

2019 年普通高考学校招生全国统一考试（江苏卷）

数学 I

注 意 事 项

考生在答题前请认真阅读本注意事项及各题答题要求

1. 本试卷共 4 页，均为非选择题（第 1 题～第 20 题，共 20 题）。本卷满分为 160 分，考试时间为 120 分钟。考试结束后，请将本试卷和答题卡一并交回。
2. 答题前，请您务必将自己的姓名、准考证号用 0.5 毫米黑色墨水的签字笔填写在试卷及答题卡的规定位置。
3. 请认真核对监考员在答题卡上所粘贴的条形码上的姓名、准考证号与您本人是否相符。
4. 作答试题，必须用 0.5 毫米黑色墨水的签字笔在答题卡上的指定位置作答，在其它位置作答一律无效。
5. 如需作图，须用 2B 铅笔绘、写清楚，线条、符号等须加黑、加粗。

参考公式：

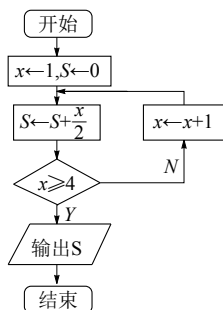
样本数据 x_1, x_2, \dots, x_n 的方差 $s^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2$ ，其中 $\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$ 。

直棱柱的侧面积 $S = ch$ ，其中 c 为底面周长， h 为高。

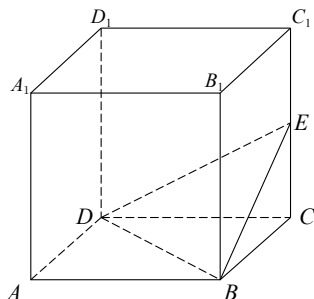
棱柱的体积 $V = Sh$ ，其中 S 为底面积， h 为高。

一. 填空题：本大题共 14 小题，每小题 5 分，共 70 分。请把答案填写在答题卡相应位置上。

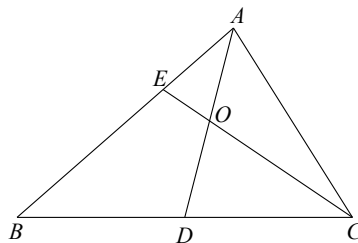
1. 已知集合 $A = \{-1, 0, 1, 6\}$ ， $B = \{x | x > 0, x \in \mathbb{R}\}$ ，则 $A \cap B =$ _____。
2. 已知复数 $(a + 2i)(1 + i)$ 的实部为 0，其中 i 为虚数单位，则实数 a 的值是 _____。
3. 如图是一个算法流程图，则输出的 S 的值是 _____。



(第3题)



(第9题)



(第12题)

4. 函数 $y = \sqrt{7 + 6x - x^2}$ 的定义域是 _____。
5. 已知一组数据 6, 7, 8, 8, 9, 10，则该组数据的方差是 _____。
6. 从 3 名男同学和 2 名女同学中任选 2 名同学参加志愿者服务，则选出的 2 名同学中至少有 1 名女同学的概率是 _____。
7. 在平面直角坐标系 xOy 中，若双曲线 $x^2 - \frac{y^2}{b^2} = 1 (b > 0)$ 经过点 $(3, 4)$ ，则其渐近线方程是 _____。
8. 已知数列 $\{a_n\} (n \in \mathbb{N}^*)$ 是等差数列， S_n 是其前 n 项和。若 $a_2 a_5 + a_8 = 0$ ， $S_9 = 27$ ，则 S_8 的值是 _____。
9. 如图，长方体 $ABCD - A_1 B_1 C_1 D_1$ 的体积是 120， E 为 CC_1 的中点，则三棱锥 $E - BCD$ 的体积是 _____。
10. 在平面直角坐标系 xOy 中， P 是曲线 $y = x + \frac{4}{x} (x > 0)$ 上的一个动点，则点 P 到直线 $x + y = 0$ 的距离的最小值是 _____。

