TRƯỜNG ĐẠI HỌC CÔNG NGHỆ THÔNG TIN

KHOA KHOA HỌC MÁY TÍNH

BÀI TẬP MÔN PHÂN TÍCH VÀ THIẾT KẾ THUẬT TOÁN

HOMEWORK #03: ĐỘ PHỨC TẠP VÀ CÁC KÝ HIỆU TIỆM CẬN

GV hướng dẫn: Huỳnh Thị Thanh Thương

Nhóm thực hiện:

1. Hồ Hồng Hà - 20520480

TP.HCM, ngày 21 tháng 10 năm 2022

1. Bài tập 1:
   a. "Độ phức tạp" không phải là đại lượng toán học được nghiên cứu bài bản. Khi đề cập đến thuật toán. "Độ phức tạp" được xác định theo các ký hiệu tiệm cận, đại diện cho hệ thống các ký hiệu tiệm cận, xác định tương đối độ lớn số phép toán của giải thuật so với kích thước của bài toán.
   b. Nhận định trên là đúng.
      Vì trong thực tế, các bài toán mà con người cần giải quyết thường có kích thước rất lớn. Khi đó độ lớn về thời gian thực hiện giữa các thuật toán thường rất rõ ràng. Tuy nhiên, việc nghiên cứu thuật toán với kích thước đầu vào lớn như thực tế thì mất rất nhiều thời gian, bên cạnh đó, thời gian thực thi của thuật toán còn phụ thuộc vào máy thực hiện, khi thay đổi máy thực hiện thì thời gian thực hiện cũng khác nhau, điều này không đảm bảo công bằng khi so sánh các thuật toán với nhau. Ngoài cách sử dụng thời gian thực hiện để đánh giá, bậc tăng trưởng cũng là cách để đánh giá thời gian thực thi của thuật toán mà vẫn tránh được những vấn đề trên.
   c. O → Trả về độ lớn số phép toán của giải thuật trong trường hợp xấu nhất. Là trường hợp mà khi nghiên cứu được quan tâm nhất.
      Ω → Trả về độ lớn số phép toán của giải thuật trong trường hợp tốt nhất.
      Θ → Trả về độ lớn số phép toán của giải thuật trong trường hợp trung bình.
2. Bài tập 2
   Với $f(n) = n^2$, trong $t = 1s = 10^6 micro\ s$, kích thước lớn nhất của bài toán có thể giải được là: $n = \sqrt{t} = 10^3$

	1 second	1 minute	1 hour	1 day	1 month	1 year	1 century
lgn	2^{10^6}	$2^{6.10^7}$	$2^{36.10^8}$	$2^{864.10^8}$	$2^{2592.10^9}$	$2^{31104.10^{10}}$	$2^{31104.10^{12}}$
$\sqrt{n}$	10^{12}	36.10^{14}	1296.10^{16}	7464.10^{18}	6718.10^{21}	8950.10^{26}	8950.10^{30}
n	10^6	6.10^7	36.10^8	864.10^8	2592.10^9	31104.10^{10}	31104.10^{12}
$nlgn$	140	4895	204094	3943234	97659289	2729.10^4	2303.10^9
n^2	10^3	7745	60000	293938	1609968	173636326	1736363260
n^3	100	391	1532	4420	13736	67754	314488
2^n	19	25	31	36	41	48	54
$n!$	9	11	12	13	15	16	18

3. Bài tập 3:
   $a.\ \frac{1}{2}n^2 = O(n^2)$ (1)

   $n^2 + 1 = O(n^2)$ (2)

   $$=> \frac{1}{2}n^2 = n^2 + 1$$

   Phép suy ra là chưa đúng, bởi dấu " = " ở (1) và (3) bản chất là dấu " ∈ "

Có nghĩa là $\frac{1}{2}n^2$, n^2+1 là 2 hàm bất kì thuộc tập hợp $\{t(n): \exists c \in R^+, \exists n_0 \in N, \forall n \geq n_0, t(n) \leq c.n^2\}$
Nên không thể kết luận 2 hàm là bằng nhau

b. Xét $f(n) = 7n^2$

$g(n) = n^2 - 80n$

$h(n) = n^3$

Chứng minh:

