

二维稳态及非稳态导热问题研究

张民楷^{a*}, 杨杰^b, 巴延涛^a

^a 清华大学工程力学系

^b 清华大学物理系

* zhangminkai@foxmail.com

1 数值方法

1.1 问题描述

本文考虑直角坐标系和圆柱轴对称坐标系下的二维稳态和非稳态导热问题, 其中计算区域均为规则区域。由于在数值计算中, 圆柱轴对称坐标系可转换为直角坐标系, 因此本文主要以直角坐标系为例来研究二维导热问题。直角坐标系下规则的矩形计算区域如图 1 所示。

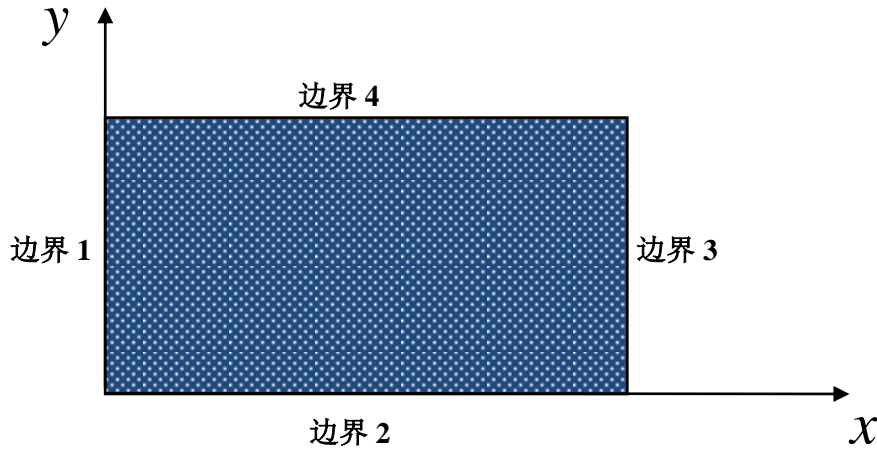


图 1. 直角坐标规则计算区域示意图

在直角坐标系下, 二维含内热源稳态及非稳态导热方程分别为:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(k \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(k \frac{\partial T}{\partial y} \right) + S = 0, \quad (1)$$

$$\rho c \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(k \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(k \frac{\partial T}{\partial y} \right) + S. \quad (2)$$

图 1 所示计算区域有 4 个边界, 每个边界的定解条件主要有以下三类:

- 1) 第一类边界条件 (Dirichlet 边界条件): 给定边界的温度值 T_b ;
- 2) 第二类边界条件 (Neumann 边界条件): 给定边界的热流密度 q_b ;
- 3) 第三类边界条件 (Robin 边界条件): 给定边界上物体与周围流体间的表

面换热系数 h 及周围流体的温度 T_f 。

值得指出的是在处理复杂的实际工程问题时, 还会遇到辐射边界条件以及界

面连续条件。

对于式(1)中稳态导热问题，在求解时只需给出边界条件，而不需要给出初始条件。对于式(2)中非稳态导热问题，在求解时需要同时给出边界条件和初始条件。

1.2 区域离散

时间域采用均分离散。设时间步长为 Δt ，初始计算的时刻为 0，终止计算的时刻为 time ，则时间推进步数为 $M=\text{time}/\Delta t$ 。时间域的离散只在非稳态导热问题中进行，在稳态导热问题中不需时间域的离散。

空间域的离散采用内节点法（先确定控制面后确定网格节点）。设 x 、 y 方向的节点数分别为 x_node_number 和 y_node_number ，则 x 、 y 方向对应于控制体的控制面数分别为 $(x_node_number-1)$ 和 $(y_node_number-1)$ ，则 x 、 y 方向的控制面编号可分别设定为： $i=2,3,\dots,x_node_number$ 和 $j=2,3,\dots,y_node_number$ ，而 x 、 y 方向的节点编号可分别设定为： $i=1,2,\dots,x_node_number$ 和 $j=1,2,\dots,y_node_number$ 。需要特别说明的是，四周的边界上也设置了网格节点来引入边界条件。因此，形成的计算区域网格划分示意图如图 2 所示，其中控制体积为虚线划分的区域，而网格节点用实线相连。

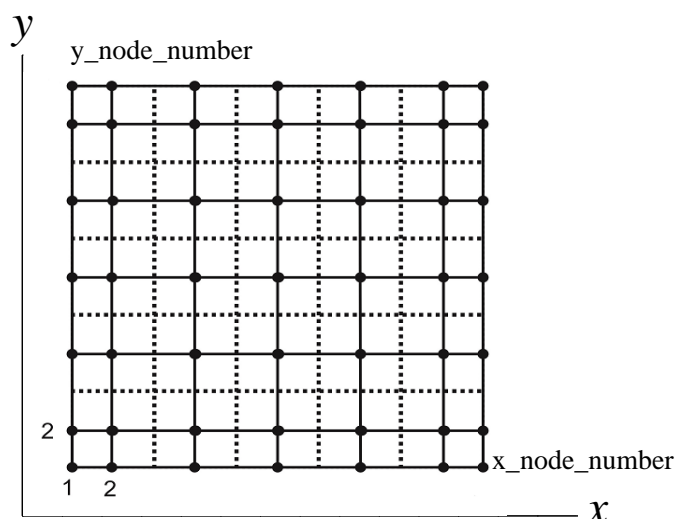


图 2. 计算区域网格划分示意图

1.3 差分方程建立及求解

由于非稳态导热方程只比稳态导热方程多一个非稳态项 $\rho c (\partial T / \partial t)$ ，两者差分格式的区别在于影响系数 a_p 和 b 的不同。因此以下主要介绍非稳态导热方程差分格式的构造，稳态导热方程的差分格式根据去掉非稳态项 $\rho c (\partial T / \partial t)$ 的影响而只需去改变影响系数 a_p 和 b 即可。

首先以直角坐标系为例，取出图 2 计算区域网格中某一局部网格点 P ，如图 3 所示。在时间间隔 $[t, t + \Delta t]$ 内，对图 3 所示控制容积 P （绿色区域）作积分。除了采用一维问题中的假设如型线假设外，对于该二维导热问题还需假定在控制容积界面上热流密度是均匀的。

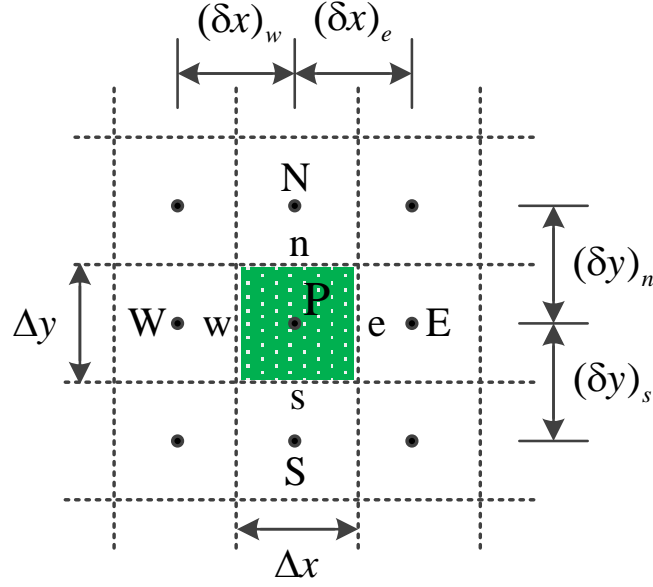


图 3. 直角坐标系下局部网格

对时间域采用全隐格式，于是有：

非稳态项的积分：

$$\int_t^{t+\Delta t} \int_s^n \int_w^e \rho c \frac{\partial T}{\partial t} dx dy dt = (\rho c)_P (T_P - T_P^0) \Delta x \Delta y, \quad (3)$$

扩散项的积分：

$$\begin{aligned} \int_t^{t+\Delta t} \int_s^n \int_w^e \frac{\partial}{\partial x} \left(k \frac{\partial T}{\partial x} \right) dx dy dt \\ = \int_t^{t+\Delta t} \int_s^n \left[\left(k \frac{\partial T}{\partial x} \right)_e - \left(k \frac{\partial T}{\partial x} \right)_w \right] dy dt \\ = \left[k_e \frac{T_E - T_P}{(\delta x)_e} - k_w \frac{T_P - T_W}{(\delta x)_w} \right] \Delta y \Delta t, \end{aligned} \quad (4)$$

$$\begin{aligned} \int_t^{t+\Delta t} \int_s^n \int_w^e \frac{\partial}{\partial y} \left(k \frac{\partial T}{\partial y} \right) dx dy dt = \int_t^{t+\Delta t} \int_w^e \left[\left(k \frac{\partial T}{\partial y} \right)_n - \left(k \frac{\partial T}{\partial y} \right)_s \right] dx dt \\ = \left[k_n \frac{T_N - T_P}{(\delta y)_n} - k_s \frac{T_P - T_S}{(\delta y)_s} \right] \Delta x \Delta t, \end{aligned} \quad (5)$$

