解决公众号"whut 数学" 七夕一题

求 ABCD 排列一起的结果即为暗语

$$A=\frac{5}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n+1}}{n\left(n+1\right)},\quad \frac{1}{B}=\underbrace{\max}_{x,y,z,w>0}\left(\frac{xy+2yz+3zw}{5x^2+6y^2+9z^2+9w^2}\right)^2$$

$$C=\int_0^{\infty}\frac{e^{-\frac{4}{\pi}x^2}-e^{-\frac{225}{\pi}x^2}}{x^2}\mathrm{d}x,\quad D=7\lim_{n\to\infty}\frac{n+\sqrt{n}+\cdots+\sqrt[n]{n}}{n}$$

解: 易知

$$\begin{aligned}A&=\frac{5}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n+1}}{n\left(n+1\right)}=\frac{5}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\left(n+1\right)}\sum_{n=1}^{n+1}\frac{1}{k}\\&=\frac{5}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\left(n+1\right)}\int_0^1\sum_{k=0}^{n}x^k\mathrm{d}x=\frac{5}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\left(n+1\right)}\int_0^1\frac{1-x^{n+1}}{1-x}\mathrm{d}x\\&=\frac{5}{2}\int_0^1\left(1-\ln\left(1-x\right)\right)\mathrm{d}x=5\end{aligned}$$

由于 $5x^2+y^2\ge 2\sqrt{5}xy$，$5y^2+4z^2\ge 4\sqrt{5}yz$，$5z^2+9w^2\ge 6\sqrt{5}zw$，即

$$5x^2+6y^2+9z^2+9w^2\ge 2\sqrt{5}\left(xy+2yz+3zw\right)$$

则有

$$\Rightarrow\frac{1}{B}=\underbrace{\max}_{x,y,z,w>0}\left(\frac{xy+2yz+3zw}{5x^2+6y^2+9z^2+9w^2}\right)^2=\frac{1}{20}\Rightarrow B=20$$

$$\begin{aligned}C&=\int_0^{\infty}\frac{e^{-\frac{4}{\pi}x^2}-e^{-\frac{225}{\pi}x^2}}{x^2}\mathrm{d}x=-\int_0^{+\infty}\left(e^{-\frac{4}{\pi}x^2}-e^{-\frac{225}{\pi}x^2}\right)\mathrm{d}\left(\frac{1}{x}\right)\\&=\left.\frac{e^{-\frac{4}{\pi}x^2}-e^{-\frac{225}{\pi}x^2}}{x}\right|_0^{+\infty}+2\int_0^{+\infty}\left(\frac{225}{\pi}e^{-\frac{225}{\pi}x^2}-\frac{4}{\pi}e^{-\frac{4}{\pi}x^2}\right)\mathrm{d}x\\&=2\sqrt{\frac{225}{\pi}}\int_0^{+\infty}e^{-\left(\sqrt{\frac{225}{\pi}}x\right)^2}\mathrm{d}\left(\sqrt{\frac{225}{\pi}}x\right)-2\sqrt{\frac{4}{\pi}}\int_0^{+\infty}e^{-\left(\sqrt{\frac{4}{\pi}}x\right)^2}\mathrm{d}\left(\sqrt{\frac{4}{\pi}}x\right)\\&=\sqrt{\pi}\left(\sqrt{\frac{225}{\pi}}-\sqrt{\frac{4}{\pi}}\right)=13\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}D&=7\lim_{n\to\infty}\frac{n+\sqrt{n}+\cdots+\sqrt[n]{n}}{n}\overset{stloz}{=\!=}7\lim_{n\to\infty}\frac{\sum_{k=1}^{n+1}\left(n+1\right)^{\frac{1}{k}}-\sum_{k=1}^{n}n^{\frac{1}{k}}}{\left(n+1\right)-n}\\&=7\left[\lim_{n\to\infty}\left(\left(n+1\right)-n+\left(n+1\right)^{\frac{1}{n+1}}+\sum_{k=2}^{n}\left(\left(n+1\right)^{\frac{1}{k}}-n^{\frac{1}{k}}\right)\right)\right]=14.\end{aligned}$$