$\boldsymbol{f(n) = O(g(n))}$

Chứng minh: $7n^2 \leq c(n^2 - 80n) \quad \forall n \geq n_0$

Giả sử chọn $c = 8$ ta được:

$n^2 - 640n \geq 0 \Rightarrow \left[\begin{matrix} n \leq 0 \\ n \geq 640 \end{matrix}\right.$

Vậy chọn $c = 8$, $n_0 = 640$

Theo định nghĩa của Big-O, ta được $f(n) = O(g(n))$ (đccm)

$\boldsymbol{g(n) = O(f(n))}$

Ta thấy: $n^2 - 80n \leq n^2 \leq 7n^2 \quad \forall n \geq 1$

Chọn $c = 7, n_0 = 1$

Theo định nghĩa của Big-O, ta được $g(n) = O(f(n))$ (đccm)

$\boldsymbol{f(n) = O(h(n))}$

Ta thấy: $7n^2 \leq 7n^3\ \forall n \geq 1$

Chọn $c = 7, n_0 = 1$

Theo định nghĩa của Big-O, ta được $f(n) = O(h(n))$ (đccm)

$\boldsymbol{h(n) \neq O(f(n))}$

Giả sử: $h(n) = O(f(n))$

$\Rightarrow \exists c \in R^+, \exists n_0 \in N$ sao cho $n^3 \leq c(7n^2), \forall n \geq n_o$

Suy ra: $n^2(n - 7c) \leq 0$

Xét: $n^2(n - 7c)$

n		0		7c
$n^2(n - 7c)$	$-$		$-$	$+$

$\Rightarrow \nexists n_0 \rightarrow n^2(n - 7c) \leq 0 \quad \forall n > n_0$

$\Rightarrow h(n) \neq O(f(n))$ (đccm)

c. $n^4 + n + 1 \notin O(n^2)$

$O(n^2) \neq O(n)$

$n \notin O(\log_2 n)$

Chứng minh:

$\boldsymbol{n^4 + n + 1 \notin O(n^2)}$

Ta thấy: $n^4 + n + 1 \geq n^3 \ \forall n \geq 1$
Chọn: $c = 1, n_0 = 1$
Theo định nghĩa Big-Ω, ta được $n^4 + n + 1 \in \Omega(n^3)$ (*)
Mà $n^3 > n^2 \ \forall n \geq 1 \Rightarrow O(n^2) \cap \Omega(n^3) = \emptyset$ (**)
Từ (*) và (**) $\Rightarrow n^4 + n + 1 \notin O(n^2)$ (đccm)

$\boldsymbol{O(n^2) \neq O(n)}$

Giả sử: $O(n^2) = O(n)$
Suy ra: $\forall f(n) \in O(n^2) \Rightarrow f(n) \in O(n)$ (*)
Chọn: $f(n) = n^2$
Ta thấy: $n^2 \leq 2n^2 \quad \forall n \geq 1$
Chọn: $c_1 = 2, n_{01} = 1$
Theo định nghĩa Big-O, ta được $f(n) \in O(n^2)$
Từ (*) suy ra $f(n) = n^2 \in O(n) \Rightarrow n^2 \leq c_2 n \quad \forall n \geq n_{02}$
Xét $n^2 \leq c_2 n \Leftrightarrow n(n - c_2) \leq 0$

n		0	c_2
$n(n-c)$	$+$	$-$	$+$

Theo bảng, ta thấy: $\forall c_2 > 0 \Rightarrow \nexists n_{02} \in N$ mà $\forall n \geq n_{02}$ để $n(n - c_2) \leq 0$
Vậy giả thuyết là sai.
$\Rightarrow O(n^2) \neq O(n)$ (đccm)

$\boldsymbol{n \notin O(\log_2 n)}$

Ta thấy: $n \geq \frac{1}{2} n \ \forall n \geq 1$
Chọn: $c = \frac{1}{2}, n_0 = 1$
Theo định nghĩa Big-Ω, ta được $n \in \Omega(n)$ (*)
Mà $n > \log_2 n \ \forall n \geq 1 \Rightarrow O(\log_2 n) \cap \Omega(n) = \emptyset$ (**)
Từ (*) và (**) $\Rightarrow n \notin O(\log_2 n)$ (đccm)

