n+2)(n+1)n-\frac{n2^{n-1}}{2!}(n+1)n+\frac{n(n-1)}{2}2^{n-2}n-\frac{n(n-1)(n-2)}{6}2^{n-3}.$$

故有

$$\sum_{i=0}^{n-1}a_i=\frac{n(n+2)(n+7)}{3}2^{n-4}$$

（ 10 分）. □

6: （ 15 分）设 $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ 可微， $f(0)=f(1),\int_0^1 f(x)\,dx=0$, 且 $f'(x)\neq 1\;\forall x\in[0,1]$. 求证：对任意正整数 $n$, 有 $\left|\sum_{k=0}^{n-1}f(\frac{k}{n})\right|<\frac{1}{2}$.

**解答**：由于 $f(0)=f(1)$, 故存在 $c\in(0,1)$ 使得 $f'(c)=0$（ 2 分）. 又 $f'(x)\neq 1$, 由导函数介值性质恒有 $f'(x)<1$（ 4 分）. 令 $g(x)=f(x)-x$, 则 $g(x)$ 为单调下降函数（ 6 分）. 故

$$-\frac{1}{2}+\frac{1}{n}=\int_0^1 g(x)dx+\frac{1}{n}>\frac{1}{n}(\sum_{k=1}^{n}g(\frac{k}{n})+1))$$

$$=\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}g(\frac{k}{n})>\int_0^1 g(x)dx=-\frac{1}{2}$$

（ 12 分）. 于是有

$$\left|\sum_{k=0}^{n-1}f(\frac{k}{n})\right|=\left|\sum_{k=0}^{n-1}g(\frac{k}{n})+\frac{n-1}{2}\right|<\frac{1}{2}\ \square$$

（ 15 分）

7: （ 25 分）已知实矩阵 $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & a \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 4 & b \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$. 证明：

(1) 矩阵方程 $AX = B$ 有解但 $BY = A$ 无解的充要条件是 $a \neq 2, b = 4/3$;

(2) $A$ 相似于 $B$ 的充要条件是 $a = 3, b = 2/3$;

(3) $A$ 合同于 $B$ 的充要条件是 $a < 2, b = 3$.

**解答**： (1) 矩阵方程 $AX = B$ 有解等价于 $B$ 的列向量可由 $A$ 的列向量线性表示， $BY = A$ 无解等价于 $A$ 的某个列向量不能由 $B$ 的列向量线性表示（ 2 分）. 对 $(A, B)$ 作初等行变换：

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & 4 & b \\ 2 & a & 3 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 2 & 2 & 4 & b \\ 0 & a-2 & -1 & 1-b \end{pmatrix}$$

知， $B$ 的列向量组可由 $A$ 的列向量线性表示当且仅当 $a \neq 2$ （ 6 分）. 对矩阵 $(B, A)$ 作初等行变换：

$$(B, A) = \begin{pmatrix} 4 & b & 2 & 2 \\ 3 & 1 & 2 & a \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 4 & b & 2 & 2 \\ 0 & 1-3b/4 & 1/2 & a-3/2 \end{pmatrix}.$$

由此知 $A$ 的列向量组不能由 $B$ 的列向量线性表示的充要条件是 $b = 4/3$. 所以矩阵方程 $AX = B$ 有解但 $BY = A$ 无解的充要条件是 $a \neq 2, b = 4/3$ （ 10 分）.

(2) 若 $A, B$ 相似，则有 $trA = trB$, 且 $|A| = |B|$, 故有 $a = 3, b = 2/3$ （ 12 分）. 反之，若 $a = 3, b = 2/3$, 则有

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}, \ B = \begin{pmatrix} 4 & 2/3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix},$$

$A$ 和 $B$ 的特征多项式均为 $\lambda^2 - 5\lambda + 2$. 由于 $\lambda^2 - 5\lambda + 2 = 0$ 由两个不同的根，从而 $A, B$ 都可以相似于同一对角阵. 故 $A$ 与 $B$ 相似（ 15 分）.

(3) 由于 $A$ 为对称阵，若 $A, B$ 合同，则 $B$ 也是对称阵，故 $b = 3$ （ 16 分）. 矩阵 $B$ 对应的二次型

$$g(x_1, x_2) = 4x_1^2 + 6x_1x_2 + x_2^2 = (3x_1 + x_2)^2 - 5x_1^2.$$

在可逆线性变换 $y_1 = 3x_1 + x_2, y_2 = x_1$ 下， $g(x_1, x_2)$ 变成标准型： $y_1^2 - 5y_2^2$ （ 18 分）. 由此， $B$ 的正，负惯性指数为 1 （ 19 分）. 类似地， $A$ 对应的二次型

$$f(x_1, x_2) = 2x_1^2 + 4x_1x_2 + ax_2^2 = 2(x_1 + x_2)^2 + (a-2)x_2^2$$

在可逆线性变换 $z_1 = 3x_1 + x_2, z_2 = x_2$ 下 $f(x_1, x_2)$ 变成标准型：$2z_1^2 + (a-2)z_2^2$ （ 22 分）. $A, B$ 合同的充要条件是它们有相同的正、负惯性指数，故 $A, B$ 合同的充要条件是 $a < 2, b = 3$ （ 25 分） □

# 第三届中国大学生数学竞赛赛区赛

# 试题参考答案

# (数学类, 2011)

一、 (本题 15 分) 已知四点 $A(1,2,7)$, $B(4,3,3)$, $(5,-1,6)$, $(\sqrt{7},\sqrt{7},0)$. 试求过这四点的球面方程.

**解答:** 设所求球面的球心为 $(\bar{x},\bar{y},\bar{z})$, 则

$$\begin{aligned} & (\bar{x}-1)^2+(\bar{y}-2)^2+(\bar{z}-7)^2 \\ = & (\bar{x}-4)^2+(\bar{y}-3)^2+(\bar{z}-3)^2 \\ = & (\bar{x}-5)^2+(\bar{y}+1)^2+(\bar{z}-6)^2 \\ = & (\bar{x}-\sqrt{7})^2+(\bar{y}-\sqrt{7})^2+\bar{z}^2. \end{aligned}$$

............................................................ (8 分)

即

$$\begin{cases} 3\bar{x}+\bar{y}-4\bar{z}=-10, \\ 4\bar{x}-3\bar{y}-\bar{z}=4, \\ (\sqrt{7}-1)\bar{x}+(\sqrt{7}-2)\bar{y}-7\bar{z}=-20. \end{cases}$$

............................................................ (10 分)

解得 $(\bar{x},\bar{y},\bar{z})=(1,-1,3)$. 而 ........................................ (14 分)

$$(\bar{x}-1)^2+(\bar{y}-2)^2+(\bar{z}-7)^2=25.$$

于是所求球面方程为

$$(x-1)^2+(y+1)^2+(z-3)^2=25.$$

............................................................ (15 分)

二、(本题 10 分) 设 $f_1, f_2, \ldots, f_n$ 为 $[0,1]$ 上的非负连续函数. 求证: 存在 $\xi \in [0,1]$, 使得

$$\prod_{k=1}^{n} f_k(\xi) \le \prod_{k=1}^{n} \int_0^1 f_k(x)\,dx.$$

**证明:** 记

$$a_k = \int_0^1 f_k(x)\,dx, \qquad \forall\, k = 1, 2, \ldots, n.$$

当某个 $a_k = 0$ 时, 结论是平凡的. .................................. (1 分)

下设 $a_k > 0$ ($\forall\, k = 1, 2, \ldots, n$). 我们有

$$\int_0^1 \sqrt[n]{\prod_{k=1}^{n} \frac{f_k(x)}{a_k}}\,dx \le \int_0^1 \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{f_k(x)}{a_k}\,dx = 1.$$

.................................................................. (8 分)

由此立即可得存在 $\xi \in [0,1]$ 使得

$$\sqrt[n]{\prod_{k=1}^{n} \frac{f_k(\xi)}{a_k}} \le 1.$$

结论得证. .................................................... (10 分)

□

三、 (本题 15 分) 设 $F^n$ 是数域 $F$ 上的 $n$ 维列空间, $\sigma: F^n \to F^n$ 是一个线性变换. 若 $\forall A \in M_n(F)$, $\sigma(A\alpha) = A\sigma(\alpha)$, $(\forall \alpha \in V)$, 证明: $\sigma = \lambda \cdot \mathrm{id}_{F^n}$, 其中 $\lambda$ 是 $F$ 中某个数, $\mathrm{id}_{F^n}$ 表示恒同变换.