11. 在平面直角坐标系 xOy 中, 点 A 在曲线 $y = \ln x$ 上, 且该曲线在点 A 处的切线经过点 $(-e, -1)$ (e 为自然对数的底数), 则点 A 的坐标是 _____.
12. 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, D 是 BC 的中点, E 在边 AB 上, $BE = 2EA$, AD 与 CE 交于点 O . 若 $\vec{AB} \cdot \vec{AC} = 6\vec{AO} \cdot \vec{EC}$, 则 $\frac{AB}{AC}$ 的值是 _____.
13. 已知 $\frac{\tan \alpha}{\tan(\alpha + \frac{\pi}{4})} = -\frac{2}{3}$, 则 $\sin(2\alpha + \frac{\pi}{4})$ 的值是 _____.
14. 设 $f(x), g(x)$ 是定义在 \mathbb{R} 上的两个周期函数, $f(x)$ 的周期为 4, $g(x)$ 的周期为 2, 且 $f(x)$ 是奇函数, 当 $x \in (0, 2]$ 时, $f(x) = \sqrt{1 - (x-1)^2}, g(x) = \begin{cases} k(x+2), & 0 < x \leq 1 \\ -\frac{1}{2}, & 1 < x \leq 2 \end{cases}$, 其中 $k > 0$. 若在区间 $(0, 9]$ 上, 关于 x 的方程 $f(x) = g(x)$ 有 8 个不同的实数根, 则 k 的取值范围是 _____.

二. 解答题: 本大题共 6 小题, 共计 90 分. 请在答题卡指定区域内作答, 解答时应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

15. (本小题满分 14 分)

在 $\triangle ABC$ 中, 角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c .

(1) 若 $a = 3c, b = \sqrt{2}, \cos B = \frac{2}{3}$, 求 c 的值;

(2) 若 $\frac{\sin A}{a} = \frac{\cos B}{2b}$, 求 $\sin(B + \frac{\pi}{2})$ 的值.

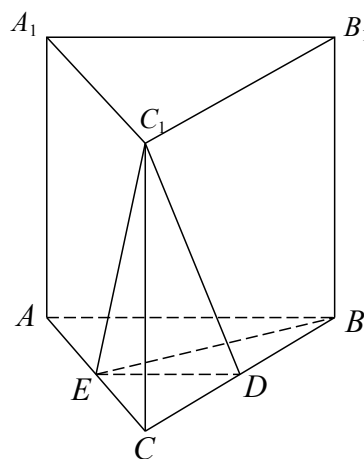
16. (本小题满分 14 分)

如图, 在直三棱柱 $ABC - A_1B_1C_1$ 中, D, E 分别为 BC, AC 的中点, $AB = BC$.

求证:

(1) $A_1B_1 \parallel$ 平面 DEC_1 ;

(2) $BE \perp C_1E$.

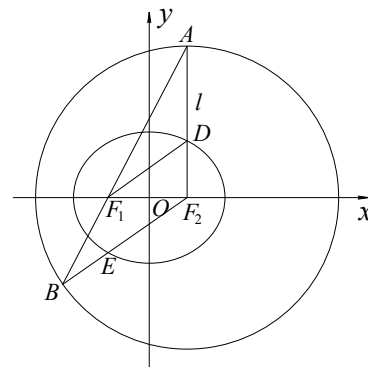


17. (本小题满分 14 分)

如图, 在平面直角坐标系 xOy 中, 椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的焦点为 $F_1(-1,0)$, $F_2(1,0)$. 过 F_2 作 x 轴的垂线 l , 在 x 轴的上方, l 与圆 $F_2: (x-1)^2 + y^2 = 4a^2$ 交于点 A , 与椭圆 C 交于点 D . 连结 AF_1 并延长交圆 F_2 于点 B , 连结 BF_2 交椭圆 C 于点 E , 连接 DF_1 . 已知 $DF_1 = \frac{5}{2}$.

(1) 求椭圆 C 的标准方程;

(2) 求点 E 的坐标.



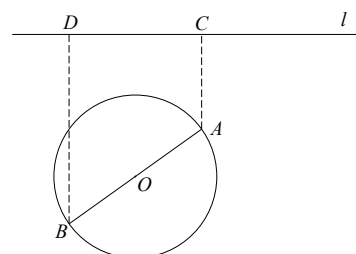
18. (本小题满分 16 分)

如图, 一个湖的边界是圆心为 O 的圆, 湖的一侧有一条直线型公路 l , 湖上有桥 AB (AB 是圆 O 的直径). 规划在公路 l 上选两个点 P 、 Q , 并构建两段直线型道路 PB 、 QA , 规划要求: 线段 PB 、 QA 上的所有点到点 O 的距离均不小于圆 O 的半径. 已知点 A, B 到直线 l 的距离分别为 AC 和 BD (C, D 为垂足), 测得 $AB = 10$, $AC = 6$, $BD = 12$ (单位: 百米).

(1) 若道路 PB 与桥 AB 垂直, 求道路 PB 的长;

(2) 在规划要求下, P 和 Q 中能否有一个点选在 D 处? 并说明理由;

(3) 在规划要求下, 若道路 PB 和 QA 的长度均为 d (单位: 百米), 求当 d 最小时, P, Q 两点间的距离.



19. (本小题满分 16 分)

设函数 $f(x) = (x-a)(x-b)(x-c)$, $f'(x)$ 为 $f(x)$ 的导函数.

