第一届八一杯大学生网络数学竞赛试题解析

非数类，满分：140 分，考试时间：150 分钟

比赛时间：2019 年 8 月 1 日上午 9 点至 2019 年 8 月 1 号晚上 8 点

竞赛官方微信公众号: 八一考研数学竞赛

题号	一试							二试		满分
	一	二	三	四	五	六	七	A	B	
满分	40	10	10	10	10	10	10	20	20	140
得分										

注意事项: 1. 试题解答请在规定时间内发送到邮箱 hoganbin1995@outlook.com, 逾期将取消参赛资格，严格遵守比赛纪律，勿翻阅其他参考资料或在各数学群内讨论此份试题;

2. 要求解答字迹清楚，推荐采用 PDF 格式提交;

3. 文件命名：参赛科目 + 昵称 (或姓名)+ 学校.

2019 年第一届八一杯大学生网络数学竞赛

数学 I 试题 (满分 100 分)

一、填空题 (本题满分 40 分，第 1-5 题每个 3 分，第 6-10 题每个 5 分，考生须全部作答)

1. (题目有问题) 计算定积分 $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{1}{1+e^x}+\operatorname{arccot} e^x\right)\left(\frac{2e^x}{\sqrt{\pi^2-4x^2}}-2e^{\frac{\pi\sin x}{2}}\cos^2\frac{x}{2}\right)\mathrm{d}x=$__________.

解: 先考虑负代换 $x=-t$ 有

$$I=\int_{\frac{-\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{1}{1+e^{-x}}+\operatorname{arccot} e^{-x}\right)\left(\frac{2e^{-x}}{\sqrt{\pi^2-4x^2}}-2e^{-\frac{\pi\sin x}{2}}\cos^2\frac{x}{2}\right)\mathrm{d}x$$

则有

$$\begin{aligned}I&=\frac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\left[\left(\frac{1}{1+e^x}+\frac{1}{1+e^{-x}}\right)+(\operatorname{arccot} e^x+\operatorname{arccot} e^{-x})\right]\left(\frac{2e^{-x}}{\sqrt{\pi^2-4x^2}}-2e^{-\frac{\pi\sin x}{2}}\cos^2\frac{x}{2}\right)\mathrm{d}x\\&=\frac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\left(1+\frac{\pi}{2}\right)\left(\frac{2e^{-x}}{\sqrt{\pi^2-4x^2}}-2e^{-\frac{\pi\sin x}{2}}\cos^2\frac{x}{2}\right)\mathrm{d}x=\frac{\pi+2}{4}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{2e^{-x}}{\sqrt{\pi^2-4x^2}}-2e^{-\frac{\pi\sin x}{2}}\cos^2\frac{x}{2}\right)\mathrm{d}x\end{aligned}$$

下面计算后部分积分，根据 $\cos x=2\cos^2\frac{x}{2}-1$，则有

$$\begin{aligned}&\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{2e^{-x}}{\sqrt{\pi^2-4x^2}}-2e^{-\frac{\pi\sin x}{2}}\cos^2\frac{x}{2}\right)\mathrm{d}x=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{2e^{-x}}{\sqrt{\pi^2-4x^2}}\mathrm{d}x-\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}e^{-\frac{\pi\sin x}{2}}\mathrm{d}x-\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}e^{-\frac{\pi\sin x}{2}}\cos x\mathrm{d}x\\&\overset{t=\frac{\pi\sin x}{2}}{=\!=\!=}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{2e^{-x}}{\sqrt{\pi^2-4x^2}}\mathrm{d}x-\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}e^{-t}\frac{\frac{2}{\pi}}{\sqrt{1-\left(\frac{2t}{\pi}\right)^2}}\mathrm{d}t+\left(\frac{2}{\pi}e^{-\frac{\pi\sin x}{2}}\right)\Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}=\frac{2}{\pi}\left(e^{-\frac{\pi}{2}}-e^{\frac{\pi}{2}}\right)\end{aligned}$$

因此

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{1}{1+e^x}+\operatorname{arccot} e^x\right)\left(\frac{2e^x}{\sqrt{\pi^2-4x^2}}-2e^{\frac{\pi\sin x}{2}}\cos^2\frac{x}{2}\right)\mathrm{d}x=\frac{2+\pi}{2\pi}\left(e^{-\frac{\pi}{2}}-e^{\frac{\pi}{2}}\right)$$

2. 由 $x^y=y^x$ 确定的隐函数 $y=y(x)$，求 $\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}$=__________.

解: 法 1：取对数得 $y\ln x=x\ln y$，然后两边同时求导有

$$y\ln x=x\ln y\Rightarrow y'\ln x+\frac{y}{x}=\ln y+\frac{xy'}{y}$$

即

$$y'=\frac{\ln y-\frac{y}{x}}{\ln x-\frac{x}{y}}=\frac{(x\ln y-y)\,y}{(y\ln x-x)\,x}=\frac{(y\ln x-y)\,y}{(x\ln y-x)\,x}=\frac{y^2\,(1-\ln x)}{x^2\,(1-\ln y)}$$

$$\Rightarrow y''=\frac{\left(2yy'\,(1-\ln x)-\frac{y^2}{x}\right)x^2\,(1-\ln y)-y^2\,(1-\ln x)\left(2x\,(1-\ln y)-\frac{x^2y'}{y}\right)}{x^4\,(1-\ln y)^2}$$

整理可得

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=\frac{y^2\left[y\,(1-\ln x)^2-2\,(x-y)\,(1-\ln x)\,(1-\ln y)-x\,(1-\ln y)^2\right]}{x^4\,(1-\ln y)^3}$$

法 2：隐函数的二阶导数：考虑 $F\,(x,y)=x^y-y^x$，则有

$$F_x'\,(x,y)=yx^{y-1}-y^x\ln y,\,F_y'\,(x,y)=x^y\ln x-xy^{x-1}$$

即

$$y'\,(x)=-\frac{F_x'\,(x,y)}{F_y'\,(x,y)}=-\frac{yx^{y-1}-y^x\ln y}{x^y\ln x-xy^{x-1}}=\frac{y\left(y^{x-1}\ln y-x^{y-1}\right)}{x\left(x^{y-1}\ln x-y^{x-1}\right)}\xlongequal{x^y=y^x}\frac{y^2\,(1-\ln x)}{x^2\,(1-\ln y)}$$

因此

$$y''\,(x)=\frac{2F_x'F_y'F_{xy}''-F_{xx}''\left(F_y'\right)^2-F_x\left(F_x'\right)^2}{\left(F_y'\right)^3}=\frac{1}{\left(F_y'\right)^3}\begin{vmatrix}0 & F_x' & F_y'\\ F_x' & F_{xx}'' & F_{xy}''\\ F_y' & F_{yx}'' & F_{yy}\end{vmatrix}$$

$$=\frac{y^2\left[y\,(1-\ln x)^2-2\,(x-y)\,(1-\ln x)\,(1-\ln y)-x\,(1-\ln y)^2\right]}{x^4\,(1-\ln y)^3}$$

3. 求微分方程 $x^2\,(x-1)\,y'-x\,(x-2)\,y-y^2=0$ 的解为__________.

解: 该微分方程可化简为

$$y'=\frac{x-2}{x(x-1)}y+\frac{1}{x^2(x-1)}y^2$$

显然为伯努利型微分方程 $n=2$. 引入变量代换 $z=y^{-1}$，从而化为线性微分方程：

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}=-y^{-2}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=-y^{-2}\left[\frac{x-2}{x\,(x-1)}y+\frac{1}{x^2\,(x-1)}y^2\right]=-\frac{x-2}{x\,(x-1)}z-\frac{1}{x^2\,(x-1)}$$

利用非齐次微分方程通解可得

$$z = e^{-\int \frac{x-2}{x(x-1)}\mathrm{d}x}\left(-\int \frac{1}{x^2(x-1)}e^{\int \frac{x-2}{x(x-1)}\mathrm{d}x}\mathrm{d}x + C_1\right)$$

$$\Rightarrow z = \frac{x-1}{x^2}\left(-\int \frac{1}{(x-1)^2}\mathrm{d}x + C\right) = \frac{x-1}{x^2}\left(\frac{1}{x-1} + C\right)$$

因此

$$y^{-1} = \frac{(x-1)C+1}{x^2} \Rightarrow y = \frac{x^2}{(x-1)C+1}$$

即微分通解为 $y = \dfrac{x^2}{(x-1)C+1}$，其中 C 为任意常数，还有一解为 $y = 0$.