源项负线性后的积分：

$$\int_t^{t+\Delta t} \int_s^n \int_w^e S dx dy dt = (S_C + S_P T_P) \Delta x \Delta y \Delta t, \quad (6)$$

其中， $S = S_C + S_P T_P$ ，且 $S_P \leq 0$ 。

整理式(3)-(6)，可得：

$$a_P T_P = a_E T_E + a_W T_W + a_N T_N + a_S T_S + b, \quad (7)$$

其中， $a_E = k_e \Delta y / (\delta x)_e$ ， $a_W = k_w \Delta y / (\delta x)_w$ ， $a_S = k_s \Delta x / (\delta y)_s$ ， $a_N = k_n \Delta x / (\delta y)_n$ ， $a_P^0 = (\rho c)_P \Delta x \Delta y / \Delta t$ ， $a_P = a_E + a_W + a_S + a_N + a_P^0 - S_P \Delta x \Delta y$ ， $b = S_C \Delta x \Delta y + a_P^0 T_P^0$ 。这里界面上的当量热导率按调和平均来计算。对于二维问题，如果取垂直于 xy 平面方向上厚度为 1，则 $\Delta x \Delta y$ 即为控制容积的体积。

对直角坐标系下稳态导热方程，按照上述积分方法同样有式(7)，只需去改变影响系数 a_P 和 b 即可。去掉非稳态项 $\rho c (\partial T / \partial t)$ 的影响，将影响系数 a_P 和 b 中 a_P^0 同时置为 0 而保持其他影响系数不变，仍按式(7)进行计算得到的便是直角坐标系下稳态导热方程的解。

下面考虑圆柱轴对称坐标系下非稳态导热方程：

$$\rho c \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(k \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(k r \frac{\partial T}{\partial r} \right) + S \quad (8)$$

仍取出图 2 计算区域网格中某一局部网格点 P，如图 4 所示。采用式(3)-(6) 对非稳态项、扩散项、源项进行积分，可得：

$$a_P T_P = a_E T_E + a_W T_W + a_S T_S + a_N T_N + b \quad (9)$$

其中， $a_E = k_e r_P \Delta r / (\delta x)_e$ ， $a_W = k_w r_P \Delta r / (\delta x)_w$ ， $a_S = k_s r_s \Delta x / (\delta r)_s$ ， $a_N = k_n r_n \Delta x / (\delta r)_n$ ， $a_P^0 = (\rho c)_P \Delta V / \Delta t$ ， $a_P = a_E + a_W + a_S + a_N + a_P^0 - S_P \Delta V$ ， $b = S_C \Delta V + a_P^0 T_P^0$ ， $\Delta V = 0.5(r_s + r_n) \Delta r \Delta x$ 。这里界面上的当量热导率按调和平均来计算。值得说明的是，在圆柱轴对称坐标系下， r_P 不一定等于 $0.5(r_s + r_n)$ ，除非 P 点在控制面 s 和 n 之间。

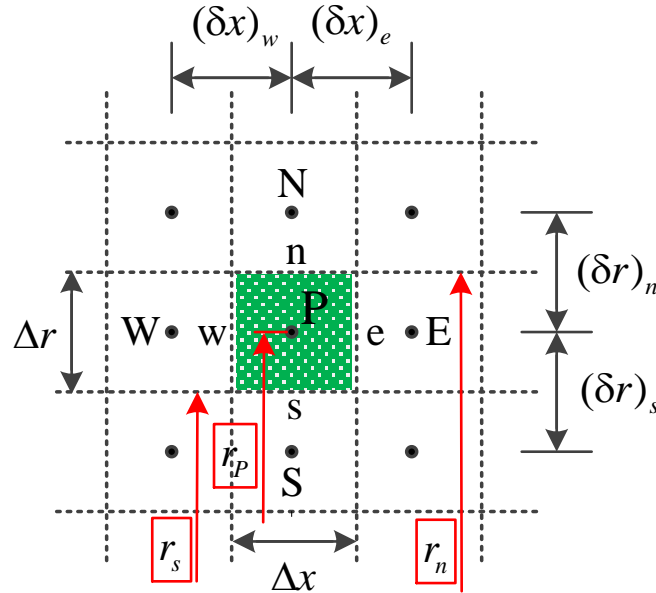


图 4. 圆柱轴对称坐标系下局部网格

对圆柱轴对称坐标系下稳态导热方程，按照上述积分方法同样有式(9)，只需去改变影响系数 a_P 和 b 即可。去掉非稳态项 $\rho c (\partial T / \partial t)$ 的影响，将影响系数 a_P 和 b 中 a_P^0 同时置为 0 而保持其他影响系数不变，仍按式(9)进行计算得到的便是圆柱轴对称坐标系下稳态导热方程的解。

在编程计算二维导热问题，考虑到圆柱轴对称坐标系可转换为直角坐标系，

采取通用的表达式来保证程序同时适用于上述两种坐标系是可行的。直角坐标系和圆柱轴对称坐标系的不同之处主要是：直角坐标系中没有半径的概念，而圆柱轴对称坐标系中需要引入半径的因素。两种坐标系的界面通量对应的面积不同，因此圆柱轴对称坐标系对应的积分需要考虑半径的因素。通过引入尺度系数便可保证两种坐标系下差分方程的统一，如表 1 所示。

表 1 直角及圆柱轴对称坐标系中系数的通用表达式

坐标系	直角	圆柱轴对称	通用表达式
东西坐标	x	x	X
南北坐标	y	r	Y
半径	1	r	R
东西节点间距	δx	δr	δX
南北节点间距	δy	δr	δY
东西导热面积	Δy	$r\Delta r$	$R(\Delta Y)$
南北导热面积	Δx	$r\Delta x$	$R(\Delta X)$
控制体体积	$\Delta x\Delta y$	$r\Delta x\Delta r$	$R(\Delta X)(\Delta Y)$
$a_E(a_W$ 仿此)	$k_e\Delta y / \delta x_e$	$k_e r\Delta r / \delta x_e$	$k_e R(\Delta Y) / \delta X_e$
$a_N(a_S$ 仿此)	$k_n\Delta x / \delta y_n$	$k_n r\Delta x / \delta r_n$	$k_n R(\Delta X) / \delta Y_n$
a_P^0		$(\rho c) R(\Delta X)(\Delta Y) / \Delta t$	
b		$S_C R(\Delta X)(\Delta Y) + a_P^0 T_P^0$	
a_P		$a_E + a_W + a_N + a_S + a_P^0 - S_P R(\Delta X)(\Delta Y)$	

1.4 边界条件处理

各个不同物理过程之间的区别是由初始条件及边界条件来规定的。初始条件是所研究现象在过程开始时刻的各个求解变量的空间分布，在非稳态问题中必须给定，而在稳态问题中不需要初始条件。边界条件是在求解区域的边界上所求解的变量或其一阶导数随时间或空间的变化规律。通常情况下，初始条件比较容易给出，而边界条件需要特别的处理。常用的方法有补充边界节点代数方程的方法和附加源项法^[1]。

采用补充边界节点代数方程的方法时，如果区域离散采用内节点法，边界节点的构造方法如下：

第一类边界条件： $T_b = \text{constant}$ 。

第二类边界条件: $T_b = T_{b-1} + q_b \delta_x / k$ 。

第三类边界条件: $T_b = (T_{b-1} + h \delta_x T_f / k) / (1 + h \delta_x / k)$ 。

其中, δ_x 为边界节点 (b) 与第一个内节点 ($b-1$) 之间的距离。

采用附加源项法时, 第一类边界条件可通过直接设定边界节点给出, 而对第二类或第三类边界条件则把该两种边界条件规定的进入或导出计算区域的热量作为与边界相邻的控制容积的当量源项。从整体观点而言, 无论这一份热量是从边界上导入的还是从与边界相邻的控制容积发出的, 热平衡都不会受到破坏。而作了这种处理后, 如果与边界相邻的控制容积中的节点是内节点, 则对此控制容积建立起来的离散方程可以不包含边界上的未知温度。因此, 附加源项法仅适用于内节点法, 而不适用于外节点法。

以下主要介绍采用附加源项法时第二类或第三类边界条件的处理。如图 5 所示, 与边界相邻接的控制容积中的节点为 P 。

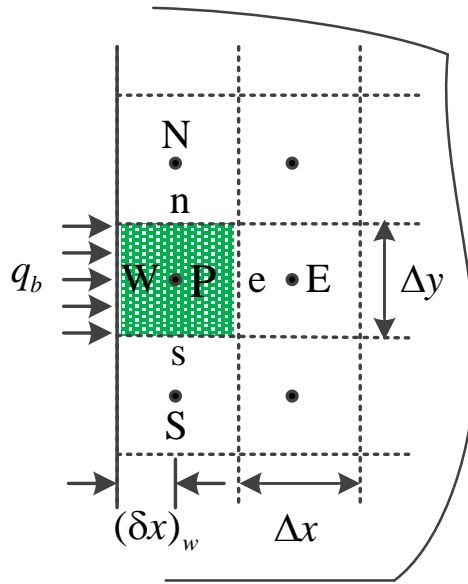


图 5. 附加源项法处理图

对此控制容积可写出:

$$a_P T_P = a_E T_E + a_W T_W + a_S T_S + a_N T_N + b. \quad (10)$$

其中, 对于非稳态问题, 有关 T_P^0 的项已包含于 b 中。

由于在第二类或第三类边界条件时边界温度未知, 为了在式(10)中不出现未知的边界温度 T_W , 需要利用已知的边界条件消去 T_W 。为此, 可对式(10)作如下变换:

$$(a_P - a_W) T_P = a_E T_E + a_W (T_W - T_P) + a_S T_S + a_N T_N + b. \quad (11)$$