**证明:** 设 $\sigma$ 在 $F^n$ 的标准基 $\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_n$ 下的矩阵为 $B$, 则 $\sigma(\alpha) = B\alpha\,(\forall \alpha \in F^n)$. ............................................................ (5 分)

由条件: $\forall A \in M_n(F), \sigma(A\alpha) = A\sigma(\alpha), \forall \alpha \in F^n$, 有 $BA\alpha = AB\alpha, \forall \alpha \in F^n$. 故 $AB = BA$, $(\forall A \in M_n(F))$ .................................... (10 分)

设 $B = (b_{ij})$, 取 $A = \mathrm{diag}\,(1, \cdots, 1, c, 1, \cdots, 1)$, 其中 $c \neq 0, 1$, 由 $AB = BA$ 可得 $b_{ij} = 0, \forall i \neq j$. 又取 $A = I_n - E_{ii} - E_{jj} + E_{ij} + E_{ji}$, 这里 $E_{st}$ 是 $(s\ t)-$ 位置为 1 其它位置为 0 的矩阵.则由 $AB = BA$ 可得 $a_{ii} = a_{jj}$, $(\forall i, j)$. 取 $\lambda = a_{11}$. 故 $B = \lambda I_n$, 从而 $\sigma = \lambda \cdot \mathrm{id}_{F^n}$ ......................................... (15 分)

**四、** (本题 10 分) 对于 $\Delta ABC$, 求 $3\sin A + 4\sin B + 18\sin C$ 的最大值.

**解答:** 三角形三个角 $A, B, C$ 的取值范围为

$$(A,B,C) \in D \equiv \{(\alpha,\beta,\gamma) | \alpha+\beta+\gamma=\pi, \alpha>0, \beta>0, \gamma>0\}.$$

我们首先考虑 $3\sin A + 4\sin B + 18\sin C$ 在 $D$ 的闭包

$$E = \{(\alpha,\beta,\gamma) | \alpha+\beta+\gamma=\pi, \alpha\geq 0, \beta\geq 0, \gamma\geq 0\}$$

上的最大值. ........................................................ (1 分)

我们有

$$\begin{aligned}
& \max_{(A,B,C)\in E} (3\sin A + 4\sin B + 18\sin C) \\
= & \max_{\substack{A+C\leq\pi \\ A,C\geq 0}} (3\sin A + 4\sin(A+C) + 18\sin C) \\
= & \max_{0\leq C\leq\pi} \max_{0\leq A\leq\pi-C} \Big( (3+4\cos C)\sin A + +4\sin C\cos A + 18\sin C \Big) \\
= & \max_{0\leq C\leq\pi} \left( \sqrt{(3+4\cos C)^2 + 16\sin^2 C} + 18\sin C \right) \\
= & \max_{0\leq C\leq\pi} (\sqrt{25+24\cos C} + 18\sin C).
\end{aligned}$$

........................................................................ (4 分)

考虑

$$f(C) = \sqrt{25+24\cos C} + 18\sin C, \qquad 0\leq C\leq\pi.$$

易见

$$f(C) \geq f(\pi - C), \qquad \forall\, C \in [0, \frac{\pi}{2}].$$

........................................................................ (5 分)

直接计算得

$$f'(C) = 18\cos C - \frac{12\sin C}{\sqrt{25+24\cos C}}.$$

........................................................................ (6 分)

计算得 $f'(C) = 0$ 等价于

$$(8\cos C - 1)(27\cos^2 C + 32\cos C + 4) = 0.$$

从而它在 $[0,\frac{\pi}{2}]$ 的解为 $C=\arccos\frac{1}{8}$. …………………………… (7 分)

于是

$$\begin{aligned}\max_{0\le C\le\pi} f(C) &= \max_{0\le C\le\frac{\pi}{2}} f(C) = \max\left\{f(\arccos\frac{1}{8}), f(0), f(\frac{\pi}{2})\right\}\\ &= \max\left\{\frac{35\sqrt{7}}{4}, 7, 23\right\} = \frac{35\sqrt{7}}{4}.\end{aligned}$$

………………………………………………………………… (8 分)

由此可得

$$\max_{(A,B,C)\in E}(3\sin A+4\sin B+18\sin C)=\frac{35\sqrt{7}}{4},$$

另一方面, 不难看到 $3\sin A+4\sin B+18\sin C$ 在 $E$ 的边界上 $(A,B,C$ 之一为零$)$ 的最大值为 22. ……………………………………………… (9 分)

所以所求最大值为 $\frac{35\sqrt{7}}{4}$. …………………………… (10 分)

**五、** (本题 15 分) 对于任何实数 $\alpha$, 求证存在取值于 $\{-1,1\}$ 的数列 $\{a_n\}_{n\geq 1}$ 满足

$$\lim_{n\to+\infty}\Big(\sum_{k=1}^{n}\sqrt{n+a_k}-n^{\frac{3}{2}}\Big)=\alpha.$$

**证明:** 由 Taylor 展式, $\forall\, x\in[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]$, 存在 $\xi\in[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]$ 使得

$$\sqrt{1+x}=1+\frac{x}{2}-\frac{x^2}{8(1+\xi)^{\frac{3}{2}}}.$$

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . (1 分)

从而

$$\Big|\sqrt{1+x}-\big(1+\frac{x}{2}\big)\Big|\leq x^2,\qquad \forall\, x\in[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}].$$

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . (2 分)

于是当 $n\geq 2$ 时, 不管我们怎么选取只取值 $\pm 1$ 的数列 $\{a_n\}_{n\geq 1}$, 均有

$$\begin{aligned}
&\sum_{k=1}^{n}\Big|\sqrt{n+a_k}-n^{\frac{3}{2}}-\sum_{k=1}^{n}\frac{a_k}{2\sqrt{n}}\Big|\\
=\ &\sqrt{n}\sum_{k=1}^{n}\Big|\sqrt{1+\frac{a_k}{n}}-\sum_{k=1}^{n}(1+\frac{a_k}{2n})\Big|\\
\leq\ &\sqrt{n}\sum_{k=1}^{n}\Big(\frac{a_k}{n}\Big)^2\leq\frac{1}{\sqrt{n}}.
\end{aligned}$$

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . (5 分)

可以有很多种方法选取只取值 $\pm 1$ 的数列 $\{a_n\}_{n\geq 1}$ 使得

$$\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{a_k}{2\sqrt{n}}=\alpha.$$

此时就成立

$$\lim_{n\to+\infty}\Big(\sum_{k=1}^{n}\sqrt{n+a_k}-n^{\frac{3}{2}}\Big)=\alpha.$$

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . (6 分)

例如, 我们可以按以下方式选取: 取 $a_1=1$, 依次定义

$$a_{n+1}=\begin{cases}1, & 如果 \sum\limits_{k=1}^{n} a_k<2\alpha\sqrt{n},\\ -1, & 如果 \sum\limits_{k=1}^{n} a_k\geq 2\alpha\sqrt{n}.\end{cases}$$

$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$ (10 分)

记

$$y_n=\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{k=1}^{n}a_k,\qquad n=1,2,\ldots.$$

我们有

$$-\sqrt{n}\leq y_n\leq\sqrt{n}.$$

若 $y_n>2\alpha$, 我们有

$$\begin{aligned} y_{n+1}-y_n &= \frac{y_n\sqrt{n}-1}{\sqrt{n+1}}-y_n\\ &= -\frac{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}+y_n}{\sqrt{n+1}(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})}, \end{aligned}$$

这时

$$-\frac{2}{\sqrt{n+1}}<y_{n+1}-y_n<0;$$

$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$ (12 分)

而当 $y_n<2\alpha$ 时, 我们有

$$\begin{aligned} y_{n+1}-y_n &= \frac{y_n\sqrt{n}+1}{\sqrt{n+1}}-y_n\\ &= \frac{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}-y_n}{\sqrt{n+1}(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})}; \end{aligned}$$