4. 在曲面 $(xy + yz + xz)^2 + (x - y + z) = 0$ 上点 $(0,0,0)$ 处的切平面内，求一点 P 使得它到点 $M(1,2,3)$ 与点 $N(-2,3,-3)$ 的距离平方和最小值是__________.

解: 令 $G(x,y,z) = (xy + yz + xz)^2 + (x - y + z)$，则其在点 $(0,0,0)$ 处的切平面法向量为 $n = \left(G_x', G_y', G_z'\right)|_{(0.0.0)} = (1,-1,1)$，即所求切平面方程为 $x - y + z = 1$. 设所求点为 $P(x,y,z)$，则问题简化在条件 $x - y + z = 0$ 下求 $z = (x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2 + (x+2)^2 + (y-3)^2 + (z+3)^2$ 的最小值. 利用拉格朗日乘数法，作辅助函数

$$F(x,y,z) = (x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2 + (x+2)^2 + (y-3)^2 + (z+3)^2 + \lambda(x - y + z)$$

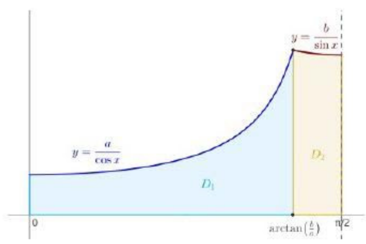
其中 λ 为常数，易知得 $F_x' = 4x + 2 + \lambda = 0, F_y' = 4y - 10 - \lambda = 0, F_z' = 4z + \lambda = 0$，联立切平面方程有

$$\begin{cases} 4x + 2 + \lambda = 0 \\ 4y - 10 - \lambda = 0 \\ 4z + \lambda = 0 \\ x - y + z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{2} \\ y = \frac{3}{2} \\ z = 1 \end{cases}$$

由问题本身最小值必存在，即唯一可能极值点 $(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, 1)$ 为其最小值点. 则 $z_{\min} = z(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, 1) = 29.$

5. 若 a, b 为正实数,求 $\iint\limits_D y\mathrm{d}x\mathrm{d}y =$______,其中 $D = \left\{(x,y) : 0 \le x \le \frac{\pi}{2}, 0 \le y \le \min\left\{\frac{a}{\cos x}, \frac{b}{\sin x}\right\}\right\}$.

解: 先看下图



区域 D 可以表示为以下不相交区域的并集：

$$D_1 = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \le x \le \arctan\left(\frac{b}{a}\right), 0 \le y \le \frac{a}{\cos x}\right\}$$

$$D_2 = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \arctan\left(\frac{b}{a}\right) < x \le \frac{\pi}{2}, 0 \le y \le \frac{b}{\sin x}\right\}$$

根据 $f(x,y)=y$，且 $(x,y)\in D$ 是连续，因此有

$$\iint\limits_{D} f(x,y)\,\mathrm{d}(x,y)=\iint\limits_{D_1} f(x,y)\,\mathrm{d}(x,y)+\iint\limits_{D_2} f(x,y)\,\mathrm{d}(x,y)$$

因此

$$\begin{aligned}\iint\limits_{D_1} f(x,y)\,\mathrm{d}(x,y)&=\int_0^{\arctan\left(\frac{b}{a}\right)}\int_0^{\frac{a}{\cos x}} y\,\mathrm{d}y\mathrm{d}x=\int_0^{\arctan\left(\frac{b}{a}\right)}\left(\frac{y^2}{2}\right)_0^{\frac{a}{\cos x}}\mathrm{d}x\\&=\int_0^{\arctan\left(\frac{b}{a}\right)}\frac{a^2}{2\cos^2 x}\mathrm{d}x=\left(\frac{a^2\tan x}{2}\right)_0^{\arctan\left(\frac{b}{a}\right)}\\&=\frac{a^2}{2}\tan\left(\arctan\frac{b}{a}\right)=\frac{ab}{2}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\iint\limits_{D_2} f(x,y)\,\mathrm{d}(x,y)&=\int_t^{\pi/2}\int_0^{b/\sin x} y\,\mathrm{d}y\mathrm{d}x=\int_t^{\pi/2}\left(\frac{y^2}{2}\right)_0^{\frac{b}{\sin x}}\mathrm{d}x=\int_t^{\pi/2}\frac{b^2}{2\sin^2 x}\mathrm{d}x\\&=\lim_{x\to t^+}\int_x^{\pi/2}\frac{b^2}{2\sin^2 z}\mathrm{d}z=\lim_{x\to t^+}\left(-\frac{b^2}{2}\cot z\right)_x^{\pi/2}=\lim_{x\to t^+}\left(\frac{b^2}{2}\cot x\right)=\frac{ab}{2}\end{aligned}$$

其中 $t=\arctan\frac{b}{a}$，即 $\iint\limits_{D} f(x,y)\,\mathrm{d}(x,y)=\iint\limits_{D} y\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=ab$

6. (a) 设 $f(x)$ 是二阶可导函数，且 $f(1)=-1, f'(1)=-4$，存在二元函数 $z=z(x,y)$ 使得 $\mathrm{d}z=4\left[f(x)+2x^3\right]y\mathrm{d}x+\left[3xf(x)-x^2f'(x)\right]\mathrm{d}y$，求 $f(x)$=____ 和 $z(x,y)$=____.

解: 由全微分条件得

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[3xf(x)-x^2f'(x)\right]-\frac{\partial}{\partial y}\left\{4\left[f(x)+2x^3\right]y\right\}=0$$

即 $x^2f''(x)-xf'(x)+f(x)=-8x^3$.

此时令 $x=e^t$，得到 $y=f(x(t))$ 满足微分方程 $y''-2y'+y=-8e^{3t}$ 通解.

由特征方程 $(r-1)^2=0$，即齐次方程通解为 $y=e^t(C_1+C_2t)$。可设非齐次方程特解为 $y=Ae^{3t}$，代入方程解得 $A=-2$. 即

$$y=-2e^{3t}+e^t(C_1+C_2t)\Rightarrow f(x)=-2x^3+x(C_1+C_2\ln x)$$

由 $f(1)=-1, f'(1)=-4$ 得 $C_1=C_2=1$，因此 $f(x)=-2x^3+x(1+\ln x)$，则有

$$\mathrm{d}z=4\left[f(x)+2x^3\right]y\mathrm{d}x+\left[3xf(x)-x^2f'(x)\right]\mathrm{d}y=4x(1+\ln x)y\mathrm{d}x+\left(x^2+2x^2\ln x\right)\mathrm{d}y$$

$$\begin{aligned}z(x,y)&=\int_{(1,0)}^{(x,y)}\mathrm{d}z(x,y)+C=\int_0^y\mathrm{d}y+\int_1^x 4x(1+\ln x)y\mathrm{d}x+C\\&=y+4y\int_1^x x(1+\ln x)\mathrm{d}x+C=x^2y(1+2\ln x)+C\end{aligned}$$

(b) 求曲面 $y=4\left(x^2+y^2\right)^2+z^4$ 所围成的体积 $V=$__________.

解: 由曲面方程知所围成立体位于在 $y>0$ 上方四个卦限内，且是完全对称，即体积为第一个卦限立体的 4 倍. 利用球面坐标，将曲面方程化如下

$$令\begin{cases} x=r\sin\varphi\cos\theta \\ y=r\sin\varphi\sin\theta \\ z=r\cos\varphi \end{cases} \Rightarrow 0\le\theta\le\frac{\pi}{2}, 0\le\varphi\le\frac{\pi}{2}, 0\le r\le\sqrt[3]{\frac{\sin\varphi\sin\theta}{4\sin^4\varphi+\cos^4\varphi}}$$

即所围成的体积为

$$V=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\varphi\int_0^{\sqrt[3]{\frac{\sin\varphi\sin\theta}{4\sin^4\varphi+\cos^4\varphi}}} r^2\sin\varphi\mathrm{d}r=\frac{4}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\theta\mathrm{d}\theta\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^2\varphi}{4\sin^4\varphi+\cos^4\varphi}\mathrm{d}\varphi$$

$$\xlongequal{t=\tan\varphi}\frac{4}{3}\int_0^{+\infty}\frac{t^2}{1+4t^4}\mathrm{d}t=\frac{1}{3}\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}t^4}{t\left(1+4t^4\right)}\xlongequal{u=t^4}\frac{1}{3}\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}u}{u^{\frac{1}{4}}\left(1+4u\right)}=\frac{\pi}{6}$$

7. 计算极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\left(\prod\limits_{k=1}^{n}\frac{2k}{2k-1}\right)\int_{-1}^{\infty}\frac{(\cos x)^{2n}}{2^x}\mathrm{d}x\right]=$____, 与 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{(-1)^n}{n}\right)^{\csc\left(\pi\sqrt{1+n^2}\right)}=$____.

