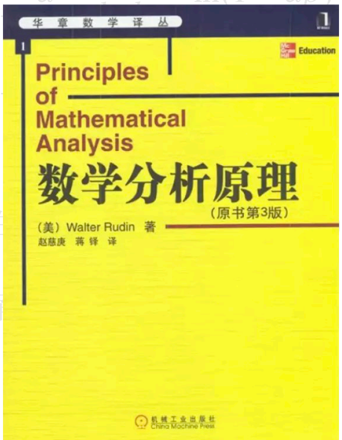
Famous school of 2019 Mathematics

2019 年名校数分高代真题



只有当自己想去做一件事的时候才能把事情做好！

数学专业考研真题群：**639019816**

作者：**Hoganbin**

完成时间：**March 28, 2019**

Email: 1925928696@qq.com

微信公众号: 八一考研数学竞赛

第 **2.10** 版

目　录

第 1 章 北京大学

1.1 2019 年数学分析真题

一.(15 分) 讨论数列

$$a_n=\sqrt[n]{1+\sqrt[n]{2+\sqrt[n]{3+\cdots+\sqrt[n]{n}}}}$$

的敛散性.

二.(15 分) 设 $f(x)\in C[a,b]$，$f(a)=f(b)$，证明 $\exists x_n,y_n\in[a,b],s.t.\lim\limits_{n\to\infty}(x_n-y_n)=0$，且 $f(x_n)=f(y_n)$.

三.(15 分) 证明

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k C_n^k\frac{1}{k+m+1}=\sum_{k=0}^{m}(-1)^k C_m^k\frac{1}{k+n+1}\ (\text{其中}m,n\text{是正整数})$$

四.(15 分) 无穷乘积 $\prod\limits_{n=1}^{\infty}(1+a_n)$ 收敛，是否无穷级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛？若是，证明这个结论；若不是，请给出反例.

五.(15 分) 设 $f(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}x^n\ln x$，计算 $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$.

六.(15 分) 设定义 $(0,+\infty)$ 上的函数 $f(x)$ 二阶可导，且 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ 存在，$f''(x)$ 有界，证明 $\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)=0$.

七.(15 分) 设序列 x_n 有界且 $\lim\limits_{n\to\infty}(x_{n+1}-x_n)=0$，记 $\varliminf\limits_{n\to\infty}x_n=J$，$\varlimsup\limits_{n\to\infty}x_n=L(J<L)$，证明：在 $[J,L]$ 中的任何数都是 x_n 的某一子列的极限.

八.(15 分) 对 $p>0$ 讨论级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sin\frac{n\pi}{4}}{n^p+\sin\frac{n\pi}{4}}$ 绝对收敛性和收敛性.

九.(15 分) 求函数 $f(x)=\frac{2x\sin\theta}{1-2x\cos\theta+x^2}$ 在 $x=0$ 点的 $Taylor$ 展开，其中 $\theta\in\mathbb{R}$ 是常数，并计算积分

$$\int_0^{\pi}\ln\left(1-2x\cos\theta+x^2\right)\mathrm{d}\theta$$

十.(15 分) 证明 $\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}dx=\frac{\pi}{2}$，并计算：

$$\int_0^{+\infty}\frac{\sin^2(xy)}{x^2}dx$$

1.2 2019 年高等代数真题

一.(18 分) 设 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 是 $\mathbb{R}^n$ 上线性无关的列向量组，$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_t$ 是 $\mathbb{R}^s$ 上线性无关的列向量组，若有实数 c_{ij} 使得

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{t}c_{ij}\alpha_i\beta_j^T=0$$

证明系数 c_{ij} 全为 0.

二.(18 分) 实数域上的 3 阶方阵 A 满足 $AA^T=A^TA$，且 $A\neq A^T$.

(1)证明存在正交矩阵 P 使得

$$P^TAP=\begin{pmatrix}a&0&0\\0&b&c\\0&-c&b\end{pmatrix}$$

其中 a,b,c 都是实数.

(2)若 $AA^T=A^TA=I_3$, 且 $|A|=1$，证明 1 是 A 的一个特征值，且求属于特征值 1 的特征向量.

三.(20 分) A 是复数域上的一个 n 阶方阵，A 的特征值 $\lambda_1,\cdots,\lambda_2$. 定义 $M_n(C)$ 上的变换 T 为

$$T: M_n(\mathbf{C})\longrightarrow M_n(\mathbf{C})$$
$$B\longmapsto AB-BA$$

(1)求变换 T 的特征值.

(2)若 A 可对角化，证明 T 也可对角化.

四.(20 分) A 为 n 阶实对称矩阵，令

$$S=\{X|X^TAX=0,X\in\mathbf{R}^n\}$$

(1)求 S 为 $\mathbb{R}^n$ 中的一个子空间的充要条件并证明.

(2)若 S 为 $\mathbb{R}^n$ 中的一个子空间，求 $\mathbf{d}imS$.

五.(20 分) 给定任意实数 $\varepsilon > 0$，证明：对任意的 n 阶实矩阵 A，存在一个 n 阶对角矩阵 D，每个对角元 ε 或 $-\varepsilon$ 中的一个，使得

$$|A + D| \neq 0$$

六.(18 分) 给了空间中两条异面直线方程，求这两条直线的距离和公垂线.

七.(18 分) 在空间中有三条直线两两异面，且不平行于同一个平面，证明空间中与这三条直线都共面的直线集是一个单叶双曲面.

八.(20 分) 证明平面与双曲抛物面的交线不可能是一个椭圆.

第 2 章 北京师范大学

2.1 2019 年数学分析真题

一. 计算

(a) 求极限

$$\lim_{x\to 0}\frac{\tan x - x}{x^3}$$

(b) 已知 $x_1 \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}^+$，数列 x_n 满足 $x_{n+1} = \cos x_n$，证明：$\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ 存在.

二. 求函数 $f(x) = \dfrac{1+x}{\sqrt{1-x}}$ 在 $x = 0$ 处的泰勒展开式.

三. 求函数 $f(x) = \dfrac{\sin x}{x}e^{-x^2}\ln x$.

四. 证明

(1) 当 $0 < p < 1$ 时，有 $x^p + y^p \le (x+y)^p$.

(2) 当 $p \ge 1$ 时，有 $x^p + y^p \ge (x+y)^p$

五. 若 $f(x) = x^4 - 2x^2$，讨论 $f(x)$ 的单调性、凹凸性和极值.

六.

(1) 求不定积分 $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{x^2+a^2}}\mathrm{d}x$.

(2) 判断反常积分 $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{1+x^3}\ln^2(1+x)}\mathrm{d}x$ 敛散性。

七. 若 f 在 $\mathbb{R}$ 上连续，证明：

$$F_n(x) = \int_x^{x+\frac{1}{n}} f(t)\mathrm{d}t$$

关于 x 在任意闭区间 $[\alpha, \beta]$ 上一致收敛.

八. 设 $f(x) = \left(\displaystyle\int_0^x e^{-t^2}\mathrm{d}t\right)^2, g(x) = \displaystyle\int_0^1 \frac{e^{-x^2}(1+t^2)}{1+t^2}\mathrm{d}t$，证明：

(1) $f(x) + g(x) = \dfrac{\pi}{4}$.

(2) $\lim\limits_{x\to+\infty}\displaystyle\int_0^x e^{-t^2}\mathrm{d}t = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

九. 求第一型曲线积分

$$\iint_S z(x+y)\mathbf{d}S$$

其中 S 是球面 $x^2+y^2+z^2=9$ 被 $z=1$ 截取的上半部分

十. 设 f 是周期函数，它有傅里叶级数形式如下：

$$\frac{a_0}{2}(f)+\sum_{k=1}^{\infty}a_k(f)\,\mathbf{sin}(k\pi x)+\sum_{k=1}^{\infty}b_k(f)\,\mathbf{cos}(k\pi x)$$

令 $F(x)=\int_0^x\left(f(t)-\frac{a_0}{2}(f)\right)\mathbf{d}t$，证明：

(1) $F(x)$ 是以 2π 为周期的周期函数.

(2) 未知.

十一. 已知函数 $f(x)=x^2y^2z^2$，求其在

$$\Omega=\{(x,y,z)|x^2+y^2+z^2\leqslant 1\}$$

上的最值.

2.2 2019 年高等代数真题

一. 高等代数 (85 分)

1. (15 分) $f(x)$ 在 $\mathbb{Z}$ 上的不可约多项式，证明：$f(x)$ 在 $\mathbb{Z}$ 上无重因式.
2. (15 分) 若二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=2x_1^2+2x_2^2+2x_3^2+2x_1x_2+2x_1x_3+2x_2x_3$ 求一正交矩阵 U 使得二次型经过非退化线性替换 $(x_1,x_2,x_3)=(y_1,y_2,y_3)U$ 化为标准形.
3. (15 分) 设 $A\in M_n(\mathbb{C})$，证明：存在如下分解 $A=S+N$，满足：

   (1) S 对角化.

   (2) N 是幂零指数为 n 的幂零矩阵，即 $N^n=O$.

   (3) $SN=NS$
4. (15 分) 设 A 是 n 阶矩阵且满足 $A^3-2A^2-A+2I=O$，证明：$r(A-I)+r(A+I)+r(A-2I)=2n$.
5. (25 分) 已知 V 为数域 K 上的线性空间，V_1,V_2 为 V 的子空间. 证明：

   (1)(10 分) 若 V_1,V_2 为 V 的真子空间，则 $V_1\cup V_2\neq V$

   (2)(15 分) 若 $\mathbf{dim}\,V_1=\mathbf{dim}\,V_2$，则存在子空间 W，使得 $V=V_1\oplus W=V_2\oplus W$.

二. 解析几何.(65 分)

1. 已知空间中两直线 $l_1 : \dfrac{x}{1} = \dfrac{y-1}{2} = \dfrac{z+1}{-1}$和$l_2 : \dfrac{x-1}{1} = \dfrac{y}{-2} = \dfrac{z+1}{-1}$

   (1) 证明：两条直线异面.

   (2) 求两条直线的公垂线方成.

   (3) 求两条直线之间的距离

2. 求直线 $l_1 : \dfrac{x}{2} = \dfrac{y}{3} = \dfrac{z}{-6}$ 绕 $l_2 : x = y = z$ 旋转所成圆锥面方程.

3. 二次曲线过点 $P(0,-2)$ 和 $Q(-2,-1)$，它的两条对称轴分别是 $l_1 : x + y + 1 = 0, l_2 : x - y + 1 = 0$，求该二次曲线的方程并说明这是什么曲线.

4. 已知 $A = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} \neq 0$，说明 $(a_1x + b_1y + c_1z)^2 + (a_2x + b_2y + c_2z)^2 + (a_3x + b_3y + c_3z)^2 = 1$ 是什么曲面？并说明理由.

第 3 章 中国科学院大学

3.1 2019 年数学分析真题

一.(15 分) 求极限

$$\lim_{n\to\infty}\tan^n\left(\frac{\pi}{4}+\frac{2}{n}\right)$$

二.(15 分) 求极限

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^n}{(x-1)(x-2)\cdots(x-n)}\right)^{2x}$$

三.(20 分) 已知 $0\le a\le 1, b\ge 2$ 有序列 $\{x_n\}, n=1,2,\cdots$，满足递推关系：

$$x_{n+1}=x_n-\frac{1}{b}(x_n^2-a), x_0=0$$

证明：有序列 $\{x_n\}$ 收敛，并求它的极限值.

四.(20 分) 求下列定积分

$$\int_0^{2\pi}\sqrt{2+\cos x}\,\mathrm{d}x$$

$$\int_0^{2\pi}\frac{1}{a+\cos x}\mathrm{d}x, a>1$$

五.(15 分) 求与半径为 R 的球外切的正圆锥体积最小时的高，并求出最小体积.

六.(15 分) 求 $f^{(4)}(0)$，其中 $f(x)=\dfrac{1+2x+x^2}{1-x+x^2}$.

七.(15 分) 求证

$$\cos x<\frac{\sin x}{2x-sinx}, x\in(0,2\pi)$$

八.(15 分) 求和

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n^2}{3^n}$$

九.(20 分) 求曲面 $z=x^2+y^2+1$ 上任意一点的切平面与 $z=x^2+y^2$ 所围区域体积.

3.2 2019 年高等代数真题

一.(18 分) 已知 $(x-1)^2(x+1)\mid\left(ax^4+bx^2+cx+1\right)$, 求 a,b,c.

二.(18 分) 已知实数矩阵 $A=(a_{ij})_{3\times3}$, 其中 $a_{ij}\le0, i\ne j, i,j=1,2,3$. 请说明

(1)若 $a_{ii}>0, i=1,2,3$, A 是否为可逆矩阵?

(2)若 $a_{1j}+a_{2j}+a_{3j}>0, j=1,2,3$, A 是否为可逆矩阵?

三.(20 分) 设 3 维复向量空间 V 上的线性变换 $\mathscr{A}$ 在 V 的一组基 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3$ 下的矩阵为

$$A=\begin{pmatrix}2&3&2\\1&8&2\\-2&-14&-3\end{pmatrix}.$$

求 V 的另一组基 η_1,η_2,η_3, 使得 $\mathscr{A}$ 在该基下的矩阵就是 A 的若当标准形.

四.(20 分) 设有 $n+1$ 个列向量 $\alpha_1,\ldots,\alpha_n,\beta\in\mathbb{R}^n$ ($\mathbb{R}$ 为实数域), A 是一个 n 阶实对称正定矩阵, α_i^T 为 α_i 的转置, 如果下列条件满足:

(1) $\alpha_j\ne0, j=1,2,\ldots,n$. **(2)** $\alpha_i^TA\alpha_j=0, i\ne j; i,j=1,2,\ldots,n$.

(3) β 与每个 α_j 都正交.

证明 $\beta=0$.

五.(20 分) 设 A,B 是两个 $n(\ge2)$ 阶对称正定矩阵, $\mathbf{det}(A)$ 表示 A 的行列式, 证明

$$\mathbf{det}(A+B)>\mathbf{det}(A)+\mathbf{det}(B).$$

六.(18 分)

(1)设 $\mathbb{R}_n[x]$ 是次数 $<n$ 的多项式空间, 证明 $(f,g)=\int_0^1 f(x)g(x)dx$ 为 $\mathbb{R}_n[x]$ 上的内积, 因而 $\mathbb{R}_n[x]$ 是欧氏空间.

(2)证明下述 n 阶实对称矩阵为正定矩阵

$$A=\begin{pmatrix}\frac{1}{1}&\frac{1}{2}&\cdots&\frac{1}{n}\\\frac{1}{2}&\frac{1}{3}&\cdots&\frac{1}{n+1}\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\\frac{1}{n}&\frac{1}{n+1}&\cdots&\frac{1}{2n-1}\end{pmatrix}.$$

七.(18 分) 设实对称矩阵

$$A=\begin{pmatrix}-4&2&2\\2&-1&4\\2&4&a\end{pmatrix}.$$

已知 -5 是 A 的一个重数为 2 的特征值.

(1)计算 a 的值.

(2)求一个正交矩阵 Q, 使得 $Q^{-1}AQ$ 为对角矩阵.

八.(20 分) 设 V 是由次数不超过 n 的一元实系数多项式构成的实线性空间, 对于每个自然数 $k \geq 0$, 定义

$$\binom{x}{k} = \frac{x(x-1)\cdots(x-k+1)}{k!}, \quad \binom{x}{0} = 1.$$

(1)证 $\binom{x}{0}, \binom{x}{1}, \ldots, \binom{x}{n}$ 构成 V 的一组基.

(2)任给一个多项式 $f(x) \in V$, 写出 $f(x)$ 相对这组基的线性组合.

(3)证明: 若 $f(i) \in \mathbb{Z}$, 对于 $0 \leq i \leq n$, 则 $f(k) \in \mathbb{Z}$ 对所有 $k \in \mathbb{Z}$ 均成立, 其中 $\mathbb{Z}$ 是整数集.

第 4 章 南开大学

4.1 2019 年数学分析真题

一.(15 分) 求极限

$$\lim_{n\to\infty}\left[\frac{1}{\ln(n+1)-\ln n}-n\right]$$

二.(15 分) 若 $a>0$, 求 $x^2+y^2=a(z-1)^2$ 与平面 $z=0$ 所围成图形的立体体积.

三.(20 分) 求曲面积分 $\iint_S y^2z\mathrm{d}x\mathrm{d}y+xz\mathrm{d}y\mathrm{d}z+x^2y\mathrm{d}x\mathrm{d}z$，其中 S 是由曲面 $z=x^2+y^2$ 与曲面 $x^2+y^2=1$ 以及三坐标面在第一象限所围立体的外侧.

四.(20 分) 设函数 $f(x,y,z)=2x^2+2xy+2y^2-3z^2$，$\bar{l}=\left(\frac{\sqrt{2}}{2},-\frac{\sqrt{2}}{2},0\right)$，动点 P 在曲面 $x^2+2y^2+3z^2=1$，求方向导数 $\frac{\partial f}{\partial l}|_{(P)}$ 的最大值.

五.(20 分) 求幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{\sqrt[n]{n!}}$ 的收敛区间.

六.(15 分) 证明广义积分

$$\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{2x+3\sin x}\mathrm{d}x$$

收敛.

七.(20 分) 设 $f_n(x)$ 是区间 I 上的函数 $(n=1,2,\cdots)$，且 $\sum_{n=1}^{\infty}f_n^2(x)$ 在区间 I 上逐点收敛和函数在 I 上有界，试证：当 $p\in(\frac{1}{2},\infty)$ 时，函数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{f_n(x)}{n^p}$ 在区间 I 上一致收敛.

八.(15 分) 已知 α,β 均为正实数，且 $\max\{\alpha,\beta\}>1$，试证：

$$\lim_{x\to+\infty}\int_1^x\frac{1}{x^\alpha+t^\beta}\mathrm{d}t=0$$

九.(15 分) 设函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续可微且不恒等于 0，且 $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=0$，证明：

$$\int_0^1|f(x)|\mathrm{d}x\cdot\int_0^1|f'(x)|\mathrm{d}x>2\int_0^1 f^2(x)\mathrm{d}x$$

4.2 2019 年高等代数真题

一.(20 分) 若整数 $n \geq 3$，计算下面的 n 阶行列式.

(1) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 0 & 1 \end{vmatrix}$ (2) $\begin{vmatrix} \cos 1 & \cos 2 & \ldots & \cos n \\ \cos(n+1) & \cos(n+2) & \ldots & \cos 2n \\ \vdots & \vdots & & \\ \cos\left(n^2-n+1\right) & \cos\left(n^2-n+2\right) & \cdots & \cos n^2 \end{vmatrix}$

二.(20 分) 已知矩阵 $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & -2 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

(1) 求矩阵 X，使得 $AX = B$.

(2) 判断 A 与 B 是否相似.

三.(20 分) 已知矩阵 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 3 & 0 \\ -2 & -2 & 0 \end{pmatrix}$，求正交矩阵 Q 和上三角矩阵 T，使得 $AQ = T$.

四.(15 分) 若 $A_1, A_2 \in \mathbb{R}^{m\times n}$，且 W_1, W_2 分别是 A_1, A_2 的行向量组生成的 $\mathbb{R}^{1\times n}$ 的子空间，V_1, V_2 分别是 A_1, A_2 的列向量组生成的 $\mathbb{R}^{m\times 1}$ 的子空间，证明 $W_1 \cap W_2 = \{0\}$ 充要条件为 $V_1 \cap V_2 = \{0\}$

五.(15 分) 若 A, B 都是 n 阶正定矩阵，求证：$tr(AB) > 0$

六.(15 分) 线性空间 V 上的线性变换 A, B 满足 $KerA \subset KerB$，证明：存在 V 上的线性变换 T，使得 $A = BT$.

七.(15 分) 已知 A, B 都是 n 阶复矩阵，证明：当且仅当矩阵 $\begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & A \end{bmatrix}$ 和

$$\begin{bmatrix} A & B \\ 0 & A \end{bmatrix}$$

相似时，存在矩阵 X 使得 $AX - XA = B$.

八.(15 分) 已知整数 $n \geq 3$，实数 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 满足 $x_1 + x_2 + \cdots + x_n = 0, x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 = 1$，证明：$x_1x_2 + x_2x_3 + \cdots + x_{n-1}x_n + x_nx_1 \leq \cos\dfrac{2\pi}{n}$

九.(15 分) 设 $A=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$，是否存在 3 阶的复矩阵 X，以及多项式 $f(X),g(X)\in C[X]$，使得 $A=f(X),B=g(X)$? 请说明理由.

第 5 章 天津大学

5.1 2019 年数学分析真题

一、填空题 (每小题 5 分，共 50 分)

1. 已知 $f'(x)$ 在 $x=0$ 的无穷邻域内存在，求 $\lim\limits_{n\to\infty}\left[f\left(\frac{1}{n^2}\right)+f\left(\frac{2}{n^2}\right)+\cdots+f\left(\frac{2n}{n^2}\right)-2n\right]$

2. 计算 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}}{\ln n}$

3. 已知 $f(t)=\begin{cases} t, & t\in[-\pi,0] \\ 0, & t\in(0,\pi] \end{cases}$，将 $f(t)$ 在 $t\in[-\pi,\pi]$ 展开傅里叶级数.

4. 求 $f(x)=\dfrac{10\sqrt[3]{(x-1)^2}}{x^2+9}$ 的最大值.

5. 求 $f(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}n^2\ln(1+x)^n$ 的收敛域.

6. 计算 $\lim\limits_{n\to\infty}n^2\ln\left(n\sin\dfrac{1}{n}\right)$.

7. 求 $e^{\frac{x}{z}}+e^{\frac{y}{z}}=1$ 在 $(\ln 2,\ln 2,1)$ 处的法向量.

8. 已知 $z=xe^x\cos xy-1$，求 $\dfrac{\partial u}{\partial x}\big|_{(1,0)}$ 与 $\dfrac{\partial u}{\partial y}\big|_{(1,0)}$.

9. 计算 $\lim\limits_{\alpha\to+\infty}\int_0^{+\infty}e^{-x^\alpha}\mathrm{d}x$.

10. 求 $\iint\limits_{\Sigma}(x+y+z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$，其中 $\sum$ 为 $x^2+y^2+z^2=a^2$，$z=h$ 与 $z=a\ (a>h>0)$ 相夹的部分

二.(10 分) 已知 $\{na_n\}$ 收敛，且 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}n(a_n-a_{n-1})$ 收敛，证明 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛.

三.(15 分) 求

$$\iint\limits_{\Sigma}(x^2+y^2+z^2)^{-\frac{3}{2}}\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\right)^{-\frac{1}{2}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

其中 $\sum$ 为 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1\ (b>a>0)$

四.(15 分) 已知 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积，$g(x)$ 单调，满足

$$\int_a^b f(x)g(x)\mathbf{d}x = g(a)\int_a^{\xi} f(x)\mathbf{d}x + g(b)\int_{\xi}^b f(x)\mathbf{d}x$$

根据上述积分第二中值定理证明，若 $f(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上可积，$g(x)$ 单调有界，证明 $\int_a^{+\infty} f(x)g(x)\mathbf{d}x$ 收敛.

五.(15 分) 证明 $\sum_{k=1}^{n} kC_n^k(1-x)^{n-k} = nx$,其中$k,n$均为正整数，且$x \in (0,1)$.

六.(15 分) 若 $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{n}$，证明

$$f(x) + f(1-x) + \ln x \ln(1-x) = \frac{\pi^2}{6}$$

七.(15 分) 对任意的 $x \in \mathbb{R}$ 有定义，已知 $|f(x) - f(y)| \le \frac{1}{2}|x-y|$，证明：对任意 $\lambda > \frac{1}{2}$，使得 $f(x) - \lambda x = 0$ 有实根.

八.(15 分) 证明 $f(x) = \frac{1}{x}$ 在 $(0,1]$ 非一致连续，在 $[1,+\infty)$ 一致连续.

5.2 2019 年高等代数真题

一.(15 分) 证明：$(f(x)g(x)) = 1 \Longleftrightarrow (f(x)g(x), f(x)g(x)) = 1$

二.(15 分) 已知 A, B 为 n 阶正交矩阵，满足条件

(1) 若 $\left|A\right| < 0$，证 $\left|A+E\right| = 0$

(2) 若 $\left|A\right| = -\left|B\right|$，证 $\left|A+B\right| = 0$

三.(15 分) 若 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$，则有

(1) 求 **A** 的特征值和对应的单位正交特征向量.

(2) 证明 $A^{2021} = A^{2019} + 2^{2019}(A^2 - E)$.

(3 求 A^{2019}.

四.(15 分) 若给出 A 在一组基 ξ_1,ξ_2,ξ_3 下矩阵为 $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$，$B$ 在基 η_1,η_2,η_3 下矩阵为 $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$，试求以下问题:

(1) 求 $A+B$ 在基 ξ_1,ξ_2,ξ_3 下矩阵.

(2) 求 AB 在基 η_1,η_2,η_3 下矩阵.

(3) 已知 $\xi=(3,3,3)'$，求 ξ 分别在基 η_1,η_2,η_3 与 ξ_1,ξ_2,ξ_3 下的坐标.

五.(15 分) 已知 $I=\{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\},II=\{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4\},III=\{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\alpha_5\},r(I)=r(II)=3,r(III)=4$，试证明

(1) α_4 可以由 $\{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\}$ 线性表出，且表示方法唯一.

(2) $\alpha_5=k\alpha_3-k\alpha_2$，问一组基的秩.

六.(15 分) 若 A,B 为 n 维线性空间的线性变换 $AB=BA$.

(1) 证明 A 的特征值 λ_0 对应的特征值空间是 B 的不变字空间.

(2) 若 A 的特征值互异，证明 A 的特征向量为 B 的特征向量.

七.(15 分) 若 A,B,C,D 为 n 阶矩阵,$|A|,|B|,|C||D|$,表示他们的行列式,若 $r\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}=2n$，则 $A=\begin{pmatrix} |A| & |B| \\ |C| & |D| \end{pmatrix}$ 是否满秩，是请给出证明，不是请给出反例

八.(15 分) 矩阵 **A** 为 **3**×3 矩阵，且 **A** 的元素为 **1** 或**-1**，求 $|A|$ 的最大值和最小值，并给出此时的矩阵.

九.(15 分)

(1) 若 A 为阶半正定矩阵 $A=A',\forall X,Y\in P^{n\times 1}$，证明:$(X'AY)^2\le(X'AX)(Y'AY)$

(2) 若 A 为正定矩阵，证明:$(X'Y)^2\le(X'AX)(Y'A^{-1}Y)$.

第 6 章 浙江大学

6.1 2019 年数学分析真题

一、计算题 (50 分)

1. (10 分) 计算 $I_n = \int_0^n x^{a-1}\left(1-\frac{x}{n}\right)^n \mathrm{d}x$

2. (15 分) 由曲线 $y=\sin x$，直线 $x=0, x=\frac{\pi}{2}$，以及 $y=t(0\le t\le 1)$，围成的区域面积为 $S(t)$，求 $S(t)$ 的最大值和最小值.

3. (10 分) 计算 $\int_0^1 \frac{\ln x}{(1+x)^2}\mathrm{d}x$.

4. (15 分) 计算

$$\iint_D x^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

其中 D 是由 $A(x_1,y_1), B(x_2,y_2), C(x_3,y_3)$ 三点围成的三角闭区域.

二.(15 分) 证明 $I(x)=\int_0^{\infty} x^{\frac{3}{2}} e^{-x^2y^2}\mathrm{d}x$ 在 $x\ge 0$ 上一致收敛.

三.(15 分) 对于函数 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$，证明 f 在 $\mathbb{R}$ 上连续的充分必要条件是，对于 $\mathbb{R}$ 上的任意 a,b 点集

$$E_1=\{x: f(x)>a\}, E_2\{x: f(x)<b\}$$

都是开集合.

四.(15 分) 对于函数 $f:[a,b]\to\mathbb{R}$，证明函数 $|f(x)|$ 在 $[a,b]$ 上黎曼可积的充分必要条件是：$f^2(x)$ 在 $[a,b]$ 上黎曼可积.

五.(15 分)

1.(5 分) 叙述 $\mathbb{R}$ 上的聚点定理.

2.(10 分) 使用聚点定理证明闭区间上的连续函数一致收敛.

六.(20 分) 函数定义在 $\mathbb{R}^2$ 上，若满足 **(1)** $f(x,y)$ 分别关于 x,y 连续；**(2)** 若 $\mathbf{K}$ 在 $\mathbb{R}^2$ 上的紧集，则 $f(\mathbb{R})$ 比为 $\mathbb{R}^2$ 中的紧集；证明 $f(x,y)$ 是 $\mathbb{R}^2$ 上的连续函数.

七.(20 分) 设 $\{f_n(x)\}$ 是闭区间 $[a,b]$ 上的连续函数列，且 $\forall\varepsilon>0$，$\exists\delta>0$，当 $x,y\in[a,b]$ 且 $|x-y|<\delta$ 时，则对 $\forall\ge 1$，都有 $|f_n(x)-f_n(y)|<\varepsilon$；又设函数列 $\{f_n(x)\}$ 在 $[a,b]$ 上逐点收敛. 证明 $\{f_n(x)\}$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛.

6.2 2019 年高等代数真题

1. (18 分) 设 $n\times n$ 矩阵 $A=(a_{ij})$ 满足：$a_{ii}=i(1\le i\le n), a_{j,j+1}=-j(1\le j\le n-1), a_{k,k-1}=-1(2\le k\le n)$，其余元素均为 0，求 $|A|$.

2. (18 分) 设 B 为 $m\times n$ 矩阵，且 $\mathbf{Null}(B)=\{X|BX=0, X\in\mathbb{R}^n\}, \mathbf{Range}(B)=\{B^TY|Y\in\mathbb{R}^m\}$，证明：$\mathbb{R}^n=\mathbf{Null}(B)\oplus\mathbf{Range}(B)$.

3. (18 分) 设 $A=(a_{ij})_{n\times n}$ 且

$$D_i=\left\{x\in\mathbb{C}\,\big||x-a_{ii}|<\sum_{j=1,j\neq i}^{n}|a_{ij}|\right\}$$

证明：

(1) 若 r 为 A 的特征值, 则 $r\in D_1\cup D_2\cup\cdots\cup D_n$;

(2) 若 $|a_{ii}|\le\sum\limits_{j=1,i\neq j}^{n}|a_{ij}|$, 则 A 可逆.

4. (20 分) $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 为不相同整数，$a_1a_2\cdots a_{n+1}$ 不是某个整数的平方，证明：

$$f(x)=(x+a_1)\cdots(x+a_n)+1$$

不能表示 $\mathbb{Q}$ 上两个次数 ≥ 1 的多项式的乘积.

