2019 年普通高等学校招生全国统一考试

理科数学全国卷二答案与解析

一、选择题:本题考查基础知识和基本运算. 每小题 5 分,满分 60 分.

1. ☞**考点:** 本题考查集合的交集和解二次不等式

✔**答案:** A

✍**解析:** $A=\{x\mid x<2$ 或 $x>3\}$,$A\cap B=\{x\mid x<1\}$

※**点睛:** 集合题多与二次不等式结合

(河北　宁现丰)

2. ☞**考点:** 复数的共轭及坐标表示

✔**答案:** C

✍**解析:** $\bar{z}=-3-2\mathrm{i}$, 坐标为 $(-3,\ -2)$,第三象限

※**点睛:** 复数共轭,$z=a+b\mathrm{i}$,$\bar{z}=a-b\mathrm{i}$

(河北　宁现丰)

3. ☞**考点:** 本题考查向量的基本运算

✔**答案:** C

✍**解析:** 因为

$$\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}=(1,t-3),\left|\overrightarrow{BC}\right|=1$$

所以 $t-3=0$,即 $\overrightarrow{BC}=(1,0)$. 所以 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}=(2,3)\cdot(1,0)=2$. 故选 C.

※**点睛:** 本题属于向量的基本运算,必须熟练掌握.

(张家口　饶强)

4. ☞**考点:** 本题考查近似值的计算

✔**答案:** D

✍**解析:** 因为

$$\frac{M_1}{(R+r)^2}+\frac{M_2}{r^2}=(R+r)\frac{M_1}{R^3}$$

所以

$$\frac{M_2}{M_1}=\frac{(R+r)\cdot r^2}{R^3}-\frac{r^2}{(R+r)^2}$$

将 $r=\alpha\cdot R$ 代入,得

$$\begin{aligned}\frac{M_2}{M_1}&=\frac{(R+\alpha R)\cdot(\alpha R)^2}{R^3}-\frac{(\alpha R)^2}{(R+\alpha R)^2}=(1+\alpha)\alpha^2-\frac{\alpha^2}{(1+\alpha)^2}\\&=\frac{3\alpha^3+3\alpha^4+\alpha^5}{(1+\alpha)^2}\approx 3\alpha^3\end{aligned}$$

所以

$$r=\alpha\cdot R=\sqrt[3]{\frac{M_2}{3M_1}}R.$$

故选 D.

※点睛:本题答案均有 $\dfrac{M_2}{M_1}$,故第一步便是想办法出现 $\dfrac{M_2}{M_1}$,也就是本题思路来源.

(张家口　饶强)

5. ☞**考点:**考查样本的数字特征

✔**答案:**A

✍**解析:**将 9 位评委给出的 9 个原始评分按照从小到大顺序记为:$a_1,a_2,a_3,a_4,a_5,a_6,a_7,a_8,a_9$. 由中位数的概念可知:这个九个得分的中位数为 a_5. 去掉 1 个最高分,1 个最低分后剩下 7 个有效评分分别为 $a_2,a_3,a_4,a_5,a_6,a_7,a_8$,这 7 得分的中位数仍然是 a_5,故选 A.

※**点睛:**考查数字特征的概念.

(河南　林木)

6. ☞**考点:**考查函数的单调性

✔**答案:**C

✍**解析:**当 $a-b<1$ 时,A 错;因为 $y=3^x$ 为增函数,所以 $3^a>3^b$,B 错;因为 $y=x^3$ 在 $\mathbf{R}$ 上为增函数,所以 C 正确,当 $a=1$, $b=-2$ 时,D 错.

※**点睛:**理解基本初等函数的单调性

(河南　林木)

7. ☞**考点:**本题考查空间平面的平行

✔**答案:**B

✍**解析:**由空间平面平行的判定可知应选 B.

※**点睛:**紧抓空间平面关系的判定定理

(河南　时涛)

8. ☞**考点:**本题考查椭圆和抛物线

✔**答案:**D

✍**解析:**抛物线的焦点为 $(\dfrac{p}{2},0)$,故 $p+\left(\dfrac{p}{2}\right)^2=3p$,解得 $p=0$(舍)或 $p=8$.