解: 首先我们先求其部分积分式

$$I_k=\int_{-\pi/2}^{\pi/2}(\cos x)^{2k}\mathrm{d}x=\left[(\cos x)^{2k-1}\sin x\right]_{-\pi/2}^{\pi/2}+(2k-1)\int_{-\pi/2}^{\pi/2}(\cos x)^{2k-2}\sin^2 x\mathrm{d}x$$

$$=(2k-1)\int_{-\pi/2}^{\pi/2}(\cos x)^{2k-2}\left(1-\cos^2 x\right)\mathrm{d}x=(2k-1)\left(I_{k-1}-I_k\right)$$

即

$$I_k=\frac{2k-1}{2k}I_{k-1}\Longrightarrow I_n=\left(\prod_{k=1}^{n}\frac{2k-1}{2k}\right)I_0=\pi\prod_{k=1}^{n}\frac{2k-1}{2k}$$

因此

$$\lim_{n\to\infty}\left[\left(\prod_{k=1}^{n}\frac{2k}{2k-1}\right)\int_{-1}^{\infty}\frac{(\cos x)^{2n}}{2^x}\mathrm{d}x\right]=\lim_{n\to\infty}\left(\prod_{k=1}^{n}\frac{2k}{2k-1}\right)\sum_{k=0}^{\infty}\frac{I_n}{2^{k\pi}}=\pi\frac{1}{1-2^{-\pi}}=\pi\frac{2^\pi}{2^\pi-1}$$

又有

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{(-1)^n}{n}\right)^{\csc\left(\pi\sqrt{1+n^2}\right)}=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{(-1)^n}{n}\right)^{\frac{n}{(-1)^n}\frac{(-1)^n}{n\sin\left(\pi\sqrt{1+n^2}\right)}}=\exp\lim_{n\to\infty}\frac{(-1)^n}{n\sin\left(\pi\sqrt{1+n^2}\right)}$$

$$=\exp\lim_{n\to\infty}\frac{-1}{n\sin\left(n\pi-\pi\sqrt{1+n^2}\right)}=\exp\lim_{n\to\infty}\frac{n\pi-\pi\sqrt{1+n^2}}{\sin\left(n\pi-\pi\sqrt{1+n^2}\right)}\cdot\frac{1}{n\left(\pi\sqrt{1+n^2}-n\pi\right)}$$

$$=\exp\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n^2+1}+n}{n\pi}=e^{\frac{2}{\pi}}$$

8. 若 n 阶方阵 A 和 B 的秩分别是 r 和 $n-r$，求矩阵方程 $AXB=0$ 的通解______.

解: 由 $\operatorname{rank}A=r, \operatorname{rank}B=n-r$ 可知，存在 n 阶可逆矩阵 P,Q 和 S,T 使得

$$A=P\begin{pmatrix} I_{(r)} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}Q,\quad B=S\begin{pmatrix} I_{(n-r)} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}T$$

记 $QXS=R=\begin{pmatrix} R_{11} & R_{12} \\ R_{21} & R_{22} \end{pmatrix}$，其中 R_{11} 为 $r\times(n-r)$ 矩阵，则

$$0=AXB=P\begin{pmatrix} I_{(r)} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}QXS\begin{pmatrix} I_{(n-r)} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}T$$

即 $\begin{pmatrix} I_{(r)} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}QXS\begin{pmatrix} I_{(n-r)} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} R_{11} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}=0$，则 $R_{11}=0$. 因此

$$QXS=R=\begin{pmatrix} 0 & R_{12} \\ R_{21} & R_{22} \end{pmatrix}\Rightarrow X=Q^{-1}\begin{pmatrix} 0 & R_{12} \\ R_{21} & R_{22} \end{pmatrix}S^{-1}$$

其中 R_{12},R_{21},R_{22} 分别为任意给定的 $r\times r,(n-r)\times(n-r),(n-r)\times r$ 矩阵.

9. (a) 找一幂级数 $f(x)$ 是____，使得它满足 $f''(x)+f(x)=0, f(0)=0, f'(0)=1$ 成立.

(b) 计算极限

$$\lim_{x\to0^+}\lim_{y\to+\infty}\frac{\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}\sum\limits_{m=0}^{\infty}\frac{1}{n2^m+1}\displaystyle\int_0^{x^2}\frac{\pi\left(\sqrt[4]{1+t}-1\right)\sin t^4}{\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{((n-1)!)^2(2t)^{2n}}{(2n)!}\displaystyle\int_0^1\frac{(1-2x)\ln(1-x)}{x^2-x+1}\mathrm{d}x}\mathrm{d}x}{x^2(x-\tan x)\ln\left(x^2+1\right)\left[\left(\frac{2\arctan\frac{y}{x}}{\pi}\right)^y-1\right]}$$

解:

(a) 设幂级数 $f(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$，有

$$f(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n+\cdots$$

$$f'(x)=a_1+2a_2x+3a_3x^2+\cdots+na_nx^{n-1}+\cdots$$

$$f''(x)=2a_2+3\cdot2a_3x+4\cdot3a_4x^2+\cdots+n(n-1)a_nx^{n-2}+\cdots$$

考虑到 $f''(x)=-f(x)$，则

$$n(n-1)a_n=-a_{n-2}\,(n=2,3,\cdots)$$

由于 $a_0=f(0)=0,a_1=f'(0)=1$，即

$$a_{2k}=0,a_{2k+1}=\frac{(-1)^k}{(2k+1)!}\,(k=1,2,\cdots)$$

因此

$$f(x)=\sin x=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}$$

(b) 先求该级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{n2^m+1}=\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}\int_0^1x^{n2^m}\mathrm{d}x=\int_0^1\mathrm{d}x\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}x^{n2^m}$$

$$=-\int_0^1\mathrm{d}x\sum_{m=0}^{\infty}\ln\left(1+x^{2^m}\right)=-\int_0^1\ln(1-x)\,\mathrm{d}x$$

$$=[(1-x)\ln(1-x)-(1-x)]\,|_0^1=1$$

又有

$$\left(\frac{2\arctan\frac{y}{x}}{\pi}\right)^{y}-1\sim\exp\left(y\left(\frac{2\arctan\frac{y}{x}}{\pi}-1\right)\right)-1\sim y\left(\frac{2\arctan\frac{y}{x}}{\pi}-1\right)\to-\frac{2x}{\pi}\ (y\to\infty)$$

考虑

$$\int_0^1\frac{(1-2x)\ln(1-x)}{x^2-x+1}\mathrm{d}x\xlongequal{x=1-x}2\int_0^1\frac{\left(x-\frac{1}{2}\right)\ln x}{x^2-x+1}\mathrm{d}x=2I$$

利用

$$\sum_{n=1}^{\infty}x^{n-1}\cdot\sin(na\pi)=\frac{\sin(a\pi)}{x^2-2\cos(a\pi)+1}$$

令 $a=\frac{1}{3}$，则有

$$\begin{aligned}I&=\int_0^1\frac{\left(x-\frac{1}{2}\right)\ln x}{x^2-x+1}\mathrm{d}x=\frac{2}{\sqrt{3}}\int_0^1\sum_{n=1}^{\infty}x^{n-1}\sin\left(\frac{n\pi}{3}\right)\left(x-\frac{1}{2}\right)\ln x\mathrm{d}x\\&=\frac{2}{\sqrt{3}}\sum_{n=1}^{\infty}\sin\left(\frac{n\pi}{3}\right)\int_0^1x^{n-1}\left(x-\frac{1}{2}\right)\ln x\mathrm{d}x=\frac{2}{\sqrt{3}}\sum_{n=1}^{\infty}\sin\left(\frac{n\pi}{3}\right)\left[\frac{1}{2n^2}-\frac{1}{(n+1)^2}\right]\\&=\frac{2}{\sqrt{3}}J\end{aligned}$$

