1. (本题 15 分) 若 P 为直线 $l: x-2=\dfrac{y-3}{2}=\dfrac{z-1}{3}$ 上一点，从 P 点引椭球面 $C: 2x^2+3y^2+4z^2=1$ 的切线，切点构成的曲线 Γ 与 l 平行，求 P 点的坐标.

✎ **解:** 设点 P 坐标为 (x_1, y_1, z_1)，椭球面 C 上任意一点 $Q(x_0,y_0,z_0)$ 的法向量为 $(4x_0,6y_0,8z_0)$，从而 Q 处的切线方程为:

$$(x-x_0)\cdot 4x_0+(y-y_0)\cdot 6y_0+(z-z_0)\cdot 8z_0=0$$

即 $2x_0x+3y_0y+4z_0z=1$. 若该切线经过 P 点，则有 $2x_0x_1+3y_0y_1+4z_0z_1=1$，也就是说从 P 点引出的切线与椭球面 C 的切点必然属于平面 $\pi: 2x_1x+3y_1y+4z_1z=1$.

于是 Σ 为平面 π 与椭球面 C 的交线，Γ 与 l 平行等价于 π 与 l 平行. 从而有

$$2x_1\cdot 1+3y_1\cdot 2+4z_1\cdot 3=0$$

令 $x_1-2=\dfrac{y_1-3}{2}=\dfrac{z_1-1}{3}=t$，代入上面式子得到 $2(2+t)+6(3+2t)+12(1+3t)=0$，解得 $t=-\dfrac{17}{25}$，即 P 的坐标为 $\left(\dfrac{33}{25},\dfrac{41}{25},-\dfrac{26}{25}\right)$.

□

2. (本题 15 分) 设 A 是 $m\times n$，A^HA 的 n 个特征值为 $\sigma_1^2\geqslant\sigma_2^2\geqslant\cdots\geqslant\sigma_n^2$. 证明：

$$\sigma_k^2=\max_{C_k}\min_{x\in C_k,x\neq 0}\frac{x^HA^HAx}{x^Hx}$$

其中 C_k 为 n 维线性空间 C^n 的任意 k 维子空间，A^H 为 A 的共轭转置矩阵.

☞ **证明:** 记 $B=A^HA$，则 B 为 Hermite 矩阵. 首先证明一个 n 阶 Hermite 矩阵 H 的特征值 $\lambda_1\geqslant\lambda_2\geqslant\cdots\geqslant\lambda_n$ 满足 $\lambda_1\geqslant\dfrac{x^HHx}{x^Hx}\geqslant\lambda_n$.

记 $R(x)=\dfrac{x^HHx}{x^Hx}, U=(u_1,u_2,,u_n)$，其中 u_k 为 λ_k 对应的特征向量且 U 为酉矩阵，则 n 维非零向量 x 可以由 $(u_1,u_2,\cdots,u_n)$ 表示为 $x=U\alpha$，其中 $\alpha=\begin{bmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\\ \vdots\\ a_n\end{bmatrix}$ 是一个常数向量.

因此

$$x^Hx=\alpha^HU^HU\alpha=\sum_{i=1}^{n}\left|\alpha_i\right|^2, x^HHx=\alpha^HU^HHU\alpha=\alpha^H\begin{bmatrix}\lambda_1&0&\cdots&0\\0&\lambda_2&\cdots&0\\ \vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\0&0&\cdots&\lambda_n\end{bmatrix}\alpha=\sum_{i=1}^{n}\lambda_i\left|\alpha_i\right|^2$$

即 $R(x)=\dfrac{\sum_{i=1}^n\lambda_i\left|\alpha_i\right|^2}{\sum_{i=1}^n\left|\alpha_i\right|^2}$，显然满足 $\lambda_1\geqslant\dfrac{x^HHx}{x^Hx}\geqslant\lambda_n$.

