

# 计算传热学 第一次大作业报告

第七组

2009211353	主父笑荷
2009310630	胡帼杰
2009211311	崔翰星
2009310636	陈 凯

## 目 录

0.问题要求 .....	1
第 1 章 数值方法 .....	1
1.1 问题描述 .....	1
1.1.1 直角坐标系二维导热问题.....	1
1.1.2 圆柱轴对称坐标系的二维导热问题.....	3
1.2 区域离散 .....	4
1.3 差分方程 .....	5
1.3.1 直角坐标.....	5
1.3.2 轴对称坐标 .....	7
1.3.3 通用形式 .....	7
1.4 边界条件处理 .....	8
1.5 程序流程图.....	11
第 2 章 程序验证 .....	13
2.1 算例 1——一维无内热源稳态导热 .....	13
2.1.1 直角坐标.....	13
2.1.1 柱坐标 .....	14
2.2 算例 2——一维含均匀内热源稳态导热 .....	15
2.2.1 直角坐标.....	15
2.2.1 柱坐标 .....	16
2.3 算例 3——一维无内热源非稳态导热（直角坐标） .....	17
2.4 算例 4——二维无内热源稳态导热（直角坐标） .....	20
2.5 算例 5——二维含均匀内热源非稳态导热（直角坐标） .....	24
第 3 章 结论 .....	<b>错误！未定义书签。</b>

## 0.问题要求

编制程序，能够对某一类导热问题进行数值求解，并自选一个问题，基于该程序进行数值模拟研究。

### 1)程序所能适应问题的约束

- (1)空间方向可以是二维问题，也可以是三维问题，但不能是一维的；
- (2)时间上应既能适合于定常问题，也能适合于非定常问题；
- (3)只要不影响问题定解，边界条件可取为三类边界中的任一类；
- (4)计算区域可取为规则区域，但程序要既能数值求解一个直角坐标系下的规则区域上的该类导热问题，也能数值求解柱坐标系下的规则区域上的导热问题。

### 2)程序的应用

- (1)应选取存在实验结果或解析解的问题对程序加以验证；
- (2)选一个问题，基于该程序进行数值模拟研究。

## 第1章 数值方法

### 1.1 问题描述

本文考虑二维导热问题，包括直角坐标系中的二维导热问题和圆柱轴对称坐标系下的二维导热问题。

#### 1.1.1 直角坐标系二维导热问题

本文考虑的直角坐标系的计算区域为规则的矩形区域，具体形状及坐标设定如图 1 所示。

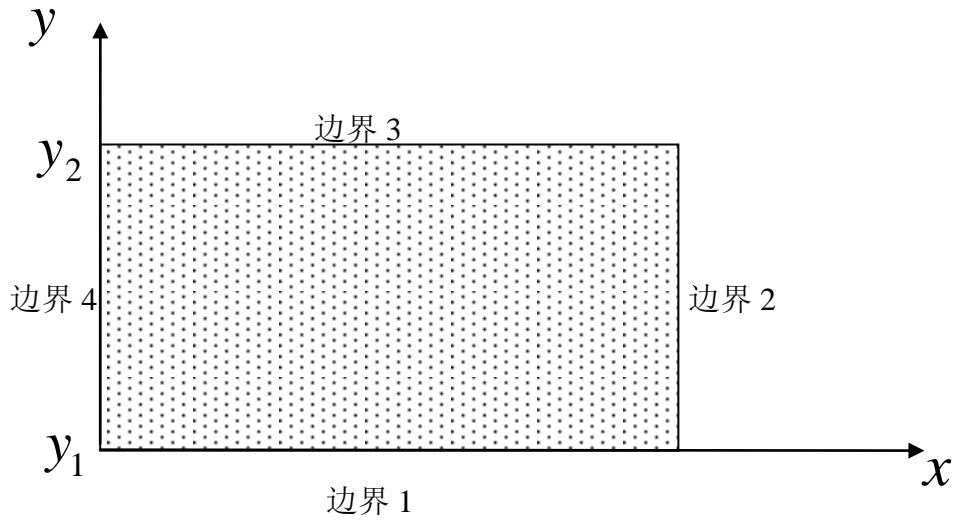


图1.1 直角坐标计算区域示意图

直角坐标系下二维含内热源非稳态及稳态导热问题的控制方程为：

$$\rho c \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left( \lambda \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \lambda \frac{\partial T}{\partial y} \right) + S \quad (1)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \lambda \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \lambda \frac{\partial T}{\partial y} \right) + S = 0 \quad (2)$$

计算区域有四个边界，如图 1.1 所示标记为边界 1~4，每个边界的定解条件的选取都有三类：

- (1) 第一类边界条件：给定边界的温度值  $T_B$ ；
- (2) 第二类边界条件：给定边界的热流密度  $q_B$ ；
- (3) 第三类边界条件：给定边界外对流温度  $T_f$  以及表面换热系数  $h$ 。

对于非稳态导热问题不仅要给出边界条件，还需给出初始条件。若考虑的是稳态导热问题，则应略去控制方程中的时间相关项  $\rho c \frac{\partial T}{\partial t}$ ，此时方程的定解条件不需提初始条件。

### 1.1.2 圆柱轴对称坐标系的二维导热问题

本文考虑的圆柱轴对称坐标系的计算区域为规则的圆柱体，具体形状及坐标设定如图 2 所示。

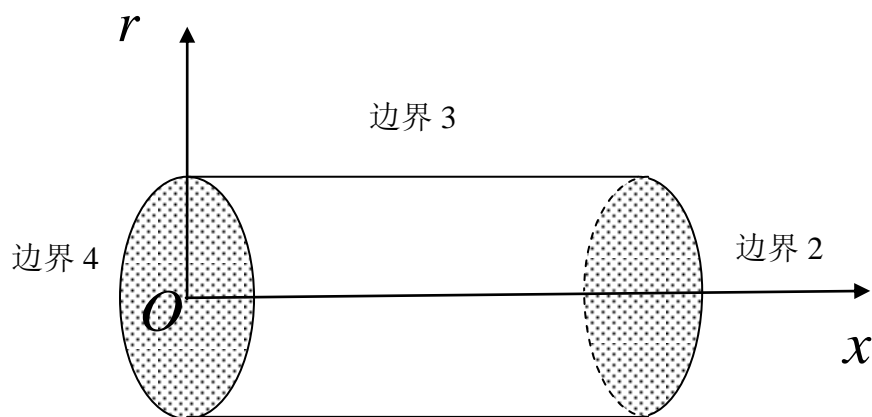


图1.2 圆柱轴对称坐标计算区域示意图

由于问题为轴对称问题，图 1.2 的计算区域可以表示成图 1.3 的形式。

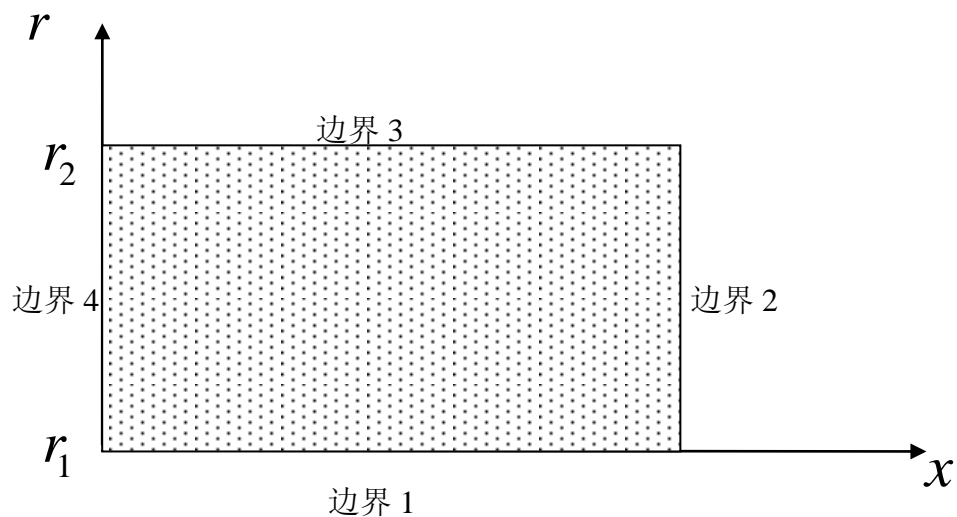


图1.3 圆柱轴对称坐标计算区域示意图

图 1.3 与图 1.1 类似，但是控制方程不相同，圆柱轴对称坐标系含内热源非稳态导热问题的控制方程为：

$$\rho c \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left( \lambda \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \lambda \frac{\partial T}{\partial r} \right) + S \quad (3)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \lambda \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \lambda \frac{\partial T}{\partial r} \right) + S = 0 \quad (4)$$

计算区域有四个边界，如图 1.3 所示标记为边界 1~4，每个边界的定解条件的选取都有三类：

- (1) 第一类边界条件：给定边界的温度值  $T_B$ ；
- (2) 第二类边界条件：给定边界的热流密度  $q_B$ ；
- (3) 第三类边界条件：给定边界外对流温度  $T_f$  以及换热系数  $h$ 。

需要指出的是，边界 1 不一定为圆柱坐标的对称轴，所以边界 1 不一定是绝热条件，可以取三类边界条件。

对于非稳态导热问题不仅要给出边界条件，还需给出初始条件。若考虑的是稳态导热问题，则应略去控制方程中的时间相关项  $\rho c \frac{\partial T}{\partial t}$ ，此时方程的定解条件不需提初始条件。

## 1.2 区域离散

时间方向离散：采用均匀划分，时间步长为  $dt$ ，计算时刻为  $T$ ，时间推进步数为  $N_t = T / dt$ 。

空间区域离散：本文中的计算区域为平面直角坐标的矩形规则区域或圆柱轴对称坐标的规则区域，采用外节点法（先节点后界面），区域规则，假设两个方向的网格数分别为  $M$ 、 $N$ ，则节点标号分别为：