因为

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin\frac{n\pi}{3}}{(n+1)^2}=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\sin\left(\frac{n\pi}{3}-\frac{\pi}{3}\right)}{n^2}=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\sin\frac{n\pi}{3}\cos\frac{\pi}{3}-\cos\frac{n\pi}{3}\sin\frac{\pi}{3}}{n^2}$$

所以有

$$J=\frac{\sin\frac{\pi}{3}}{2}+\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\sin\frac{\pi}{3}\cos\frac{n\pi}{3}}{n^2}=\frac{\sqrt{3}}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos\frac{n\pi}{3}}{n^2}$$

由于 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{n^2}=\frac{3x^2-6\pi x+2\pi^2}{12}$，令 $x=\frac{\pi}{3}$ 得 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos\frac{n\pi}{3}}{n^2}=\frac{\pi^2}{36}$，即

$$I=\frac{\sin\frac{\pi}{3}}{2}+\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\sin\frac{\pi}{3}\cos\frac{n\pi}{3}}{n^2}=\frac{\sqrt{3}}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos\frac{n\pi}{3}}{n^2}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos\frac{n}{3}}{n^2}=\frac{\pi^2}{36}$$

故有

$$\int_0^1\frac{(1-2x)\ln(1-x)}{x^2-x+1}\mathrm{d}x=\frac{\pi^2}{18}$$

再来看到 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{((in-1)!)^2(2t)^{2n}}{(2n)!}$，显然该级数的收敛域为 $[-1,1]$.

令 $S(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{[(n-1)!]^2}{(2n)!}(2x)^{2n}$，有

$$S'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{[(n-1)!]^2}{(2n)!}4n(2x)^{2n-1}\ (-1<x<-1)$$

$$S''(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{[(n-1)!^2}{(2n)!}8n(2n-1)(2x)^{2n-2}\ (-1<x<-1)$$

于是

$$
\begin{aligned}
&-xS'(x)+\left(1-x^2\right)S''(x)\\
&=-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{[(n-1)!]^2}{(2n!)}2n(2x)^{2n}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{[(n-1)!]^2}{(2n!)^2}8n(2n-1)(2x)^{2n-2}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{[(n-1)!]^2}{(2n)!}2n(2n-1)(2x)^{2n}\\
&=-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{[(n-1)!]^2}{(2n)!}4n^2(2x)^{2n}+4+\sum_{n=2}^{\infty}\frac{[(n-1)!]^2}{(2n!)}8n(2n-1)(2x)^{2n-2}\\
&=-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{[n-1)!]^2}{(2n!)}-4n^2(2x)^{2n}+4+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n!)^2}{(2n+2)!}8(n+1)(2n+1)(2x)^{2n}\\
&=4\,(-1<x<-1)
\end{aligned}
$$

即

$$
\begin{gathered}
-xS'(x)+\left(1-x^2\right)S''(x)=4\\
\Rightarrow-\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}S'(x)+\sqrt{1-x^2}S''(x)=\frac{4}{\sqrt{1-x^2}}\,(-1<x<1)
\end{gathered}
$$

也就有

$$
\sqrt{1-x^2}S'(x)=4\arcsin x+C\quad(-1<x<1)
$$

由 $S'(0)=0$，得 $C=0$，即

$$
S'(x)=\frac{4\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}\,(-1<x<1)
$$

两边同时积分得

$$
S(x)=2\arcsin^2 x+C_1\,(-1<x<1)
$$

再由 $S(0)=0$，得 $C_1=0$，即

$$
S(x)=2\arcsin^2 x\,(-1<x<1)
$$

又因为 $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{[(k-1)!]^2}{(2k)!}=\frac{\pi}{2}=S(\pm1)$，即

$$
\sum_{n=1}^{\infty}\frac{((n-1)!)^2(2t)^{2n}}{(2n)!}=2\arcsin^2 t\,(-1<t<1)
$$

由 taylor 公式，有

$$
\tan x=x+\frac{x^3}{3}+o\left(x^3\right),x\to0\Rightarrow x-\tan x\sim-\frac{1}{3}x^3,x\to0
$$

注意到 $\ln\left(x^2+1\right)\sim x^2,\sin x^8\sim x^8,x\to0$，因此有

$$
\lim_{x\to0}\lim_{y\to\infty}\frac{\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}\sum\limits_{m=0}^{\infty}\frac{1}{n2^m+1}\int_0^{x^2}\frac{\left(\sqrt[4]{1+t}-1\right)\sin t^4}{\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{((n-1)!)^2(2t)^{2n}}{(2n)!}\int_0^1\frac{(1-2x)\ln(1-x)}{x^2-x+1}\mathrm{d}x}\mathrm{d}x}{x^2(x-\tan x)\ln(x^2+1)\left[\left(\frac{\arctan\frac{y}{x}}{\pi^2}\right)^y-1\right]}
$$

$$
=\lim_{x\to0}\frac{\int_0^{x^2}\frac{\pi\left(\sqrt[4]{1+t}-1\right)\sin t^4}{2\arcsin^2 t\cdot\frac{1}{18}\pi^2}\mathrm{d}x}{\left(-\frac{2x}{\pi}\right)\left(-\frac{1}{3}x^6\right)}=\lim_{x\to0}\frac{\frac{2\pi x\left(\sqrt[4]{1+x^2}-1\right)\sin x^8}{2\arcsin^2(x^2)\cdot\frac{1}{18}\pi^2}}{\frac{16x^7}{3\pi}}=\lim_{x\to0}\frac{\frac{\frac{1}{2}x^{11}}{\frac{1}{9}x^4}}{\frac{16x^7}{3}}=\frac{27}{32}
$$

10. (a) 计算三重积分

$$\iiint_{\Omega} \cos(2x-y+z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

其中 Ω 为球面 $x^2+y^2+z^2 \le 1$.

(b) 计算曲面积分

$$\int_L e^{-(x^2-y^2)}\left[x\left(1-x^2-y^2\right)\mathrm{d}x+y\left(1+x^2+y^2\right)\mathrm{d}y\right]$$

其中 L 为平面上从 $A(0,0)$ 到 $B(1,1)$ 的曲线 $y=x^2$ 上的弧度.

解:

(a) 作旋转变换，即将 xOy 旋转到平面 $2x-y+z$ 的位置上，令 $\varphi=\dfrac{2x-y+z}{\sqrt{6}}$，这时 x 轴与 y 轴被旋转到平面 $\varphi=0$ 内，把它们记为 ξ 与 η 轴，由解析几何知识得

$$|J|=1, \Omega'=\left\{(\xi,\eta,\zeta):\xi^2+\eta^2+\zeta^2\le 1\right\}$$

$$\iiint_{\Omega} \cos(2x-y+z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\iiint_{\Omega'} \cos\left(\sqrt{6}\varphi\right)\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta\mathrm{d}\varphi$$

利用柱面坐标 $\xi=r\cos\theta,\eta=r\sin\theta,\varphi=\varphi$ 得

$$\begin{aligned}\iiint_{\Omega} \cos(2x-y+z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z&=\int_{-1}^{1}\cos\left(\sqrt{6}\varphi\right)\mathrm{d}\varphi\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\sqrt{1-\varphi^2}}r\mathrm{d}r=2\pi\int_0^1\left(1-\varphi^2\right)\cos\left(\sqrt{6}\varphi\right)\mathrm{d}\varphi\\&=\frac{2\pi}{3}\left(\frac{\sin\sqrt{6}}{\sqrt{6}}-\cos\sqrt{6}\right)\end{aligned}$$

(b) 设曲线 L 与线段 AB 围成的区域为 D，易知

$$D=\left\{(x,y)\,|x^2\le y\le x, 0\le x\le 1\right\}$$

记

$$P(x,y)=e^{-(x^2-y^2)}x\left(1-x^2-y^2\right),\quad Q(x,y)=e^{-(x^2-y^2)}y\left(1+x^2+y^2\right)$$

在 D 内有

$$\frac{\partial P(x,y)}{\partial y}=\frac{\partial Q(x,y)}{\partial x}=-2e^{-(x^2-y^2)}xy\left(x^2+y^2\right)$$

根据 Green 公式有

$$\int_L-\int_{AB}e^{-(x^2-y^2)}\left[x\left(1-x^2+y^2\right)\mathrm{d}x+y\left(1+x^2+y^2\right)\mathrm{d}y\right]=\iint_D\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0$$

注意到 $\overrightarrow{AB}:y=x(x:0\to 1)$，因此

$$\begin{aligned}&\int_L e^{-(x^2-y^2)}\left[x\left(1-x^2-y^2\right)\mathrm{d}x+y\left(1+x^2+y^2\right)\mathrm{d}y\right]\\=&\int_{\overrightarrow{AB}}e^{-(x^2-y^2)}\left[x\left(1-x^2+y^2\right)\mathrm{d}x+y\left(1+x^2+y^2\right)\mathrm{d}y\right]\\=&2\int_0^1 x\mathrm{d}x=1\end{aligned}$$

二、解答题（本题满分 10 分）

已知 $F(n)$，且 $F(1)=F(2)=1$，对于 $F(n)$ 有 $(n+1)=\alpha F(n)+\beta F(n-1)$.