4. Bài tập 4:
   Group 1:

$f_1(n) = C_n^{100} = \frac{n!}{100!(n-100)!} = \frac{(n-99)(n-98)\ldots n}{100!} = O(n^{100})$
$f_2(n) = n^{100} = O(n^{100})$
$f_3(n) = \frac{1}{n} = n^{-1} = O(n^{-1})$
$f_4(n) = 10^{1000} n = O(n)$
$f_5(n) = nlogn = O(n^1.n^c) = O(n^{1+c}) \quad (c \approx 10^{-5})$
Vậy: $f_3(n) < f_4(n) < f_5(n) < f_2(n) \approx f_1(n)$

Group 2:

$f_1(n) = O(c)$
$f_2(n) = O(c^n)$
$f_3(n) = C_n^2 = \frac{n!}{2!(n-2)!} = \frac{(n-1)n}{2!} = O(n^2)$
$f_4(n) = O\left(n^{\frac{3}{2}}\right)$
Vậy: $f_1(n) < f_4(n) < f_3(n) < f_2(n)$

Group 3:

$f_1(n) = 2^{\sqrt{n}logn} = 2^{O\left(n^{\frac{1}{2}+c}\right)}$ $(c \approx 10^{-5})$
$f_2(n) = 2^n = 2^{O(n)}$
$f_3(n) = n^{10}.2^{\frac{n}{2}} = 2^{10logn+\frac{n}{2}} = 2^{O(n)}$
$f_4(n) = 2 + 3 + \cdots + n = \frac{(n+2)(n-1)}{2} = \frac{n^2+n-2}{2} = 2^{\log(n^2+n-2)-1} = 2^{O(n^c)}$
Vậy: $f_4(n) < f_1(n) < f_2(n) \approx f_3(n)$

Group 4:

$f_1(n) = C_n^2 = O(n^2)$

Group 5:

5. Bài tập 5
- Chứng minh $O(C) = O(1)$ với C là hằng số

Chứng minh: $\mathbf{O(C) \subset O(1)}$:
Giả sử: $\forall f(n) \in O(C)$
Suy ra: $\exists c_1 \in R^+, \exists n_1 \in N \to \forall n \geq n_1, 0 \leq f(n) \leq c_1.C$
Hay: $\forall n \geq n_1, 0 \leq f(n) \leq c_1C.1$
Chọn: $c = c_1C, n = n_1$
Theo định nghĩa Big-O ta được $f(n) \in O(1)$
Vậy $\forall f(n) \in O(C), f(n) \in O(1)$
$\Rightarrow O(C) \subset O(1)$ (*)
Chứng minh: $\mathbf{O(1) \subset O(C)}$:
Giả sử: $\forall g(n) \in O(1)$
Suy ra: $\exists c_2 \in R^+, \exists n_2 \in N \to \forall n \geq n_2, 0 \leq g(n) \leq c_2.1$
Hay: $\forall n \geq n_2, 0 \leq g(n) \leq c_2.C$
Chọn: $c = c_2, n = n_2$

Theo định nghĩa Big-O ta được $g(n) \in O(C)$
Vậy $\forall g(n) \in O(1), g(n) \in O(C)$
$\Rightarrow O(1) \subset O(C)$ (**)
Từ (*) và (**) $\Rightarrow O(C) = O(1)$ (đccm)

- Chứng minh $O\big(Cf(n)\big) = O\big(f(n)\big)$ với C là hằng số

Chứng minh: $\mathbf{O}\big(\boldsymbol{Cf(n)}\big) \subset \mathbf{O}\big(\boldsymbol{f(n)}\big)$:
Giả sử: $\forall a(n) \in O\big(Cf(n)\big)$
Suy ra: $\exists c_1 \in R^+, \exists n_1 \in N \to \forall n \geq n_1, 0 \leq\ a(n) \leq c_1.Cf(n)$
Hay: $\forall n \geq n_1, 0 \leq\ a(n) \leq c_1 C.f(n)$
Chọn: $c = c_1 C, n = n_1$
Theo định nghĩa Big-O ta được $a(n) \in O\big(f(n)\big)$
Vậy $\forall a(n) \in O\big(Cf(n)\big), a(n) \in O\big(f(n)\big)$
$\Rightarrow O\big(Cf(n)\big) \subset O\big(f(n)\big)$ (*)