记由 $u_1,u_2,,u_k$ 生成的子空间为为 V_k，$u_k,u_{k+1},,u_n$ 生成的子空间为 V_{n-k+1}，显然当 $x\in V_k$ 时，$\lambda_1\geqslant R(x)\geqslant\lambda_k, x=u_1$ 时左侧不等式等号成立，$x=u_1$ 时右侧不等式等号成立. 因此我们有 $\lambda_k=\min\limits_{x\in V_k,x\neq 0}R$，同理我们能得到 $\lambda_k=\max\limits_{x\in V_{c-k+1},x\neq 0}R(x)$.

下利用以上结论来证明 $\lambda_k = \max\limits_{C_k} \min\limits_{x \in C_k, x \neq 0} \frac{\|Ax\|_2^2}{\|x\|_2^2}$，注意 C_k 为 n 维线性空间 C^n 的任意 k 维子空间，显然 $C_k \cap V_{n-k+1} \neq \oslash$(两个空间维度之和为 $n+1$).

设 $z \subset C_k \cap V_{n-k+1}$，因为 $\lambda_k = \max\limits_{x \in V_{n-k+1}, x \neq 0} R(x)$，所以 $R(z) \leq \lambda_k$. 由于 $x \in C_k$，显然 $\min\limits_{x \in C_k, x \neq 0} R(x) \leq R(z) \leq \lambda_k$，由 C_k 的任意性，我们有 $\max\limits_{C_k} \min\limits_{x \in C_k, x \neq 0} R(x) \leq \lambda_k$.

与此同时利用第一步得到的结论：$\lambda_k = \min\limits_{x \in V_k, x \neq 0} R(x)$，我们有 $\lambda_k \leq \max\limits_{C_k} \min\limits_{x \in C_k, x \neq 0} R(x)$.

综合上面两个式子，我们有 $\lambda_k = \max\limits_{C_k} \min\limits_{x \in C_k, x \neq 0} R(x)$，因此 $\sigma_k^2 = \max\limits_{C_k} \min\limits_{x \in C_k, x \neq 0} \frac{x^H A^H A x}{x^H x}$ 得证.

□

3. (本题 20 分) 设矩阵 $A = \begin{pmatrix} Q_1 & Q_2 \\ Q_3 & Q_4 \end{pmatrix} \in M_{2n \times 2n}(\mathbb{R})$ 满足

$$A^T A = I_{2n}, A^T \begin{pmatrix} 0 & I_n \\ -I_n & 0 \end{pmatrix} A = \begin{pmatrix} 0 & I_n \\ -I_n & 0 \end{pmatrix}$$

其中 $Q_1, Q_2, Q_3, Q_4 \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$. 证明：$B = Q_1 + iQ_2$ 是酉矩阵 (即 $\overline{B}^T B = I_n$)

☞ **证明:** 由 $A^T A = I_{2n}$ 得 $AA^T = I_{2n}$，则有

$$A \begin{pmatrix} 0 & I_n \\ -I_n & 0 \end{pmatrix} = AA^T \begin{pmatrix} 0 & I_n \\ -I_n & 0 \end{pmatrix} A = \begin{pmatrix} 0 & I_n \\ -I_n & 0 \end{pmatrix} A$$

代入 $A = \begin{pmatrix} Q_1 & Q_2 \\ Q_3 & Q_4 \end{pmatrix}$ 得

$$\begin{pmatrix} -Q_2 & Q_1 \\ -Q_4 & Q_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Q_3 & Q_4 \\ -Q_1 & -Q_2 \end{pmatrix}$$

所以有 $Q_1 = Q_4, Q_2 = -Q_3$，也就有 $A = \begin{pmatrix} Q_1 & Q_2 \\ -Q_2 & Q_1 \end{pmatrix}$