$$i=1,2,\dots,M+1; j=1,2,\dots,N+1。$$

区域离散如图 1.4 所示。

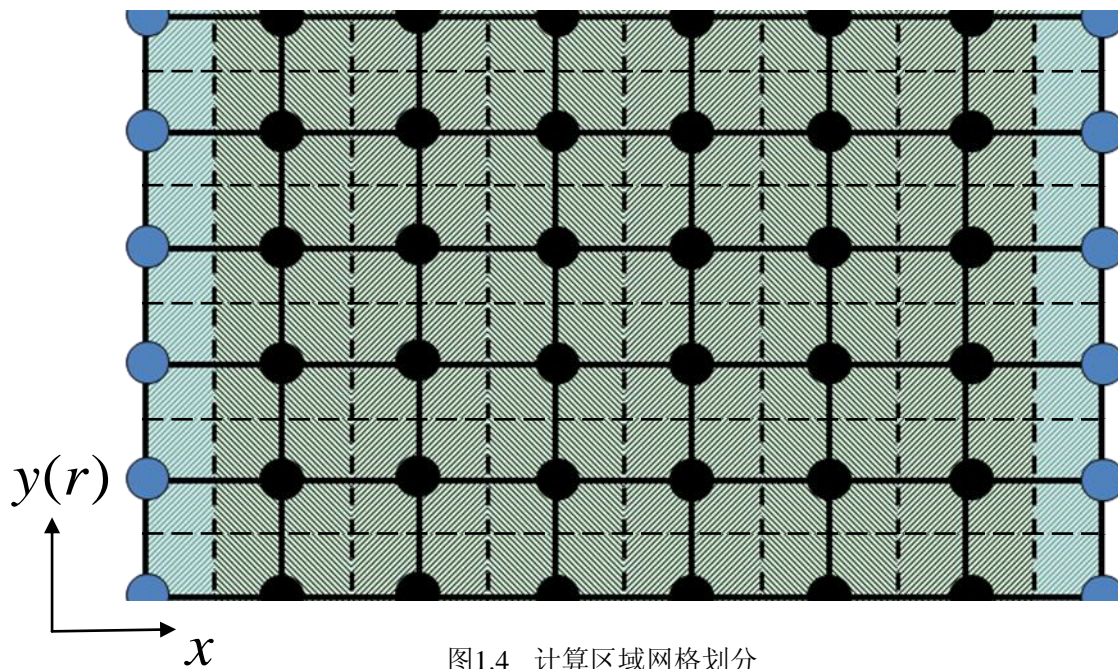


图1.4 计算区域网格划分

### 1.3 差分方程

#### 1.3.1 直角坐标

对于直角坐标系中二维非稳态问题，网格划分如图 1.5 所示。

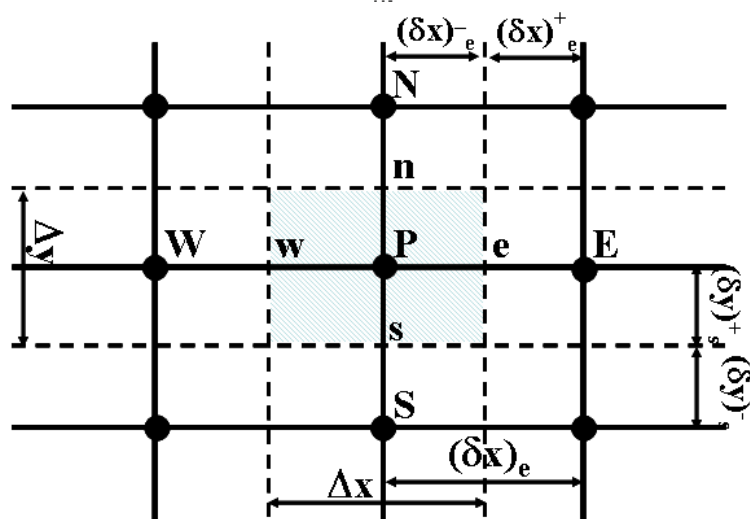


图1.5 直角坐标计算区域网格划分

在内节点  $P$  所在控制体对空间和时间范围  $[t, t + \Delta t]$  积分，得：

$$\int_t^{t+\Delta t} \int_s^n \int_w^e \rho c \frac{\partial T}{\partial t} dx dy dt = \int_t^{t+\Delta t} \int_s^n \int_w^e \frac{\partial}{\partial x} \left( \lambda \frac{\partial T}{\partial x} \right) dx dy dt + \int_t^{t+\Delta t} \int_s^n \int_w^e \frac{\partial}{\partial y} \left( \lambda \frac{\partial T}{\partial y} \right) dx dy dt + \int_t^{t+\Delta t} \int_s^n \int_w^e S dx dy dt$$

其中时间项离散为：

$$\int_t^{t+\Delta t} \int_s^n \int_w^e \rho c \frac{\partial T}{\partial t} dx dy dt = \rho c (T_P - T_P^0) \Delta x \Delta y$$

空间导数项采用加权隐式格式进行离散：

$$\begin{aligned} \int_t^{t+\Delta t} \int_s^n \int_w^e \frac{\partial}{\partial x} \left( \lambda \frac{\partial T}{\partial x} \right) dx dy dt &= \int_t^{t+\Delta t} \int_s^n [(\lambda \frac{\partial T}{\partial x})_e - (\lambda \frac{\partial T}{\partial x})_w] dy dt \\ &= \theta [\lambda_e \frac{T_E - T_P}{(\delta x)_e} - \lambda_w \frac{T_P - T_W}{(\delta x)_w}] \Delta y \Delta t + (1 - \theta) [\lambda_e \frac{T_E^0 - T_P^0}{(\delta x)_e} - \lambda_w \frac{T_P^0 - T_W^0}{(\delta x)_w}] \Delta y \Delta t \\ \int_t^{t+\Delta t} \int_s^n \int_w^e \frac{\partial}{\partial y} \left( \lambda \frac{\partial T}{\partial y} \right) dx dy dt &= \int_t^{t+\Delta t} \int_w^e [(\lambda \frac{\partial T}{\partial y})_n - (\lambda \frac{\partial T}{\partial y})_s] dx dt \\ &= \theta [\lambda_n \frac{T_N - T_P}{(\delta x)_n} - \lambda_s \frac{T_P - T_S}{(\delta x)_s}] \Delta x \Delta t + (1 - \theta) [\lambda_n \frac{T_N^0 - T_P^0}{(\delta x)_n} - \lambda_s \frac{T_P^0 - T_S^0}{(\delta x)_s}] \Delta x \Delta t \end{aligned}$$

源项负线化后采用加权隐式格式进行离散：

$$S = S_C + S_P T_P, \text{ 其中 } S_P \leq 0$$

$$\int_t^{t+\Delta t} \int_s^n \int_w^e S dx dy dt = \theta (S_C + S_P T_P) + (1 - \theta) (S_C + S_P T_P^0)$$

代入积分方程，整理成标准形式，得：

$$a_P T_P = \theta a_E T_E + \theta a_W T_W + \theta a_N T_N + \theta a_S T_S + b \quad (5)$$

其中：

$$\begin{aligned} a_E &= \frac{\lambda_e \Delta y}{(\delta x)_e}, \quad a_W = \frac{\lambda_w \Delta y}{(\delta x)_w}, \quad a_N = \frac{\lambda_n \Delta x}{(\delta y)_n}, \quad a_S = \frac{\lambda_s \Delta x}{(\delta y)_s}, \quad a_P^0 = \frac{\rho c}{\Delta t} \Delta x \Delta y, \\ a_P &= a_P^0 + \theta (a_E + a_W + a_N + a_S - S_P \Delta x \Delta y), \\ b &= S_C \Delta x \Delta y + \left[ a_P^0 - (1 - \theta) (a_E + a_W + a_N + a_S - S_P^0 \Delta x \Delta y) \right] T_P^0 \\ &\quad + (1 - \theta) (a_E T_E^0 + a_W T_W^0 + a_N T_N^0 + a_S T_S^0) \end{aligned}$$

当  $\theta = 0$ ，为显式格式，格式精度为一阶，有条件稳定，对时间步长限制很严格；

当  $\theta = 1$ ，为隐式格式，格式精度为一阶，无条件稳定；



当  $\theta = 0.5$ ，为 Crank-Nicholson 格式，格式精度为二阶，有条件稳定，对时间步长限制较宽松。

对于二维稳态导热问题，只需将节点系数中的  $a_p^0$  取为 0。

### 1.3.2 轴对称坐标

圆柱轴对称坐标系下，采用类似的方法，可以得到标准形式的差分方程：

$$a_p T_p = \theta a_e T_e + \theta a_w T_w + \theta a_n T_n + \theta a_s T_s + b \quad (6)$$

其中

$$a_e = \frac{\lambda_e \Delta r}{(\delta x)_e} \frac{r_n + r_s}{2}, \quad a_w = \frac{\lambda_w \Delta r}{(\delta x)_w} \frac{r_n + r_s}{2}, \quad a_n = \frac{\lambda_n r_n \Delta x}{(\delta r)_n}, \quad a_s = \frac{\lambda_s r_s \Delta x}{(\delta r)_s},$$

$$a_p^0 = \frac{\rho c}{\Delta t} \frac{r_n + r_s}{2} \Delta r \Delta x,$$

$$a_p = a_p^0 + \theta \left( a_e + a_w + a_n + a_s - S_p \frac{r_n + r_s}{2} \Delta r \Delta x \right)$$

$$b = S_c \frac{r_n + r_s}{2} \Delta r \Delta x + (1 - \theta) (a_e T_e^0 + a_w T_w^0 + a_n T_n^0 + a_s T_s^0) + \left[ a_p^0 - (1 - \theta) \left( a_e + a_w + a_n + a_s - S_p^0 \frac{r_n + r_s}{2} \Delta r \Delta x \right) \right] T_p^0$$

当  $\theta = 0$ ，为显式格式，格式精度为一阶；

当  $\theta = 1$ ，为隐式格式，格式精度为一阶；

当  $\theta = 0.5$ ，为 Crank-Nicholson 格式，格式精度为二阶。

对于二维稳态导热问题，只需将节点系数中的  $a_p^0$  取为 0。

### 1.3.3 通用形式

根据上面的离散结果，可以进一步得到两种坐标情况下的离散方程通用形式，差分方程为

$$a_p T_p = \theta a_e T_e + \theta a_w T_w + \theta a_n T_n + \theta a_s T_s + b \quad (7)$$

其中

$$a_e = \frac{\lambda_e A_e \Delta Y}{(\delta X)_e}, \quad a_w = \frac{\lambda_w A_w \Delta Y}{(\delta X)_w}, \quad a_n = \frac{\lambda_n A_n \Delta X}{(\delta Y)_n}, \quad a_s = \frac{\lambda_s A_s \Delta X}{(\delta Y)_s},$$

$$\Delta V = 0.5(A_n + A_s)\Delta X\Delta Y, \quad a_p^0 = \frac{\rho c \Delta V}{\Delta t},$$

$$a_p = \theta(a_E + a_W + a_N + a_S - S_p \Delta V) + a_p^0$$

$$b = S_C \Delta V + (1 - \theta)(a_E T_E^0 + a_W T_W^0 + a_N T_N^0 + a_S T_S^0) \\ + [a_p^0 - (1 - \theta)(a_E + a_W + a_N + a_S - S_p^0 \Delta V)] T_p^0$$

其中  $X$ 、 $Y$ 、 $A$  的选取如表 1.1 所示。

表1.1 两种坐标系通用差分方程中系数的选取

	直角坐标	圆柱轴对称坐标
$X$	$x$	$x$
$Y$	$y$	$r$
$A_e$ 、 $A_w$	1	$\frac{r_n + r_s}{2}$
$A_n$	1	$r_n$
$A_s$	1	$r_s$

对于二维稳态导热问题，只需将节点系数中的  $a_p^0$  取为 0。

## 1.4 边界条件处理

三类边界条件如下：

(1) 第一类边界条件：给定边界的温度值  $T_B$

$$T|_{\partial\Omega} = T_B$$

(2) 第二类边界条件：给定边界的热流密度  $q_B$ ；

$$-\left(\lambda \frac{\partial T}{\partial x_i}\right)|_{\partial\Omega} = q_B$$

(3) 第三类边界条件：给定边界外对流温度  $T_f$  以及表面换热系数  $h$ 。

$$h(T_f - T|_{\partial\Omega}) = -\left(\lambda \frac{\partial T}{\partial x_i}\right)|_{\partial\Omega}$$

在外节点法的情况下，可以用附加源项法对边界条件进行处理，三类边界条件和角点的附加源项的表达式如表 1.2 所示，边界与角点的示意图如图 1.6 所示。

表1.2 不同边界条件下附加源项的表达式

	$S_{C,ad}$	$S_{P,ad}$
第一类边界条件	$10^{30} T_B$	$-10^{30}$
第二类边界条件	$\frac{q_B A}{\Delta V}$	0
第三类边界条件	$\frac{h T_f A}{\Delta V}$	$-\frac{h A}{\Delta V}$
角点①	$S_{C4,ad} + S_{C1,ad}$	$S_{P4,ad} + S_{P1,ad}$
角点②	$S_{C1,ad} + S_{C2,ad}$	$S_{P1,ad} + S_{P2,ad}$
角点③	$S_{C2,ad} + S_{C3,ad}$	$S_{P2,ad} + S_{P3,ad}$
角点④	$S_{C3,ad} + S_{C4,ad}$	$S_{P3,ad} + S_{P4,ad}$