注意到:

$$a_W (T_W - T_P) = \frac{k_w \Delta y}{(\delta x)_w} (T_W - T_P) = q_b \Delta y, \quad (12)$$

其中, q_b 为进入该控制容积的热流密度, 以进入为正。

进一步, 将式(12)代入式(11)可得:

$$(a_p - a_w)T_p = a_E T_E + a_S T_S + a_N T_N + q_b \Delta y + b. \quad (13)$$

对于第二类边界条件, q_b 已知, 因此 $q_b \Delta y + b$ 可以组成一个新的源项:

$$b' = q_b \Delta y + b = (S_C + \frac{q_b \Delta y}{\Delta x \Delta y}) \Delta x \Delta y = (S_C + S_{C,ad}) \Delta x \Delta y. \quad (14)$$

同时, $a'_p = a_p - a_w = a_E + 0 + a_S + a_N + a_p^0 - S_p \Delta x \Delta y$ 。这就是说, 对于第二类边界条件, 如果把 $q_b \Delta y / \Delta x \Delta y$ 作为与边界相邻的控制容积的附加常数源项, 记为 $S_{C,ad}$, 同时令 $a_w = 0$, 则所得的离散方程即符合能量守恒方程, 又可把未知的边界温度排除在外。

当边界条件为第三类边界条件时, q_b 可表示为:

$$q_b = h(T_f - T_w). \quad (15)$$

由傅里叶导热定律可得:

$$q_b = \frac{k_b}{(\delta x)_w} (T_w - T_p). \quad (16)$$

于是有:

$$q_b = \frac{(T_f - T_w)}{1/h} = \frac{k_b}{(\delta x)_w} (T_w - T_p) = \frac{(T_f - T_p)}{1/h + (\delta x)_w / k_b}. \quad (17)$$

将式(17)代入式(13)可得:

$$\begin{aligned} \left(a'_p + \frac{A}{1/h + (\delta x)_w / k_b} \right) T_p &= a_E T_E + a_S T_S + a_N T_N \\ &+ \left\{ S_C + \frac{A T_f}{\Delta V (1/h + (\delta x)_w / k_b)} \right\} \Delta V. \end{aligned} \quad (18)$$

其中, A 是所研究控制容积在边界上的传热面积, ΔV 为控制容积的体积。上式表明, 对于第三类边界条件, 如果在边界控制容积中加入以下附加源项:

$$S_{C,ad} = \frac{A}{\Delta V} \frac{T_f}{1/h + (\delta x)_w / k_b}, \quad (19)$$

$$S_{P,ad} = -\frac{A}{\Delta V} \frac{1}{1/h + (\delta x)_w / k_b}. \quad (20)$$

同时, 令 $a_w = 0$ 就可实现使未知的边界温度不进入离散方程。

附加源项法的实施步骤如下:

- 1) 计算与边界相邻的内部节点控制容积的附加源项 $S_{C,ad}$ 及 $S_{P,ad}$, 并将它们分别加入到该控制容积原有的 S_C , S_P 中去;
- 2) 令该边界上节点的导热系数 $k_b = 0$, 以使 $a'_w = 0$ 。
- 3) 按常规方法建立起内节点的离散方程, 并在内节点的范围求解代数方程组。
- 4) 获得收敛解后按傅里叶导热定律或牛顿冷却定律解出未知的边界温度。

大量的数值实践表明，附加源项法比补充节点方程的方法更为简洁、有效，主要表现在以下三方面：1) 有利于用统一模式来处理三种边界条件；2) 可以缩小计算区域；3) 采用补充节点方程方法时，如果把求解代数方程的区域也限于内节点，然后通过边界节点方程不断更新边界节点上的值并以此为下一次迭代计算的边界条件，则附加源项法的计算时间可比这种边界值更新法大约节省一个数量级。考虑本文网格离散时采用内节点法及上述附加源项法的有利之处，本文采用附加源项法来处理边界条件。

1.5 求解方法

在介绍差分方程的建立及边界条件之后，需要说明求解离散方程的方法。对于二维导热问题获得的离散方程的求解，常用方法有 PDMA 算法和交替方向隐式迭代法。考虑到交替方向隐式迭代法更常用于离散方程的求解，本文也采用隐式迭代法。具体如下：

设交替迭代为先自西向东，再自南向北，则有：

$$T_P^n = (a_E T_E^{n-1} + a_W T_W^n + a_S T_S^n + a_N T_N^{n-1} + b^{n-1})/a_P. \quad (21)$$

其中， n 表示第 n 时层， $n-1$ 表示第 $n-1$ 时层。显然，如式(21)所示的迭代法属于 Gauss-Seidel 迭代法。经过一次迭代后，计算整个区域内温度与迭代前温度的相对误差。当相对误差满足迭代误差要求时迭代收敛，进而进行下一时刻温度场的迭代求解。在稳态导热问题时，一次迭代收敛得到的便是稳态解，没有时刻的概念。

1.6 求解流程

本文研究的二维稳态及非稳态导热问题求解程序基于 Intel Fortran 2011，程序流程图见图 6，具体求解过程可见 Heat_Conduction_2D 文件夹。要实现二维导热问题的求解，首先需要定义坐标类型、结构尺寸、物性参数、节点数、网格参数、迭代相关参数等变量，该部分内容在子程序 variable.f90 中完成。在求解之前，还需对这些变量进行初始化，该部分内容在子程序 initial.f90 中完成。根据内节点法，确定网格参数包括节点坐标、控制面坐标、相邻节点之间距离、相邻控制面之间距离、相邻节点与控制面之间的距离及直角坐标系与圆柱轴对称坐标系之间的转换方法，该部分内容在子程序 mesh.f90 中完成。直角坐标系与圆柱轴对称坐标系之间转换方法的确定能保证程序同时适用于两种坐标系。边界条件的引入通过子程序 boundary.f90 来完成。影响因子 a_E 、 a_W 、 a_S 、 a_N 和 b 的求解通过子程序 influence_coefficient.f90 完成。值得指出的是，根据 1.3 节的分析，稳态导热与非稳态导热在程序求解上的根本区别就在于 a_P^0 的取值，只需通过令 a_P^0 为 0 或 $(\rho c)_P \Delta x \Delta y / \Delta t$ 便可程序同时适用于稳态导热与非稳态导热。稳态导热时， $a_P^0 = 0$ ；而非稳态导热时， $a_P^0 = (\rho c)_P \Delta x \Delta y / \Delta t$ 。之后在主程序 main.f90 中进行交替方向迭代求解：先从西向东扫描，再从南向北扫描。每进行完一次交替方向迭代求解后，调用子程序 check_convergence.f90 检查迭代前后温度场的最大相对误差是否小于要求值，如果满足则迭代收敛，否则重新进行迭代直至收敛。对于稳态导热问题，如果收敛则计算终止，得到的便是稳态解。如果不收敛，则将新计算出的温度赋给之前的温度，重新引入边界条件、计算影响因子，然后进

行 G-S 迭代直至收敛。对于非稳态导热问题，如果收敛则将该时刻温度场作为下一时刻温度场迭代初值进行下一时刻迭代计算，如此推进直至到获得预定时刻收敛的温度场。如果不收敛，则将新计算出的温度赋给之前的温度，再直接进入交替方向 G-S 迭代直至收敛。最后调用子程序 output.f90 输出计算结果。