因此根据 $A^T A = I_n$ 得

$$Q_1^T Q_1 + Q_2^T Q_2 = I_n，\ Q_1^T Q_2 - Q_2^T Q_1 = 0$$

则有

$$\overline{B}^T B = (Q_1^T - iQ_2^T)(Q_1 + iQ_2) = (Q_1^T Q_1 + Q_2^T Q_2) + i(Q_1^T Q_2 - Q_2^T Q_1) = I_n$$

即证. □

4. (本题 15 分) 设 $f(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} ne^{-n} \cos nx$，求证

(1) $\max\limits_{0 \leq x \leq 2\pi} |f(x)| \geq \frac{2}{e}$;

(2) $f'(x)$ 存在;

(3) $\max\limits_{0 \leq x \leq 2\pi} |f'(x)| \geq \frac{2}{\pi e}$

☞ **证明:**

(1) 考虑

$$f(0)=\sum_{n=1}^{\infty} n e^{-n}=\frac{1}{e}+\sum_{n=2}^{\infty} n e^{-n} \geq \frac{1}{e}+2 \sum_{n=2}^{\infty} e^{-n}=\frac{1}{e}\left(1+\frac{2}{e-1}\right)>\frac{2}{e}$$

即

$$\max_{0 \leq x \leq 2\pi}|f(x)| \geq|f(0)|>\frac{2}{e}$$

(2) 由于级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(n e^{-n} \cos n x\right)^{\prime}=-\sum_{n=1}^{\infty} n^{2} e^{-n} \sin n x$$

在实数轴上一致收敛，所以 $f'(x)$ 存在且连续，可表示为 $f'(x)=-\sum\limits_{n=1}^{\infty} n^{2} e^{-n} \sin n x$

(3) 由贝塞尔不等式

$$\int_{0}^{2\pi}\left|f'(x)\right|^{2} \mathrm{d} x=\sum_{n=1}^{\infty} \pi n^{2} e^{-2n}>\frac{\pi}{e^{2}}$$

又设 $\left|f'\left(x_{0}\right)\right|^{2}=\max\limits_{0 \leq x \leq 2\pi}\left|f'(x)\right|^{2}$，则

$$\left|f'\left(x_{0}\right)\right|^{2} \geq \frac{1}{2\pi} \int_{0}^{2\pi}\left|f'(x)\right|^{2} \mathrm{d} x \geq \frac{1}{2e^{2}}$$

从而 $\max\limits_{0 \leq x \leq 2\pi}\left|f'(x)\right| \geq \frac{1}{\sqrt{2} e}>\frac{2}{\pi e}$.

□

5. 已知正项级数 $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{a_{k}}$ 收敛, 常数 $p>0$, 证明: 级数 $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{k^{p+1}}{a_{1}+2^{p} a_{2}+\cdots+k^{p} a_{k}}$ 也收敛.

☞ **证明:** 首先由 Cauchy 不等式得

$$\left(a_{1}+2^{p} a_{2}+\cdots+k^{p} a_{k}\right)\left(\frac{1}{a_{1}}+\frac{2^{2p+2}}{a_{2}}+\cdots+\frac{k^{2p+2}}{a_{k}}\right) \geqslant\left(\sum_{i=1}^{k} i^{\frac{3}{2} p+1}\right)^{2}.$$

注意到 $\sum\limits_{i=1}^{k} i^{\alpha}>\int_{0}^{k} x^{\alpha} \mathrm{d} x=\frac{k^{\alpha+1}}{\alpha+1}$, 因此

$$\begin{aligned}
\frac{k^{p+1}}{a_{1}+2^{p} a_{2}+\cdots+k^{p} a_{k}} &\leqslant \frac{k^{p+1}}{\left(\sum_{i=1}^{k} i^{\frac{3}{2} p+1}\right)^{2}}\left(\frac{1}{a_{1}}+\frac{2^{2p+2}}{a_{2}}+\cdots+\frac{k^{2p+2}}{a_{k}}\right) \\
&<\frac{k^{p+1}}{\left(\frac{k^{\frac{3}{2} p+2}}{\frac{3}{2} p+2}\right)^{2}}\left(\frac{1}{a_{1}}+\frac{2^{2p+2}}{a_{2}}+\cdots+\frac{k^{2p+2}}{a_{k}}\right)<\frac{\left(\frac{3}{2} p+2\right)^{2}}{k^{2p+3}}\left(\frac{1}{a_{1}}+\frac{2^{2p+2}}{a_{2}}+\cdots+\frac{k^{2p+2}}{a_{k}}\right)
\end{aligned}$$