(1) 求 $F(n)$ 的通项；

(2) 若 $\alpha=\beta=1$，求 $\lim\limits_{N\to\infty}\sum\limits_{n=2}^{N}\dfrac{F(n)}{F(n-1)F(n+1)}$.

解: (1) 由条件可知：$F(n+1)-\alpha F(n)-\beta F(n-1)=0$.

注意到上式类似一元二次方程形式，我们令 α 和 β 写为 $a+b=\alpha$，$ab=-\beta$；，则有

$$F(n+1)-(a+b)F(n)+abF(n-1)=0\text{，且 } a=\frac{\sqrt{\alpha^2+4\beta}+\alpha}{2}\text{，}b=\frac{\alpha-\sqrt{\alpha^2+4\beta}}{2}$$

$$\Rightarrow F(n+1)-aF(n)=b(F(n)-aF(n-1))$$

令 $G(n)=F(n+1)-aF(n)$，则 $G(n)=(1-a)b^{n-1}$，又 $F(n+1)-bF(n)=a(F(n)-bF(n-1))$
令 $H(n)=\ F(n+1)-bF(n)$，则 $H(n)=(1-b)a^{n-1}$

$$\Rightarrow F(n+1)=\frac{(1-a)b^n-(1-b)a^n}{b-a}$$

因此

$$F(n)=\frac{(1-a)b^{n-1}-(1-b)a^{n-1}}{b-a}=\frac{\left(1-\frac{\sqrt{\alpha^2+4\beta}+\alpha}{2}\right)\left(\frac{\alpha-\sqrt{\alpha^2+4\beta}}{2}\right)^{n-1}-\left(1-\frac{\alpha-\sqrt{\alpha^2+4\beta}}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{\alpha^2+4\beta}+\alpha}{2}\right)^{n-1}}{\frac{\alpha-\sqrt{\alpha^2+4\beta}}{2}-\frac{\sqrt{\alpha^2+4\beta}+\alpha}{2}}.$$

(2) 注意到此时 $F(n+1)=F(n)+F(n-1)$，则有

$$\frac{F(n)}{F(n-1)F(n+1)}=\frac{F(n)}{F(n-1)(F(n)+F(n-1))}=\frac{1}{F(n)}-\frac{1}{F(n+1)}$$

因此

$$\sum_{n=2}^{N}\frac{F(n)}{F(n-1)F(n+1)}=\frac{1}{F(1)}+\frac{1}{F(2)}-\frac{1}{F(N)}-\frac{1}{F(N+1)}.$$

由于 $F(n)$ 单调递增，且 $\lim\limits_{n\to\infty}F(n)=\infty$，即

$$\lim_{N\to\infty}\sum_{n=2}^{N}\frac{F(n)}{F(n-1)F(n+1)}=2.$$

三、解答题（本题满分 10 分）

设 $f(x)$ 为 $[0,1]$ 上的非负连续函数, 证明

$$\int_0^1\frac{f^{2020}(x)}{2018}\,\mathrm{d}x+\int_0^1\frac{f^{2017}(x)}{2021}\,\mathrm{d}x\geq\int_0^1\frac{f^{2019}(x)}{2019}\,\mathrm{d}x+\int_0^1\frac{f^{2018}(x)}{2020}\,\mathrm{d}x$$

证明: 首先证明对任意 $a,b\geq 0$ 有 $a^{2017}b^{2020}+a^{2020}b^{2017}\geq a^{2018}b^{2019}+a^{2019}b^{2018}$, 这是因为

$$a^{2017}b^{2020}+a^{2020}b^{2017}\geq a^{2018}b^{2019}+a^{2019}b^{2018}=(ab)^{2017}(a-b)^2\geq 0.$$

由此, 对任意 $x,y\in[0,1]$ 我们有

$$y^{2017}f^{2020}(x)+y^{2020}f^{2017}(x)\geq y^{2018}f^{2019}(x)+y^{2019}f^{2018}(x).$$

注意到 $\int_0^1 y^k\,\mathrm{d}x=\frac{1}{k+1}$, 将上式两边在 $[0,1]^2$ 上积分即得

$$\int_0^1 \frac{f^{2020}(x)}{2018}\,\mathrm{d}x+\int_0^1 \frac{f^{2017}(x)}{2021}\,\mathrm{d}x \geq \int_0^1 \frac{f^{2019}(x)}{2019}\,\mathrm{d}x+\int_0^1 \frac{f^{2018}(x)}{2020}\,\mathrm{d}x.$$

四、解答题（本题满分 10 分）

设函数 $f(x)$ 在 $[0,n]$ 上可导，$n\geq \mathbb{N}^*$ 且 $n\geq 2$，并满足

$$\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=\frac{\int_0^2 f(x)\mathrm{d}x}{2}=\frac{\int_0^3 f(x)\mathrm{d}x}{3}=\cdots\cdots=\frac{\int_0^n f(x)\mathrm{d}x}{n}$$

(1) 证明：存在实数 T，使得关于 x 的方程：$f(x)=T$ 至少有 n 个不等实根；

(2) 设函数 $g(x)$ 在 $[0,n]$ 上可导，证明：存在实数 M，使得关于 x 的方程：

$$f'(x)=g'(x)[M-f(x)]$$

至少有 $n-1$ 个不等实根.

证明: (1) 先证明：$\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=\int_1^2 f(x)\mathrm{d}x=\int_2^3 f(x)\mathrm{d}x=\cdots=\int_{n-1}^n f(x)\mathrm{d}x$

由题意知：$\int_1^2 f(x)\mathrm{d}x=\int_0^2 f(x)\mathrm{d}x-\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$，设 $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=T$，则

$$\int_2^3 f(x)\mathrm{d}x=\int_0^3 f(x)\mathrm{d}x-\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x-\int_1^2 f(x)\mathrm{d}x=3T-2T=T$$

即 $\int_{n-1}^n f(x)\mathrm{d}x=\int_0^n f(x)\mathrm{d}x-(n-1)T=T$，从而

$$\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=\int_1^2 f(x)\mathrm{d}x=\int_2^3 f(x)\mathrm{d}x=\cdots\cdots\int_{n-1}^n f(x)\mathrm{d}x=T$$

对该式中各项使用积分中值定理，即可得到：$f(x_1)=f(x_2)=\cdots\cdots=f(x_n)=T$，其中：$x_1\in(0,1), x_2\in(1,2),\cdots\cdot x_n\in(n-1,n)$，显然 $x_1,x_2,\cdots\cdots x_n$ 互不相等. 于是，就可以证明出：存在实数 T，使得关于 x 的方程：$f(x)=T$ 至少有 n 个不等实根.

(2) 构造辅助函数

$$F(x)=[f(x)-M]\cdot e^{g(x)}$$

取 $M=T$，则由 (1) 知满足：$F(x_1)=F(x_2)=\cdots\cdots=F(x_n)=0$，且由 $f(x)$ 在 $[0,n]$ 上可导得 $F(x)$ 在 $[0,n]$ 上可导，当然也在 $[0,n]$ 连续，符合罗尔定理的应用条件.

于是分别在 $[0,n]$ 的若干子区间 $[x_1,x_2],[x_2,x_3],\cdots\cdots[x_{n-1},x_n]$ 内应用罗尔定理可得：

$$F'(\xi_1)=F'(\xi_2)=\cdots\cdots F'(\xi_{n-1})=0$$

其中：$\xi_1\in[x_1,x_2],\xi_2\in[x_2,x_3],\cdots\cdots,\xi_{n1}\in[x_{n-1},x_n]$.

