

## 大作业 2——基于即定流场的混合问题的数值模拟

组员：袁振，何新婷，刘海旭，李仲春

题目：通过某种方式获得一个流场，然后基于该流场设计一个混合问题，并完成下边的研究。

(1)写出反映混合过程的状态变量所满足的基本方程，边界条件，差分方程以及差分方程的求解流程。其对流扩散项的差分格式应分别可以选取中心差分格式、迎风格式、混合格式、指数格式和乘方格式。

(2)改变反映混合过程的扩散系数，以使网格贝克勒数增加或减小，观察数值计算结果是否合理以及掺混状况。

(3)对某种格式如出现不合理结果或得不到收敛解，改变网格尺寸，观察结果或收敛情况的变化。

(4)对同一问题采用二阶格式进行数值模拟，并与上边的结果进行对照。

(5)给出计算程序

(6)给出计算结果与分析

(7)提交包括上述内容的计算报告。

### 一、问题描述

如图 1 所示，初始温度相同，速度不同的空气，流进入如图所示的区域(300mmX600mm)中。显然，在通道中将存在不同温度气体之间的相互混合。当改变三种流体的入射速度，会得到不同的混合流场。本文基于给定流场探讨不同的对流扩散项差分格式、贝克勒数的大小、网格尺寸和高阶格式对数值模拟结果的影响，从而寻求一种求解该类混合问题的准确、收敛较快的方法。

## 二、物理模型

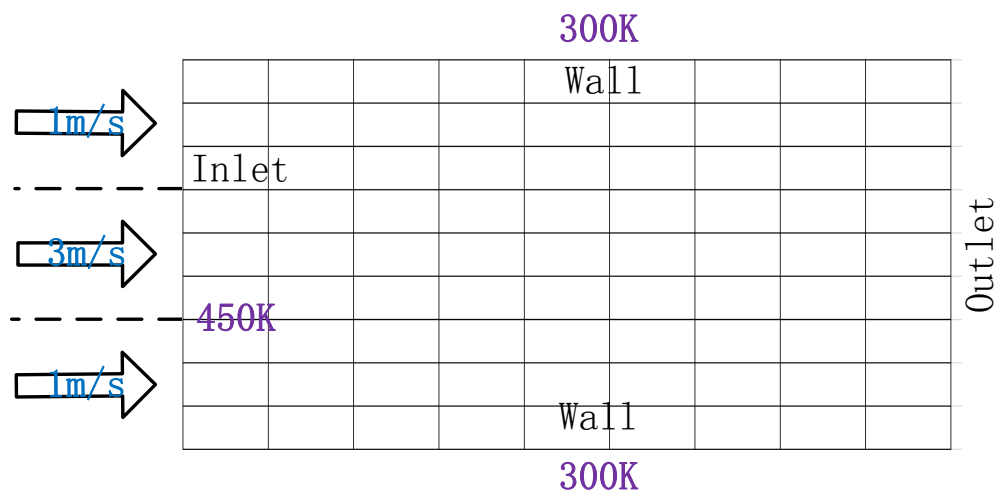


图 1 物理模型网格划分示意图

本文所研究的是一个二维问题。计算区域为长 600mm 宽 300mm 的矩形通道。将计算区域进行均匀网格划分，得到 61x61 个节点，如图 1 所示。初温 450K 的 3 股空气，分别以 3m/s 的速度（中间），和 1m/s 的速度（2 侧）对称的从通道左侧进入通道，随后在通道中产生一个速度场。又由于各处的温度不同，它们在通道中发生温度的混合。

## 三、控制方程、边界条件和初始速度场

### 3.1 控制方程

$$\frac{\partial \rho u T}{\partial x} + \frac{\partial \rho v T}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\lambda}{c_p} \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\lambda}{c_p} \frac{\partial T}{\partial y} \right)$$

$$\nabla \cdot \vec{U} = 0 \quad \rho = \text{const}, \lambda = \text{const}$$

为了将所研究问题集中在扩散通量与对流通量相对大小对数值模拟过程影响上，假设在该问题所研究的温度范围内流体密度  $\rho$  和扩散系数  $\lambda$ ，动力粘性系数  $\mu$  和扩散系数  $\lambda/c_p$  不随温度变化，此处给为 1.225kg/m<sup>3</sup>、0.0242W/m·K、1.789 × 10<sup>-5</sup> Kg/(m·s)、2.5 × 10<sup>-2</sup> Kg/(m·s)。

### 3.2 边界条件

1) 入口边界上温度分布给定：

$$T|_{x=0\text{ mm}} = 450\text{ K}$$

2) 上下边界为等温边界条件:

$$T|_{y=0\text{ mm}} = 300\text{ K};$$

$$T|_{y=300\text{ mm}} = 300\text{ K};$$

3) 出口边界为充分发展边界条件:

$$\left. \frac{\partial T}{\partial x} \right|_{x=300\text{ mm}} = 0$$

### 3.3 给定的速度场

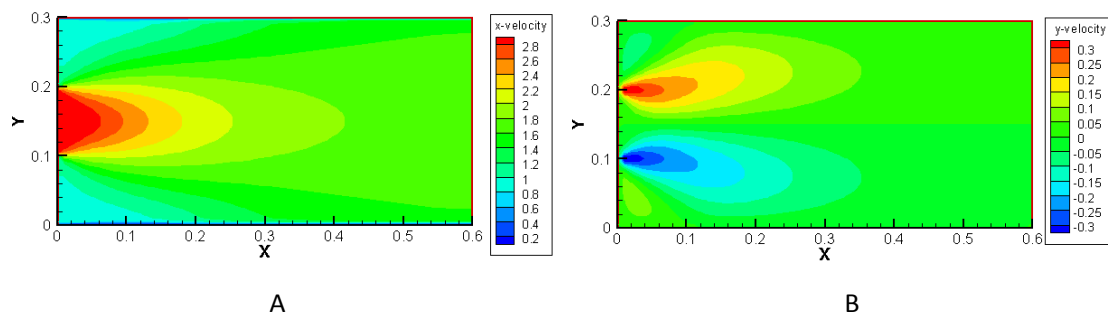


图 2 速度  $u$ ,  $v$  的分布

利用 FLUENT 模拟得到速度场如下所示, 图 2 所示为管道内的速度场分布, a 显示的是管道内  $x$  向速度  $u$  的分布, b 为  $y$  向速度  $v$  的分布。

