斜切喷管内流场的数值研究

李秦宜，2011310754
刘洁，2011211149；赵思玉

摘要：采用 Roe 平均守恒型差分格式求解 Euler 方程，针对二维斜切喷管内可压缩流场进行数值模拟，分析不同斜切角度对流场特性的影响。
关键词：斜切喷管，Euler 方程，守恒型差分格式

1. 问题描述和分析

斜切喷管可以改善喷气发动机的矢量推力性能以及尾部噪声。图 1 给出了二维斜切喷管的示意图，其中扩张比 $A_e/A_t=2$，$R_b/R_t=1.5$，$\alpha=20^\circ$，φ 分别取 30˚、60˚、80˚，半角θ =15˚ 。$R_t=5mm$。喷管总压 P0=6Mpa， 总温 T0=3200K，比热比 k=1.26。认为流动处于设计工况，即在喉部马赫数 Ma =1，因此喉部前方为亚音速等熵压缩流动，喉部之后为超音速等熵膨胀。

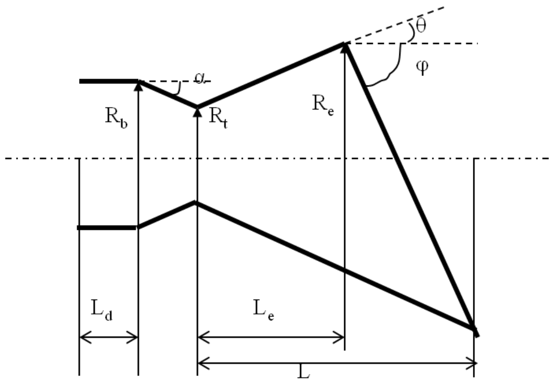

图 1 斜切喷管示意图

本文采用 Roe 平均守恒型差分格式求解 Euler 方程，可以准确求解间断、捕捉激波；改变斜切角 φ，分析斜切角大小对求解结果的影响。

2. 数学模型

守恒型二维 Euler 方程为

$$\frac{\partial U}{\partial t}+\frac{\partial F}{\partial x}+\frac{\partial G}{\partial y}=0$$

其中

$$U=\begin{bmatrix}\rho\\ \rho u\\ \rho v\\ E\end{bmatrix},F=\begin{bmatrix}\rho u\\ \rho u^2+p\\ \rho uv\\ uE+up\end{bmatrix},G=\begin{bmatrix}\rho v\\ \rho uv\\ \rho v^2+p\\ vE+vp\end{bmatrix},E=\frac{p}{\gamma-1}+\frac{1}{2}\rho\left(u^2+v^2\right)$$

将方程无量纲化，特征压力 p_a 取为 0.1MPa，特征密度 ρ_a 取为 $1.0kg/m^3$，特征长度 L_a 取为 R_t，特征速度和特征时间的表达式为

$$u_a = \sqrt{p_a/\rho_a}, t_a = L_a/u_a$$

无量纲化后的方程在形式上不发生变化。

3. 数值方法

3.1 基于有限体积法的守恒型差分格式及网格划分

基于有限体积法的守恒型差分格式的表达式为

$$u_j^{n+1} = u_j^n - \lambda\left(g_{j+\frac{1}{2}}^n - g_{j-\frac{1}{2}}^n\right)$$