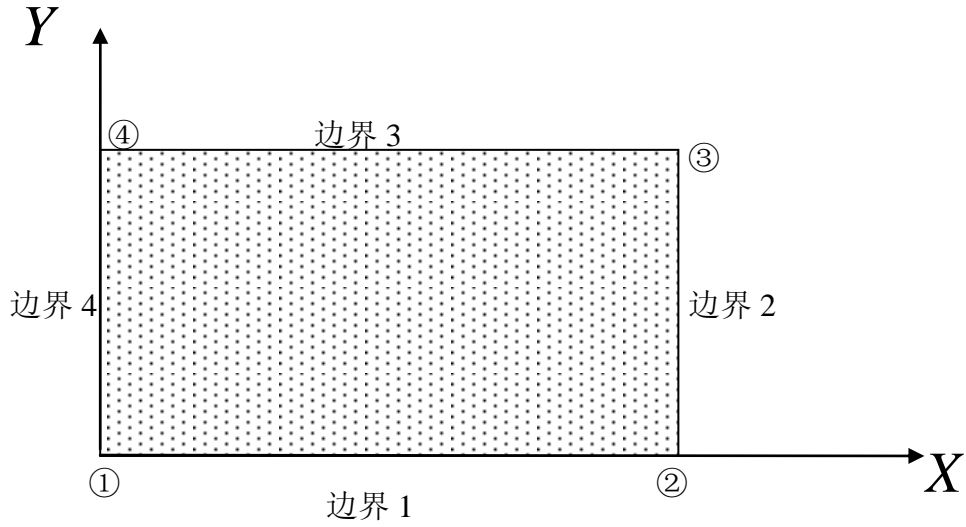


图1.6 边界与角点示意图

此时通用方程中系数的形式变为：

$$a_E = \frac{\lambda_e A_e \Delta Y}{(\delta X)_e}, \quad a_W = \frac{\lambda_w A_w \Delta Y}{(\delta X)_w}, \quad a_N = \frac{\lambda_n A_n \Delta X}{(\delta Y)_n}, \quad a_S = \frac{\lambda_s A_s \Delta X}{(\delta Y)_s},$$

$$\Delta V = 0.5(A_n + A_s) \Delta X \Delta Y, \quad a_P^0 = \frac{\rho c \Delta V}{\Delta t},$$

$$a_P = \theta(a_E + a_W + a_N + a_S - (S_P + S_{P,ad})\Delta V) + a_P^0$$

$$b = (S_C + S_{C,ad})\Delta V + (1-\theta)(a_E T_E^0 + a_W T_W^0 + a_N T_N^0 + a_S T_S^0)$$

$$+ \left[ a_P^0 - (1-\theta)(a_E + a_W + a_N + a_S - (S_P^0 + S_{P,ad}^0)\Delta V) \right] T_P^0$$

其中  $S_{C,ad}$ 、 $S_{P,ad}$  对于非边界节点取为0即可。

还应注意的是，边界和角点上将有对应的系数为0：

表1.3 不同边界和角点为0的系数

边界 1（下边界）	$a_S = 0$
边界 2（右边界）	$a_E = 0$
边界 3（上边界）	$a_N = 0$
边界 4（左边界）	$a_W = 0$
角点①	$a_S = a_W = 0$
角点②	$a_S = a_E = 0$
角点③	$a_N = a_E = 0$
角点④	$a_N = a_W = 0$

## 1.5 非均匀热导率与空心区域模块

程序设计时考虑了非均匀网格划分和非均匀的热导率，网格信息和全场热导率独立存储和计算。物性参数定义在中心节点处，为了保证界面热流连续性，界面热导率采用调和平均方法。如图 1.7 所示。界面 e 的热导率满足：

$$\frac{(\delta x)_e}{\lambda_e} = \frac{(\delta x)_e^+}{\lambda_E} + \frac{(\delta x)_e^-}{\lambda_P}$$

$$\text{化简，得 } \lambda_e = (\delta x)_e \left( \frac{(\delta x)_e^+}{\lambda_E} + \frac{(\delta x)_e^-}{\lambda_P} \right)^{-1}$$

同理可得其他界面的热导率

$$\lambda_w = (\delta x)_w \left( \frac{(\delta x)_w^+}{\lambda_P} + \frac{(\delta x)_w^-}{\lambda_W} \right)^{-1}, \quad \lambda_n = (\delta x)_n \left( \frac{(\delta x)_n^+}{\lambda_N} + \frac{(\delta x)_n^-}{\lambda_P} \right)^{-1},$$

$$\lambda_s = (\delta x)_s \left( \frac{(\delta x)_s^+}{\lambda_P} + \frac{(\delta x)_s^-}{\lambda_S} \right)^{-1}$$

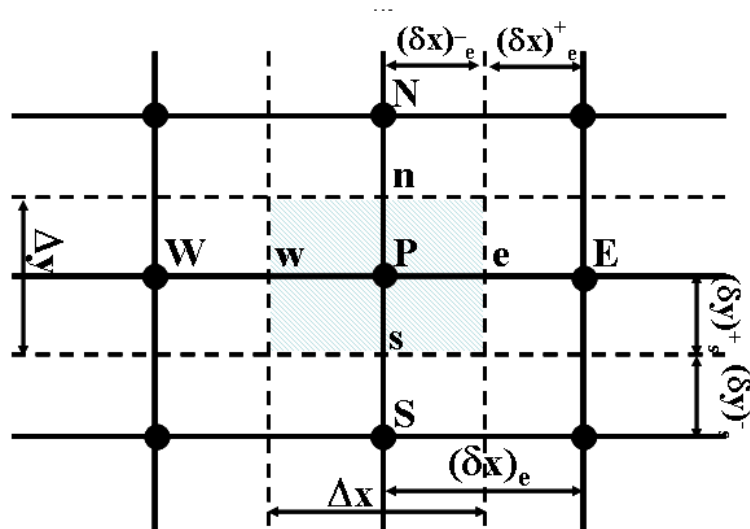


图1.7 直角坐标计算区域网格划分

程序设计时还考虑了计算域空心的情况。空心区域可以为任意形状，均采用直角网格来近似，边界条件可取为等温边界和绝热边界，分别进行如下处理：

- (1) 对于等温边界，空心区域中的节点采用附加大源项法进行处理，即

$$S_{C,ad} = 10^{30} T_B S_{P,ad} - 10^{30}$$

- (2) 对于绝热边界，只需把空心区域中的节点热导率取一个很小的量，例如

$$\lambda_p = 10^{-30}$$

## 1.6 程序流程图

程序流程为：

- (1) 定义变量，给定坐标系类型、问题的类型（稳态还是非稳态）、界面边界条件的类型、空心区域大小，物性参数赋值；

- (2) 网格划分，时间离散；

- (3) 判断问题是否与时间相关：是，调用非稳态求解器，其中分稳态求解器又分为显式求解器和隐式求解器；否，则调用稳态求解器；

- (4) 对于稳态求解器，首先全场赋迭代初值，采用 TDMA+G-S 迭代法进行求解；对于非稳态求解器，首先全场赋初值，然后时间方向推进，选用显式或隐式求解器求解中下一时刻温度场，继续推进，直到计算出所需时刻的温度场
- 程序流程图如图 1.7 所示。

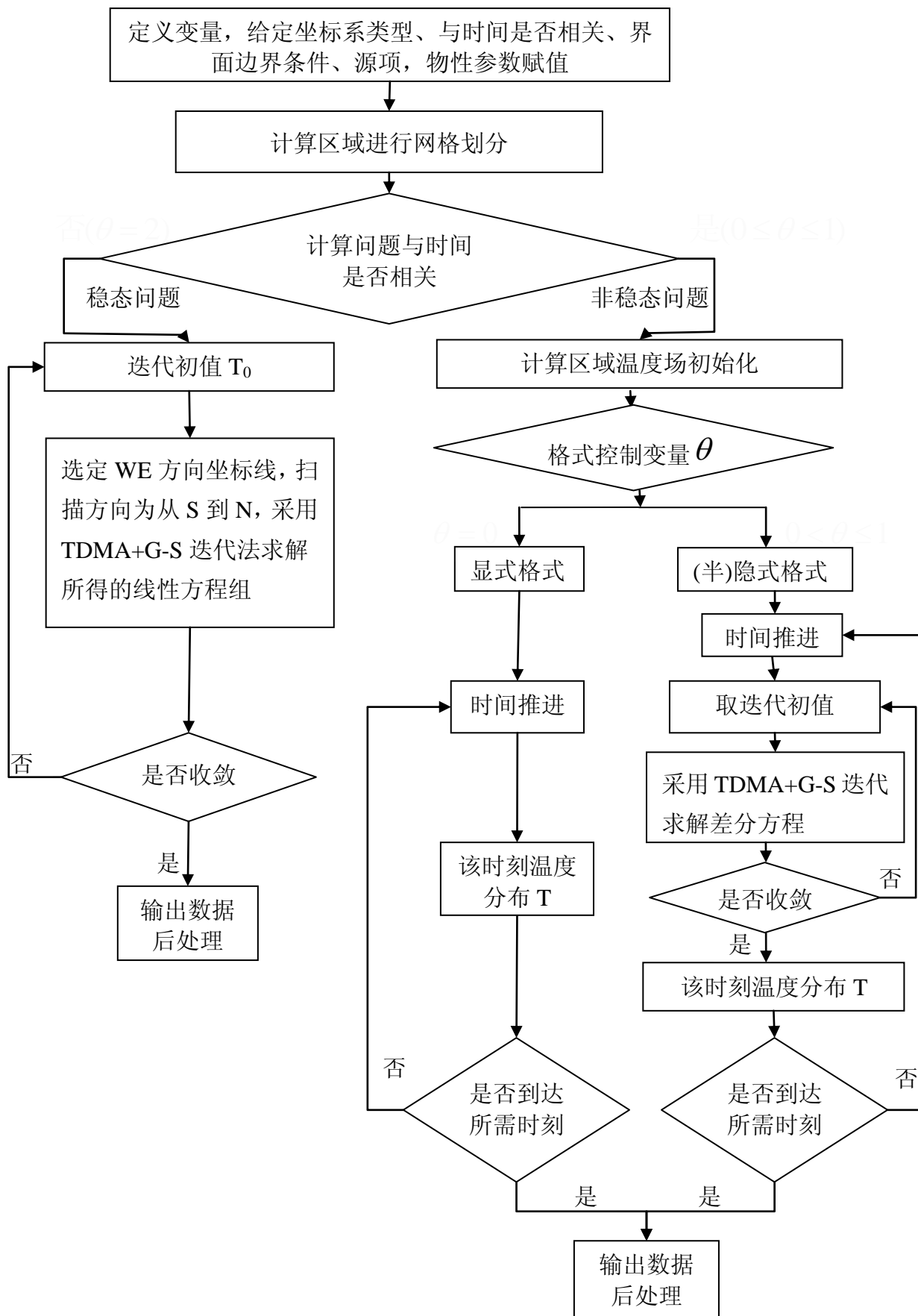


图1.8 程序流程图

## 第2章 程序验证

### 2.1 算例 1——一维无内热源稳态导热

#### 2.1.1 直角坐标

计算参数如表 2.1 所示。

表2.1 直角坐标一维无内热源稳态导热

计算区域	$x \in [x_1, x_2] = [0, 60], y \in [y_1, y_2] = [10, 60], dx = dy = 1$
物性参数	$\lambda = 400$
内热源	$S = 0$
边界条件	边界 2、4 绝热 ( $q_2 = q_4 = 0$ ), 边界 1、3 给定温度 ( $T_{B1} = 500, T_{B3} = 300$ )

由于边界 1、2 均为绝热边界，此时可看作 y 方向的一维无源稳态导热问题，数学提法简化为：

$$\frac{\partial}{\partial y} \left( \lambda \frac{\partial T}{\partial y} \right) = 0$$
$$T(y_1) = 500, T(y_2) = 300$$

此时问题的精确解为：

$$T(y) = \frac{T_{B3} - T_{B1}}{y_2 - y_1} (y - y_1) + T_{B1} = -4y + 540$$

计算结果如图 2.1 所示。

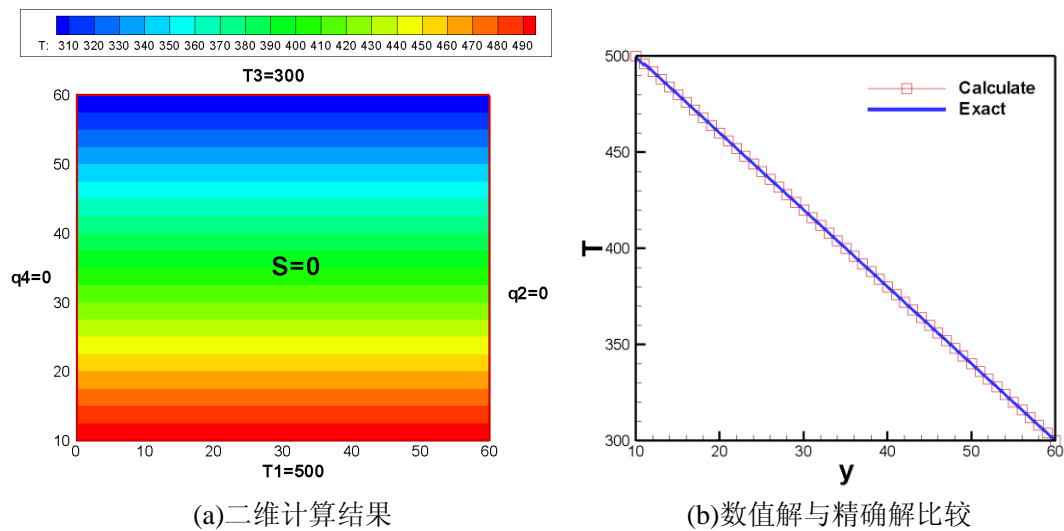


图2.1 一维无内热源稳态导热（直角坐标）

### 2.1.1 柱坐标

计算参数如表 2.2 所示。

表2.2 柱坐标一维无内热源稳态导热

计算区域	$x \in [x_1, x_2] = [0, 60], y \in [r_1, r_2] = [10, 60], dx = dy = 1$
物性参数	$\lambda = 400$
内热源	$S = 0$
边界条件	边界 2、4 绝热 ( $q_2 = q_4 = 0$ ), 边界 1、3 给定温度 ( $T_{B1} = 500, T_{B3} = 300$ )