## 四、控制方程及边界条件离散化

### 4.1 方程离散化

采用有限容积法离散控制方程。由于时间项和源项为零所以动量方程离散后得到:

$$J_e - J_w + J_n - J_s = 0$$

$$J_e = \Delta y (\rho u \varphi)_e - \Delta y \left( \Gamma \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)_e = D_e B(P_e) \varphi_P - D_e A(P_e) \varphi_E$$

$$J_s = \Delta x (\rho u \varphi)_s - \Delta x \left( \Gamma \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right)_s = D_s B(P_s) \varphi_S - D_s A(P_s) \varphi_P$$

$$J_w = \Delta y (\rho u \varphi)_w - \Delta y \left( \Gamma \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)_w = D_w B(P_w) \varphi_W - D_w A(P_w) \varphi_P$$

$$J_n = \Delta x (\rho v \varphi)_n - \Delta x \left( \Gamma \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right)_n = D_n B(P_n) \varphi_P - D_n A(P_n) \varphi_N$$

整理写成标准形式，即：

$$a_P T_P = a_E T_E + a_W T_W + a_N T_N + a_S T_S$$

$$a_E = D_e A(P_e) = D_e A(|P_e|) + \|-F_e, 0\|$$

$$a_W = D_w B(P_w) = D_w B(|P_w|) + \|F_w, 0\|$$

$$\text{其中, } a_N = D_n A(P_n) = D_n A(|P_n|) + \|-F_n, 0\|$$

$$a_S = D_s A(P_s) = D_s A(|P_s|) + \|F_s, 0\|$$

$$a_P = a_E + a_W + a_N + a_S + F_e - F_w + F_n - F_s$$

同时各界面对应的对流系数、扩散系数和贝克勒数如表 1 所示

表 1

界面 i	对流系数 $F_i$	扩散系数 $D_i$	贝克勒数 $P_i$
<b>e</b>	$(\rho u)_e \Delta y$	$\frac{\lambda_e \Delta y}{c_p \delta x}$	$\frac{F_e}{D_e}$
<b>w</b>	$(\rho u)_w \Delta y$	$\frac{\lambda_w \Delta y}{c_p \delta x}$	$\frac{F_w}{D_w}$
<b>n</b>	$(\rho v)_n \Delta x$	$\frac{\lambda_n \Delta x}{c_p \delta y}$	$\frac{F_n}{D_n}$
<b>s</b>	$(\rho v)_s \Delta x$	$\frac{\lambda_s \Delta x}{c_p \delta y}$	$\frac{F_s}{D_s}$

其中，不同对流扩散项的差分格式所对应的  $A(|P_i|)$  如表 2 所示：

表 2

算法格式	$A( P_i )$
------	------------

中心差分格式	$1 - 0.5 P_i $
迎风格式	1
混合格式	$\ 0, 1 - 0.5 P_i \ $
指数格式	$ P_i  / [\exp( P_i ) - 1]$
乘方格式	$\ 0, (1 - 0.1 P_i )^5\ $

## 4.2 边界条件离散化

1) 入口边界上温度分布给定:

$$T(1,2:61)=450K$$

2) 上下边界为等温边界条件

$$T(1:61,1)=T(1:61, N+1)=300K$$

3) 出口边界为充分发展条件

$$T(61,2:60)=T(61,2:60)$$

## 4.3 控制容积界面上物理量

(1) 界面上扩散系数: 对节点上的扩散系数平均的方法得到:

$$\lambda_e = \frac{2\lambda_p\lambda_E}{\lambda_p + \lambda_E} \quad \lambda_w = \frac{2\lambda_p\lambda_W}{\lambda_p + \lambda_W}$$

$$\lambda_n = \frac{2\lambda_p\lambda_N}{\lambda_p + \lambda_N} \quad \lambda_s = \frac{2\lambda_p\lambda_S}{\lambda_p + \lambda_S}$$

(2) 界面上流量的取法: 采用线性插值的方法获取:

$$F_e = \frac{F_E(\delta x)_{e+} + F_P(\delta x)_{e-}}{(\delta x)_e} \quad F_w = \frac{F_W(\delta x)_{e-} + F_P(\delta x)_{e+}}{(\delta x)_e}$$

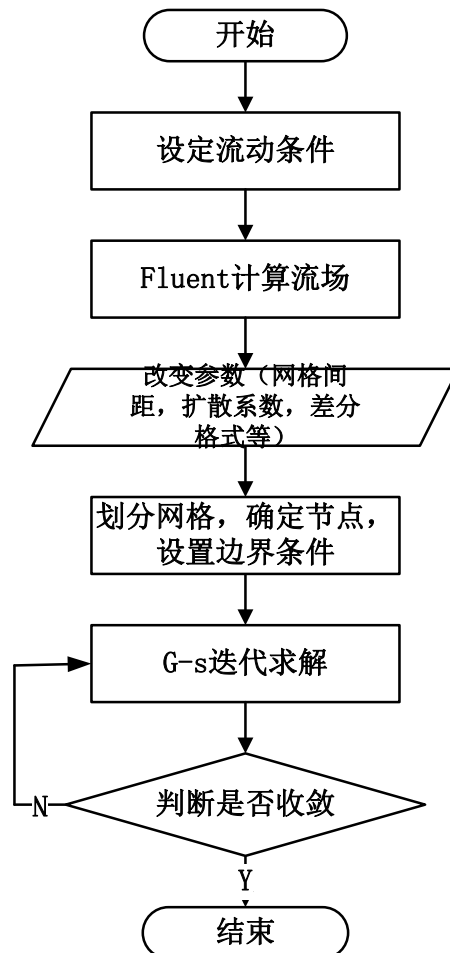
$$F_n = \frac{F_N(\delta y)_{n+} + F_P(\delta y)_{n-}}{(\delta y)_n} \quad F_s = \frac{F_S(\delta y)_{s-} + F_P(\delta y)_{s+}}{(\delta y)_s}$$