5. (20 分) 设 $A=(a_{ij})$ 为$n\times n$ 矩阵, 定义 $e^A=\sum\limits_{k=0}^{\infty}\frac{A^k}{k!}, A^0=I$, 证明: $|e^A|=e^{\mathrm{tr}(A)}$.

6. (18 分) 设 V 为复线性空间，$T: V\to V$ 为自伴随线性变换，$b^2<4c$，证明：$T^2+bT+cT$ 可逆.

7. 设 A 为负定矩阵，证明：A 的行列式的绝对值小于等于 A 的主对角元元素绝对值的乘积.

8. (18 分)n 维实线性空间 V，对于线性变换 T，有 $\mathbf{Ker}T^{n-2}\neq\mathbf{Ker}T^{n-1}$，证明：$T$ 至多有 **2** 个不同的特征值.

9. (20 分) 复数域上 $A_{n\times n}$ 的特征值全为 **1**，证明：$A^s\sim A(s\ge 1)$.

10. 如果 $AA*=A*A$，$A*$ 为 A 的共扼转置，证明：A 为正规矩阵等价于

$$\sum_{i=1}^{n}|r_i|^2=\sum_{i,j=1}^{n}|a_{ij}|^2$$

其中 r_i 为 A 的特征值.

第 7 章 华中科技大学

7.1 2019 年数学分析真题

一.(15 分) 已知

$$\int_{(0,0)}^{(1,t)} (x^2+2xy+y^2)\,\mathrm{d}x + Q(x,y)\mathrm{d}y = -\int_{(0,0)}^{(t,1)} (x^2+2xy+y^2)\,\mathrm{d}x + Q(x,y)\mathrm{d}y$$

且积分与路径无关，求 $Q(x,y)$.

二.(15 分) 求二重积分

$$\iint_D e^{\frac{x-y}{x+y}}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

其中积分区域 D 是由 $x=0, y=0, x+y=1$ 围成.

三.(15 分) 求数列极限

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{2}+2^{\sqrt{2}}+\cdots+n^{\sqrt{2}}}{n^{\sqrt{2}+1}}$$

四.(20 分) 求函数极限

$$\lim_{x\to\infty}\left[x^2-x^4\ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right)\right]$$

五.(20 分) 已知 $f(x)=-1$，将 $f(x)$ 在 $[0,\pi]$ 上的 **Fourier** 级数展开为正弦级数，并求 $\sum\limits_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{2k+1}$ 的和.

六.(15 分) 求级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n\cdot 3^n}$

七.(20 分) 已知 $f(x)\in C(-\infty,0]$，$\lim\limits_{x\to-\infty}(f(x)-x)=a$. 证明:$f(x)$ 在 $(-\infty,0]$ 上一致收敛.

八.(15 分) 已知 $\int_0^1 x^a f(x)\mathrm{d}x$ 收敛且 $J(y)=\int_0^1 x^y f(x)\mathrm{d}x$，证明：$J(y)$ 在 $[a,+\infty)$ 上一致收敛.

九.(15 分) $f(x)$ 二阶可导且在 $x\in(0,1)$ 上有最大最小值，证明：$\exists y\in(0,1)$ 使得 $f''(y)=f'(y)$.

十.(15 分) 已知 $f(x)>0, f(x)$ 连续. 证明 $f(x)$ 在 (a,b) 上为单调增函数.

7.2 2019 年高等代数真题

一.(15 分) 已知 α 和 β 为 n 维向量，试证明：

$$\mathbf{d}et(E+\alpha\beta')=1+\alpha'\beta$$

二.(15 分) 已知 A 是一个 $m\times n$ 的矩阵，试证明 $rank(A)=r$ 的充分必要条件是：

$$A=\alpha_1\beta_1+\alpha_2\beta_2+\cdots+\alpha_r\beta_r$$

其中 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\cdots,\alpha_r$ 是 r 个 m 维的线性无关的向量，$\beta_1,\beta_2,\beta_3,\cdots,\beta_r$ 是 r 个 m 维的线性无关的向量.

三.(20 分) 已知矩阵 $A=\left(a_{ij}\right)_{m\times n}$，其中 A 的每个元素都是整数.

(1) 如果整数 m 是矩阵 A 的特征值，试证明 $m|\mathbf{d}et\,(A)$;

(2) 如果对于任意的 j 都有 $\sum\limits_{i=1}^{n}a_{ij}=m$，那么 m 是 A 的特征值.

四.(20 分) 已知 A,B 为两个 n 阶的实正交矩阵，试证明：

(1) 如果 $\mathbf{d}et(A)+\mathbf{d}et(B)=0$，那么 $\mathbf{d}et(A+B)=0$;

(2) 如果 n 为奇数，那么 $\mathbf{d}et[(A-B)(A+B)]=0$。

五.(20 分) 若 $\mathbb{R}^{m\times m}$ 空间为矩阵空间，X 为 $\mathbb{R}^{m\times m}$ 空间中任意矩阵，变换 σ 为 $\mathbb{R}^{m\times m}$ 空间中的线性变换，A,B 为 $\mathbb{R}^{m\times m}$ 空间中的矩阵，定义证明：当 $m\neq n$ 时，σ 不可逆.

六.(20 分) 已知实对称矩阵 A，定义 $sgn(A)$ 为矩阵的正惯性指数与负惯性指数的差，现有正定矩阵 B，试证明：

$$sgn(A)\le sgn(A+B)$$

七.(20 分) 实矩阵

$$A=\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & & \\ b_1 & a_2 & b_2 & \\ & b_2 & \dots & b_{n-1} \\ & & b_{n-1} & a_n \end{pmatrix}$$

其中 $b_1,b_2,\cdots,b_{n-1}$ 均不为 0. 试证明：

(1) $rank(A)\le n-1$;

(2) 矩阵 A 有 n 个互不相同的特征值;

(3) 当 $n=4,a_1=a_2=a_3=a_4=1,b_1=b_2=b_3=2$ 时，求矩阵 A 的最小多项式.

八.(20 分) 已知线性空间 V，其中 σ, τ 为 V 的对合变换且

$$\sigma^2 = \tau_2 = id, \sigma\tau + \tau\sigma = 0$$

其中 id 表示恒等变换。试证明：存在一组基使得 σ, τ 在这组基下面的矩阵分别 $\begin{pmatrix} E & \\ & -E \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} & E \\ E & \end{pmatrix}$.

第 8 章 兰州大学

8.1 2019 年数学分析真题

一、计算题 (每小题 5 分，共 50 分)

1.计算极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{k^2+3k+1}{(k+2)!}$.

2.求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\prod\limits_{k=1}^{n}\left(1+\dfrac{k^2}{n^2}\right)$.

3.计算极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)^{\frac{1}{x}}-e^{\frac{\ln(1+x)-x}{x}}}{x\sin x}$.

4.求 $y^2=2ax, y^2=2bx, x^2=2cx, x^2=2dy\ (0<a<b, 0<c<d)$ 的面积.

5.求 $\iint\limits_{S}\dfrac{x\mathbf{d}y\mathbf{d}z+y\mathbf{d}z\mathbf{d}x+z\mathbf{d}x\mathbf{d}y}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}$，其中 S 是不过 $(0,0,0)$ 封闭光滑外正.

二.(10 分) 已知 $f(x), g(x)$ 为有界闭区域 $\overline{\Omega}\subset R^n\ (n\geq 2)$，开区 Ω 可微，证明：$\forall x\in\overline{\Omega}\setminus\Omega$，有 $f(x)=g(x)$，则 $\exists x_0\in\Omega$，使得 $\nabla f(x_0)=\Delta g(x_0)$.

三.(15 分) 若 $f(x)$ 有限开区 (a,b) 连续，证明:$f(x)$ 在 (a,b) 一致连续，当且仅当 $\lim\limits_{x\to a^+}f(x)$，$\lim\limits_{x\to b^-}f(x)$ 存在且有界.

四.(15 分) 证明级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}x^n(1-x)^2$ 在 $[0,1]$ 上一致收敛.

五.(15 分) 判断反常积分的敛散性

$$\int_1^{\infty}\frac{\cos x}{x^p}\mathbf{d}x\ (p>0)$$

六.(15 分) 若 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上单调递减，对 $\forall a\in(0,1)$，试证：

$$\int_0^a f(x)\,\mathbf{d}x\geq a\int_0^1 f(x)\mathbf{d}x$$

七.(15 分) 若闭区间 $[a,b]$ 有界函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上至多有限不连续点，证明：$f(x)$ 在 $[a,b]$ 上黎曼可积.

八.(15 分) 设 $\{f_n(x)\}$ 在有界闭区间 $[a,b]$ 上逐点收敛于 $f(x)$，且 $\exists M>0, 0<\alpha\leq 1$，对 $\forall x,y\in[a,b], n\in N$，使得 $|f_n(x)-f_n(y)|\leq M|x-y|^{\alpha}$. 证明：$f_n(x)$ 在 $[a,b]$ 一致收敛 $f(x)$.

8.2 2019 年高等代数真题

一.(20 分) 证明以下问题

(1)(12 分) 若 $\partial \dfrac{f(x)}{(f(x),g(x))} > 0, \partial \dfrac{g(x)}{(f(x),g(x))} > 0$,证明:$u(x)f(x)+v(x)g(x) = (f(x)g(x))$，其中 $\partial u(x) < \partial \dfrac{g(x)}{(f(x),g(x))}, \partial v(x) < \dfrac{f(x)}{(f(x),g(x))}$.

(2)(8 分) 设 $f(x) = (x-1)(x-2)\cdots(x-(2n-1))+1$，$n$⊠⊠⊠⊠，证明：$f(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上不可约.

二.(18 分) 计算下列 n 阶行列式

(1) $\begin{vmatrix} b & \cdots & b & a \\ \vdots & & \iddots & \vdots \\ b & a & & \vdots \\ a & \cdots & \cdots & b \end{vmatrix}$　　(2) $\begin{vmatrix} x_1^2+1 & x_1x_2 & x_1x_3 & \cdots & x_1x_n \\ x_2x_1 & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ x_nx_1 & \cdots & \cdots & \cdots & x_n^2+1 \end{vmatrix}$.

三.(20 分) 设矩阵 A, B 可交换，试证：$r(A+B) \leq r(A)+r(B)-r(AB)$.

四.(15 分)

(1) 若 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 是 n 维 V 上一组基，A 是 $n\times s$ 的矩阵，且 $(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s) = (\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)A$，试证：$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s$ 生成的子空间 $L(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s)$ 维数等于 A 的秩.

(2) 若 A,B,C,D 为 n 阶矩阵, 且 $|A| \neq 0$, $AC = CA$, 试证: $\begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix} = |AD-CB|$.

五.(17 分) 设 n 阶矩阵 A，且 $A^2 = A$，试证：A 与对角阵 $C = \begin{bmatrix} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & & 0 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 0 \end{bmatrix}$ 相似.

六.(15 分)

证明：对于任意的 n 阶实对称矩阵 A，存在正交矩阵 T，使得 $T^TAT = T^{-1}AT$ 为对角矩阵.

七.(20 分) 证明：维(σV) + 维$(\sigma^{-1}(o)) = n$.

八.(25 分) 已知实二次型，有 $f(x_1,x_2,x_3) = t\left(x_1^2+x_2^2+x_3^2\right)+2x_1x_2+2x_1x_3-2x_2x_3$.

(1) 当 t 为何值，f 正定?

(2) 取 $t=1$，用可逆线性变换化二次型为标准型，并写出线性变换.

第 9 章 东南大学

9.1 2019 年数学分析真题

一、简答题，无需证明理由 (每题 5 分，共 20 分)

1. 设数列 (a_n) 无收敛子列，则有何结论.
2. 举出一个仅在一点连续，仅在一点可导的一元函数.
3. 描述二元函数可微，可偏导，方向可导之间的关系.
4. 叙述级数的莱布尼茨判别法.

二、计算题 (每题 8 分，共 80 分)

1. 计算极限：$\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{\sqrt[n]{n!}}{n}$
2. 计算极限：$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\int_0^x e^{t^2}\mathrm{d}t}{x^2\sin x}$
3. 计算

$$\iiint_{\Sigma} 3x^2+2y+z\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

其中 $\Sigma:(x-1)^2+(y-2)^2+z^2\le 1$.

4. 计算

$$\iint_{\Sigma}\frac{x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y\mathrm{d}x\mathrm{d}z+z\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}$$

其中 $\Sigma: x^2+2y^2+3z^2=1$ 的外侧.

5. 判断下列函数项级数的一致收敛性：

(1) $\sum\limits_{i=0}^{+\infty}(1-x)x^n, x\in[0,1]$

(2) $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}(1-x)^2x^n, x\in[0,1]$

6. 证明含参积分 $\int_0^{+\infty}\dfrac{\cos xy}{x}\mathrm{d}x, y\ge y_0>0$ 一致收敛.
7. 求由 $2x^2+2y^2+z^2+8yz-z-8=0$ 确定的隐函数 $z=z(x,y)$ 的极值.

8. 讨论

$$\iint_{\mathbb{R}^2}\frac{f(x,y)}{(1+x^2+y^2)^p}\mathbf{d}x\mathbf{d}y$$

的敛散性, 其中 $f(x,y)$ 在任意有限闭区域内有界, 且 $0<m\leq|f(x,y)|\leq M$.

9. 证明 $f(x)$ 的一致连续性，其中

$$f(x)=\begin{cases} x\left(2+\sin\dfrac{1}{x}\right), & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}$$

10. 求 $f(x)=\sum\limits_{k=0}^{n}x^k(1-x)^{2k}$ 的最值.

三、证明题 (每题 10 分，共 50 分)

1. 设非负数列 $\{a_n\}$ 单调递减.

(1) 若 $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}a_n$ 收敛, 证明 $\lim\limits_{n\to\infty}na_n=0$

(2) 若将单调性去掉，(1) 是否成立? 说明理由, 不存在则给出反例.

(3) 由 $\lim\limits_{n\to\infty}na_n=0$ 能否得到 $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}a_n$ 收敛?

2. 证明 Riemann 函数在 [0,1] 可积.

3. 设 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 可微，且有 $f(1)=2\int_0^{\frac{1}{2}}xf(x)\mathbf{d}x$. 证明：存在 $\xi\in(0,1)$，使得 $\xi f'(\xi)=-f(\xi)$.

4. 设 $f(x)$ 在 $(a,+\infty)$ 二阶可微, 且 $\lim\limits_{x\to a^+}f(x)$, $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ 均收敛且相同, 证明: 存在 $\xi\in(a,+\infty)$ 使得 $f''(\xi)=0$.

5. 用两种方法证明有限闭区间上的连续函数的零点存在定理.

9.2 2019 年高等代数真题

一.(20 分) 设 $f(x)=ax^2+bx+c\in\mathbb{P}[x]_3$，其中 $a,b,c\in\mathbb{P}$，令

$$V_k=\{f(x)\in\mathbb{P}[x]_3|f(k)=0\}$$

(1)证明：V_k 是 $\mathbb{P}[x]_3$ 的子空间.

(2)求 $V_{-1},V_1,V_{-1}\cap V_1,V_{-1}+V_1$ 的基与维数.

二.(10 分) 设二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=(x_1+x_2+x_3)(ax_1+bx_2+cx_3)$, a,b,c, 不全为 0, 讨论 a,b,c 的值与二次型的秩, 正负惯性指数的关系.

三.(20 分) (只写结论不用证明) 设矩阵 A 的特征多形式为 $\lambda^2(\lambda-2)^4$，且 $r(A)=5, r(A-2E)=4, r(A-2E)^2=3$，求

(1)A 的 $Jordan$ 标准型

(2)A 的最小多项式

(3)A 的初等因子

(4)A 的不变因子

(5)A^2 的 $Jordan$ 标准型

四.(20 分) 设矩阵 $A=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$，求正交阵 Q，使得 Q^TAQ 为对角阵.

五.(20 分) 设 A 为 $n\times n$ 阶矩阵, 若 $\alpha, A\alpha, A^2\alpha, \cdots, A^{n-1}\alpha$ 线性无关且 A 相似于对角阵, 证明：A 有 n 个特征值.

六.(20 分) 设 f 既是正交变换，也是对称变换，证明：

(1)f 在标准正交基下的矩阵为对称的正交阵.

(2)f 的特征值只能是 ±1, 且属于不同特征值的特征向量正交.

(3)若 f 不是数乘变换, 则 ±1 都是 f 的特征值, 且 $V_{-1}=V_1^{\perp}$，其中 V_1, V_{-1} 分别为 $1,-1$ 的特征子空间.

七.(20 分) 设多项式 $p(\lambda), q(\lambda)$, 对线性变换 f 有 $p(f)q(f)=\mathscr{O}$，设 V_1, V_2 分别为 $p(f), q(f)$，W_1, W_2 分别为 $p(f), q(f)$ 的像空间，证明：

(1)$V_1=W_2, V_2=W_1a$.

(2)$V=V_1\oplus V_2$.

八.(10 分) 设 $p(\lambda)$ 为多项式, $c(\lambda)$ 为线性变换 $\mathbf{f}$ 的特征多项式 $d(\lambda)=(c(\lambda), p(\lambda)), V_p, V_d$ 分别为 $p(f), d(f)$ 的核空间，证明：$V_p=V_d$.

九.(20 分) 设 A, B 为正定阵，$AX+XA=B$ 有唯一解 C, 证明：

(1)C 是对称阵.

(2)C 是正定阵.

十.(10 分) 设 A 为正定阵,α 为实列向量, 且有 $\left|A-\alpha\alpha'\right|=|A|$. 证明：$\alpha=0$.

第 10 章 上海交通大学

10.1 2019 年数学分析真题

一、判断下列命题的真伪，并简单地给出判断依据. (每小题 8 分，共 40 分)

1. 若数列 $\{a_n\}$ 收敛于 a，那么必存在自然数 N，使得 $n > N$ 时，$|a_n - a|$ 单调递减趋于零.
2. 若函数 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上一致连续，则 $f^2(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上也一致连续.
3. 在有限开区间 (a, b) 上无界的可微函数的导数也一定无界.
4. 设级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 和 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ 满足 $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = 1$，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛可以推出 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ 也收敛.
5. 若函数 $f(x, y)$ 在区域 D 上可全微分，且 $f_x'(x, y) = f_y'(x, y) = 0$，则 $f(x, y)$ 在 D 为常值函数。

二. 计算题 (每小题 10 分，共 50 分)

1. 计算极限
$$\lim_{x\to 0} \frac{\cos x - \sqrt[3]{\cos x}}{\tan(x^2)}$$
2. 求不定积分
$$\int \frac{\arcsin e^x}{e^x} \mathrm{d}x$$
3. 将 $f(x) = \arctan \dfrac{1-2x}{1+2x}$ 在 $x = 0$ 处展开为幂级数，并指明收敛域.
4. 计算二重积分
$$\iint_D \frac{(x+y)\ln\left(1+\frac{y}{x}\right)}{\sqrt{1-x-y}} \mathrm{d}x\mathrm{d}y$$
其中 D 为 $x = 0, y = 0, x + y = 1$ 所围成的区域.
5. 计算曲线积分
$$\iint_S xy\sqrt{1-x^2}\mathrm{d}y\mathrm{d}z + e^x \sin y \mathrm{d}x\mathrm{d}y$$
其中 S 为 $x^2 + z^2 = 1 \quad (0 \le y \le z)$ 的外侧.

三. 证明题 (每小题 10 分，共 60 分)

1. 设 a 为实数，$\lim\limits_{n\to\infty} (x_n - x_{n-1}) = a$，用 $\epsilon - N$ 语言证明 $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x_n}{n} = a$.

2. 设 $f(x)$ 是 $[a,b]$ 上的连续函数，试用实数系基本定理证明 $f(x)$ 是 $[a,b]$ 上的有界函数.

3. 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 连续，在 $(0,1)$ 可微，且 $f(0)=f(1)=0, f\left(\frac{1}{2}\right)=1$，证明：存在 $\xi \in (0,1)$ 使得 $f'(\xi)-3(f(\xi)-\xi)=1$.

4. 设 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$，且 $f(x)>0$，证明 $F(x)=\dfrac{\int_0^x tf(t)\mathrm{d}t}{\int_0^x f(t)\mathrm{d}t}$ 在 $(0,+\infty)$ 上为严格单调递增的函数，如果要使 $F(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上为严格单调递增的函数，试问应补充定义 $F(0)$ 为多少.

5. 设无穷积分 $\int_0^{+\infty} g(x)\mathrm{d}x$ 绝对收敛，记 $f(x)=\int_0^{+\infty} g(t)\sin(xt)\mathrm{d}t$，证明 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上一致收敛.

6. 设 $f(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{e^{-nx}}{1+n^2}$，证明：

(1) $f(x)$ 在定义域为在 $[0,+\infty)$.

(2) $f(X)$ 在 $[0,+\infty)$ 上是连续函数.

(3) $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上有连续的导函数.

10.2 2019 年高等代数真题

一.(20 分) 已知 $f(x)=(x-a_1)(x-a_2)\cdots(x-a_n)+t$. 其中 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 是两两互不相同的整数.

(1) 证明：当 $t=-1$ 时，$f(x)$ 在有理数域上不可约.

(2) 当 $t\neq -1$ 时，试讨论 $f(x)$ 在有理数域上是否可约？并说明理由.

二.(20 分) 设 $m<n$ 以及 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 为 m 个线性无关的 n 维向量. 证明：存在一个 n 元齐次线性方程组，使得 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 是它的一个基础解系.

三.(20 分) 设 B,C 分别是 $n\times k, n\times(n-k)$ 阶实矩阵，B',C' 分别是 B,C 的转置矩阵. 证明：

$$\begin{vmatrix} B'B & B'C \\ C'B & C'C \end{vmatrix} \leq |B'B|\,|C'C|$$

四.(15 分) 设 A,B 是数域 P 上的 n 阶方阵，$X=(x_1,x_2,\cdots,x_n)'$. 若齐次线性方程组 $AX=0$ 和 $BX=0$ 分别有 l,m 个线性无关的解向量. 证明：

(1) $ABX=0$ 中至少有 $maxl,m$ 个线性无关的解向量.

(2) 若 $l+m>n$，则 $(A+B)X=0$ 有非零解.

五.(15 分) 证明：n 阶复方阵 A 可对角化的充要条件是：对任意 n 维列向量 X，若 $(\lambda_0 E-A)^2 X=0$，则必有 $(\lambda_0 E-A) X=0$. 其中 E 是 n 阶单位矩阵，$\lambda\in\mathbb{C}$.

六.(15 分) 设 $\mathbb{R}^{n\times n}$ 是实数域上所有 n 阶方阵构成的线性空间，$\mathscr{A}$ 是该空间上的线性变换，且 $\mathscr{A}(M)=M^2, M\in\mathbb{R}^{n\times n}$.

(1) 求 $\mathscr{A}$ 特征值，特征向量和 **Jordan** 标准形.

(2) 证明：$\mathscr{A}$ 能分解为 n^2 个秩为 **1** 的幂等变换 $\mathscr{A}$ 的代数和，且当 $i\neq j$ 时，$\mathscr{A}_i\mathscr{A}_j=O$.

七.(15 分) 设 V 是复数域 $\mathbb{C}$ 上 n 维线性空间，$\mathscr{A}$ 是 V 的一个线性变换. 设 $\mathscr{A}$ 在 V 的某组基下的矩阵记为 A_C. 另一方面，$\mathscr{A}$ 关于向量加法以及实数的数乘构成实数域 $\mathbb{R}$ 上 $2n$ 维线性空间，记为 V_R，$\mathscr{A}$ 也为 V_R 的一个线性变换. 设 $\mathscr{A}$ 在 V_R 的某组基下的矩阵记为 A_R，证明：$|A_R|=|A_C|^2$.

八.(15 分) 证明：在复数域内任意 n 阶方阵均可表示成两个对称矩阵的乘积，且其中必有一个可逆矩阵.

九.(15 分) 设 $\mathbb{C}^{n\times n}$ 是复数域上 n 阶方阵构成的线性空间，给定自然数 $1,2,\dots,n$ 的一个排列 $i_1,i_2,\cdots,i_n$，在 $\mathbb{C}^{n\times n}$ 内定义线性变换 $\mathscr{A}$ 如下：

$$\mathscr{A}(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)=(\alpha_{i_1},\alpha_{i_2},\cdots,\alpha_{i_n})$$

其中 α_k 是 n 维列向量.$(1\le k\le n)$.

(1) 给出 $\mathscr{A}$ 的 n 个线性无关的特征向量.

(2) 若取排列 $2\quad 3\quad 4\quad n\quad 1$，证明：$\mathscr{A}$ 对应的矩阵可对角化.

第 11 章 同济大学

11.1 2019 年数学分析真题

一.(10 分) 设定义 f 是在定义在实数集上的函数

$$f(x)=\begin{cases} x^{\alpha}\sin\dfrac{1}{x}, x\neq 0\\ 0, x=0\end{cases}$$

说明 α 取何值时，(1) f 连续；(2) f 可导；(3) f 导函数连续.

二.(15 分) 设 $f(x)\in C[a,b]$，证明 f 在 $[a,b]$ 上一致连续等价于 $f(a+0), f(b-0)$ 存在.

三.(10 分) 证明导函数极限定理

四.(20 分) 若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛，记 $r_n=\sum\limits_{k=n}^{\infty}a_k$，试讨论 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{a_n}{r_n^p}$ 的敛散性。

五.(15 分) 若 $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n+\alpha x_n+1)=A, (\alpha>1)$，证明：$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\dfrac{A}{1+\alpha}$.

六.(15 分) 实数列 $\{x_n\}$ 满足 $0<x_1<\dfrac{\pi}{2}, x_{n+1}=\sin x_n$，证明：$\sum\limits_{n=1}^{\infty}x_n^p$ 在 $p>2$ 时收敛，在 $p\leq 2$ 发散.

七.(15 分) 设 $g(x)=\int_0^1\dfrac{x}{x^2+t^2}f(t)\mathrm{d}t$，其中 $f(t)$ 在 $[0,1]$ 上连续，证明：$g(x)$ 在 $[0,1]$ 连续 $\Leftrightarrow f(0)=0$.

八.(15 分) 设 f 在 $\mathbf{R}$ 可导，且 $f'(x)=A\leq+\infty$，证明 $f(x)$ 一致收敛 $\Leftrightarrow A<+\infty$.

九.(15 分) 若 f,g 在 $[a,b]$ 上可积，证明存在一个连续函数列 $\{f_n(x)\}$，使得下列等式成立

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n(x)g(x)\mathrm{d}x=\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x$$

十.(15 分) 设 $F(x,y)=f(x+y)-f(x)-f(y)$ 在 $\mathbb{R}^2$ 有界且 f 连续，令 $f_n(x)=\dfrac{f(nx)}{x}$，证明：$f_n(x)$ 一致收敛到一个线性函数 $y=ax$，且 $f_n(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上有界.

11.2 2019 年高等代数真题

一.(15 分) 证明：$f(x)=(x-a_1)(x-a_2)\cdots(x-a_n)-1$ 在有理数域不可约.

二.(15 分) 对 $a_1,a_2\cdots,a_{n+1}$，且 $f(a_i)=g(a_i)$，$i=1,2\cdots,n+1$，其中 f,g 均为 n 次多项式，试用线性方程组理论证明 $f(x)=g(x)$.

三.(15 分) 若 n 次方阵有 $A^{2018}=E_n$，证明：在复数域上存在 p, 使得 $P^{-1}AP$ 为对角阵.

四.(15 分) 若 $a_{ij}=\begin{cases}0,i=j\\1,i\neq j\end{cases}$，求 A^{-1}.

五.(15 分) 若 $A+A^T=E_n$，证明：A 是可逆的.

六.(15 分) 求 $\alpha_1\,\alpha_5$ 的秩，极大线性无关组，表示另外的向量.

七.(15 分) 若 A,B 是正定矩阵，证明：存在可逆阵使得 $P^{-1}AP$，$P^{-1}BP$ 均为对角阵.

八.(15 分) 若 $E^3-3E^2=2E$，试证：

(1)$V=Ker\,(E)\oplus \mathbf{Im}E$.

(2)E 在某基下为对角阵.

九.(15 分) 若 $g(A)=0$，且 $AJ=rJ$，试证：

(1) 求 $x-r|g\,(x)$.

(2) 若 J 可表示为 A 的多项式，则 $A-rE$ 的秩为 $n-1$.

十.(15 分) 若三阶矩阵，求不变因子初等因子，若尔当以及变成若尔当的过渡矩阵.

第 12 章 华东师范大学

12.1 2019 年数学分析真题

一、判断下列命题是否正确，若正确给出证明，若错误举出反例（每小题 5 分，共 30 分）

1. 如果函数 $f(x)$ 在有限区间 (a,b) 上连续且有界，则 $f(x)$ 在 (a,b) 上一致收敛.

2. 设 $f(x)$ 在 $[a,+\infty]$ 可导，$f(a)=f(+\infty)$，则存在 $\xi\in(a,+\infty)$，使得 $f'(\xi)=0$.

3. 设 $f(x)$ 为闭区间 $[a,b]$ 上不恒为 0 的连续函数，$D(x)$ 为 **Dirichlet** 函数，则 $f(x)D(x)$ 在 $[a,b]$ 上不可积.

4. 若 $\int_a^{+\infty} f(x)\mathbf{d}x$ 与 $\int_a^{+\infty} f'(x)\mathbf{d}x$ 均收敛，则 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$.

5. 设函数 $f(x)$ 在点 x_0 的某空心邻域内有定义. 如果对于任何严格单调收敛于 x_0 的数列 $\{x_n\}$ 都有 $\lim\limits_{n\to+\infty} f(x_n)$ 存在且相等, 则 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 存在.

6. 若函数列 $\{f_n(x)\},\{g_n(x)\}$ 在 **I** 上一致收敛, 则 $\{f_n(x)\},\{g_n(x)\}$ 在 **I** 上必一致收敛.

二. 求解下列各题（每小题 9 分，共 45 分）

1. 设 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{g(x)}{x}, & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}$ 且 $g(0)=g'(0)=0$，$g''(0)=2$，求 $f'(0)$

2. 求积分的值.

$$\int_0^{+\infty} e^{-x^2}\mathbf{d}x$$

3. 将函数 $f(x)=\mathbf{arctan}\,\dfrac{1-2x}{1+2x}$ 展成 x 的幂级数, 并求级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{(2n+1)}$ 的和.