这时

$$0<y_{n+1}-y_n<\frac{2}{\sqrt{n+1}};$$

于是当 $y_{n+1}-2\alpha$ 和 $y_n-2\alpha$ 同号时,

$$|y_{n+1}-2\alpha|\leq|y_n-2\alpha|,$$

而当 $y_{n+1}-2\alpha$ 和 $y_n-2\alpha$ 异号时,

$$|y_{n+1}-2\alpha| \le |y_{n+1}-y_n| \le \frac{2}{\sqrt{n+1}}.$$

一般地有

$$|y_{n+1}-2\alpha| \le \max(|y_n-2\alpha|, \frac{2}{\sqrt{n+1}}).$$

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . (14 分)

注意到对任何 $N>0$, 总有 $m \ge N$, 使得 $y_{m+1}-2\alpha$ 和 $y_m-2\alpha$ 异号. 由上面的讨论可得到

$$|y_k-2\alpha| \le \frac{2}{\sqrt{m+1}} \le \frac{2}{\sqrt{N+1}}, \qquad \forall\, k=m+1, m+2, \ldots.$$

因此, $\lim\limits_{n\to+\infty} y_n = 2\alpha$. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . (15 分)

$\square$

六、 (本题 20 分) 设 $A$ 是数域 $F$ 上的 $n$ 阶方阵. 证明: $A$ 相似于 $\begin{pmatrix} B & 0 \\ 0 & C \end{pmatrix}$, 其中 $B$ 是可逆矩阵, $C$ 是幂零阵, 即存在 $m$ 使得 $C^m = 0$.

**证明:** 设 $V$ 是 $F$上 $n$ 维线性空间, $\sigma$ 是 $V$ 上线性变换, 它在 $V$ 的一组基下的矩阵为 $A$. 下面证明存在 $\sigma-$不变子空间 $V_1, V_2$ 满足 $V = V_1 \oplus V_2$, 且 $\sigma|_{V_1}$ 是同构，$\sigma|_{V_2}$ 是幂零变换.

首先有子空间升链： $\operatorname{Ker}\sigma \subseteq \operatorname{Ker}\sigma^2 \subseteq \cdots \subseteq \operatorname{Ker}\sigma^k \subseteq \cdots$ 从而存在正整数 $m$ 使得 $\operatorname{Ker}\sigma^m = \operatorname{Ker}\sigma^{m+i}$, $(i = 1, 2, \cdots)$. 进而有 $\operatorname{Ker}\sigma^m = \operatorname{Ker}\sigma^{2m}$.
(7 分)

下面证明 $V = \operatorname{Ker}\sigma^m \oplus \operatorname{Im}\sigma^m$.

$\forall \alpha \in \operatorname{Ker}\sigma^m \bigcap \operatorname{Im}\sigma^m$, 由 $\alpha \in \operatorname{Im}\sigma^m$, 存在 $\beta \in V$, 使得 $\alpha = \sigma^m(\beta)$. 由此 $0 = \sigma^m(\alpha) = \sigma^{2m}(\beta)$, 所以 $\beta \in \operatorname{Ker}\sigma^{2m}$, 从而 $\beta \in Ker\sigma^m = \operatorname{Ker}\sigma^{2m}$. 故 $\alpha = \sigma^m(\beta) = 0$. $\operatorname{Ker}\sigma^m \bigcap \operatorname{Im}\sigma^m = (0)$, 从而 $V = \operatorname{Ker}\sigma^m \oplus \operatorname{Im}\sigma^m$ . (12 分)

由 $\sigma(\operatorname{Ker}\sigma^m) \subseteq \operatorname{Ker}\sigma^m$， $\sigma(\operatorname{Im}\sigma^m) \subseteq \operatorname{Im}\sigma^m$ 知 $\operatorname{Ker}\sigma^m, \operatorname{Im}\sigma^m$ 是 $\sigma-$不变子空间. 又由 $\sigma^m(\operatorname{Ker}\sigma^m) = (0)$ 知 $\sigma|_{\operatorname{Ker}\sigma^m}$ 是幂零变换. 由 $\sigma(\operatorname{Im}\sigma^m) = \operatorname{Im}\sigma^m$ 知 $\sigma|_{\operatorname{Im}\sigma^m}$ 是满线性变换, 从而可逆. ................................ (17 分)

从 $V_1 = \operatorname{Im}\sigma^m, V_2 = \operatorname{Ker}\sigma^m$ 中各找一组基 $\alpha_1, \cdots, \alpha_s$; $\beta_1, \cdots, \beta_t$，合并成 $V$ 的一组基, $\sigma$ 在此基下的矩阵为 $\begin{pmatrix} B & 0 \\ 0 & C \end{pmatrix}$, 其中 $B$ 是 $\sigma|_{V_1}$ 在基 $\alpha_1, \cdots, \alpha_s$ 下的矩阵, 从而可逆; $C$ 是 $\sigma|_{V_2}$ 在基 $\beta_1, \cdots, \beta_t$ 下的矩阵, 是幂零矩阵. 从而 $A$ 相似于 $\begin{pmatrix} B & 0 \\ 0 & C \end{pmatrix}$, 其中 $B$ 是可逆矩阵, $C$ 是幂零矩阵. .................... (20 分)

==============================================

**注：** 如果视 $F$ 为复数域直接用若当标准型证明, 证明正确可以给 10 分:
存在可逆矩阵 $P$, 使得

$$P^{-1}AP = \operatorname{diag}\left(J(\lambda_1, n_1), \cdots, J(\lambda_s, n_s), J(0, m_1), \cdots, J(0, m_t)\right),$$

其中 $J(\lambda_i, n_i)$ 是特征值为 $\lambda_i$ 的阶为 $n_i$ 的若当块，$\lambda_i \neq 0$; $J(0, m_j)$ 特征值为 0 的阶为 $m_j$ 的若当块. ........................................................ (5 分)

令

$$B = \operatorname{diag}(J(\lambda_1, n_1), \cdots, J(\lambda_s, n_s)),$$

$$C = \operatorname{diag}(J(0, m_1), \cdots, J(0, m_t)),$$

则 $B$ 为可逆矩阵, $C$ 为幂零矩阵, $A$ 相似于 $\begin{pmatrix} B & 0 \\ 0 & C \end{pmatrix}$. ........... (10 分)

七、 (本题 15 分) 设 $F(x)$ 是 $[0,+\infty)$ 上的单调递减函数, $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x)=0$, 且 $\lim\limits_{n\to+\infty}\int_0^{+\infty} F(t)\sin\frac{t}{n}\,dt=0$.

证明: (i) $\lim\limits_{x\to+\infty} xF(x)=0$, (ii) $\lim\limits_{x\to 0}\int_0^{+\infty} F(t)\sin(xt)\,dt=0$.

**证明:** 首先, 对任何 $x\in\mathbb{R}$, 不难由关于无穷积分收敛性的 Dirichlet 判别法得到 $\int_0^{+\infty} F(t)\sin(xt)\,dt$ 收敛. 下记

$$f(x)=\int_0^{+\infty} F(t)\sin(xt)\,dt,\qquad \forall\, x\in\mathbb{R}.$$

由于 $F$ 单调下降,

$$\begin{aligned}
&\int_{2k\pi}^{(2k+2)\pi} F(nt)\sin t\,dt\\
=&\int_0^{\pi}\Big(F(2nk\pi+nt)-F(2nk\pi+2n\pi-nt)\Big)\sin t\,dt\\
\geq&\ 0,\qquad \forall\, k=0,1,2,\ldots.
\end{aligned}$$