## 五、计算程序流程图

如图3所示为计算程序流程图。通过给定流场可以计算得到每个内节点对应的边界贝克勒数和节点离散方程系数。再依据需要选择不同差分格式计算主节点

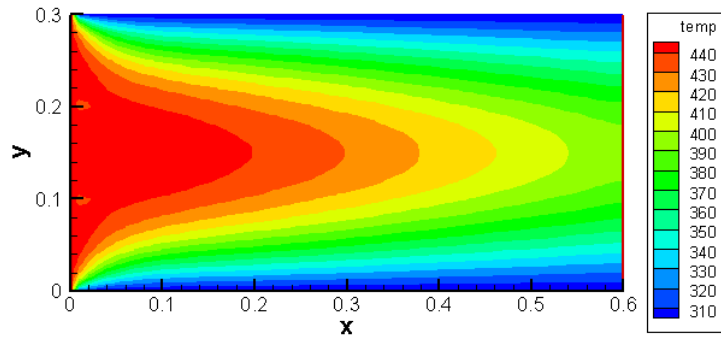
和相邻节点的系数。当计算区域网格节点的系数均已知时，对其进行 G-S 迭代求解。迭代时同时读取每一步和上一步间的残差并且记录迭代步数。当残差达到设定要求则终止迭代循环，输出图形化结果。

这里计算区域选用的内截差形式为  $\max(|T_{ij}^{k+1} - T_{ij}^k|)$ ，即所有列中前后迭代值差的绝对值最大值。以后画图 and 讨论中所提到的截差均是采用此形式。

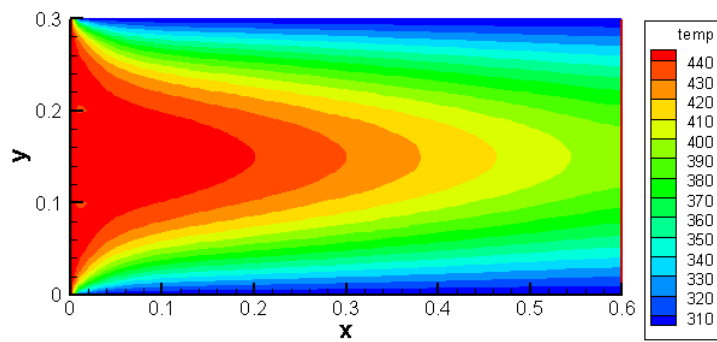


## 六、计算结果和分析

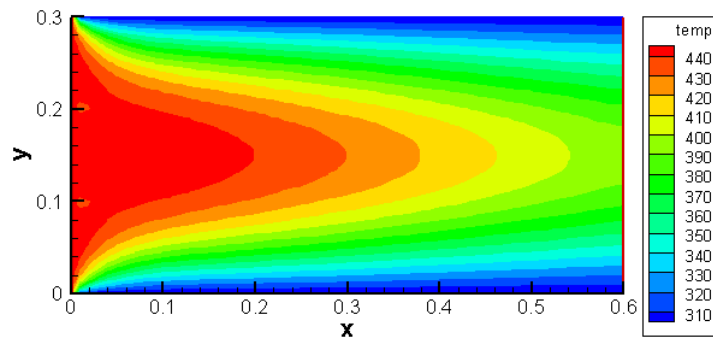
### 6.1 不同的一阶差分格式



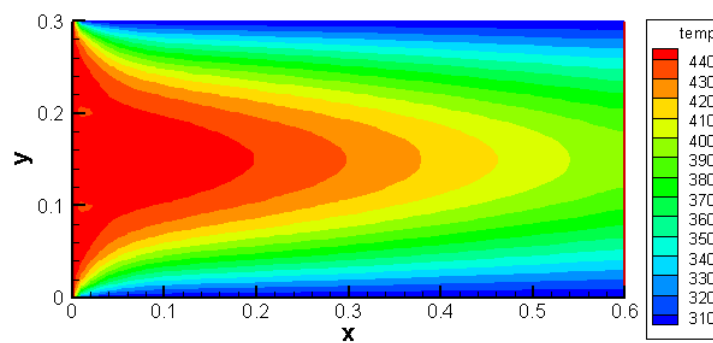
1



2

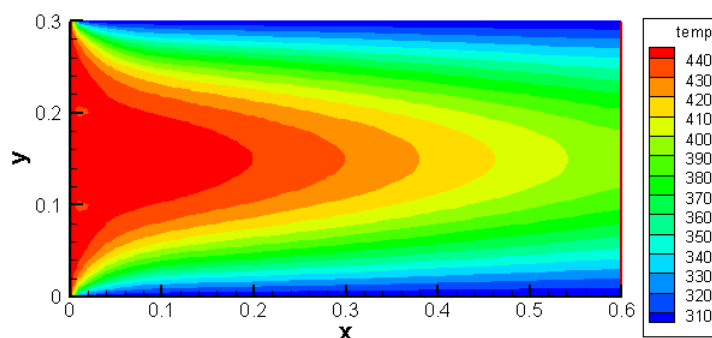


3



4

7



5

图 4 五种差分格式的计算结果的比较

(1.中心差分 2.一阶迎风 3.混合 4.指数 5.乘方)