整理即可得

$$f'(\xi_i)=g'(\xi_i)\cdot[M-f(\xi_i)],\quad i=1,2,\cdots\cdots,n-1$$

其中 $M=T$.

五、解答题（本题满分 10 分）

某曲面 D 上的任意一点与 $P_0(1,1,1)$ 所在的直线始终与直线 $x-1=y-1=z-1$ 的夹角为 θ_0 .

(1) 求曲面 D 的方程;

(2) 当 $\theta_0=\dfrac{\pi}{6}$ 时，球面 $(x-1)^2+(y-1)^2+(z-1)^2=1$ 被曲面 D 所截的曲面为 Σ，曲面 Σ 在平面 $z=1$ 的上半部分为 Σ_1，下半部分为 Σ_2 .

- 当曲面 Σ_1 和 Σ_2 的电荷面密度均为 ρ 时，求 P_0 点处的电场强度 $\overrightarrow{E}$.
- 当曲面 Σ_1 带电荷密度为 ρ，Σ_2 的电荷密度为 $-\rho$，求 P_0 处的电场强度 $\overrightarrow{E}$.

提示：点 $A(x_0,y_0,z_0)$ 电荷 $+q$ 对点 $B(x,y,z)$ 产生电场 $\overrightarrow{E}$ 为 $\dfrac{1}{4\pi\epsilon_0}\dfrac{q}{|\overrightarrow{r}|^3}\overrightarrow{r}$，其中 $\overrightarrow{r}=\overrightarrow{AB}$
.

解: 设曲面上的任意一点 P 为 (x,y,z)，$\overrightarrow{S_0}$ 为直线的方向向量，则有

$$\cos\theta_0=\frac{\overrightarrow{P_0P}\cdot\overrightarrow{S_0}}{\left|\overrightarrow{P_0P}\right|\left|\overrightarrow{S_0}\right|}=\frac{x+y+z-3}{\sqrt{3}\sqrt{(x-1)^2+(y-1)^2+(z-1)^2}}$$

即

$$x+y+z-3=\sqrt{3}\cos\theta_0\sqrt{(x-1)^2+(y-1)^2+(z-1)^2}$$

(1) 曲面 Σ 上任意一点 M 均存在关于 P_0 的对称点 M'，点 M 与 M' 所贡献的电场大小相等，方向相反，因此可知 P_0 处的 $\overrightarrow{E}=0$.

(2) 按照 (1) 中的分析，当两面所带的电荷相反时，P_0 点处的电场 $\overrightarrow{E}$ 为 Σ_1 曲面贡献的两倍. $E_{\perp}$ 和 $E_{\parallel}$ 分别为 $\overrightarrow{E}$ 在直线 $x-1=y-1=z-1$ 上垂直和平行的分量.

由对称性易知 $E_{\perp}=0$

$$E_{\parallel}=2\iint_{\Sigma_1}\frac{\rho\sin\theta\cos\theta}{4\pi\epsilon_0}dS=\frac{\rho}{4\pi\epsilon_0}\int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{\pi}{6}}\sin 2\theta\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi=\frac{\sqrt{3}\rho_0}{4\epsilon_0}$$

电场强度为 $\dfrac{\sqrt{3}\rho_0}{4\epsilon_0}$，方向与 $\overrightarrow{AP_0}$ 相同.

六、解答题 (本题满分 10 分)

若有数列 $\{a_n\}$ 是一收敛数列且 $y=\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$，使得 y 满足 $xy''-y'+4x^3y=0$ 通解，对 $n\geq 4$，试证：$a_n=-\dfrac{4}{n(n-2)}a_{n-4}$. 并求证在 $a_0=1,a_2=0$ 情况下通解为 $y=\cos x^2$，且求与之对应 y 在 $a_0=0,a_2=1$ 的通解.

证明: 由 $y=\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$，有

$$y'=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n=\sum_{n=0}^{\infty}a_n\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}x^n,\quad y''=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\sum_{n=1}^{\infty}na_nx^{n-1}=\sum_{n=2}^{\infty}n(n-1)a_nx^{n-2}$$

即 $xy''-y'+4x^3y=0$ 可得

$$x\left(2a_2+6a_3x+\sum_{n=4}^{\infty}n(n-1)a_nx^{n-2}\right)-\left(a_1+2a_2x+3a_3x^2+\sum_{n=4}^{\infty}na_nx^{n-1}\right)+4x^3\left(\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n\right)=0$$

$$\Longleftrightarrow -a_1+3a_3x^2+\sum_{n=4}^{\infty}[n(n-2)a_n+4a_{n-4}]x^{n-1}=0$$

就有 $x^{n-1}:n(n-2)a_n+4a_{n-4}=0\ \forall n\geq 4\Longleftrightarrow a_n=-\dfrac{4}{n(n-2)}a_{n-4}$，$\forall n\geq 4$

(1) 在 $a_0=1, a_2=0$ 情况下：若 $a_i=0\,(i\le 3)\Rightarrow a_n=0 \quad \forall n\equiv i$，即 $a_1=a_2=a_3=0\Rightarrow a_n=0 \forall n\neq 0 \mod 4$，使得 $n=4k, k\ge 0$，有

$$a_{4k}=-\frac{1}{2k\,(3k-1)},$$

$$a_{4(k-1)}=\frac{(-1)^2}{2k\,(2k-1)\,(2\,(2k-1))\,(2\,(k-1)-1)}a_{4(k-2)}=\ldots=\frac{(-1)^k}{\prod_{r=1}^{k}2r\,(2r-1)}a_0=\frac{(-1)^k}{(2k)!}$$

$$\Rightarrow y=\sum_{k=0}^{\infty}a_{4k}x^{4k}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k\left(x^2\right)^{2k}}{(2k)!}=\cos\left(x^2\right)$$

(2) 在 $a_0=0, a_2=1$ 情况下：由于 $a_0\neq 0$，即 $n\equiv 2\mathrm{mod}\ 4$，使得 $n=4k+2, k\ge 0$，有

$$a_{4k+2}=-\frac{1}{(2k+1)\,2k}a_{4(k-1)+2}=\cdots=\frac{(-1)^k}{(2k+1)!}$$

$$\Rightarrow y=\sum_{k=0}^{\infty}a_{4k+2}x^{4k+2}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k\left(x^2\right)^{2k+1}}{(2k+1)!}=\sin\left(x^2\right)$$

七、解答题 (本题满分 10 分)

已知数列 $\{a_n\}$ 中，$n\in N_+, a_1=2$，且满足 $\sum\limits_{k=1}^{n}a_k=\frac{1}{2}(n+1)\,(a_n+1)-1$.

(1) 若设 $b_n\in\mathbb{R}\quad(n=1,2,3\cdots)$，其中 $\mathbb{R}$ 为实数集，如果级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{b_n}{a_n^2}$ 收敛，试求解以下极限：

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{b_k}{a_k}}{a_n}$$

(2) 若级数 $\left|\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n\right|<+\infty$，试求解以下极限：$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sum\limits_{k=1}^{n}a_kb_k}{a_n}$.

解:

(1) 由题意可知以下两式：

$$\sum_{k=1}^{n}a_k=\frac{1}{2}(n+1)(a_n+1)-1 \qquad ①$$

$$\sum_{k=1}^{n-1}a_k=\frac{1}{2}n(a_{n-1}+1)-1(n\ge 2) \qquad ②$$

将①②两式相减，得到

$$a_n=\frac{1}{2}(n+1)(a_n+1)-\frac{1}{2}n(a_{n-1}+1)$$

化简得：

$$(1-n)a_n+na_{n-1}=1 \qquad ③$$

由③得

$$-na_{n+1}+(n+1)a_n=1 \qquad ④$$

将③④两式相减，即得到：

$$na_{n+1}-2na_n+na_{n-1}=0$$

化简得：$a_{n+1}+a_{n-1}=2a_n(n\geq 2)$，从而得到 $\{a_n\}$ 是等差数列.