由于边界 1、2 均为绝热边界，此时可看作  $r$  方向的一维无源稳态导热问题，数学提法简化为：

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( \lambda r \frac{\partial T}{\partial r} \right) = 0$$

$$T(r_1) = 500, T(r_2) = 300$$

此时问题的精确解为：

$$T(r) = \frac{T_{B3} - T_{B1}}{\ln(r_2) - \ln(r_1)} (\ln(r) - \ln(r_1)) + T_{B1} = -111.6 \ln(r) + 757$$

计算结果如图 2.2 所示。



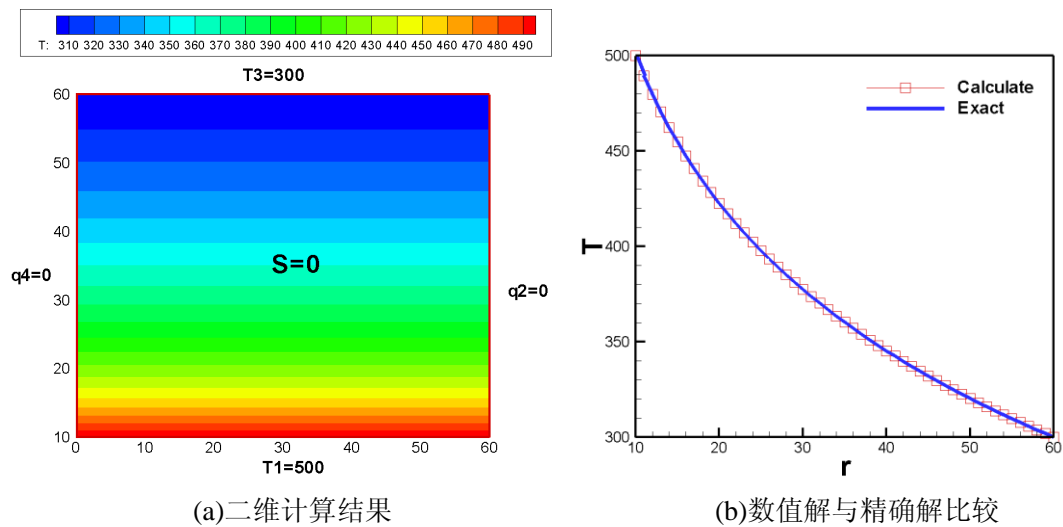


图2.2 一维无内热源稳态导热（柱坐标）

由图 2.1 和图 2.2 的可以看出，两种坐标系情况下一维无内热源稳态导热问题的数值解与精确解符合的很好。

## 2.2 算例 2——一维含均匀内热源稳态导热

### 2.2.1 直角坐标

考虑含有均匀内热源的一维稳态导热问题，计算参数如表 2.3 所示。

表2.3 直角坐标一维含均匀内热源稳态导热

计算区域	$x \in [0, 60], y \in [10, 60], dx = dy = 1$
物性参数	$\lambda = 400$
内热源	$S = 100$
边界条件	边界 2、4 绝热 ( $q_2 = q_4 = 0$ ), 边界 1 给定热流 ( $q_1 = 600$ ) 边界 3 给定温度 ( $T_{B3} = 300$ )

由于边界 1、2 均为绝热边界，此时可看作 y 方向的一维无源稳态导热问题，数学提法简化为：

$$\frac{\partial}{\partial y} \left( \lambda \frac{\partial T}{\partial y} \right) + S = 0$$

$$-\lambda \frac{\partial T}{\partial y} \Big|_{y_1} = 600, T(y_2) = 300,$$

此时问题的精确解为：

$$T(y) = \frac{S}{2\lambda} (y_2^2 - y^2) + \frac{Sy_1 - q_1}{\lambda} (y - y_2) + T_{B3} = -0.125y^2 + y + 690$$

计算结果如图 2.3 所示。

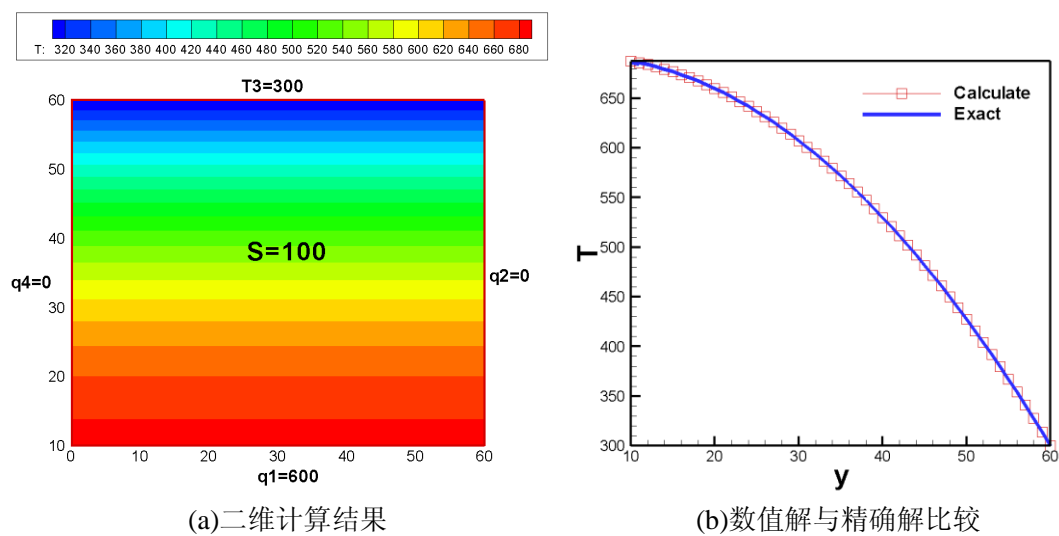


图2.3 一维含均匀内热源稳态导热（直角坐标）

### 2.2.1 柱坐标

计算参数如表 2.4 所示。

表2.4 柱坐标一维含均匀内热源稳态导热

计算区域	$x \in [0, 60], y \in [10, 60], dx = dy = 1$
物性参数	$\lambda = 400$
内热源	$S = 100$
边界条件	边界 2、4 绝热 ( $q_2 = q_4 = 0$ ), 边界 1 给定热流 ( $q_1 = 400$ ) 边界 3 为对流边界 ( $h_3 = 150, T_f = 300$ )

由于边界 1、2 均为绝热边界，此时可看作  $r$  方向的一维无源稳态导热问题，数学提法简化为：

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( \lambda r \frac{\partial T}{\partial r} \right) + S = 0$$

$$T(r_1) = 500$$

$$h_3 (T_f - T(r_2)) = -\lambda \frac{\partial T}{\partial r} \bigg|_{r_2}$$

此时问题的精确解为：

$$T(r) = -\frac{S}{4\lambda} r^2 + \left( \frac{Sr_1^2}{2\lambda} - \frac{q_1 r_1}{\lambda} \right) \ln(r) + T_f + \frac{Sr_2^2}{4\lambda} + \frac{Sr_2}{2h} - \left( \frac{\lambda}{hr_2} + \ln r_2 \right) \left( \frac{Sr_1^2}{2\lambda} - \frac{q_1 r_1}{\lambda} \right)$$

即

$$T(r) = -0.0625r^2 + 2.5\ln(r) + 534.65$$

计算结果如图 2.4 所示。

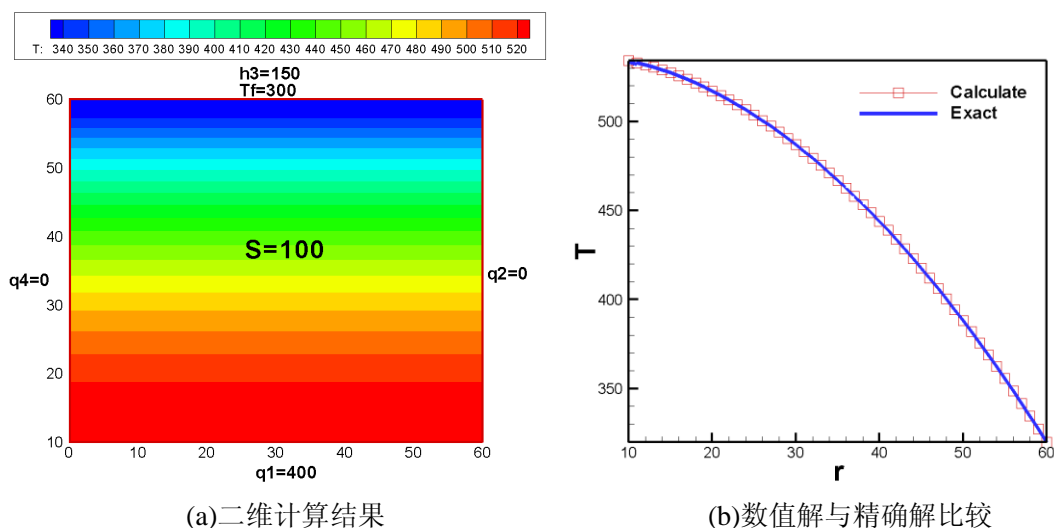


图2.4 一维含均匀内热源稳态导热（柱坐标）

由图 2.3 和图 2.4 可以看出，两种坐标系情况下一维含均匀内热源稳态导热问题的数值解与精确解符合的很好。

## 2.3 算例 3——一维无内热源非稳态导热（直角坐标）

考虑一维无内热源非稳态导热问题，计算参数如表 2.5 所示。

表2.5 直角坐标二维无内热源稳态导热

计算区域	$x \in [0, 60], y \in [10, 60], dx = dy = 1$
物性参数	$\lambda = 400, c = 5, \rho = 5$
内热源	$S = 0$
边界条件	边界 3 给定温度 ( $T_{B3} = 300$ ) 边界 1、2、4 绝热 ( $q_1 = q_2 = q_4 = 0$ )
初始条件	$T_0 = 600$

由于边界 1、2 均为绝热边界，此时可看作  $y$  方向的一维无内热源非稳态导热问题，对应的数学提法为：

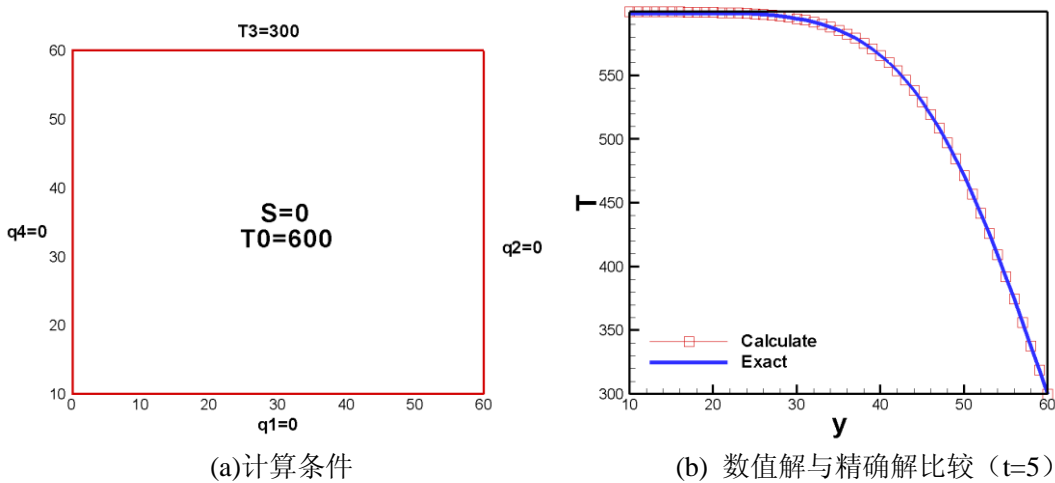
$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\lambda}{\rho c} \frac{\partial^2 T}{\partial y^2}$$
$$t(y, 0) = 600$$
$$\left. \frac{\partial T}{\partial y} \right|_{y_1} = 0, T(y_3, t) = 300$$