因此

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} \frac{k^{p+1}}{\sum_{i=1}^{k} i^{p} a_{i}} &<\sum_{k=1}^{n} \frac{\left(\frac{3}{2} p+2\right)^{2}}{k^{2p+3}} \sum_{i=1}^{k} \frac{i^{2p+2}}{a_{i}}=\left(\frac{3}{2} p+2\right)^{2} \sum_{i=1}^{n} \frac{i^{2p+2}}{a_{i}} \sum_{k=i}^{n} \frac{1}{k^{2p+3}} \\
&<\left(\frac{3}{2} p+2\right)^{2} \sum_{i=1}^{n} \frac{i^{2p+2}}{a_{i}} \sum_{k=i}^{\infty} \frac{1}{k^{2p+3}}<\left(\frac{3}{2} p+2\right)^{2} \sum_{i=1}^{n} \frac{i^{2p+2}}{a_{i}} \int_{i-1}^{+\infty} \frac{\mathrm{d} x}{x^{2p+3}} \\
&<\left(\frac{3}{2} p+2\right)^{2}\left(\sum_{i=2}^{n} \frac{i^{2p+2}}{a_{i}} \int_{i-1}^{+\infty} \frac{\mathrm{d} x}{x^{2p+3}}+\frac{1}{a_{1}} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{2p+3}}\right)
\end{aligned}$$

其中
$$\sum_{i=2}^{n}\frac{i^{2p+2}}{a_i}\int_{i-1}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x^{2p+3}}=\sum_{i=2}^{n}\left(\frac{i}{i-1}\right)^{2p+2}\frac{1}{a_i}<2^{2p+2}\sum_{i=2}^{n}\frac{1}{a_i}$$
而 $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^{2p+3}}$ 收敛，因此令 $n\to\infty$ 可知级数 $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{k^{p+1}}{a_1+2^pa_2+\cdots+k^pa_k}$ 收敛. □

6. (1) 若 $r\in(-1,1)$，对 $\forall\theta\in\mathbb{R}$，试证：
$$\frac{1-r^2}{1-2r\cos\theta+r^2}=1+2\sum_{k=1}^{+\infty}r^k\cos k\theta$$
(2) 设 $x\in\mathbb{R}$ 使得 $f(x^+)=f(x^-)$ 存在，试证：
$$\lim_{r\to1^-}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{1-r^2}{1-2r\cos(x-t)+r^2}f(t)\mathrm{d}t=\frac{1}{2}\left[f\left(x^+\right)+f\left(x^-\right)\right]$$
若 f 在 $\mathbb{R}$ 上连续，试证此收敛关于 $x\in\mathbb{R}$ 是一致的.