※**点睛:**找对等量关系即可

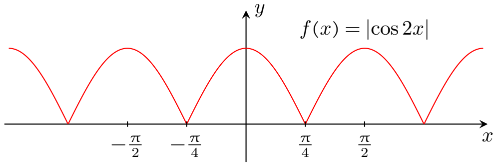
(河南　时涛)

9. ☞**考点:**本题考查三角函数的图像与性质

✔**答案:**A

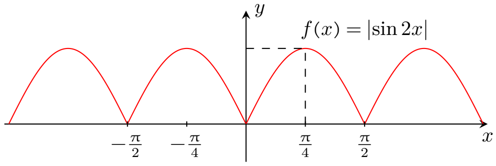
✍**解析:**因为函数周期为 $\dfrac{\pi}{2}$,对于选项 A:$f\left(x+\dfrac{\pi}{2}\right)=|\cos 2(x+\dfrac{\pi}{2})|=|\cos(2x+\pi)|=$

$|\cos 2x| = f(x)$ 满足条件，作出函数 $y = \cos 2x$ 的图象，将 $y = \cos 2x$ 图象在 x 轴下方的函数图象翻折到 x 轴上方，得到函数 $f(x) = |\cos 2x|$. 通过观察图象知，满足在 $\left(\dfrac{\pi}{4}, \dfrac{\pi}{2}\right)$ 单调递增.



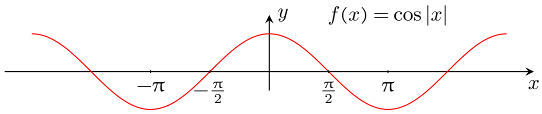
第 9 题解析图 A

对于选项 B：$f\left(x + \dfrac{\pi}{2}\right) = \left|\sin 2(x + \dfrac{\pi}{2})\right| = |\sin(2x + \pi)| = |\sin 2x| = f(x)$ 满足条件，作出函数 $y = \sin 2x$ 的图象，将 $y = \sin 2x$ 图象 x 轴下方的函数图象翻折到 x 轴上方，得到函数 $f(x) = |\sin 2x|$. 通过观察图象知，满足在 $(\dfrac{\pi}{4}, \dfrac{\pi}{2})$ 单调递减, 不合题意.



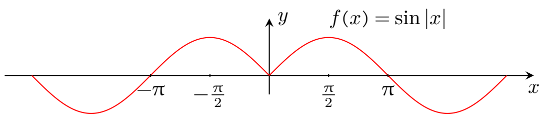
第 9 题解析图 B

选项 C，因为 $\cos x$ 为偶函数, 所以 $f(x) = \cos |x| = \cos x$ 周期为 2π, 不满足条件.



第九题解析图 C

选项 D，因为 $f(x) = \sin |x|$ 为偶函数，其图象可以由奇函数 $y = \sin x$ 保留 y 轴右侧图象，左侧图象与右侧对称, 把 y 轴左右两侧的图象结合在一起，即得 $f(x) = \sin |x|$ 的图象, 不满足周期为 $\dfrac{\pi}{2}$.



第九题解析图 D

※**点睛**：本题的主要考查三角函数的图象与性质，要熟悉掌握函数图象的变换，本题重点是 $y=|f(x)|$ 与 $y=f(|x|)$ 的区别，$y=|f(x)|$ 是将 x 轴下方的函数图象翻折到 x 轴上方，$y=f(|x|)$ 是偶函数，保留 y 轴右侧函数图象，并翻折到左边得到 y 左侧图象，把 y 轴左右两侧的图象结合在一起得到 $y=f(|x|)$ 图象，借助图象研究函数的单调性.

（安徽　贾彬）

10. ☞**考点**：本题考查恒等变形

✔**答案**：B

✍**解析**：**方法 1**：因为 $\alpha\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$，所以 $\cos\alpha>0$，又 $2\sin 2\alpha=\cos 2\alpha+1$，由二倍角公式得

$$4\sin\alpha\cos\alpha=2\cos^2\alpha，\Rightarrow 2\sin\alpha=\cos\alpha$$

所以

$$\begin{cases}2\sin\alpha=\cos\alpha，\\ \sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1\end{cases}\Rightarrow\sin\alpha=\frac{\sqrt{5}}{5}$$

方法 2：$\alpha\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$，$2\sin 2\alpha=\cos 2\alpha+1>0$，由

$$\begin{cases}2\sin 2\alpha=\cos 2\alpha+1\\ \sin^2 2\alpha+\cos^2 2\alpha=1\end{cases}\Rightarrow(\sin 2\alpha-1)^2+\sin^2 2\alpha=1$$

