TRƯỜNG ĐẠI HỌC CÔNG NGHỆ THÔNG TIN

KHOA KHOA HỌC MÁY TÍNH

BÀI TẬP MÔN PHÂN TÍCH VÀ THIẾT KẾ THUẬT TOÁN

HOMEWORK #01: ĐÁNH GIÁ THUẬT TOÁN DÙNG KỸ THUẬT TOÁN SƠ CẤP

GV hướng dẫn: Huỳnh Thị Thanh Thương

Nhóm thực hiện:

1. Hồ Hồng Hà - 20520480

TP.HCM, ngày 30 tháng 9 năm 2022

Bài 1:

a. $T(n) = \begin{cases} 1000 & Khi\ n < 1 \\ T(n-1) * (1 + 12\%) & Khi\ n \geq 1 \end{cases}$

$T(n) = 1{,}12[1{,}12T(n-2)] = 1{,}12^2 T(n-2)$

$T(n) = 1{,}12^i T(n-i)$

$T(n) = \begin{cases} 1000 & nếu\ n = 0 \\ 1{,}12^i T(n-1) & nếu\ n > 0 \end{cases}$

Quá trình kết thúc khi: $n - i = 0 \to i = n$

$T(30) = 1{,}12^{30}.1000 = 29959{,}92212\ (USD)$

b. $T(n) = \begin{cases} C_1 & Khi\ n \leq 1 \\ T(n-1) + T(n-2) + C_2 & Khi\ n > 1 \end{cases}$

c. $T(n) = \begin{cases} C_1 & Khi\ n = 1 \\ 2T(n/2) + C_2 & Khi\ n > 1 \end{cases}$

d. $T(n) = \begin{cases} C_1 & Khi\ n = 0 \\ T(n-1) + T(n-2) + \cdots + T(0) + C_2 & Khi\ n > 0 \end{cases}$

e. $T(n) = \begin{cases} C_1 & Khi\ n = 0 \\ 3T(n/2) + C_2 n^2 & Khi\ n > 0 \end{cases}$

f. $T(n) = \begin{cases} C_1 & Khi\ n < 1 \\ T(n-3) + C_2 n^2 & Khi\ n \geq 1 \end{cases}$

g. $T(n) = \begin{cases} C_1 & n = 0 \\ T(0) + T(1) + T(2) + \cdots + T(n-1) + C_2 & n \geq 0 \end{cases}$

h. Mã giả:

```
def Move(n, A, C, B)
{
        if(n==1) Chuyển 1 đĩa từ A→C
                else
                Move(n-1,A,B,C)
                Chuyển 1 đĩa từ A→C
                Move (n-1,B,C,A)
}
```

Phương trình đệ quy:

Gọi $T(n)$ là số thao tác chuyển đĩa

$$T(n) = \begin{cases} 0 & khi\ n = 0 \\ 1 & khi\ n = 1 \\ T(n-1) + 1 + T(n-1) & khi\ n > 1 \end{cases}$$

Số thao tác cơ bản:

$T(n) = 2T(n-1) + 1$

$T(n) = 2[2T(n-2) + 1] + 1 = 4T(n-2) + 3$

$T(n) = 4[2T(n-3) + 1] + 3 = 8T(n-3) + 7$

$T(n) = 8[2T(n-4) + 1] + 7 = 16T(n-4) + 15$

$T(n) = 2^i T(n-i) + 2^i - 1$

$$T(n) = \begin{cases} 0 & khi\ n = 0 \\ 1 & khi\ n = 1 \\ 2^i T(n-i) + 2^i - 1 & khi\ n > 1 \end{cases}$$

Quá trình kết thúc khi $n - i = 0 \rightarrow i = n$

$T(n) = 2^n T(0) + 2^n - 1 = 2^n - 1$

Bài 2:

1. T(n) = T(n-1) + 5 = [T(n-2) + 5] + 5 = [T(n-3)+5]+10 = T(n-i) + 5i

   Quá trình dừng lại khi n - i = 1 ⇔ i = n-1

   T(n) = T(1) + 5(n-1) = 5n – 5

2. T(n) = T(n-1) + n = [T(n-2) + n -1] + n = [T(n-3) + n] +2n -1

   T(n) = T(n-i) + ni - $\sum_{k=0}^{i-1} k$

   Quá trình dừng lại khi n - i = 1 ⇔ i = n-1

   $T(n) = T(1) + n(n-1) - \frac{(n-1)(n-2)}{2} = \frac{n^2+n}{2}$

3. T(n) = 3T(n-1)+1 = 3[3T(n-2) + 1] + 1 = 9[3T(n-3)+1] + 3 + 1

   T(n) = 3^iT(n-i) + $\sum_{k=0}^{i-1} 3^k$

   Quá trình dừng lại khi n - i = 1 ⇔ i = n-1

   T(n) = 3^{n-1}T(4) + $\sum_{k=0}^{n-2} 3^k$ = 4.3^{n-1} + $\frac{3^{n-1}-1}{2}$ = $\frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{2}n$

4. T(n) = 2T(n/2) + 1 = 2[2T(n/4) + 1] + 1 = 4[2T(n/8)+1] + 2 + 1

   $T(n) = 2^{i}T\left(\frac{n}{2^{i}}\right) + \sum_{k=0}^{i-1} 2^{k}$

   Quá trình dừng lại khi $\frac{n}{2^{i}} = 1 \Leftrightarrow i = \log_2 n$

   $T(n) = 2^{\log_2 n}T(1) + \sum_{k=0}^{\log_2 n-1} 2^{k} = 2^{\log_2 n} + \sum_{k=0}^{\log_2 n-1} 2^{k}$

   $T(n) = n + \frac{2^{log_2 n}-1}{2-1} = 2n - 1$

5. T(n) = 2T(n/2) + n = 2[2T(n/4) + n/2] + n = 4[2T(n/8)+n/4] + n + n

   $T(n) = 2^{i}T\left(\frac{n}{2^{i}}\right) + ni$

   Quá trình dừng lại khi $\frac{n}{2^{i}} = 1 \Leftrightarrow i = \log_2 n$

   $T(n) = 2^{log_2 n}T(1) + n\, log_2 n = 2^{log_2 n} + n\, log_2 n$

   $T(n) = n + n\, log_2 n$

6. T(n) = 2T(n/2) + n^2 = 2[2T(n/4) + $(n/2)^2$] + n = 4[2T(n/8)+$(n/4)^2$] + n^2/2+ n^2

   $T(n) = 2^{i}T\left(\frac{n}{2^{i}}\right) + n^2 \sum_{k=0}^{i-1} \frac{1}{2^{k}}$

   Quá trình dừng lại khi $\frac{n}{2^{i}} = 1 \Leftrightarrow i = \log_2 n$

   $T(n) = 2^{log_2 n}T(1) + n^2 \sum_{k=0}^{log_2 n-1} \frac{1}{2^k} = 2^{log_2 n} + n^2 \sum_{k=0}^{log_2 n-1} \frac{1}{2^k}$

   $T(n) = n + n^2 \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{log_2 n} - 1}{\frac{1}{2} - 1} = 2n^2 - n$

7. T(n) = 2T(n/2) + logn = 2[2T(n/4) + log(n/2)] + logn

   = 4[2T(n/8)+log(n/4)] + 2log(n/2) + logn

   $T(n) = 2^{i}T\left(\frac{n}{2^{i}}\right) + \sum_{k=0}^{i-1}(2^{k} log\frac{n}{2^{k}})$

   $= 2^{i}T\left(\frac{n}{2^{i}}\right) + logn \sum_{k=0}^{i-1} 2^{k} - log2 \sum_{k=0}^{i-1}[(2^{k} log2^{k})/log2]$

   $= 2^{i}T\left(\frac{n}{2^{i}}\right) + logn \sum_{k=0}^{i-1} 2^{k} - log2 \sum_{k=0}^{i-1} k2^{k}$

$$= 2^iT\left(\frac{n}{2^i}\right) + logn(2^i - 1) - log2((i-2)2^i + 2)$$

Quá trình dừng lại khi $\frac{n}{2^i} = 1 \Leftrightarrow i = log_2 n$

$T(n) = 2^{\log_2 n}\mathrm{T}(1) + logn(2^{log_2 n} - 1) - log2((log_2 n - 2)2^{log_2 n} + 2)$

$= (2log2 + 1)n - logn - 2log2$

Bài 3:

1. $T(n) = 3T\left(\frac{n}{2}\right) + n^2$

   $T(n) = 3\left[3T\left(\frac{n}{4}\right) + \left(\frac{n}{2}\right)^2\right] + n^2 = 9T\left(\frac{n}{4}\right) + \left(1 + \frac{3}{4}\right)n^2$