4. 设 $u=x+y+z, S=\{(x,y,z)|x^2+y^2+z^2=1\}$，$\vec{n}$ 为球面 S 的外侧法向量. 求 $\dfrac{\partial u}{\partial\vec{\mathbf{n}}}$ 的表达式及 $\dfrac{\partial u}{\partial\vec{\mathbf{n}}}$ 在 S 上的最值.

5. 设 $P(x,y,z)=Q(x,y,z)=R(x,y,z)=f((x^2+y^2)z)$，$f$ 有连续导数，求极限

$$\lim_{t\to0^+}\frac{\iint_\Omega P(x,y,z)\mathbf{d}y\mathbf{d}z+Q(x,y,z)\mathbf{d}z\mathbf{d}x+R(x,y,z)\mathbf{d}x\mathbf{d}y}{t^4}$$

其中 Ω 为圆柱 $\{(x,y,z)|x^2+y^2\le t^2, z\in[0,1]\}$ 的外表面, 方向取外侧.

三、证明下列各题（第 1-5 题，每小题 13 分，第 6 题 10 分，共 75 分）

1. 若函数 $f(x)$ 在有限区间 **I** 上有定义. 证明：$f(x)$ 在 **I** 上一致连续的充要条件是 $f(x)$ 将 **Cauchy** 列映为 **Cauchy** 列.

2. 设 $f(x,y)=\begin{cases} y\arctan\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} & ,(x,y)\neq(0,0) \\ 0 & ,(x,y)=(0,0) \end{cases}$ 证明：$f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 点处连续，并讨论其偏导数的存在性及可微性.

3. 讨论广义积分 $\int_0^{+\infty} e^{-x}x^{\alpha-1}|\ln x|^n\mathrm{d}x\ (\alpha>0,n\in\mathbb{Z}_+)$ 的敛散性.

4. 若函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可微, $f(a)=0$, 存在实数 $A>0$, 使得 $\forall x\in[a,b], \left|f'(x)\right|\leq A\,|f(x)|$. 证明：$f(x)\equiv 0(x\in[a,b])$.

5. 已知数列 $a_n\geq 0,\quad S_n=\sum\limits_{k=1}^{n}a_k, n=1,2,\ldots$

   (1) 当级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛时. 证明：函数项级数 $\sum\limits_{i=1}^{\infty}a_ne^{-S_nx}$ 的收敛域为 R，对 $\forall a\in R$，$\sum\limits_{i=1}^{\infty}a_ne^{-S_nx}$ 在 $[a,+\infty)$ 上一致收敛域，在 $(-\infty,a]$ 上非一致收敛.

   (2) 当级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛时. 讨论 $\sum\limits_{i=1}^{\infty}a_ne^{-S_nx}$ 的收敛域，一致收敛域及非一致收敛域.

6. 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上二阶可导，$f(0)=f(1)=0$，$f(x)\neq 0(x\in(0,1))$ 且 $\int_0^1\left|\dfrac{f''(x)}{f(x)}\right|\mathrm{d}x$ 存在. 试证：

$$\int_0^1\left|\frac{f''(x)}{f(x)}\right|\mathrm{d}x\geq 4$$

12.2 2019 年高等代数真题

一.(15 分) 若 $m\times n$ 实矩阵 $A=(a_{ij})$ 以 a_{11} 为圆心逆时针旋转 $90°$ 得到矩阵 B.

(1) 求 B 的行数和列数.

(2) $rank(A)$ 与 $rank(B)$ 的关系, 并解释原因.

(3) 设 $m=n$，$|A|$ 与 $|B|$ 的关系？并证明.

二.(15 分) 当实数 λ 取何值时, 下列方程无解、有唯一解、有无穷多个解? 有解时, 求出所有解.

$$\begin{cases} \lambda x_1+x_2+x_3 & =1 \\ (\lambda^2+1)\,x_1+2\lambda x_2+(\lambda+1)x_3 & =\lambda+1 \\ x_1+x_2+\lambda x_3 & =1 \\ 2x_1+(\lambda+1)x_2+(\lambda+1)x_3 & =2 \end{cases}$$

三.(20 分) 已知矩阵 $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -2 & -3 & a \\ 3 & 3 & -4 \end{pmatrix}$ 的特征多项式有二重根,求 a 的值,并讨论可否对角化.

四.(20 分) 已知 **2019** 阶实对称矩阵 A 满足 $A^2 = 2019A$，证明：$E + A + \cdots + A^{2019}$ 为正定矩阵.

五.(20 分) 已知 $\mathscr{A} : V \to V$ 是有限维复线性空间 V 上的线性变换. 设 $v \in V$ 存在 $f(\lambda) \in \mathbf{C}[\lambda]$ 使得 $f(\mathscr{A})(v) = 0$ 则称 $f(\lambda)$ 为 $\mathscr{A}$ 对 v 的零化多项式.

(1) 证明：$\mathscr{A}$ 对 v 的非零零化多项式存在.

(2)$\mathscr{A}$ 对 v 的次数最低的首项系数为 **1** 的零化多项式称为极小多项式,记为 $m_{\mathscr{A},v}(\lambda)$. 证明: 零化多项式均能被 $m_{\mathscr{A},v}(\lambda)$ 整除.

(3) 记 $\mathscr{A}$ 的极小多项式为 $m_{\mathscr{A}}(\lambda)$，存在 $v \in V$ 使得 $m_{\mathscr{A},v}(\lambda) = m_{\mathscr{A}}(\lambda)$.

六.(20 分) 任意复二阶矩阵 A, B, C 满足

$$\left[[A, B]^2, C\right] = 0$$

其中 $[X, Y] = XY - YX$.

七.(20 分) 记 $V_n(n \geq 0)$ 为次数不大于 n 的关于 x, y 的实系数二元多项式生成的空间. 求 V_2 上线性变换

$$\mathscr{A} = 2\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y}$$

的 **Jordan** 标准型,并推广到一般情形.

八.(20 分) $GL_2(C)$ 为 **2** 阶可逆复矩阵集合,V 是迹为 **0** 的 **2** 阶复矩阵构成的复线性空间. 若 V 的一个线性子空间 W 满足：$\forall P \in GL_2(\mathbf{C})$ 与 $\forall A \in W$，总有 $P^{-1}AP$ 落在 W 中，成 W 为 $GL_2(C)$- 不变子空间. 求证:V 的 $GL_2(C)$- 不变子空间只有零空间和 V.

第 13 章 大连理工大学

13.1 2019 年数学分析真题

一、解答下列各题 (每小题 6 分，共 60 分)

1. 已知 $a_n=\sum_{k=1}^{n}\left(\sqrt{1+\frac{k}{n^2}}-1\right)$，求 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n$.

2. 构造一个收敛的正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty}supa_n$，使得 $\lim\limits_{n\to+\infty}na_n=+\infty$.

3. 证明 $\ln(1+x)>\frac{\arctan x}{1+x}\ (x>0)$

4. 已知当 $|x|\le 1$ 时，有 $\left|\sum_{k=1}^{n}a_k\sin kx\right|\le|\sin x|$，证明 $\left|\sum_{k=1}^{n}ka_k\right|\le 1$.

5. 若 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 点连续可微，$f(0,0)=\frac{\partial f}{\partial x}|_{(0,0)}=\frac{\partial f}{\partial y}|_{(0,0)}=0$，且 $g(x,y)$ 连续，求证：$f(x,y)$,$g(x,y)$ 在 $(0,0)$ 处处可微.

6. 若 $f(x)$ 连续可微，$f(x)$ 以 2π 为周期，$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos nx+b_n\sin nx$，求证:$a_n=o\left(\frac{1}{n}\right)$，$b_n=o\left(\frac{1}{n}\right)$.

7. 若 $f(x,y)=\frac{\sin x}{\cos y}$，求 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 点的三阶泰勒展开.

8. 求 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 与 $(x-1)^2+y^2\le 1$ 相交面的面积.

9. 已知 $\frac{\partial p}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}$，求证 $\forall(s,t)\in\mathbf{R}^2$，证明

$$\int_a^s P(x,t)\,dx+\int_b^t Q(a,y)dy=\int_a^s P(x,b)dx+\int_b^t Q(s,y)dy$$

二.(10 分) 若 $f(x)$ 连续，且 $f(x)$ 为周期函数，求证：$f(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上一致收敛.

三.(10 分) 若 $f(t)$ 是周期函数，求证

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}\int_0^x f(t)dt=\frac{1}{T}\int_0^T f(t)dt$$

四.(10 分) 若数列 (a_n) 单调递减趋于零，求证 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}$ 收敛.

五.(10 分) 求 $f(x,y)=ax+by+cz$ 在 $x^2+y^2+z^2=1$ 下的最大值与最小值.

六.(10 分) 求 $\int\limits_L (y^2-z^2)\,dx+(z^2-x^2)\,dy+(x^2-y^2)\,\mathrm{d}z$,其中 L 为沿着图像 $(1,0,0)\to(0,1,0)\to(0,0,1)\to(1,0,0)$ 的方向.

七.(10 分) 判断 $\int_0^{+\infty}\sin(xy^2)\arctan(xy)\mathrm{d}x$ 关于 $y>0$ 是否一致收敛，并说明理由.

八.(10 分) 已知 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=L$，求证：$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_nx^n$ 的定义域 $(-1,1)$，$\lim\limits_{x\to\infty}(1-x)f(x)=L$ 且 $f(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_nx^n$.

九.(10 分) 若 $h(s,t)$ 在 $I:[0,1]\times[0,1]$ 上连续，且 $I_n(s)=\int_0^{2\pi}h(t,s)\sin nt\mathrm{d}t$，求证：$\{I_n(s)\}$ 关于 s 一致收敛.

十.(10 分) 若 $f(x,y),g(x,y)$ 存在连续的一阶偏导数，且 $\frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{\partial g}{\partial y}-\frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial x}\neq 0$，求证:$\begin{cases} f(x,y)=0 \\ g(x,y)=0 \end{cases}$ 只有有限多个解.

第 14 章 电子科技大学

14.1 2019 年数学分析真题

一、填空题 (每题 5 分，共 25 分)

1. 计算 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1!+2!+\cdots+n!}{n!}$.
2. 已知 $x=t+q\sin x$，求 $x'(t)$.
3. 计算极限 $\lim\limits_{h\to 0}\int_a^b\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}\mathrm{d}x$.
4. 求级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{3^n+(-2)^n}{n}$ 收敛域.
5. 已知 $u=x^y\ln z$，求全微分 $\mathrm{d}z$.

二. 计算题 (每题 4 分，共 24 分)

1. 计算极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos(\sin x)-\cos x}{x^4}$.
2. 求积分 $\int_0^{\frac{\pi}{2}}e^x\cos^2 x\mathrm{d}x$.
3. 已知 $x+y-z=e^{-(x+y+z)}$，求 $\dfrac{\partial z}{\partial x},\dfrac{\partial z}{\partial y},\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}\dfrac{\partial^2 x}{\partial x\partial y}$.
4. 计算

$$I=\iint\limits_S\sin\sqrt{y^2+z^2}dydz+\sin\sqrt{z^2+x^2}dzdx+\sin\sqrt{x^2+y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

其中 S 为锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}\,(0\le z\le h)$ 上侧.

三. 证明题 (共 99 分)

1. (15 分) 若 $x_{n+1}=a+q\sin x_n, x_0=a, 0<q<1$，证明 x_n 极限存在.
2. (15 分) 若 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 连续，且 $|f'(x)|<1, |f''(x)|<1$, 证明 $|f'(x)|<\dfrac{5}{2}$.
3. (15 分) 已知 $a>1$，证明 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}x^a e^{-an}$，$x\in[0,+\infty)$ 一致收敛，其中 $x\ge 0$.
4. (18 分) 计算 $I=\iiint\limits_{\Omega}\sqrt{x^2+y^2+z^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$，其中$\Omega$为$x^2+y^2+z^2\le 4z$.

5. (16 分) 判断级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}+(-1)^n}$ 的敛散性.

6. (20 分) 证明广义积分

(1) $\int_0^{+\infty} \sin x^2 \mathrm{d}x$ 收敛.

(2) $\int_1^{+\infty} \frac{\sin x^2}{1+x^y} \mathrm{d}x$, $y \in [y_0, +\infty)$ 一致收敛.

第 15 章 武汉大学

15.1 2019 年数学分析真题

一. 计算极题 (30 分)

(1) 求极限 $\lim\limits_{x\to 0}(1+\sin x)^{\frac{1}{x}}$

(2) 已知 $f(x)=\ln\left(x-\sqrt{1+x^2}\right)$，求 $f(0)^{2k+1}$，其中 k 为自然数.

(3) 已知 $f(x,y)=x^y y^x$，求 $f(x,y)$ 的全微分.

二. 计算下面积分 (30 分)

(1) $\displaystyle\int_{-1}^{1}\frac{1+x^2}{1+x^4}dx$

(2) $\displaystyle\iiint_V\frac{dxdydz}{(1+x+y+z)^3}$，其中 $V=x+y+z\le 1,x,y,z\ge 0$.

(3) $\displaystyle\oint_L\frac{xdy-ydx}{x^2+y^2}$，其中 L 是不过原点的简单封闭曲线.

三判断题.(30 分)

(1) 判断 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sqrt[n]{n}-1\right)^2$ 的敛散性.

(2) 若 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}a_n\sin^n x$ 在 $[0,2\pi]$ 收敛，请问它是否一致收敛.

四. 证明题 (60 分)

(1) 若 $f(x)$ 连续可微，$f(0)$ 不为 0，其中 **Maclaurin** 级数（**Cauchy** 余项）

$$f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{f^{(2)}(0)}{2!}x^2+...+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+\frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{n!}(1-\theta)^n x^{n+1}$$

证明：$\lim\limits_{x\to 0}\theta=1-\sqrt[n]{\dfrac{1}{n+1}}$.

(2) 若 $\{a_n\}$ 单调递减，$a_n\to 0\,(n\to 0)$，证明：

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_n\text{收敛}\leftrightarrow\sum_{n=1}^{\infty}n\left(a_n-a_{n+1}\right)$$

收敛.

(3) 若 $f(x,y)$ 在 $\mathbb{R}^2$ 连续，存在单射 g：$\mathbb{R}\to\mathbb{R}^2$，使得 $f\times g=C$，其中 C 为常数.

第 16 章 华中科大 2012 年数学分析试题解析

华中科技大学 2012 年数学分析考研真题, 更侧重于数分下册计算题的考察, 以及多元函数等知识点, 难度非常一般, 主要还是基础知识要掌握牢固。

一.(15 分) 计算下列两小问

(a) 求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{\sin x}\right)$.

(b) 设$x_1=\sqrt{2}$，$x_{n+1}=\sqrt{2x_n}$，证明 $\{x_n\}$ 收敛且求极限.

✎ **解: (a)** 易知可得：

$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{\sin x}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x-x}{x^2\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{x-\frac{x^3}{6}+o\left(x^3\right)-x}{x^3}=-\frac{1}{6}$$

(b) 归纳法易证：$x_n=\sqrt[2^n]{2^{2^n-1}}$，显然有 $\sqrt[2^n]{2}=1$，因此 $\{x_n\}$ 收敛且极限为 **2.** □

二.(15 分) 求下列曲线在第一象限围成的图像的面积:

$$y=x^2,2y=x^2,xy=1,xy=2$$

✎ **解:** 设区域 $\Omega=\left\{(x,y)\,|x^2\le 2y\le 2x^2,1\le xy\le 2,x>0,y>0\right\}$, 那么在变换 $u=\frac{x^2}{y}$, $v=xy$ 下，区域 Ω 被一一对应为：

$$\Omega_1=\{(u,v)\,|1\le u\le 2,1\le v\le 2\}$$

此时有 $x=\sqrt[3]{uv}$, $y=\sqrt[3]{\frac{v^2}{u}}$, 于是有：

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}=\begin{vmatrix}\frac{1}{3}\sqrt[3]{\frac{v}{u^2}} & \frac{1}{3}\sqrt[3]{\frac{u}{v^2}}\\ -\frac{1}{3}\sqrt[3]{\frac{v^2}{u^4}} & \frac{2}{3}\sqrt[3]{\frac{1}{uv}}\end{vmatrix}=\frac{1}{3u}$$

所以就有所求面积为：

$$\iint_{\Omega}dxdy=\iint_{\Omega_1}\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}dudv=\iint_{\Omega_1}\frac{1}{3u}dudv=\frac{1}{3}\int_1^2dv\int_1^2\frac{1}{u}du=\frac{\ln 2}{3}$$

□

三.(15 分) 求下列圆环 L 的质量: 已知圆环为

$$L:\begin{cases} x^2+y^2+z^2=1 \\ x+y+z=0 \end{cases}$$

其线密度为 $\rho(x,y,z)=(x-1)^2+(y-1)^2+(z-1)^2$

✎ **解:** 注意到在 L 上时，则有：

$$\rho(x,y,z)=(x-1)^2+(y-1)^2+(z-1)^2=\left(x^2+y^2+z^2\right)-2(x+y+z)+3=4$$

因此所求圆环 L 的质量为：

$$\int_L \rho(x,y,z)\,ds=4\int_L ds=4S$$

其中 S 为圆环的长度，由题易知，此圆环为单位圆上的大圆，其周长为 2π ，综上所述，圆环 L 的质量为 8π. □

四.(15 分) 展开 $f(x)=|\cos x|$ 为 $[-\pi,\pi]$ 上的 **Fourier** 级数.

✎ **解:** 由 $f(x)$ 为偶函数，即 $b_n=0\,(n=1,2,\cdots)$，且

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nx\,dx=\begin{cases} -\dfrac{4(-1)^{-\frac{n}{2}}}{\pi\left(n^2-1\right)}, n\text{为偶数} \\ 0, n\text{为奇数} \end{cases}$$

所以就有 $f(x)=|\cos x|$ 为 $[-\pi,\pi]$ 上的傅里叶级数为：

$$f(x)=\frac{2}{\pi}-\frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{4k^2-1}\cos 2kx$$

□

五.(15 分) 求幂级数:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n+1}{n!}x^n$$

的收敛域与和函数.

✎ **解:** 令 $a_n=\dfrac{n+1}{n!}x^n$ ，就有：

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+2)\,n!}{(n+1)(n+1)!}=\lim_{n\to\infty}\frac{n+2}{(n+1)^2}=0$$

因此该幂级数的收敛域为 R.

又有：

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n+1}{n!}x^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{(n-1)!}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}+x\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n!}=(1+x)e^x$$

综上所述幂级数的收敛域为 R 及和函数为 $(1+x)e^x$. □

六.(15 分) 已知 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 为发散的正项级数，S_n 为其部分和，用 **Cauchy** 收敛原理证明 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{a_n}{S_n}$ 发散.

☞ **证明:** 这个题我们可以逆向思考，只需要证明：

对任意正整数 N，都存在整数 $m > n > N$ 使得 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{a_n}{S_n} > \dfrac{1}{2}$，即发散.

首先我们先取 $n = N + 1$，且这里 S_n 是递增，所以此时有：

$$\sum_{k=n}^{m} \frac{a_n}{S_n} > \sum_{k=n}^{m} \frac{a_n}{S_m} = \frac{S_m - S_N}{S_m} = 1 - \frac{S_N}{S_m}$$

由于 S_n 递增且趋于正无穷，所以对于给定的 N 必然存在足够大的正整数 m，使得 $S_m > 2S_N$ ，此时有：

$$\sum_{k=n}^{m} \frac{a_n}{S_n} > 1 - \frac{S_N}{S_m} > \frac{S_N}{2S_N} = \frac{1}{2}$$

□

七.(15 分) 已知 $f(x)$ 在 $[0,\infty]$ 上连续，$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ 存在且有限，证明 $f(x)$ 在 $[0,\infty)$ 上有界.

☞ **证明:** 设 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = A$，则存在正整数 N，使得对于任意 $x > N$，就有 $|f(x) - A| < 1$. 于是在 $(N, +\infty)$ 上有 $f(x)| < A + 1$. 由于 $f(x)$ 在 $[0, N]$ 上连续，因此存在 $M > 0$ 使得在 $[0, N]$ 上 $f(x) < M$ 于是取 $L = \max\{|A| + 1, M\}$，则有 $f(x)$ 上有 $f(x)| < L$ 因此 $f(x)$ 在 $[0,\infty)$ 上有界. □

八.(15 分) 已知反常积分 $\int_0^{+\infty} xf(x)\,dx$ ，证明含参变量反常积分：

$$I(y) = \int_0^{+\infty} x^y f(x)\,dx$$

在 $[0, 1]$ 上一致收敛.

☞ **证明:** 注意到：

$$I(y) = \int_0^{+\infty} x^y f(x)\,dx = \int_0^{+\infty} xf(x) \cdot x^{y-1} dx$$

因为反常积分 $\int_0^{+\infty} xf(x)\,dx$ 收敛且与 y 无关，所以 $\int_0^{+\infty} x^y f(x)\,dx$ 关于 y 在 $[0, 1]$ 上一致收敛. 由于 x^{y-1} 对于固定的 $y \in [0, 1]$ 都单调，且 $x \in [1,\infty)$ 时，满足 $|x^{y-1}| \le 1$，即一致有界. 根据 **Abel** 判别法可知 $I(y)$ 在 $[0, 1]$ 上一致收敛. □

九.(15 分) 已知 Ω 为三维空间中的有界区域，Ω 的边界为分片光滑的曲面，n 为外法向量，$u(x,y,z)$ 在 Ω 上二阶连续可偏导，求证：

$$\iiint\limits_{\Omega}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right)dxdydz=\iint_{\partial\Omega}\frac{\partial u}{\partial n}dS$$

☞ **证明:** 设 $\vec{n}=(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)$，于是有：

$$\begin{aligned}\iint_{\partial\Omega}\frac{\partial u}{\partial n}dS&=\iint_{\partial\Omega}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial u}{\partial y}\cos\beta+\frac{\partial u}{\partial z}\cos\gamma\right)dS\\&=\iint_{\partial\Omega}\frac{\partial u}{\partial x}dydz+\frac{\partial u}{\partial y}dxdz+\frac{\partial u}{\partial z}dxdy\\&=\iiint\limits_{\Omega}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right)dxdydz\end{aligned}$$

□

十.(15 分) 已知 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上二阶连续可导，证明：

$$\max_{x\in[0,1]}|f'(x)|\le|f(1)-f(0)|+\int_0^1 f''(x)\,dx$$

☞ **证明:** 因为 $f'(x)$ 连续，所以 $\max\limits_{x\in[0,1]}|f'(x)$ 可取到.

设 $f(\xi)=\max\limits_{x\in[0,1]}|f'(x)|$，由拉格朗日中值定理得：

$$|f(1)-f(0)|=|\frac{f(1)-f(0)}{1-0}|=f'(u)\text{ 其中}u\in(0,1)$$

又由

$$\int_0^1\left|f''(x)\right|dx\ge\int_\xi^u|f''(x)|dx\ge\left|\int_\xi^u f''(x)\,dx\right|=\left|f'(u)-f'(\xi)\right|$$

所以就有：

$$|f(1)-f(0)+\int_0^1\left|f''(x)\right|dx\ge\left|f'(u)\right|+\left|f'(u)-f'(\xi)\right|\ge f(\xi)=\max_{x\in[0,1]}|f'(x)|$$

□

第 17 章 武汉大学 2018 年数学分析试题解析

上一期更文了华科真题，当然也就少不了武大，形成对比很显然武大的真题还是有一定的难度。尤其在本张真题中，难度很高，以至于武汉大学在 **2018** 年初试线定为“数分高代总分高于 **170**，单科线高于 **57** 分”，并招收了部分调剂生，此外武大的高代是考”**873** 线性代数”。话说多说，直接上题刚吧。

一.(20 分) 一、计算极限：

1. $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=n^2}^{(n+1)^2}\frac{1}{\sqrt{k}}$

2. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\int_0^{\pi}\sin^n x\cos^6 x\mathrm{d}x}{\int_0^{\pi}\sin^n x\mathrm{d}x}$

3. 已知 $x_{n+1}=\ln(1+x_n)$，且 $x_1=0$，求 $\lim\limits_{n\to\infty}nx_n$.

✎ **解: 1.** 放缩可得：

$$2\left(\sqrt{n+1}-1\right)<\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{k}}<2\sqrt{n}\Rightarrow\frac{2n+2}{n+1}<\sum_{k=n^2}^{(n+1)^2}\frac{1}{\sqrt{k}}<\frac{2n+2}{n}$$

所以由两边夹定理得：$\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=n^2}^{(n+1)^2}\frac{1}{\sqrt{k}}=2$

2. 易知

$$\int_0^{\pi}\sin^n x\cos^6 x\mathrm{d}x\le\int_0^{\pi}\sin^n x\cos^2 x\mathrm{d}x=\frac{1}{n+2}\int_0^{\pi}\sin^n x\mathrm{d}x$$

即可得

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\int_0^{\pi}\sin^n x\cos^6 x\mathrm{d}x}{\int_0^{\pi}\sin^n x\mathrm{d}x}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+2}=0$$

3. 由于 $x_{n+1}=\ln(1+x_n)<x_n$，且 $x_n>0$，故 x_n 收敛。然后两边取极限得，$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=0$. 即

$$\lim_{n\to\infty}nx_n=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{\frac{1}{x_n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)-n}{\frac{1}{x_{n+1}}-\frac{1}{x_n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{x\ln(1+x)}{x-\ln(1+x)}=2$$

□

二.(18 分) 二、设 $f(x)$，$f_1(x)$ 在 $[a,b]$ 区间上连续，$f_{n+1}(x)=f(x)+\int_a^x\sin\{f_n(t)\}dt$，证明：$\{f_n\}$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛.

☞ **证明:** 我们可取 $M=\max\limits_{x\in[a,b]}\{|f(x)|,1\}$，易知

$$\begin{aligned}|f_2(x)|=\left|f(x)+\int_a^x\sin\{f_1(t)\}dt\right|&\le|f_1(x)|+\left|\int_a^x\sin\{f_1(t)\}dt\right|\\&\le M+M\int_a^x dt=M+M(x-a)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Rightarrow|f_{n+1}(x)|&\le M+M(x-a)+M\frac{(x-a)^2}{2!}+\cdots+M\frac{(x-a)^n}{n!}\\&=\sum_{k=0}^n M\frac{(x-a)^k}{k!}\le\sum_{k=0}^n M\frac{(b-a)^k}{k!}\end{aligned}$$

所以可得 $\{f_n\}$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛 Me^{b-a}. □

三.(20 分) 三、设

$$f(x)=\begin{cases}e^{-\frac{1}{x^2}} & x\ne0\\0 & x=0\end{cases}$$

证明：$f(x)$ 在 $x=0$ 处任意阶导数数存在.

☞ **证明:** 此题利用数学归纳法，可证 $\forall n\in Z^+,f^{(n)}(x)=0$.

当 $n=1$ 时，则有

$$f'(0)=\lim_{x\to0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to0}\frac{e^{-\frac{1}{x^2}}}{x}=0$$

当 $n\ge2$ 时，设 $f^{(n)}(x)=0$, 有

$$f^{(n+1)}(0)=\lim_{x\to0}\frac{f^{(n)}(x)-f^{(n)}(0)}{x-0}=0$$

即证. □

四.(15 分) 四、已知 $(x_1,x_2,x_3)\in R^3$，其中 $u=\dfrac{1}{|x|}$，$|x|=\sqrt{x_1^2+x_2^2+x_3^2}$，计算:

$$\oiint\limits_S\frac{\partial^2u}{\partial x_i\partial y_j}dS,i,j=1,2,3$$

其中 $S:x_1^2+x_2^2+x_3^2=R^2$

✎ **解:** 当 $i=j$ 时，可由对称性知

$$\oiint\limits_S\frac{\partial^2u}{\partial x_i\partial y_j}dS=\frac{1}{3}\oiint\limits_S\left(\frac{\partial^2u}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2u}{\partial x_2^2}+\frac{\partial^2u}{\partial x_3^2}\right)dS$$

且 $\dfrac{\partial^2u}{\partial x_1^2}+\dfrac{\partial^2u}{\partial x_2^2}+\dfrac{\partial^2u}{\partial x_3^2}=0$，即 $\oiint\limits_S\dfrac{\partial^2u}{\partial x_i\partial y_j}dS=0$.

当 $i\ne j$ 时，可由被积函数与曲面的对称性知

$$\oiint\limits_S\frac{\partial^2u}{\partial x_i\partial y_j}dS=\frac{1}{3}\oiint\limits_S\left(\frac{\partial^2u}{\partial x_1\partial x_2}+\frac{\partial^2u}{\partial x_2\partial x_3}+\frac{\partial^2u}{\partial x_1\partial x_3}\right)dS=\oiint\limits_S\left(\frac{x_1x_2+x_2x_3+x_1x_3}{R^5}\right)dS=0$$

□

五.(17 分) 五、讨论求解方程 $f(x)=0$ 的牛顿切线法.

1. 推导牛顿切线法的迭代公式;

2. 在适当条件下，证明牛顿切线法收敛.

✎ **解: 1.** 假设 $f(x)$ 零点为 $x=x_0$，然后用 x_1 代替 x_0，重复这个过程，不断迭代即可

$$y-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0)$$

$$\Rightarrow 0-f(x_0)=f'(x_0)(x_1-x_0)\Rightarrow x_1=x_0-\frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$

所以所求近似值为 $x_2=x_1-\dfrac{f(x_1)}{f'(x_1)}$，因此所得 **Newton** 迭代公式

$$x_{n+1}=x_n-\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

2. 适当条件下：$f(x)$ 在 $[a,b]$ 上具有二阶连续导数，且满足 **(1)** $f(a)f(b)<0$，**(2)** $f'(x)$，$f''(x)$ 在 (a,b) 内保号。证明：因为依据 **(1)** 可知有解，依据 **(2)** 保号性可知 $f(x)$ 的解唯一且保持凸性，从而 $x_(n+1)$ 比 x_n 更靠近 x_0，所以 x_n 是单调有界数列，也必定收敛，即证。 □

六.(15 分) 六、设 $f(x)$ 连续, 求极限

$$\lim_{n\to\infty}\left(nA-\sum_{k=1}^{n}f\left(\frac{k}{n}\right)\right)=B$$

存在时，A 和 B 的值.