Chứng minh: $\mathbf{O}\big(\boldsymbol{f(n)}\big) \subset \mathbf{O}\big(\boldsymbol{Cf(n)}\big)$:
Giả sử: $\forall b(n) \in O\big(f(n)\big)$
Suy ra: $\exists c_2 \in R^+, \exists n_{02} \in N \to \forall n \geq n_{02}, 0 \leq\ b(n) \leq c_2.f(n)$
Hay: $\forall n \geq n_{02}, 0 \leq\ b(n) \leq c_2.Cf(n)$
Chọn: $c = c_2, n = n_2$
Theo định nghĩa Big-O ta được $b(n) \in O\big(Cf(n)\big)$
Vậy $\forall b(n) \in O\big(f(n)\big), b(n) \in O\big(Cf(n)\big)$
$\Rightarrow O\big(f(n)\big) \subset O\big(Cf(n)\big)$ (**)
Từ (*) và (**) $\Rightarrow O\big(Cf(n)\big) = O\big(f(n)\big)$ (đccm)

- Nếu $f(n) \in O\big(g(n)\big)$ và $g(n) \in O\big(h(n)\big)$ thì $f(n) \in O\big(h(n)\big)$

$f(n) \in O\big(g(n)\big) \Rightarrow \exists c_1 \in R^+, \exists n_1 \in N$ sao cho $\forall n \geq n_1, f(n) \leq c_1 g(n)$
$g(n) \in O\big(h(n)\big) \Rightarrow \exists c_2 \in R^+, \exists n_2 \in N$ sao cho $\forall n \geq n_2, g(n) \leq c_2 h(n)$
Suy ra: $\forall n \geq n_0 = \max\{n_1, n_2\},\quad f(n) \leq c_1 c_2 h(n)$
Chọn: $c = c_1 c_2, n_0 = \max\{n_1, n_2\}$
Theo định nghĩa Big-O ta được $f(n) \in O\big(h(n)\big)$ (đccm)

- Nếu $t_1(n) \in O\big(f(n)\big)$ và $t_2(n) \in O\big(g(n)\big)$ thì $t_1(n) + t_2(n) \in O(\max\{f(n), g(n)\})$

$t_1(n) \in O\big(f(n)\big) \Rightarrow \exists c_1 \in R^+, \exists n_1 \in N$ sao cho $\forall n \geq n_1, t_1(n) \leq c_1 f(n)$
$t_2(n) \in O\big(g(n)\big) \Rightarrow \exists c_2 \in R^+, \exists n_2 \in N$ sao cho $\forall n \geq n_2, t_2(n) \leq c_2 g(n)$
Suy ra: $\forall n \geq n_0 = \max\{n_1, n_2\}$,
$t_1(n) + t_2(n) \leq c_1 f(n) + c_2 g(n)$
$\Rightarrow t_1(n) + t_2(n) \leq c_1 \max\{f(n), g(n)\} + c_2 \max\{f(n), g(n)\}$
$\Rightarrow t_1(n) + t_2(n) \leq (c_1 + c_2)\max\{f(n), g(n)\}$
Chọn: $c = c_1 + c_2, n = \max\{n_1, n_2\}$
Theo định nghĩa Big-O ta được $t_1(n) + t_2(n) \in O(\max\{f(n), g(n)\})$ (đccm)

6. Bài tập 6:

- If $t(n) \in O(g(n))$, then $g(n) \in \Omega(t(n))$

$t(n) \in O(g(n)) \Rightarrow \exists c_1 \in R^+, \exists n_{01} \in N$ sao cho $\forall n \geq n_{01}, t(n) \leq c_1 g(n)$

Suy ra: $\forall n \geq n_{01},\ g(n) \geq \frac{1}{c_1} t(n)$

Chọn: $c = \frac{1}{c_1}, n_0 = n_{01}$

Theo định nghĩa Big-Ω ta được $g(n) \in \Omega(t(n))$ (đccm)