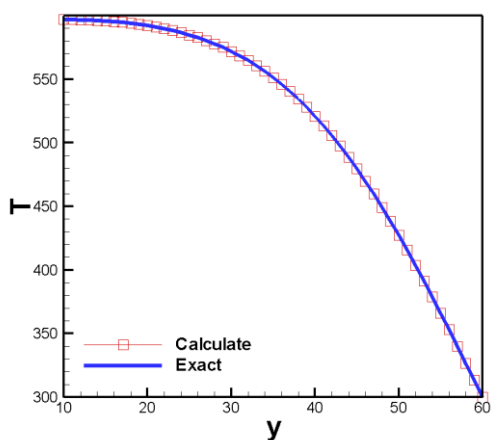
对于该问题，采用分离变量法，可以得出级数表示的解析解：

$$T(y, t) = 300 \times \left[ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{4 \times (-1)^n}{(2n+1)\pi} \cos\left(\frac{(2n+1)\pi}{2L} y\right) \exp\left(\left(\frac{(2n+1)\pi}{2L}\right)^2 \frac{\lambda}{\rho c_p} t\right) + 1 \right]$$

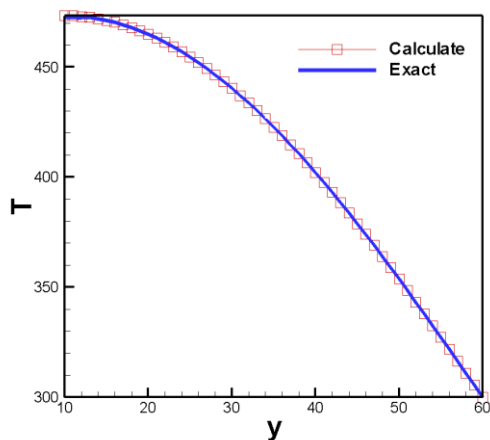
其中  $L = y_2 - y_1$

隐式格式的计算结果如图 2.5 所示。



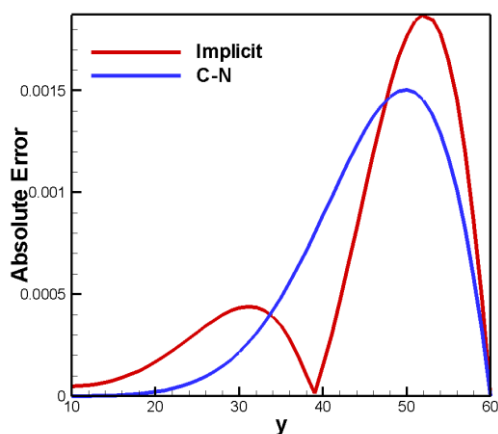


(c) 数值解与精确解比较 (t=10)



(d) 数值解与精确解比较 (t=15)

图2.5 一维无内热源非稳态导热（直角坐标）



平均误差：隐式:6.02e-4，C-N:5.69e-4，显式:不稳定

图2.6 不同格式数值解与精确解的误差比较 (t=5, dx=dy=1, dt=0.1)

由图 2.5 可以看出，在不同的时刻，直角坐标系下一维无内热源非稳态导热问题的数值解与精确解符合得很好；由图 2.6 可以看出，当  $dt$  较大时，显式格式不稳定，无法得到有意义的结果，C-N 格式的整体误差比全隐式格式要小。

下面进一步比较不同网格数情况下，各种格式的误差大小。定义网格点的平均误差：

$$error = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N |\bar{y}_i - y_i|$$

其中  $N$  为网格数， $\bar{y}_i$  为网格点的数值解， $y_i$  为网格点的精确解。不同格式的计算结果如表 2.6 所示。

表2.6 不同格式误差的误差比较 (t=5, h=1)

	$\theta=1.0$ (隐式格式)	$\theta=0.5$ (C-N 格式)	$\theta=0.0$ (显式格式)
dt=1	5.57E-03	6.48E-03	不稳定
dt=0.5	2.86E-03	3.03E-03	不稳定
dt=0.1	6.02E-04	5.69E-04	不稳定
dt=0.05	3.14E-04	2.72E-04	不稳定
dt=0.01	8.81E-05	5.92E-05	5.82E-05
dt=0.005	6.21E-05	4.70E-05	3.01E-05
dt=0.001	4.40E-05	4.01E-05	3.63E-05

由表 2.6 可以看出，当空间网格间距  $h$  一定时，随着时间步长的减小，C-N 格式的误差下降比隐式格式的误差下降快；对于显式格式，当时间步长较大时，格式不稳定。

## 2.4 算例 4—二维无内热源稳态导热（直角坐标，空心）

考虑二维无内热源稳态导热问题，计算参数如表 2.7 所示。

表2.7 直角坐标二维无内热源稳态导热

计算区域	$x \in [0, 60], y \in [10, 60], dx = dy = 1$
物性参数	$\lambda = 400$
内热源	$S = 0$
边界条件	边界 1、2、3 给定温度 ( $T_{B1} = T_{B2} = 300, T_{B3} = 600$ ) 边界 4 绝热 ( $q_4 = 0$ )

该问题的数学提法为：

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = 0$$

$$\frac{\partial T}{\partial y}(x_1, y) = 0, T(x_2, y) = 300$$

$$T(x, y_1) = 300, T(x, y_2) = 600$$

对于该问题，采用分离变量法，可以得出级数表示精确解：

$$T(x, y) = 300 \times \left( \sum_{n=0}^{\infty} \frac{4 \times (-1)^n}{(2n+1)\pi} \frac{\sinh\left(\frac{(2n+1)\pi}{2L_1} y\right)}{\sinh\left(\frac{(2n+1)\pi}{2L_1} L_2\right)} \cos\left(\frac{(2n+1)\pi}{2L_1} x\right) + 1 \right)$$

其中  $L_1 = x_2 - x_1, L_2 = y_2 - y_1$

计算结果如图 2.7

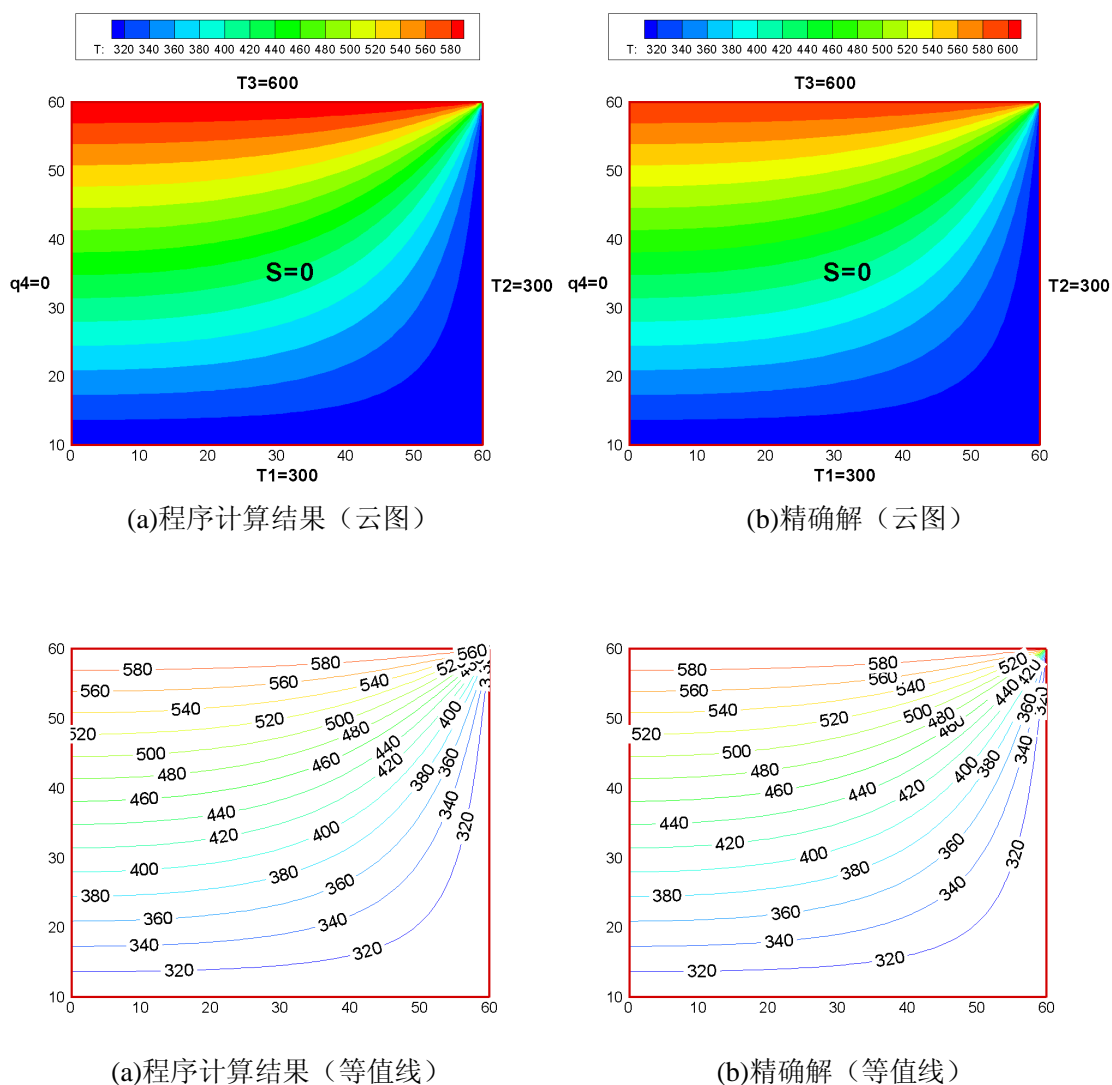
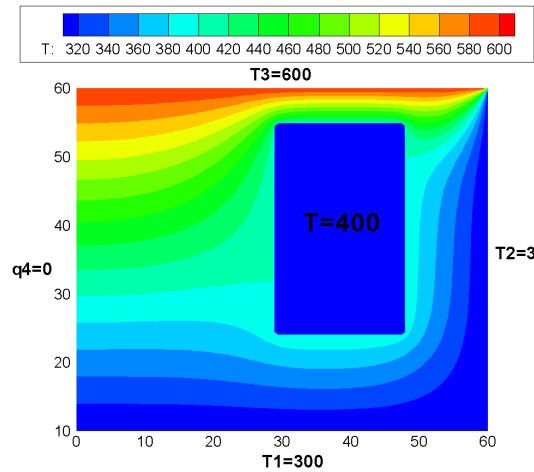


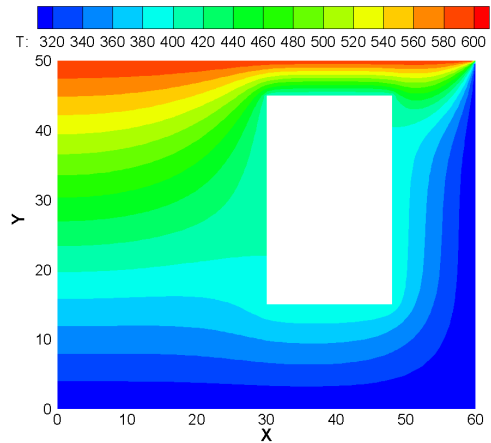
图2.7 二维无内热源稳态导热（直角坐标）

由图 2.7 可以看出，直角坐标系下二维无内热源稳态导热问题的数值解与精确解符合得很好。

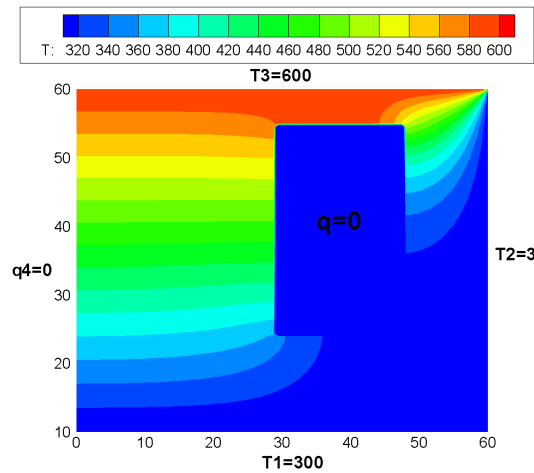
程序还适用于有空心区域的情况，中心区域形状可任意，均由直角网格近似，空心区域边界可取为等温边界和绝热边界，下面采用表 2.7 中的边界条件，以椭圆和方形区域为例，进行了计算。