✎ **解:** 首先我得说明下，这个题的出现是在第八届全国大学生数学竞赛 (非数类) 第四大题，考研是在竞赛之后，所以有参加过此次竞赛的同学，基本对于此题都是秒，因此鼓励同学们参与数学竞赛，尤其对于报考 **34** 所自主划线院校的同学，因为考研与竞赛题难度完全相当！

此题中若要极限存在，则 $A=\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$，所以就有

$$\begin{aligned}
B=\lim_{n\to\infty}\left(nA-\sum_{k=1}^{n}f\left(\frac{k}{n}\right)\right)&=\lim_{n\to\infty}\left(n\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x-\sum_{k=1}^{n}f\left(\frac{k}{n}\right)\right)\\
&=\lim_{n\to\infty}n\left(\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x-\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}f\left(\frac{k}{n}\right)\right)\\
&=\lim_{n\to\infty}n\sum_{k=1}^{n}\int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}}\left(f(x)-f\left(\frac{k}{n}\right)\right)\mathrm{d}x\\
&=\lim_{n\to\infty}n\sum_{k=1}^{n}f'(\xi_k)\int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}}\left(x-\frac{k}{n}\right)\mathrm{d}x\\
&=-\frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}f'(\xi_k)\frac{1}{n}\\
&=-\frac{1}{2}\int_0^1 f'(x)\,\mathrm{d}x\\
&=\frac{f(0)-f(1)}{2}
\end{aligned}$$

□

七.(20 分) 七、设 $u_i = u_i(x_1, x_2), i = 1, 2$ 且关于每个变量均为周期 **1** 的连续可微函数, 求

$$\iint\limits_{0\le x_1,x_2\le 1} \det\left(\delta_{ij} + \frac{\partial u_i}{\partial x_j}\right) dx_1 dx_2$$

其中 $\det\left(\delta_{ij} + \frac{\partial u_i}{\partial x_j}\right)$ 是映射 $x \to (x_1 + u_1, x_2 + u_2)$ 的雅克比行列式.

✎ **解:** 易知

$$\begin{aligned}
&\iint\limits_{0\le x_1,x_2\le 1} \det\left(\delta_{ij} + \frac{\partial u_i}{\partial x_j}\right) dx_1 dx_2 \\
&= \iint\limits_{0\le x_1,x_2\le 1} \left(1 + \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \frac{\partial u_1}{\partial x_1}\frac{\partial u_2}{\partial x_2} - \frac{\partial u_1}{\partial x_2}\frac{\partial u_2}{\partial x_1}\right) dx_1 dx_2 \\
&= 1 + \int_0^1 u_1(1, x_2) - u_1(0, x_2)\, dx_2 + \int_0^1 u_2(x_1, 0) - u_1(x_1, 0)\, dx_1 \\
&+ \int_0^1 u_1(1, x_2)\, u_{2x_2}(1, x_2) - u_1(0, x_2)\, u_{2x_2}(0, x_2) dx_2 \\
&+ \int_0^1 u_1(x_1, 1)\, u_{2x_1}(x_1, 1) - u_1(x_1, 0)\, u_{2x_1}(x_1, 0) dx_1 \\
&= 0
\end{aligned}$$

□

八.(25 分) 八、设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上 **Riemann** 可积，$\varphi(x)$ 是周期为 **T** 的连续函数.

1. 证明存在阶梯函数使得 $g_\varepsilon(x)$ 使得

$$\int_a^b |f(x) - g_\varepsilon(x)|\, dx < \frac{\varepsilon}{2}$$

2. 计算

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b \varphi(nx) dx$$

3. 证明

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f(x)\varphi(nx) dx = \frac{1}{T}\int_0^T \varphi(x) \int_a^b f(x)\, dx$$

4. 计算

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\ln n} \int_0^T \frac{\varphi(nx)}{x} dx，其中函数\frac{\varphi(nx)}{x}$$

☞ **证明:** 请读者自行证明，在裴礼文数分中都能找到证明过程，可参考. □

第 18 章 中南大学 2010 年数学分析试题解析

一.(10 分) 计算极限

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{n^2+n}}\right)$$

✎ **解:** 注意到

$$\frac{1}{\sqrt{n^2+n}}\le\frac{1}{\sqrt{n^2+k}}\le\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}\,(k=1,2,\cdots,n)$$

因此有

$$\frac{n}{\sqrt{n^2+n}}\le\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{n^2+k}}\le\frac{n}{\sqrt{n^2+1}}$$

由于

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt{n^2+n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt{n^2+1}}=1$$

故由夹逼定理就得到

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{n^2+n}}\right)=1$$

□

二.(10 分) 设 $f(x)$ 具有二阶导数，在 $x=0$ 的某个去心领域内 $f(x)\neq 0$，且 $\lim\limits_{x\to0}\frac{f(x)}{x}=0, f''(0)=4$，求

$$\lim_{x\to0}\left(1+\frac{f(x)}{x}\right)^{\frac{1}{x}}$$

✎ **解:** 这里我们可以利用 **L'Hospital** 法则

$$\lim_{x\to0}\left(1+\frac{f(x)}{x}\right)^{\frac{1}{x}}=e^{\lim\limits_{x\to0}\frac{1}{x}\ln(1+\frac{f(x)}{x})}=e^{\lim\limits_{x\to0}\frac{\frac{f'(x)}{x}-\frac{f(x)}{x^2}}{1+\frac{f(x)}{x}}}$$

由 $\lim\limits_{x\to0}\frac{f(x)}{x}=0$ 及 $f(x)$ 的连续性知 $f(0)=0$，因此

$$f'(0)=\lim_{x\to0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{x}=0$$

由导数定义，

$$f''(0)=\lim_{x\to0}\frac{f'(x)-f'(0)}{x-0}=\lim_{x\to0}\frac{f'(x)}{x}$$

由 **L'Hospital** 法则

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{f'(x)}{2x}=\frac{f''(0)}{2}$$

因此，

$$\lim_{x\to 0}\left(1+\frac{f(x)}{x}\right)^{\frac{1}{x}}=e^{\frac{f''(0)}{2}}=e^2$$

□

三.(10 分) 求曲面 $x=\dfrac{y^2}{2}+2z^2$ 上平行于 $2x+2y-4z+1=0$ 的切平面方程，并求切点处的法线方程

✎ **解:** 平行于 $2x+2y-4z+1=0$ 的平面族为 $2x+2y-4z+\lambda=0(\lambda\neq 0)$ 联立平面族方程跟椭圆抛物面方程，有

$$\begin{cases} 2x=\dfrac{y^2}{2}+2z^2 \\ (y+1)^2+4(z-\dfrac{1}{2})^2+\lambda=2 \end{cases}$$

当 $\lambda>2$ 时曲线无交点，当 $\lambda<2$ 时曲线有无穷多个交点，当 $\lambda=2$ 时，有唯一交点因此，切平面为

$$x+y-2z+1=0$$

切点为 $(\dfrac{1}{2},-1,0)$, 切平面为

$$2x+2y-4z+1=0$$

□

四.(10 分) 设

$$f(x,y)=\begin{cases} x^2\,\mathbf{arctan}\,\dfrac{y}{x}-y^2\,\mathbf{arctan}\,\dfrac{x}{y} & xy\neq 0 \\ 0 & xy=0 \end{cases}$$

当 $xy\equiv 0$ 时，求 $f''_{xy}(x,y)$

✎ **解:** 当 $x_0y_0\neq 0$ 时

$$f'_x(x_0,y_0)=2x_0\,\mathbf{arctan}\,\frac{y_0}{x_0}-y_0$$

当 $x_0=0,y_0\neq 0$ 时，

$$f'_x(x_0,y_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x,y_0)-f(x_0,y_0)}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}\frac{x^2\,\mathbf{arctan}\,\frac{y_0}{x}-y_0^2\,\mathbf{arctan}\,\frac{x}{y_0}}{x}=-y_0$$

当 $x_0\neq 0,y_0=0$ 时，

$$f'_x(x_0,y_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x,y_0)-f(x_0,y_0)}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}\frac{0-0}{x-x_0}=0$$

当 $x_0=y_0=0$ 时，

$$f'_x(x_0,y_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x,y_0)-f(x_0,y_0)}{x-x_0}\lim_{x\to x_0}\frac{0-0}{x-x_0}=0$$

那么综合有

$$f'_x(x,y)=\begin{cases}=2x_0\,\mathbf{arctan}\,\frac{y_0}{x_0}-y_0 & xy\neq 0\\ -y & xy=0\end{cases}$$

最后，当 $x_0y_0=0$ 时，

$$f''_{xy}(x_0,y_0)=\lim_{y\to y_0}\frac{f'_x(x_0,y)-f'_x(x_0,y_0)}{y-y_0}=\lim_{y\to y_0}\frac{-y+y_0}{y-y_0}=-1$$

也就是，当 $xy\equiv 0$ 时，$f''_{xy}(x,y)=-1$

□

五.(10 分) 计算曲面积分

$$\oiint_S(\frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{3}+\frac{z^2}{4})dS$$

其中 S 是球面 $x^2+y^2+z^2=a^2$。

✎ **解:** 由对称性，

$$\oiint_S x^2dS=\oiint_S y^2dS=\oiint_S z^2dS=\frac{a^2}{3}S=\frac{4\pi a^4}{3}$$

因此，

$$\oiint_S(\frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{3}+\frac{z^2}{4})dS=(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4})\frac{4\pi a^4}{3}=\frac{13a^4\pi}{9}$$

□

六.(10 分) 计算

$$I=\oiint_\Sigma y(x-z)dydz+x^2dzdx+(y^2+xz)dxdy$$

其中 Σ 是边长为 a 的正立方体的表面，并取外侧.

✎ **解:** 由高斯定理，

$$I=\iiint_V(x+z)dxdydz=2\iiint_V xdxdydz=0$$

其中 V 为 Σ 包含的内部，后两个等号成立都是利用了 V 的对称性. □

七.（20 分）

设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，且 $\min\limits_{x\in[a,b]}f(x)=1$，证明

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\int_a^b\frac{dx}{[f(x)]^n}}=1$$

☞ **证明:** 由 $f(x)\geq 1$ 可得

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{\int_a^b\frac{dx}{[f(x)]^n}}\leq\overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{\int_a^b dx}=\overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{b-a}=1$$

然后由 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，最小值为 1 知存在 $c\in[a,b]$ 使得 $f(c)=1$，那么，$\forall\varepsilon>0$ 存在 $\delta>0$ 使得 $\forall x\in(x-2\delta,x+2\delta)$ 有 $f(x)<1+\varepsilon$. 令 $[c,d]=[x-\delta,x+\delta]\cap[a,b]\subset[a,b]$ 则 $\forall x\in[c,d]$ 有 $f(x)\le 1+\varepsilon$，那么

$$\varliminf_{n\to\infty}\sqrt[n]{\int_a^b\frac{dx}{[f(x)]^n}}\ge\varliminf_{n\to\infty}\sqrt[n]{\int_c^d\frac{dx}{[f(x)]^n}}\ge\varliminf_{n\to\infty}\int_c^d\frac{1}{(1+\varepsilon)^n}dx=\varliminf_{n\to\infty}\sqrt[n]{d-c}(1+\varepsilon)=1+\varepsilon$$

由 ε 的任意性

$$\varliminf_{n\to\infty}\sqrt[n]{\int_a^b\frac{dx}{[f(x)]^n}}\ge 1$$

则

$$1\le\varliminf_{n\to\infty}\sqrt[n]{\int_a^b\frac{dx}{[f(x)]^n}}\le\varlimsup_{n\to\infty}\sqrt[n]{\int_a^b\frac{dx}{[f(x)]^n}}\le 1$$

因此极限存在，且

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\int_a^b\frac{dx}{[f(x)]^n}}=\varliminf_{n\to\infty}\sqrt[n]{\int_a^b\frac{dx}{[f(x)]^n}}=\varlimsup_{n\to\infty}\sqrt[n]{\int_a^b\frac{dx}{[f(x)]^n}}=1$$

□

八.(20 分)

设 $\hat{D}$ 是由 $x^2+y^2=1$ 所围成的闭区域，求函数 $f(x,y)=x^2+y^2-ax(a>0)$ 在 $\hat{D}$ 上的最小值和最大值

✎ **解:** 令 $x=r\cos\theta, y=r\sin\theta(0\le r\le 1, 0\le\theta<2\pi)$, 则

$$z=f(x,y)=r-ar\cos\theta=r(1-a\cos\theta)$$

又因为 $1-a\cos\theta\in[1-a,1+a]$, 因此 $f(x,y)$ 在 $(-1,0)$ 取得最大值 $1+a$，在 **(1,0)** 处取得最小值 $1-a$。 □

九.（20 分）

已知 $f(x)$ 二阶可导，且 $f''(x)\le 0$, 试证对任意的三个正数 x_1,x_2,x_3, 有

$$f\left(\frac{x_1+x_2+x_3}{3}\right)\ge\frac{1}{3}[f(x_1)+f(x_2)+f(x_3)],$$

并由此证明

$$\frac{3}{\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\frac{1}{x_3}}\le\sqrt[3]{x_1x_2x_3}\le\frac{x_1+x_2+x_3}{3}$$

☞ **证明:** 首先先证明 $\forall x_1,x_2>0$, 有

$$\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}\le f(\frac{x_1+x_2}{2})$$

事实上，由泰勒定理

$$f(x_1)=f(\frac{x_1+x_2}{2})+f'(\frac{x_1+x_2}{2})(x_1-\frac{x_1+x_2}{2})+\frac{1}{2}f''(\zeta_1)(x_1-\frac{x_1+x_2}{2})^2$$

$$f(x_2)=f(\frac{x_1+x_2}{2})+f'(\frac{x_1+x_2}{2})(x_2-\frac{x_1+x_2}{2})+\frac{1}{2}f''(\zeta_2)(x_2-\frac{x_1+x_2}{2})^2$$

其中 ζ_1,ζ_2 介于 x_1,x_2 之间, 由 $f''(x)\le 0$，得

$$\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}=f(\frac{x_1+x_2}{2})+\frac{f''(\zeta_1)+f''(\zeta_2)}{2}(x_1-\frac{x_1+x_2}{2})^2\le f(\frac{x_1+x_2}{2})$$

然后再证明 $\forall x_1,x_2,x_3,x_4>0$,

$$\frac{f(x_1)+f(x_2)+f(x_3)+f(x_4)}{4}\le f(\frac{x_1+x_2+x_3+x_4}{4})$$

事实上，就有

$$\frac{f(x_1)+f(x_2)+f(x_3)+f(x_4)}{4}\le\frac{f(\frac{x_1+x_2}{2})+f(\frac{x_3+x_4}{2})}{2}\le f(\frac{x_1+x_2+x_3+x_4}{4})$$

现在证明原命题，为此记 $x_4=\dfrac{x_1+x_2+x_3}{3}$, 由 2，有

$$f(x_4)=f(\frac{x_1+x_2+x_3}{3})=f(\frac{x_1+x_2+x_3+x_4}{4})\ge\frac{f(x_1)+f(x_2)+f(x_3)+f(x_4)}{4}$$

移项有

$$f(x_4)=f(\frac{x_1+x_2+x_3}{3})\le\frac{f(x_1)+f(x_2)+f(x_3)}{3}$$

在 $(0,\infty)$ 上定义函数 $f(x)=\ln x$ 显然 $f''(x)=-\dfrac{1}{x^2}<0$ 由上原命题，有

$$\ln\left(\frac{x_1+x_2+x_3}{3}\right)\ge\frac{\ln x_1+\ln x_2+\ln x_3}{3}$$

整理即有

$$f(\frac{x_1+x_2+x_3}{3})\ge\sqrt[3]{x_1x_2x_3}$$

最后利用上式中用 $\dfrac{1}{x_1},\dfrac{1}{x_2},\dfrac{1}{x_3}$ 代替 x_1,x_2,x_3 再两边取倒数即有

$$\frac{x_1+x_2+x_3}{3}\le\sqrt[3]{x_1x_2x_3}$$

□

十.(15 分)

1、**(5 分)** 试给出函数序列 $\{f_n(x)\}$ 在区间 $[a,b]$ 上一致收敛于 $f(x)$ 的定义；

2、**(10 分)** 设函数 $f_0(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积，且 $f_n(x)=\int_a^x f_{n-1}(t)dt\,(a\le x\le b),n=1,2,...,$ 证明 $\{f_n(x)\}$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛于 0.

☞ **证明:**

1、定义：$\forall\varepsilon>0,\exists N>0,\forall n\ge N,\forall x\in[a,b]$ 有 $|f_n(x)-f(x)|<\varepsilon$

2、$f_0(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积知 $f_0(x)$ 在 $[a,b]$ 上有界，不妨设 $\forall x\in[a,b],|f_0(x)|<M$, 那么

$$|f_1(x)|=\left|\int_a^x f_0(t)dt\right|\le\int_a^b|f_0(t)|dt=M(x-a)$$

$$|f_2(x)| = \left|\int_a^x f_1(t)dt\right| \le \int_a^x M(t-a)dt = M\frac{(x-a)^2}{2}$$

一般的，当 $|f_k(x)| \le M\frac{(x-a)^k}{k!}$ 时，有

$$|f_{k+1}(x)| = \left|\int_a^x f_k(t)dt\right| \le M\int_a^x \frac{(t-a)^k}{k!}dt = M\frac{(x-a)^{k+1}}{(k+1)!}$$

由数学归纳法即得 $\forall x \in [a,b], n \in N$,

$$|f_n(x)| \le M\frac{(x-a)^n}{n!} \le M\frac{(b-a)^n}{n!}$$

注意到

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(b-a)^n}{n!} = 0$$

所以 $\forall \varepsilon > 0, \exists N > 0, \forall n > N\left(\frac{(b-a)^n}{n!} < \frac{\varepsilon}{M}\right)$, 那么 $\forall x \in [a,b], |f_n(x)| \le M\frac{(b-a)^n}{n!} < \varepsilon$, 也就是 $f_n(x)$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛于 0 □

十一.(15 分)

习题 18.1: 已知 $\int_0^{+\infty}\frac{\sin \pi x}{x}dx = \frac{\pi}{2}$, 求 $I(a) = \int_0^{+\infty} e^{-ax}\frac{\sin \pi x}{x}dx(a>0)$

解: 由于 $\int_0^{+\infty}\frac{\sin \pi x}{x}\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}$ 关于 $a \in [0,\infty)$ 一致收敛，$e^{-\alpha x} \in (0,1]$ 有界，且 $e^{-\alpha x}$ 关于 x 单调，因此可根据 *Abel* 判别法 $I(\alpha) = \int_0^{+\infty} e^{-\alpha x}\frac{\sin \pi x}{x}\mathrm{d}x$ 关于 $a \in [0,\infty)$ 一致收敛.

再根据 $g(x,\alpha) = e^{-\alpha x}\frac{\sin \pi x}{x}$ 在 $[0,+\infty)\times[0,+\infty)$ 上连续知

$$\lim_{a\to 0^+} I(\alpha) = I(0) = \frac{\pi}{2}$$

再由 $|f_a(x,\alpha)| = e^{-\alpha x}|\sin \pi x| \le e^{-\alpha x}$, 而 $\alpha \ge \alpha_0 > 0$ 的时, $\int_0^{+\infty} e^{-\alpha x}\mathrm{d}x \le \int_0^{+\infty} e^{-\alpha_0 x}\mathrm{d}x$ 收敛，故 $\int_0^{\infty} f_\alpha(x,\alpha)\mathrm{d}x$ 关于 $\alpha \in [a_0,\infty)$ 一致收敛，因此当 $\alpha > \alpha_0$ 时，

$$I'(\alpha) = \int_0^{+\infty} g_a(x,\alpha)\mathrm{d}x = -\frac{1}{1+\alpha^2}$$

由 $\forall \alpha > 0, \exists \alpha_0 > 0(\alpha > \alpha_0)$, 因此只要 $\alpha > 0$ 就有

$$I'(\alpha) = -\frac{1}{1+\alpha^2}$$

因此当 $\alpha > 0$ 时 $I(\alpha) = -\arctan\alpha + C$, 那么

$$\frac{\pi}{2} = I(0) = \lim_{\alpha\to 0^+} I(\alpha) = C$$

也就是 $I(\alpha) = \frac{\pi}{2} - \arctan\alpha$.

这里也可以任给 $\delta > 0$ 积分 $\int_0^{\infty}\left(e^{-\alpha x}\frac{\sin x}{x}\right)_\alpha \mathrm{d}x = -\int_0^{\infty} e^{-\alpha x}\sin x\mathrm{d}x$ 关于 $\alpha \in [\delta,\infty)$ 一致收敛. □

第 19 章 浙江大学 2016 年数学分析试题解析

一、计算题 (共 40 分，每小题 10 分)

1. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt[n]{(n+1)(n+2)\cdots(n+n)}}{n}$

2. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x\sin x-x(1+x)}{(\cos x-1)\ln(1-2x)}$

3. $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin(2n+1)x}{\sin x}\mathrm{d}x$，$n$ 是自然数.

4. $\displaystyle\iint_D x(1+ye^{x^2+y^2})\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，$D$ 是由 $x=-1$，$y=x^3$，$y=1$ 围成的有界闭区域.

✎ **解:** 根据题意知

1. 由定积分定义得

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[n]{(n+1)(n+2)\cdots(n+n)}}{n}=\lim_{n\to\infty}\exp\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\ln\left(1+\frac{i}{n}\right)=\exp\int_0^1\ln(1+x)\,\mathrm{d}x=\frac{4}{e}$$

2. 由泰勒公式易得

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x\sin x-x(1+x)}{(\cos x-1)\ln(1-2x)}=\lim_{x\to 0}\frac{(1+x+o(x))\left(x-\frac{1}{6}x^3+o(x^3)\right)-x(1+x)}{x^3}=-\frac{1}{6}$$

3. 令 $I_n=\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin(2n+1)}{\sin x}\mathrm{d}x$，有

$$I_n-I_{n-1}=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin(2n+1)-\sin(2n-1)}{\sin x}\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{2\sin x\cos 2nx}{\sin x}\mathrm{d}x=0$$

因此

$$I_n=I_0=\frac{\pi}{2}$$

或这样

$$I_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin(2n+1)}{\sin x}\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(1+2\sum_{k=1}^{n}\cos 2kx\right)\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2}$$

4. 显然有

$$\iint_D x\left(1+ye^{x^2+y^2}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_{-1}^{0}\left(\int_{-1}^{1}x\left(1+ye^{x^2+y^2}\right)\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x=\int_{-1}^{0}2x\mathrm{d}x=-1$$

□

二、证明题 (共 40 分，每小题 10 分)

1. 设 A，B 是非空数集，$E=A\bigcup B$，证明 $supE=\mathbf{max}\{supA,supB\}$

2. 若 $x_n>0$，且 $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}x_n\cdot\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\frac{1}{x_n}=1$，证明数列 $\{x_n\}$ 收敛.

☞ **证明:**

1. 由题易知显然 E 上下确界均存在，对 $\forall x\in E$，有 $x\in A$ 或 $x\in B$，即 $x\leq supA$ 或 $x\leq supB$，从而有 $x\leq\mathbf{max}\{supA,supB\}$，故 $supE\leq\mathbf{max}\{supA,supB\}$; 另一方面对 $\forall x\in A$，有 $x\in E$，即 $x\leq supE$，则 $supA\leq supB$，同理 $supA\geq supB$，故 $supE\geq\mathbf{max}\{supA,supB\}$, 即证.

2. 由 $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}x_n\cdot\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\frac{1}{x_n}=1$ 可知，$\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}x_n$ 存在且 $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}x_n=A>0$，故数列 $\{x_n\}$ 有界，因此 $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}x_n$ 存在. 又有

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\frac{1}{x_n}=\frac{1}{\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\frac{1}{x_n}}=\frac{1}{A},\ \underline{\lim_{n\to\infty}}\frac{1}{x_n}=A$$

即 $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}x_n=\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}x_n$，所以数列 $\{x_n\}$ 收敛.

□

三、证明题 (共 15 分) 利用有限覆盖定理证明：有界数列必有收敛子列.

☞ **证明:** 考虑有界数列 $\{x_n\}$，必然存在一个有界闭集使得 $\{x_n\}\subset A$. 反证：假设 $\{x_n\}$ 无收敛子列，则 $\{x_n\}$ 在 A 无聚点，对 $\forall x\in A$，存在 $\xi_x>0$ 使得 $(x-\xi_x,x+\xi_x)$ 只有数列 $\{x_n\}$ 的有限项，且 $\bigcap\limits_{x\in A}(x-\xi_x,x+\xi_x)$ 构成了 A 的一个开覆盖，于是存在有限个点 $x_1,x_2\cdots,x_n$ 使得 $A\subset\bigcap\limits_{i=1}^{n}\left(x_i-\xi_{x_i},x_i+\xi_{x_i}\right)$，由于 $\left(x_i-\xi_{x_i},x_i+\xi_{x_i}\right)(i=1,\cdots,n)$ 中只有数列的有限项，这样的 A 只包含 $\{x_n\}$ 中有限项，与条件矛盾. 因此有界数列必有收敛子列.

这个证明从确界到区间套，再结合实数是可数空间，证明闭集族交集为空则存在一个交集为空的子闭集族进一步证明存在一个交集为空的有穷闭集族，至此得到实数的局部紧致性.
□

四、证明题 (共 15 分) 若 $f(x)$ 定义在 (a,b) 上，证明：若对 (a,b) 内任一收敛点列 $\{x_n\}$，极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\{f(x_n)\}$，则 $f(x)$ 在 (a,b) 上一致收敛.

☞ **证明:** 假设 $f(X)$ 在 (a,b) 上不一致收敛，则存在 $\varepsilon_0>0$，对 $\forall\delta>0$，存在 $m,n\in(a,b)$ 且 $|m-n|<\delta$，有

$$|f(m)-f(n)|\geq\varepsilon_0.$$

这个可由魏尔斯特拉斯定理证明，过程省略. 所以 $\{f_n(x)\}$ 不收敛，与假设矛盾，因此 $f(x)$ 在 (a,b) 上一致收敛.

□

五、证明题 (共 15 分) 设 $f(x,y)$ 在 $[a,b]$ 上 $[a,b]\times[c,+\infty)$ 连续非负函数，$I(x)=\int_c^{+\infty}f(x,y)\mathbf{d}y$ 在 $[a,b]$ 上连续，证明：$I(x)$ 在 $[a,b]$ 上一致连续.

证明: 假设 $f(x,y)\ge 0$，若 $I(x)$ 关于 $x\in[a,b]$ 不一致收敛，则存在 $\varepsilon_0>0$，对 $\forall n>c$，总存在 $x_n\in[a,b]$ 使得 $\int_n^{\infty} f(x_n,y)\mathbf{d}y\ge\varepsilon_0$. 由于有界数列 $\{x_n\}$ 必有收敛子列，故不妨设 $\{x_n\}$ 收敛，并记 $x_0=\lim\limits_{n\to\infty}x_n\in[a,b]$.

由于反常积分 $\int_c^{\infty} f(x_0,y)\mathbf{d}y$ 收敛，即必存在 A 使得 $\int_A^{\infty} f(x_0,y)\mathbf{d}y\le\frac{\varepsilon_0}{2}$. 且由 $f(x,y)\ge 0$ 知，当 $n>A$ 时有

$$\int_A^{\infty} f(x_n,y)\mathbf{d}y\ge\int_n^{\infty} f(x_n,y)\,\mathbf{d}y\ge\varepsilon_0$$

由于

$$\int_A^{\infty} f(x,y)\mathbf{d}y=\int_c^{\infty} f(x,y)\,\mathbf{d}y-\int_c^{A} f(x,y)\,\mathbf{d}y=I(x)-\int_c^{A} f(x,y)\,\mathbf{d}y$$

及 $I(x)$ 在 $[a,b]$ 连续，根据广义含参量积分的连续性定理知 $\int_c^{A} f(x,y)\mathbf{d}y$ 也连续，于是 $\int_A^{\infty} f(x,y)\mathbf{d}y$ 连续，因此由 $x_0=\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 知

$$\lim_{n\to\infty}\int_A^{\infty} f(x_n,y)\mathbf{d}y=\int_A^{\infty} f(x_0,y)<\frac{\varepsilon_0}{2}$$

这与 $\int_A^{\infty} f(x_n,y)\mathbf{d}y\ge\varepsilon_0$ 矛盾，因此 $I(x)$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛.

□

六、解答题 (共 15 分) 求周期为 2π 的周期函数 $f(x)$ 的 **Fourier** 级数，其中当 $x\in(-\pi,\pi)$ 时，$f(x)=x^3$；并求级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^6}$ 的和.

解: 易知 $f(x)$ 的 **Fourier** 系数为

$$\begin{aligned}2\pi f(x)&=\int_{-\pi}^{\pi}x^3e^{-inx}\mathbf{d}x=\frac{1}{-in}\int_{-\pi}^{\pi}x^3de^{-inx}\\&=\frac{2(-1)^n\pi^3}{-in}+\frac{3}{in}\int_{-\pi}^{\pi}x^2e^{-inx}\mathbf{d}x\\&=\frac{2(-1)^n\pi^3}{-in}+\frac{3}{n^2}\int_{-\pi}^{\pi}x^2de^{-inx}\\&=\frac{2(-1)^n\pi^3}{-in}+\frac{12(-1)^n}{in^3}\end{aligned}$$

因此

$$f(x)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left[\frac{(-1)^n\pi^2}{-in}+\frac{6(-1)^n}{in^3}\right]$$

由 **Parseval** 等式及 $\zeta(2)=\frac{\pi^2}{6},\zeta(4)=\frac{\pi^4}{96}$ 得 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^6}=\frac{\pi^6}{945}$　□

七、证明题 (共 15 分) 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有一阶连续导数，记 $A=\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\mathbf{d}x$，试证明：

$$\int_a^b[f(x)-A]^2\mathbf{d}x\le(b-a)^2\int_a^b|f'(x)|^2\mathbf{d}x$$

证明: 令 $g(x)=f(x)-A$，则 $\int_a^b g(x)=0$，且 $g'(x)=f'(x)$，于是要证的不等式转化为

$$\int_a^b g^2(x)\mathbf{d}x\le(b-a)^2\int_a^b\left|g'(x)\right|^2\mathbf{d}x$$

这里只需要证明著名的 **Poincare** 不等式，证明过程利用 **Fourier** 级数以及 **Parseval** 等式即可.

$$\int_a^b g^2(x)\mathbf{d}x \le \frac{(b-a)^2}{\pi^2}\int_a^b |g'(x)|^2\mathbf{d}x$$

另解: 利用积分第一中值定理以及柯西-施瓦茨不等式. 由于 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 连续，由积分第一中值定理，$\exists\xi\in(a,b)$ 有

$$f(\xi)=\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\mathbf{d}x=A$$

因此

$$(f(x)-A)^2=(f(x)-f(\xi))^2=\left(\int_\xi^x f'(t)\,dt\right)^2\le(b-a)\int_a^b |f'(t)|^2dt$$

两边积分，即证. □

八、**证明题 (共 15 分)** 设 $\varphi(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，$K(x,t)$ 在 $[a,b]\times[a,b]$ 上连续，构造函数列如下：$f_0(x)=\varphi(x)$，$f_n(x)=\varphi(x)+\lambda\int_a^b K(x,t)f_{n-1}(t)dt$，$n=1,2,\cdots$. 试证明：当 $|\lambda|$ 足够小时，函数列 $\{f_n(x)\}$ 收敛于一连续函数.