解得 $\sin 2\alpha=\dfrac{4}{5}$，或 $\sin 2\alpha=0$(舍)

又因为 $\cos 2\alpha=2\sin 2\alpha-1=\dfrac{3}{5}$，$\alpha\in(0,\dfrac{\pi}{2})$，$\sin\alpha>0$，所以

$$\sin\alpha=\sqrt{\frac{1-\cos 2\alpha}{2}}=\frac{\sqrt{5}}{5}$$

解法 3：由辅助角公式知

$$\sqrt{5}\left(\sin 2\alpha\cdot\frac{2}{\sqrt{5}}-\cos 2\alpha\cdot\frac{2}{\sqrt{5}}\right)=1$$

令 $\cos\theta=\dfrac{2}{\sqrt{5}}$，$\sin\theta=\dfrac{1}{\sqrt{5}}$，$\theta\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$

$$\sqrt{5}\sin(2\alpha-\theta)=1\text{ 即 }\sin(2\alpha-\theta)=\frac{1}{\sqrt{5}}=\sin\theta$$

因为 $\alpha\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$，$2\alpha-\theta\in(0,\pi)$，所以

$$2\alpha-\theta=\theta，\text{或 }2\alpha-\theta+\theta=\pi$$

※**点睛:** 本题主要注意三角函数符号的正负

(安徽 贾彬)

11. ☞**考点:** 本题考查椭圆离心率

✔**答案:** A

✍**解析:** 由于 $|PQ|=|OF|$,又 P,Q 两点在以 OF 为直径的圆上,即可得点 P,Q 关于 x 轴对称且 P,Q 是该圆的直径. 设 P 在 x 轴上方,故 $P\left(\frac{c}{2},\frac{c}{2}\right)$,又 P 在 $x^2+y^2=a^2$ 上,带入可得 $\frac{c^2}{2}=a^2$,化简即得 $c=\sqrt{2}a,e=\sqrt{2}$.

※**点睛:** 快速表示出 P 点的坐标是解决问题的关键. 当然,本题还可以联立两个圆的方程,求出 P 点的坐标.

(西安 张龙刚)

12. ☞**考点:** 本题考查函数图象的变换,二次函数最值

✔**答案:** B

✍**解析:** 由题意可得,$f(1)=-\frac{1}{4}$,$f\left(\frac{3}{2}\right)=2f\left(\frac{1}{2}\right)=-\frac{1}{2}$,$f\left(\frac{5}{2}\right)=4f\left(\frac{1}{2}\right)=-1$,因此 $f(x)=-\frac{8}{9}$,可得 $x=\frac{7}{3}$ 或 $x=\frac{8}{3}$(舍),故 $m\leqslant\frac{7}{3}$.

※**点睛:** 熟练掌握图像变换的基本方法和步骤,会熟练求二次函数最值.

(西安 张龙刚)

二、填空题:本题考查基础知识和基本运算,每小题 5 分,共 20 分.

13. ☞**考点:** 数学期望.

✔**答案:** 0.98

✍**解析:** 由已知,

$$\frac{10\times0.97+20\times0.98+10\times0.99}{40}=0.98$$

所以,经停该站高铁列车所有车次的平均正点率的估计值为 0.98.

※**点睛:** 本题主要考查学生的理解能力,正确理解题意是关键.

(河北 焦子奇)

14. ☞**考点:** 函数的奇偶性.

✔**答案:** -3.

✍**解析:** 当 $x<0$ 时,$-x>0$,有

$$f(-x)=-\mathrm{e}^{-ax}=-f(x)$$

所以 $f(x)=\mathrm{e}^{-ax}$,所以 $f(\ln 2)=\mathrm{e}^{-\ln 2^a}=8,a=-3$.

※**点睛:** 本题属于常规题,找到 $x>0$ 的解析式是关键.

(河北 焦子奇)

15. ☞**考点:** 本题考查了解三角形的知识.

✔**答案:** $6\sqrt{3}$

✍**解析:** 由余弦定理可得 $b^2=a^2+c^2-2ac\dfrac{1}{2}\Longrightarrow c=2\sqrt{3}\Longrightarrow S_{\triangle ABC}=6\sqrt{3}$

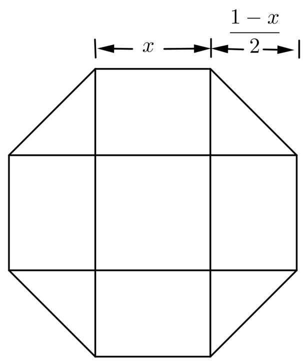
※**点睛:** 利用余弦定理和三角形面积公式解题.