- $\Theta(\alpha g(n)) = \Theta(g(n))$, where $\alpha > 0$

Chứng minh: $\boldsymbol{\Theta(\alpha g(n)) \subset \Theta(g(n))}$

Giả sử: $\forall a(n) \in \Theta(\alpha g(n))$

Suy ra: $\exists c_{01}, c_{02} \in R^+, \exists n_{01} \in N$

$\rightarrow \forall n \geq n_{01}, c_{01}.\alpha g(n) \leq a(n) \leq c_{02}.\alpha g(n)$

Hay: $\forall n \geq n_{01},\ c_{01}\alpha.g(n) \leq a(n) \leq c_{02}\alpha.g(n)$

Chọn: $c_1 = c_{01}\alpha, c_2 = c_{02}\alpha, n_0 = n_{01}$

Theo định nghĩa Big-Θ ta được $a(n) \in \Theta(g(n))$

Vậy: $\forall a(n) \in \Theta(\alpha g(n)), a(n) \in \Theta(\mathrm{g(n)})$

$\Rightarrow \Theta(\alpha g(n)) \subset \Theta(g(n))$ (*)

Chứng minh: $\boldsymbol{\Theta(g(n)) \subset \Theta(\alpha g(n))}$

Giả sử: $\forall b(n) \in \Theta(g(n))$

Suy ra: $\exists c_{01}, c_{02} \in R^+, \exists n_{02} \in N$

$\rightarrow \forall n \geq n_{02}, c_{01}.g(n) \leq b(n) \leq c_{02}.g(n)$

Hay: $\forall n \geq n_{02},\ c_{01}.\alpha g(n) \leq b(n) \leq c_{02}.\alpha g(n)$

Chọn: $c_1 = c_{01}, c_2 = c_{02}, n_0 = n_{02}$

Theo định nghĩa Big-Θ ta được b$(n) \in \Theta(\alpha g(n))$

Vậy: $\forall b(n) \in \Theta(g(n)), b(n) \in \Theta(\mathrm{\alpha g(n)})$

$\Rightarrow \Theta(g(n)) \subset \Theta(\alpha g(n))$ (**)

Từ (*) và (**) $\Rightarrow \Theta(\alpha g(n)) = \Theta(g(n))$ (đccm)

- $\Theta(g(n)) = O(g(n)) \cap \Omega(g(n))$

Chứng minh: $\boldsymbol{\Theta(g(n)) \subset O(g(n)) \cap \Omega(g(n))}$

Giả sử: $\forall f(n) \in \Theta(g(n))$

Suy ra: $\exists c_1, c_2 \in R^+, \exists n_0 \in N \rightarrow c_1 g(n) \leq f(n) \leq c_2 g(n) \quad \forall n \geq n_0$

Ta thấy: $\forall n \geq n_0, c_1 g(n) \leq f(n) \Rightarrow f(n) \in \Omega(g(n))$

$\forall n \geq n_0, f(n) \leq c_2 g(n) \Rightarrow f(n) \in O(g(n))$

$\Rightarrow f(n) \in O(g(n)) \cap \Omega(g(n))$

Vậy: $\forall f(n) \in \Theta(g(n)),\ f(n) \in O(g(n)) \cap \Omega(g(n))$

$\Rightarrow \Theta(g(n)) \subset O(g(n)) \cap \Omega(g(n))$ (*)

Chứng minh: $\boldsymbol{O(g(n)) \cap \Omega(g(n)) \subset \Theta(\mathrm{g(n)})}$

Giả sử: $\forall f(n) \in O(g(n)) \cap \Omega(g(n))$
Suy ra: $\exists c_1 \in R^+, \exists n_{01} \in N \to f(n) \le c_1 g(n) \quad \forall n \ge n_{01}$
$\exists c_2 \in R^+, \exists n_{02} \in N \to c_2 g(n) \le f(n) \quad \forall n \ge n_{02}$
$\Rightarrow \forall n \ge \max\{n_{01}, n_{02}\}, c_2 g(n) \le f(n) \le c_1 g(n)$
$\Rightarrow f(n) \in \Theta(\mathrm{g(n)})$
Vậy: $\forall f(n) \in O(g(n)) \cap \Omega(g(n)),\ f(n) \in \Theta(\mathrm{g(n)})$
$\Rightarrow O(g(n)) \cap \Omega(g(n)) \subset \Theta(\mathrm{g(n)}) \quad$ (**)
Từ (*) và (**) $\Rightarrow \Theta(g(n)) = O(g(n)) \cap \Omega(g(n))$ (đccm)