从而

$$\begin{aligned}
f\Big(\frac{1}{n}\Big) &= \int_0^{+\infty} F(t)\sin\frac{t}{n}\,dt\\
&= \int_0^{+\infty} nF(nt)\sin t\,dt\\
&= \sum_{k=0}^{\infty}\int_{2k\pi}^{(2k+2)\pi} nF(nt)\sin t\,dt\\
&\geq \int_0^{2\pi} nF(nt)\sin t\,dt\\
&= \int_0^{\pi} n\Big(F(nt)-F(2n\pi-nt)\Big)\sin t\,dt\\
&\geq \int_0^{\frac{\pi}{2}} n\Big(F(nt)-F(2n\pi-nt)\Big)\sin t\,dt\\
&\geq n\Big[F\Big(\frac{n\pi}{2}\Big)-F\Big(\frac{3n\pi}{2}\Big)\Big]\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin t\,dt\\
&= n\Big[F\Big(\frac{n\pi}{2}\Big)-F\Big(\frac{3n\pi}{2}\Big)\Big]\\
&\geq 0.
\end{aligned}$$

$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$ (5 分)

结合 $\lim\limits_{n\to+\infty} f\Big(\frac{1}{n}\Big)=0$ 得

$$\lim_{n\to+\infty} n\Big[F\Big(\frac{n\pi}{2}\Big)-F\Big(\frac{3n\pi}{2}\Big)\Big]=0.$$

$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$ (7 分)

这样, 任取 $\delta>0$, 有 $N>0$ 使得当 $n>N$ 时, 有

$$n\Big|F\Big(\frac{n\pi}{2}\Big)-F\Big(\frac{3n\pi}{2}\Big)\Big|\le\delta.$$

从而对任何 $m>0$, $n>N$ 有

$$\begin{aligned}
0 &\le nF\Big(\frac{n\pi}{2}\Big)\\
&\le \sum_{k=0}^{m} n\Big|F\Big(\frac{3^k n\pi}{2}\Big)-F\Big(\frac{3^{k+1}n\pi}{2}\Big)\Big|+nF\Big(\frac{3^{m+1}n\pi}{2}\Big)\\
&\le \sum_{k=0}^{m}\frac{\delta}{3^k}+nF\Big(\frac{3^{m+1}n\pi}{2}\Big)\\
&\le \frac{3\delta}{2}+nF\Big(\frac{3^{m+1}n\pi}{2}\Big).
\end{aligned}$$

上式中令 $m\to+\infty$, 由 $\lim\limits_{x\to+\infty}F(x)=0$ 得到

$$0\le nF\Big(\frac{n\pi}{2}\Big)\le\frac{3\delta}{2},\qquad \forall\, n>N.$$

所以

$$\lim_{n\to+\infty} nF\Big(\frac{n\pi}{2}\Big)=0.$$

$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$ (9 分)

进一步利用单调性, 当 $x>\frac{\pi}{2}$ 时, 有

$$0\le xF(x)\le\pi\Big[\frac{2x}{\pi}\Big]F\Big(\Big[\frac{2x}{\pi}\Big]\cdot\frac{\pi}{2}\Big),$$

其中 $[s]$ 表示实数 $s$ 的整数部分. 于是可得

$$\lim_{x\to+\infty} x\,F(x)=0.$$

$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$ (10 分)

从而又知 $xF(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上有界, 设上界为 $M \geq 0$.

$\forall\, \varepsilon \in (0,\pi)$, 当 $x>0$ 时, 我们有

$$\begin{aligned} 0 &\leq f(x) = \int_0^{+\infty} x^{-1}F(x^{-1}t)\sin t\,dt \\ &\leq \int_0^{\pi} x^{-1}t\,H(x^{-1}t)\,\frac{\sin t}{t}\,dt \end{aligned}$$

$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$ (12 分)

$$\leq x^{-1}\varepsilon\,H(x^{-1}\varepsilon)\int_\varepsilon^{\pi}\frac{\sin t}{t}\,dt + M\varepsilon, \qquad \forall\, x>0.$$

$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$ (14 分)

于是

$$0 \leq \overline{\lim_{x\to 0^+}}\, f(x) \leq M\varepsilon.$$

由 $\varepsilon \in (0,\pi)$ 的任意性, 可得 $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = 0$.

进而因 $f$ 是奇函数推得 $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0$. $\dots\dots\dots\dots$ (15 分)

$\square$

# 第二届中国大学生数学竞赛预赛试卷参考答案

## (数学类)

一、**(10分)** 设 $\varepsilon \in (0,1)$, $x_0 = a$, $x_{n+1} = a + \varepsilon \sin x_n$ $(n = 0,1,2,\ldots)$. 证明: $\xi = \lim\limits_{n\to+\infty} x_n$ 存在, 且 $\xi$ 为方程 $x - \varepsilon \sin x = a$ 的唯一根.

**证明:** 注意到 $|(\sin x)'| = |\cos x| \le 1$, 由中值定理, 我们有

$$|\sin x - \sin y| \le |x - y|, \qquad \forall\, x, y \in \mathbb{R}.$$

……………………………………(2 分)

所以

$$|x_{n+2} - x_{n+1}| = |\varepsilon(\sin x_{n+1} - \sin x_n)| \le \varepsilon |x_{n+1} - x_n|, \qquad n = 0,1,2,\ldots.$$

……………………………………(4 分)

从而可得

$$|x_{n+1} - x_n| \le \varepsilon^n |x_1 - x_0|, \qquad \forall\, n = 0,1,2,\ldots.$$

于是级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(x_{n+1} - x_n)$ 绝对收敛, 从而 $\xi = \lim\limits_{n\to+\infty} x_n$ 存在.

……………………………………(6 分)

对于递推式 $x_{n+1} = a + \varepsilon \sin x_n$ 两边取极限即得 $\xi$ 为 $x - \varepsilon \sin x = a$ 的根.

……………………………………(8 分)

进一步, 设 $\eta$ 也是 $x - \varepsilon \sin x = a$, 即 $\eta - \varepsilon \sin \eta = a$ 的根, 则

$$|\xi - \eta| = \varepsilon |\sin \xi - \sin \eta| \le \varepsilon |\xi - \eta|.$$

所以由 $\varepsilon \in (0,1)$ 可得 $\eta = \xi$. 即 $x - \varepsilon \sin x = a$ 的根唯一. 证毕

……………………………………(10 分)

$\square$

二、**(15 分)** 设 $B = \begin{pmatrix} 0 & 10 & 30 \\ 0 & 0 & 2010 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. 证明 $X^2 = B$ 无解, 这里 $X$ 为三阶未知复方阵.

**证明:** 反证法. 设方程有解, 即存在复矩阵 $A$ 使得 $A^2 = B$.

........................................(2 分)

我们注意到 $B$ 的特征值为 0, 且其代数重数为 3.

........................................(4 分)

设 $\lambda$ 为 $A$ 的一个特征值, 则 $\lambda^2$ 为 $B$ 的特征值. 所以 $\lambda = 0$. 从而 $A$ 的特征值均为 0.

........................................(6 分)

于是 $A$ 的 Jordan 标准型只可能为$J_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $J_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ 或 $J_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

........................................(10 分)

从而 $A^2$ 的 Jordan 标准型只能为 $J_1 = J_1^2 = J_2^2$ 或 $J_2 = J_3^2$.

........................................(12 分)

因此 $A^2$ 的秩不大于 1, 与 $B = A^2$ 的秩为 2 矛盾.

所以 $X^2 = B$ 无解. 证毕.

........................................(15 分)

$\square$

三、**(10 分)** 设 $D \subset \mathbb{R}^2$ 是凸区域, 函数 $f(x,y)$ 是凸函数. 证明或否定: $f(x,y)$ 在 $D$ 上连续.