(安徽　史飞)

16. ☞**考点:** 本题考查了立体几何中半正多面体的结构特征

✔**答案:** 22　$\sqrt{2}-1$

✍**解析:** 考虑此半正多面体的正视图,



(第 16 题解析图)

设棱长为 x, 则 $x=\dfrac{1-x}{2}\sqrt{2}\Longrightarrow x=\sqrt{2}-1$

※**点睛:** 本题关键是该几何体的结构进行分析,借助正视图把空间问题转化为平面问题加以解决.

(安徽　史飞)

三、解答题:共 70 分.

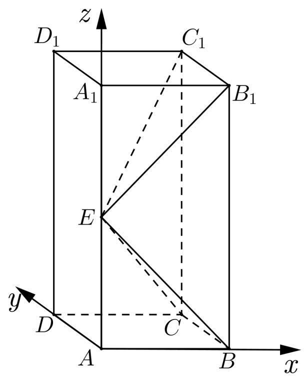
17. ☞**考点:** 直线与平面平行的判定定理;二面角余弦(正弦)值的求法.

✔**答案:** 见解析.

✍**解析:** (1)证明:因为 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 是长方体,所以 $B_1C_1\perp$ 平面 A_1ABB_1. 又因为 $BE\subset$ 平面 A_1ABB_1,所以 $BE\perp EC$. 又 $BE\perp EC_1$,$B_1C_1\cap EC_1=C_1$,故 $BE\perp$ 平面 EB_1C_1.

(2) 设 $AB=a,AE=b$, 则 $B_1B=2b$. 在 $\mathrm{Rt}\triangle A_1EB_1$ 中, $B_1E^2=a^2+b^2$; 在 $\mathrm{Rt}\triangle A_1EB_1$ 中,$BE=a^2+b^2$. 由(1)知,$BE\perp$ 平面 EB_1C_1,而 $B_1E\subset$ 平面 EB_1C_1,所以 $BE\perp B_1E$. 在 $\mathrm{Rt}\triangle B_1EB_1$ 中,$B_1B^2=2a^2+2b^2$. 于是 $(2b)^2=2a^2+2b^2$, 即 $a=b$.

以 A 为原点,AB,AD,AA_1 分别为 x,y,z 轴建立空间直角坐标系.



(第 17 题解析图)

由图可知,$B(a,0,0)$,$E(0,0,a)$,$C(a,a,0)$,$C_1(a,a,2a)$,则

$$\overrightarrow{BE}=(-a,0,a),\overrightarrow{EC}=(a,a,-a),\overrightarrow{CC_1}=(0,0,2a).$$

设面 BEC,ECC_1 的法向量分别为 $\boldsymbol{n}_1=(x_1,y_1,z_1)$,$\boldsymbol{n}_2=(x_2,y_2,z_2)$.
则

$$\begin{cases}-ax_1+az_1=0\\ ax_1+ay_1-az_1=0\end{cases}\Rightarrow y_1=0\Rightarrow \text{取}x=1,\ \boldsymbol{n}_1=(1,0,1)$$

$$\begin{cases}ax_2+ay_2-az_2=0\\ 2az_2=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}z_2=0\\ x_2=-y_2\end{cases}\Rightarrow \text{取}x=1,\ \boldsymbol{n}_2=(1,-1,0)$$

所以,

$$\cos<\boldsymbol{n}_1,\boldsymbol{n}_2>=\frac{\boldsymbol{n}_1\cdot\boldsymbol{n}_2}{|\boldsymbol{n}_1|\cdot|\boldsymbol{n}_2|}=\frac{1}{2}.$$

所以,

$$\sin<\boldsymbol{n}_1,\boldsymbol{n}_2>=\sqrt{1-\cos^2<\boldsymbol{n}_1,\boldsymbol{n}_2>}=\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

※**点睛:** 本题属于基础题,在备考过程中较为常见,只是题目顺序有一定的变化,在做题过程中建议用最朴素的建系法,不容易造成没必要的失分.

