绝密 ⋆ 启用前　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　试卷类型：数学竞赛

第一届八一杯大学生网络数学竞赛试题

非数类，满分：140 分，考试时间：150 分钟

比赛时间：2019 年 8 月 1 日上午 9 点至 2019 年 8 月 1 号晚上 8 点

竞赛官方微信公众号: 八一考研数学竞赛

题号	一试							二试		满分
	一	二	三	四	五	六	七	A	B	
满分	40	10	10	10	10	10	10	20	20	140
得分										

注意事项: 1. 试题解答请在规定时间内发送到邮箱hoganbin1995@outlook.com, 逾期将取消参赛资格，严格遵守比赛纪律，勿翻阅其他参考资料或在各数学群内讨论此份试题;

2. 要求解答字迹清楚，推荐采用 PDF 格式提交;

3. 文件命名：参赛科目 + 昵称 (或姓名)+ 学校;

4. 本卷分一试二试，其中一试二试满分为 100 与 40 分，两试得分总和为最终成绩.

2019 年第一届八一杯大学生网络数学竞赛

数学 I 试题 (满分 100 分)

一、填空题 (**本题满分 40 分，第 1-5 题每个 3 分，第 6-10 题每个 5 分，考生须全部作答**)

1. 计算定积分 $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{1}{1+e^x}+\operatorname{arccot} e^x\right)\left(\frac{2e^x}{\sqrt{\pi^2-4x^2}}-2e^{\frac{\pi\sin x}{2}}\cos^2\frac{x}{2}\right)\mathrm{d}x=$__________.

2. 由 $x^y=y^x$ 确定的隐函数 $y=y(x)$，求 $\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2}=$__________.

3. 求微分方程 $x^2(x-1)y'-x(x-2)y-y^2=0$ 的通解为__________.

4. 在曲面 $(xy+yz+xz)^2+(x-y+z)=0$ 上点 $(0,0,0)$ 处的切平面内，求一点 P 使得它到点 $M(1,2,3)$ 与点 $N(-2,3,-3)$ 的距离平方和最小值是__________.

5. 若 a,b 为正实数,求 $\iint\limits_D y\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=$______,其中 $D=\left\{(x,y):0\le x\le\frac{\pi}{2},0\le y\le\min\left\{\frac{a}{\cos x},\frac{b}{\sin x}\right\}\right\}$

6. (a) 设 $f(x)$ 是二阶可导函数，且 $f(1)=-1$, $f'(1)=-4$, 存在二元函数 $z=z(x,y)$ 使得 $\mathrm{d}z=4\left[f(x)+2x^3\right]y\,\mathrm{d}x+\left[3xf(x)-x^2f'(x)\right]\mathrm{d}y$,求 $f(x)$=____ 和 $z(x,y)$=____.

   (b) 求曲面 $y=4\left(x^2+y^2\right)^2+z^4$ 所围成的体积 $V=$__________.

7. 计算极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\left(\prod\limits_{k=1}^{n}\frac{2k}{2k-1}\right)\int_{-1}^{\infty}\frac{(\cos x)^{2n}}{2^x}\mathrm{d}x\right)$=____,与 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{(-1)^n}{n}\right)^{\csc\left(\pi\sqrt{1+n^2}\right)}$=____.

8. 若 n 阶方阵 A 和 B 的秩分别是 r 和 $n-r$，求矩阵方程 $AXB=0$ 的通解________.

9. (a) 找一幂级数 $f(x)$ 是____，使得它满足 $f''(x)+f(x)=0, f(0)=0, f'(0)=1$ 成立.

   (b) 计算极限

$$\lim_{x\to 0^+}\lim_{y\to+\infty}\frac{\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{n2^m+1}\int_0^{x^2}\frac{\pi\left(\sqrt[4]{1+t}-1\right)\sin t^4}{\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{((n-1)!)^2(2t)^{2n}}{(2n)!}\int_0^1\frac{(1-2x)\ln(1-x)}{x^2-x+1}\mathrm{d}x}\mathrm{d}x}{x^2(x-\tan x)\ln\left(x^2+1\right)\left[\left(\frac{2\arctan\frac{y}{x}}{\pi}\right)^y-1\right]}$$

10. (a) 计算三重积分

$$\iiint_{\Omega}\cos(2x-y+z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

其中 Ω 为球面 $x^2+y^2+z^2\le 1$.