在给定的参数和网格划分下，五种格式计算结果均收敛，并且基本吻合。从图 4 中可以发现，流体温度随着  $x$  方向流动距离增加而降低，两侧对称变化，两边温度低，中间温度高，总体来说计算结果是符合真实情况的。

图 5 为五种格式收敛情况的比较，可以发现除了在迭代初期有微小区别外，基本趋势是一致的，因此五种格式在计算该种工况时并无收敛上的优劣性。图中坐标轴均采用对数坐标，在 1000 步时计算均收敛。

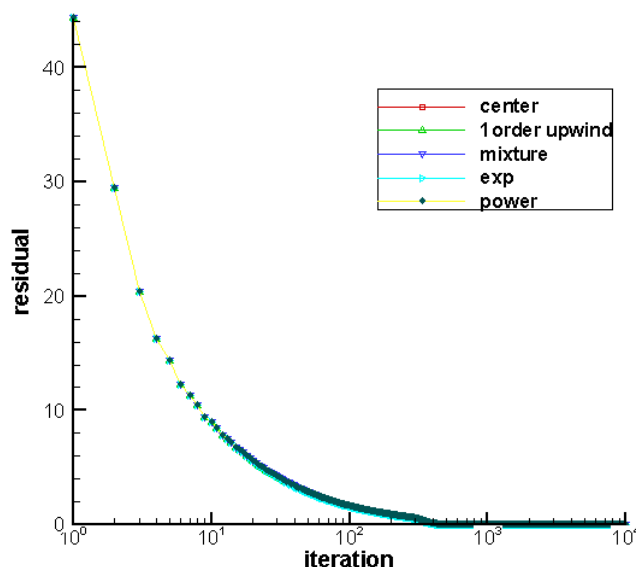


图 5 5 种格式的收敛情况

通过计算观察一阶迎风格式所引起的假扩散。这里将 1000 步乘方格式的计算结果作为基准值，利用一阶迎风格式计算的结果减去基准值，并将结果在整个计算区域内作图，如图 6 所示。结果显示一阶迎风格式确实引起了假扩散。这是因为入口角点处和出口中间段速度变化较大，并且假扩散系数  $\rho u \delta x / 2$  与速度呈正比。



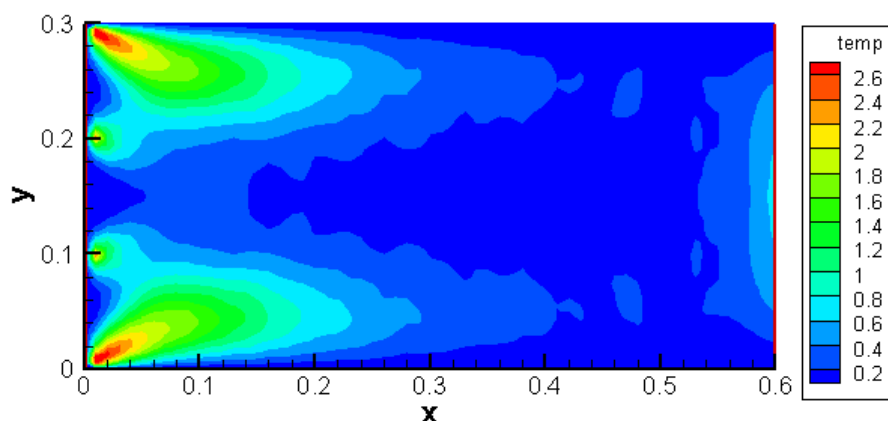
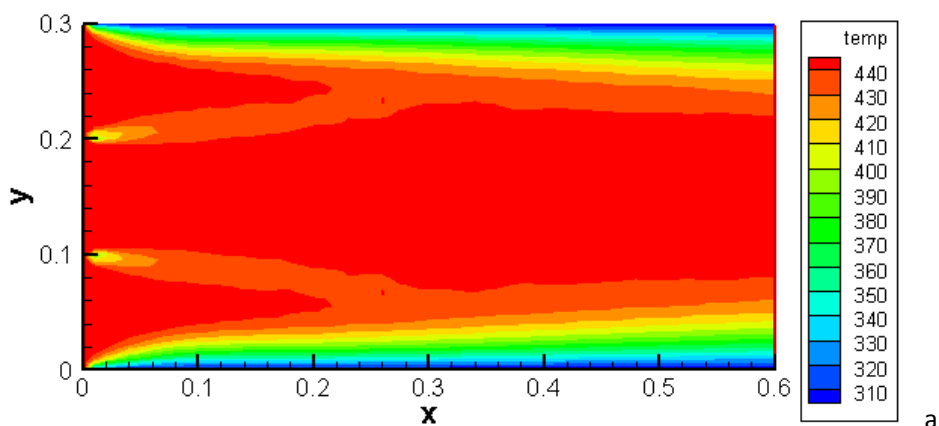