注: 函数 $f(x,y)$ 为凸函数的定义是 $\forall \alpha \in (0,1)$ 以及 $(x_1,y_1),(x_2,y_2) \in D$, 成立

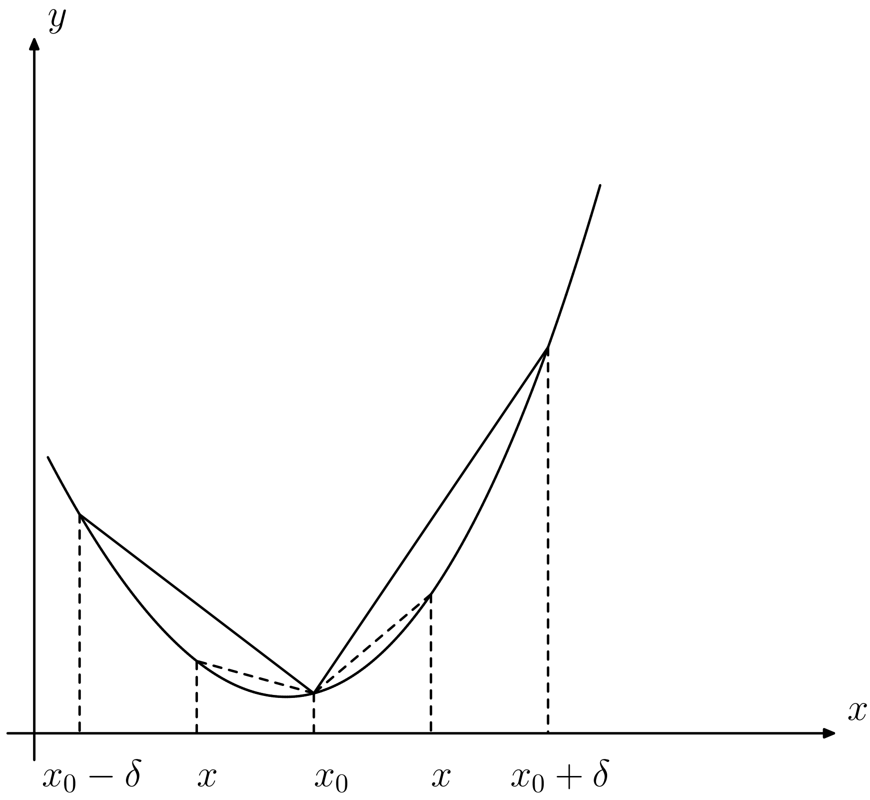
$$f(\alpha x_1 + (1-\alpha)x_2, \alpha y_1 + (1-\alpha)y_2) \le \alpha f(x_1,y_1) + (1-\alpha)f(x_2,y_2).$$

**证明:** 结论成立. 我们分两步证明结论.

(i) 对于 $\delta > 0$ 以及 $[x_0-\delta, x_0+\delta]$ 上的一元凸函数 $g(x)$, 容易验证 $\forall x \in (x_0-\delta, x_0+\delta)$:

$$\frac{g(x_0)-g(x_0-\delta)}{d} \le \frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0} \le \frac{g(x_0+\delta)-g(x_0)}{\delta}.$$

........................................(2 分)




从而

$$\left|\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}\right| \le \left|\frac{g(x_0+\delta)-g(x_0)}{\delta}\right|+\left|\frac{g(x_0)-g(x_0-\delta)}{\delta}\right|, \qquad \forall\, x\in(x_0-\delta,x_0+\delta).$$

由此即得 $g(x)$ 在 $x_0$ 连续. 一般地, 可得开区间上的一元凸函数连续.

........................................(4 分)

(ii) 设 $(x_0,y_0)\in D$. 则有 $\delta>0$ 使得

$$E_\delta \equiv [x_0-\delta,x_0+\delta]\times[y_0-\delta,y_0+\delta]\subset D.$$

........................................(5 分)

注意到固定 $x$ 或 $y$ 时, $f(x,y)$ 作为一元函数都是凸函数, 由 (i) 的结论, $f(x,y_0), f(x,y_0+\delta), f(x,y_0-\delta)$ 都是 $x\in[x_0-\delta,x_0+\delta]$ 上的连续函数, 从而它们有界, 即存在常数 $M_\delta>0$ 使得

$$\begin{aligned} & \frac{|f(x,y_0+\delta)-f(x,y_0)|}{\delta}+\frac{|f(x,y_0)-f(x,y_0-\delta)|}{\delta} \\ & +\frac{|f(x_0+\delta,y_0)-f(x_0,y_0)|}{\delta}+\frac{|f(x_0,y_0)-f(x_0-\delta,y_0)|}{\delta} \\ \le\ & M_\delta, \qquad\qquad \forall\, x\in[x_0-\delta,x_0+\delta]. \end{aligned}$$

$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$(7 分)

进一步, 由 (i) 的结论, 对于 $(x,y)\in E_\delta$,

$$\begin{aligned}
&|f(x,y)-f(x_0,y_0)|\\
\leq\;& |f(x,y)-f(x,y_0)|+|f(x,y_0)-f(x_0,y_0)|\\
\leq\;& \Big(\frac{|f(x,y_0+\delta)-f(x,y_0)|}{\delta}+\frac{|f(x,y_0)-f(x,y_0-\delta)|}{\delta}\Big)|y-y_0|\\
&+\Big(\frac{|f(x_0+\delta,y_0)-f(x_0,y_0)|}{\delta}+\frac{|f(x_0,y_0)-f(x_0-\delta,y_0)|}{\delta}\Big)|x-x_0|\\
\leq\;& M_\delta|y-y_0|+M_\delta|x-x_0|.
\end{aligned}$$

于是 $f(x,y)$ 在 $(x_0,y_0)$ 连续. 证毕.

$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$(10 分)

□

**四、(10 分)** 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上 Riemann 可积, 在 $x=1$ 可导, $f(1)=0$, $f'(1)=a$. 证明:

$$\lim_{n\to+\infty} n^2\int_0^1 x^n f(x)\,dx=-a.$$

**证明:** 记 $M=\sup\limits_{x\in[0,1]}|f(x)|<+\infty$. 令 $r(x)=f(x)-f(1)-f'(1)(x-1)=f(x)-a(x-1)$. 则由 Peano 型的 Taylor 展式可得 $\forall\varepsilon>0$, $\exists\delta\in(0,1)$, 使得当 $\delta<x\leq 1$ 时,

$$|r(x)|\leq\varepsilon(1-x).$$

$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$(2 分)

我们有

$$\begin{aligned}
\int_0^1 x^n f(x)\,dx &= \int_0^\delta x^n f(x)\,dx+\int_\delta^1 ax^n(x-1)\,dx+\int_\delta^1 x^n r(x)\,dx\\
&= R_1+R_2+R_3.
\end{aligned}$$

$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$(4 分)

注意到

$$|R_1|\leq M\int_0^\delta x^n\,dx=M\frac{\delta^{n+1}}{n+1},$$

$$R_2=-\frac{a}{(n+1)(n+2)}+a\Big(\frac{\delta^{n+1}}{n+1}-\frac{\delta^{n+2}}{n+2}\Big)$$

以及

$$
\begin{aligned}
|R_3| &\le \int_\delta^1 x^n\,|r(x)|\,dx \le \varepsilon\int_\delta^1 x^n(1-x)\,dx\\
&\le \varepsilon\int_0^1 x^n(1-x)\,dx = \frac{\varepsilon}{(n+1)(n+2)},
\end{aligned}
$$

我们有

$$\lim_{n\to+\infty}|n^2R_1| = 0,$$

$$\lim_{n\to+\infty}|n^2R_2 + a| = 0$$

以及

$$\overline{\lim_{n\to+\infty}}\,|n^2R_3| \le \varepsilon.$$

..........................................(8 分)

所以

$$\overline{\lim_{n\to+\infty}}\left|n^2\int_0^1 x^n f(x)\,dx + a\right| \le \varepsilon.$$

由上式及 $\varepsilon > 0$ 的任意性即得

$$\lim_{n\to+\infty} n^2\int_0^1 x^n f(x)\,dx = -a.$$

证毕.

..........................................(10 分)

□

**五、(15 分)** 已知二次曲面 $\Sigma$ (非退化)过以下九点：$A(1,0,0)$, $B(1,1,2)$, $C(1,-1,-2)$, $D(3,0,0)$, $E(3,1,2)$, $F(3,-2,-4)$, $G(0,1,4)$, $H(3,-1,-2)$, $I(5,2\sqrt{2},8)$. 问 $\Sigma$ 是哪一类曲面？

**解答:** 易见，$A$、$B$、$C$ 共线，$D$、$E$、$F$ 共线.

..........................................(6 分)

而只有两种二次曲面上可能存在共线的三点: 单叶双曲面和双曲抛物面.

..........................................(10 分)

然后，可以看到直线 $ABC$ 和直线 $DEF$ 是平行的，且不是同一条直线.

