

第一届“八一杯”大学生网络数学竞赛试题

数学组 A 类，满分：100 分，考试时间：150 分钟

比赛时间：2019 年 8 月 1 日上午 9 点至 2019 年 8 月 1 号晚上 8 点



竞赛官方微信公众号：八一考研数学竞赛

题号	一	二	三	四	五	六	总分
满分	15	15	20	15	15	20	100
得分							

- 注意事项：** 1. 试题解答请在规定时间内发送到邮箱 hoganbin1995@outlook.com, 逾期将取消参赛资格，严格遵守比赛纪律，勿翻阅其他参考资料或在各数学群内讨论此份试题；
2. 要求解答字迹清楚，推荐采用 PDF 格式提交；
3. 文件命名：参赛科目 + 昵称 (或姓名) + 学校.

1. (本题 15 分) 若 P 为直线 $l: x - 2 = \frac{y-3}{2} = \frac{z-1}{3}$ 上一点，从 P 点引椭球面 $C: 2x^2 + 3y^2 + 4z^2 = 1$ 的切线，切点构成的曲线 Γ 与 l 平行，求 P 点的坐标.

毛毛 供题

2. (本题 15 分) 证明：对于 n 阶实方阵 A, B ，若 $E - A^T A$ 与 $E - B^T B$ 是半正定矩阵，则

$$\left| E - A^T B \right|^2 \geq \left| E - A^T A \right| \left| E - B^T B \right|$$

尚镇冰 供题

3. (本题 20 分) 设 S 为 \mathbb{R}_n 的一个非空闭凸集， A 为 \mathbb{R} 上 $n \times n$ 的矩阵.

- (1) 证明：对 $\forall y \notin S$ ，存在唯一的一个 \bar{x} ，使得 $\|y - \bar{x}\| = \inf_{x \in S} \|y - x\|$
- (2) 证明：对于 $y \notin S$ ，存在非零向量 p 以及 $\varepsilon > 0$ ，使得对 $\forall x \in S$ ，有 $p^T y \geq \varepsilon + p^T x$
- (3) 证明： $Ax < 0$ 有解的充分必要条件是存在非零向量 $p \geq 0$ 使得 $A^T p = 0$.

王鹏辉 供题

4. (本题 15 分) 已知复系数多项式

$$f(x) = x^k + c_1 x^{k-1} + c_2 x^{k-2} + \cdots + c_{k-1} x + c_k$$

证明: 对多项式 $f(x)$ 的任意一根 z , 都有

$$|z| \leq 2 \cdot \max \left\{ |c_1|, \sqrt{|c_2|}, \sqrt[3]{|c_3|}, \cdots, \sqrt[k]{|c_k|} \right\}$$

本本蛋蛋 供题

5. (本题 15 分) 设 $f(x) \in C^1[0, +\infty)$, 且 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$, 已知积分 $I = \int_0^{+\infty} t^{a+1} f'(t) dt$ 对某个常数 $a > -1$ 收敛, 证明: 积分 $\int_0^{+\infty} t^a f(t) dt$ 收敛, 并且等于 $-\frac{I}{a+1}$.

向离 供题

6. (本题 20 分) 设 b_n 表示正整数 n 的最大素因子, 以及单调递增的正实数列 $\{a_n\}$. 满足无穷级数 $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{na_n}$ 收敛, 问无穷级数 $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{na_{b_n}}$ 是否也是收敛的? 并证明你的结论.

王永喜 供题