   $T(n) = 9\left[3T\left(\frac{n}{8}\right) + \left(\frac{n}{4}\right)^2\right] + \left(1 + \frac{3}{4}\right)n^2 = 27T\left(\frac{n}{8}\right) + \left(1 + \frac{3}{4} + \frac{9}{16}\right)n^2$

   $T(n) = 3^iT\left(\frac{n}{2^i}\right) + n^2\sum_{k=0}^{i-1}\left(\frac{3}{4}\right)^k$

   Quá trình dừng lại khi: $\frac{n}{2^i} = 1 \rightarrow i = \log_2 n$

   $T(n) = 3^{\log_2 n}T(1) + n^2\sum_{k=0}^{\log_2 n - 1}\left(\frac{3}{4}\right)^k$

   $T(n) = 3^{\log_2 n} + n^2\frac{1-\left(\frac{3}{4}\right)^{\log_2 n}}{1-\frac{3}{4}} = n^{\log_2 3} + 4n^2 - 4n^{\log_2 3}$

   $T(n) = 4n^2 - 3n^{log_2 3}$

2. $T(n) = 8T\left(\frac{n}{2}\right) + n^3$

   $T(n) = 8\left[8T\left(\frac{n}{4}\right) + \left(\frac{n}{2}\right)^3\right] + n^3 = 8^2T\left(\frac{n}{4}\right) + 2n^3$

   $T(n) = 8^2\left[8T\left(\frac{n}{8}\right) + \left(\frac{n}{4}\right)^3\right] + 2n^3 = 8^3T\left(\frac{n}{8}\right) + 3n^3$

   $T(n) = 8^iT\left(\frac{n}{2^i}\right) + in^3$

   Quá trình dừng lại khi: $\frac{n}{2^i} = 1 \rightarrow i = \log_2 n$

   $T(n) = 8^{\log_2 n}T(1) + \log_2 n\,.\,n^3 = \log_2 n\,.\,n^3 + n^3$

3. $T(n) = 4T\left(\frac{n}{3}\right) + n$

$T(n) = 4\left[4T\left(\frac{n}{9}\right) + \frac{n}{3}\right] + n = 16T\left(\frac{n}{9}\right) + \left(1 + \frac{4}{3}\right)n$

$T(n) = 16\left[4T\left(\frac{n}{27}\right) + \frac{n}{9}\right] + \left(1 + \frac{4}{3}\right)n = 64T\left(\frac{n}{27}\right) + \left(1 + \frac{4}{3} + \frac{16}{9}\right)n$

$T(n) = 4^i T\left(\frac{n}{3^i}\right) + n\sum_{k=0}^{i-1}\left(\frac{4}{3}\right)^k = 4^i T\left(\frac{n}{3^i}\right) + n\frac{1-\left(\frac{4}{3}\right)^i}{1-\frac{4}{3}}$

Quá trình dừng lại khi: $\frac{n}{3^i} = 1 \to i = \log_3 n$

$T(n) = 4^{\log_3 n}T(1) - 3n\left(1 - \left(\frac{4}{3}\right)^{\log_3 n}\right) = n^{\log_3 4} - 3n + 3n^{\log_3 4}$

$T(n) = 4n^{\log_3 4} - 3n$

4. $T(n) = 9T\left(\frac{n}{3}\right) + n^2$

$T(n) = 9\left[9T\left(\frac{n}{9}\right) + \left(\frac{n}{3}\right)^2\right] + n^2 = 9^2T\left(\frac{n}{9}\right) + 2n^2$

$T(n) = 9^2\left[9T\left(\frac{n}{27}\right) + \left(\frac{n}{9}\right)^2\right] + 2n^2 = 9^3T\left(\frac{n}{27}\right) + 3n^2$

$T(n) = 9^iT\left(\frac{n}{3^i}\right) + in^2$

Quá trình dừng lại khi: $\frac{n}{3^i} = 1 \to i = \log_3 n$

$T(n) = 9^{\log_3 n}T(1) + n^2\log_3 n = n^2\log_3 n + n^2$

5. $T(n) = 2T(\sqrt{n}) + 1$

$T(n) = 2\left[2T\left(\sqrt{\sqrt{n}}\right) + 1\right] + 1 = 4T\left(n^{\frac{1}{4}}\right) + (1 + 2)$