☞ **证明:**

(1) 由于 $|r|<1$ 且 $\left|r^ke^{in\theta}\right|=|r|^k$，故函数项级数 $\sum r^ke^{ik\theta}$ 在 $\mathbb{R}$ 上一致收敛，且有
$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{+\infty}r^ke^{ik\theta}&=\frac{re^{i\theta}}{1-re^{i\theta}}=\frac{r\cos\theta+ir\sin\theta}{1-r\cos\theta-ir\sin\theta}=\frac{(r\cos\theta+ir\sin\theta)(1-r\cos\theta+ir\sin\theta)}{(1-r\cos\theta)^2+r^2\sin^2\theta}\\&=\frac{r\cos\theta(1-r\cos\theta)-r^2\sin^2\theta+i\left(r^2\sin\theta\cos\theta+r\sin\theta(1-r\cos\theta)\right)}{(1-r\cos\theta)^2+r^2\sin^2\theta}\end{aligned}$$
因此
$$\mathrm{Re}\left(\sum_{k=1}^{+\infty}r^ke^{in\theta}\right)=\frac{r\cos\theta-r^2}{(1-r\cos\theta)^2+r^2\sin^2\theta}=\frac{r\cos\theta-r^2}{1-2r\cos\theta+r^2}$$
即
$$1+2\sum_{k=1}^{+\infty}r^k\cos k\theta=1+2\mathrm{Re}\left(\sum_{k=1}^{+\infty}r^ke^{ik\theta}\right)=1+\frac{2\left(r\cos\theta-r^2\right)}{1-2r\cos\theta+r^2}=\frac{1-r^2}{1-2r\cos\theta+r^2}$$
或者一步到位，由于
$$\frac{1+re^{i\theta}}{1-re^{i\theta}}=\left(1+re^{i\theta}\right)\sum_{k=0}^{\infty}r^ke^{ik\theta}=\sum_{k=0}^{\infty}\left(r^ke^{ik\theta}+r^{k+1}e^{i(k+1)\theta}\right)=1+2\sum_{k=1}^{\infty}r^ke^{ik\theta}$$
即
$$\frac{1-r^2}{1-2r\cos\theta+r^2}=\mathrm{Re}\left(\frac{1+re^{i\theta}}{1-re^{i\theta}}\right)=1+2\sum_{k=1}^{\infty}r^k\cos k\theta$$

(2) 令 $P_r(\theta)=\dfrac{1-r^2}{1-2r\cos\theta+r^2}$，不难证明 $P_r(\theta)$ 是一个单位逼近，即它具有下述两个性质：

- $P_1:\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}P_r(\theta)\mathrm{d}\theta=1;$
- $P_2:\forall\delta\in[0,\pi],\ \lim\limits_{r\to1^-}P_r(\theta)=0$ 关于 $\theta\in[-\pi,-\delta]\cup[\delta,\pi]$ 一致成立.

利用上述两性质以及 f 的 2π 周期性，则有

$$\begin{aligned}
I &= \left|\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{1-r^2}{1-2r\cos(x-t)+r^2}f(t)\,\mathrm{d}t-\frac{1}{2}\left[f\left(x^+\right)+f\left(x^-\right)\right]\right| \\
&= \left|\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)\,P_r(x-t)\,\mathrm{d}t-\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1}{2}\left[f\left(x^+\right)+f\left(x^-\right)\right]P_r(t)\,\mathrm{d}t\right| \\
&= \left|\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x-t)\,P_r(t)\,\mathrm{d}t-\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1}{2}\left[f\left(x^+\right)+f\left(x^-\right)\right]P_r(t)\,\mathrm{d}t\right| \\
&= \frac{1}{2\pi}\left|\int_0^{\pi}[f(x+t)+f(x-t)]P_r(t)\,\mathrm{d}t-\int_0^{\pi}\left[f\left(x^+\right)+f\left(x^-\right)\right]P_r(t)\,\mathrm{d}t\right| \\
&\le \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi}\left|f(x+t)-f\left(x^+\right)\right|P_r(t)\,\mathrm{d}t+\frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi}\left|f(x-t)-f\left(x^-\right)\right|P_r(t)\,\mathrm{d}t \\
&\le \frac{1}{2\pi}\left|\int_0^{\delta}\left|f(x+t)-f\left(x^+\right)\right|P_r(t)\,\mathrm{d}t+\int_0^{\delta}\left|f(x-t)-f\left(x^-\right)\right|P_r(t)\,\mathrm{d}t\right| \\
&\quad+\frac{1}{2\pi}\left|\int_{\delta}^{\pi}\left|f(x+t)-f\left(x^+\right)\right|P_r(t)\,\mathrm{d}t+\int_{\delta}^{\pi}\left|f(x-t)-f\left(x^-\right)\right|P_r(t)\,\mathrm{d}t\right|
\end{aligned}$$