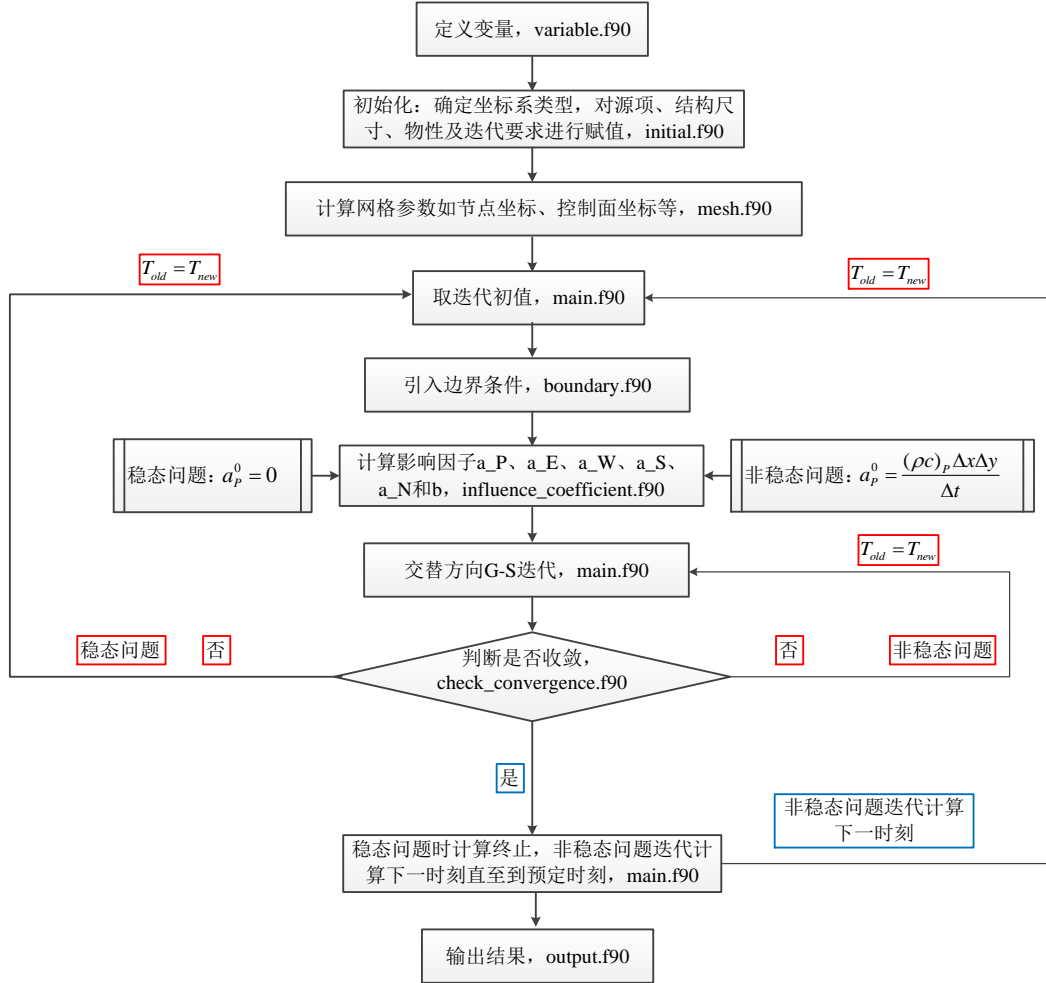


图 6. 程序流程图

2 数值方法验证

2.1 二维稳态无内热源导热

考虑二维平板稳态无内热源导热问题，其中平板为正方形， x 、 y 方向长度均为 1，且物性常数均为定值。边界条件为： $x=0$ 边为等热流边界条件，其中热流为 0； $x=1$ 边为等壁温边界条件，其中壁温为 300K； $y=0$ 边为等壁温边界条件，其中壁温为 300K； $y=1$ 边为等壁温边界条件，其中壁温为 600K。稳态问题中不需给出初始条件。因此该问题的数学表述为：

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = 0, \quad (22)$$

$$\frac{\partial T}{\partial y}(0, y) = 0, \quad T(1, y) = 300; \quad (23)$$

$$T(x, 0) = 300, \quad T(x, 1) = 600。 \quad (24)$$

对于该问题可采用分离变量法求解，精确解为：

$$T(x, y) = 300 \times \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{4 \times (-1)^n \sinh\left(\frac{(2n+1)\pi}{2} y\right)}{(2n+1)\pi \sinh\left(\frac{(2n+1)\pi}{2}\right)} \cos\left(\frac{(2n+1)\pi}{2} x\right) + 1 \right)。 \quad (25)$$

通过本文建立的数值方法计算上述二维稳态无内热源导热问题的温度场与 Matlab 直接计算式(25)所得的精确温度场的对比如图 7 所示。其中，图 7(a)和(b)的温度标尺相同。通过两者温度场云图的对比，不难发现本文计算结果与精确解的计算结果吻合得很好，因此本文建立的数值方法能被用来计算二维稳态导热问题。 $y=1$ 边温度最高，而 $y=0$ 边和 $x=1$ 边温度最低，符合式(23)及式(24)中边界条件。不过，值得指出的是在该边界条件下导热问题在点 $(x, y) = (1, 1)$ 处存在奇异点，不可能既是 $T(1, y) = 300$ 要求的 300K 又是 $T(x, 1) = 600$ 要求的 600K。这是该边界条件式(23)及式(24)的固有缺陷。

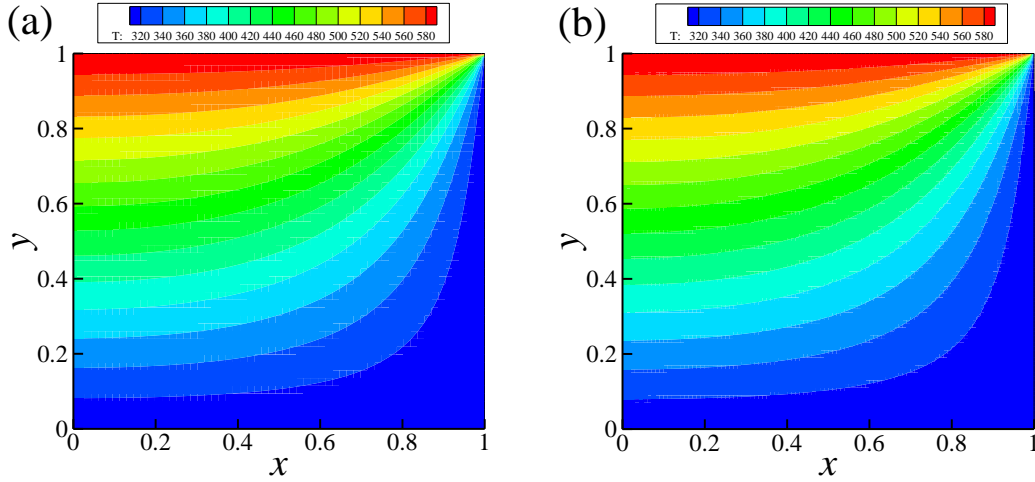


图 7. 二维稳态无内热源导热时温度场对比：(a)本文计算结果和(b)精确解

2.2 二维非稳态无内热源导热

考虑二维平板非稳态无内热源导热问题，其中平板为正方形， x 、 y 方向长度均为 π ，且热导率 k ，密度 ρ 和比热容 c 均为定值 1.0。边界条件为： $x=0$ 边、 $x=1$ 边、 $y=0$ 边和 $y=1$ 边均为等壁温条件，其中壁温均为 0K。初始条件为 $T_0(x, y) = 600\sin(x)\sin(y)$ ，单位为 K。因此该问题的数学表述为：

$$\rho c \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(k \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(k \frac{\partial T}{\partial y} \right), \quad (26)$$

$$T(0, y) = 0, \quad T(1, y) = 0; \quad (27)$$

$$T(x, 0) = 0, \quad T(x, 1) = 0; \quad (28)$$

$$T_0(x, y) = 600\sin(x)\sin(y)。 \quad (29)$$

对于该问题的精确解^[2]为：

$$T(x, y) = 600\sin(x)\sin(y)e^{-2t}。 \quad (30)$$

通过本文建立的数值方法计算上述二维非稳态无内热源导热问题的温度场与 Matlab 直接计算式(30)所得的精确温度场的对比如图 8 和图 9 所示。图 8 为 0.5 s 时的温度场，图 9 为 1.0 s 时的温度场，其中图 8(a)和(b)的温度标尺相同，图 9(a)和(b) 的温度标尺也相同。通过不同时刻温度场云图的对比，不难发现本文计算结果与精确解的计算结果吻合得很好，因此本文建立的数值方法能被用来计算二维非稳态无内热源导热问题。