☞ **证明:** 假设 $A=\sup\limits_{x\in[a,b]}\int_a^b |K(x,t)|dt>0, B\ge|\varphi(x)|\,(x\in[a,b])$，且 $f_n(x)\in C[a,b]$，易知

$$|f_1(x)-f_0(x)|=\left|\lambda\int_a^b K(x,t)\varphi(t)\,dt\right|\le|\lambda|\int_a^b |K(x,t)|\,|\varphi(t)|\,dt\le|\lambda|\,AB$$

$$|f_2(x)-f_1(x)|=\left|\lambda\int_a^b K(x,t)(f_1(x)-f_0(x))\,dt\right|\le|\lambda|^2 B^3\int_a^b (b-a)\,dt\le|\lambda|^2 A^2B$$

归纳可得

$$|f_n(x)-f_{n-1}(x)|\le|\lambda|^n A^n B$$

因此当 $|\lambda|$ 足够小时，级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|\lambda|^n A^n B$ 必然收敛，即函数项级数在 $[a,b]$ 一连续函数，于是 $\{f_n(x)\}$ 收敛于一连续函数. □

第 20 章 吉林大学 2015 年数学分析试题解析

一、证明题 (共 50 分，每小题 10 分)

1. 用 $\varepsilon-\delta$ 语言证明 $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{2x^2+x+1}{x^2-1}=\dfrac{11}{3}$.

2. 用 Cauchy 收敛准则证明数列级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}\sin\dfrac{1}{n}$ 收敛.

3. 用子数列收敛定理证明有界闭区间上的连续函数的有界性.

4. 证明函数 $f(x)=x^2$ 在 $(-\infty,\infty)$ 内连续，但不一致连续.

5. 证明数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(\arctan n^3\right)\sin\dfrac{1}{n}$ 条件收敛.

☞ **证明:**根据题意知

1. 对 $\forall\varepsilon>0$，取 $\delta=\min\left\{\dfrac{1}{2},\dfrac{\varepsilon}{16}\right\}$，当 $0<|x-2|<\delta$ 时，有

$$\left|\frac{2x^2+x+1}{x^2-1}-\frac{11}{3}\right|=\frac{|5x+7||x-2|}{|x+1||x-1|}\le\frac{(5|x-2|+17)|x-2|}{(3-|x-2|)(1-|x-2|)}<16|x-2|<\varepsilon$$

即证.

2. 对 $\forall\varepsilon>0$，取 $N=[\frac{1}{\varepsilon}]$，当 $n>N$ 时，对任意正整数 m 有

$$\left|\sum_{k=n+1}^{n+m}\frac{1}{k}\sin\frac{1}{k}\right|\le\sum_{k=n+1}^{n+m}\frac{1}{k}\left|\sin\frac{1}{k}\right|\le\sum_{k=n+1}^{n+m}\frac{1}{k^2}$$
$$<\sum_{k=n+1}^{n+m}\frac{1}{k\,(k-1)}=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+m+1}<\frac{1}{n}<\varepsilon$$

由 Cauchy 收敛准则，数项级数收敛.

3. 假设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，且 $f(x)$ 无界，则 $\forall n>0$，$\exists x_n\in[a,b]$，使得

$$|f(x_n)|\ge n\text{或}\frac{1}{n}|f(x_n)|\ge 1$$

因为 $\{x_n\}$ 是有界数列，可根据子数列收敛定理，存在它的一个收敛子数列 $\{x_{n_k}\}$. 记 $\lim\limits_{k\to\infty}x_{n_k}=c$，由极限的保号性可知 $c\in[a,b]$，且

$$\frac{1}{n_k}\left|f\left(x_{n_k}\right)\right|\ge 1,\quad k=1,2,\cdots$$

由 $f(x)$ 的连续性，**Heine** 定理以及极限的保号性序，有

$$0=0\cdot|f(c)|=\lim_{k\to\infty}\frac{1}{n_k}\left|f\left(x_{n_k}\right)\right|$$

与假设矛盾. 故 $f(x)$ 有界.

4. 证明 $f(x)=x^2$ 在 R 上连续，按定义即可. 至于不一致收敛，取数列

$$a_n=\sqrt{n+1},\quad b_n=\sqrt{y},\quad n=1,2,\ldots$$

则有

$$\lim_{n\to\infty}(a_n-b_n)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}=0$$
$$|f(a_n)-f(b_n)|=|(n+1)-n|=1>0$$

所以 $f(x)$ 在 R 上不一致收敛.

5. 显然 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\sin\frac{1}{n}$ 收敛, 又 $\left(arctann^3\right)$ 单调递增，且 $0\le\left(arctann^3\right)\le\frac{\pi}{2}$，所以根据 $Abel$ 判别法

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(\arctan n^3\right)\sin\frac{1}{n}$$

收敛. 又

$$\left|(-1)^n\left(\arctan n^3\right)\sin\frac{1}{n}\right|\ge\left(\arctan n^3\right)\sin\frac{1}{n}\ge\frac{1}{2n}$$

这里 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n}$ 发散，所以根据比较判别法

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left|(-1)^n\left(\arctan n^3\right)\sin\frac{1}{n}\right|$$

发散. 因此 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(\arctan n^3\right)\sin\frac{1}{n}$ 条件收敛.

□

二、计算题 (共 30 分，每小题 10 分)

1. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\int_0^{x^2}\sqrt{t}\sin\left(t^2\right)\mathrm{d}t}{(1-\cos x)\left(e^{x^2}-1\right)}$

2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{n^2}{2^n}$.

3. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{1/n^2}\left(1+\dfrac{2}{n}\right)^{2/n^2}\cdots\left(1+\dfrac{n}{n}\right)^{n/n^2}$

✎ **解:**

1. 由等价无穷小与洛必达得

$$\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^{x^2}\sqrt{t}\sin t^2dt}{(1-\cos x)\left(e^{x^2}-1\right)}=\lim_{x\to 0}\frac{2\int_0^{x^2}\sqrt{t}\sin t^2dt}{x^4}=\lim_{x\to 0}\frac{|x|\sin x^4}{x^2}=\lim_{x\to 0}|x|x^2=0$$

2. 令

$$S(x)=\sum_{n=1}^{\infty}n^2x^n\Rightarrow\frac{S(x)}{x}=\sum_{n=1}^{\infty}n^2x^{n-1}\Rightarrow\int\frac{S(x)}{x}=\sum_{n=1}^{\infty}nx^n+C_1$$

设 $K(x)=\sum_{n=1}^{\infty}nx^n$，得

$$\Rightarrow\frac{K(x)}{x}=\sum_{n=1}^{\infty}nx^{n-1}\Rightarrow\int\frac{K(x)}{x}=\sum_{n=1}^{\infty}x^n+C_2=\frac{1}{1-x}+C_2$$

因此

$$\frac{K(x)}{x}=\frac{1}{(1-x)^2}\Rightarrow K(x)=\frac{x}{(1-x)^2}$$

$$\frac{S(x)}{x}=K'(x)=\frac{1+x}{(1-x)^3}\Rightarrow S(x)=\frac{x(1+x)}{(1-x)^3}$$

所以

$$S\left(-\frac{1}{2}\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{1}{2}\right)^n n^2=(-1)^n\frac{n^2}{2^n}=-\frac{2}{27}$$

3. 取对数，定积分定义即可

$$\text{原式}=\exp\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n}\ln\left(1+\frac{k}{n}\right)=exp\int_0^1x\ln(1+x)\,dx=e^{\frac{1}{4}}$$

□

三、计算题 (共 45 分，每小题 15 分)

1. 求多元函数的导数：

(1) 设 z 是由方程 $x+z+(z+y)^2=6$ 确定的 x,y 的函数. 求 $\frac{\partial z}{\partial x},\frac{\partial z}{\partial y},\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$和$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$

(2) 设 $u=x\ln(x+\sin y)(x>1)$，求 $\mathbf{grad}\,u|_{(2,0)}$ 以及 u 于 $(2,0)$ 处沿方向 $\left(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ 的方向导数.

2. 计算 $\iint_D\sqrt{x^2+y^2}dxdy$.

其中 $D=\left\{(x,y);x\geq 0,y\geq 0,ax\leq x^2+y^2\leq a^2\right\},a>0$.

3. 计算 $\iint_S(y-z)dydz+(z-x)dzdx+(x-y)dxdy$，其中 S 为曲面 $x^2+y^2=z^2(0\leq z\leq h)$ 的下侧.

✎ **解:**

1. **(1)** 方程两边微分整理可得到

$$-dx-(2z+2y)dy=(1+2z+2y)dz$$

当 $1+2z+2y\neq 0$，有

$$\mathbf{d}z=-\frac{1}{1+2z+2y}\mathbf{d}x-\frac{2z+2y}{1+2z+2y}\mathbf{d}y$$

因此

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{1}{1+2z+2y},\quad \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{2z+2y}{1+2z+2y}$$

所以就有

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{1}{1+2z+2y}\right)=\frac{2}{(1+2z+2y)^2}\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{2}{(1+2z+2y)^3}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\left(-\frac{1}{1+2z+2y}\right)=\frac{2}{(1+2z+2y)^2}\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{4z+4y}{(1+2z+2y)^3}$$

(2) 设 $l=(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2})$，由题意知，有

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{(2,0)}=\left[\mathbf{ln}(x+\mathbf{sin}\,y)+\frac{x}{x+\mathbf{sin}\,y}\right]\Bigg|_{(2,0)}=1+\mathbf{ln}\,2,\quad \left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{(2,0)}=\left.\frac{x\,\mathbf{cos}\,y}{x+\mathbf{sin}\,y}\right|_{(2,0)}=1$$

即

$$\mathbf{grad}\,u|_{(2,0)}=(1+\mathbf{ln}\,2,1),\quad \left.\frac{\partial u}{\partial l}\right|_{(2,0)}=\mathbf{grad}\,u|_{(2,0)}\cdot\frac{l}{|l|}=\frac{1+\sqrt{3}+\mathbf{ln}\,2}{2}$$

2. 化极坐标，积分区域为 $a\,\mathbf{cos}\,\theta\le r\le a,\quad 0\le\theta\le\frac{\pi}{2}$ 得

$$\iint\sqrt{x^2+y^2}\mathbf{d}x\mathbf{d}y=\int_0^{\pi/2}\mathbf{d}\theta\int_{a\,\mathbf{cos}\,\theta}^{a}r^2\mathbf{d}r=\frac{a^3}{3}\int_0^{\pi/2}\left(1-\mathbf{cos}^3\,\theta\right)\mathbf{d}\theta=\frac{a^3}{3}\left(\frac{\pi}{2}-\frac{2}{3}\right)$$

3. 记 $S_0: z=h,(x,y)\in D=\left\{(x,y);x^2+y^2\le h^2\right\}$，曲面定向取上侧，并记 S 与 S_0 所围成的空间区域为 Ω，由高斯公式得

$$\begin{aligned}
&\iint_S(y-z)\,\mathbf{d}y\mathbf{d}z+(z-x)\,\mathbf{d}z\mathbf{d}x+(x-y)\,\mathbf{d}x\mathbf{d}y\\
&=\left(\iint_S+\iint_{S_0}\right)(y-z)\,\mathbf{d}y\mathbf{d}z+(z-x)\,\mathbf{d}z\mathbf{d}x+(x-y)\,\mathbf{d}x\mathbf{d}y\\
&-\iint_{S_0}(y-z)\,\mathbf{d}y\mathbf{d}z+(z-x)\,\mathbf{d}z\mathbf{d}x+(x-y)\,\mathbf{d}x\mathbf{d}y\\
&=\iiint_\Omega\left(\frac{\partial(y-z)}{\partial x}+\frac{\partial(z-x)}{\partial y}+\frac{\partial(x-y)}{\partial z}\right)\mathbf{d}x\mathbf{d}y\mathbf{d}z-\iint_D(x-y)\,\mathbf{d}x\mathbf{d}y\\
&=-\int_0^{2\pi}(\mathbf{cos}\,\theta-\mathbf{sin}\,\theta)\,\mathbf{d}\theta\int_0^h r^2\mathbf{d}r=0
\end{aligned}$$

□

四、解答题 (共 10 分) 考虑关于 x 的方程

$$x^n + nx = 2n$$

其中 n 为正整数.

1. 证明：对于任意正整数 n，方程有唯一的正实数解.

2. 设 x_n 为方程的正实数解，$n = 1, 2, \cdots$. 证明数列 $\{x_n\}$ 收敛.

3. 证明数列 $\left\{\dfrac{x_n^n}{n}\right\}$ 收敛并求其极限值

✎ **解:** 由题意可知

1. 令 $f_n(x) = x^n + nx - 2n, x \in \mathbb{R}$，显然 $f_n(x)$ 是 $\mathbb{R}$ 上严格单调递增的连续函数，且有

$$f_n(1) = 1 - n \le 0, \quad f_n(\sqrt[n]{2n}) = n\sqrt[n]{2n} > 0, \quad n = 1, 2, \cdots$$

根据介值定理，对任意的正整数 n，存在唯一的 $x_n \in [1, \sqrt[n]{2n}) \subset \mathbb{R}$，使得 $f_n(x) = 0$，即方程有唯一的正实数解.

2. 根据上问即证，我们得到

$$1 \le x_n \le \sqrt[n]{2n}, \quad n = 1, 2, \cdots$$

由夹逼定理且 $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{2n} = 1$，得 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 1$，所以数列 $\{x_n\}$ 收敛.

3. 由 $x_n^n + nx_n = 2n$ 得

$$\frac{x_n^n}{n} = 2 - x_n$$

因此

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_n^n}{n} = \lim_{n\to\infty}(2 - x_n) = 2 - 1 = 1$$

□

五、证明题 (共 15 分) 设 $A > 0, C > 0, AC - B^2 > 0$，求证：

$$\int_L \frac{xdy - ydx}{Ax^2 + 2Bxy + Cy^2} = \frac{2\pi}{\sqrt{AC - B^2}}$$

其中 L 为曲线 $x^2 + y^2 = R^2 (R > 0)$ 定向取逆时针方向.

☞ **证明:** 利用极坐标：$x = R\cos\theta$, $y = \beta\sin\theta$, $\theta : 0 \to 2\pi$，根据对称性有

$$\begin{aligned}
\int_L \frac{x\mathrm{d}y - y\mathrm{d}x}{Ax^2+2Bxy+Cy^2} &= \int_0^{2\pi} \frac{\mathrm{d}\theta}{A\cos^2\theta + 2B\sin\theta\cos\theta + C\sin^2\theta} \\
&= 2\int_0^{\pi} \frac{d\,(\tan\theta)}{A+2B\tan\theta + C\tan^2\theta} \\
&= 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\,(\tan\theta)}{A+2B\tan\theta + C\tan^2\theta} + 2\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{d\,(\tan\theta)}{A+2B\tan\theta + C\tan^2\theta} \\
&= 2\int_0^{+\infty} \frac{dt}{A+2Bt+Ct^2} + 2\int_{-\infty}^{0} \frac{dt}{A+2Bt+Ct^2}, \quad \text{令}(t = \tan\theta) \\
&= 2\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dt}{A+2Bt+Ct^2} = \frac{2}{C}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\left(t+\frac{B}{C}\right)}{\left(t+\frac{B}{C}\right)^2 + \frac{AC-B^2}{C^2}} \\
&= \frac{2}{C}\cdot\frac{C}{\sqrt{AC-B^2}}\arctan\frac{Ct+B}{\sqrt{AC-B^2}}\Big|_{-\infty}^{+\infty} \\
&= \frac{2\pi}{\sqrt{AC-B^2}}
\end{aligned}$$

即证. □

第 21 章 中国科大 2015 年数学分析试题解析

一.(15 分) 求极限

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sin\frac{1}{x}\right)\int_0^x|\sin t|\mathrm{d}t$$

✎ **解:** 由等价于放缩得到

$$\lim_{x\to+\infty}\sin\left(\frac{1}{x}\right)\int_0^x|\sin t|dt=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}\int_0^x|\sin t|dt$$

$$\frac{2n}{(n+1)\pi}=\frac{1}{(n+1)\pi}\int_0^{n\pi}|\sin t|dt\le\frac{1}{x}\int_0^x|\sin t|dt\le\frac{1}{n\pi}\int_0^{(n+1)\pi}|\sin t|dt=\frac{2(n+1)}{n\pi}$$

即

$$\lim_{x\to+\infty}\sin\left(\frac{1}{x}\right)\int_0^x|\sin t|dt=\frac{2}{\pi}$$

□

二.(15 分) 求二元函数 $F(x,y)=\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}+\frac{y}{\sqrt{1+y^2}}$ 在闭区域 $x\ge 0, y\ge 0, x+y\le 1$ 上的最大值.

✎ **解:** 易知

$$F(x,y)\le\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}+\frac{1-x}{\sqrt{1+(1-x)^2}}=H(x)$$

得

$$H'(x)=\frac{1}{\sqrt{(1+x^2)^3}}-\frac{1}{\sqrt{\left(1+(1-x)^2\right)^3}}$$

可知当 $0<x<\frac{1}{2}$，$H(x)$ 递增；当 $\frac{1}{2}<x<1$，$H(x)$ 递减. 即当 $x=y=\frac{1}{2}$，$F(x,y)$ 取到最大值为 $\frac{2\sqrt{5}}{5}$.

□

三.(15 分) 设 a,b 是正数，计算二重积分

$$\iint_D\left(x^2+y^2\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

其中 D 是椭圆盘 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\le 1$

✎ **解:** 利用极坐标，可令 $x=a\rho\cos\theta, y=b\rho\sin\theta,\quad 0\le\rho\le 1, 0\le\theta\le 2\pi$ 得到

$$\iint_D(x^2+y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^1 ab\rho d\rho\int_0^{2\pi}(a^2\rho^2\cos^2\theta+b^2\rho^2\sin^2\theta)d\theta=\frac{\pi}{4}ab\left(a^2+b^2\right)$$

□

四.(15 分) 设 $R>0$，计算曲面积分

$$\iint_S\left(xy^2+\frac{1}{3}x^3\right)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+yz^2\mathrm{d}\mathrm{d}x+R^3\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

其中 S 是上半球面 $x^2+y^2+z^2=R^2(z\geq 0)$ 方向取上.

✎ **解:** 记 $S_0: z=0,(x,y)\in D=\left\{(x,y);x^2+y^2\leq R^2\right\}$，曲面定向取下，由高斯公式得

$$
\begin{aligned}
&\iint\limits_{S}\left(xy^2+\frac{1}{3}x^3\right)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+yz^2\mathrm{d}z\mathrm{d}x+R^3\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\
&=\left(\iint\limits_{S}+\iint\limits_{S_0}\right)\left(xy^2+\frac{1}{3}x^3\right)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+yz^2\mathrm{d}z\mathrm{d}x+R^3\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\
&-\iint\limits_{S_0}\left(xy^2+\frac{1}{3}x^3\right)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+yz^2\mathrm{d}z\mathrm{d}x+R^3\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\
&=\iiint\limits_{\{x^2+y^2+z^2\leq R^2,z>0\}}\left(x^2+y^2+z^2\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z-\iint\limits_{S_0}\left(xy^2+\frac{1}{3}x^3\right)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+yz^2\mathrm{d}z\mathrm{d}x+R^3\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\
&=\frac{2\pi}{5}R^5+\pi R^5=\frac{7\pi}{5}R^5
\end{aligned}
$$

□

五.(15 分) 计算广义积分

$$\int_0^{+\infty}\frac{1}{1+x^n}\mathrm{d}x\,(n>1)$$

✎ **解:** 令 $x^n=\tan^2\theta\Rightarrow \mathrm{d}x=\left(\frac{2}{n}\tan^{\frac{2}{n}-1}\theta\right)\sec^2\theta d\theta$，即有

$$
\begin{aligned}
\int_0^{+\infty}\frac{1}{1+x^n}\mathrm{d}x&=\frac{2}{n}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\tan^{\frac{2}{n}-1}\theta d\theta=\frac{2}{n}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{\frac{2}{n}-1}\theta\cos^{1-\frac{2}{n}}\theta d\theta\\
&=\frac{1}{n}B\left(\frac{1}{n},1-\frac{1}{n}\right)=\frac{1}{n}\frac{\Gamma\left(\frac{1}{n}\right)\Gamma\left(1-\frac{1}{n}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{n}+1-\frac{1}{n}\right)}=\frac{\pi}{n\sin\frac{\pi}{n}}
\end{aligned}
$$

□

六.(15 分) 设 $n>0$，求证不等式

$$\frac{1}{2n+2}<\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^n x\mathrm{d}x<\frac{1}{2n}$$

☞ **证明:** 令 $t=tanx$，则

$$\frac{1}{2(n+1)}=\int_0^1\frac{t^n}{2}\mathrm{d}t<\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^n x=\int_0^1\frac{t^n}{1+t^2}\mathrm{d}t<\int_0^1\frac{t^n}{2t}\mathrm{d}t=\frac{1}{2n}$$

□

七.(15 分) 设 $\alpha\in(0,1),\{a_n\}$ 是正严格递增数列，且 $\{a_{n+1}-a_n\}$ 有界，求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(a_{n+1}^{\alpha}-a_n^{\alpha}\right)$

✎ **解:** 由题易知这里 $\{a_n\}$ 要分类讨论：

- 若 $\{a_n\}$ 有界，则 $a_{n+1}-a_n\to 0$，有
$$a_{n+1}^{\alpha}-a_n^{\alpha}=\leq \alpha a_1^{\alpha-1}(a_{n+1}-a_n)\to 0$$
- 若 $\{a_n\}$ 无界，设 $a_{n+1}-a_n<M$，则
$$a_{n+1}^{\alpha}-a_n^{\alpha}\leq \alpha M a_n^{\alpha-1}\to 0$$

综上 $\lim\limits_{n\to\infty}(a_{n+1}^{\alpha}-a_n^{\alpha})=0.$ □

八.(15 分) 讨论级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})^{\alpha}\cos n$ 的条件收敛性与绝对收敛性.

✎ **解:** 分类讨论

- 当 $\alpha\leq 0$ 时，级数发散;
- 当 $\alpha>2$ 时，有
$$\left|(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})^{\alpha}\cos n\right|=\frac{|\cos n|}{(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})^{\alpha}}\leq n^{-\frac{\alpha}{2}}$$
级数绝对收敛;
- 当 $0<\alpha\leq 2$，有
$$\left|\sum_{n=1}^{k}\cos n\right|\leq\frac{1}{\sin\frac{1}{2}},\quad\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)^{\alpha}=\frac{1}{\left(\sqrt{n+1}+\sqrt{n}\right)^{\alpha}}\to 0\text{且}\searrow$$
此时级数收敛，又
$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{k}\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)^{\alpha}|\cos n|&\geq\sum_{n=1}^{k}\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)^{\alpha}\cos^2 n\\&=\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{k}\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)^{\alpha}-\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{k}\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)^{\alpha}\cos 2n\end{aligned}$$
从而 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})^{\alpha}|\cos n|$ 发散，故级数条件收敛.

□

九.(15 分) 设 $f(x)$ 是区间 $[0,1]$ 上的连续函数并满足 $0\leq f(x)\leq x$，求证
$$\int_0^1 x^2 f(x)\mathrm{d}x\geq\left(\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x\right)^2$$
并求使上式成立等式的所有连续函数 $f(x)$.

☞ **证明:** 令
$$F(x)=\int_0^x t^2 f(t)\,\mathrm{d}t-\left(\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t\right)^2$$

$F'(x) = x^2 f(x) - 2f(x)\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t = f(x)\left(x^2 - 2\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t\right) \geqslant f(x)\left(x^2 - 2\int_0^x t\,\mathrm{d}t\right) = 0$

即有

$$\int_0^1 x^2 f(x)\,\mathrm{d}x - \left(\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x\right)^2 = F(1) - F(0) = \int_0^1 F'(x)\mathrm{d}x \geq 0$$

得证. 等号成立当且仅当对 $\forall x \in (0,1)$，有

$$f(x)\left(x^2 - 2\int_0^x f(t)dt\right) = 0$$

即 $f(x) = 0$ 或 $f(x) = x$. □

十.(15 分) 设 $f(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上有连续的导函数，且

$$\lim_{x\to+\infty}\sup\left|f(x) + f'(x)\right| \leqslant M < +\infty$$

求证：$\lim\limits_{x\to+\infty}\sup|f(x)| \leqslant M$.

☞ **证明:** 对 $\forall\varepsilon > 0$，$\exists N > a$，当 $x > N$，有 $f'(x) + f(x) \in [-M-\varepsilon, M+\varepsilon]$，构造 $f(x) = e^x$，由柯西中值定理，存在 $\xi_x \in [N,x]$ 使得

$$\frac{f(x)e^x - f(A)e^N}{e^x - e^N} = \frac{(f'(\xi_x) + f(\xi_x))\,e^{\xi_x}}{e^{\xi_x}} = f'(\xi_x) + f(\xi_x) \in [-M-\varepsilon, M+\varepsilon]$$

即

$$\lim_{x\to+\infty}\sup f(x) = \lim_{x\to+\infty}\sup\frac{f(x)e^x}{e^x - e^N} = \lim_{x\to+\infty}\sup\frac{f(x)e^x - f(N)e^N}{e^x - e^N} \leq M + \varepsilon$$

由 $\varepsilon > 0$ 可知，即证.

□

第 22 章 中国科大 2014 年数学分析试题解析

一.(15 分) 回答下列问题，举例说明或证明你的结论.

1. 如果 $\int_0^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 收敛，能否断言 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$?

2. 如果 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^2<+\infty$，能否断言 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$和 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}a_n$ 至少有一个收敛?

二.(15 分) 计算下列极限的值.

1. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x-x^2\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)\right)$

2. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\cos x-e^{-\frac{x^2}{2}}}{\sin^4 x}$

三.(15 分) 计算下列积分.

1. $\int_0^1\left(\int_0^1 \max(x,y)\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x$

2. $\int_0^1 \dfrac{\ln x}{x^\alpha}\mathrm{d}x,\alpha<1$

四.(15 分) 设 $[a_n]$ 是非负数列满足 $a_{n+1}\le a_n+\dfrac{1}{n^2},n\in\mathbb{N}$，证明 $[a_n]$ 收敛

五.(15 分) 设 f 在 $(0,+\infty)$ 上有三阶导数，如果 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$和 $\lim\limits_{x\to+\infty} f'''(x)$ 都存在且有极限，证明:

$$\lim_{x\to+\infty} f'(x)=\lim_{x\to+\infty} f''(x)=\lim_{x\to+\infty} f'''(x)=0$$

六.(15 分) 设 f,g 都是 $[a,b]$ 中的连续函数，证明：存在 $\xi\in[a,b]$，使得

$$g(\xi)\int_a^{\xi} f(x)\mathrm{d}x=f(\xi)\int_{\xi}^{b} g(x)\mathrm{d}x$$

七.(15 分) 设 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=a\in\mathbb{R}$，证明:

1. 幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的收敛半径 $R\ge1$.

2. 设 $f(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$，那么 $\lim\limits_{x\to1^-}(1-x)f(x)=a$.

3. $\lim\limits_{x\to 1^-}(1-x)\int_0^x \frac{f(t)}{1-t}\mathrm{d}t = a$

八.(15 分) 设 $z=z(x,y)$ 在 $\mathbb{R}^2$ 上有连续的二阶导数，且满足方程

$$14\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+5\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}-\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$$

试确定 λ 的值，使得在变换

$$\xi=x+\lambda y,\eta=x-2y,(\lambda\neq 2)$$

下，方程被化简为

$$\frac{\partial^2 z}{\partial\xi\partial\eta}=0$$

并由此求出偏微分方程的解.

九.(15 分) 设

$$\vec{F}=\left(a-\frac{1}{y}+\frac{y}{z},\frac{x}{z}+\frac{bx}{y^2},-\frac{cxy}{z^2}\right)$$

其中 a,b,c 是三个常数.

1. 问 a,b,c 取何值，$\vec{F}$ 为有势场.

2. 当 $\vec{F}$ 为有势场时，求出的它的势函数.

十.(15 分) 设 $u(x,y)$ 在 $\mathbb{R}^2$ 上有连续的二阶偏导数，且恒取正值，证明：u 满足方程

$$u\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial y}$$

的充分条件为 $u(x,y)=f(x)g(y)$.

第 23 章 厦门大学 2014 年数学分析试题解析

一.(15 分) 已知 $a_n > 0$，级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a_n}$ 发散，证明级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a_n+1}$ 也发散.

☞ **证明:** 设 $S_n = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a_n}$，由正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a_n}$ 发散，可知 $\{S_n\}$ 递增且 $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = +\infty$，故 $\forall n \in N^+$，$\exists p \in N^+$，使得 $S_n + \frac{1}{2} < \frac{1}{2} S_{n+p}$，这里我们令 $R_n = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a_n+1}$，则 $\forall n \in N^+$，$\exists p \in N^+$，有

$$
\begin{aligned}
R_{n+p} - R_n &= \frac{1}{a_{n+1}+1} + \frac{1}{a_{n+2}+1} \cdots + \frac{1}{a_{n+p}+1} = \frac{\frac{1}{a_{n+1}}}{1+\frac{1}{a_{n+1}}} + \frac{\frac{1}{a_{n+2}}}{1+\frac{1}{a_{n+2}}} \cdots + \frac{\frac{1}{a_{n+p}+1}}{1+\frac{1}{a_{n+p}}} \\
&\geq \frac{\frac{1}{a_{n+1}} + \cdots + \frac{1}{a_{n+p}}}{1+\frac{1}{a_1} + \cdots + \frac{1}{a_{n+p-1}} + \frac{1}{a_{n+p}}} = \frac{S_{n+p} - S_n}{1+S_{n+p}} \geq \frac{S_{n+p} - \frac{1}{2}\left(S_{n+p} - 1\right)}{1+S_{n+p}} \\
&= \frac{1}{2}
\end{aligned}
$$

由柯西收敛准则可知 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a_n+1}$ 发散. □

二.(15 分) 若 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上可微，且 $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$，证明在 $(0,+\infty)$ 内存在一数列 $\{\xi_n\}$，使得 $\{\xi_n\}$ 单调，$\lim\limits_{n\to\infty} \xi_n = +\infty$，且 $\lim\limits_{n\to\infty} f'(\xi_n) = 0$.