..........................................(12 分)

这就又排除了双曲抛物面的可能(双曲抛物面的 同族直母线都异面，不同族直母线都相交), 所以只可能是单叶双曲面.

..........................................(15 分)

注: 这个曲面其实是(不要求学生写出方程式)

$$(x-2)^2+y^2-\frac{z^2}{4}=1.$$

**六、(20 分)** 设 $A$ 为 $n\times n$ 实矩阵(未必对称), 对任一 $n$ 维实向量 $\alpha\equiv(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)$, $\alpha A\alpha^\top\geq 0$ (这里 $\alpha^\top$ 表示 $\alpha$ 的转置), 且存在 $n$ 维实向量 $\beta$, 使得 $\beta A\beta^\top=0$, 同时对任意 $n$ 维实向量 $x$ 和 $y$, 当 $xAy^\top\neq 0$ 时有 $xAy^\top+yAx^\top\neq 0$. 证明: 对任意 $n$ 维实向量 $v$, 都有 $vA\beta^\top=0$.

**证明:** 取任意实数 $r$, 由题设知

$$(v+r\beta)A(v+r\beta)^\top\geq 0.$$

..........................................(8 分)

即

$$vAv^\top+rvA\beta^\top+r\beta Av^\top+r^2\beta A\beta^\top\geq 0.$$

..........................................(12 分)

亦即

$$vAv^\top+r\Big(vA\beta^\top+\beta Av^\top\Big)+r^2\beta A\beta^\top\geq 0.$$

..........................................(14 分)

若 $vA\beta^\top\neq 0$, 则有 $vA\beta^\top+\beta Av^\top\neq 0$. 因此可取适当的实数 $r$ 使得

$$vAv^\top+r\Big(vA\beta^\top+\beta Av^\top\Big)+r^2\beta A\beta^\top<0.$$

盾. 证毕.

..........................................(20 分)

□

**七、(10 分)** 设 $f$ 在区间 $[0,1]$ 上Riemann 可积, $0\leq f\leq 1$. 求证: 对任何 $\varepsilon>0$, 存在只取值 $0,1$ 的分段(段数有限)常值函数 $g(x)$, 使得 $\forall\,[\alpha,\beta]\subseteq[0,1]$,

$$\Big|\int_\alpha^\beta\big(f(x)-g(x)\big)\,dx\Big|<\varepsilon.$$

**证明:** 取定 $n > \frac{2}{\varepsilon}$. 定义 $A_m = \Big[\dfrac{m}{n}, \dfrac{m}{n} + \displaystyle\int_{\frac{m}{n}}^{\frac{m+1}{n}} f(t)\,dt\Big)$,

$$g(x) = \begin{cases} 1, & x \in \bigcup\limits_{m=0}^{n-1} A_m, \\ 0, & x \notin \bigcup\limits_{m=0}^{n-1} A_m. \end{cases}$$

……………………………………(5 分)

对于 $0 \le \alpha < \beta \le 1$, 设非负整数 $k \le \ell$ 满足 $\dfrac{k}{n} \le \alpha < \dfrac{k+1}{n}$, $\dfrac{\ell}{n} \le \beta < \dfrac{\ell+1}{n}$, 则

$$\begin{aligned} & \Big|\int_\alpha^\beta \big(f(x)-g(x)\big)\,dx\Big| \\ \le\ & \int_\alpha^{\frac{k+1}{n}} |f(x)-g(x)|\,dx + \Big|\int_{\frac{k+1}{n}}^{\frac{\ell}{n}} \Big(f(x)-g(x)\Big)\,dx\Big| + \int_{\frac{\ell}{n}}^{\beta} |f(x)-g(x)|\,dx \\ \le\ & \int_\alpha^{\frac{k+1}{n}} 1\,dx + 0 + \int_{\frac{\ell}{n}}^{\beta} 1\,dx \\ \le\ & \frac{2}{n} < \varepsilon. \end{aligned}$$

证毕.

……………………………………(10 分)

□

**八、(10 分)** 已知 $\varphi : (0,+\infty) \to (0,+\infty)$ 是一个严格单调下降的连续函数, 满足

$$\lim_{t\to 0^+} \varphi(t) = +\infty.$$

若

$$\int_0^{+\infty} \varphi(t)\,dt = \int_0^{+\infty} \varphi^{-1}(t)\,dt = a < +\infty,$$

其中 $\varphi^{-1}$ 表示 $\varphi$ 的反函数. 求证:

$$\int_0^{+\infty} [\varphi(t)]^2\,dt + \int_0^{+\infty} [\varphi^{-1}(t)]^2\,dt \ge \frac{1}{2}a^{\frac{3}{2}}.$$

**证明:** 令 $P = \int_p^{+\infty} \varphi(t)\,dt$, $Q = \int_q^{+\infty} \varphi^{-1}(t)\,dt$, $I = a - P - Q$, 其中 $pq = a$.

……………………………………(2 分)

则

$$
\begin{aligned}
&\int_0^{+\infty}\Big(\varphi^{-1}(t)\Big)^2\,dt \geq \int_0^{q}\Big(\varphi^{-1}(t)\Big)^2\,dt \\
\geq\ & \frac{1}{q}\Big(\int_0^{q}\varphi^{-1}(t)\,dt\Big)^2 = \frac{1}{q}(a-Q)^2 = \frac{1}{q}(I+P)^2,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\int_0^{+\infty}\Big(\varphi(t)\Big)^2\,dt \geq \int_0^{p}\Big(\varphi(t)\Big)^2\,dt \\
\geq\ & \frac{1}{p}\Big(\int_0^{p}\varphi(t)\,dt\Big)^2 = \frac{1}{p}(a-P)^2 = \frac{1}{p}(I+Q)^2.
\end{aligned}
$$

........................................(6 分)

因此,

$$
\begin{aligned}
&\int_0^{+\infty}\Big(\varphi(t)\Big)^2\,dt + \int_0^{+\infty}\Big(\varphi^{-1}(t)\Big)^2\,dt \\
\geq\ & \frac{1}{p}(I+Q)^2 + \frac{1}{q}(I+P)^2 \\
\geq\ & \frac{2}{\sqrt{pq}}(I+P)(I+Q) = \frac{2}{\sqrt{a}}\Big(QP+aI\Big).
\end{aligned}
$$

........................................(8 分)

易见可取到适当的 $p,q$ 满足 $P=Q=\dfrac{a-I}{2}$, 从而

$$
\begin{aligned}
&\int_0^{+\infty}\Big(\varphi(t)\Big)^2\,dt + \int_0^{+\infty}\Big(\varphi^{-1}(t)\Big)^2\,dt \\
\geq\ & \frac{1}{a}\Big(\frac{(a-I)^2}{4}I+aI\Big) = \frac{2}{\sqrt{2}}\frac{(a+I)^2}{4} \geq \frac{1}{2}a^{\frac{3}{2}}.
\end{aligned}
$$

证毕.

........................................(10 分)

□

专业：______ 年级：______ 所在院校：______ 身份证号：______ 姓名：______

密 封 线

# 首届中国大学生数学竞赛赛区赛试卷解答

## （数学类，2009）

考试形式：闭卷　　考试时间：120 分钟　　满分：100 分.

| 题　号 | 一 | 二 | 三 | 四 | 五 | 六 | 七 | 总分 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 满　分 | 15 | 20 | 15 | 10 | 10 | 15 | 15 | 100 |
| 得　分 | | | | | | | | |

注意：1、所有答题都须写在此试卷纸密封线右边，写在其它纸上一律无效.

2、密封线左边请勿答题，密封线外不得有姓名及相关标记.

| 得　分 | |
|---|---|
| 评阅人 | |

一、（15 分）求经过三平行直线 $L_1: x=y=z$，$L_2: x-1=y=z+1$，$L_3: x=y+1=z-1$ 的圆柱面的方程.