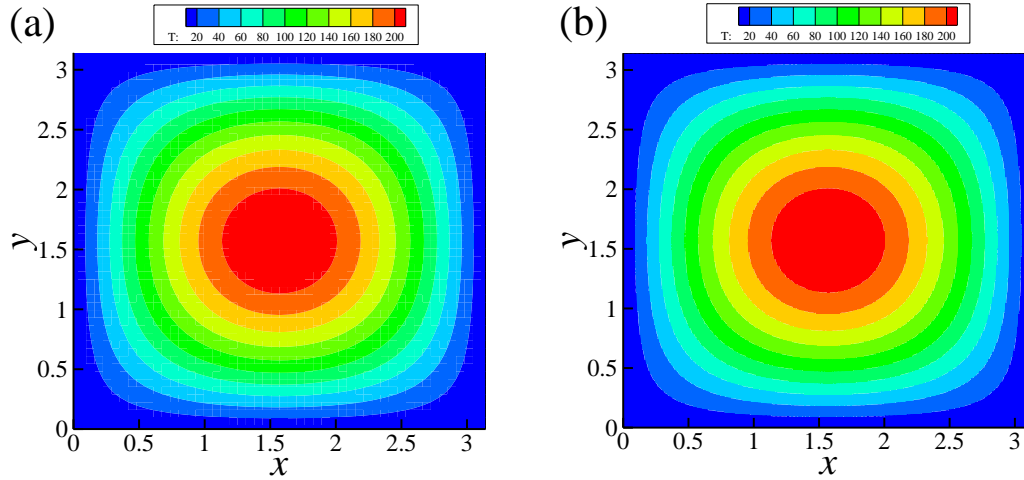


图 8. 二维非稳态无内热源导热时 $t = 0.5$ s 的温度场对比：(a)本文计算结果和(b)精确解

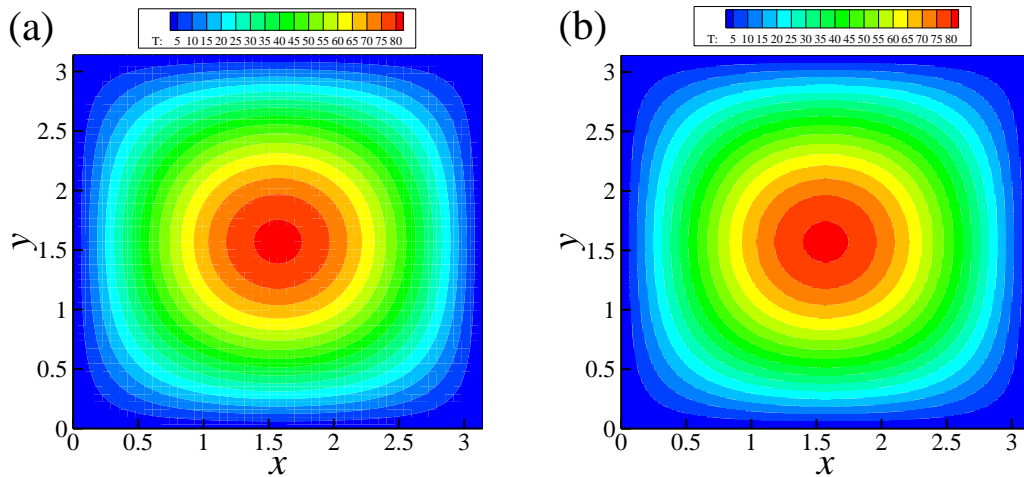


图 9. 二维非稳态无内热源导热时 $t = 1.0$ s 的温度场对比：(a)本文计算结果和(b)精确解

2.3 二维非稳态含内热源简单边界导热

考虑二维平板稳态无内热源导热问题，其中平板为正方形， x 、 y 方向长度均为 1，且导热率 k ，密度 ρ 和比热容 c 均为定值 1.0。内热源的性质为 $S_c = -3 *$

$\exp(x/2 + y/2 - t)/2, S_p = 0$ 。边界条件为: $x=0$ 边为等壁温边界条件, 其中壁温为 $T(0, y) = \exp(y/2 - t)$; $x=1$ 边为等壁温边界条件, 其中壁温为 $T(1, y) = \exp(1/2 + y/2 - t)$; $y=0$ 边为等壁温边界条件, 其中壁温为 $T(x, 0) = \exp(x/2 - t)$; $y=1$ 边也为等壁温边界条件, 其中壁温均为 $T(x, 1) = \exp(1/2 + x/2 - t)$ 。初始条件为 $T_0(x, y) = \exp(x/2 + y/2)$, 单位为 K。因此该问题的数学表述为:

$$\rho c \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(k \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(k \frac{\partial T}{\partial y} \right) - \frac{3}{2} \exp \left(\frac{x+y}{2} - t \right), \quad (31)$$

$$T(0, y) = \exp \left(\frac{y}{2} - t \right), \quad T(1, y) = \exp \left(\frac{1+y}{2} - t \right), \quad (32)$$

$$T(x, 0) = \exp \left(\frac{x}{2} - t \right), \quad T(x, 1) = \exp \left(\frac{x+y}{2} - t \right), \quad (33)$$

$$T_0(x, y) = \exp \left(\frac{x+y}{2} \right). \quad (34)$$

对于该问题的精确解^[3]为:

$$T(x, y) = \exp \left(\frac{x+y}{2} - t \right). \quad (35)$$

通过本文建立的数值方法计算上述二维非稳态含内热源简单边界导热问题的温度场与 Matlab 直接计算式(35)所得的精确温度场的对比如图 10 和图 11 所示。这里的简单边界指的是等壁温边界条件。图 10 为 0.1 s 时的温度场, 图 11 为 1.0 s 时的温度场, 其中图 10(a)和(b)的温度标尺相同, 图 11(a)和(b) 的温度标尺也相同。通过不同时刻温度场云图的对比, 不难发现本文计算结果与精确解的计算结果吻合得很好, 因此本文建立的数值方法能被用来计算二维非稳态含内热源简单边界导热问题。

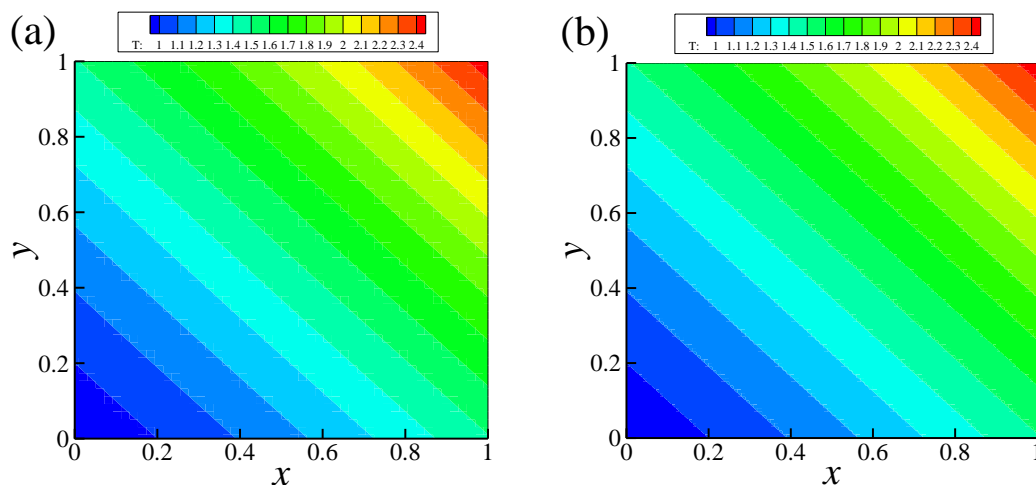


图 10. 二维非稳态含内热源简单边界导热时 $t = 0.1$ s 的温度场对比:
(a)本文计算结果和(b)精确解

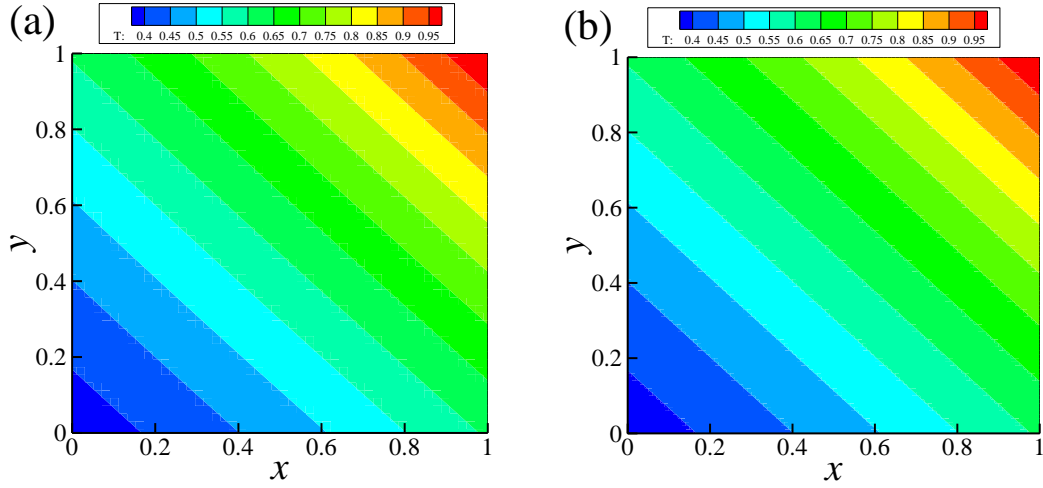


图 11. 二维非稳态含内热源简单边界导热时 $t = 1.0$ s 的温度场对比：
(a) 本文计算结果和 (b) 精确解

2.4 二维非稳态含内热源复杂边界导热

以上 2.2、2.3 节验证了本文建立的数值计算方法能很好地计算二维非稳态无内热源导热和二维非稳态含内热源导热问题, 但上述验证所采用的边界条件都为第一类边界条件, 即等壁温边界条件。而实际工程中经常遇到第二类或第三类边界条件, 且这两种边界条件下需要采用附加源项法以及对边界条件进行特殊处理, 因此还需要验证本文建立的数值方法在计算复杂边界条件下二维非稳态含内热源导热问题时的有效性。