$T(n) = 4\left[2T\left(n^{\frac{1}{8}}\right) + 1\right] + (1 + 2) = 8T\left(n^{\frac{1}{8}}\right) + (1 + 2 + 4)$

$T(n) = 2^iT\left(n^{\frac{1}{2^i}}\right) + \sum_{k=0}^{i-1}2^k$

Quá trình dừng lại khi: $n^{\frac{1}{2^i}} = 2 \to i = \log_2(\log_2 n)$

$T(n) = \log_2 n\, T(2) + \sum_{k=0}^{\log_2(\log_2 n)-1}2^k$

$T(n) = \log_2 n - 1$

Bài 4:

a. $\begin{cases} T(n) = 4T(n-1) - 3T(n-2) \\ T(0) = 1 \\ T(1) = 2 \end{cases}$

$T(n) - 4T(n-1) + 3T(n-2) = 0$

Đặt $T(n) = x^n$

$x^n - 4x^{n-1} + 3x^{n-2} = 0 \Leftrightarrow x^{(n-2)}(x^2 - 4x + 3) = 0$

Phương trình đặc trưng của phương trình truy hồi là: $x^2 - 4x + 3 = 0$

Phương trình đặc trưng có 2 nghiệm đơn là x_1=1, x_2 =2

$T(n) = c_1 + c_2 3^n$

$\begin{cases} T(0) = c_1 + \ \ c_2 = 1 \\ T(1) = c_1 + 3c_2 = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c_1 = \frac{1}{2} \\ c_2 = \frac{1}{2} \end{cases}$

$T(n) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} 3^n$

b. $\begin{cases} \quad T(n) = 4T(n-1) - 5T(n-2) + 2T(n-3) \\ T(0) = 0 \\ T(1) = 1 \\ T(2) = 2 \end{cases}$

$T(n) - 4T(n-1) + 5T(n-2) - 2T(n-3) = 0$

Đặt $T(n) = x^n$

$x^n - 4x^{n-1} + 5x^{n-2} - 2x^{n-3} = 0$

$\Leftrightarrow x^{(n-3)}(x^3 - 4x^2 + 5x - 2) = 0$

Phương trình đặc trưng của phương trình truy hồi là:

$(x^3 - 4x^2 + 5x - 2) = 0 \Leftrightarrow (x-1)^2(x-2) = 0$

Giải phương trình đặc trưng có: 1 nghiệm đơn x_1 = 2 và 1 nghiệm kép x_2 = 1

$T(n) = c_1 1^n + c_2 n 1^n + c_3 2^n$

$\begin{cases} T(0) = c_1 + c_3 \qquad\qquad = 0 \\ \ T(1) = c_1 + c_2 + 2c_3 \quad = 1 \\ \ T(2) = c_1 + 2c_2 + 4c_3 = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c_1 = 0 \\ c_2 = \ 1 \\ c_3 = \ 0 \end{cases}$

$T(n) = n$

c. $\begin{cases} T(n) = T(n-1) + T(n-2) \\ T(0) = 1 \\ T(1) = 1 \end{cases}$

$T(n) - T(n-1) - T(n-2) = 0$

Đặt $T(n) = x^n$

$x^n - x^{n-1} - x^{n-2} = 0$

$\Leftrightarrow x(x^2 - x - 1) = 0$

Phương trình đặc trưng của phương trình truy hồi là:

$(x^2 - x - 1) = 0$

Phương trình có 2 nghiệm phân biệt: $x_1 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$, $x_2 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$

$T(n) = c_1 \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n + c_2 \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n$

$\begin{cases} T(0) = c_1 + c_2 = 1 \\ T(1) = \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) c_1 + \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) c_2 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c_1 = \frac{5-\sqrt{5}}{10} \\ c_2 = \frac{5+\sqrt{5}}{10} \end{cases}$

$T(n) = \frac{5-\sqrt{5}}{10}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n + \frac{5+\sqrt{5}}{10}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n$

Bài 5:

a. $T(n) = \begin{cases} 1 & khi\ n = 0 \\ 2T(n-1) + 7 & khi\ n > 0 \end{cases}$

Hàm sinh của dãy vô hạn $\{T(n)\}_0^\infty$ là:

$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} T(n)x^n$

$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} [2T(n-1) + 7]x^n + T(0)$

$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} [2T(n-1)]x^n + \sum_{n=1}^{\infty} 7x^n + 1$