   (b) 计算曲线积分

$$\int_L e^{-(x^2-y^2)}\left[x\left(1-x^2-y^2\right)\mathrm{d}x+y\left(1+x^2+y^2\right)\mathrm{d}y\right]$$

其中 L 为平面上从 $A(0,0)$ 到 $B(1,1)$ 的曲线 $y=x^2$ 上的弧段.

微信公众号管理员. 八一 供题

二、解答题（本题满分 10 分）

已知 $F(n)$，且 $F(1)=F(2)=1$，对于 $F(n)$ 有 $F(n+1)=\alpha F(n)+\beta F(n-1)$.

(1) 求 $F(n)$ 的通项；

(2) 若 $\alpha=\beta=1$，求 $\lim\limits_{N\to\infty}\sum\limits_{n=2}^{N}\frac{F(n)}{F(n-1)F(n+1)}$.

华中科技大学. 郭晓光 供题

三、解答题（本题满分 10 分）

设 $f(x)$ 为 $[0,1]$ 上的非负连续函数, 证明

$$\int_0^1 \frac{f^{2020}(x)}{2018}\mathrm{d}x + \int_0^1 \frac{f^{2017}(x)}{2021}\mathrm{d}x \geq \int_0^1 \frac{f^{2019}(x)}{2019}\mathrm{d}x + \int_0^1 \frac{f^{2018}(x)}{2020}\mathrm{d}x$$

中国科学技术大学. 向禹 供题

四、解答题（本题满分 10 分）

设函数 $f(x)$ 在 $[0,n]$ 上可导，$n \in \mathbb{N}^*$ 且 $n > 2$，并满足

$$\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x = \frac{\int_0^2 f(x)\mathrm{d}x}{2} = \frac{\int_0^3 f(x)\mathrm{d}x}{3} = \cdots\cdots = \frac{\int_0^n f(x)\mathrm{d}x}{n}$$

(1) 证明：存在实数 T，使得关于 x 的方程：$f(x) = T$ 至少有 n 个不等实根；

(2) 设函数 $g(x)$ 在 $[0,n]$ 上可导，证明：存在实数 M，使得关于 x 的方程：

$$f'(x) = g'(x)[M - f(x)]$$

至少有 $n-1$ 个不等实根.

吉林大学. 董翔 供题

五、解答题（本题满分 10 分）

某曲面 D 上的任意一点与 $P_0(1,1,1)$ 所在的直线始终与直线 $x-1=y-1=z-1$ 的夹角为 θ_0 .

(1) 求曲面 D 的方程;

(2) 当 $\theta_0 = \dfrac{\pi}{6}$ 时，球面 $(x-1)^2+(y-1)^2+(z-1)^2=1$ 被曲面 D 所截的曲面为 Σ ，曲面 Σ 在平面 $z=1$ 的上半部分为 Σ_1 ，下半部分为 Σ_2 .

- 当曲面 Σ_1 和 Σ_2 的电荷面密度均为 ρ 时，求 P_0 点处的电场强度 $\overrightarrow{E}$.
- 当曲面 Σ_1 带电荷密度为 ρ ，Σ_2 的电荷密度为 $-\rho$ ，求 P_0 处的电场强度 $\overrightarrow{E}$.

提示：点 $A(x_0,y_0,z_0)$ 电荷 $+q$ 对点 $B(x,y,z)$ 产生电场 $\overrightarrow{E}$ 为 $\dfrac{1}{4\pi\epsilon_0}\dfrac{q}{|\overrightarrow{r}|^3}\overrightarrow{r}$ ，其中 $\overrightarrow{r} = \overrightarrow{AB}$
.

厦门大学. 酸奶 供题

六、解答题（本题满分 10 分）

若有数列 $\{a_n\}$ 是一收敛数列且 $y=\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$，使得 y 满足 $xy''-y'+4x^3y=0$ 通解，对 $n\geq 4$，试证：$a_n=-\dfrac{4}{n\,(n-2)}a_{n-4}$. 并求证在 $a_0=1, a_2=0$ 情况下通解为 $y=\cos x^2$，且求与之对应 y 在 $a_0=0, a_2=1$ 的通解.