仍考虑二维平板稳态无内热源导热问题, 其中平板为正方形, x 、 y 方向长度均为 1, 且热导率 k , 密度 ρ 和比热容 c 均为定值 1.0。内热源的性质为 $S_c = 100, S_p = 0$ 。边界条件为: $x=0$ 边为等壁温边界条件, 其中壁温为 500K; $x=1$ 边为对流换热边界条件, 其中对流换热系数为 $150\text{W}/(\text{K}\cdot\text{m}^2)$, 自由流体温度为 400K; $y=0$ 边为等壁温边界条件, 其中壁温为 300K; $y=1$ 边为等热流边界条件, 其中热流恒为 $2000\text{W}/\text{m}^2$ 。初始条件为 $T_0(x, y) = 300$, 单位为 K。因此该问题的数学表述为:

$$\rho c \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(k \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(k \frac{\partial T}{\partial y} \right) + 100, \quad (36)$$

$$T(0, y) = 500, \quad -\frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{x=1} = h(T - T_f); \quad (37)$$

$$T(x, 0) = 300, \quad -\frac{\partial T}{\partial y} \Big|_{y=1} = 2000; \quad (38)$$

$$T_0(x, y) = 300. \quad (39)$$

对于该复杂边界下二维非稳态导热问题没有精确解, 也缺乏相关实验数据, 因此本文采用 Fluent 软件建立二维平板模型, 画网格, 设定相同的物性、内热源、边界条件及求解方法求解该非稳态导热的温度场。本文建立的数值方法计算上述二维非稳态含内热源简单边界导热问题的温度场与通过 Fluent 所得的精确温度

场的对比如图 12 和图 13 所示。这里的简单边界指的是等壁温边界条件。图 12 为 0.1 s 时的温度场，图 13 为 1.0 s 时的温度场，其中图 12(a)和(b)的温度标尺相同，图 13(a)和(b) 的温度标尺也相同。通过不同时刻温度场云图的对比，不难发现本文计算结果与精确解的计算结果吻合得很好，因此本文建立的数值方法能被用来计算二维非稳态含内热源复杂边界导热问题。

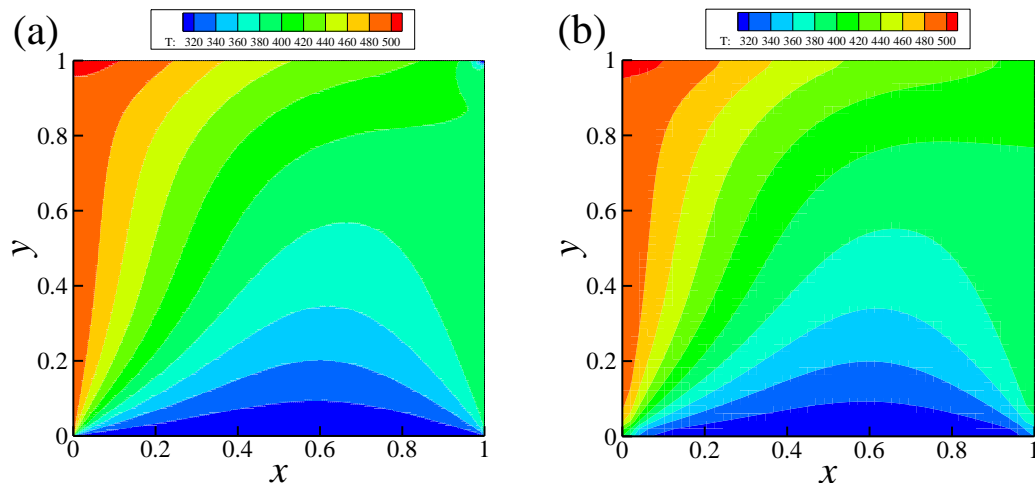


图 12. 二维非稳态含内热源复杂边界导热时 $t = 0.1$ s 的温度场对比：
(a)本文计算结果和(b)Fluent 解

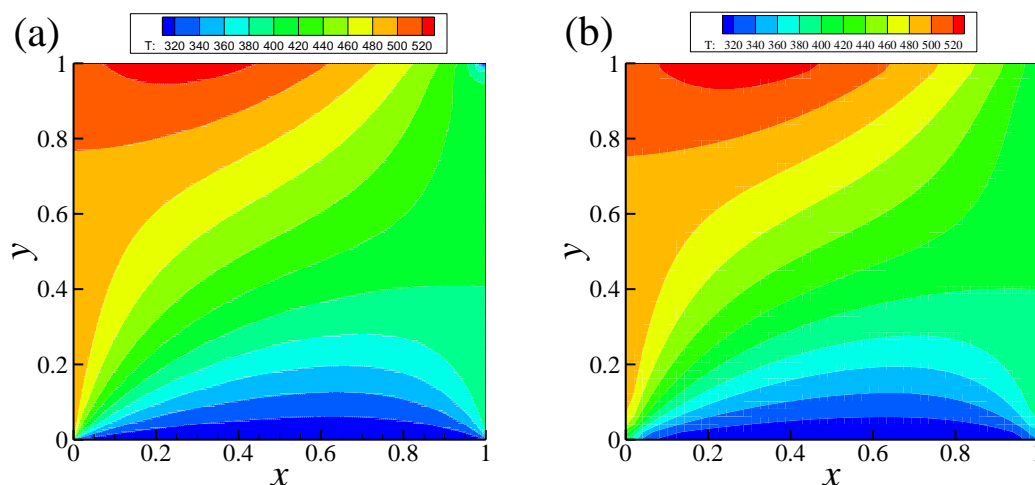


图 13. 二维非稳态含内热源复杂边界导热时 $t = 1.0$ s 的温度场对比：
(a) 本文计算结果和(b)Fluent 解

综上所述，本文建立的数值方法计算二维稳态及非稳态导热时得到的温度场与精确解下的温度场或 Fluent 软件模拟得到的温度场吻合得很好，因此该数值方法对于计算二维导热问题的有效性可以保证。

3 物理模型

在喷气涡轮发动机中，任何透平叶片的断落都会引起振动，甚至造成损毁，因此叶片的可靠性对于发动机而言至关重要。根据参考文献^[4]，透平叶片具有肋片形状的结构，其根部内侧有冷却液流过维持等壁温，而其他三面工作在高温气体中。由于透平叶片材料对于高温的工作环境都有一定的耐受极限，合理地降低

叶片整体的温度可以大幅提高叶片的寿命。同时，肋片结构大量存在于工程结构中，如电子设备、航天器等，研究肋片内的导热规律具有非常重要的价值。

本文主要研究透平叶片热物性对透平叶片稳态导热及非稳态导热的影响。由于透平叶片高度方向的尺寸远大于截面中长宽方向的尺寸，因此可以将叶片内的导热问题视为二维导热问题，如图 14 所示。设叶片截面中长为 0.2 m，宽为 0.1 m，初始温度为 300 K。边界 1 为等壁温边界条件，可设为 400 K。边界 2、3、4 为对流换热边界条件，流过这些表面的流体温度设为 900 K，对流换热系数为 460 W/(m²·K)。需要指出的是，本文假定材料的热物性不随温度改变。

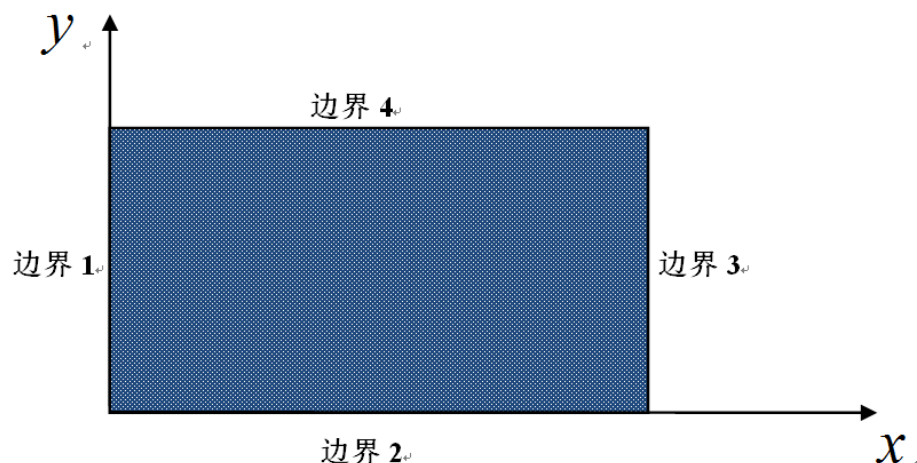


图 14. 透平叶片截面示意图

在以上物理模型基础上，本文主要研究三个问题：1) 研究不同材料下，如纯铝、纯铜、纯铁和钨，稳态导热时的温度场；2) 假设上述材料达到稳态导热后，叶片根部内侧突然没有冷却液流过，边界 1 假定为绝热边界条件，研究该情况下非稳态导热时的温度场；3) 研究不同热导率、质量密度及比热容下透平叶片非稳态导热时的温度场。