$A = \sum_{n=1}^{\infty} [2T(n-1)]x^n = 2x \sum_{n=1}^{\infty} T(n-1)x^{n-1} = 2xf(x)$

$B = \sum_{n=1}^{\infty} 7x^n = 7\sum_{n=0}^{\infty} x^n - 7 = \frac{7}{1-x} - 7$

$\Rightarrow f(x) = 2xf(x) + \left(\frac{7}{1-x} - 7\right) + 1$

$\Leftrightarrow f(x)(1-2x) = \frac{1+6x}{1-x}$

$\Leftrightarrow f(x) = \frac{1+6x}{(1-x)(1-2x)} = \frac{8}{1-2x} - \frac{7}{1-x} = 8\sum_{n=0}^{\infty}(2x)^n - 7\sum_{n=0}^{\infty} x^n$

$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty}(8.\,2^n - 7)x^n$

$\Rightarrow T(n) = 8.2^n - 7$

b. $T(n) = \begin{cases} 7T(n-1) - 12T(n-2) & nếu\ n \geq 2 \\ 1 & nếu\ n = 0 \\ 2 & nếu\ n = 1 \end{cases}$

Hàm sinh của dãy vô hạn $\{T(n)\}_0^{\infty}$ là:

$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} T(n)x^n$

$f(x) = \sum_{n=2}^{\infty}[7T(n-1) - 12T(n-2)]x^n + T(0) + T(1)x$

$f(x) = \sum_{n=2}^{\infty}[7T(n-1)]x^n - \sum_{n=2}^{\infty}[12T(n-2)]x^n + 1 + 2x$

$A = \sum_{n=2}^{\infty}[7T(n-1)]x^n = 7x(\sum_{n=2}^{\infty} T(n-1)x^{n-1})$

$= 7x(f(x) - T(0)x^0) = 7xf(x) - 7x$

$B = \sum_{n=2}^{\infty}[12T(n-2)]x^n = 12x^2(\sum_{n=2}^{\infty} T(n-2)x^{n-2}) = 12x^2 f(x)$

$\Rightarrow f(x) = 7xf(x) - 7x - 12x^2 f(x) + 2x + 1$

$\Leftrightarrow f(x)(12x^2 - 7x + 1) = -5x + 1$

$\Leftrightarrow f(x) = \frac{-5x+1}{12x^2-7x+1} = \frac{2}{1-3x} - \frac{1}{1-4x} = 2\sum_{n=0}^{\infty}(3x)^n - \sum_{n=0}^{\infty}(4x)^n$

$= \sum_{n=0}^{\infty}(2.3^n - 4^n)x^n$

$\Rightarrow T(n) = 2.3^n - 4^n$

c. $T(n+1) = T(n) + 2(n+2) \quad nếu\ n \geq 1$
$T(0) = 3$

$T(n+1) = T(n) + 2(n+2)$

$T(m) = T(m-1) + 2(m+1)$

$T(n) = T(n-1) + 2(n+1)$

Hàm sinh của dãy vô hạn $\{T(n)\}_0^{\infty}$ là:

$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} T(n)x^n$

$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty}(T(n-1) + 2(n+1))x^n + 3$

$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty}(T(n-1))x^n + \sum_{n=1}^{\infty}(2(n+1))x^n + 3$

$f(x) = xf(x) + \frac{2}{(1-x)^2} - 2 + 3$

$f(x) = \frac{2}{(1-x)^3} - \frac{2}{1-x}$

$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty}(n+2)(n+2)x^n + \sum_{n=0}^{\infty} x^n$

$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty}[(n+2)(n+2) + 1]x^n$

$T(n) = n^2 + 3n + 3$

Bài 6:

i. Đoán $f(n) = an^3$

*Chứng minh $T(1) \leq f(1)$

Chọn a sao cho $a \geq c_1$ ta được điều cần chứng minh

*Giả thiết quy nạp $T(k) \leq f(k)\ \forall k < n$

*Chứng minh $T(n) \leq f(n)$

$T(n) = 4T\left(\frac{n}{2}\right) + n \leq 4f\left(\frac{n}{2}\right) + n$

$\Leftrightarrow T(n) \leq 4a\left(\frac{n}{2}\right)^3 + n \quad \Leftrightarrow T(n) \leq a.\frac{n^3}{2} + n$