☞ **证明:** 由 $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$，则对于 $\varepsilon = \frac{1}{n}$，则 $\exists M > 0$，当 $x > \frac{M}{2}$ 时，有 $\left|\frac{f(x)}{x}\right| < \frac{1}{n}$，又 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上可微，可由拉格朗日中值定理，对 $\forall x > 0$ 有

$$
f(x) - f\left(\frac{x}{2}\right) = f'(\xi) \cdot \frac{x}{2} \quad \left(\xi \in \left(\frac{x}{2}, x\right)\right)
$$

$$
\Rightarrow \left|f'(\xi)\right| = \left|2 \cdot \frac{f(x)}{x} - \frac{f\left(\frac{x}{2}\right)}{\frac{x}{2}}\right| \leq 2\left|\frac{f(x)}{x}\right| + \left|\frac{f\left(\frac{x}{2}\right)}{\frac{x}{2}}\right|
$$

则对于 $\varepsilon = \frac{1}{n}$, $\exists M > 0$, 当 $x > M$ 时, 取 $\xi_n \in (\frac{nx}{2}, \frac{(2n+1)x}{2})$, 显然 $\{\xi_n\}$ 单调, $\lim\limits_{n\to\infty} \xi_n = +\infty$, 且 $\lim\limits_{n\to\infty} f'(\xi_n) = 0$. □

三.(20 分)$a > 0, b > 0, c > 0$，证明不等式:

$$
\left(\frac{a+b+c}{3}\right)^{abc} < a^a b^b c^c
$$

☞ **证明:** 设在 $x > 0$ 上定义函数 $f(x) = x \ln x$，显然 $f''(x) = \frac{1}{x} > 0$，即 $f(x)$ 为严格凸函数，可由 **Jensen** 不等式得

$$
f\left(\frac{a+b+c}{3}\right) \leq \frac{1}{3}[f(a) + f(b) + f(c)]
$$

即

$$\frac{a+b+c}{3}\ln\frac{a+b+c}{3}\le\frac{1}{3}(a\ln a+b\ln b+c\ln c)$$

整理即证.

□

四.(20 分) 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 可导且导函数连续，证明：

$$\lim_{n\to\infty} n\int_0^1 x^n f(x)dx=f(1)$$

☞ **证明:** 易知 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 有界且一致收敛，即存在 $M>0$，有 $|f(x)|\le M$

$$\left|\int_0^1 x^n f(x)\,\mathbf{d}x\right|\le\int_0^1 Mx^n\,\mathbf{d}x=\frac{M}{n+1}\to 0\quad(\text{当}n\to\infty)$$

又

$$n\int_0^1 x^n f(x)\,\mathbf{d}x=n\int_0^1 x^n\Big(f(x)-f(1)\Big)\,\mathbf{d}x+\frac{n}{n+1}f(1).$$

假设 $\varepsilon>0$，存在 $N<1$，对 $x\in(N,1)$ 使得 $|f(x)-f(1)|<\varepsilon$，有

$$\begin{aligned}\left|n\int_0^1 x^n\Big(f(x)-f(1)\Big)\,\mathbf{d}x\right|&\le n\int_0^N x^n\Big|f(x)-f(1)\Big|\,\mathbf{d}x+n\int_a^1 x^n\Big|f(x)-f(1)\Big|\,\mathbf{d}x\\&\le 2M\frac{n}{n+1}N^n+\frac{n}{n+1}\varepsilon\end{aligned}$$

因此

$$\lim_{n\to\infty} n\int_0^1 x^n f(x)\mathbf{d}x=f(1)$$

□

五.(20 分) 设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上连续，令 $f(x)=\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}f\left(x+\frac{k}{n}\right)$，求证：$f(x)$ 在任一闭区间 $[a,b]$ 上一致收敛到函数 $g(x)=\int_0^1 f(x+t)\,\mathbf{d}t$.

☞ **证明:** 由 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上连续，可知 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛，即有

$$g(x)=\int_0^1 f(x+t)\,\mathbf{d}t=\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}f(\xi_k)\quad\left(\text{其中}\xi_k\in\left(x+\frac{k}{n},x+\frac{k+1}{n}\right)\right)$$

对 $\forall\varepsilon>0$，$\exists N=[\frac{1}{\delta}]$，当 $n>N$ 时，有 $\left|x+\frac{k}{n}-\xi_k\right|\le\frac{1}{n}<\delta$，即

$$|f_n(x)-g(x)|=\left|\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\left[f\left(x+\frac{k}{n}\right)-f(\xi)\right]\right|\le\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\left|f\left(x+\frac{k}{n}\right)-f(\xi_k)\right|<\frac{n\varepsilon}{n}=\varepsilon$$

因此 $f(x)$ 在任一闭区间 $[a,b]$ 上一致收敛到函数 $g(x)=\int_0^1 f(x+t)\,\mathbf{d}t$.

或考虑这样，对$\varepsilon>0$, 取$N=\left[\frac{1}{\delta}\right]+1, \forall n>N, x\in[a,b], t\in\left[\frac{k}{n},\frac{k+1}{n}\right]$，有

$$\left|x+\frac{k}{n}-(x-t)\right|=\left|\frac{k}{n}-t\right|\le\frac{1}{n}<\delta\Rightarrow\left|f\left(x+\frac{k}{n}\right)-f(x+t)\right|<\varepsilon$$

$$\begin{aligned}|f_n(x)-g(x)|&=\left|\sum_{k=0}^{n-1}\int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}}\left[f\left(x+\frac{k}{n}\right)-f(x+t)\right]\right|\\&=\sum_{k=0}^{n-1}\int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}}\left|f\left(x+\frac{k}{n}\right)-f(x+t)\right|\mathrm{d}t\\&<\sum_{k=0}^{n-1}\int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}}\varepsilon\mathrm{d}t=\varepsilon\end{aligned}$$

故$\{f_n(x)\}$在$[a,b]$一致收敛于$\int_0^1 f(x+t)\mathrm{d}t$ □

六.(20 分) 求第二类曲面积分

$$I=\iint\limits_{x^2+2y^2+3z^2=1}\frac{x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}$$

曲面方向为外侧.

✎ **解:** 记$r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$，$D:x^2+2y^2+3z^2=1, D'=\left\{(x,y,z)\,|x^2+2y^2+3z^2=\varepsilon^2\right\}$，设$\Omega=D+(-D')$，由高斯定理

$$\iint\limits_{D+(-D')}P\mathrm{d}y\mathrm{d}z+Q\mathrm{d}z\mathrm{d}x+R\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iiint\limits_{\Omega}\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)=0$$

又$\cos\alpha=\frac{x}{r},\cos\beta=\frac{y}{r},\cos\gamma=\frac{z}{r}$，可得

$$\begin{aligned}\iint\limits_{D}\frac{x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{r^3}&=\iint\limits_{D'}\frac{x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{r^3}\\&=\frac{1}{\varepsilon^2}\iint\limits_{D'}\cos\alpha\mathrm{d}y\mathrm{d}z+\cos\beta\mathrm{d}z\mathrm{d}x+\cos\gamma\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\&=\frac{1}{\varepsilon^2}\iint\limits_{D'}\left(\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma\right)\mathrm{d}s\\&=\frac{1}{\varepsilon^2}\iint\limits_{D'}\mathrm{d}s=4\pi\end{aligned}$$

□

七.(20 分) 设$f:[a,b]\to R$，在闭区间$[a,b]$上单调递增，且$f(a)>a, f(b)<b$. 则存在$\xi\in(a,b)$使得$f(\xi)=\xi$.

☞ **证明:** 由题设$A(a,f(a))$与$B(b,f(b))$分别位于直线$f(x)=x$的上下方，取中点$c=\frac{a+b}{2}$，若点$C(c,f(c))$在直线上，即证. 存在闭区套$[a,b]\supset[a,b]\supset\ldots\supset[a_n,b_n]\supset\ldots$使两端点位于直线上下各一点，有

$$a_n<f(a_n)\text{，}f(b_n)<b_n\text{，}b_n-a_n=\frac{b-a}{2^n}\to 0$$

由闭区间套定理，总存在 $\exists\xi \in [a_n, b_n]$$n = 1, 2, \cdots$，且 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n = \xi$. 根据 f 在 $[a,b]$ 上单调递增，对 $\forall n$ 有 $a_n < b_n$，且 $a_n < f(a_n) \le f(\xi) \le f(b_n) < b_n$，又 $\lim\limits_{n\to\infty}(b_n - a_n) = 0$，即

$$\lim_{n\to\infty} f(b_n) = \lim_{n\to\infty} f(a_n) = f(\xi)，a_n \le f(\xi) \le b$$

因此 $f(\xi) = \xi$.

□

八.(20 分) 设 f 在 $[a,b]$ 可积，证明：对任意的 $\varepsilon > 0$，存在连续函数 f_ε 使得

$$\int_a^b |f(x) - f_\varepsilon(x)|\, dx < \varepsilon$$

☞ **证明:** 由 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积，则对 $\varepsilon > 0$，分割 $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_i = b$，$\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$，使得 $\sum\limits_{i=1}^{n} m_i \Delta x_i \le \varepsilon$，其中 $m_i = \left\{\sup\limits_{x\in\Delta x_i} f(x), \inf\limits_{x\in\Delta x_i} f(x)\right\}$. 在 $[a,b]$ 上作函数 $f_\varepsilon(x)$ 如下，当 $x \in [x_{i-1}, x_i]$ 时，有

$$f_\varepsilon(x) = f(x_{i-1}) + \frac{f(x_i) - f(x_{i-1})}{\mathrm{x_i} - \mathrm{x_{i-1}}}(x - x_i)$$

显然 $f_\varepsilon(x)$ 在 $[a,b]$ 为一次函数，则 $f_\varepsilon(x)$ 在 $[x_i - 1, x_i]$ 上连续，从而 $f_\varepsilon(x)$ 在 $[a,b]$ 连续，即有

$$\begin{aligned}
\int_a^b |f(x) - f_\varepsilon(x)|\mathbf{d}x &= \sum_{i=1}^{n}\int_{x_{i-1}}^{x_i} |f(x) - f_\varepsilon(x)|\mathbf{d}x \\
&\le \sum_{i=1}^{n}\int_{x_{i-1}}^{x_i} m_i \mathbf{d}x = m_i \sum_{i=1}^{n}\int_{x_{i-1}}^{x_i} \mathbf{d}x \\
&= \sum_{i=1}^{n} m_i \Delta x_i \le \varepsilon
\end{aligned}$$

得证.

□

第 24 章 浙江大学 2012 年高等代数试题解析

一.(15 分) 设 E 是 n 阶单位矩阵,

$$M=\begin{pmatrix}0 & E\\ -E & 0\end{pmatrix},$$

矩阵 A 满足 $A^TMA=M.$, 证明 A 的行列式等于 **1.**

☞ **证明:**(法 1) 将 A 分块为

$$A=\begin{pmatrix}A_1 & A_2\\ A_3 & A_4\end{pmatrix}$$

由 $A^TMA=M$ 有

$$\begin{aligned}-A_2A_1^T+A_1A_2^T &= 0\\ -A_2A_3^T+A_1A_4^T &= I\end{aligned}$$

若 A_1 可逆, 由 A 的分块可得

$$|A|=|A_1||A_4-A_3A_1^{-1}A_2|$$

由上面第一式可得

$$A_2=A_1A_2^T(A_1^{-1})^T$$

代入第二式可得

$$A_4-A_3A_1^{-1}A_2=(A_1^{-1})^T$$

从而可得 $|A|=1.$

当 A_1 不可逆时, 考虑矩阵 A_1+tE, 则存在无穷多 t 的值使得 A_1+tE 可逆 (这是因为 $|A_1+tE|$ 是关于 t 的一个多项式, 只能有有限个根.), 由前面的证明有

$$1=\begin{vmatrix}A_1+tE & A_2\\ A_3 & A_4\end{vmatrix}.$$

此式两边是关于 t 的多项式, 且有无穷多 t 的值使得等式成立, 从而等式恒成立. 令 $t=0$ 可得.

(法 2) 博士数学论坛 (www.math.org.cn) 的 **mxcandy** 提供.

由 $A^TMA=M$ 有

$$M(\lambda E-A)=\lambda M-MA=\lambda A^TMA-MA=(\lambda A^T-E)MA.$$

两边取行列式, 由 $|M|=1\neq 0$ 得

$$|\lambda E-A|=|A||\lambda A^T-E|.$$

注意到 A 是 $2n$ 阶矩阵, 以及矩阵的转置行列式不变有

$$|\lambda A^T - E| = |E - \lambda A^T| = |(E - \lambda A^T)^T| = |E - \lambda A|.$$

于是

$$|\lambda E - A| = |A||\lambda A^T - E| = |A||E - \lambda A|.$$

记 A 的特征多项式 $|\lambda E - A| = f(\lambda)$, 则由上式有

$$f(\lambda) = |\lambda E - A| = |A|\lambda^{2n} f(\frac{1}{\lambda}). \tag{*}$$

考虑 $\lambda = 1$, 设 $2n$ 次多项式 $f(\lambda)$ 有分解式

$$f(\lambda) = (\lambda - 1)^m g(\lambda), g(1) \neq 0, 0 \leq m \leq 2n.$$

已知 $A^T MA = M$, 两边取行列式, 可得 $|A|^2 = 1$, 从而 A 可逆, 故

$$MA = (A^T)^{-1} M,$$

由平滑性或者归纳法可得, 对任意自然数 k 有

$$M(E - A)^k = (E - (A^T)^{-1})^k M,$$

从而

$$M(E-A)^{2k} = M(E-A)^k(E-A)^k = (E-(A^T)^{-1})^k M(E-A)^k = -(A^T)^{-k}(E-A)^k M(E-A)^k.$$

由 $M^T = -M$ 知,$(E - A)^k M(E - A)^k$ 反对称, 注意到 $|M| = 1$, 从而

$$\mathbf{rank}\,((E - A)^{2k}) = \mathbf{rank}\,((E - A)^k M(E - A)^k).$$

由于反对称矩阵的秩为偶数, 从而 $\mathbf{rank}\,((E - A)^{2k})$ 为偶数. 特别的, 任取 $2k \geq m$, 则特征值 $\lambda = 1$ 的代数重数 m 为偶数, 即

$$m = 2n - \mathbf{rank}\,((E - A)^{2k}) \triangleq 2p, 2k \geq m, 0 \leq p \leq n.$$

把 $f(\lambda) = (\lambda - 1)^{2p} g(\lambda)$ 代入到 (*) 式, 得

$$(\lambda - 1)^{2p} g(\lambda) = |A|\lambda^{2n}(\frac{1}{\lambda} - 1)^{2p} g(\frac{1}{\lambda}),$$

即

$$g(\lambda) = |A|\lambda^{2n-2k} g(\frac{1}{\lambda}),$$

令 $\lambda = 1$, 并注意到 $g(1) \neq 0$, 可得 $|A| = 1$.

注 1: 满足题目条件的矩阵 A 称为辛矩阵.

注 2: 由上述证明知：辛矩阵的特征多项式自反，特征值互倒成对，$\lambda = \pm 1$ 代数重数为偶数.

(法 3) 许以超，线性代数与矩阵论 (第二版). 高等教育出版社.**P329.**

(法 4) 许以超，线性代数与矩阵论 (第二版). 高等教育出版社.**P405.**

(法 5) 高等代数中的一些问题. 博士数学论坛 (www.math.org.cn)**xida.P7.** □

二.(15 分) 设 A 是 n 阶幂等矩阵，满足

(1)$A = A_1 + \cdots + A_s$;

(2)$r(A) = r(A_1) + \cdots + r(A_s)$.

证明：所有的 A_i 都相似于一个对角阵，A_i 的特征值之和等于矩阵 A_i 的秩.

证明: 只需证明 A_i 是幂等矩阵. 利用 n 阶矩阵 C 是幂等矩阵的充要条件为 $r(C) + r(C - E) = n$，只需证明 $r(A_i - E) = n - r(A_i)$. 利用矩阵秩的不等式

$$|r(A) - r(B)| \le r(A \pm B) \le r(A) + r(B)$$

以及题目条件有

$$\begin{aligned} n - r(A_i) \le r(A_i - E) &= r(A - E - (A_1 + \cdots + A_{i-1} + A_{i+1} + \cdots + A_s)) \\ &\le r(A - E) + r(A_1 + \cdots + A_{i-1} + A_{i+1} + \cdots + A_s) \\ &\le r(A - E) + r(A_1) + \cdots + r(A_{i-1}) + r(A_{i+1}) + \cdots + r(A_s) \\ &= n - r(A) + r(A) - r(A_i) \\ &= n - r(A_i). \end{aligned}$$

从而 $r(A_i - E) = n - r(A_i)$. □

三.(15 分) 设 ϕ 是 n 维欧氏空间的正交变换，证明:ϕ 最多可以表示为 $n + 1$ 个镜面反射的复合.

证明:(法 1) 设 α 是 n 维欧氏空间 V 中的单位向量，定义线性变换

$$\sigma(\beta) = \beta - (\beta, \alpha)\alpha, \forall \beta \in V,$$

则 σ 是 V 的正交变换，称为镜面反射 (镜像变换). 计算可得 $\sigma^2 = I$(恒等变换).

设 α_1, α_2 是 n 维欧氏空间 V 中的两个长度相等的不同向量，则存在镜面反射 σ 使得 $\sigma(\alpha_1) = \alpha_2$.

实际上，令 $\alpha = \dfrac{\alpha_1 - \alpha_2}{|\alpha_1 - \alpha_2|}$，定义 $\sigma(\beta) = \beta - (\beta, \alpha)\alpha, \forall \beta \in V$ 即可.

下面证明原问题. 对空间的维数 n 用数学归纳法.

当 $n = 1$ 时，设 e_1 是 V 的单位向量，则 $V = L(e_1)$. 由于 $\phi(e_1) \in V$，故存在实数 λ 使得 $\phi(e_1) = \lambda e_1$，由 ϕ 是正交变换可得

$$1 = (e_1, e_1) = (\phi(e_1), \phi(e_1)) = \lambda^2 (e_1, e_1) = \lambda^2,$$

因此 $\lambda = \pm 1$. 令

$$\tau(\alpha) = \alpha - 2(\alpha, e_1)e_1, \forall \alpha \in V,$$

则 τ 是镜面反射, 且当 $\lambda = 1$ 时, 对 $\forall \alpha \in V$, 设 $\alpha = ke_1, k \in R$ 则

$$\phi(\alpha) = k\phi(e_1) = ke_1, \forall \alpha = ke_1 = \alpha, \in V,$$

即 ϕ 是恒等变换. 而

$$\tau^2(\alpha) = k\tau^2(e_1) = k\tau(-e_1) = ke_1 = \alpha,$$

即 τ^2 也是恒等变换, 从而 $\phi = \tau^2$. 而当 $\lambda = -1$ 时, 显然 $\phi = \tau$.

假设结论对 $n-1$ 维欧氏空间成立, 对 n 维欧氏空间 V 的一正交变换 ϕ, 若 $\phi = I$, 则对 V 的任一镜面反射 σ 有 $\phi = I = \sigma^2$. 若 $\phi \neq I$, 则存在 V 的单位向量 e 使得 $\phi(e) = \eta \neq e$, 由于 $|\eta| = |\phi(e)|$, 从而存在 V 的镜面反射 τ 使得

$$\tau(\eta) = e.$$

于是

$$\tau(\phi(e)) = e.$$

令 $W = L(e)$, 由于 $\tau\phi$ 仍为正交变换, 故 $W^{\perp}$ 是 $\tau\phi$ 的 $n-1$ 维不变子空间, 且 $\tau\phi|_{W^{\perp}}$ 为正交变换. 由归纳假设, 在 $W^{\perp}$ 中存在单位向量 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_k$, 它们分别决定 $W^{\perp}$ 的镜面反射 $\sigma_1, \sigma_2, \cdots, \sigma_k$ 使得

$$\tau\phi|_{W^{\perp}} = \sigma_1\sigma_2\cdots\sigma_k,$$

现将 σ_i 的定义扩大到 V, 即补充定义 $\sigma_i(e) = e$. 则 σ_i 即为 α_i 决定的 V 的镜面反射. 这是因为 $\forall \alpha \in V$, 设 $\alpha = \beta_1 + \beta_2, \beta_1 = ke \in W = L(e), \beta_2 \in W^{\perp}$, 注意到 $(\beta_1, \alpha_i) = 0$, 则

$$\begin{aligned}\sigma_i(\alpha) &= \sigma_i(\beta_1) + \sigma(\beta_2)\\ &= \beta_1 + \beta_2 - 2(\beta_2, \alpha_i)\alpha_i\\ &= \alpha - 2(\alpha, \alpha_i)\alpha_i.\end{aligned}$$

现在显然有 $\sigma_1\sigma_2\cdots\sigma_k(\beta_1) = \beta_1$, 这是因为 $\tau\phi(e) = e$, 故 $\tau\phi(\beta_1) = \beta_1$. 从而

$$\begin{aligned}\tau\phi(\alpha) &= \tau\phi(\beta_1) + \tau\phi(\beta_2)\\ &= \beta_1 + \sigma_1\sigma_2\cdots\sigma_k(\beta_2)\\ &\sigma_1\sigma_2\cdots\sigma_k(\beta_1) + \sigma_1\sigma_2\cdots\sigma_k(\beta_2)\\ &= \sigma_1\sigma_2\cdots\sigma_k(\alpha)\end{aligned}$$

从而 $\tau\phi = \sigma_1\sigma_2\cdots\sigma_k$. 注意到 $\tau^2 = I$, 有

$$\phi = \tau\sigma_1\sigma_2\cdots\sigma_k.$$

(法 2)n 阶矩阵 $M = E - 2\alpha\alpha^T$, 其中 α 是 n 维实列向量, 且 $\alpha^T\alpha = 1$. 则矩阵 M 是正交矩阵, 称为镜像矩阵. 容易验证 $M^2 = E$. 即单位矩阵是两个镜像矩阵之积.

设 α, β 是两个不同的 n 维实列向量, 且 $|\alpha| = |\beta|$, 则存在实镜像矩阵 M 使得 $M\alpha = \beta$. 实际上, 令 $\alpha = \dfrac{\alpha-\beta}{|\alpha-\beta|}, M = E - 2\alpha\alpha^T$ 即可.

可以证明欧氏空间中的线性变换 ϕ 是镜面反射的充要条件是 ϕ 在一组标准正交基下的矩阵为镜像矩阵.

这样要证明原问题, 只需证明任意 n 阶实正交矩阵 A 可以分解不超过 $n+1$ 个镜像矩阵之积即可.

对矩阵的阶数 n 用数学归纳法.

$n = 1$ 时, 结论显然成立.

假设结论对 $n-1$ 阶矩阵成立, 将 n 阶正交矩阵 A 按列分块为

$$= (\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n),$$

则 $|\alpha_1| = 1$, 从而存在镜像矩阵 $M_{⊠}$ 使得 $M_1\alpha_1 = (1, 0, \cdots, 0)^T$, 注意到 $M_1 A$ 还是正交矩阵, 必有

$$M_1 A = M_1(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n) = (M_1\alpha_1, M_1\alpha_2, \cdots, M_1\alpha_n) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & Q_1 & \\ 0 & & & \end{pmatrix}$$

容易验证 Q_1 也是正交矩阵, 从而由归纳假设, 存在 $n-1$ 阶镜像矩阵 $M_2, \cdots, M_k$ 使得

$$Q_1 = M_2 \cdots M_k,$$

于是

$$A = M_1^{-1}\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & Q_1 & \\ 0 & & & \end{pmatrix} = M_1^{-1}\begin{pmatrix} 1 & \\ & M_2 \cdots M_k \end{pmatrix} = M_1^{-1}\begin{pmatrix} 1 & \\ & M_2 \end{pmatrix} \cdots \begin{pmatrix} 1 & \\ & M_k \end{pmatrix}.$$

易知 $\begin{pmatrix} 1 & \\ & M_i \end{pmatrix}$ 都是镜像矩阵.

□

四.(15 分) 设 A 是 n 阶复矩阵, 证明存在常数项等于 **0** 的多项式 $g(\lambda), h(\lambda)$ 使得 $g(A)$ 是可以对角化的矩阵,$h(A)$ 是幂零矩阵, 且 $A = g(A) + h(A)$.

☞ **证明:**等我看看能否找到一个好的方法. □

五.(15 分) 设 $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -2 \\ k & -1 & -k \\ 4 & 2 & -3 \end{pmatrix}$.

(i) 当 k 为何值时, 存在矩阵 P 使得 $P^{-1}AP$ 为对角矩阵? 并求出这样的矩阵 P 和对角矩阵.

(ii) 求 $k=2$ 时矩阵 A 的 **Jordan** 标准形.

☞ **证明:** 由于

$$|A-\lambda E|=\begin{vmatrix}3-\lambda & 2 & -2\\ k & -1-\lambda & -k\\ 4 & 2 & -3-\lambda\end{vmatrix}=-(\lambda+1)^2(\lambda-1),$$

故 A 的特征值为

$$\lambda_1=-1(\text{二重}),\lambda_2=1.$$

(i) 存在矩阵 P 使得 $P^{-1}AP$ 为对角矩阵的充要条件是特征值的代数重数等于几何重数, 即 $r(A-\lambda_1E)=1$, 而

$$A-\lambda_1E=\begin{pmatrix}4 & 2 & -2\\ k & 0 & -k\\ 4 & 2 & -2\end{pmatrix},$$

从而 $k=0$.

P 可以是

$$P=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ -2 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 1\end{pmatrix},$$

此时 $P^{-1}AP=diag(-1,-1,1)$.

(2)$k=2$ 时

$$\lambda E-A=\begin{pmatrix}\lambda-3 & -2 & 2\\ -2 & \lambda+1 & 2\\ -4 & -2 & \lambda+3\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & & \\ & 1 & \\ & & (\lambda+1)^2(\lambda-1)\end{pmatrix},$$

所以 A 的 **Jordan** 标准形为

$$\begin{pmatrix}-1 & 1 & \\ & -1 & \\ & & 1\end{pmatrix}.$$

□

六.(15 分) 令二次型 $f(x_1,\cdots,x_n)=\sum\limits_{i=1}^{m}(a_{i1}x_1+\cdots+a_{in}x_n)^2$.

(i) 求此二次型的方阵.

(ii) 当 a_{ij} 均为实数时, 给出此二次型为正定的条件.

☞ **证明:** (i) 由于

$$(a_{i1}x_1+\cdots+a_{in}x_n)^2=(x_1,\cdots,x_n)\begin{pmatrix}a_{i1}\\ \vdots\\ a_{in}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_{i1} & \cdots & a_{in}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix},$$

故

$$
\begin{aligned}
f(x_1,\cdots,x_n) &= \sum_{i=1}^{m}(a_{i1}x_1+\cdots+a_{in}x_n)^2 \\
&= \sum_{i=1}^{n}(x_1,\cdots,x_n)\begin{pmatrix} a_{i1} \\ \vdots \\ a_{in}\end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_{i1} & \cdots & a_{in}\end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n\end{pmatrix} \\
&= (x_1,\cdots,x_n)\begin{pmatrix} \sum\limits_{i=1}^{n} a_{i1}^2 & \cdots & \sum\limits_{i=1}^{n} a_{i1}a_{in} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \sum\limits_{i=1}^{n} a_{in}a_{i1} & \cdots & \sum\limits_{i=1}^{n} a_{in}^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n\end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

.

若记 $A=(a_{ij})_{n\times n}$, 则 $f(x_1,\cdots,x_n)=(x_1,\cdots,x_n)(A^TA)\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n\end{pmatrix}$.

故所求矩阵为 A^TA.

(2) 当 a_{ij} 为实数时,A^TA 是半正定的, 故 $f(x_1,\cdots,x_n)=(x_1,\cdots,x_n)(A^TA)\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n\end{pmatrix}$

正定的充要条件是 $r(A^TA)=n$. 而 $r(A^TA)=r(A)$, 故原二次型正定的充要条件是 $r(A)=n$. □

七.(15 分) 设 V 和 W 是数域 K 上的线性空间,$Hom_K(V,W)$ 表示 V 到 W 的所有线性映射组成的线性空间. 证明: 对 $f,g\in Hom_K(V,W)$, 若 $Imf\cap Img=\{0\}$, 则 f,g 在 $Hom_K(V,W)$ 中是线性无关的.

☞ **证明:** 注: 这里应该假设 $f\neq 0, g\neq 0$. 否则题目无意义.

反证法. 假设 $f=kg, k\in K$, 由于 $f\neq 0$, 故存在 $\alpha\in V$, 使得 $0\neq f(\alpha)\in Imf\subset W$, 此时

$$o\neq \frac{1}{k}f(\alpha)=g(\alpha)\in Img,$$

注意到 Img 是 W 的字空间, 从而 $f(\alpha)\in Img$, 这样 $0\neq f(\alpha)\in Imf\cap Img$. 这与条件矛盾. □

八.(15 分) 令线性空间 $V=Imf\oplus W$, 其中 W 是线性变换 f 的不变子空间.

(i) 证明 $W\subseteq Kerf$;

(ii) 证明若 V 是有限维线性空间, 则 $W=Kerf$;

(iii) 举例说明, 当 V 是无限维的, 可能有 $W\subseteq Kerf$, 且 $W\neq Kerf$.

☞ **证明:** **(i)**$\forall\alpha\in W$, 则由条件有

$$f(\alpha)\in Imf\cap W,$$

注意到 $V=Imf\oplus W$, 从而 $Imf\cap W=\{0\}$, 故 $f(\alpha)=0$. 即 $\alpha\in Kerf$. 这就证明了 $W\subseteq Kerf$.

(2) 由 (i), 要证明 $W = Kerf$, 只需证明 $dimW = dimKerf$. 而由 $V = Imf \oplus W$ 以及维数公式 $dimV = dimImf + dimKerf$ 有

$$dimW = dimV - dimImf = dimKerf.$$

从而结论成立.

(3) 例:$V = P[x]$ 是数域 P 上关于 x 的一元多项式的全体, 则 V 是无限维线性空间, $f(p(x)) = p'(x)$ 为 V 上的求导线性变换, 则

此时 $Imf = V, Kerf = P, W = \{0\}$. □

九.(15 分) 设 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 3 & -1 & 0 \\ -2 & 1 & 4 & -1 & 3 \\ 3 & -1 & -5 & 1 & -6 \end{pmatrix}$.