因为 $\lim\limits_{t\to0^+}f(x+t)=f\left(x^+\right),\lim\limits_{t\to0^+}f(x-t)=f\left(x^-\right)$，即对 $\forall\varepsilon>0,\exists\delta_x>0$ 使得 $\forall t\in[0,\delta_x],\left|f(x+t)-f\left(x^+\right)\right|<\varepsilon,\left|f(x-t)-f\left(x^-\right)\right|<\varepsilon$. 于是对 $\delta_x>0$ 有

$$\begin{aligned}
&\int_0^{\delta_x}\left|f(x+t)-f\left(x^+\right)\right|P_r(t)\,\mathrm{d}t+\int_0^{\delta_x}\left|f(x-t)-f\left(x^-\right)\right|P_r(t)\,\mathrm{d}t \\
&<\varepsilon\left(\int_0^{\delta_x}P_r(t)\,\mathrm{d}t+\int_0^{\delta_x}P_r(t)\,\mathrm{d}t\right)<2\pi\varepsilon
\end{aligned}$$

另外根据性质 $P_2,\forall\varepsilon>0,\exists\eta>0$ 使得：$\forall r\in[1-\eta,1],\forall t\in[\delta_x,\pi]\Rightarrow 0<P_r(t)<\varepsilon$，若令 $M=\sup\limits_{t\in\mathbb{R}}|f(t)|$，则 $M<+\infty$，于是 $\forall r\in[1-\eta,1]$ 有

$$\begin{aligned}
&\int_{\delta_x}^{\pi}\left|f(x+t)-f\left(x^+\right)\right|P_r(t)\,\mathrm{d}t+\int_{\delta_x}^{\pi}\left|f(x-t)-f\left(x^-\right)\right|P_r(t)\,\mathrm{d}t \\
&<\varepsilon\left(\int_{\delta_x}^{\pi}\left(M+\left|f\left(x^+\right)\right|\right)\mathrm{d}t+\int_{\delta_x}^{\pi}\left(M+\left|f\left(x^-\right)\right|\right)\mathrm{d}t\right)<2\pi\varepsilon\left(M+\left|f\left(x^+\right)\right|+\left|f\left(x^-\right)\right|\right)
\end{aligned}$$

因此 $\forall r\in[1-\eta,1]$，则有

$$\left|\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{1-r^2}{1-2r\cos(x-t)+r^2}f(t)\,\mathrm{d}t-\frac{1}{2}\left[f\left(x^+\right)+f\left(x^-\right)\right]\right|<\varepsilon+\left(M+\left|f\left(x^+\right)\right|+\left|f\left(x^-\right)\right|\right)\varepsilon$$

即证

$$\lim_{r\to1^-}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{1-r^2}{1-2r\cos(x-t)+r^2}f(t)\mathrm{d}t=\frac{1}{2}\left[f\left(x^+\right)+f\left(x^-\right)\right]$$

若 f 在 $\mathbb{R}$ 上连续，则有 $f\left(x^+\right)=f\left(x^-\right)=f(x)$. 由于 f 的 2π 周期性，故 f 在 $\mathbb{R}$ 上是一致连续的，即 $\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0,\forall t\in\mathbb{R}$ 且 $|t|<\delta,\forall x\in\mathbb{R}$，有

$$|f(x+t)-f(x)|<\varepsilon,|f(x-t)-f(x)|<\varepsilon$$

因此用 δ 代换上述证明中的 δ_x，用 M 代换 $\left|f\left(x^+\right)\right|$ 与 $\left|f\left(x^-\right)\right|$，即可推出极限

$$\lim_{r\to1}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{1-r^2}{1-2r\cos(x-t)+r^2}f(t)\mathrm{d}t=f(x)$$

关于 $x\in\mathbb{R}$ 是一致的.

□