其中，λ 表示网格比，g 表示边界数值通量。求解局部 Riemann 问题在零点的值可以获得 Euler 方程的数值通量。求解的基本步骤为：

1） 已知 $t = t_n$ 时间层上的 u_j^n，用分片常函数重构 $u(x,t_n)$；

2） 求解局部 Riemann 问题得到 $u(x,t_{n+1})$；

3） 求解 $u(x,t_{n+1})$在各单元的平均值，得到 u_j^{n+1}。

本程序采用 Roe 平均方法近似求解局部 Riemann 问题。

网格划分采用 100×50 不规则四边形网格，如图 2 所示。对于这种非直角网格，用有限体积法更加直接，所得物理量为控制体单元的平均值。

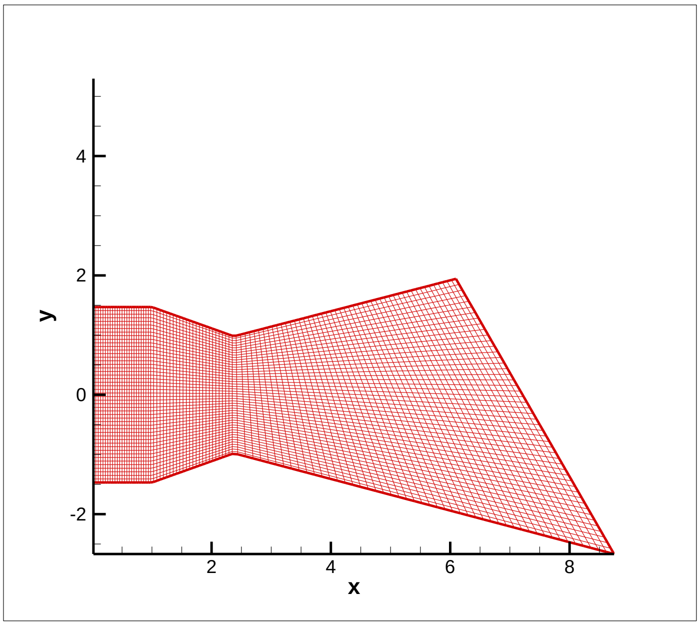

图 2 网格划分

3.2 Roe 平均方法

Godunov 格式需要精确求解局部 Riemann 问题。为减少计算量，Roe 平均方法采用近似系数矩阵，使方程线性化，从而可以通过简单的代数运算得到数值通量。一维 Euler 方程的拟线性形式为

$$\frac{\partial U}{\partial t}+A(U)\frac{\partial U}{\partial x}=0$$

Roe 平均方法的近似系数矩阵为

$$A^*=A(U^*),U^*=\frac{\sqrt{\rho_L}U_L{}^*+\sqrt{\rho_R}U_R{}^*}{\sqrt{\rho_L}+\sqrt{\rho_R}}$$

将矩阵 A^*对角化：

$$A^*=R\Lambda L,\ \left|A^*\right|=R\left|\Lambda\right|L$$

边界数值通量为

$$g^{*n}_{j+\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}\left(g_j^n+g_{j+1}^n\right)-\frac{1}{2}\left|A^*\right|^n_{j+\frac{1}{2}}\left(U^n_{j+1}-U^n_j\right)$$

对于多维问题，可以根据 Euler 方程的旋转不变性，通过求解沿边界法向的扩展一维 Riemann 问题近似得到边界处通量值。

3.3 边界条件的处理

对于入口边界，给定入口速度。入口速度根据相容关系求解：

$$u_{in}-\frac{2a_{in}}{\gamma-1}=u-\frac{2a}{\gamma-1}$$

假定管内流动处于设计工况，即喉部 Ma=1，根据气体一维等熵流动关系式

$$\frac{A}{A*}=\frac{1}{Ma}\left(\frac{2}{\gamma+1}+\frac{\gamma-1}{\gamma+1}Ma^2\right)^{\frac{\gamma+1}{2(\gamma-1)}}$$

可以求得入口马赫数 Ma_{in}=0.4357。进而根据入口 Ma 和温度、压力的计算公式可以求得入口压力和温度：

$$\frac{T_0}{T}=1+\frac{\gamma-1}{2}Ma^2,\ \frac{p_0}{p}=\left(1+\frac{\gamma-1}{2}Ma^2\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}$$

对于固壁边界，通过虚拟节点给定边界条件。在虚拟网格上令法向速度与相邻单元相反，压强及密度与相邻单元一致。出口边界由于是超音速流动，可直接外推出虚拟网格上的值。

3.4 时间推进方法和初始条件

采用守恒型差分格式求解发展型 Euler 方程，当时间充分长时将得到稳态解。时间方向采用两步 Runge-Kutta 格式：

$$U^{n+\frac{1}{2}}=U^n+\tau\left(\frac{\partial U}{\partial t}\right)^n,U^{n+1}=U^n+\frac{\tau}{2}\left(\frac{\partial U}{\partial t}\right)^n+\frac{\tau}{2}\left(\frac{\partial U}{\partial t}\right)^{n+\frac{1}{2}}$$

初始条件的设置。给定初始无量纲参数，在喷管入口段根据滞止参数将初始无量纲场设为 p=60, ρ=5.625, u=v=0，在收缩及扩张段内初始场设为 p=1.0，ρ=1.0，u =v =0。