- $\max\{f(n), g(n)\} = \Theta(f(n) + g(n))$

Giả sử: $\forall n \ge n_0, f(n) \ge 0$ và $g(n) \ge 0$
Ta thấy: $f(n) \le \max\{f(n), g(n)\}$ và $g(n) \le \max\{f(n), g(n)\} \ \forall n \ge n_0$
Suy ra: $f(n) + g(n) \le 2\max\{f(n), g(n)\}$
Hay: $\frac{1}{2}(f(n) + g(n)) \le \max\{f(n), g(n)\} \le f(n) + g(n) \quad \forall n \ge n_0$
Chọn: $c_1 = \frac{1}{2}, c_2 = 1, n_0$
Theo định nghĩa Big-Θ ta được $\max\{f(n), g(n)\} = \Theta(f(n) + g(n))$ (đccm)

- $f(n) + g(n) = \Theta(max\{f(n), g(n)\})$

7. Bài tập 7:

- Nếu $f(n) = \Theta(g(n))$ và $g(n) = \Theta(h(n))$, thì $h(n) = \Theta(f(n))$

$f(n) = \theta(g(n))$
$\Rightarrow \exists c_{1f}, c_{2f} \in R^+, \exists n_{0f} \in N \to c_{1f} g(n) \le f(n) \le c_{2f} g(n) \ \forall n \ge n_{0f}$ (1)
$g(n) = \theta(h(n))$
$\Rightarrow \exists c_{1g}, c_{2g} \in R^+, \exists n_{0g} \in N \to c_{1g} h(n) \le g(n) \le c_{2g} h(n) \ \forall n \ge n_{0g}$ (2)
Từ (1) và (2)
$\Rightarrow c_{1f} c_{1g} h(n) \le f(n) \le c_{2f} c_{2g} h(n) \quad \forall n \ge \max\{n_{0f}, n_{0g}\}$
$\Rightarrow \frac{1}{c_{2f} c_{2g}} f(n) \le h(n) \le \frac{1}{c_{1f} c_{1g}} f(n) \quad \forall n \ge \max\{n_{0f}, n_{0g}\}$
Chọn: $c_1 = \frac{1}{c_{2f} c_{2g}}, c_2 = \frac{1}{c_{1g} c_{1g}}, n_0 = \max\{n_{0f}, n_{0g}\}$
Theo định nghĩa Big-Θ ta được $h(n) \in \Theta(fa(n))$
Vậy khẳng định trên là đúng.

- Nếu $f(n) = O(g(n))$ và $g(n) = O(h(n))$, thì $h(n) = \Omega(f(n))$

Với $f(n) = O(g(n))$
$\Rightarrow \exists c_f \in R^+, \exists n_{0f} \in N \to f(n) \le c_f g(n) \ \forall n \ge n_{0f}$ (1)
Với $g(n) = O(h(n))$
$\Rightarrow \exists c_g \in R^+, \exists n_{0g} \in N \to g(n) \le c_g h(n) \ \forall n \ge n_{0g}$ (2)
Từ (1) và (2) $\Rightarrow f(n) \le c_f c_g h(n) \Rightarrow h(n) \ge \frac{1}{c_f c_g} f(n) \ \forall n \ge \max\{n_{0f}, n_{0g}\}$

Chọn: $c = \frac{1}{c_f c_g}$, $n_0 = \max\{n_{0f}, n_{0g}\}$
Theo định nghĩa Big-Ω ta được $h(n) = \Omega(f(n))$
Vậy khẳng định trên là đúng.