$\Leftrightarrow T(n) \leq \text{f(n)} - a.\frac{n^3}{2} + n$

Để $T(n) \leq f(n)$ thì $-a.\frac{n^3}{2} + n \leq 0 \Leftrightarrow -a.\frac{n^2}{2} + 1 \leq 0$

Tìm a thoả $\begin{cases} a \geq c_1 \\ -a.\frac{n^2}{2} + 1 \leq 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow -a.\frac{n^2}{2} + 1 \leq -c_1.\frac{n^2}{2} + 1 \leq 0$

Nếu $c_1 = 0$ thì $-c_1.\frac{n^2}{2} + 1 = 1 > 0$

Do đó dự đoán $f(n) = an^3$ là sai

ii. Đoán $f(n) = an^2$

*Chứng minh $T(1) \leq f(1)$

Chọn a, b sao cho $a \geq c_1$ ta được điều cần chứng minh

*Giả thiết quy nạp $T(k) \le f(k)\ \forall k < n$

*Chứng minh $T(n) \le f(n)$

$$T(n) = 4T\left(\frac{n}{2}\right) + n \le 4f\left(\frac{n}{2}\right) + n$$

$$\Leftrightarrow T(n) \le 4a\left(\frac{n}{2}\right)^2 + n \Leftrightarrow T(n) \le an^2 + n$$

$$\Leftrightarrow T(n) \le f(n) + n$$

Để có điều cần chứng minh thì $n = 0$

Xét thấy điều kiện dừng của bài toán là n=1 do đó n=0 là vô lý nên dự đoán $f(n) = an^2$ là sai

iii. Đoán $f(n) = an^2 - bn$

*Chứng minh $T(1) \le f(1)$

Chọn a, b sao cho $a - b \ge c_1$ ta được điều cần chứng minh

*Giả thiết quy nạp $T(k) \le f(k)\ \forall k < n$

*Chứng minh $T(n) \le f(n)$

$$T(n) = 4T\left(\frac{n}{2}\right) + n \le 4f\left(\frac{n}{2}\right) + n$$

$$\Leftrightarrow T(n) \le 4a\left(\frac{n}{2}\right)^2 - 4.\frac{bn}{2} + n \Leftrightarrow T(n) \le an^2 - 2bn + n$$

$$\Leftrightarrow T(n) \le f(n) + n(-b + 1)$$

Nếu chọn b sao cho $b \le 1$ thì ta có điều cần chứng minh

Vậy chọn a,b sao cho $a - b \ge c_1$ và $b \le 1$

Chọn $b = 1,\ a = c_1 + 1$

Thay a, b vào ta biểu thức $a - b \ge c_1 \Leftrightarrow c_1 + 1 - 1 \ge c_1$

Vậy: $T(n) \le (c_1 - 1)n^2 - n$

Bài 7:

Đoán $f(n) = an + b$

*Chứng minh $T(5) \le f(5)$

Chọn a, b sao cho $5a + b \geq 1$ ta được điều cần chứng minh

*Giả thiết quy nạp $T(k) \leq f(k)\ \forall k < n$

*Chứng minh $T(n) \leq f(n)$

$$T(n) = T\left(\frac{n}{2}\right) + T\left(\frac{n}{4}\right) + n \leq f\left(\frac{n}{2}\right) + f\left(\frac{n}{4}\right) + n$$

$$\Leftrightarrow T(n) \leq a.\frac{n}{2} + b + a.\frac{n}{4} + b + n$$

$$\Leftrightarrow T(n) \leq 3a.\frac{n}{4} + 2b + n$$

$$\Leftrightarrow T(n) \leq f(n) - \frac{an}{4} + b + n$$

Để có điều cần chứng minh ta chỉ cần $-\frac{an}{4} + b + n \leq 0$

Vậy $\begin{cases} 5a + b \geq 1 \\ -\frac{an}{4} + b + n \leq 0 \end{cases}$

Chọn $\begin{cases} \mathrm{a} = 5 \\ \mathrm{b} = 0 \end{cases}$

Thế a, b vào ta được $\begin{cases} 5.5 + 0 \geq 1 \\ -\frac{5n}{4} + 0 + n \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 25 \geq 1 \\ -\frac{n}{4} \leq 0 \end{cases}$

Vậy chọn $\begin{cases} \mathrm{a} = 5 \\ \mathrm{b} = 0 \end{cases}$

Vậy: $T(n) \leq 5n$