TRƯỜNG ĐẠI HỌC CÔNG NGHỆ THÔNG TIN

KHOA KHOA HỌC MÁY TÍNH

BÀI TẬP MÔN PHÂN TÍCH VÀ THIẾT KẾ THUẬT TOÁN

# HOMEWORK #01: ĐÁNH GIÁ THUẬT TOÁN DÙNG KỸ THUẬT TOÁN SƠ CẤP

GV hướng dẫn: Huỳnh Thị Thanh Thương

Nhóm thực hiện:

1. Hồ Hồng Hà - 20520480

TP.HCM, ngày 15 tháng 9 năm 2022

**Bài 1. Tính tổng hữu hạn**

*a.* 1+2+3+…+999 $= \sum_{i=1}^{500}(2i-1) = \sum_{i=1}^{500} 2i \ - \sum_{i=1}^{500} 1$

$$= 2\sum_{i=1}^{500} i \ - \ \sum_{i=1}^{500} 1$$

$$= 2 \times \frac{500(500+1)}{2} - \ 500 \ = \ 249500$$

*b.* 2+4+8+…+1024 $= \sum_{i=1}^{10}(2^i) \ = \ \sum_{i=0}^{10}(2^i) \ - \ \sum_{i=0}^{0}(2^i)$

$$= 2^{10+1} \ - \ 1 \ - \ 1 = \ 2046$$

*c.* $\sum_{i=3}^{n+1} 1 = n+1 \ - \ 3 \ +1 \ = \ n-1$

*d.* $\sum_{i=3}^{n+1} i = \sum_{i=1}^{n+1} i \ - \ \sum_{i=1}^{2} i \ = \ \frac{(n+1)(n+1+1)}{2} - \ \frac{2(2+1)}{2} \ = \frac{n^2+3n-4}{2}$

*e.* $\sum_{i=0}^{n-1} i(i+1) = \ \sum_{i=0}^{n-1}(i^2+i) \ = \ \sum_{i=0}^{n-1} i^2 + \sum_{i=0}^{n-1} i$

$$= \frac{(n-1)(n-1+1)(2(n-1)+1)}{6} + \ \frac{(n-1)(n-1+1)}{2}$$

$$= \frac{n(n-1)(2n-1)}{6} + \ \frac{n(n-1)}{2} = \ \frac{n(n-1)(2n+2)}{6}$$

*f.* $\sum_{j=1}^{n} 3^{j+1} = \ 3\sum_{j=1}^{n} 3^j \ = \ 3\left(\frac{3^{n+1}-1}{2} \ -1\right) \ = \ \frac{3^{n+2}-9}{2}$

*g.* $\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} ij = \sum_{i=1}^{n} i\left(\frac{n(n+1)}{2}\right) = \ \frac{n(n+1)}{2}\sum_{i=1}^{n} i$

$$= \frac{n(n+1)}{2} \times \frac{n(n+1)}{2} \ = \ \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$$

*h.*

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i(i+1)} = \left(1-\frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{n-1} \ - \frac{1}{n}\right) + \left(\frac{1}{n} \ - \frac{1}{n+1}\right)$$

$$= \ 1 - \ \frac{1}{n+1} \ = \ \frac{n}{n+1}$$

*i.*

$$\sum_{j\in 2,3,5}(j^2+j) = \sum_{j=2}^{5}(j^2+j) - \sum_{j=4}^{4}(j^2+j)$$

$$= \sum_{j=2}^{5} j^2 + \sum_{j=2}^{5} j - 20 = \frac{5(5+1)(2.5+1)}{6} - 1 + \frac{5(5+1)}{2} - 1 - 20$$

$$= 48$$

*j.* $\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=0}^{n}\sum_{k=0}^{100}(i+j) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=0}^{n}\big((100+1)(i+j)\big)$

$= \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=0}^{n}(101(i+j)) = 101\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=0}^{n}(i+j)$

$= 101\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=0}^{n} i + 101\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=0}^{n} j$