4. 模拟结果和讨论

图 3 给出了斜切角为 30° 的模拟结果，其中图 3（a）为无量纲压力云图，图 3（b）为无量纲密度云图，图 3（c）为马赫数云图；图 4 给出了斜切角为 60° 的模拟结果；图 5 给出了斜切角为 80° 的模拟结果。根据图 3-5 可以得到如下结论：

（1） 三种斜切角度下，喉部马赫数均为 1 左右，喉部以前为熵压缩的亚音速流动，喉部之后起始处形成了膨胀波，之后是等熵膨胀的超音速流动；

（2） 三种斜切角度下，口处无量纲压力的最低值仍然大于 1，因此，尾流在管口会形成过度膨胀；

（3） 随着斜切角的增大，出口处压力、密度和马赫数分布均逐渐均匀。不同的斜切角度改变了出口处的压力分布，将影响喷管的推力大小、方向等性能。

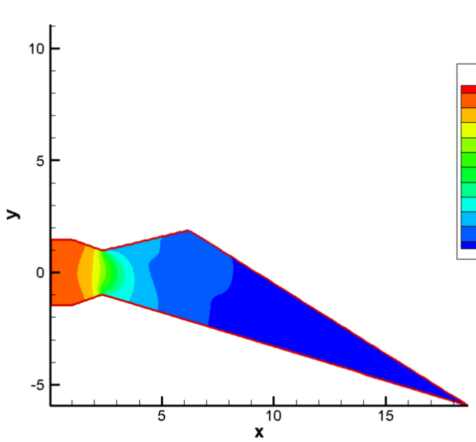

图 3（a）无量纲压力云图

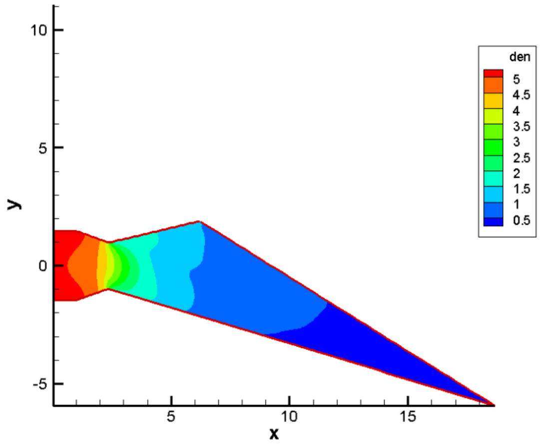

图 3（b）无量纲密度云图

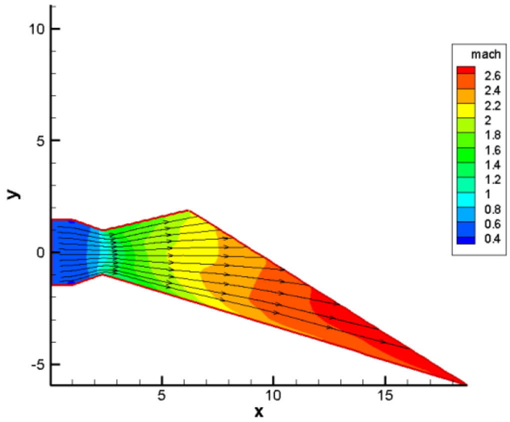

图 3（c）马赫数云图

图 3 斜切角为 30° 的模拟结果