(i) 求 5×5 阶秩为 **2** 的矩阵 M, 使得 $AM = 0$;

(ii) 假如 B 是满足 $AB = 0$ 的 5×5 阶矩阵, 证明: 秩 $\mathbf{rank}(B) \le 2$.

☞ **证明:** 将 M 按列分块为

$$M = (m_1, m_2, m_3, m_4, m_5),$$

则

$$0 = AM = A(m_1, m_2, m_3, m_4, m_5) = (Am_1, Am_2, Am_3, Am_4, Am_5),$$

即 $Am_i = 0, i = 1,2,3,4,5$. 此即 m_i 是线性方程组 $Ax = 0$ 的解.

(i) 求解 $Ax = 0$ 可得其一个基础解系为

$$\alpha_1 = (-1,2,1,0)^T, \alpha_2 = (3,1,0,-2,0)^T.$$

故可取

$$M = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_1, \alpha_1, \alpha_1).$$

(ii) 注意到 B 的列向量是方程组 $Ax = 0$ 的解, 而方程组的任一解皆可由其基础解系线性表示, 故 B 的列向量可由 α_1, α_2 线性表示, 故 $r(B) \le 2$. □

十.(15 分) 令 T 是有限维线性空间 V 的线性变换, 设 W 是 V 的 $T-$ 不变子空间. 那么 $T|_W$ 的最小多项式整除 T 的最小多项式.

☞ **证明:** 易知 W 是平凡子空间, 即 $W = \{0\}$或$W = V$ 时, 结论成立.

下面假设 $T(\alpha_1, \cdots, \alpha_r, \alpha_{r+1}, \cdots, \alpha_n) = (\alpha_1, \cdots, \alpha_r, \alpha_{r+1}, \cdots, \alpha_n)\begin{pmatrix} A_{r\times r} & B \\ 0 & C_{(n-r)\times(n-r)} \end{pmatrix}$.

设 $T|_W, T$ 的最小多项式分别为 $m_T(x), m(x)$, 则

$$0 = m(\begin{pmatrix} A_{r\times r} & B \\ 0 & C_{(n-r)\times(n-r)} \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} m(A_{r\times r}) & * \\ 0 & m(C_{(n-r)\times(n-r)}) \end{pmatrix},$$

从而 $m(A) = 0$, 即 $m(x)$ 是 $T|_W$ 的零化多项式, 从而 $m_T(x)|m(x)$ □

第 25 章 历年数学竞赛真题与模拟赛题解析

25.1 第十届全国大学生数学竞赛模拟赛题 (一) 解析

一、填空题 (本题满分 42 分，每题 7 分)

1. 级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n 4^{2n}\left(\dfrac{e^x-1}{e^x+1}\right)^{4n+1}$ 的收敛区间是$\underline{-\ln 3<x<\ln 3}$.

2. 设 $y=y(x)$ 由方程 $2x-\int_1^{x+y}e^{-t^2}\mathrm{d}t=xy$ 确定, 则 $y'(0)=\underline{e-1}$.

3. 将 $\int_0^2\mathrm{d}x\int_x^{\sqrt{3}x}f\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)\mathrm{d}y$ 化成极坐标形式的二次积分为$\underline{\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}\mathrm{d}\theta\int_0^{2\sec\theta}f(r)\,r\mathrm{d}r}$.

4. 不定积分 $\int\dfrac{(x\cos^3x-\sin x)e^{\sin x}}{\cos^2x}\mathrm{d}x=\underline{xe^{\sin x}-\sec xe^{\sin x}+C}$.

5. 设 $a_n>0(n=1,2,\cdots)$, $\sum_{n=1}^{\infty}a_n=1$, $A_n=\sum_{k=1}^{n}a_k$, 求极限 $e\lim_{n\to+\infty}\dfrac{e^{A_n}-e^{A_{n-1}}}{A_n^e-A_{n-1}^e}=\underline{1}$.

6. 计算曲线积分 $\oint_c\left(x+\sqrt{2}y^3z\right)\mathrm{d}x+\left(x-\sqrt{2}y\right)\mathrm{d}y+(x+y+z)\,\mathrm{d}z=\underline{\dfrac{1+2\sqrt{2}}{4}\pi}$, 其中 c 为 $x^2+2y^2=1$ 与 $x^2+2y^2=-z$ 的交线.

二、解答题 (本题满分 14 分) 求下列定积分: $I=\int_0^1\int_0^1\dfrac{\sin^{-1}\left(\sqrt{1-x}\sqrt{y}\right)}{\sqrt{1-y}\sqrt{1-y+xy}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$

✎ **解:** 令 $1-x=u^2$, $y=x^2$, 可得到:

$$\begin{aligned}
I&=4\int_0^1\int_0^1\frac{uv\sin^{-1}(uv)}{\sqrt{1-v^2}\sqrt{1-u^2v^2}}\mathrm{d}u\mathrm{d}v\\
&=4\int_0^1\frac{\mathrm{d}v}{\sqrt{1-v^2}}\int_0^1\frac{uv\arcsin(uv)}{\sqrt{1-u^2v^2}}\mathrm{d}u\\
&=4\int_0^1\frac{\mathrm{d}v}{v\sqrt{1-v^2}}\int_0^v\frac{\arcsin u}{\sqrt{1-u}}\mathrm{d}u\\
&=4\int_0^1\frac{v-\sqrt{1-v^2}\arcsin v}{v\sqrt{1-v^2}}\mathrm{d}v\\
&=4\int_0^1\frac{\mathrm{d}v}{\sqrt{1-v^2}}-4\int_0^1\frac{arc\sin v}{v}\mathrm{d}v\\
&=2\pi+4\int_0^1\frac{\ln v}{\sqrt{1-v^2}}\mathrm{d}v
\end{aligned}$$

这里在对 $\int_0^1\dfrac{\ln x}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x$ 进行计算，三角变换 $x=\sin\theta$ 得到：原积分得 $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\sin x\mathrm{d}x$。首先说明这是一个著名的广义积分叫 Euler。先证明瑕积分收敛，其次用变量代换计算，

而计算这个瑕积分是有一定技巧性的，因为从 $y=\sin x$ 与 $y=\cos x$ 在区间 $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ 面积相等，直接说根据对称性可知。变量代换$x=\frac{\pi}{2}-t$， 可得：

$$J=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\sin x\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\cos x\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\ln\sin x+\ln\cos x)\,\mathrm{d}x$$
$$=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\ln 2\sin x-\ln 2)\mathrm{d}x$$

令$t=2x$，$J=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\sin t\mathrm{d}t-\frac{\pi}{4}\ln 2\Rightarrow J=\frac{1}{2}J-\frac{\pi}{4}\ln 2\Rightarrow J=-\frac{\pi}{2}\ln 2$

所以就有：

$$I=\int_0^1\int_0^1\frac{\sin^{-1}\left(\sqrt{1-x}\sqrt{y}\right)}{\sqrt{1-y}\sqrt{1-y+xy}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=2\pi\,(1-\ln 2)$$

□

三、解答题 (本题满分 14 分) 已知 $F(x,y)=f(x)g(y)=s(\sqrt{x^2+y^2})$，其中 f,g,s 都是连续可微函数，试建立 $f(x)$ 与 $g(y)$ 所满足的微分方程, 并证明：$F(x,y)=\bar{c}e^{c(x^2+y^2)}$，其中 $\bar{c},c$ 为任意常数

✎ **解:** 由题意易知：

$$f'(x)g(y)=s'(\sqrt{x^2+y^2})\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\text{⊠}f(x)g'(y)=s'(\sqrt{x^2+y^2})\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

$$\Rightarrow yf'(x)g(y)=xf(x)g'(y)$$
$$\Rightarrow\frac{f'(x)}{xf(x)}=\frac{g'(y)}{yg(y)}=c_1$$

其中 c_1 为某常数。因此 $\int\frac{f'(x)}{f(x)}\mathrm{d}x=\int c_1x\mathrm{d}x$，可得到：

$$\Rightarrow f(x)=Ae^{\frac{1}{2}c_1x^2},g(y)=Be^{\frac{1}{2}y^2}$$

所以就有

$$F(x,y)=ABe^{\frac{1}{2}c_1(x^2+y^2)}=\bar{c}e^{c(x^2+y^2)}$$

□

四、解答题 (本题满分 15 分) 设 $a>0$，判别级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a^{\frac{n(n+1)}{2}}}{(1+a)(1+a^2)\cdots(1+a^n)}$ 的敛散性.

✎ **解:** 令级数一般项 b_n，显然：

$$\lim_{n\to\infty}\frac{b_{n+1}}{b_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{a^{\frac{(n+1)(n+2)}{2}}}{(1+a)(1+a^2)\cdots(1+a^n)(1+a^{n+1})}}{\frac{a^{\frac{n(n+1)}{2}}}{(1+a)(1+a^2)\cdots(1+a^n)}}=\lim_{n\to\infty}\frac{a^{n+1}}{1+a^{n+1}}=\begin{cases}0,a<1\\\frac{1}{2},a=1\\1,a>1\end{cases}$$

由达朗贝尔判别法知道，当 $a \le 1$ 时级数收敛。

考虑 $a > 1$

$$b_n = \frac{a^{\frac{n(n+1)}{2}}}{(1+a)(1+a^2)\cdots(1+a^n)} = \frac{1}{(1+a_1)(1+a_1{}^2)\cdots(1+a_1{}^n)}(0 < a_1 = \frac{1}{a} < 1)$$

令 $c_n = (1+a_1)(1+a_1{}^2)\cdots(1+a_1{}^n)$，显然 $\{c_n\}$ 单增，下证其有界。由 $x > 0, \mathbf{e}^x > 1+x$ 可知

$$c_n = (1+a_1)(1+a_1{}^2)\cdots(1+a_1{}^n) < \mathbf{e}^{a_1}\mathbf{e}^{a_1{}^2}\cdots\mathbf{e}^{a_1{}^n} = \mathbf{e}^{\frac{a_1-a_1{}^{n+1}}{1-a_1}} < \mathbf{e}^{\frac{a_1}{1-a_1}}$$

从而 $\{c_n\}$ 单调有界则其收敛，且其极限介于 $\mathbf{1}$ 与 $e^{\frac{a_1}{1-a_1}}$，从而 $\lim\limits_{n\to\infty} b_n$ 存在，其值大于 $\mathbf{0}$，从而原级数发散。

综上所述：$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{a^{\frac{n(n+1)}{2}}}{(1+a)(1+a^2)\cdots(1+a^n)}$ 当 $0 < a \le 1$ 时收敛，当 $a > 1$ 时发散. □

五、解答题 (本题满分 15 分) 计算 $I = \iint\limits_{\Sigma}(x-a)yz\mathbf{d}x\mathbf{d}y + x^2\mathbf{d}y\mathbf{d}z + y^2\mathbf{d}z\mathbf{d}x$，其中 Σ 是 $z-c = \sqrt{R^2-(x-a)^2-(y-b)^2}$ 的上侧.

✎ **解:** 记 $\Sigma_1 : (x-a)^2+(y-b)^2 \le R^2, z = c$，取下侧，则 Σ 与 Σ_1 构成了外侧的封闭的半球面，由高斯公式：

$$I = \iiint\limits_{(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2\le R^2, z\ge c}[2x+2y+y(x-a)]\mathbf{d}x\mathbf{d}y\mathbf{d}z - \iint\limits_{\Sigma_1}x^2\mathbf{d}y\mathbf{d}z + y^2\mathbf{d}z\mathbf{d}x + (x-a)yz\mathbf{d}x\mathbf{d}y$$

对第一项的三重积分作平移变换:$u = x-a, v = y-b, w = z-c$，把原点平移到球心上，其变换的雅克比行列式 $\dfrac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)} = 1$，所以：

$$\iiint\limits_{(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2\le R^2, z\ge c}[2x+2y+y(x-a)]\mathbf{d}x\mathbf{d}y\mathbf{d}z$$

$$= \iiint\limits_{u^2+v^2+w^2\le R^2, w\ge 0}[2(u+a+v+b)+u(v+b)]\mathbf{d}u\mathbf{d}v\mathbf{d}w$$

$$= 0 + \iiint\limits_{u^2+v^2+w^2\le R^2, w\ge 0}2(a+b)\mathbf{d}u\mathbf{d}v\mathbf{d}w = 2(a+b)\times\frac{1}{2}\times\frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{4}{3}\pi(a+b)R^3$$

其中利用了对称性。第二项积分为:

$$\iint\limits_{\Sigma_1}x^2\mathbf{d}y\mathbf{d}z + y^2\mathbf{d}z\mathbf{d}x + (x-a)yz\mathbf{d}x\mathbf{d}y = \iint\limits_{\Sigma_1}(x-a)yz\mathbf{d}x\mathbf{d}y$$

$$= \iint\limits_{(x-a)^2+(y-b)^2\le R^2}(x-a)yc\mathbf{d}x\mathbf{d}y = \iint\limits_{u^2+v^2\le R^2}u(v+b)c\mathbf{d}x\mathbf{d}y = 0$$

其中利用了平移变换和对称性，所以得到：

$$I = \iint\limits_{\Sigma}(x-a)yz\mathbf{d}x\mathbf{d}y + x^2\mathbf{d}y\mathbf{d}z + y^2\mathbf{d}z\mathbf{d}x = \frac{4}{3}\pi(a+b)R^3$$

□

25.2 第十届全国大学生数学竞赛模拟赛题 (二) 解析

一、填空题 (本题满分 42 分，每题 7 分)

1. $F(x, x+y, x+y+z) = 0$，F 可微，那么 $\dfrac{\partial F}{\partial y} = \underline{F_2' + F_3'}$.

2. 已知：$y = x^2 \sin x$, 求 $y^{(2013)}(0) = \underline{= -4050156}$.

3. 若 $\{a_n\}, \{b_n\}$ 为正数列，$\lim\limits_{n\to\infty}(a_n)^n = a > 0$, $\lim\limits_{n\to\infty}(b_n)^n = b > 0$, 又设 p, q 为非负数，且 $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$, 求 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{p}a_n + \dfrac{1}{q}b_n\right)^n = \underline{a^{\frac{1}{p}} \cdot b^{\frac{1}{q}}}$.

4. $\displaystyle\int_0^\infty \ln\left(\frac{4}{x^2}+1\right)\ln\left(\frac{9}{x^2}+1\right)\mathrm{d}x = \underline{2\pi(5\ln 5 - 3\ln 3 - 2\ln 2)}$.

5. 微分方程 $y\,\mathrm{d}x + \sqrt{1+x^2}\,\mathrm{d}y = 0$ 的通解是 $\underline{y = \dfrac{c}{x+\sqrt{x^2+1}}}$.

6. 直线 $\begin{cases} x = 2z \\ y = 1 \end{cases}$，绕 z 轴旋转一周的方程为:$\underline{x^2 + y^2 - 4z^2 = 1}$.

二、解答题 (本题满分 14 分)

设函数 $f(x) = |x|$.

(1) 求 $f(x)$ 在 $[-\pi, \pi]$ 上的 **Fourier** 展开式，并写出和函数；

(2) 计算 $\displaystyle\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{(2n-1)^4}$ 和 $\displaystyle\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^4}$.

✎ **解:** (1) 显然 $f(x) = |x|$ 在 $[-\pi, \pi]$ 上为偶函数，故 $b_n = 0$，就有：

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}\int_0^{\pi} x\,\mathrm{d}x = \pi$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}\int_0^{\pi} x\cos nx\,\mathrm{d}x = \frac{2}{\pi n^2}\left[(-1)^n - 1\right]$$

$$f(x) = |x| = \frac{\pi}{2} + \sum_{n=1}^\infty \frac{2}{\pi n^2}\left[(-1)^n - 1\right]\cos nx = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{(2n-1)^2}\cos(2n-1)x$$

(2) 由于 *Parseval* 等式，若 $f(x)$ 的 **Fourier** 级数展开在 $[-\pi, \pi]$ 一致收敛 $f(x)$，则有:

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^\infty \left(a_n^2 + b_n^2\right) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)\mathrm{d}x$$

将 $f(x) = |x|$代入得到：$\displaystyle\frac{\pi^2}{2} + \sum_{n=1}^\infty \frac{4}{\pi^2 n^4}\left[(-1)^n - 1\right]^2 = \frac{\pi^2}{2} + \frac{16}{\pi^2}\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{(2n-1)^4} = \frac{2\pi^2}{3}$

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{(2n-1)^4} = \frac{\pi^4}{96}$$

又由 $\displaystyle\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^4} = \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{(2n-1)^4} + \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{(2n)^4} = \frac{\pi^4}{96} + \frac{1}{16}\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^4}$，得到 $\displaystyle\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}$ □

三、解答题 (本题满分 14 分) 设半径为 R 的球面上均匀分布着某种质量，求其产生的引力场。

✎ **解:** 取曲面面积微元 $d\sigma$，并设 $M(x,y,z)$ 是其球面上一点，则该球面对 P 的 l 方向引力为 $\overline{F}=(F_x,F_y,F_z)$，由对称性及球面均匀可知，$F_x=F_y=0$.
利用球面坐标，有：

$$\left\{\begin{array}{l} x=R\sin\theta\cos\varphi \\ y=R\sin\theta\sin\varphi \\ z=R\cos\theta \end{array}\right. \quad (0\le\theta\le\pi,0\le\varphi\le2\pi),\mathrm{d}\sigma=R^2\sin\theta\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi$$

$$\begin{aligned} F &= \iint_S \frac{G(z-l)}{\left[x^2+y^2+(z-a)^2\right]^{\frac{3}{2}}}\mathrm{d}\sigma=\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\frac{R\cos\theta-l}{(R^2+a^2-2aR\cos\theta)^{\frac{3}{2}}}R^2\sin\theta\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi \\ &= 2\pi GR^2\int_0^{\pi}\frac{(R\cos\theta-l)\sin\theta}{(R^2+l^2-2Rl\cos\theta)^{\frac{3}{2}}}\mathrm{d}\theta\left(\text{令}t=\sqrt{R^2+l^2-2Rl\cos\theta}\right) \\ &= G\frac{\pi R}{l^2}\int_{|R-l|}^{R-l}\left(\frac{R^2-l^2}{t^2}-1\right)\mathrm{d}t=\frac{1}{l^2}\left(\frac{R-l}{|R-L|}-1\right) \\ &= \left\{\begin{array}{ll} -G\dfrac{4\pi R^2}{l^2} & R<l \\ 0 & R>l \end{array}\right. \quad (\text{其中}G\text{为引力系数}) \end{aligned}$$

□

四、解答题 (本题满分 15 分) 设正值函数 $f\in C[a,b]$,定义 $x_n=\int_a^b f^n(x)\,\mathrm{d}x\ (n\in N)$.
证明:
(1) 对任意 $n\in N$ 成立 $(x_{n+1})^2\le x_nx_{n+2}$;
(2) 数列 $\left\{\frac{x_{n+1}}{x_n}\right\}$ 收敛，且有 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x_{n+1}}{x_n}=\max\limits_{a\le x\le b}\{f(x)\}$.

☞ **证明:** (1) 要证 $\left[\int_a^b f^{n+1}(x)\,\mathrm{d}x\right]^2\le\left[\int_a^b f^n(x)\,\mathrm{d}x\right]\left[\int_a^b f^{n+2}(x)\,\mathrm{d}x\right]$, 由 **Cauchy Schwarz** 不等式

$$\left[\int_a^b f^{n+1}(x)\,\mathrm{d}x\right]^2=\left[\int_a^b f^{\frac{n}{2}}(x)\,f^{\frac{n+2}{2}}\mathrm{d}x\right]^2\le\left[\int_a^b f^n(x)\,\mathrm{d}x\right]\left[\int_a^b f^{n+2}(x)\,\mathrm{d}x\right]$$

所以对于 $\forall n\in N$，显然有 $(x_{n+1})^2\le x_nx_{n+2}$ 成立

(2) 由题意知，$x_n=\int_a^b f^n(x)\,\mathrm{d}x$ 恒为正，且依据 (1) 知可得：$\frac{x_{n+1}}{x_n}\le\frac{x_{n+2}}{x_{n+!}}$.
从而对 $\forall n\in N$，有 $\left\{\frac{x_{n+1}}{x_n}\right\}$ 单调递增，设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有最大值 $M=\max\limits_{a\le x\le b}\{f(x)\}$

则有：$\dfrac{x_{n+1}}{x_n}=\dfrac{\int_a^b f^{n+1}(x)\,\mathrm{d}x}{\int_a^b f^n(x)\,\mathrm{d}x}\le\dfrac{M\int_a^b f^n(x)\,\mathrm{d}x}{\int_a^b f^n(x)\,\mathrm{d}x}=M$，即 $\left\{\frac{x_{n+1}}{x_n}\right\}$ 有上界.

所以根据单调有界准则可知 $\left\{\frac{x_{n+1}}{x_n}\right\}$ 收敛，且由 $stolz$ 定理得：

$$\lim_{n\to\infty}\left\{\frac{x_{n+1}}{x_n}\right\}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{x_n}=\max_{a\le x\le b}\{f(x)\}$$

□

五、解答题 (本题满分 15 分) 设函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上可积，且在 $x=1$ 处连续，证明：

(1). $\lim_{n\to\infty}\int_0^1 x^n f(x)\mathrm{d}x=0$； **(2).** $\lim_{n\to\infty}(n+1)\int_0^1 x^n f(x)\mathrm{d}x=f(1)$.

☞ **证明:** (1) 由 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 可积，则必定可界，设 $M=\max_{a\le x\le b}|f(x)|$，则有：

$$\left|\int_0^1 x^n f(x)\,\mathrm{d}x\right|\le\int_0^1 x^n|f(x)|\mathrm{d}x\le M\int_0^1 x^n\mathrm{d}x=\frac{M}{n+1}\to 0\,(n\to\infty)$$

所以 $\lim_{n\to\infty}\int_0^1 x^n f(x)\,\mathrm{d}x=0$

(2) 易知 $(n+1)\int_0^1 x^n f(x)\,\mathrm{d}x=(n+1)\left[\int_0^{1-\frac{1}{\sqrt{n}}}x^n f(x)\,\mathrm{d}x+\int_{1-\frac{1}{\sqrt{n}}}^1 x^n f(x)\,\mathrm{d}x\right]$

由 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 可积，则必定可界，记 $M=\max_{a\le x\le b}|f(x)|$，就有：

$$\lim_{n\to\infty}(n+1)\int_0^{1-\frac{1}{\sqrt{n}}}x^n f(x)\,\mathrm{d}x\le M\lim_{n\to\infty}(n+1)\int_0^{1-\frac{1}{\sqrt{n}}}x^n\mathrm{d}x=M\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^{n+!}\to 0$$

$$\lim_{n\to\infty}(n+1)\int_{1-\frac{1}{\sqrt{n}}}^1 x^n f(x)\,\mathrm{d}x=\lim_{n\to\infty}(n+1)f(\xi_n)\int_{1-\frac{1}{\sqrt{n}}}^1 x^n\mathrm{d}x=f(\xi_n)\left[1-\left(1-\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^{n+1}\right]$$

其中 $\left(1-\frac{1}{\sqrt{n}}<\xi_n<1\right)$，且有：

$$\lim_{n\to\infty}(n+1)f(\xi_n)\left[1-\left(1-\frac{1}{n^2}\right)^{n+1}\right]=f(1)\lim_{n\to\infty}\left[1-\left(1-\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^{n+1}\right]=f(1)$$

所以 $\lim_{n\to\infty}(n+1)\int_0^1 x^n f(x)\,\mathrm{d}x=0+f(1)=f(1)$，得证 □

25.3 第十届全国大学生数学竞赛模拟赛题 (三) 解析

一、填空题 (本题满分 42 分，每题 7 分)

1. 计算积分 $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos(2nx)\ln\cos x\,\mathrm{d}x=\underline{\frac{(-1)^{n-1}\pi}{4n}}$.

2. 求 $\iint_D \mathrm{sgn}(xy-1)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\underline{2-4\ln 2}$，其中 $D=\{(x,y)\,|0\le x\le 2,0\le y\le 2\}$

3. 设 $a_0=1$，$a_1=\frac{2}{3}$，满足 $3(n+1)a_{n+1}=3(n-1)a_{n-1}+2a_n$，求 $\lim_{n\to\infty}a_n\sqrt[3]{n^2}=\underline{\frac{1}{\Gamma(\frac{1}{3})}\cdot\sqrt[3]{2}}$.

4. 求直线 $\begin{cases} y = x \\ z = 0 \end{cases}$ 绕直线 $x-1=y-1=z-1$ 旋转一周所得旋转面的方程 $\underline{x^2+y^2+z^2-2xy-2yz-2xz=0}$.

5. 求 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{2^n n(n+1)}\sum\limits_{k=1}^{n} C_n^k k^2 = \underline{\dfrac{1}{4}}$.

6. 求微分方程的通解 $y'+\dfrac{y}{x}=y^2-\dfrac{1}{x^2}=\underline{\dfrac{x}{xy-1}=\dfrac{C}{x}-\dfrac{x}{2}}$.

二、解答题 (本题满分 14 分) 求极限

$$\lim_{x\to 0}\frac{\displaystyle\int_0^x \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n t^{2n+1}}{2^n(2n+1)!}\mathrm{d}t-\frac{x^2}{2}}{x^3\left(\sqrt[3]{x+1}-e^x\right)}$$

✎ **解:** 注意到

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n t^{2n+1}}{2^n(2n+1)!}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}\left(\frac{t}{\sqrt{2}}\right)^{2n+1}=\sqrt{2}\sin\frac{t}{\sqrt{2}}$$

$$x^3\left(\sqrt[3]{x+1}-e^x\right)=-\frac{2}{3}x^4+o\left(x^4\right)$$

所以就有

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0}\frac{\displaystyle\int_0^x \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n t^{2n+1}}{2^n(2n+1)!}\mathrm{d}t-\frac{x^2}{2}}{x^3\left(\sqrt[3]{x+1}-e^x\right)} &= \lim_{x\to 0}\frac{\displaystyle\int_0^x \sqrt{2}\sin\frac{t}{\sqrt{2}}\mathrm{d}t-\frac{x^2}{2}}{-\frac{2}{3}x^4} \\
&= \lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{2}\sin\frac{x}{\sqrt{2}}-x}{-\frac{8}{3}x^3} \\
&= \lim_{x\to 0}\frac{\cos\frac{x}{\sqrt{2}}-1}{-8x^2} \\
&= \frac{1}{32}
\end{aligned}$$

□

三、解答题 (本题满分 14 分) 设 $x\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$，证明:

$$\frac{1}{\sin^2 x}-\frac{1}{x^2}<1-\frac{4}{\pi^2}$$

☞ **证明:** 设 $f(x)=\dfrac{1}{\sin^2 x}-\dfrac{1}{x^2}-(1-\dfrac{4}{\pi^2}), x\in(0,\dfrac{\pi}{2})$，就有:

$$\Rightarrow f'(x)=\frac{2}{\sin^2 x}\left(\frac{\sin^3 x}{x^3}-\cos x\right)$$

$$\Rightarrow \ln f'(x) = \ln(2\csc^2 x) + 3(\ln\frac{\sin x}{x} - \frac{1}{3}\ln\cos x)$$

考虑 $g(x) = \ln\frac{\sin x}{x} - \frac{1}{3}\ln\cos x, x \in (0, \frac{\pi}{2})$，就有:

$$g'(x) = -\frac{1}{x\tan x}(\tan x - x - \frac{1}{3}x\tan^2 x)$$

再考虑 $h(x) = \tan x - x - \frac{1}{3}x\tan^2 x, x \in (0, \frac{\pi}{2})$，就有:

$$h'(x) = \frac{2}{3}\tan x\sec^2 x(\sin x\cos x - x) < 0,\ x \in (0, \frac{\pi}{2})$$

则有 $h(x) < h(0) = 0, g'(x) > 0, g(x) > g(0) = 0, f'(x) > 0, f(x) < f(\frac{\pi}{2}) = 0$, 即证. □

四、**解答题 (本题满分 15 分)** 设 f 是 $[-1,1]$ 上的非负连续函数，满足

$$\int_{-1}^{1} xf(x)\,\mathrm{d}x = 0, \int_{-1}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x = 1$$

证明

$$\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} |x+y| f(x) f(y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y \geq \int_{-1}^{1} |x| f(x)\,\mathrm{d}x$$

☞ **证明:** 令 $g(x) = f(-x), x \in [0,1]$，则有

$$\int_0^1 xf(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 xg(x)\,\mathrm{d}x, \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x + \int_0^1 g(x)\,\mathrm{d}x = 1$$

$$\begin{aligned}
\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} |x+y| f(x) f(y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y &= \int_0^1\int_0^1 |x+y| f(x) f(y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y + \int_0^1\int_0^1 |x+y| g(x) g(y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\
&\quad + 2\int_0^1\int_0^1 |x-y| f(x) g(y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\
&\geq \int_0^1\int_0^1 |x+y| f(x) f(y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y + \int_0^1\int_0^1 |x+y| g(x) g(y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\
&= 2\int_0^1 xf(x)\,\mathrm{d}x\int_0^1 f(y)\,\mathrm{d}y + 2\int_0^1 xg(x)\,\mathrm{d}x\int_0^1 g(y)\,\mathrm{d}y \\
&= 2\int_0^1 xf(x)\,\mathrm{d}x\left(\int_0^1 f(y)\,\mathrm{d}y + \int_0^1 g(y)\,\mathrm{d}y\right) \\
&= 2\int_0^1 xf(x)\,\mathrm{d}x \\
&= \int_{-1}^{1} |x| f(x)\,\mathrm{d}x
\end{aligned}$$

即证 □

五、**解答题 (本题满分 15 分)** 设 $f \in (0,+\infty)$ 上的连续函数 $f(x)$ 满足，对 $\forall x > 0$, $\lim\limits_{n\to+\infty} f(nx) = 0$，证明: $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$.

☞ **证明:** 假设存在 $\varepsilon > 0$，$\varlimsup\limits_{k\to\infty} |f(x)| \geq 3\varepsilon$，取 $[a_0, b_0] \subset (0,\infty)$. 对 $K_0 > \frac{a_0}{b_0 - a_0}$, 有 $kb_0 > (k+1)a_0 (\forall k > K_0)$, 此时 (ka_0, kb_0) 与 $((k+1)a_0, (k+1)b_0)$ 相交. 因此 $\bigcap\limits_{k=K_0}^{\infty} (ka_0, kb_0) = (K_0 a_0, +\infty)$. 于是存在 $k_1 \geq k_0$ 与 $x_1 \in (k_1 a_0, k_1 b_0)$, 使得 $|f(x_1)| \geq$

2ε. 由于 $f(x)$ 连续，即存在 $\delta_1 \in (0,1)$，使得 $[\alpha_1, \beta_1] \equiv [x_{n_1} - \delta_1, x_{n_1} - \delta_1] \subset (k_1 a_0, k_1 b_0) |, |f(x)| \geq \varepsilon$.