令①式中的 $n=2$ ，可以得到 $a_1=\frac{1}{2}a_2+\frac{1}{2}$ ，结合 $a_1=2$ 得 $a_2=3$ ，于是得到：数列 $\{a_n\}$ 的通项公式为 $a_n=n+1(n\in N_+)$

于是由题意可知，级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{b_n}{(n+1)^2}$ 收敛，不妨设其收敛于 S ，并令 $S_n=\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{b_k}{(k+1)^2}(n\in N_+)$，则当 $n\to\infty$ 时有 $S_n\to S$

当 $k\geq 2$ 时，有 $\frac{b_k}{(k+1)^2}=S_k-S_{k-1}$，记

$$A_n=\frac{\sum_{k=1}^{n}\frac{b_k}{a_k}}{a_n}=\frac{1}{n+1}\cdot\sum_{k=1}^{n}\frac{b_k}{k+1}$$

进一步有

$$\begin{aligned}A_n&=\frac{1}{n+1}\cdot\sum_{k=1}^{n}(k+1)\frac{b_k}{(k+1)^2}=\frac{1}{n+1}\cdot\left[\left(\sum_{k=2}^{n}(k+1)(S_k-S_{k-1})\right)+2S_1\right]\\&=\frac{1}{n+1}\left[\sum_{k=2}^{\infty}((k+1)S_k-kS_{k-1}))-\sum_{k=2}^{n}S_{k-1}+2S_1\right]=\frac{(n+1)S_n-\sum_{k=1}^{n-1}S_k}{n+1}\\&=S_n-\frac{n-1}{n+1}\cdot\frac{\sum_{k=1}^{n-1}S_k}{n-1}\end{aligned}$$

取极限有：

$$\lim_{n\to\infty}A_n=\lim_{n\to\infty}S_n-\lim_{n\to\infty}\frac{n-1}{n+1}\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{\sum_{k=1}^{n-1}S_k}{n-1}=S-S=0$$

上面解题过程中出现的极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sum_{k=1}^{n-1}S_k}{n-1}$ 可以用 stolz 定理求解，也可以用算术平均值数列与原数列收敛于同一值的性质进行求解。

综上 $\lim\limits_{n\to\infty}A_n=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sum_{k=1}^{n}\frac{b_k}{a_k}}{a_n}=0.$

(2) 原极限可以化简为

$$B_n=\lim_{n\to\infty}\frac{\sum_{k=1}^{n}(k+1)b_k}{n+1}$$

由题意可知，级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$ 收敛，即 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(n+1)^2b_n}{(n+1)^2}$ 收敛，由 (1) 中的结论，有：

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sum_{k=1}^{n}\frac{(k+1)^2\cdot b_k}{k+1}}{n+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sum_{k=1}^{n}(k+1)\cdot b_k}{n+1}=0$$

综上 $\lim\limits_{n\to\infty} B_n = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sum\limits_{k=1}^{n} a_k b_k}{a_n} = 0$

第 (2) 问的另解：设 $S_k = \sum\limits_{i=1}^{k} b_i$ ，于是

$$\sum_{k=1}^{n} S_k = nb_1 + (n-1)b_2 + (n-2)b_3 + \cdots b_n = \sum_{k=1}^{n} (n-k+1)b_k$$

对上式进行化简，有：

$$\sum_{k=1}^{n} (k+1)\, b_k = (n+2) \sum_{k=1}^{n} b_k - \sum_{k=1}^{n} S_k$$

进一步，有：

$$\frac{\sum\limits_{k=1}^{n} (k+1)\, b_k}{n+1} = \frac{n+2}{n+1} \sum_{k=1}^{n} b_k - \frac{n}{n+1} \cdot \frac{\sum\limits_{k=1}^{n} S_k}{n} = \frac{n+2}{n+1} S_n - \frac{n}{n+1} \cdot \frac{\sum\limits_{k=1}^{n} S_k}{n}$$

在上式两端取极限，有：

$$\lim_{n\to\infty} B_n = \lim_{n\to\infty} \frac{\sum\limits_{k=1}^{n} (k+1) b_k}{n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{n+2}{n+1} \cdot \lim_{n\to\infty} S_n - \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} \cdot \lim_{n\to\infty} \frac{\sum\limits_{k=1}^{n} S_k}{n} = S - S = 0$$

在以上求解过程中，使用到了第一问中的 $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = S$，以及 $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sum\limits_{k=1}^{n} S_k}{n} = S$.

2019 年第一届八一杯大学生网络数学竞赛

数学 II 试题（满分 40 分）

【注意】考生需要对 AB 两题进行作答，我们将按考生所给过程计算步骤分，全部做答完全正确计 40 分，二试作为非数组拔高题，可供考生进行挑战自己.

A.(本题满分 10 分)

等离子体是一种被电离的离子化的气体，通常被称为物质的第四态，它不仅广泛存在于我们的日常生活中，宇宙中更是有百分之九十九的物质以等离子态存在，假设现在有一种等离子体，完全由质子和电子组成，其中的电势满足泊松方程 $\nabla^2\Phi=-\frac{e}{\epsilon_0}(n_i-n_e)$, 电子的速度分布满足 $f_e(\vec{v})=n_i(\frac{1}{2\pi})^{\frac{3}{2}}\mathrm{e}^{-(\frac{1}{2}\vec{v}^2-e\Phi)}$ 其中 ϵ_0 为真空介电常数，n_i 和 n_e 分别为质子和电子密度。

(1) 求质子密度 n_i 和电子密度 n_e 之间的关系；

(2) 试在合适的坐标系中求出一级近似下 Φ 的表达式。

温馨提示：因为正负电荷的存在，所以等离子体的电势不满足库仑势 $\Phi=\frac{q}{4\pi\epsilon_0 r}$, 但是当电荷之间距离比较小的时候，可以认为它们产生的电势满足该式.

可能用到的公式：

$$
\begin{aligned}
\vec{v}^2 &= v_x^2+v_y^2+v_z^2\\
\nabla^2 f &= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}\\
\nabla^2 f &= \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial f}{\partial\rho}\right)+\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 f}{\partial\varphi^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}\\
\nabla^2 f &= \frac{1}{r}\frac{\partial^2}{\partial r^2}(rf)+\frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial f}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 f}{\partial\varphi^2}
\end{aligned}
$$

解:

(1) 电子密度

$$
\begin{aligned}
n_e &= \int f_e(v_x,v_y,v_z)\mathrm{d}v_x\mathrm{d}v_y\mathrm{d}v_z\\
&= n_i(\frac{1}{2\pi})^{\frac{3}{2}}\mathrm{e}^{e\Phi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}(v_x^2+v_y^2+v_z^2)}\mathrm{d}v_x\mathrm{d}v_y\mathrm{d}v_z\\
&= \frac{\sqrt{2}}{4}n_i\mathrm{e}^{e\Phi}
\end{aligned}
$$

(2) 将 (1) 的结论代入泊松方程得:

$$\nabla^2\Phi=-\frac{\sqrt{2}e}{4\epsilon_0}n_i(1-\mathrm{e}^{e\Phi})$$

利用 $\mathrm{e}^x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}x^n$，保留一阶量可得:

$$1-\mathrm{e}^{e\Phi}\approx-e\Phi$$

所以有：

$$\nabla^2\Phi=\frac{\sqrt{2}e^2n_i\Phi}{4\epsilon_0}$$

代入可能用到的公式的最后一个，并注意到 Φ 只和 r 有关，则有:

$$\frac{1}{r}\frac{\partial^2}{\partial r^2}(r\Phi)=\frac{\sqrt{2}e^2n_i\Phi}{4\epsilon_0}$$

将 $r\Phi$ 看做一个整体 y，则

$$y''-\frac{\sqrt{2}e^2n_i}{4\epsilon_0}y=0$$

解此微分方程并代回 $r\Phi$, 而且注意到无穷远处电势 Φ 为零，可以得到：

$$\Phi=\frac{C}{r}\mathrm{e}^{-\sqrt{\frac{\sqrt{2}e^2n_i}{4\epsilon_0}}r}$$

因为 r 趋于 0 时，Φ 变为点电荷的电势，所以可以依此确定常数 $C=\dfrac{q}{4\pi\epsilon_0}$，所以

$$\Phi=\frac{q}{4\pi\epsilon_0 r}\mathrm{e}^{-\sqrt{\frac{\sqrt{2}e^2n_i}{4\epsilon_0}}r}$$

B.(**本题满分** 10 **分**)

(1) 求 $f(x)=\cos(\alpha x)\,(\alpha\neq\mathbb{Z})$ 在 $[-\pi,\pi]$ 上的 Fourier 级数，并证明：

$$1=\frac{\sin(\pi\alpha)}{\pi}\left(\frac{1}{\alpha}+2\alpha\sum_{m=1}^{\infty}\frac{(-1)^m}{\alpha^2-m^2}\right)$$

(2) 定义 $\mathrm{G}=\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln\cot t\,\mathrm{d}t$，并利用 (1) 中结论，证明：

① $e^{\frac{2\mathrm{G}}{\pi}-\frac{1}{2}}=\displaystyle\lim_{m\to\infty}\prod_{n=1}^{2m}\left(1-\frac{2}{2n+1}\right)^{n(-1)^n}$；

② $e^{\frac{4\mathrm{G}}{\pi}}=\displaystyle\lim_{m\to\infty}\left[\frac{3^3\cdot 7^7\cdot 11^{11}\cdots(4m-1)^{4m-1}}{1^1\cdot 5^5\cdot 9^9\cdots(4m-3)^{4m-3}}\right]^2\frac{(4m+3)^{2m+1}}{(4m+1)^{6m+1}}$.