4 结果与讨论

4.1 不同材料稳态导热

不同材料如纯铝、纯铜、纯铁和钨的热物性如表 1 所示。通过已得到验证的数值计算方法获得的该四种材料稳态导热时温度场如图 15 所示。对比不同材料稳态导热的温度场可知，最低温度都出现在 $x=0$ 面，即叶片根部；而最高温度都出现在 $x=0.2$ 面，即叶片端部。这是由于叶片根部内侧有冷却液流过， $x=0$ 面温度固定为 400 K，而其他面有高温流体（900 K）通过，从而造成叶片根部温度最低，而端部温度最高。

同时，由图 15 可知，相同位置下纯铁叶片内的温度最高，且温度梯度最大；钨叶片次之；之后依次为纯铝叶片和纯铜叶片。这是由于纯铁的热导率 < 钨的热导率 < 纯铝的热导率 < 纯铜的热导率。稳态导热时，材料的质量密度、比热容对温度分布没有影响。而当叶片热导率更大时，热量更容易从叶片端部向叶片根部传递，相同位置叶片内温度最低。因此，选择热导率大的材料可明显降低稳态导热时叶片温度及温度梯度，改变质量密度和比热容对稳态导热叶片温度场没有影响，且增大质量密度会增加叶片重量，不利于降低发动机的重量。

表 1. 纯铝、纯铜、纯铁和钨的热物性

材料名称	质量密度, kg/m ³	比热容, J/(kg·K)	热导率, W/(m·K)
纯铝	2710	902	220
纯铜	8930	386	370
纯铁	7870	455	45
钨	19350	134	130

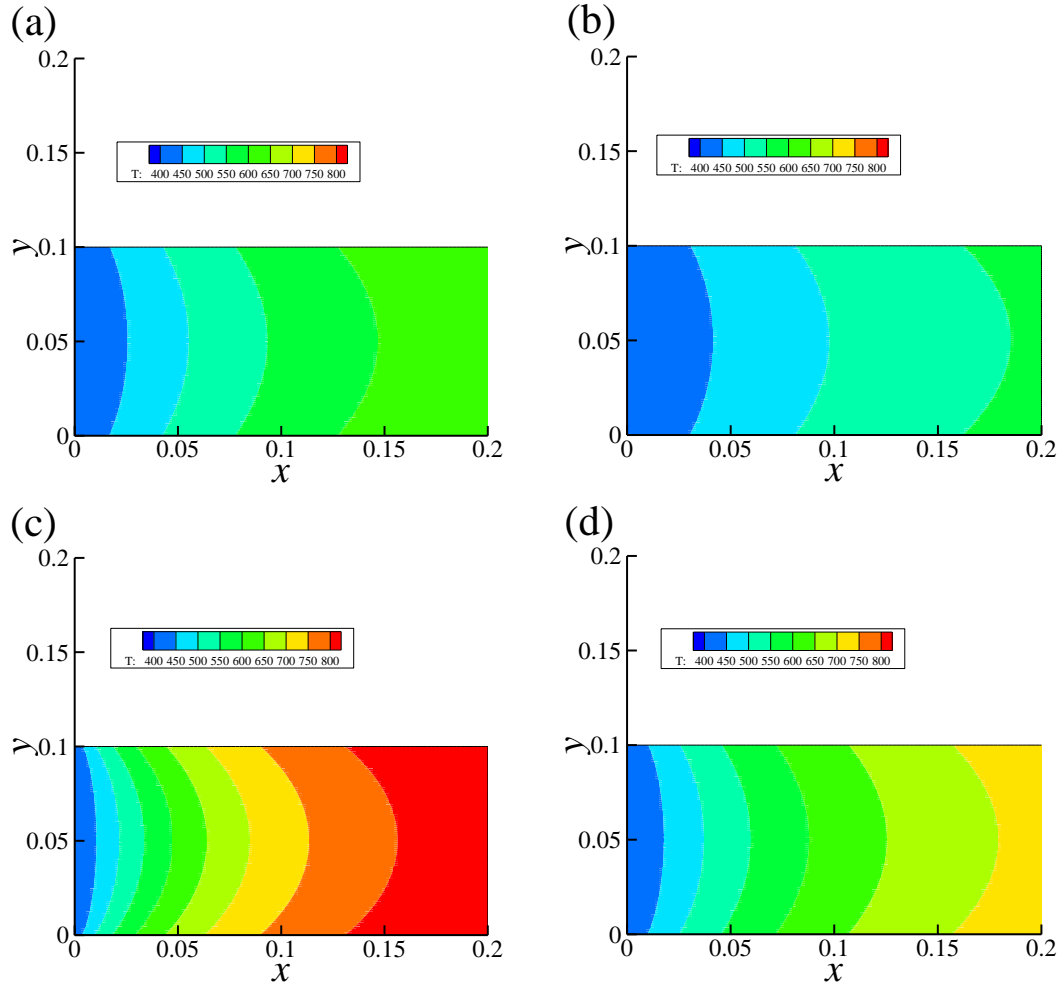


图 15. 不同材料叶片稳态导热温度场: (a)纯铝、(b)纯铜、(c)纯铁和(d)钨

4.2 不同材料非稳态导热

假设上述材料达到稳态导热后，叶片根部内侧突然（设为 $t=0$ s）没有冷却液流过，边界 1 假定为绝热边界条件，其余边界仍保持对流换热条件，流体温度和对流换热系数不变。 $t=20$ s 时，不同材料内非稳态导热温度场如图 16 所示。对比图 15 和 16 可知，在边界 1 保持绝热时，由于流过叶片的热流体的加热作用， $t=20$ s 时材料内相同位置的温度都比 $t=0$ s 时相应的温度。不过，仍然是相同位置纯铁叶片内的温度最高，且温度梯度最大；钨叶片次之；之后依次为纯铝叶片和纯铜叶片。这仍然是由于热导率的作用，热导率小的材料，更难将从边界对流换热得到的热量传递走。最低温度仍然在叶片根部，而最高温度仍在叶片端部。通过对假定叶片根部内侧突然没有冷却液而保持绝热条件的非稳态导热温度场分析可知，在没有冷却液时，材料内温度有明显升高，对材料的耐受能力的要求

增大。且热导率小的材料内最高温度和温度梯度均更高，对材料的耐受要求也更高。

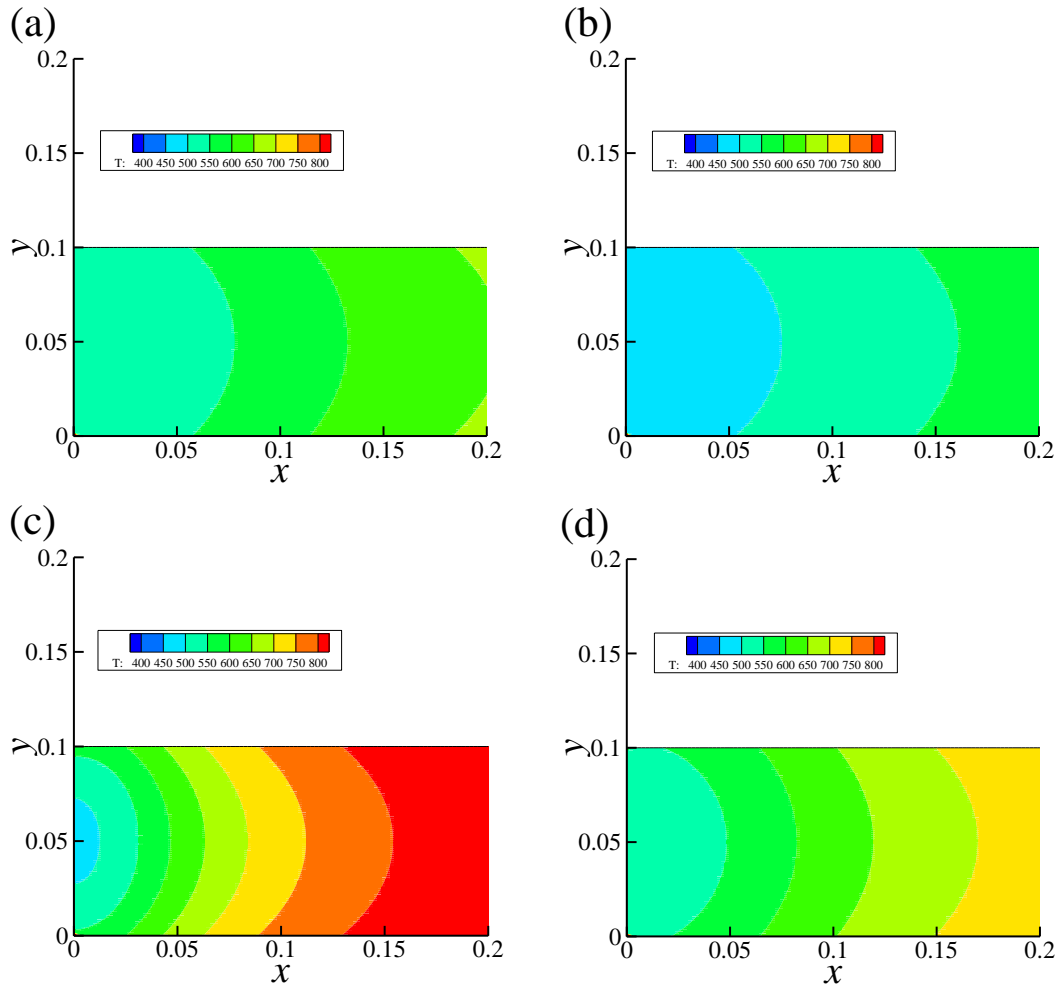


图 16. 不同材料叶片非稳态导热温度场：(a)纯铝、(b)纯铜、(c)纯铁和(d)钨

4.3 材料性质对非稳态导热的影响

通过以上对非稳态导热的分析，并没有获得材料性质，如热导率、质量密度、比热容，对非稳态导热的详细影响。接下来考虑叶片从初始状态，即整个叶片处于 300 K，之后边界 1 为等壁温边界条件，可设为 400 K。边界 2、3、4 为对流换热边界条件，流过这些表面的流体温度设为 900 K，对流换热系数为 $460 \text{ W}/(\text{m}^2 \cdot \text{K})$ 。基础物性状态为： $k=50$ ， $\rho=100$ ， $c=100$ 。假定这些性质不随温度改变，且当改变其中之一时，其余两个物性不发生改变。进而可得到不同物性条件下的温度场，本文以 $t=0.5 \text{ s}$ 时的温度场为例进行分析。