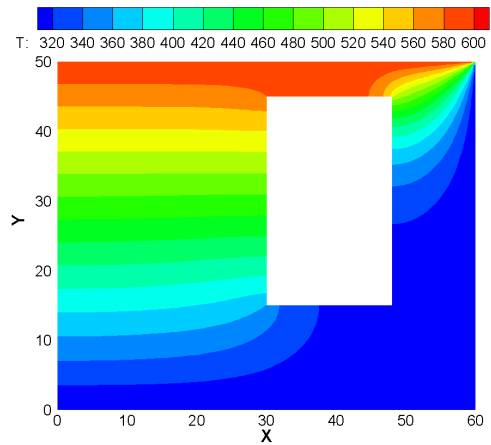
(a1)方形区域（等温边界）



(a2)方形区域（等温边界,Fluent）



(b1)方形区域（绝热边界）



(b2)方形区域（绝热边界,Fluent）



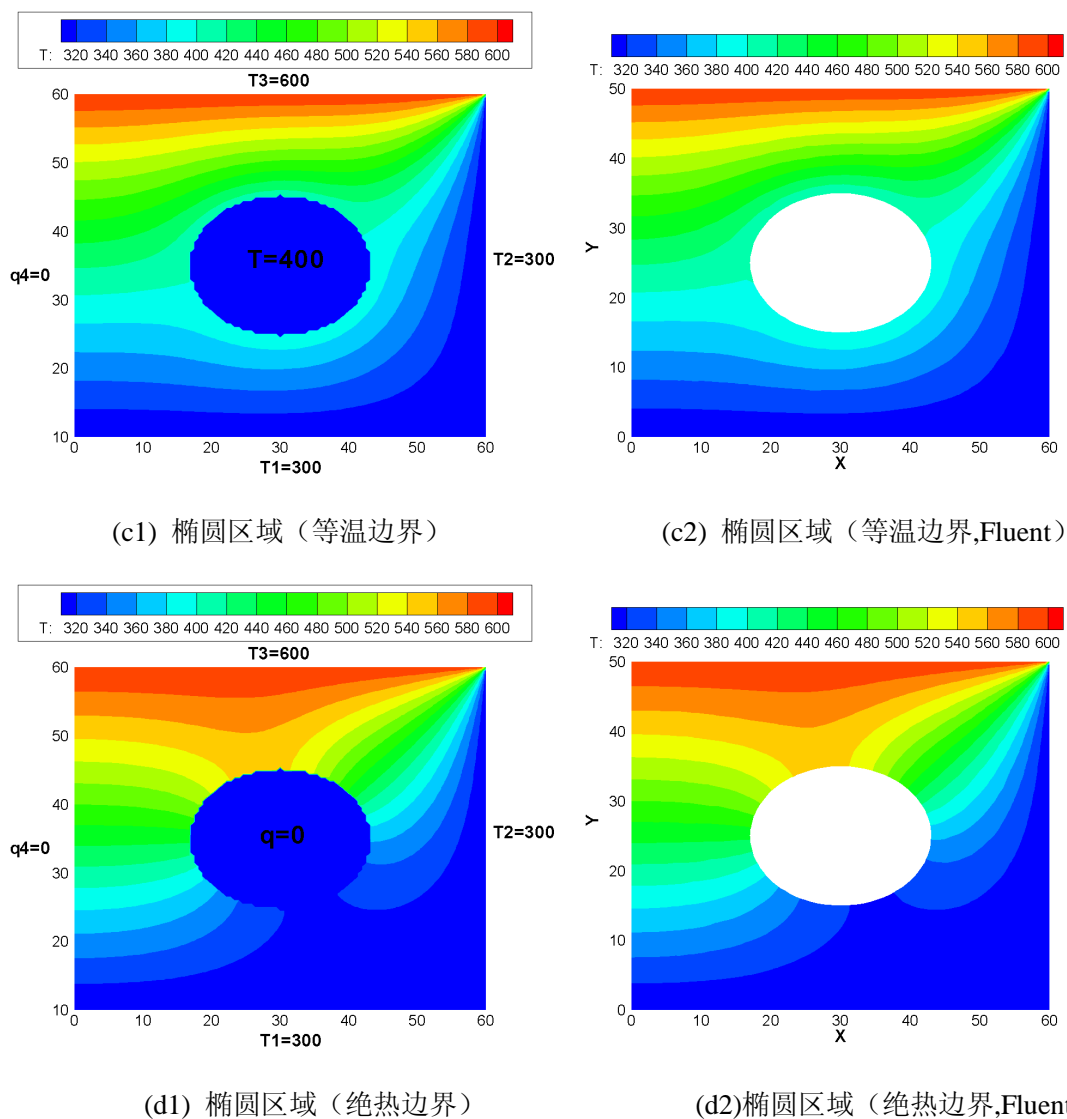


图2.8 二维无内热源含空心区域稳态导热（直角坐标）

由图 2.8 可以看出，程序计算结果与 **Fluent** 计算结果基本相同。对于等温边界，空心区域附近的温度场受影响较大，离空心区域较远的地方，受影响较小；对于绝热边界，等温线垂直于空心区域边界，温度场受空心区域影响较大。

## 2.5 算例 5—二维含均匀内热源非稳态导热（直角坐标）

考虑二维含内热源非稳态导热问题，计算参数如表 2.8 所示。

表2.8 直角坐标二维含均匀内热源非稳态导热

计算区域	$x \in [0, 60], y \in [10, 60], dx = dy = 1$
物性参数	$\lambda = 400, c_p = 5, \rho = 5$
内热源	$S = 100$
边界条件	边界 1、4 给定温度 ( $T_{B1} = 300, T_{B4} = 500$ ), 边界 2 对流边界 ( $h_2 = 150, T_{f2} = 400$ ), 边界 3 给定热流 ( $q_3 = 2000$ )
初始条件	$T_0 = 300$

该问题的数学提法为：

$$\begin{aligned} \rho c \frac{\partial T}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial x} \left( \lambda \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \lambda \frac{\partial T}{\partial y} \right) + S \\ T(x, y, 0) &= 300 \\ T(x_1, y, t) &= 300, h_2 (T_f - T(x_2, y, t)) = -\lambda \frac{\partial T}{\partial x}(x_2, y, t) \\ T(x, y_1, t) &= 500, -\lambda \frac{\partial T}{\partial x}(x, y_2, t) = 2000 \end{aligned}$$

t=10s 的程序计算结果和 Fluent 计算结果如图 2.9 所示，t=100s 的计算结果及稳态计算结果如图 2.9 所示。

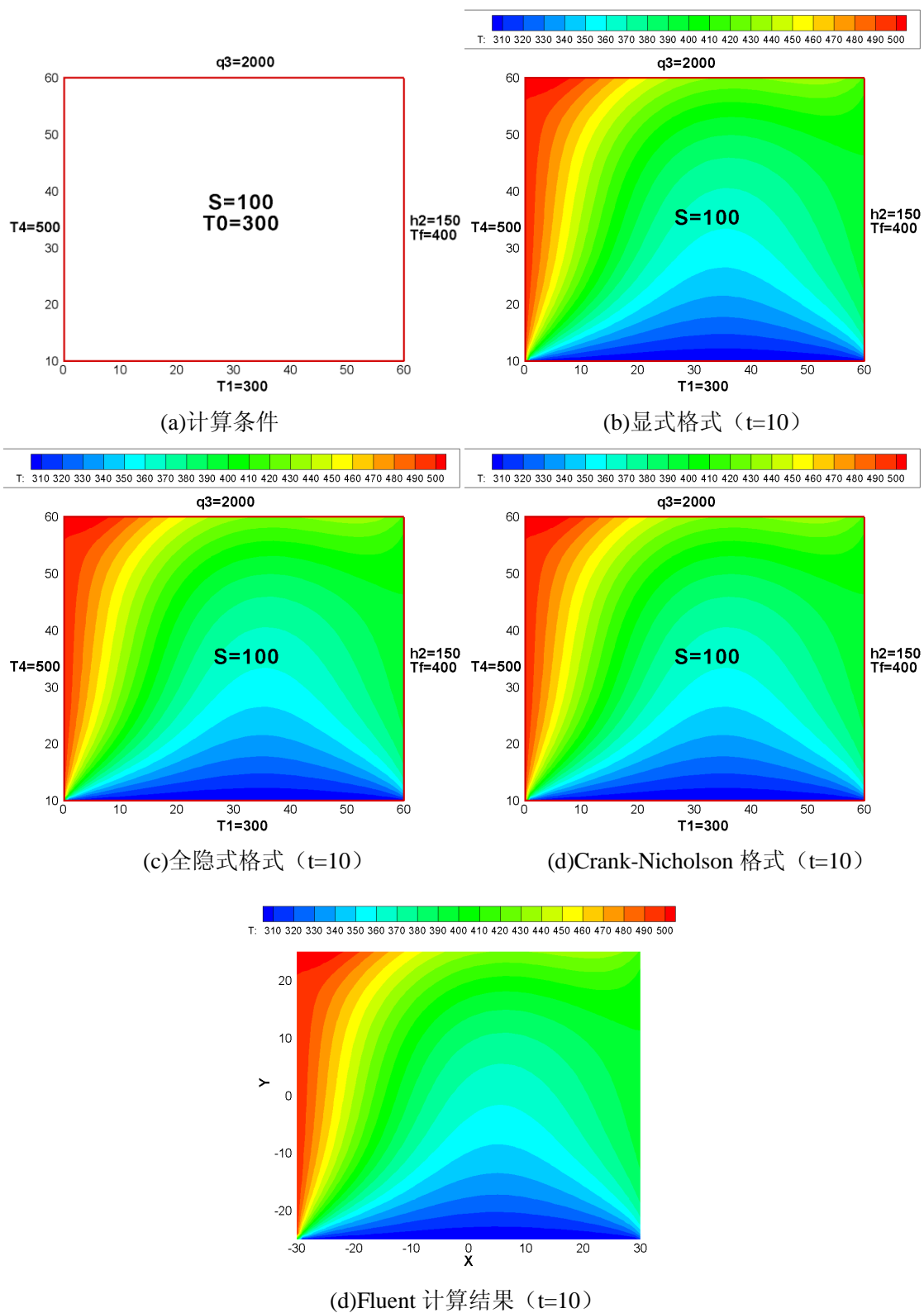


图2.9 二维含均匀内热源非稳态导热 (t=10, 直角坐标)