注：如需要交换积分求和次序，默认一致收敛，不要求证明。

证明:

(1) 将 f 延拓为整个数轴上的以 2π 为周期函数，记为 F. 那么 F 是 $(-\infty,\infty)$ 上的周期为 2π 的偶函数. 因此

$$a_m=\frac{2}{\pi}\int_0^\pi \cos(\alpha x)\cos(mx)\,\mathrm{d}x=\frac{(-1)^m}{\pi}\frac{2\alpha\sin(\alpha\pi)}{\alpha^2-m^2}\ \ (m=0,1,2,\cdots),b_m=0\ \ (m=1,2,\cdots).$$

由 Dini 判别法，得到 F 的的 Fourier 展开式为

$$F(x)=\frac{\sin(\alpha\pi)}{\pi}\left(\frac{1}{\alpha}+2\alpha\sum_{m=1}^{\infty}\frac{(-1)^m}{\alpha^2-m^2}\cos(mx)\right)$$

限制在 $[-\pi,\pi]$ 即得

$$\cos(\alpha x)=\frac{\sin(\alpha\pi)}{\pi}\left(\frac{1}{\alpha}+2\alpha\sum_{m=1}^{\infty}\frac{(-1)^m}{\alpha^2-m^2}\cos(mx)\right)$$

在上式中取 $x=0$，即得到结论

$$1=\frac{\sin(\pi\alpha)}{\pi}\left(\frac{1}{\alpha}+2\alpha\sum_{m=1}^{\infty}\frac{(-1)^m}{\alpha^2-m^2}\right)$$

(2) 由 (1) 知 $\dfrac{\pi^2\alpha}{\sin(\pi\alpha)}=\pi+2\pi\alpha^2\sum\limits_{m=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^m}{\alpha^2-m^2}$，两边同时在 $[0,\frac{1}{2}]$ 区间上积分得

$$\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{\pi^2\alpha}{\sin(\pi\alpha)}\mathrm{d}\alpha=\frac{\pi}{2}+2\pi\int_0^{\frac{1}{2}}\left(\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\alpha^2(-1)^m}{\alpha^2-m^2}\right)\mathrm{d}\alpha$$

设 $f_m(\alpha)=\dfrac{\alpha^2(-1)^m}{\alpha^2-m^2}$，在区间 $I=\left[0,\dfrac{1}{2}\right]$ 上，当 $m=1,2,\cdots$，$\alpha\in I$，我们有

$$|f_m(\alpha)|=\frac{\alpha^2}{|\alpha^2-m^2|}\le\frac{\frac{1}{4}}{m^2-\frac{1}{4}}=\frac{1}{4m^2-1}\le\frac{1}{2m^2}$$

因为 $\sum\limits_{m=1}^{\infty}\dfrac{1}{2m^2}$ 收敛，所以 $\sum\limits_{m=1}^{\infty}f_m(\alpha)$ 在 I 上一致收敛，即交换积分求和次序，并设

$$a_m=(-1)^m\left(1+n\ln\frac{2m-1}{2m+1}\right)，所以\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{\pi^2\alpha}{\sin(\pi\alpha)}\mathrm{d}\alpha=\frac{\pi}{2}+\pi\sum_{m=1}^{\infty}a_m$$

设 $A_n=\sum\limits_{m=1}^{n}a_m$，所以

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{\pi^2\alpha}{\sin(\pi\alpha)}\mathrm{d}\alpha&=\frac{\pi}{2}+\pi\lim_{n\to\infty}A_n=\frac{\pi}{2}+\pi\lim_{N\to\infty}A_{2N}=\frac{\pi}{2}+\pi\lim_{N\to\infty}\sum_{m=1}^{N}(a_{2m-1}+a_{2m})\\&=\pi\left[\frac{1}{2}+\lim_{N\to\infty}\sum_{m=1}^{N}\left(-(2m-1)\ln\frac{4m-3}{4m-1}+2m\ln\frac{4m-1}{4m+1}\right)\right]\\&=\pi\left[\frac{1}{2}+\ln\prod_{m=1}^{\infty}\frac{(4m-1)^{4m-1}}{(4m-3)^{2m-1}(4m+1)^{2m}}\right]\end{aligned}$$

因此

$$\exp\left(\frac{1}{\pi}\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{\pi^2\alpha}{\sin(\pi\alpha)}\mathrm{d}\alpha-\frac{1}{2}\right)=\prod_{m=1}^{\infty}\frac{(4m-1)^{4m-1}}{(4m-3)^{2m-1}(4m+1)^{2m}}$$
$$=\lim_{m\to\infty}\frac{3^3}{1^1\cdot5^2}\cdot\frac{7^7}{5^3\cdot9^4}\cdots\frac{(4m-1)^{4m-1}}{(4m-3)^{2m-1}(4m+1)^{2m}}$$
$$=\lim_{m\to\infty}\frac{3^3\cdot7^7\cdot11^{11}\cdots(4m-1)^{4m-1}}{5^5\cdot9^9\cdot13^{13}\cdots(4m-3)^{4m-3}(4m+1)^{2m}}$$
$$=\lim_{m\to\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^{-1}\left(\frac{3}{5}\right)^{2}\left(\frac{5}{7}\right)^{-3}\cdots\left(\frac{4m-1}{4m+1}\right)^{2m}$$
$$=\lim_{m\to\infty}\prod_{n=1}^{2m}\left(1-\frac{2}{2n+1}\right)^{n(-1)^n}$$

现在只需要证明 $\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{\pi^2\alpha}{\sin(\pi\alpha)}\mathrm{d}\alpha=2\mathrm{G}$. 因为 $\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln\cot t\,\mathrm{d}t=\mathrm{G}$，分部积分得 $\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{\pi^2 t}{\sin(\pi t)}\mathrm{d}t=2\mathrm{G}$，所以

$$e^{\frac{2\mathrm{G}}{\pi}-\frac{1}{2}}=\lim_{m\to\infty}\prod_{n=1}^{2m}\left(1-\frac{2}{2n+1}\right)^{n(-1)^n}$$

把 $e=\lim\limits_{m\to\infty}\left(1-\frac{2}{4m+3}\right)^{-(2m+1)}$ 等式的两边分别乘到上式的两端即得

$$e^{\frac{2\mathrm{G}}{\pi}+\frac{1}{2}}=\lim_{m\to\infty}\prod_{n=1}^{2m+1}\left(1-\frac{2}{2n+1}\right)^{n(-1)^n}$$

因此

$$e^{\frac{4\mathrm{G}}{\pi}}=\lim_{m\to\infty}\prod_{n=1}^{2m}\left(1-\frac{2}{2n+1}\right)^{n(-1)^n}\times\lim_{m\to\infty}\prod_{n=1}^{2m+1}\left(1-\frac{2}{2n+1}\right)^{n(-1)^n}$$
$$=\lim_{m\to\infty}\left[\frac{3^3\cdot7^7\cdot11^{11}\cdots(4m-1)^{4m-1}}{1^1\cdot5^5\cdot9^9\cdots(4m-3)^{4m-3}}\right]^2\frac{(4m+3)^{2m+1}}{(4m+1)^{6m+1}}$$