解： 先求圆柱面的轴 $L_0$ 的方程. 由已知条件易知，圆柱面母线的方向是 $\vec{n}=(1,1,1)$， 且圆柱面经过点 $O(0,0,0)$， 过点 $O(0,0,0)$ 且垂直于 $\vec{n}=(1,1,1)$ 的平面 $\pi$ 的方程为： $x+y+z=0$. ……………………………（3 分)

$\pi$ 与三已知直线的交点分别为 $O(0,0,0), P(1,0,-1), Q(0,-1,1)$ ………… （5 分)

圆柱面的轴 $L_0$ 是到这三点等距离的点的轨迹， 即

$$\begin{cases} x^2+y^2+z^2=(x-1)^2+y^2+(z+1)^2 \\ x^2+y^2+z^2=x^2+(y+1)^2+(z-1)^2 \end{cases},$$

即

$$\begin{cases} x-z=1 \\ y-z=-1 \end{cases},$$ ……………………………………………（9 分)

将 $L_0$ 的方程改为标准方程

$$x-1=y+1=z.$$

圆柱面的半径即为平行直线 $x=y=z$ 和 $x-1=y+1=z$ 之间的距离. $P_0(1,-1,0)$

为 $L_0$ 上的点. ………………………………………………………………… （12 分）

对圆柱面上任意一点 $S(x,y,z)$， 有 $\frac{|\vec{n}\times\overrightarrow{P_0S}|}{|\vec{n}|}=\frac{|\vec{n}\times\overrightarrow{P_0O}|}{|\vec{n}|}$， 即

$$(-y+z-1)^2+(x-z-1)^2+(-x+y+2)^2=6,$$

所以，所求圆柱面的方程为：

$$x^2+y^2+z^2-xy-xz-yz-3x+3y=0. \quad \text{………………} \quad (15\text{ 分})$$

| 得　分 | |
|---|---|
| 评阅人 | |

二、（20 分）设 $C^{n\times n}$ 是 $n\times n$ 复矩阵全体在通常的运算下所构成的复数域 $C$ 上的线性空间，$F=\begin{pmatrix}0&0&\vdots&0&-a_n\\1&0&\vdots&0&-a_{n-1}\\0&1&\vdots&0&-a_{n-2}\\\vdots&\vdots&\vdots&\vdots&\vdots\\0&0&\vdots&1&-a_1\end{pmatrix}$.

（1）假设 $A=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\a_{21}&a_{22}&\cdots&a_{2n}\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\a_{n1}&a_{n2}&\cdots&a_{nn}\end{pmatrix}$，若 $AF=FA$，证明：

$A=a_{n1}F^{n-1}+a_{n-11}F^{n-2}+\cdots+a_{21}F+a_{11}E$；

（2）求 $C^{n\times n}$ 的子空间 $C(F)=\left\{X\in C^{n\times n}\mid FX=XF\right\}$ 的维数.

**（1）的证明：**记 $A=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)$， $M=a_{n1}F^{n-1}+a_{n-11}F^{n-2}+\cdots+a_{21}F+a_{11}E$ .要证明 $M=A$，只需证明 $A$ 与 $M$ 的各个列向量对应相等即可.若以 $e_i$ 记第 $i$ 个基本单位列向量.于是，只需证明：对每个 $i$， $Me_i=Ae_i(=\alpha_i)$. ……………………… （2 分）

若记 $\beta=(-a_n,-a_{n-1},\cdots,-a_1)^T$， 则 $F=(e_2,e_3,\cdots,e_n,\beta)$ .注意到，

$Fe_1=e_2,F^2e_1=Fe_2=e_3,\cdots,F^{n-1}e_1=F(F^{n-2}e_1)=Fe_{n-1}=e_n$ （*） ….. （6 分）

由

$$\begin{aligned}Me_1&=(a_{n1}F^{n-1}+a_{n-11}F^{n-2}+\cdots+a_{21}F+a_{11}E)e_1\\&=a_{n1}F^{n-1}e_1+a_{n-11}F^{n-2}e_1+\cdots+a_{21}Fe_1+a_{11}Ee_1\\&=a_{n1}e_n+a_{n-11}e_{n-1}+\cdots+a_{21}e_2+a_{11}e_1\\&=\alpha_1=Ae_1\text{..........................................(10分)}\end{aligned}$$

知 $Me_2=MFe_1=FMe_1=FAe_1=AFe_1=Ae_2$

姓名：＿＿＿ 身份证号：＿＿＿ 所在院校：＿＿＿ 年级：＿＿＿ 专业：＿＿＿

密 —— 封 —— 线

$$Me_3 = MF^2e_1 = F^2Me_1 = F^2Ae_1 = AF^2e_1 = Ae_3$$

……………

$$Me_n = MF^{n-1}e_1 = F^{n-1}Me_1 = F^{n-1}Ae_1 = AF^{n-1}e_1 = Ae_n$$

所以，$M = A$.　　　　　　　　　…………………………..（14 分)

**（2）解：** 由（1），$C(F) = span\{E, F, F^2, \cdots, F^{n-1}\}$，…………（16 分)

设 $x_0E + x_1F + x_2F^2 + \cdots + x_{n-1}F^{n-1} = O$，等式两边同右乘 $e_1$，利用（*）得

$$\theta = Oe_1 = (x_0E + x_1F + x_2F^2 + \cdots + x_{n-1}F^{n-1})e_1$$

$$= x_0Ee_1 + x_1Fe_1 + x_2F^2e_1 + \cdots + x_{n-1}F^{n-1}e_1$$
$$= x_0e_1 + x_1e_2 + x_2e_3 + \cdots + x_{n-1}e_n$$ ……………………..(18分)

因 $e_1, e_2, e_3, \cdots, e_n$ 线性无关，故，$x_0 = x_1 = x_2 = \cdots = x_{n-1} = 0$ …………（19 分)

所以，$E, F, F^2, \cdots, F^{n-1}$ 线性无关.因此，$E, F, F^2, \cdots, F^{n-1}$ 是 $C(F)$ 的基，特别地，

$\dim C(F) = n$.　　　　　　　　　……………………………（20 分)

| 得　分 | |
|---|---|
| 评阅人 | |

三、（15 分）假设 $V$ 是复数域 $C$ 上 $n$ 维线性空间（$n > 0$），$f, g$ 是 $V$ 上的线性变换.如果 $fg - gf = f$，证明：$f$ 的特征值都是 0，且 $f, g$ 有公共特征向量.

**证明：** 假设 $\lambda_0$ 是 $f$ 的特征值，$W$ 是相应的特征子空间，即 $W = \{\eta \in V \mid f(\eta) = \lambda_0\eta\}$.于是，$W$ 在 $f$ 下是不变的. …………………………（1 分)

下面先证明，$\lambda_0$=0.任取非零 $\eta \in W$，记 $m$ 为使得 $\eta, g(\eta), g^2(\eta), \cdots, g^m(\eta)$ 线性相关的最小的非负整数，于是，当 $0 \le i \le m-1$ 时，$\eta, g(\eta), g^2(\eta), \cdots, g^i(\eta)$ 线性无关…..（2 分)

$0 \le i \le m-1$ 时令 $W_i = span\{\eta, g(\eta), g^2(\eta), \cdots, g^{i-1}(\eta)\}$,其中，$W_0 = \{\theta\}$.因此，$\dim W_i = i$（$1 \le i \le m$），并且，$W_m = W_{m+1} = W_{m+2} = \cdots$. 显然，$g(W_i) \subseteq W_{i+1}$，特别地，$W_m$ 在 $g$ 下是不变的.　　　　　　……………………………（4 分)

下面证明，$W_m$ 在 $f$ 下也是不变的.事实上，由 $f(\eta) = \lambda_0\eta$，知

$$fg(\eta) = gf(\eta) + f(\eta) = \lambda_0 g(\eta) + \lambda_0\eta$$ …………（5 分)

$$
\begin{aligned}
fg^2(\eta) &= gfg(\eta) + fg(\eta) \\
&= g(\lambda_0 g(\eta) + \lambda_0 \eta) + (\lambda_0 g(\eta) + \lambda_0 \eta) \\
&= \lambda_0 g^2(\eta) + 2\lambda_0 g(\eta) + \lambda_0 \eta \qquad \text{............................(6分)}
\end{aligned}
$$

根据

$$
\begin{aligned}
fg^k(\eta) &= gfg^{k-1}(\eta) + fg^{k-1}(\eta) \\
&= g(fg^{k-1})(\eta) + fg^{k-1}(\eta)
\end{aligned}
$$