- Nếu $f(n) = O(g(n))$ và $g(n) = O(f(n))$, thì $f(n) = g(n)$

Với $f(n) = O(g(n))$
$\Rightarrow \exists c_f \in R^+, \exists n_{0f} \in N \to f(n) \le c_f g(n) \;\; \forall n \ge n_{0f}$ (1)
Với $g(n) = O(f(n))$
$\Rightarrow \exists c_g \in R^+, \exists n_{0g} \in N \to g(n) \le c_g f(n) \;\; \forall n \ge n_{0g}$ (2)
Từ (1) và (2) ta thấy $f(n), g(n)$ lần lượt là một hàm trong tập các hàm thỏa mãn điều kiện (1), (2).
Vì vậy vẫn chưa đủ cơ sở để khẳng định $f(n) = g(n)$
Vậy khẳng định trên là chưa đúng.

- $\frac{n}{100} = \Omega(n)$

Ta thấy: $\frac{n}{100} \ge \frac{n}{1000} \quad \forall n \ge 1$
Chọn: $c = \frac{1}{1000}$, $n_0 = 1$
Theo định nghĩa Big-Ω ta được $\frac{n}{100} = \Omega(n)$
Vậy khẳng định trên là đúng.

- $f(n) + O(f(n)) = \Theta(f(n))$

$\forall g(n) \in O(f(n)) \Rightarrow \exists c_g \in R^+, \exists n_{0g} \in N \to g(n) \le c_g f(n) \quad \forall n \ge n_{0g}$
Ta thấy: $f(n) + O(f(n)) = f(n) + g(n)$
$\Rightarrow f(n) \le f(n) + O(f(n)) \le (1 + c_g) f(n) \quad \forall n \ge n_{0g}$
Chọn: $c_1 = 1, c_2 = 1 + c_g, n_0 = n_{0g}$
Theo định nghĩa Big-Θ ta được $f(n) + O(f(n)) = \Theta(f(n))$
Vậy khẳng định trên là đúng.

- $2^{10n} = O(2^n)$

Giả sử: $2^{10n} = O(2^n)$
$\Rightarrow \exists c \in R^+, \exists n_0 \in N \to 2^{10n} \le c2^n \quad \forall n \ge n_0$
Lấy log cơ số 2 cho hai vế ta được:
$10n \le logc + n$
$\Rightarrow n \le \frac{logc}{2}$ ⇒ không tồn tại n_0 thỏa $n \ge n_0$
Vậy khẳng định trên là sai.

- $\log_{10} n = \Theta(\log_2 n)$

$\log_{10} n = \log_{10} 2 \log_2 n$

Ta thấy: $0{,}1.\log_2 n \le \log_{10} 2 .\log_2 n \le 0{,}4 \log_2 n \quad \forall n \ge 1 \quad (\log_{10} 2 \approx 0.301)$
Chọn: $c_1 = 0.1$, $c_2 = 0.4$, $n_0 = 1$
Theo định nghĩa Big-Θ ta được $\log_{10} n = \Theta(\log_2 n)$
Vậy khẳng định trên là đúng.

8. Bài tập 8:
   - $n + n^2 O(lnn) = O(n^2 lnn)$

     $\forall f(n) \in O(lnn) \Rightarrow \exists c_f \in R^+, \exists n_{0f} \in N \rightarrow f(n) \le c_f lnn \quad \forall n \ge n_{0f}$
     $\Rightarrow n + n^2 O(lnn) = n + n^2 f(n) \le n + n^2 c_f lnn \le (1 + c_f) n^2 lnn \quad \forall n \ge n_{0f}$
     Chọn: $c = 1 + c_f$, $n_0 = n_{0f}$
     Theo định nghĩa Big-O ta được: $n + n^2 O(lnn) = O(n^2 lnn)$ (đccm)

   - $g(n) \in O(h(n)) \Rightarrow O(g(n)) \subseteq O(h(n))$

     $\forall f(n) \in O(g(n)) \Rightarrow \exists c_f \in R^+, \exists n_{0f} \in N \rightarrow f(n) \le c_f g(n) \quad \forall n \ge n_{0f}$
     $g(n) \in O(h(n)) \Rightarrow \exists c_g \in R^+, \exists n_{0g} \in N \rightarrow g(n) \le c_g h(n) \quad \forall n \ge n_{0g}$
     $\Rightarrow f(n) \le c_f c_g h(n) \quad \forall n \ge \max\{n_{0f}, n_{0g}\}$
     Chọn: $c = c_f c_g$, $n_0 = \max\{n_{0f}, n_{0g}\}$
     Theo định nghĩa Big-O ta được $f(n) \in O(h(n))$
     Vậy $\forall f(n) \in O(g(n))$ thì $f(n) \in O(h(n))$
     $\Rightarrow O(g(n)) \subset O(h(n))$ (*)