(河北 焦子奇)

18. ☞**考点:** 离散型随机变量

✔**答案:** 见解析

✍**解析:**(1)$P(X=2)=0.5\times0.4+0.5\times0.6=0.5$

（2）记双方打成 10∶10 后的第 K 个球甲获胜的条件为 $A_k(k=1,2,3,\cdots)$ 则

$$\begin{aligned}P(X=4\text{且甲获胜})&=P(\overline{A}_1A_2A_3A_4)+P(A_1\overline{A}_2A_3A_4)\\&=P(\overline{A}_1)P(A_2)P(A_3)P(A_4)+P(A_1)P(\overline{A}_2)P(A_3)P(A_4)\\&=(0.5\times0.4+0.5\times0.6)\times0.5\times0.4\\&=0.1\end{aligned}$$

故事件“$X=4$ 且甲获胜”的概率为 0.1.

※**点睛**:离散型随机变量

（河南　时涛）

19. ☞**考点**:本题主要考查等比数列和等差数列的定义及通项公式求解

✔**答案**:见解析

✍**解析**:（1）证明:因为

$$\begin{cases}4a_{n+1}=3a_n-b_n+4, & ①\\4b_{n+1}=3b_n-a_n-4, & ②\end{cases}$$

由 ①+② 得

$$(a_{n+1}+b_{n+1})=\frac{1}{2}(a_n+b_n)$$

又因为 $a_1+b_1=1$,$a_n+b_n\neq0$,所以 $\{a_n+b_n\}$ 是以 1 为首项,$\dfrac{1}{2}$ 为公比的等比数列.

由 ①−② 得

$$(a_{n+1}-b_{n+1})-(a_n-b_n)=2$$

又因为 $a_1-b_1=1$,所以 $\{a_n-b_n\}$ 是以 1 为首项,2 为公差的等差数列.

（2）由（1）知,$\{a_n+b_n\}$ 是以 1 为首项,$\dfrac{1}{2}$ 为公比的等比数列,所以

$$a_n+b_n=\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

$\{a_n-b_n\}$ 是以 1 为首项,2 为公差的等差数列, 所以

$$a_n-b_n=1+2(n-1)$$

联立

$$\begin{cases}a_n+b_n=\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}, & ③\\a_n-b_n=2n-1, & ④\end{cases}$$

由 ③+④ 得

$$a_n=\left(\frac{1}{2}\right)^n+n-\frac{1}{2}$$

由③–④得

$$b_n=\left(\frac{1}{2}\right)^n-n+\frac{1}{2}$$

所以 $\{a_n\}$ 的通项公式为 $a_n=\left(\frac{1}{2}\right)^n+n-\frac{1}{2}$, $\{b_n\}$ 的通项公式 $b_n=\left(\frac{1}{2}\right)^n-n+\frac{1}{2}$.

※**点睛**: 利用定义证明等差数列、等比数列, 充分利用等差数列、等比数列的通项公式求解数列通项, 同时考查学生的代数变形能力.

(安徽　贾彬)

20. ☞**考点**: 本题主要考查函数的单调性, 函数零点的判断; 利用导数求函数的切线

✔**答案**: 见解析

✍**解析**:(1)$f(x)$ 的定义域为 $(0,1)\cup(1,+\infty)$,

$$f'(x)=\frac{1}{x}-\frac{x-1-(x+1)}{(x-1)^2}=\frac{1}{x}+\frac{2}{(x-1)^2}>0.$$

所以 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 和 $(1,+\infty)$ 上单调递增. 因为

$$f(2)=\ln 2-3<0,\ f(\mathrm{e}^2)=2-\frac{\mathrm{e}^2+1}{\mathrm{e}^2-1}=\frac{\mathrm{e}^2-3}{\mathrm{e}^2-1}>0,$$

即 $f(2)f(\mathrm{e}^2)<0$,所以 $f(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 上存在唯一零点;

又

$$f\left(\frac{1}{2}\right)=-\ln 2+3>0, f\left(\frac{1}{\mathrm{e}^2}\right)=-2-\frac{\frac{1}{\mathrm{e}^2}+1}{\frac{1}{\mathrm{e}^2}-1}=\frac{\mathrm{e}^2-3}{\mathrm{e}^2-1}<0,$$

即 $f\left(\frac{1}{2}\right)f\left(\frac{1}{\mathrm{e}^2}\right)<0$,所以 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 上存在唯一零点.

综上,$f(x)$ 有且仅有两个零点.

(2)由题意可得 $\ln x_0=\frac{x_0+1}{x_0-1}$.