其中 $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=2}^{n}\left(n+1\right)^{\frac{1}{k}}-n^{\frac{1}{k}}=0$. 考虑到 $\left(n+1\right)^{\frac{1}{k}}-n^{\frac{1}{k}}\le\frac{n^{\frac{1}{k-1}}}{k}$

$$\Rightarrow\sum_{k=2}^{n}\left(n+1\right)^{\frac{1}{k}}-n^{\frac{1}{k}}\le\sum_{k=2}^{n}\frac{n^{\frac{1}{k-1}}}{k}\le\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k}=\mathcal{O}\left(\frac{\log n}{\sqrt{n}}\right)$$

因此结果 $ABCD=5201314$. □

问题求解

计算积分

$$I=\int_0^{+\infty}\left(x-\frac{x^3}{2}+\frac{x^5}{2\cdot 4}-\frac{x^7}{2\cdot 4\cdot 6}+\cdots\right)\left(1+\frac{x^2}{2^2}+\frac{x^4}{2^2\cdot 4^2}+\frac{x^6}{2^2\cdot 4^2\cdot 6^2}+\cdots\right)\mathrm{d}x$$

解:

$$\begin{aligned}I&=\int_0^{+\infty}\left(x-\frac{x^3}{2}+\frac{x^5}{2\cdot 4}-\frac{x^7}{2\cdot 4\cdot 6}+\cdots\right)\left(1+\frac{x^2}{2^2}+\frac{x^4}{2^2\cdot 4^2}+\frac{x^6}{2^2\cdot 4^2\cdot 6^2}+\cdots\right)\mathrm{d}x\\&=\int_0^{+\infty}\left(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^{2k+1}(-1)^k}{2^k k!}\right)\left(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^{2k}}{2^{2k}k!^2}\right)\mathrm{d}x=\int_0^{\infty}xe^{-\frac{x^2}{2}}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^{2k}}{2^{2k}k!^2}\mathrm{d}x=\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2^{2k}k!^2}\int_0^{\infty}e^{-\frac{x^2}{2}}x^{2k+1}\mathrm{d}x\right)\\&\xlongequal{x\to\sqrt{2x}}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2^{2k}k!^2}\int_0^{\infty}\frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{x}}e^{-x}(2x)^{k+\frac12}\mathrm{d}x\right)=\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2^k k!^2}\int_0^{\infty}e^{-x}x^k\mathrm{d}x\right)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{2^k k!}=\sqrt{e}\end{aligned}$$

其中 $\int_0^{\infty}e^{-x}x^k\mathrm{d}x=\Gamma(k+1)=k!$，$e^x=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^k}{k!}$，$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^{2k+1}(-1)^k}{2^k k!}=xe^{-\frac{x^2}{2}}$. □

计算反常积分的敛散性

(1) $\int_0^{+\infty}(-1)^{[x^2]}\mathrm{d}xx$，($[\cdot]$ 为取整函数)

(2) $\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{1+x^a\sin^2 x}$

解:

(1) 对 $\forall A>0$，存在唯一自然数 $n>0$，使得 $A\in[\sqrt{n},\sqrt{n+1}]$，当 $A\to\infty$ 时，$n\to\infty$，于是当 $\sqrt{k-1}\le x<\sqrt{k}$ 时，$k-1\le x^2<k,\left[x^2\right]=k-1$，有

$$\int_0^A(-1)^{[x^2]}\mathrm{d}x=\sum_{k=1}^{n}\int_{\sqrt{k-1}}^{\sqrt{k}}(-1)^{[x^2]}\mathrm{d}x+\int_{\sqrt{n}}^{A}(-1)^{[x^2]}\mathrm{d}x=\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k-1}}{\sqrt{k}+\sqrt{k-1}}+(-1)^k\left(A-\sqrt{n}\right)$$

由莱布尼茨准则知 $\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k-1}}{\sqrt{k}+\sqrt{k-1}}$ 收敛，且 $(-1)^k\left(A-\sqrt{n}\right)\to 0(n\to 0)$，即

$$\int_0^{+\infty}(-1)^{[x^2]}\mathrm{d}x=\lim_{A\to\infty}\int_0^A(-1)^{[x^2]}\mathrm{d}x=\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k-1}}{\sqrt{k}+\sqrt{k-1}}$$

收敛.