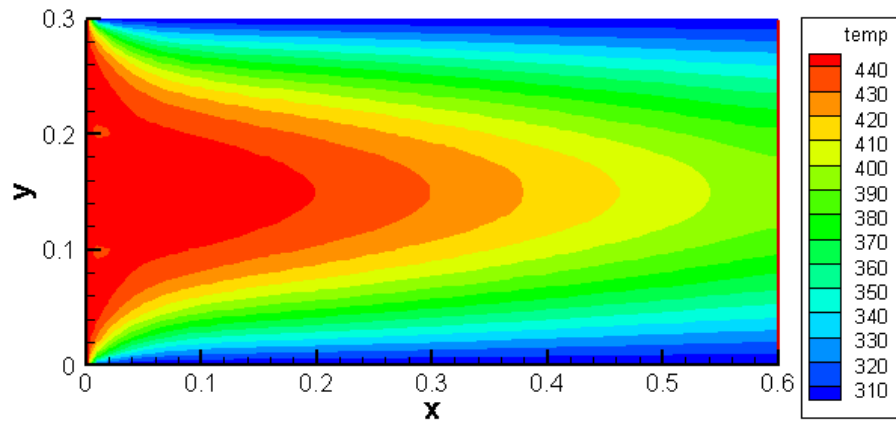
图 6 一阶迎风格式引起的假扩散

## 6.2 改变扩散系数对数值结果的影响

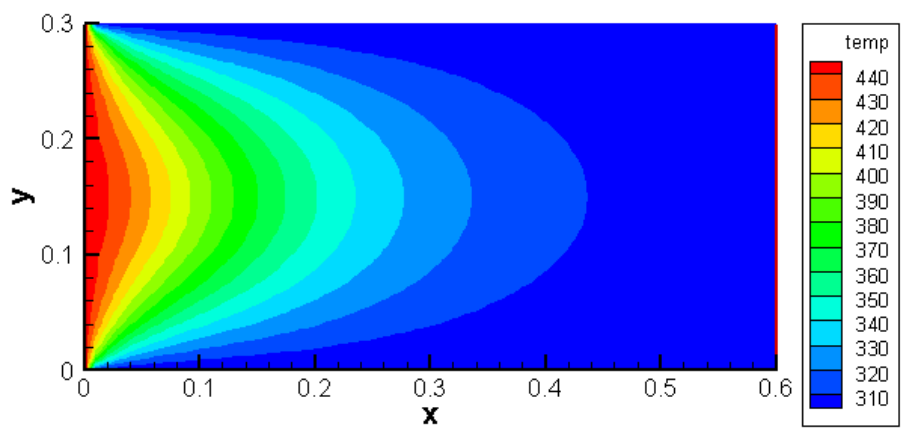
图 7 所示为改变扩散系数的大小对数值结果的影响,通过分析可知扩散系数的大小将从两方面影响最终结果。为尽量消除假扩散带来的影响,计算中均采用乘方格式。

(1)、由于扩散系数与对流系数的相对大小发生改变,导致最终收敛后的结果呈现不同的温度分布。当扩散系数较小时(图 7:a),对流换热占据主导作用,此时不同温度流体混合较差,温度界限分明。随着扩散系数增大,导热起主要作用,此时随着导热系数增加,下游温度混合加强,温度场更加均匀并且温度界限更加平滑。当扩散系数增加到很高时(图 7:d,e),对流项相对扩散项的作用可以忽略不计,此时下游区域的温度分布接近一个稳态导热温度场。

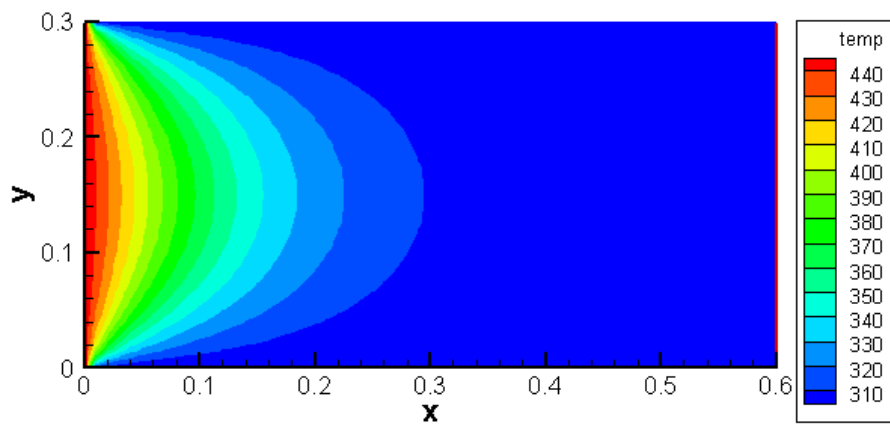




b



c



d

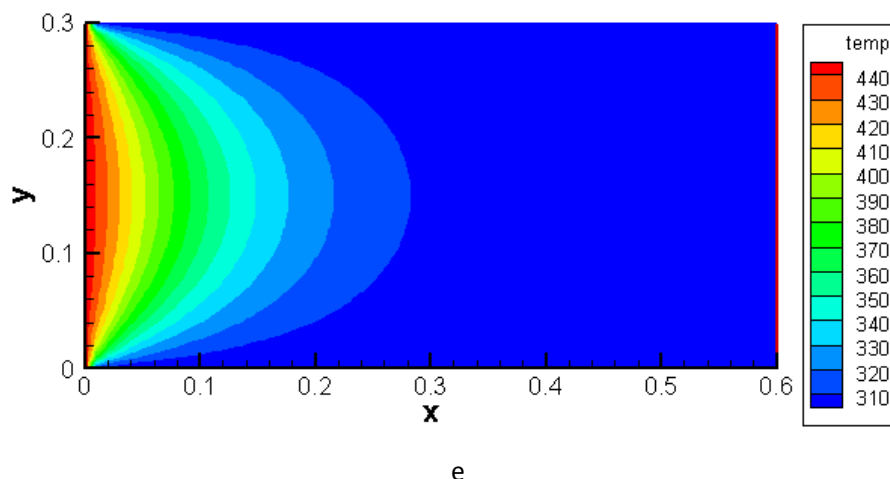
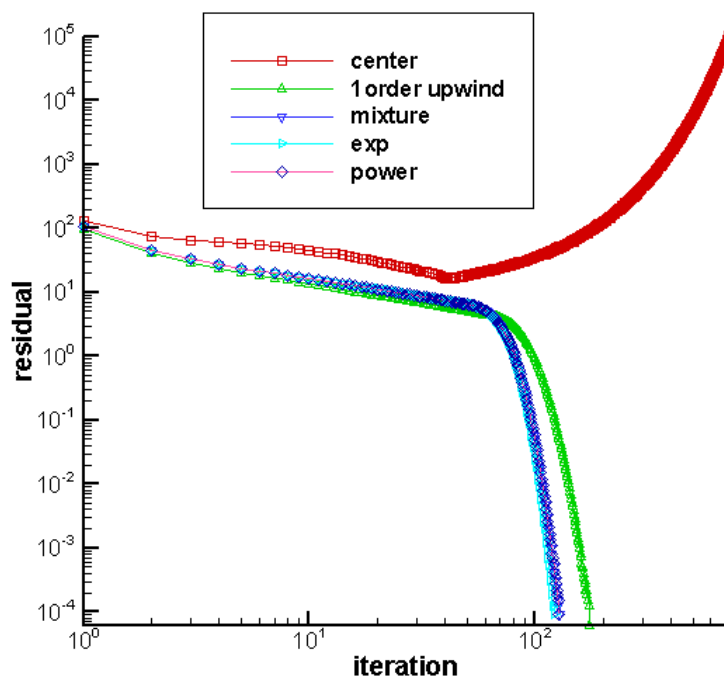