曲线 $y=\ln x$ 在 $(x_0,\ln x_0)$ 处的切线方程为

$$y=\frac{1}{x_0}(x-x_0)+\ln x_0=\frac{1}{x_0}x+\ln x_0-1=\frac{1}{x_0}x+\frac{2}{x_0-1}.$$

曲线 $y=\mathrm{e}^x$ 在 (x_1,e^{x_1}) 处的切线方程为

$$y=\mathrm{e}^{x_1}(x-x_1)+\mathrm{e}^{x_1}=\mathrm{e}^{x_1}x+\mathrm{e}^{x_1}(1-x_1).$$

欲证曲线 $y=\ln x$ 在 $(x_0,\ln x_0t)$ 处的切线也为 $y=\mathrm{e}^x$ 的切线,故当 $\dfrac{1}{x_0}=\mathrm{e}^{x_1}$,也即 $x_1=-\ln x_0$ 时,

$$\mathrm{e}^{x_1}(1-x_1)=\frac{1}{x_0}(1+\ln x_0)=\frac{1}{x_0}\left(1+\frac{x_0+1}{x_0-1}\right)=\frac{2}{x_0-1}.$$

也就说明了此时,两条切线是同一条直线,证毕!

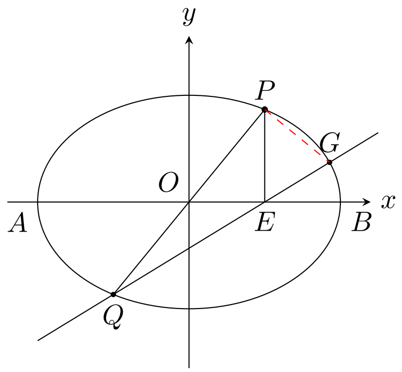
※点睛: 第一问通过求导判断函数单调性,但不要忘记函数的定义域,判断函数零点个数利用单调连续函数零点存在唯一性定理,需要在那两段单调函数各自找一组函数值异号的两个点才能说明零点存在的唯一性;第二问难度不大,利用导数求出两条曲线上一点的切线,需要注意的不知道曲线 $y=\mathrm{e}^x$ 上切线的切点,需要单独设出来,然后再证明两条切线可以是用一条直线即可.

(西安　张龙刚)

21. ☞**考点:** 本题考察圆锥曲线

✔**答案:** 见解析

✍**解析:**



(第 21 题解析图)

(1)由题意可知:$k_{AM}=\dfrac{y}{x+2}$,$k_{BM}=\dfrac{y}{x-2}$ $(x\neq\pm2)$. 所以有

$$\frac{y}{x-2}\times\frac{y}{x+2}=\frac{y^2}{x^2-4}=-\frac{1}{2}\Rightarrow\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{2}=1\,(x\neq\pm2).$$

即曲线 C 的轨迹是长轴为 4,焦点为 $(\pm\sqrt{2},0)$ 的椭圆,去掉 $(2,0)$,$(-2,0)$ 两点.

（2）（i）解法一：设 $P(x_0,y_0)$，$G(x_1,y_1)$，则 $Q(-x_0,-y_0)$，$E(x_0,0)$. 所以有

$$k_{PQ}\cdot k_{EQ}=\frac{y_0}{x_0}\times\frac{y_0}{2x_0}=\frac{1}{2}.$$

又

$$k_{GP}\cdot k_{EQ}=\frac{y_1-y_0}{x_1-x_0}\times\frac{y_1+y_0}{x_1+x_0}=\frac{y_1^2-y_0^2}{x_1^2-x_0^2}=\frac{\left(2-\frac{x_1^2}{2}\right)-\left(2-\frac{x_0^2}{2}\right)}{x_1^2-x_0^2}=-\frac{1}{2}.$$

所以 $k_{PQ}\cdot k_{PG}=-1$，即 $\triangle PQG$ 为直角三角形；

（ii）$S_{\triangle PQG}=2S_{\triangle OPG}=|OP|\times|PG|$.

设 $P(x_0,y_0)$，l_{OP}： $y=kx(k>0)$，$l_{PG}:y=-\frac{1}{k}x+n$.