用归纳法不难证明，$fg^k(\eta)$ 一定可以表示成 $\eta, g(\eta), g^2(\eta), \cdots, g^k(\eta)$ 的线性组合，且表示式中 $g^k(\eta)$ 前的系数为 $\lambda_0$. ……………………………………（8分)

因此，$W_m$ 在 $f$ 下也是不变的，$f$ 在 $W_m$ 上的限制在基 $\eta, g(\eta), g^2(\eta), \cdots, g^{m-1}(\eta)$ 下的矩阵是上三角矩阵，且对角线元素都是 $\lambda_0$，因而，这一限制的迹为 $m\lambda_0$. …..（10 分)

由于 $fg - gf = f$ 在 $W_m$ 上仍然成立，而 $fg - gf$ 的迹一定为零，故 $m\lambda_0 = 0$，即 $\lambda_0$ =0. ……………………………..（12 分)

任取 $\eta \in W$，由于 $f(\eta) = \theta$，$fg(\eta) = gf(\eta) + f(\eta) = g(\theta) + f(\eta) = \theta$，所以，$g(\eta) \in W$ .因此，$W$ 在 $g$ 下是不变的.从而，在 $W$ 中存在 $g$ 的特征向量，这也是 $f, g$ 的公共特征向量. …………………………………（15 分)

| | |
|---|---|
| 得　分 | |
| 评阅人 | |

四、(10 分）设 $\{f_n(x)\}$ 是定义在 $[a,b]$ 上的无穷次可微的函数序列且逐点收敛，并在 $[a,b]$ 上满足 $|f_n'(x)| \le M$ .（1）证明 $\{f_n(x)\}$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛；（2）设 $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$，问 $f(x)$ 是否一定在 $[a,b]$ 上处处可导,为什么？

**证明：**（1）$\forall \varepsilon > 0$，将区间 $[a,b]$ $K$ 等分，分点为 $x_j = a + \dfrac{j(b-a)}{K}$, $j = 0,1,2,\cdots,K$，使得 $\dfrac{b-a}{K} < \varepsilon$ . 由于 $\{f_n(x)\}$ 在有限个点 $\{x_j\}$, $j = 0,1,2,\cdots,K$ 上收敛，因此 $\exists N$，$\forall m > n > N$，使得 $|f_m(x_j) - f_n(x_j)| < \varepsilon$ 对每个 $j = 0,1,2,\cdots,K$ 成立. …………………………..（3 分)

于是 $\forall x \in [a,b]$，设 $x \in [x_j, x_{j+1}]$，则

$$|f_m(x) - f_n(x)| \le |f_m(x) - f_m(x_j)| + |f_m(x_j) - f_n(x_j)| + |f_n(x_j) - f_n(x)|,$$

专业：________ 年级：________ 所在院校：________ 身份证号：________ 姓名：________

密 封 线

$=\left|f_m'(\xi)(x-x_j)\right|+\left|f_m(x_j)-f_n(x_j)\right|+\left|f_n'(\eta)(x-x_j)\right|<(2M+1)\varepsilon$. …（5 分)

（2）不一定. ……………………………（6 分)

令 $f_n(x)=\sqrt{x^2+\frac{1}{n}}$，则 $f(x)=\lim_{n\to\infty}f_n(x)$ 在 $[a,b]$ 上不能保证处处可导.（10 分)

| 得　分 | |
|---|---|
| 评阅人 | |

五、（10 分）设 $a_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}}t\left|\frac{\sin nt}{\sin t}\right|^3dt$， 证明 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{a_n}$ 发散.

**解：** $\int_0^{\frac{\pi}{2}}t\left|\frac{\sin nt}{\sin t}\right|^3dt=\int_0^{\frac{\pi}{n}}t\left|\frac{\sin nt}{\sin t}\right|^3dt+\int_{\frac{\pi}{n}}^{\frac{\pi}{2}}t\left|\frac{\sin nt}{\sin t}\right|^3dt=I_1+I_2$ …….（3 分)

$$I_1=\int_0^{\frac{\pi}{n}}t\left|\frac{\sin nt}{\sin t}\right|^3dt<n^3\int_0^{\frac{\pi}{n}}tdt=\frac{\pi^2n}{2},$$ ………………………（5 分)

$$I_2=\int_{\frac{\pi}{n}}^{\frac{\pi}{2}}t\left|\frac{\sin nt}{\sin t}\right|^3dt<\int_{\frac{\pi}{n}}^{\frac{\pi}{2}}t\cdot\left(\frac{\pi}{2t}\right)^3dt=-\frac{\pi^3}{8}\int_{\frac{\pi}{n}}^{\frac{\pi}{2}}d\left(\frac{1}{t}\right)$$ ………..(7 分)

$$=\frac{\pi^3}{8}\left(\frac{n}{\pi}-\frac{2}{\pi}\right)<\frac{\pi^2n}{8}.$$ …………..（8 分)

因此 $\frac{1}{a_n}>\frac{1}{\pi^2n}$， 由此得到 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{a_n}$ 发散. ……………………（10 分)

| 得　分 | |
|---|---|
| 评阅人 | |

六、（15 分） $f(x,y)$ 是 $\{(x,y)\,|\,x^2+y^2\le1\}$ 上二次连续可微函数，满足 $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=x^2y^2$，计算积分

$$I=\iint_{x^2+y^2\le1}\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\frac{\partial f}{\partial y}\right)dxdy.$$

**解：** 采用极坐标 $x=r\cos\theta, y=r\sin\theta$，则

$$I=\int_0^1dr\int_0^{2\pi}\left(\cos\theta\cdot\frac{\partial f}{\partial x}+\sin\theta\cdot\frac{\partial f}{\partial y}\right)rd\theta=\int_0^1dr\int_{x^2+y^2=r^2}\left(\frac{\partial f}{\partial x}dy-\frac{\partial f}{\partial y}dx\right)$$ …..(6 分)

$$=\int_0^1dr\iint_{x^2+y^2\le r^2}\left(\frac{\partial f}{\partial x^2}+\frac{\partial f}{\partial y^2}\right)dxdy=\int_0^1dr\iint_{x^2+y^2\le r^2}\left(x^2y^2\right)dxdy$$ …….（10 分)

$$=\int_0^1 dr\int_0^r \rho^5 d\rho\int_0^{2\pi}\cos^2\theta\sin^2\theta d\theta=\frac{\pi}{168}.$$ ……………….(15 分)

| 得　分 | |
|---|---|
| 评阅人 | |

七、（15 分））假设函数 $f(x)$ 在 $[0,\ 1]$ 上连续，在 $(0,\ 1)$ 内二阶可导，过点 $A(0,\ f(0))$，与点 $B(1,\ f(1))$ 的直线与曲线 $y=f(x)$ 相交于点 $C(c,\ f(c))$，其中 $0<c<1$. 证明：在 $(0,\ 1)$ 内至少存在一点 $\xi$，使 $f''(\xi)=0$.

**证明：**因为 $f(x)$ 在 $[0,c]$ 上满足 *Lagrange* 中值定理的条件，故存在 $\xi_1\in(0,\ c)$，使 $f'(\xi_1)=\dfrac{f(c)-f(0)}{c-0}$. ………………………………………………………………（4 分)

由于 C 在弦 $AB$ 上，故有

$$\frac{f(c)-f(0)}{c-0}=\frac{f(1)-f(0)}{1-0}=f(1)-f(0).$$ ………………….……………….……….. （7 分)

从而 $f'(\xi_1)=f(1)-f(0)$. ……………………………………………...………..……….. (8 分)

同理可证，存在 $\xi_2\in(c,\ 1)$，使 $f'(\xi_2)=f(1)-f(0)$. ………………………….…….. (11 分)

由 $f'(\xi_1)=f'(\xi_2)$，知 在 $[\xi_1,\ \xi_2]$ 上 $f'(x)$ 满足 *Rolle* 定理的条件，所以存在 $\xi\in(\xi_1,\ \xi_2)\subset(0,\ 1)$，使 $f''(\xi)=0$. ……………………………………….……….…….（15 分)