图 7 不同扩散系数对应温度场

(a:  $2.5e-3$ ; b:  $2.5e-2$ ; c:  $2.5e-1$ ; d:  $2.5e0$ ; e:  $2.5e1$ )

(2)、如图 8 和图 9 所示，扩散系数大小会对收敛速度产生影响。首先扩散系数的减小导致贝克勒数的增大，这会导致采用中心差分格式的结果不收敛。其次，扩散系数大小会对收敛快慢产生影响，图中显示在乘方格式迭代收敛的情况下，扩散系数越小，收敛速度越快。这是因为扩散系数越大，扩散项作用越明显，在速度场给定的情况下，就需要更多次迭代体现扩散项的作用。而扩散项较小时，对流项起主导作用，由于速度场已知，所以只需要较少步数迭代计算即可收敛。

图 8 扩散系数为  $2.5e-3$  时的不同格式的收敛曲线

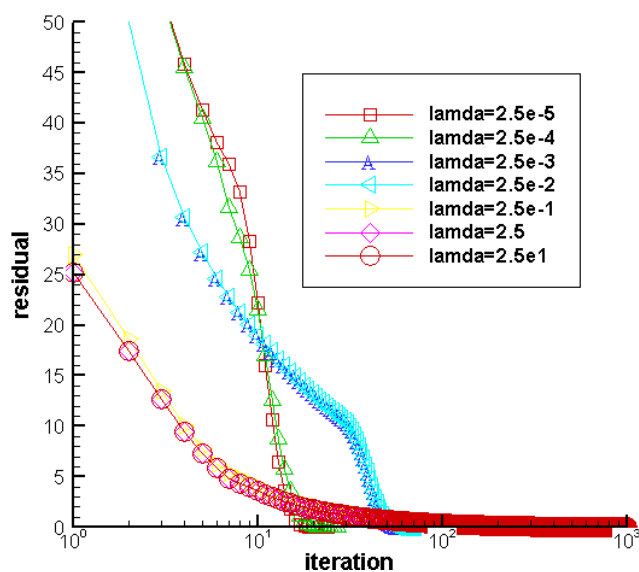


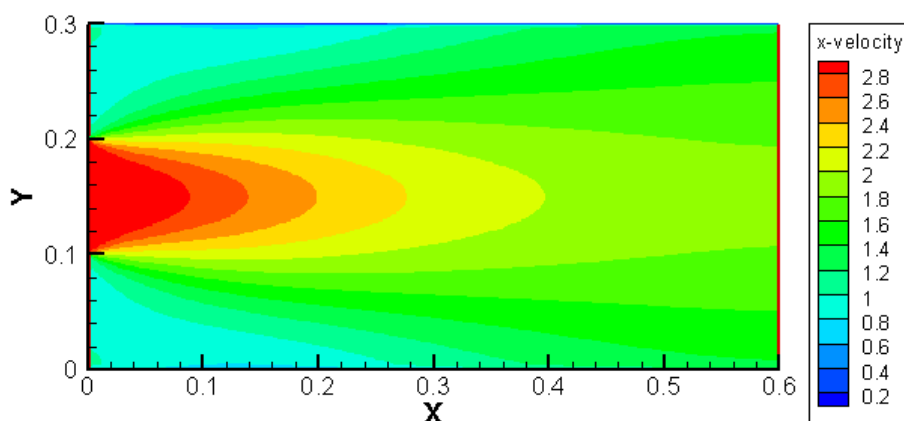
图 9 不同扩散系数对应的收敛情况

### 6.3 改变网格尺寸对数值结果的影响

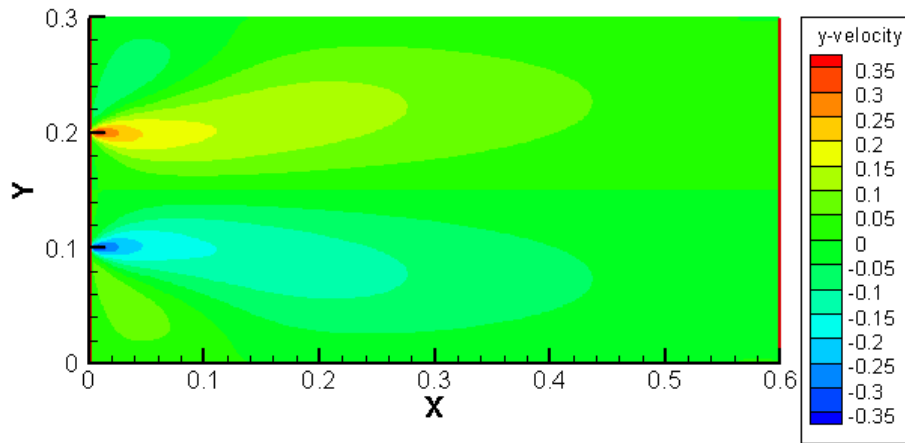
本小节目的是针对上文小扩散系数 ( $\lambda/c_p=5e-3$ ) 导致中心差分格式不收敛, 加密网格改善中心差分格式的收敛情况。