由

$$\begin{cases}y=kx,\\x^2+2y^2=4,\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x_0=\dfrac{2}{\sqrt{2k^2+1}},\\y_0=\dfrac{2k}{\sqrt{2k^2+1}}.\end{cases}$$

代入 $y=-\frac{1}{k}x+n$ 得

$$n=\frac{2\left(k^2+1\right)}{k\sqrt{2k^2+1}}.$$

因为

$$\begin{cases}y=-\dfrac{1}{k}x+n,\\x^2+2y^2=4,\end{cases}\Rightarrow\left(\frac{2}{k^2}+1\right)x^2-\frac{4n}{k}x+2n^2-4=0.$$

所以

$$\begin{aligned}|PG|&=\sqrt{1+\frac{1}{k^2}}\cdot\sqrt{\left(\frac{\frac{4n}{k}}{\frac{2}{k^2}+1}\right)^2-4\times\frac{2n^2-4}{\frac{2}{k^2}+1}}\\&=\sqrt{k^2+1}\cdot\frac{\sqrt{32+8k^2\left(2-n^2\right)}}{k^2+2}.\end{aligned}$$

即

$$S_{\triangle PQG}=|OP|\times|PG|=\frac{\sqrt{2k^2+2}}{\sqrt{2k^2+1}}\times\sqrt{k^2+1}\cdot\frac{\sqrt{32+8k^2\left(2-n^2\right)}}{k^2+2}$$

$$=\frac{\sqrt{2}(k^2+1)\sqrt{32+8k^2\left(2-\dfrac{4(k^2+1)^2}{k^2(2k^2+1)}\right)}}{\sqrt{2k^2+1}(k^2+2)}$$

$$=\frac{4(k^2+1)\sqrt{2k^2+4-\dfrac{4(k^2+1)^2}{2k^2+1}}}{\sqrt{2k^2+1}(k^2+1)}$$

$$=\frac{8|k|(k^2+1)}{(2k^2+1)(k^2+2)}=\frac{8\left(k+\dfrac{1}{k}\right)}{2\left(k+\dfrac{1}{k}\right)^2+1}.$$

令 $t=k+\dfrac{1}{k}\geqslant 2$,则 $S_{\triangle PQG}=\dfrac{8t}{2t^2+1}=\dfrac{8}{2t+\dfrac{1}{t}}$ 在 $[2,+\infty)$ 上递减,所以 $t=2$,即 $k=1$ 时,$S_{\triangle PQG}\leqslant\dfrac{16}{9}$.

解法二:(i)显然直线 QG 的斜率存在,且斜率不为 0. 设 l_{QG}: $y=kx+m$,$Q(x_1,y_1)$,$G(x_2,y_2)$.

联立方程 $\begin{cases}y=kx+m,\\x^2+2y^2=4,\end{cases}\Rightarrow(2k^2+1)x^2+4kmx+2m^2-4=0.$

所以有 $x_1+x_2=\dfrac{-4km}{2k^2+1}$,$x_1x_2=\dfrac{2m^2-4}{2k^2+1}$.

而 $PE\perp x$ 轴,即有 $-x_1=-\dfrac{m}{k}$,$x_1=\dfrac{m}{k}$,$y_1=2m$. 所以有

$$k_{PQ}\cdot k_{PG}=\frac{y_1}{x_1}\times\frac{y_2+y_1}{x_2+x_1}=\frac{2m}{\dfrac{m}{k}}\times\left(k+\frac{2m}{x_1+x_2}\right)=-1,$$

得证.

※**点睛**:求轨迹问题中务必注意特殊点是否要除掉;圆锥曲线内证明垂直问题多数运用斜率之积为 -1,同时斜率的表达多数用设点的方式实现;面积问题大多数用常规的面积表达方式均可解,但是在后面的计算上以统一变量后再换元处理最值问题.

(广东　周险峰)

22. ☞**考点**:本题主要考查极坐标方程与直角坐标的互换、点到直线的距离.

✔**答案**:见解析

✍**解析**:(1)解法一:令 $\theta_0=\dfrac{\pi}{3}$,则 $\rho_0=4\sin\theta_0=2\sqrt{3}$.