热导率对叶片非稳态导热的影响如图 17 所示。相同位置下热导率较小的材料内温度更高，且温度梯度也更大。而当叶片热导率更大时，热量更容易从叶片端部向叶片根部传递，相同位置叶片内温度最低。质量密度对叶片非稳态导热的影响如图 18 所示。比热容对叶片非稳态导热的影响如图 17 所示。对比可以发现，质量密度和比热容对叶片非稳态导热的影响相同，都是在质量密度或比热容更小时材料内的温升更加明显。因此，在非稳态导热时，热导率的增大有利于提高材料的耐受能力。而质量密度和比热容对其影响相同，两者的增大能提高材料的耐

受能力，但质量密度的增大会增加叶片自身的重量，不利于发动机减重。

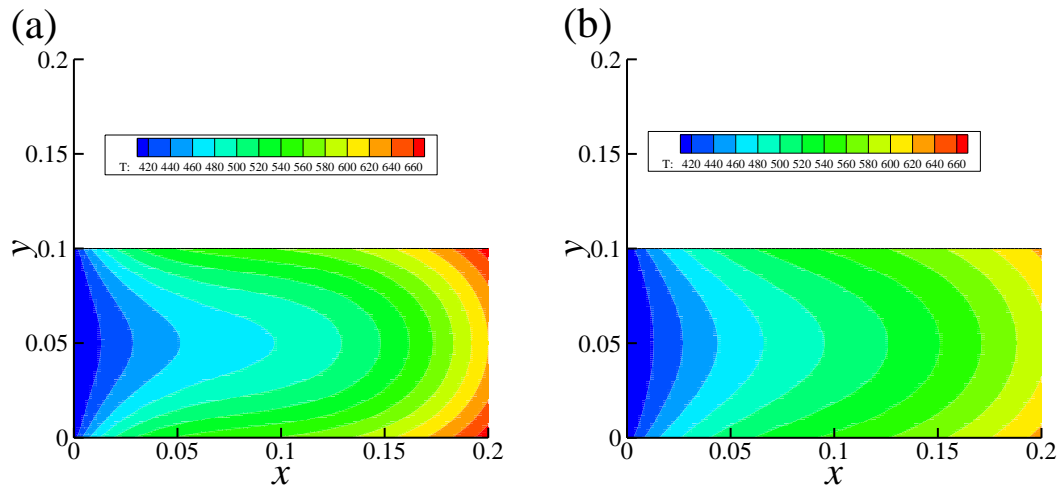


图 17. 热导率对叶片非稳态导热的影响：(a) $k=50$ 和(b) $k=100$

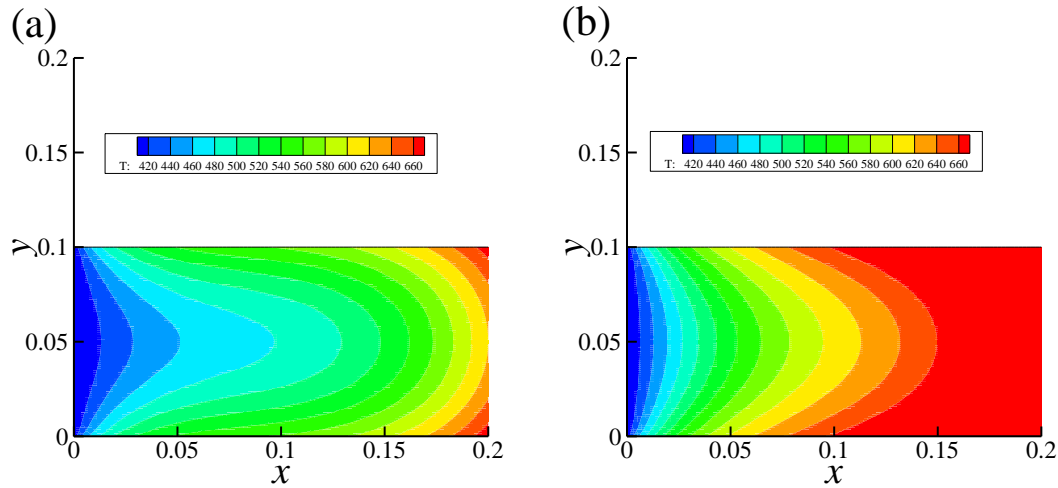


图 18. 质量密度对叶片非稳态导热的影响：(a) $\rho=100$ 和(b) $\rho=50$

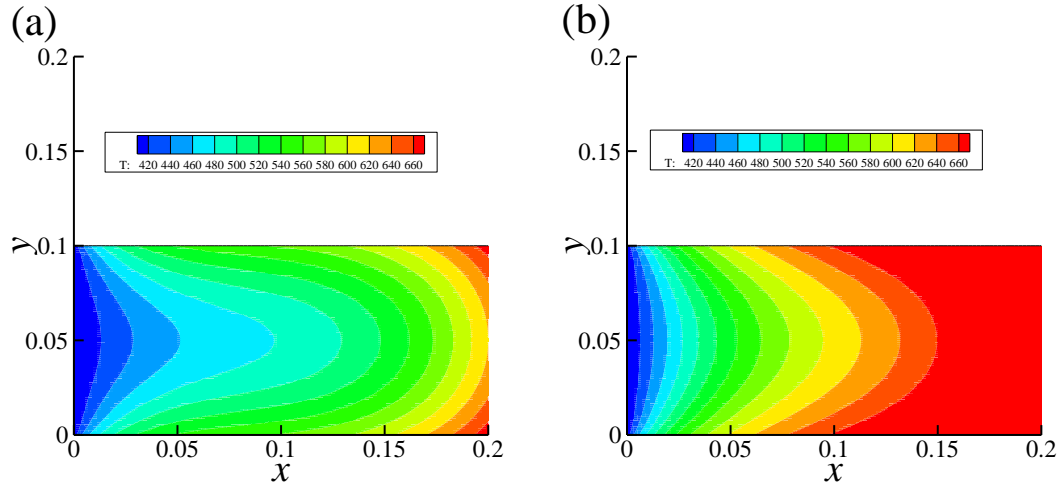


图 19. 比热容对叶片非稳态导热的影响：(a) $c=100$ 和(b) $c=50$

5 结论

本文建立了基于有限容积的适用于二维稳态导热及非稳态导热的直角坐标系和圆柱轴对称坐标系的数值方法,其计算结果与精确解及 **Fluent** 模拟解吻合良好,其有效性得到了验证。

通过对不同透平叶片材料内稳态导热的研究发现,选择热导率大的材料可明显降低稳态导热时叶片温度及温度梯度,改变质量密度和比热容对稳态导热叶片温度场没有影响,且增大质量密度会增加叶片重量,不利于降低发动机的重量。

通过对上述透平叶片达到稳态导热后突然没有冷却液而保持绝热的非稳态导热研究发现,在没有冷却液时,材料内温度有明显升高,对材料的耐受能力的要求增大。且热导率小的材料内温度和温度梯度均更高,对材料的耐受要求也更高。

通过对材料性质对非稳态导热的影响研究发现,在非稳态导热时,热导率的增大有利于提高材料的耐受能力。而质量密度和比热容对其影响相同,两者的增大能提高材料的耐受能力,但质量密度的增大会增加叶片自身的重量,不利于发动机减重。

参考文献

- [1] 陶文铨. 数值传热学. 西安: 西安交通大学出版社, 2001.
- [2] Chen C S, Golberg M A, Ganesh M. Multilevel compact radial functions based computational schemes for some elliptic problems. *Computers and Mathematics with application*, 2002, 43:359-378.
- [3] 张荣培, 王荣荣. 二维传导方程的局部间断 Galerkin 有限元方法. 辽宁石油化工大学学报, 2012, 32(2):88-94.
- [4] 张靖周. 高等传热学. 北京: 科学出版社, 2009.