由贝克勒数公式知, 当扩散系数减小时会导致贝克勒数增大, 当  $P>2$  时, 中心差分格式下的  $A|P|$  小于 0, 这会导致相邻节点系数中有两项小于零, 则正系数准则不满足。为了使正系数准则得以满足, 在其他外部参数不变的情况下可以通过加密网格实现。

将  $x$  向网格节点从 61 增加到 151,  $y$  向网格节点从 61 增加到 151。在网格加密的基础上, 重新线性插值计算得到新增节点上的速度分布, 绘得  $u$  和  $v$  的速度场如图 10 所示。



a

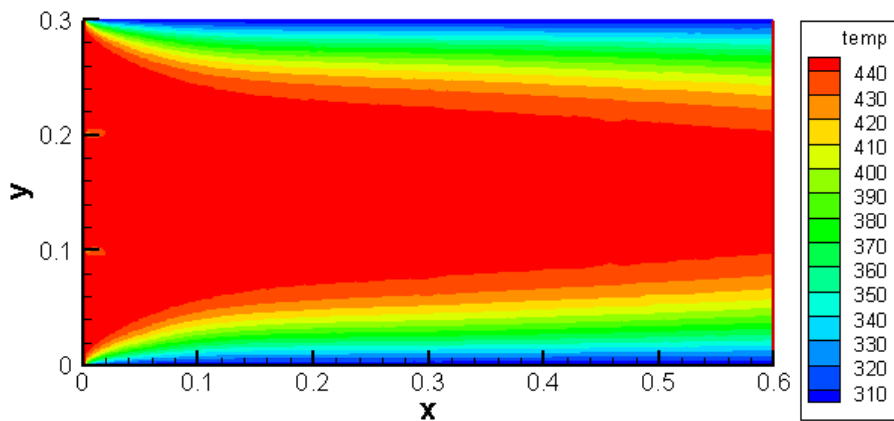


b

图 10 网格  $150 \times 150$  下速度场

(a.u 速度场;b.v 速度场)

在此基础上利用中心差分格式算得温度场分布如图 11 所示，与前面网格未加密时算得的温度场结果基本一致。

图 11 中心差分格式计算结果 ( $150 \times 150$ )

将网格加密前后中心差分格式计算过程的收敛情况进行比较，结果如图 12 所示。这说明经过网格加密处理后能够使得原本发散的差分格式得以收敛。

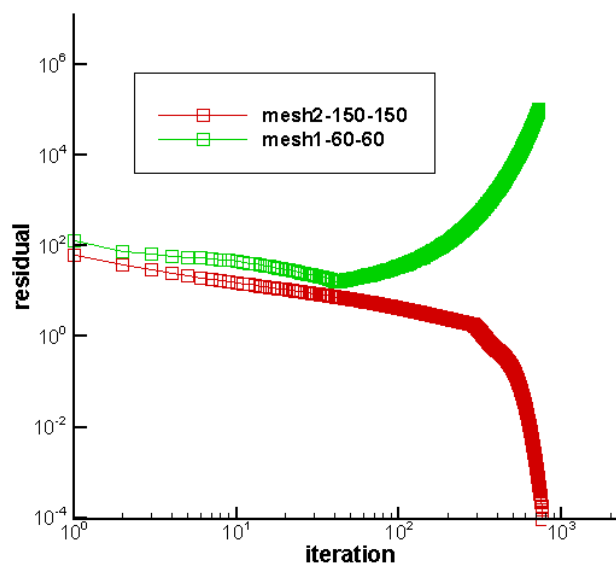


图 12 网格加密后收敛情况对比

网格加密的另一个好处是减小了低阶差分格式带来的假扩散影响。利用 1 阶迎风格式和乘方格式计算加密网格后的温度分布，并用前者减去后者得到温度差分布，如图 13 所示。与前面网格未加密的假扩散结果相比，此时假扩散明显降低。

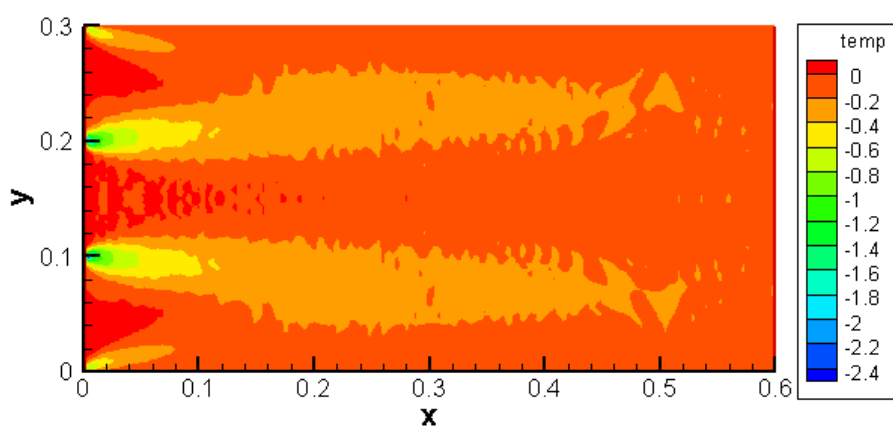


图 13 网格加密后 1 阶迎风假扩散示意图

## 6.5 采用二阶格式的数值模拟结果

要避免一阶迎风格式带来的假扩散，除了上文的将网格加密外还可以利用高阶差分格式。我们在最后选择用二阶迎风格式和 **quick** 格式进行数值模拟来探讨高阶格式对假扩散的改善。