设 l 上的点为 (ρ,θ),与极轴倾斜角为 α,由 $M\left(2\sqrt{3},\dfrac{\pi}{3}\right)$ 可得 $\alpha=\dfrac{5\pi}{6}$,由 $|OA|=4$,

$\angle POA=\theta_0=\dfrac{\pi}{3}$,可得 $P=\left(2,\dfrac{\pi}{3}\right)$,故直线 l 的极坐标方程为

$$\rho\sin(\theta-\alpha)=2\sin\left(\frac{\pi}{3}-\alpha\right)$$

即

$$\rho\sin\left(\theta-\frac{5\pi}{6}\right)=2\sin\left(\frac{\pi}{3}-\frac{5\pi}{6}\right)\Rightarrow\rho\sin\left(\theta+\frac{\pi}{6}\right)=2\sin\frac{\pi}{2}=1,$$

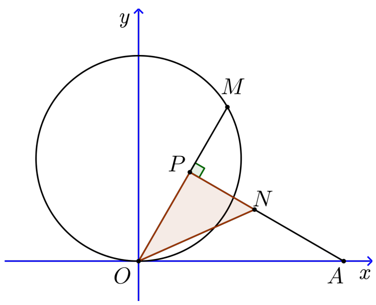
所以 l: $\rho\sin\left(\theta+\dfrac{\pi}{6}\right)=1$.

解法二:令 $\theta_0=\dfrac{\pi}{3}$,则 $\rho_0=4\sin\theta_0=2\sqrt{3}$.

由 $|OA|=4,\angle POA=\theta_0=\dfrac{\pi}{3}$,可得 $P=\left(2,\dfrac{\pi}{3}\right)$,又 $M\left(2\sqrt{3},\dfrac{\pi}{3}\right)$.

设 l 上的任一点 $N(\rho,\theta)$, 在 $\mathrm{Rt}\triangle PON$ 中,$\cos\angle PON=\cos\left|\dfrac{\pi}{3}-\theta\right|=\dfrac{|OP|}{\rho}$,

即 $l:\rho\cos\left(\theta-\dfrac{\pi}{3}\right)=2$.



(第 22 题解析图)

(2)设 $P(\rho,\theta)$,则在 $\mathrm{Rt}\triangle AOP$ 中有 $\rho=4\cos\theta$,又 P 在线段 OM 上,当 P 与 M 重合时,$\theta=\dfrac{\pi}{4}$;当 P 与 O 重合时,$\theta=\dfrac{\pi}{2}$. 故求 P 点轨迹的极坐标方程为

$$\rho=4\cos\theta,\theta\in\left[\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right].$$

※**点睛**:解析几何注重数形结合而非机械运算,是今后命题的主要方向;曲线方程求解一定要注意变量所能取的范围.

(山西 廖凯)

23. ☞**考点**:本题考查绝对值不等式求解,含参绝对值不等式恒成立

✔**答案**:见解析

✍**解析**:(1)当 $a=1$ 时,$f(x)=|x-1|x+|x-2|(x-1)$.

$$f(x)=\begin{cases}-2(x-1)^2, x<1\\2(x-1), & 1\leqslant x<2\\2(x-1)^2, & x\geqslant 2\end{cases}$$

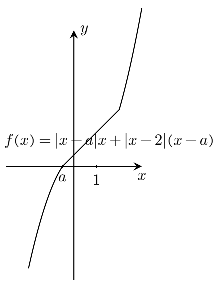
当 $x<1$ 时,$f(x)=-2(x-1)^2<0$;当 $1\leqslant x<2$ 时,$f(x)=2(x-1)\geqslant 0$;当 $x\geqslant 2$ 时,$f(x)=2(x-1)^2>0$. 所以,不等式 $f(x)<0$ 的解集为 $(-\infty,1)$.

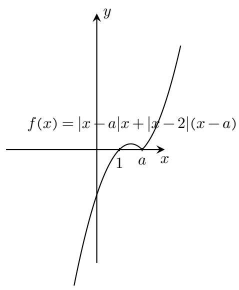
(2)函数 $f(x)$ 有两个零点 a,2.

当 $a<1$,$x\in(-\infty,1)$ 时,

$$f(x)=\begin{cases}(a-x)(2x-2), x<a\\2(x-a), a\leqslant x<1\end{cases}$$

当 $x<a$ 时,$f(x)=(a-x)(2x-2)<0$;当 $a\leqslant x<1$ 时,$f(x)=2(x-a)\geqslant 0$,不满足条件,舍去.





(第 23 题解析图)

当 $a\geqslant 1$,$x\in(-\infty,1)$ 时,

$$f(x)=(a-x)x+(2-x)(x-a)=(a-x)(2x-2)<0$$

所以,a 的取值范围是 $[1,+\infty)$.

※点睛:含参绝对值恒成立利用零点分段讨论,也可以找到参数的必要条件再证明,本题 $f(a)=0$,因此 $a\geqslant 1$.

(安徽 贾彬)

排版: 浙江 陈晓