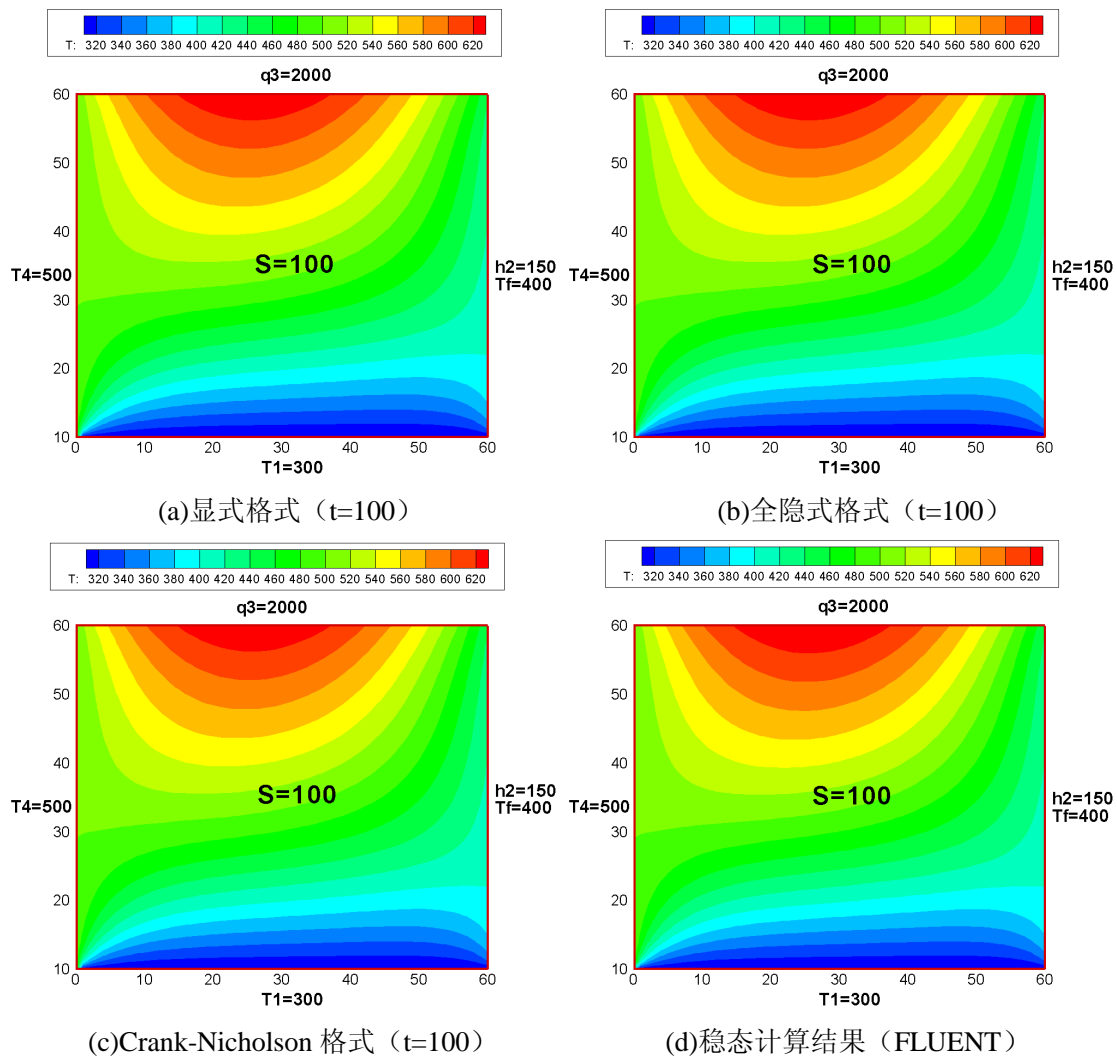


图2.10 二维含均匀内热源非稳态导热达到稳态后的结果（直角坐标）

由图 2.9 可以看出， $t=10$  时，三种格式的计算结果与 Fluent 计算结果相同；由图 2.10 可以看出， $t=100$  时，该导热问题已经达到了稳态，此时三种格式的计算结果与 Fluent 得到的稳态计算结果相同。

## 2.6 小结

由以上算例可以看出，所编写的程序对于一维、二维稳态、非稳态导热问题都能得到较好的数值解，程序模块主要实现了以下功能：

- (1) 边界条件可取为三类边界中的任意一种类型；

(2) 空间方向二维，适用于平面直角坐标系，也适用于圆柱轴对称问题； 时间上既适用于稳态问题，也适用于非稳态问题；

(3) 对于非稳态问题，可采用显式格式、全隐式格式、Crank-Nicholson 格式以及加权隐式格式；

(4) 程序中有专门的模块计算网格和控制体几何参数，适用于均匀网格和非均匀网格；

(5) 程序中有专门的模块计算内热源和导热系数，适用于非均匀内热源、非均匀导热系数的导热问题计算；

(6) 程序有专门的模块处理计算域空心的情况，空心域形状可任意，均用直角网格近似，边界类型可取为等温边界和绝热边界；

(7) 程序中有专门的输出数据模块，包括一维数据、二维数据、多时刻数据的输出，数据文件格式为 `tocplot` 软件格式。

## 第3章 汽缸壁非稳态导热问题研究

### 3.1 问题描述

#### 3.1.1 问题的提出

发动机工作过程中，将有很大的热流传递给汽缸壁内表面，为了使汽缸壁温度不至于太高，在汽缸壁外表面通冷却液，带走热量。对于一般发动机，有进气冲程（活塞下行）、压缩冲程（活塞上行）、膨胀冲程（活塞下行）、排气冲程（活塞上行）四个冲程，所以传给汽缸壁的热流为周期性的，是一个非稳态问题。下面用现有的程序对气缸壁在周期热流边界条件下的导热情况进行模拟，并做相关的讨论。

#### 3.1.2 模型简化

由于汽缸壁很薄，法向尺寸比横向尺寸小得多，将问题简化为一维不含内热源非稳态导热问题，如图 3.1 所示。针对已有的程序，控制方程为：

$$\begin{aligned}\frac{\partial T}{\partial t} &= \frac{\lambda}{\rho c} \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \\ -\lambda \frac{\partial T}{\partial y} \Big|_{y_0} &= q_{B1} \\ h(T(y_2, t) - T_f) &= -\lambda \frac{\partial T}{\partial y} \Big|_{y_2}\end{aligned}$$

对应的边界条件如表 3.1 所示。

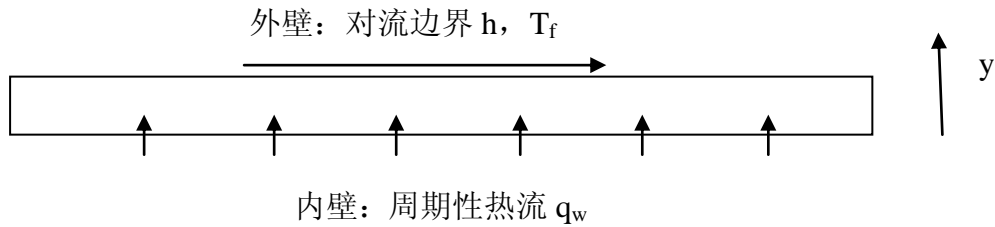


图3.1 模型示意图

表3.1 汽缸壁非稳态导热问题边界条件

计算区域	$x \in [0, 0.008], y \in [0, 0.008], M = 20, N = 25$
物性参数	$\lambda = 40, c_p = 460, \rho = 7700$
内热源	$S = 0$
边界条件	边界 1 周期热流 ( $q_{B1} = \begin{cases} 3 \times 10^5 & 0 \leq t \leq 0.25t_0 \\ 0 & 0.25t_0 \leq t \leq t_0 \end{cases}$ ) 边界 3 对流边界 ( $h = 600, T_f = 260$ ) 边界 2, 4 绝热 ( $q_2 = q_4 = 0$ )
初始条件	$T_0 = 500$

其中  $t_0$  为热流的周期。

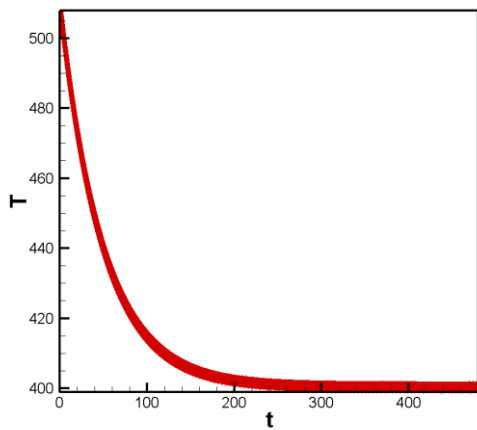
若热流边界为恒热流，一定的时刻后，汽缸温度分布将达到稳态，该问题有解析解：

$$T(y) = -\frac{q_{B1}}{\lambda}(y - L) + \frac{q_{B1}}{h} + t_f$$

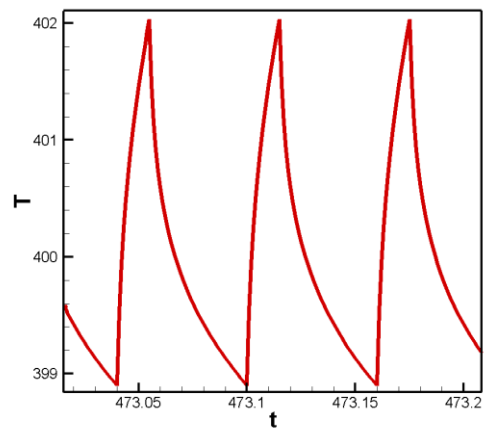
## 3.2 计算结果与分析

### 3.2.1 数值解与稳态解

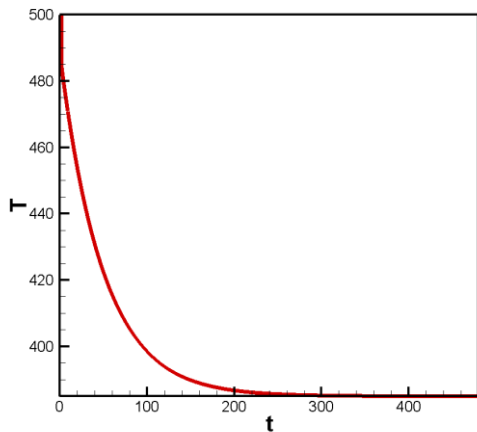
取热流周期  $t_0 = 0.06$ ，8000 周期进行计算，差分格式采用全隐式格式，计算结果如图 3.1 所示。



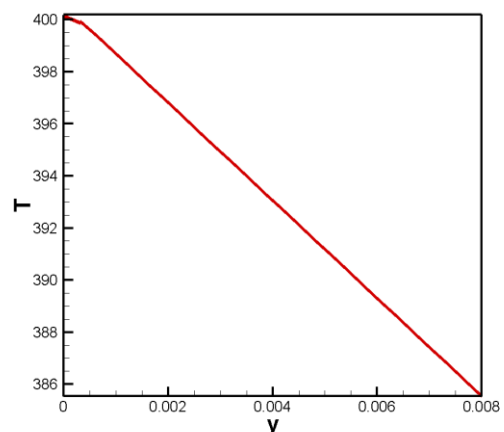
(a) 内壁温度随时间变化



(b) 内壁温度随时间变化（放大）



(c) 外壁温度随时间变化



(d) 全场计算结果(t=480)

图3.2 二维含均匀内热源非稳态导热达到稳态后的结果（直角坐标）

由计算结果可以看出，在周期性热流（周期为 0.06s）的作用下，内壁也呈现周期性变化，变化周期与热流周期相同，变化的幅度约为 4K（如图 3.1(a)(b)所示）；外壁随着时间的推移，基本达到常数；全场的温度场分布近似为线性分布。