     Mặc khác: **giả sử** $\boldsymbol{h(n) \in O(g(n))}$
     $\Rightarrow \exists c_h \in R^+, \exists n_{0h} \in N \rightarrow h(n) \le c_h g(n) \quad \forall n \ge n_{0h}$
     $\forall t(n) \in O(h(n)) \Rightarrow \exists c_t \in R^+, \exists n_{0t} \in N \rightarrow t(n) \le c_t h(n) \quad \forall n \ge n_{0f}$
     $\Rightarrow t(n) \le c_t c_h g(n) \quad \forall n \ge \max\{n_{0t}, n_{0h}\}$
     Chọn: $c = c_t c_h$, $n_0 = \max\{n_{0t}, n_{0h}\}$
     Theo định nghĩa Big-O ta được $t(n) \in O(g(n))$
     Vậy $\forall t(n) \in O(h(n))$ thì $t(n) \in O(g(n))$
     $\Rightarrow O(h(n)) \subset O(g(n))$ (**)
     Từ (*) và (**) $\Rightarrow O(h(n)) = O(g(n))$ nếu $h(n) \in O(g(n))$

     Kết luận: $g(n) \in O(h(n)) \Rightarrow O(g(n)) \subseteq O(h(n))$ (đccm)

   - $O(f(n)) = O(g(n)) \Leftrightarrow g(n) \in O(f(n))$ và $f(n) \in O(g(n))$

     Chứng minh $\boldsymbol{g(n) \in O(f(n))}$ **và** $\boldsymbol{f(n) \in O(g(n)) \Rightarrow O(f(n)) = O(g(n))}$
     Từ tính chất (II) được chứng minh ở trên:
     Với $g(n) \in O(f(n)) \Rightarrow O(g(n)) \subseteq O(f(n))$ (1)
     Với $f(n) \in O(g(n)) \Rightarrow O(f(n)) \subseteq O(g(n))$ (2)
     Từ (1) và (2) kết luận:
     Nếu $g(n) \in O(f(n))$ và $f(n) \in O(g(n)) \Rightarrow O(f(n)) = O(g(n))$ (*)

Chứng minh $\boldsymbol{O(f(n)) = O(g(n)) \Rightarrow g(n) \in O(f(n))}$ và $\boldsymbol{f(n) \in O(g(n))}$

Giả sử: $f(n) > 0$ và đơn điệu tăng $\forall n \geq n_{0f}$

$g(n) > 0$ và đơn điệu tăng $\forall n \geq n_{0g}$

Ta thấy: $f(n) \leq 2f(n) \quad \forall n \geq n_{0f}$

Chọn: $c = 2, n_0 = n_{0f}$

Theo định nghĩa Big-O ta được $f(n) \in O(f(n))$

Mà $O(f(n)) = O(g(n))$ nên $\Rightarrow f(n) \in O(g(n))$ (3)

Bên cạnh đó, ta thấy: $g(n) \leq 2g(n) \quad \forall n \geq n_{0g}$

Chọn: $c = 2, n_0 = n_{0g}$

Theo định nghĩa Big-O ta được $g(n) \in O(g(n))$

Mà $O(f(n)) = O(g(n))$ nên $\Rightarrow g(n) \in O(f(n))$ (4)

Từ (3) và (4) kết luận:

Nếu $O(f(n)) = O(g(n)) \Rightarrow g(n) \in O(f(n))$ và $f(n) \in O(g(n))$ (**)

Từ (*) và (**) ta được:

$O(f(n)) = O(g(n)) \Leftrightarrow g(n) \in O(f(n))$ và $f(n) \in O(g(n))$ (đccm)

- $O(f(n)) \subset O(g(n)) \Leftrightarrow f(n) \in O(g(n))$ và $g(n) \notin O(f(n))$

- $f(n) \in O(n) \Rightarrow 2^{f(n)} \in O(2^n)$