以此类推就有，$k_n > k_{n-1}, [a_k, b_k] \subset [a_{k-1}, b_{k-1}]\ (n = 2, 3 \ldots)$，满足 $0 < b_k - a_k \leq \dfrac{2}{k_n}$，使得

$$|f(x)| \geq \varepsilon, \forall x \in [k_n a_n, k_n b_n]$$

由闭区间套定理，区间列 $[a_n, b_n]$ 有唯一的公共点 $\xi > 0$. 因 $k_n \xi \in [k_n a_n, k_n b_n]$，所以

$$|f(k_n \xi)| \geq \varepsilon, \forall n \geq 1$$

所以这与 $\lim\limits_{n \to +\infty} f(n\xi) = 0$ 矛盾，即 $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$ 得证. □

25.4 第十届全国大学生数学竞赛非数类预赛参考答案

一、填空题 (本题满分 24 分，每题 6 分

1. 设 $\alpha \in (0,1)$，则 $\lim\limits_{n \to +\infty} \left((n+1)^\alpha - n^\alpha\right) =$______.
【答案】**0.**

【解析】等价无穷小 $(1+x)^\alpha - 1 \backsim \alpha x$，得

$$\lim_{n \to \infty} \left((n+1)^\alpha - n^\alpha\right) = \lim_{n \to \infty} n^\alpha \left((1 + 1/n)^\alpha - 1\right) = \lim_{n \to \infty} n^\alpha \times \frac{\alpha}{n} = 0$$

2. 若曲线 $y = f(x)$ 是由 $\begin{cases} x = t + \cos t \\ e^y + ty + \sin t = 1 \end{cases}$ 确定，则此曲线在 $t = 0$ 对应点处的
切线方程为______.
【答案】$x + y - 1 = 0$.

【解析】易知 $t = 0$ 处上的曲线为点 $(1,0)$，即方程组对 t 求导得

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = 1 - \sin t, \quad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = -\frac{y + \cos t}{e^y + t}$$

$$\Rightarrow \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} \Big/ \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = -\frac{y + \cos t}{(e^y + 1)(1 - \sin t)} \Rightarrow \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\Big|_{t=0} = -1$$

故曲线在 $t = 0$ 对应点处的切线方程为 $x + y - 1 = 0$.

3. $\displaystyle\int \frac{\ln\left(1 + \sqrt{1 + x^2}\right)}{(1 + x^2)^{\frac{3}{2}}} \mathrm{d}x =$______.
【答案】$\dfrac{x}{\sqrt{1 + x^2}} \ln\left(x + \sqrt{1 + x^2}\right) - \dfrac{1}{2} \ln\left(1 + x^2\right) + C$.

【解析】简单的凑微分，如下

$$\begin{aligned}\int \frac{\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}\mathrm{d}x &= \int \ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)\mathrm{d}\left(\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right)\\ &= \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right) - \int \frac{x}{1+x^2}\mathrm{d}x\\ &= \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right) - \frac{1}{2}\ln\left(1+x^2\right)+C\end{aligned}$$

4. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x\sqrt{\cos 2x}\sqrt[3]{\cos 3x}}{x^2} =$______.

【答案】3.

【解析】这题方法很多，简单的等价无穷小，或拆项、洛必达以及泰勒都可以.

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x\sqrt{\cos 2x}\sqrt[3]{\cos 3x}}{x^2} &= \lim_{x\to 0}\left(\frac{1-\cos x}{x^2}+\frac{\cos x\left(1-\sqrt{\cos 2x}\sqrt[3]{\cos 3x}\right)}{x^2}\right)\\ &= \frac{1}{2}+\lim_{x\to 0}\frac{1-\sqrt{\cos 2x}\sqrt[3]{\cos 3x}}{x^2}\\ &= \frac{1}{2}+\lim_{x\to 0}\left(\frac{1-\cos\sqrt{2x}}{x^2}+\frac{\cos\sqrt{2x}\left(1-\sqrt[3]{\cos 3x}\right)}{x^2}\right)\\ &= \frac{1}{2}+\lim_{x\to 0}\left(\frac{1-\sqrt{1+(\cos 2x-1)}}{x^2}+\frac{1-\sqrt[3]{1+(\cos 3x-1)}}{x^2}\right)\\ &= \frac{1}{2}+\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 2x}{2x^2}+\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 3x}{3x^2}\\ &= 3\end{aligned}$$

二、**解答题 (本题满分 8 分)** 设函数 $f(t)$ 在 $t\neq 0$ 时一阶连续可导，且 $f(1)=0$，求函数 $f(x^2-y^2)$，使得曲线积分 $\int_L y\left(2-f\left(x^2-y^2\right)\right)\mathrm{d}x+xf\left(x^2-y^2\right)\mathrm{d}y$ 与路径无关，其中 L 为任一不与直线 $y=\pm x$ 相交的分段光滑闭曲线.

【解析】记 $\begin{cases}P(x,y)=y\left(2-f\left(x^2-y^2\right)\right)\\ Q(x,y)=x+xf\left(x^2-y^2\right)\end{cases}$，于是

$$\begin{cases}\dfrac{\partial P(x,y)}{\partial y}=2-f\left(x^2-y^2\right)+2y^2f'\left(x^2-y^2\right)\\ \dfrac{\partial Q(x,y)}{\partial x}=f\left(x^2+y^2\right)+2x^2f'\left(x^2-y^2\right)\end{cases}$$

由题设可知，积分与路径无关，于是有

$$\frac{\partial Q(x,y)}{\partial x}=\frac{\partial P(x,y)}{\partial y}\Longrightarrow \left(x^2-y^2\right)f'\left(x^2-y^2\right)+f\left(x^2-y^2\right)=1$$

……………………………… **5** 分

记 $t=x^2-y^2$，即微分方程

$$tf'(t)+f(t)=1\Leftrightarrow (tf(y))'=1\Rightarrow tf(t)=y+C$$

又 $f(1)=0$，可得 $C=-1$，$f(t)=1-\frac{1}{t}$，从而

$$f\left(x^2-y^2\right)=1-\frac{1}{x^2-y^2}$$

…………………………………8 分

三、**解答题 (本题满分 14 分)** 设 $f(x)$ 在区间 $[0,1]$ 上连续，且 $1\le f(x)\le 3$. 证明：

$$0\le\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x\int_0^1\frac{1}{f(x)}\mathrm{d}x\le\frac{4}{3}$$

【证明】由 **Cauchy-Schwarz** 不等式：

$$\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x\int_0^1\frac{1}{f(x)}\mathrm{d}x\ge\left(\int_0^1\sqrt{f(x)}\sqrt{\frac{1}{f(x)}}\mathrm{d}x\right)^2=1$$

…………………………………4 分

又由基本不等式得：

$$\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x\int_0^1\frac{3}{f(x)}\mathrm{d}x\le\frac{1}{4}\left(\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x+\int_0^1\frac{3}{f(x)}\mathrm{d}x\right)^2$$

再由条件 $1\le f(x)\le 3$，有 $(f(x)-1)(f(x)-3)\le 0$，则

$$f(x)+\frac{3}{f(x)}\le 4\Rightarrow\int_0^1\left(f(x)+\frac{3}{f(x)}\right)\mathrm{d}x\le 4$$

…………………………………10 分

即可得

$$1\le\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x\int_0^1\frac{1}{f(x)}\mathrm{d}x\le\frac{4}{3}$$

…………………………………14 分

四、**解答题 (本题满分 12 分)** 计算三重积分 $\iiint_{(V)}(x^2+y^2)\mathrm{d}V$，其中 (V) 是由 $x^2+y^2+(z-2)^2\ge 4$，$x^2+y^2+(z-1)^2\le 9$ 及 $z\ge 0$ 所围成的空间图形.

【解析】**(1)** 计算打球 (V_1) 的积分，利用球坐标换元，令

$$(V_1):\begin{cases}x=r\sin\varphi\cos\theta,y=r\sin\varphi\sin\theta,z-1=r\cos\varphi\\0\le r\le 3,0\le\varphi\le\pi,0\le\theta\le 2\pi\end{cases}$$

于是有

$$\iiint_{(V_1)}\left(x^2+y^2\right)\mathrm{d}V=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^{3}r^3\sin^2\varphi r^2\sin\varphi=\frac{8}{15}\cdot 3^5\pi$$

………………………………**4** 分

(2) 计算小球 (V_2) 的积分，利用球坐标换元，令

$$(V_2):\begin{cases}x=r\sin\varphi\cos\theta,y=r\sin\varphi\sin\theta,z-2=r\cos\varphi\\0\le r\le 2,0\le\varphi\le\pi,0\le\theta\le 2\pi\end{cases}$$

于是有

$$\iiint_{(V_2)}\left(x^2+y^2\right)\mathrm{d}V=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^{2}r^2\sin^2\varphi r^2\sin\varphi=\frac{8}{15}\cdot 2^5\pi$$

………………………………**8** 分

(3) 计算大球 $z=0$ 下部分的积分 V_3，利用球坐标换元，令

$$(V_3):\begin{cases}x=r\cos\theta,y=r\sin\theta,1-\sqrt{9-r^2}\le z\le 0\\0\le r\le 2\sqrt{2},0\le\theta\le 2\pi\end{cases}$$

于是有

$$\begin{aligned}\iiint_{(V_3)}\left(x^2+y^2\right)\mathrm{d}V&=\iint_{r\le 2\sqrt{2}}r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta\int_{1-\sqrt{9-r^2}}^{0}r^2\mathrm{d}z\\&=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{2\sqrt{2}}r^3\left(\sqrt{9-r^2}-1\right)\\&=\left(124-\frac{2}{5}\cdot 3^5+\frac{2}{5}\right)\pi\end{aligned}$$

综上所述有

$$\begin{aligned}\iiint_{(V)}\left(x^2+y^2\right)\mathrm{d}V&=\iiint_{(V_1)}\left(x^2+y^2\right)\mathrm{d}V-\iiint_{(V_2)}\left(x^2+y^2\right)\mathrm{d}V-\iiint_{(V_3)}\left(x^2+y^2\right)\mathrm{d}V\\&=\frac{8}{15}\cdot 3^5\pi+\frac{8}{15}\cdot 2^5\pi+\left(124-\frac{2}{5}\cdot 3^5+\frac{2}{5}\right)\pi\\&=\frac{256}{3}\pi\end{aligned}$$

………………………………**12** 分

五、**解答题 (本题满分 14 分)** 设 $f(x,y)$ 在区域 **D** 内可微，且 $\sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2}\le M$，$A(x_1,y_1),B(x_2,y_2)$ 是 **D** 内两点，线段 **AB** 包含在 **D** 内，证明：

$$|f(x_1,y_1)-f(x_2,y_2)|\le M|AB|$$

其中 $|AB|$ 表示线段 AB 的长度.

【证明】作辅助函数

$$\varphi(t) = f\left(x_1 + t\left(x_2 - x_1\right) \cdot y_1 + t\left(y_2 - y_1\right)\right)$$

…………………………………2 分

显然 $\varphi(t)$ 在 $[0,1]$ 可导，根据 **Lagrange** 中值定理，存在 $c \in (0,1)$，使得

$$\varphi(1) - \varphi(0) = \varphi'(c) = \frac{\partial f(u,v)}{\partial u}(x_2 - x_1) + \frac{\partial f(u,v)}{\partial v}(y_2 - y_1)$$

…………………………………8 分

即可得到

$$\begin{aligned} |\varphi(1) - \varphi(0)| &= |f(x_2, y_2) - f(x_1, y_1)| \\ &= \left|\frac{\partial f(u,v)}{\partial u}(x_2 - x_1) + \frac{\partial f(u,v)}{\partial v}(y_2 - y_1)\right| \\ &\le \sqrt{\left(\frac{\partial f(u,v)}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial f(u,v)}{\partial v}\right)^2} \cdot \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} \end{aligned}$$

$$\le M|AB|$$

…………………………………14 分

六、解答题 (本题满分 14 分)

证明：对于连续函数 $f(x) > 0$，有

$$\ln \int_0^1 f(x)\,dx \ge \int_0^1 \ln f(x)\,dx$$

【证明】由定积分定义，将 $[0,1]$ 分 n 等分，可取 $\Delta x = \frac{1}{n}$，由“算术平均数 $\ge$ 几何平均数”得：

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) \ge \sqrt[n]{f\left(\frac{1}{n}\right)\cdots f\left(\frac{n}{n}\right)} = \exp\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\ln f\left(\frac{k}{n}\right)$$

…………………………………4 分

$$\Rightarrow \int_0^1 f(x)dx \ge \exp\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\ln f\left(\frac{k}{n}\right) = \exp\int_0^1 \ln f(x)dx$$

…………………………………10 分

然后两边取对数即证

$$\ln \int_0^1 f(x)\,dx \ge \int_0^1 \ln f(x)\,dx$$

…………………………………14 分

或者考虑令 $g(x) = \ln x$，则 $g'(x) = \frac{1}{x}$，$g''(x) = -\frac{1}{x^2} < 0$，所以 $g(x)$ 为凹函数，可由琴声不等式定理即证.

七、解答题 (本题满分 8 分) 已知 a_k，b_k 是正数数列，且 $b_{k+1}-b_k \geqslant \delta > 0, k = 1,2,\cdots,\delta$ 为一切常数，证明：若级数 $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} a_k$ 收敛，则级数 $\sum\limits_{k=1}^{+\infty}\dfrac{k\sqrt[k]{(a_1a_2\cdots a_k)(b_1b_2\cdots b_k)}}{b_{k+1}b_k}$ 收敛.

【证明】令 $S_k=\sum\limits_{i=1}^{k}a_ib_i, a_kb_k=S_k-S_{k-1}, S_0=0, a_k=\dfrac{S_k-S_{k-1}}{b_k}, k=1,2,\cdots$ **4 分**

$$\sum_{k=1}^{N}a_k=\sum_{k=1}^{N}\frac{S_k-S_{k-1}}{b_k}=\sum_{k=1}^{N-1}\left(\frac{S_k}{b_k}-\frac{S_k}{b_{k+1}}\right)+\frac{S_N}{b_N}$$
$$=\sum_{k=1}^{N-1}\frac{b_{k+1}-b_k}{b_kb_{k+1}}S_k+\frac{S_N}{b_N}\ge\sum_{k=1}^{N-1}\frac{\delta}{b_kb_{k+1}}S_k$$

所以 $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\dfrac{S_k}{b_kb_{k+1}}$ 收敛. ....**10 分**

由算术-几何平均不等式得

$$\sqrt[k]{(a_1a_2\cdots a_k)(b_1b_2\cdots b_k)}\le\frac{a_1b_1+\cdots+a_kb_k}{k}=\frac{S_k}{k}$$
$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{k\sqrt[k]{(a_1a_2\cdots a_k)(b_1b_2\cdots b_k)}}{b_{k+1}b_k}\leqslant\sum_{k=1}^{\infty}\frac{S_k}{b_kb_{k+1}}$$

故结论成立.

..................................**14 分**

25.5 第九届全国大学生数学竞赛非数类预赛参考答案

一、填空题 (本题满分 42 分，每题 7 分)

1. 已知可导函数 $f(x)$ 满足 $f(x)\cos x+2\int_0^x f(t)\sin t\,\mathrm{d}x=x+1$，则 $f(x)=$______.

【答案】$\sin x+\cos x$.

【解析】两边同时对 x 求导

$$f'(x)\cos x+f(x)\sin x=1\Longrightarrow f'(x)+f(x)\tan x=\sec x.$$

由常数变易法，从而

$$f(x)=\mathrm{e}^{-\int\tan x\mathrm{d}x}\left(\int\sec x\,\mathrm{e}^{\int\tan x\mathrm{d}x}\mathrm{d}x+C\right)$$
$$=\mathrm{e}^{\ln\cos x}\left(\int\frac{1}{\cos x}\mathrm{e}^{-\ln\cos x}\mathrm{d}x+C\right)$$
$$=\cos x\left(\int\frac{1}{\cos^2 x}\mathrm{d}x+C\right)$$
$$=\cos x(\tan x+C)=\sin x+C\cos x$$

由于 $f(0)=1$，故 $f(x)=\sin x+\cos x$.

2. 极限 $\lim\limits_{n\to 0}\sin^2(\pi\sqrt{n^2+n})=$______.

【答案】1

【解析】

$$\begin{aligned}\lim_{n\to 0}\sin^2(\pi\sqrt{n^2+n})&=\lim_{n\to 0}\sin^2(\pi\sqrt{n^2+n}-n\pi)\\&=\lim_{n\to 0}\sin^2\left(\frac{n\pi}{\sqrt{n^2+n}+n}\right)=1\end{aligned}$$

3. 设 $w=f(u,v)$ 具有二阶连续偏导数，且 $u=x-cy$，$v=x+cy$，其中 c 为非零常数。则 $w_{xx}-\frac{1}{c^2}w_{yy}=$______.

【答案】$4f_{12}$.

【解析】

$$w_x=f_1+f_2,w_{xx}=f_{11}+2f_{12}+f_{22},w_y=c(f_2-f_1),$$

$$w_{yy}=c\frac{\partial}{\partial x}(f_2-f_1)=c(cf_{11}-cf_{12}-cf_{21}+cf_{22})=c^2(f_{11}-2f_{12}+f_{22}).$$

所以

$$w_{xx}-\frac{1}{c^2}w_{yy}=4f_{12}.$$

4. 设 $f(x)$ 有二阶导数连续，且 $f(0)=f'(0)=0,f''(0)=6$，则 $\lim\limits_{n\to 0}\frac{f(\sin^2 x)}{x^4}=$______.

【答案】3

【解析】$f(x)$ 在 $x=0$ 处的泰勒展开式

$$f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{1}{2}f''(\xi)x^2,$$

所以

$$f(\sin^2 x)=\frac{1}{2}f''(\xi)\sin^4 x,$$

于是

$$\lim_{n\to 0}\frac{f(\sin^2 x)}{x^4}=\lim_{n\to 0}\frac{\frac{1}{2}f''(\xi)\sin^4 x}{x^4}=3.$$

5. 不定积分 $\int\frac{e^{-\sin x}\sin 2x}{(1-\sin x)^2}dx=$______.

【答案】$\frac{2e^{-\sin x}}{1-\sin x}+C$.

【解析】令 $\sin x = v$，则

$$
\begin{aligned}
I &= 2\int \frac{v\mathrm{e}^{-v}}{(1-v)^2}\mathrm{d}v \\
&= 2\int \frac{\mathrm{e}^{-v}}{v-1}\mathrm{d}v + 2\int \frac{\mathrm{e}^{-v}}{(v-1)^2}\mathrm{d}v \\
&= 2\int \frac{\mathrm{e}^{-v}}{v-1}\mathrm{d}v - 2\int \mathrm{e}^{-v}\mathrm{d}\Big(\frac{1}{v-1}\Big) \\
&= 2\int \frac{\mathrm{e}^{-v}}{v-1}\mathrm{d}v - 2\Big(\frac{\mathrm{e}^{-v}}{v-1} + \int \frac{\mathrm{e}^{-v}}{v-1}\mathrm{d}v\Big) \\
&= -\frac{2\mathrm{e}^{v}}{v-1} + C = \frac{2\mathrm{e}^{-\sin x}}{1-\sin x} + C
\end{aligned}
$$

6. 记曲面 $z^2 = x^2 + y^2$ 和 $z = \sqrt{4-x^2-y^2}$ 围成空间区域 V，则三重积分 $\iiint_V z\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$ =______.

【答案】2π.

【解析】使用球面坐标

$$
\begin{aligned}
I &= \iiint_V z\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z \\
&= \int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\pi/4}\mathrm{d}\varphi\int_0^{2}\rho\cos\varphi\cdot\rho^2\sin\varphi\mathrm{d}\rho \\
&= 2\pi\cdot\frac{1}{2}\sin^2\varphi\Big|_0^{\pi/4}\cdot\frac{1}{4}\rho^4\Big|_0^{2} \\
&= 2\pi
\end{aligned}
$$

二、解答题 (本题满分 14 分) 设二元函数 $f(x,y)$ 在平面上有连续的二阶导数，对任意角 α，定义一元函数

$$g_\alpha(t) = f(t\cos\alpha, t\sin\alpha).$$

若对任何 α 都有 $\frac{\mathrm{d}g_\alpha(0)}{\mathrm{d}t} = 0$ 且 $\frac{\mathrm{d}^2 g_\alpha(0)}{\mathrm{d}t^2} > 0$。证明：$f(0,0)$ 是 $f(x,y)$ 的极小值。

【证明】由于

$$\frac{\mathrm{d}g_\alpha(0)}{\mathrm{d}t} = (f_x, f_y)_{(0,0)}\begin{pmatrix}\cos\alpha\\ \sin\alpha\end{pmatrix} = 0$$

对一切 α 成立，故 $(f_x, f_y)_{(0,0)} = (0,0)$，即 $(0,0)$ 是 $f(x,y)$ 的驻点。

.... **4** 分

记

$$H_f = (x,y) = \begin{pmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy}\end{pmatrix} = 0,$$

则

$$\frac{\mathrm{d}^2 g_\alpha(0)}{\mathrm{d}t^2} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[(f_x, f_y)\begin{pmatrix}\cos\alpha\\ \sin\alpha\end{pmatrix}\right]_{(0,0)}$$

$$= (\cos\alpha, \sin\alpha)H_f(0,0)\begin{pmatrix} f_{xx} & f_{xy}\\ f_{yx} & f_{yy}\end{pmatrix} > 0$$

..................................**10 分**

上式对任何单位向量 $(\cos\alpha, \sin\alpha)$ 成立，故 $H_f(0,0)$ 是一个正定矩阵，而 $f(0,0)$ 是 $f(x,y)$ 的极小值。

..................................**14 分**

三、解答题 (本题满分 14 分) 设曲线 Γ 为曲线

$$x^2+y^2+z^2=1, x+z=1, x\geqslant 0, y\geqslant 0, z\geqslant 0$$

上从点 $A(1,0,0)$ 到点 $B(0,0,1)$ 的一段，求曲线积分 $I=\int_\Gamma y\mathrm{d}x+z\mathrm{d}y+x\mathrm{d}z$.

【解析】记 Γ_1 为从 B 到 A 的直线段，则 $x=t, y=0, z=1-t, 0\leqslant t\leqslant 1$,

$$\int_{\Gamma_1} y\mathrm{d}x+z\mathrm{d}y+x\mathrm{d}z=\int_0^1 t\mathrm{d}(1-t)=-\frac{1}{2}.$$

..................................**4 分**

设 Γ 和 Γ_1 围成的平面区域 $\sum$，方向按右手法则。由 Stokes 公式得到

$$\left(\int_\Gamma+\int_{\Gamma_1}\right)y\mathrm{d}x+z\mathrm{d}y+x\mathrm{d}z=\iint_\Sigma\begin{vmatrix}\mathrm{d}y\mathrm{d}z & \mathrm{d}z\mathrm{d}x & \mathrm{d}x\mathrm{d}y\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ y & z & x\end{vmatrix}$$

$$=-\iint_\Sigma \mathrm{d}y\mathrm{d}z+\mathrm{d}z\mathrm{d}x+\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

..................................**8 分**

右边三个积分都是 $\sum$ 在各个坐标面上的投影面积，而 $\sum$ 在 xOz 面上的投影面积为零。故

$$I+\int_{\Gamma_1}=-\iint_\Sigma \mathrm{d}y\mathrm{d}z+\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

曲线 Γ 在 xOy 面上投影的方程为 $\dfrac{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2}{\left(\frac{1}{2}\right)^2}+\dfrac{y^2}{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2}=1.$ ....**12 分**

又该投影（半个椭圆）的面积为 $\iint_\Sigma \mathrm{d}x\mathrm{d}y=\dfrac{\pi}{4\sqrt{2}}$, 同理 $\iint_\Sigma \mathrm{d}y\mathrm{d}z=\dfrac{\pi}{4\sqrt{2}}$.

所以

$$I=\frac{1}{2}-\frac{\pi}{2\sqrt{2}}.$$

..................................**14 分**

四、解答题 (本题满分 15 分) 设函数 $f(x)>0$ 且在实轴上连续，若对任意实数 t，有

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-|t-x|}f(x)\mathrm{d}x\leqslant 1,$$

证明：$\forall a,b,a<b$，有

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\leqslant\frac{b-a+2}{2}.$$

【证明】由于 $\forall a,b,a<b$，有 $\int_a^{+b}\mathrm{e}^{-|t-x|}f(x)\mathrm{d}x\leqslant\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-|t-x|}f(x)\mathrm{d}x\leqslant 1$，

因此

$$\int_a^b\mathrm{d}t\int_a^b\mathrm{e}^{-|t-x|}f(x)\mathrm{d}x\leqslant b-a.$$

$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$ **4** 分

然而

$$\int_a^b\mathrm{d}t\int_a^b\mathrm{e}^{-|t-x|}f(x)\mathrm{d}x=\int_a^b f(x)\Big(\int_a^b\mathrm{e}^{-|t-x|}\mathrm{d}t\Big)\mathrm{d}x,$$

其中

$$\int_a^b\mathrm{e}^{-|t-x|}\mathrm{d}t=\int_a^x\mathrm{e}^{t-x}\mathrm{d}t+\int_x^b\mathrm{e}^{x-t}=2-\mathrm{e}^{a-x}-\mathrm{e}^{x-b}.$$

这样就有

$$\int_a^b f(x)(2-\mathrm{e}^{a-x}-\mathrm{e}^{x-b})\mathrm{d}x\leqslant b-a. \qquad (*)$$

$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$ **10** 分

即

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\leqslant\frac{b-a}{2}+\frac{1}{2}\Big[\int_a^b\mathrm{e}^{a-x}f(x)\mathrm{d}x+\int_a^b\mathrm{e}^{x-b}f(x)\mathrm{d}x\Big].$$

注意到

$$\int_a^b\mathrm{e}^{a-x}f(x)\mathrm{d}x=\int_a^b\mathrm{e}^{-|a-x|}f(x)\mathrm{d}x\leqslant 1,\int_a^b\mathrm{e}^{x-b}f(x)\mathrm{d}x\leqslant 1.$$

$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$ **13** 分

把以上两个式子代入（$*$），即得结论。

$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$ **15** 分

25.6 第八届全国大学生数学竞赛数学类决赛试题

一、填空题 (本题满分 20 分, 共 4 小题, 每小题 5 分)

1. 设 $x^4+3x^2+2x+1=0$ 的 4 个根为 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$. 则行列式 $\begin{vmatrix}\alpha_1&\alpha_2&\alpha_3&\alpha_4\\\alpha_2&\alpha_3&\alpha_4&\alpha_1\\\alpha_3&\alpha_4&\alpha_1&\alpha_2\\\alpha_4&\alpha_1&\alpha_2&\alpha_3\end{vmatrix}=$______

2. 设 a 为实数，关于 x 的方程 $3x^4-8x^3-30x^2+72x+a=0$ 有虚根的充分必要条件是 a 满足______

3. 计算曲面积分 $I=\iint_S \frac{ax\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z+(x+a)^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$ $(a>0$ 为常数)，其中 $S: z=-\sqrt{a^2-x^2-y^2}$, 取上侧. $I=$______

4. 记两特征值为 $1,2$ 的 2 阶实对称矩阵全体为 Γ. $\forall A\in\Gamma$, a_{21} 表示 A 的 $(2,1)$ 位置元素.

则集合 $\cup_{A\in\Gamma}\{a_{21}\}$ 的最小元 = ______

二、(本题 15 分) 在空间直角坐标系中设旋转抛物面 Γ 的方程为 $z=\frac{1}{2}(x^2+y^2)$. 设 P 为空间中的平面，它交抛物面 Γ 与曲线 C. 问: C 是何种类型的曲线? 证明你的结论.

三、证明题 (本题 15 分) 设 n 阶方阵 A, B 满足: 秩 $(ABA)=$ 秩 (B). 证明: AB 与 BA 相似.

四、(本题 20 分) 对 $\mathbb{R}$ 上无穷次可微的 (复值) 函数 $\varphi(x)$, 称 $\varphi(x)\in\mathscr{S}$. 如果 $\forall m,k\geqslant 0$ 成立 $\sup\limits_{x\in\mathbb{R}}\left|x^m\varphi^{(k)}(x)\right|<+\infty$. 若 $f\in\mathscr{S}$, 可定义

$$\hat{f}(x)=\int_{\mathbb{R}}\hat{f}(y)e^{-2\pi ixy}\,\mathrm{d}y, (\forall x\in\mathbb{R}).$$

证明: $\hat{f}(x)\in\mathscr{S}$, 且

$$f(x)=\int_{\mathbb{R}}\hat{f}(y)e^{2\pi ixy}\,\mathrm{d}y,\quad \forall x\in\mathbb{R}$$

五、(本题 15 分) 设 $n>1$ 为正整数. 令

$$S_n=\left(\frac{1}{n}\right)^n+\left(\frac{2}{n}\right)^n+\cdots+\left(\frac{n-1}{n}\right)^n$$

1. 证明：数列 S_n 单调增且有界, 从而极限 $\lim\limits_{n\to\infty}S_n$ 存在.

2. 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}S_n$.

六、(本题 20 分) 求证: 常微分方程 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=-y^3+\sin x, x\in[0,2\pi]$ 有唯一的满足 $y(0)=y(2\pi)$ 的解.

参考文献

[1] 周明强, “数学分析习题演练三册,” 2010.

[2] 裴礼文, “数学分析中的典型问题与方法,” 2006.

[3] 菲赫金哥尔茨, “微积分学教程 (第二卷),” 2006.

[4] 李红, “复变函数与积分变换,” 2013.

[5] 陈兆斗, 郑连存, “大学生数学竞赛习题精讲,” 8 2010.

[6] 徐森林, “数学分析精选习题全解 (下册),” 2009.

[7] 郭文秀, 朱永银, “广义高斯函数及其积分问题,” 2002.

[8] 国防科学技术大学数学竞赛指导组, “大学生数学竞赛指导,” 2009.

[9] 同济大学数学系, “高等数学习题全解指南,” 2014.

[10] Zafar Ahmed. Definitely an integral. Am. Math. Mon., 109:670 671, 2002.

[11] H. S. M. Coxeter. A challenging definite integral. Am. Math. Mon., 95:330, 1988.