剑桥大学. *面码* 供题

七、解答题（本题满分 10 分）

已知数列 $\{a_n\}$ 中，$n\in N_+, a_1=2$，且满足 $\sum\limits_{k=1}^{n} a_k=\dfrac{1}{2}(n+1)(a_n+1)-1$.

(1) 若设 $b_n\in\mathbb{R}\quad(n=1,2,3\cdots)$，其中 $\mathbb{R}$ 为实数集，如果级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{b_n}{a_n^2}$ 收敛，试求解以下极限：

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{b_k}{a_k}}{a_n}$$

(2) 若级数 $\left|\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n\right|<+\infty$，试求解以下极限：$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sum\limits_{k=1}^{n} a_k b_k}{a_n}$.

吉林大学. *董翔* 供题

2019 年第一届八一杯大学生网络数学竞赛

数学 II 试题（满分 40 分）

【注意】考生需要对 AB 两题进行作答，我们将按考生所给过程计算步骤分，全部做答完全正确计 40 分，二试作为非数组拔高题，可供考生进行挑战自己.

A.(**本题满分** 20 **分**)

等离子体是一种被电离的离子化的气体，通常被称为物质的第四态，它不仅广泛存在于我们的日常生活中，宇宙中更是有百分之九十九的物质以等离子态存在，假设现在有一种等离子体，完全由质子和电子组成，其中的电势满足泊松方程 $\nabla^2\Phi = -\frac{e}{\epsilon_0}(n_i - n_e)$, 电子的速度分布满足 $f_e(\vec{v}) = n_i(\frac{1}{2\pi})^{\frac{3}{2}}\mathrm{e}^{-(\frac{1}{2}\vec{v}^2 - e\Phi)}$ 其中 ϵ_0 为真空介电常数，n_i 和 n_e 分别为质子和电子密度。

(1) 求质子密度 n_i 和电子密度 n_e 之间的关系；

(2) 试在合适的坐标系中求出一级近似下 Φ 的表达式。

温馨提示：因为正负电荷的存在，所以等离子体的电势不满足库仑势 $\Phi = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r}$, 但是当电荷之间距离比较小的时候，可以认为它们产生的电势满足该式。
可能用到的公式：

$$
\begin{aligned}
\vec{v}^2 &= v_x^2 + v_y^2 + v_z^2 \\
\nabla^2 f &= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} \\
\nabla^2 f &= \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial f}{\partial\rho}\right) + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 f}{\partial\varphi^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} \\
\nabla^2 f &= \frac{1}{r}\frac{\partial^2}{\partial r^2}(rf) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial f}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 f}{\partial\varphi^2}
\end{aligned}
$$

中国科学院大学. 李博 供题

B.(**本题满分 20 分**)

(1) 求 $f(x)=\cos(\alpha x)\ (\alpha\neq\mathbb{Z})$ 在 $[-\pi,\pi]$ 上的 Fourier 级数，并证明：

$$1=\frac{\sin(\pi\alpha)}{\pi}\left(\frac{1}{\alpha}+2\alpha\sum_{m=1}^{\infty}\frac{(-1)^m}{\alpha^2-m^2}\right)$$

(2) 定义 $\mathrm{G}=\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln\cot t\,\mathrm{d}t$，并利用 (1) 中结论，证明：

① $e^{\frac{2\mathrm{G}}{\pi}-\frac{1}{2}}=\displaystyle\lim_{m\to\infty}\prod_{n=1}^{2m}\left(1-\frac{2}{2n+1}\right)^{n(-1)^n}$；

② $e^{\frac{4\mathrm{G}}{\pi}}=\displaystyle\lim_{m\to\infty}\left[\frac{3^3\cdot7^7\cdot11^{11}\cdots(4m-1)^{4m-1}}{1^1\cdot5^5\cdot9^9\cdots(4m-3)^{4m-3}}\right]^2\frac{(4m+3)^{2m+1}}{(4m+1)^{6m+1}}$.

注：如需要交换积分求和次序，默认一致收敛，不要求证明。

高等数学贴吧吧主.Renascence_5 供题