(2) 由题设易知

$$\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{1+x^a\sin^2 x}=\sum_{n=0}^{\infty}\int_{n\pi}^{(n+1)\pi}\frac{1}{1+x^a\sin^2 x}\mathrm{d}x\xlongequal{t=x-n\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\int_0^{\pi}\frac{1}{1+(t+n\pi)^a\sin^2 x}\mathrm{d}t$$

即

$$\int_0^{\pi}\frac{1}{1+(t+n\pi)^a\sin^2 x}\mathrm{d}t\le\int_0^{\pi}\frac{1}{1+(n\pi)^a\sin^2 x}\mathrm{d}t=\frac{\pi}{\sqrt{(n\pi)^a+1}}$$

$$\int_0^{\pi}\frac{1}{1+(t+n\pi)^a\sin^2 x}\mathrm{d}t\ge\int_0^{\pi}\frac{1}{1+[(n+1)\pi]^a\sin^2 x}\mathrm{d}t=\frac{\pi}{\sqrt{[(n+1)\pi]^a+1}}$$

由于 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\pi/\sqrt{(n\pi)^a+1}}{1/n^{a/2}}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\pi/\sqrt{[(n+1)\pi]^a+1}}{1/n^{a/2}}=\pi^{1-\frac{a}{2}}$，即当 $a>2$ 时，级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\int_0^{\pi}\dfrac{1}{1+(t+n\pi)^a\sin^2 x}\mathrm{d}t$ 收敛；当 $a\le 2$，级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\int_0^{\pi}\dfrac{1}{1+(t+n\pi)^a\sin^2 x}\mathrm{d}t$ 发散. 因此当 $a>2$ 时积分收敛，当 $a\le 2$ 时积分发散.

□

【变式 1】广义积分敛散性的判断：

$$\int_0^{+\infty}\frac{x}{1+x^6\sin^2 x}\mathrm{d}x$$

可以看出被积函数非负，但当 $x\to+\infty$ 时并不是无穷小。因此不好用比较法，也无法直接计算。由此想到利用正项级数的敛散性去判断。

令 $a_n=\int_{n\pi}^{(n+1)\pi}\dfrac{x}{1+x^6\sin^2 x}\mathrm{d}x$，则 $a_n>0$，且

$$\begin{aligned}a_n&=\int_{n\pi}^{(n+1)\pi}\frac{x}{1+x^6\sin^2 x}\mathrm{d}x\le\int_{n\pi}^{(n+1)\pi}\frac{(n+1)\pi}{1+(n\pi)^6\sin^2 x}\mathrm{d}x\\&=2(n+1)\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{1+(n\pi)^6\sin^2 x}\mathrm{d}x\end{aligned}$$

利用不等式 $\sin x\ge\dfrac{2}{\pi}x(0\le x\le\dfrac{\pi}{2})$ 可得

$$a_n\le 2(n+1)\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{1+(n\pi)^6(\frac{2}{\pi}x)^2}\mathrm{d}x=\frac{n+1}{n^3\pi}\int_0^{n^3\pi^3}\frac{1}{1+t^2}\mathrm{d}t\le\frac{n+1}{n^3}$$

故 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n$ 收敛，从而原积分收敛。

[变式 2] 广义积分敛散性的判断：

$$\int_0^{+\infty}\frac{1}{1+x^a\sin^b x}\mathrm{d}x\quad(\text{其中}a,b>1)$$