- (1) 若 $a = b = c$, $f(4) = 8$, 求 a 的值;
- (2) 若 $a \neq b, b = c$, 函数 $f(x)$ 和 $f'(x)$ 的零点均在集合 $\{-3, 1, 3\}$ 中, 求 $f(x)$ 的极小值;
- (3) 若 $a = 0, 0 < b \leq 1, c = 1$, 且 $f(x)$ 的极大值为 M , 求证: $M \leq \frac{4}{27}$.

20. (本小题满分 16 分)

定义首项为 1 且公比为正数的等比数列为 “ M -数列”.

- (1) 已知等比数列 $\{a_n\} (n \in \mathbb{N}^*)$ 满足: $a_2 a_4 = a_5, a_3 - 4a_2 + 4a_1 = 0$, 求证: 数列 $\{a_n\}$ 为 “ M -数列”;
- (2) 已知数列 $\{b_n\} (n \in \mathbb{N}^*)$ 满足: $b_1 = 1, \frac{1}{S_n} = \frac{2}{b_n} - \frac{2}{b_{n+1}}$, 其中 S_n 为数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和.
 - ① 求数列 $\{b_n\}$ 的通项公式;
 - ② 设 m 为正整数, 若存在 “ M -数列” $\{c_n\} (c \in \mathbb{N}^*)$, 对任意正整数 k , 当 $k \leq m$ 时, 都有 $c_k \leq b_k \leq c_{k+1}$ 成立, 求 m 的最大值.

2011 年普通高等学校招生全国统一考试（江苏卷）
数学 II（附加题）

注 意 事 项

考生在答题前请认真阅读本注意事项及各题答题要求

1. 本试卷共 2 页，均为非选择题（第 21 题 ~ 第 23 题）。本卷满分为 40 分，考试时间为 30 分钟。考试结束后，请将本试卷和答题卡一并交回。
2. 答题前，请您务必将自己的姓名、准考证号用 0.5 毫米黑色墨水的签字笔填写在试卷及答题卡的规定位置。
3. 请认真核对监考员在答题卡上所粘贴的条形码上的姓名、准考证号与您本人是否相符。
4. 作答试题，必须用 0.5 毫米黑色墨水的签字笔在答题卡上的指定位置作答，在其它位置作答一律无效。
5. 如需作图，须用 2B 铅笔绘、写清楚，线条、符号等须加黑、加粗。

21. 【选做题】本题包括 A、B、C 三小题，请选定其中两题，并在相应的答题区域内作答。若多做，则按作答的前两题评分。解答时应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

A. [选修 4-2: 矩阵与变换] (本小题满分 10 分)

已知矩阵 $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$.

- (1) 求 A^2 ;
- (2) 求矩阵 A 的特征值.

B. [选修 4-4: 坐标系与参数方程] (本小题满分 10 分)

在极坐标系中，已知两点 $A\left(3, \frac{\pi}{4}\right), B\left(\sqrt{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ ，直线 l 的方程为 $\rho \sin\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right) = 3$.

- (1) 求 A, B 两点间的距离;
- (2) 求点 B 到直线 l 的距离.

C. [选修 4-5: 不等式选讲] (本小题满分 10 分)

设 $x \in \mathbb{R}$ ，解不等式 $|x| + |2x - 1| > 2$.

【必做题】第 22 题、第 23 题，每小题 10 分，共计 20 分．请在答题卡指定区域内作答，解答时应写出文字说明、证明过程或演算步骤．

22. (本小题满分 10 分)

设 $(1+x)^n = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n, n \geq 4, n \in \mathbf{N}^*$. 已知 $a_3^2 = 2a_2a_4$.

(1) 求 n 的值;

(2) 设 $(1+\sqrt{3})^n = a + b\sqrt{3}$, 其中 $a, b \in \mathbf{N}^*$, 求 $a^2 - 3b^2$ 的值.

23. (本小题满分 10 分)

在平面直角坐标系 xOy 中, 设点集 $A_n = \{(0,0), (1,0), (2,0), \dots, (n,0)\}$, $B_n = \{(0,1), (n,1)\}$,

$C_n = \{(0,2), (1,2), (2,2), \dots, (n,2)\}$, $n \in \mathbf{N}^*$. 令 $M_n = A_n \cup B_n \cup C_n$. 从集合 M_n 中任取两个不同的点, 用随机变量 X 表示它们之间的距离.

(1) 当 $n = 1$ 时, 求 X 的概率分布

(2) 对给定的正整数 $n(n \geq 3)$, 求概率 $P(X \leq n)$ (用 n 表示).