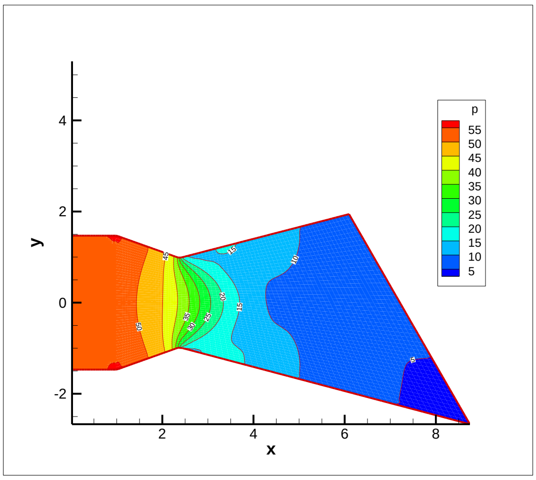

图 4（a）无量纲压力云图

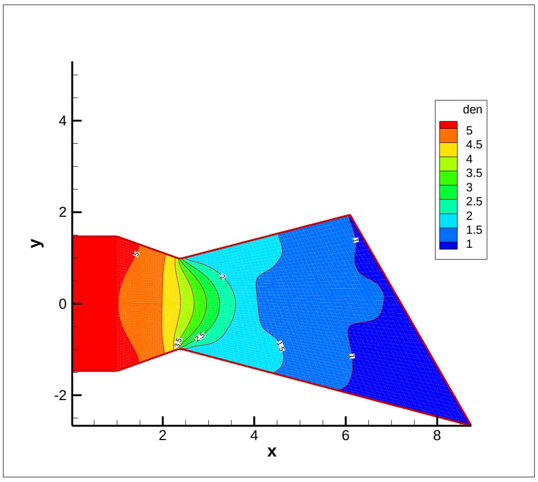

图 4（b）无量纲密度云图

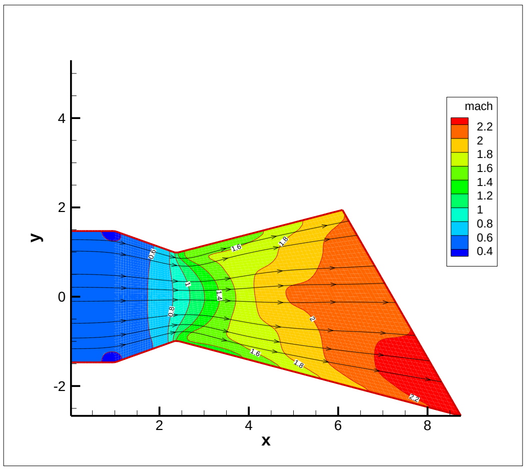

图 4（c）马赫数云图

图 4 斜切角为 60° 的模拟结果

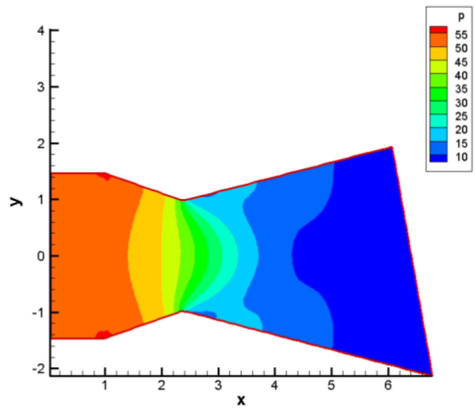

图 5（a）无量纲压力云图

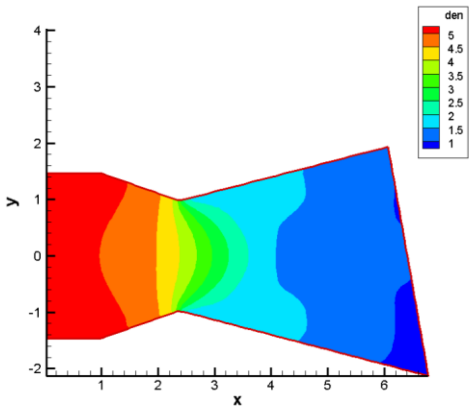

图 5（b）无量纲密度云图

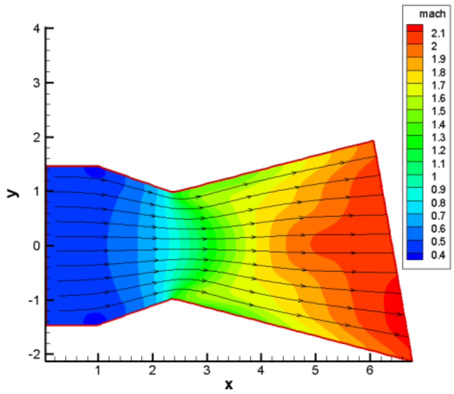

图 5（c）马赫数云图

图 5 斜切角为 80° 的模拟结果

5. 结论

本文基于 Roe 平均方法的守恒型差分格式求解 Euler 方程，针对二维斜切喷管内可压缩流场进行数值模拟，分析了不同斜切角度对流场特性的影响。结果表明，程序可以准确模拟喷管内压缩-膨胀式的可压缩流动。随着斜切角的增大，出口处压力、密度和马赫数分布均逐渐均匀；不同的斜切角度改变了出口处的压力分布，将影响喷管的推力大小、方向等性能。