定义等效热流

$$\bar{q} = \int_0^{t_0} q_w dt$$

对于本问题，等效热流  $\bar{q} = \frac{q_{B1}}{4}$ 。将数值解与等效热流作为边界条件时的稳态解进行比较，如图 3.2 所示。



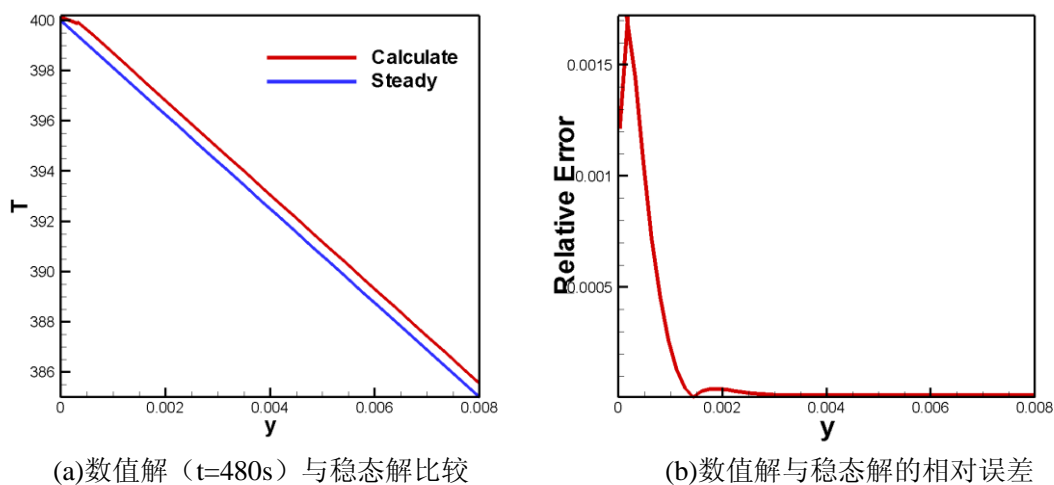
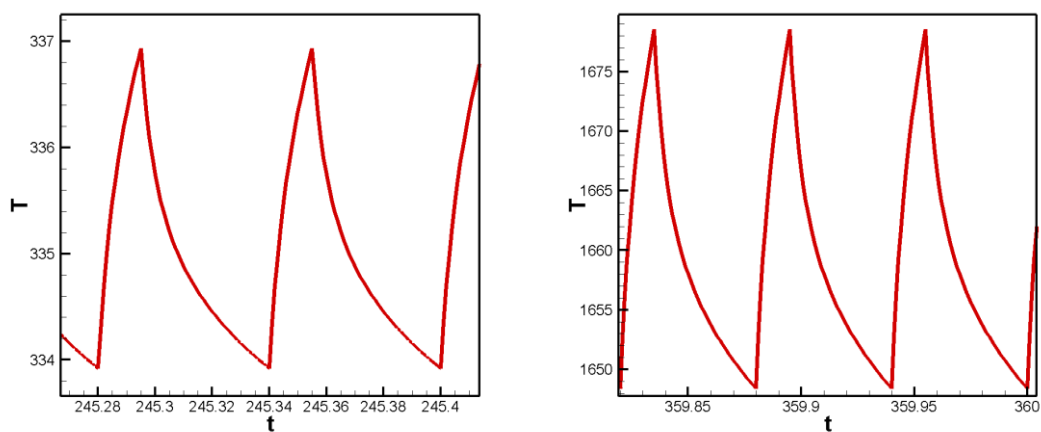


图3.3 数值解与稳态解的比较

由图 3.2 中，可以看出：随着时间的推移，最后汽缸壁沿厚度方向的温度分布趋于  $\frac{q_{B1}}{4}$  恒热流的稳态解。接近内壁的区域受到周期性热流边界的影响较大，与稳态解的相对误差较大；外壁附件的区域受周期性边界影响较小，与稳态解基本重合。

### 3.2.2 热流和表面换热系数对温度场的影响

令周期不变，改变热流  $q$  和表面换热系数  $h$ ，取表 3.2 不同的工况进行计算，计算结果如图 3.3 所示。



(a)内壁温度随时间变化（ $q_3=3e5, h=1250$ ） (b)内壁温度随时间变化（ $q_3=3e6, h=600$ ）

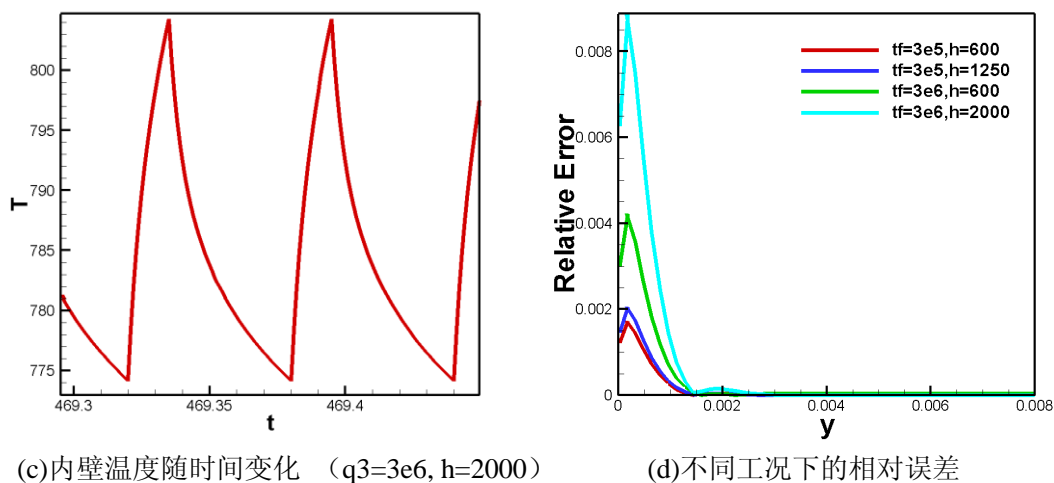


图3.4 不同热流和表面传热系数系数下的计算结果

认为相对误差小于 0.01% 的区域不受周期性边界的影响，可以计算出不同情况下的影响区域，如表 3.2 所示，表 3.2 还给出了不同工况下外壁的温度变化参数。

表3.2 不同工况结果比较

工况		影响范围 (mm)	内壁温度变化		外壁温度变化
换热情况	热流周期 (s)		振幅 (K)	周期 (s)	无震荡
$q=3e5, h=600$	0.06	1.12	3	0.06	
$q=3e5, h=1250$	0.06	1.12	3	0.06	
$q=3e6, h=600$	0.06	1.28	30	0.06	
$q=3e6, h=2000$	0.06	2.08	30	0.06	

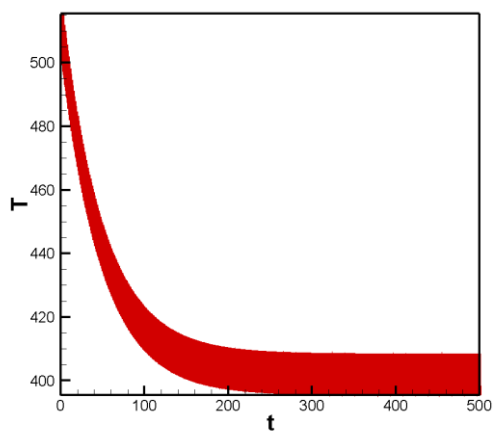
由计算结果可以看出：

(1)热流  $q$  增大时，气缸壁整体温度升高，内壁温度变化的周期不变，振幅增加；周期性热流边界影响范围增大；内壁附近的温度分布与稳态解的相对误差也增大；

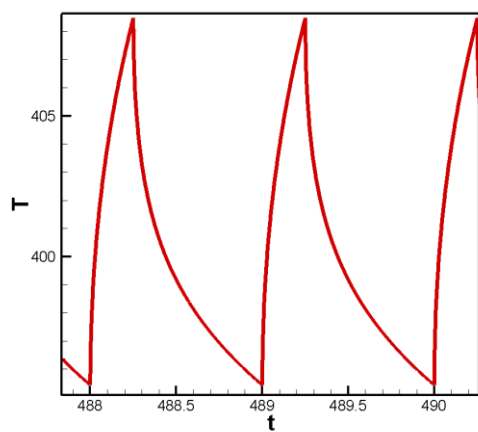
(2)对流侧表面传热系数  $h$  增大时，气缸壁整体温度降低，内壁的温度变化的周期不变，振幅基本不变；周期性热流边界影响范围增大；内壁附近的温度分布与稳态解的相对误差也增大。

### 3.2.3 热流周期对温度场的影响

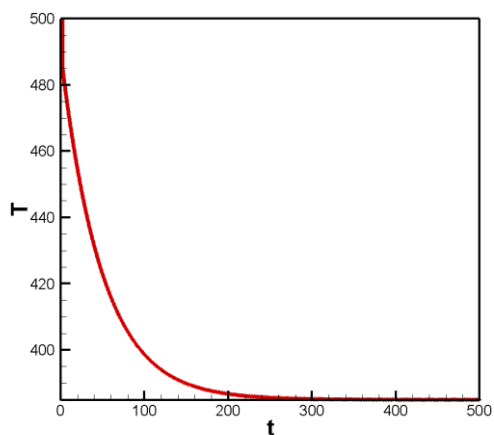
令热流  $q=3e5$  表面换热系数  $h=600$  不变，改变热流周期，取表 3.3 不同的工况进行计算，计算结果如图 3.4 和表 3.3 所示。



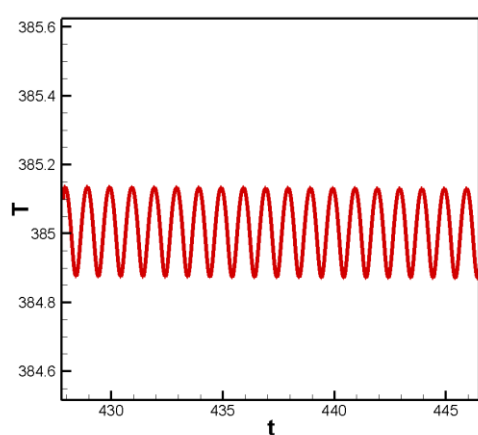
(a)内壁温度随时间变化



(b) 内壁温度随时间变化（放大）



(c)外壁温度随时间变化



(d) 外壁温度随时间变化（放大）

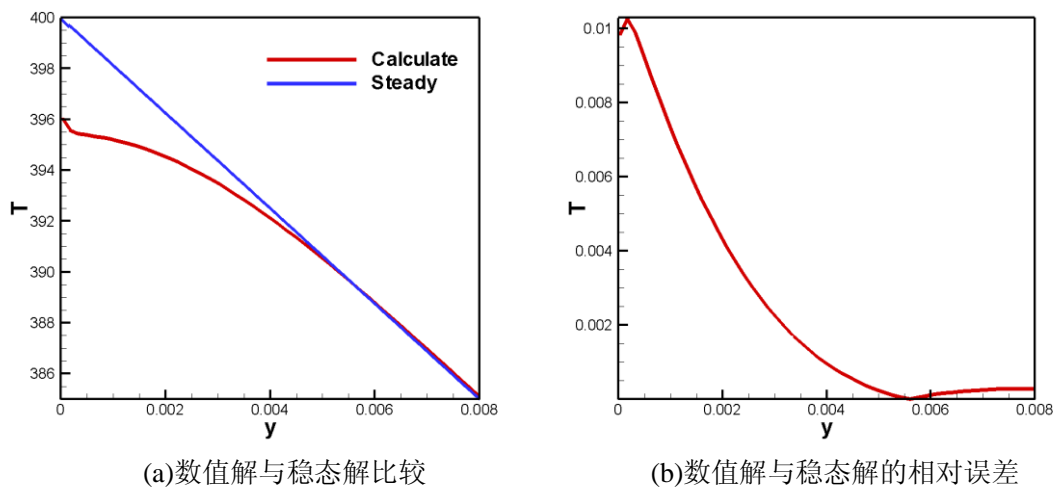


图3.5 计算结果(热流周期为1s)

表3.3 不同工况结果比较

工况		影响范围 (mm)	内壁温度变化		外壁温度变化	
换热情况	热流周期 (s)		振幅 (K)	周期 (s)	振幅 (K)	周期 (s)
$q=3e5, h=600$	0.06	1.12	3	0.06	无震荡	
$q=3e5, h=600$	0.1	1.44	4	0.1	无震荡	
$q=3e5, h=600$	0.5	5.44	9.5	0.5	0.032	0.5
$q=3e5, h=600$	1	8.0	13	1.0	0.55	1

由计算结果可以看出：随着热流周期的增大，周期性热流边界的影响范围增大；当热流周期为 0.5s 时，外壁温度已经呈现周期性，变化周期与热流周期相同；当热流周期提高到 1s 时，外壁温度振幅明显，全场的温度场呈现明显的周期性，与稳态解有较大的差别。

### 3.3 结论

由以上分析和计算，可以得出如下结论：

(1) 当热流边界的周期较小时，汽缸壁内壁受周期热流影响较大，内壁附近温度呈现周期变化，变化周期与热流周期相同，外壁受周期热流影响较小，可看作常数，汽缸壁的温度分布与等效热流（一个周期内的平均热流）边界下的稳态解基本重合；

(2) 当热流边界的周期增大时，周期热流的影响范围增大，稳态近似带来的误差增大；当热流周期达到一定程度，外壁温度也呈现周期性变化，变化周期与热流周期相同，此时汽缸壁温度分布与稳态解相差较远；

(3) 当热流大小增大时，汽缸壁整体温度升高，周期热流影响范围增大，内壁附近的温度分布与稳态解的相对误差也增大；

(4) 当对流侧表面换热系数增加时，汽缸壁整体温度降低，周期热流影响范围增大，内壁附近的温度分布与稳态解的相对误差也增大。

一般发动机工作频率较高，热流周期较大，所以汽缸壁的温度分布可以采用稳态假设，用稳态解来近似。

**注：程序说明详见源代码**