二阶迎风格式离散方程如下所示：

$$\frac{\partial \rho u T}{\partial x} + \frac{\partial \rho v T}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial x} (\Gamma_T \frac{\partial T}{\partial x}) + \frac{\partial}{\partial y} (\Gamma_T \frac{\partial T}{\partial y})$$

$$\Rightarrow F_e T_e - F_w T_w + F_n T_n - F_s T_s = D_e T_E + D_w T_W + D_n T_N + D_s T_S - (D_e + D_w + D_n + D_s) T_P$$

整理得：

$$a_P T_P = a_E T_E + a_W T_W + a_N T_N + a_S T_S + a_{EE} T_{EE} + a_{WW} T_{WW} + a_{NN} T_{NN} + a_{SS} T_{SS}$$

这里为了求解方便，我们采用的书中介绍的高阶格式适用的代数方法之一——延迟修正。

$$\phi_e^H = \phi_e^L + (\phi_e^H - \phi_e^L)^*$$

上式通过延迟修正的方法纳入高阶格式后，得到的离散方程形式是：

$$a_P T_P = a_E T_E + a_W T_W + a_N T_N + a_S T_S + b_{ad}^*$$

其中系数  $a_P$ 、 $a_E$ 、 $a_W$ 、 $a_S$ 、 $a_N$  均按照一阶迎风格式来计算，由于采用延迟修正的源项则为：

$$b_{ad}^* = (b_{ad}^*)_w + (b_{ad}^*)_e + (b_{ad}^*)_n + (b_{ad}^*)_s$$

这里高阶格式我选择了 2 阶迎风格式和 quick 格式。对于源项的修正。2 者略有不同。（具体公式略）

采用这两种高阶格式，2 维问题成为 9 点格式，对紧邻边界的第一层节点进行降阶处理，即采用一阶迎风或者混合格式来处理边界条件，其余内节点采用二阶迎风格式进行迭代。修改程序计算得到温度场如图 13 和图 14 所示。结果显示温度分布结果基本与前面乘方格式计算结果吻合。

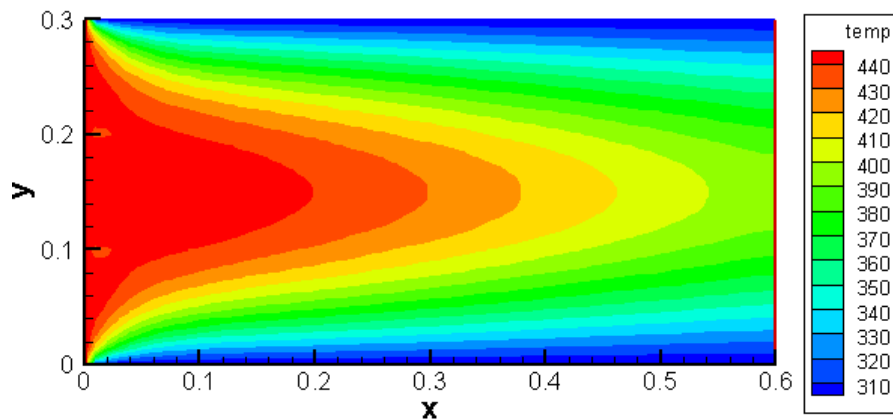


图 14-2 二阶迎风格式计算结果

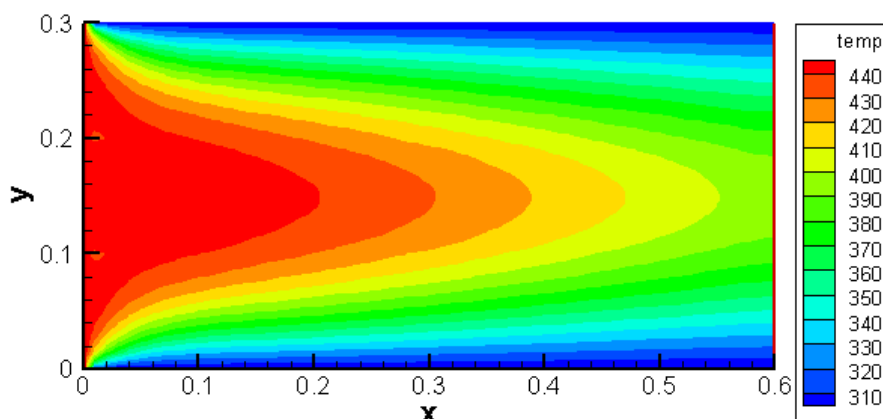


图 15 quick 格式的计算结果

## 七、结论

本文利用数值计算讨论速度场已知的不同温度流体混合过程。通过改变网格数，扩散系数和差分格式讨论了以上这些因素对数值结果的影响，重点讨论了对收敛速度，是否收敛以及假扩散的影响。得到以下几点结论：

1、对于给定的标准工况，五种格式的计算结果和收敛过程几乎一致，但是一阶迎风夸大了对流对温度分布的影响，会导致假扩散现象，影响了结果的真实性。通过将一阶迎风格式与假设为基准值的乘方格式作差，可以得到假扩散影响的分布。

2、对流系数与扩散系数的相对大小对混合过程的温度分布结果影响显著，并且扩散系数的大小不仅影响温度混合过程，还对数值运算本身产生两点附加效应。首先，扩散系数很小时，贝克勒数很大，这使得一阶迎风格式离散得到的方程正系数准则不在满足，迭代发散。其次，扩散系数对对流系数的相对大小会影响收敛速度。扩散系数越大，扩散项作用越明显，在速度场给定的情况下，就需要更多次迭代体现扩散项的作用。而扩散项较小时，对流项起主导作用，由于速度场已知，所以只需要较少步数迭代计算即可收敛。

3、加密网格数会带来以下两个优点，首先这会减小贝克勒数，使得不收敛的中心差分格式得以收敛。另外，加密网格可以减小假扩散影响。但是增大网格数会大大增加运算符合。

4、对于本问题，高阶格式（二阶迎风格式和 quick 格式）离散化方程与一阶格式的计算结果无明显差异。