$= 101\sum_{i=1}^{m}(n+1)i + 101\sum_{i=1}^{m}\frac{n(n+1)}{2}$

$= 101(n+1)\left(\frac{m(m+1)}{2} + \frac{mn}{2}\right) = \frac{101m(n+1)(m+n+1)}{2}$

**Bài 2.**

Gọi $\alpha_i$ là số lần lặp của while trong (xét độc lập với while ngoài)

$Gán(n) = 2 + 2n + 2\sum_{i=1}^{n}\alpha_i$

$SS(n) = n + 1 + \sum_{i=1}^{n}(\alpha_i + 1)$

$\alpha_i$ = số con j với j chạy từ 1 tới $i^2$ bước tăng là 1

= $i^2 - 1 + 1 = i^2$

$Gán(n) = 2 + 2n + 2\sum_{i=1}^{n} i^2 = 2 + 2n + \frac{n(n+1)(2n+1)}{3}$

$SS(n) = n + 1 + \sum_{i=1}^{n}(i^2+1) = n + 1 + \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + n$

$= 2n + 1 + \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

**Bài 3.**

Gọi $\alpha_i$ là số lần lặp của while trong($P_i$) (xét độc lập với while ngoài)

$Gán(n) = 2 + 2n + 2\sum_{i=1}^{n} \alpha_i$

$SS(n) = n + 1 + \sum_{i=1}^{n}(\alpha_i + 1)$

$\alpha_i$ = số con j với j chạy từ n- $i^2$ tới $i^2$ bước tăng là 1

$= i^2 - (n - i^2) + 1 = 2i^2 - n + 1$

While trong($P_i$) chỉ thực hiện khi $n - i^2 \le i^2$

Suy ra:

$$\alpha_i = \begin{cases} 0\,, Nếu\ i^2 < n/2 \\ 2i^2 - n + 1,\ i^2 \ge n/2 \end{cases}$$

$Gán(n) = 2 + 2n + 2\sum_{i=\sqrt{\frac{n}{2}}}^{n}(2i^2 - n + 1) =$

$$= 2 + 2n + 4\sum_{i=\sqrt{\frac{n}{2}}}^{n}(i^2) - 2\left(n - \sqrt{\frac{n}{2}} + 1\right)(n-1)$$

$$= 2 + 2n + 4\sum_{i=\sqrt{\frac{n}{2}}}^{n}(i^2) - 2\left(n - \sqrt{\frac{n}{2}} + 1\right)(n-1)$$

$$= 2\left(2 + n - n^2 + (n-1)\sqrt{\frac{n}{2}}\right) + 4\sum_{i=\sqrt{\frac{n}{2}}}^{n}(i^2)$$

$SS(n) = n + 1 + \sum_{i=\sqrt{\frac{n}{2}}}^{n}(2i^2 - n + 1) + \sum_{i=1}^{n} 1$

$$= n + 1 + 2\sum_{i=\sqrt{\frac{n}{2}}}^{n}(i^2) - \left(n - \sqrt{\frac{n}{2}} + 1\right)(n-1)\ + n$$

$$= 2n + 1 + 2\sum_{i=\sqrt{\frac{n}{2}}}^{n}(i^2) - \left(n - \sqrt{\frac{n}{2}} + 1\right)(n-1)$$

$$= \left(2 + 2n\ -\ n^2 + (n-1)\sqrt{\frac{n}{2}}\right) + 2\sum_{i=\sqrt{\frac{n}{2}}}^{n}(i^2)$$

**Bài 4.**

Gọi $\alpha_i$ là số lần lặp của while trong (xét độc lập với while ngoài)

$Gán(n) = 2 + 4n + 2\sum_{i=1}^{n}\alpha_i$

$SS(n) =\ n + 1 +\ \sum_{i=1}^{n}(\alpha_i + 1)$

$\alpha_i$ = số con j với j chạy từ 1 tới i bước nhảy là j*2

Suy ra $\alpha_i$ là số con k ∈ N sao cho $2^k \leq i$ => $0 \leq k \leq \log_2 i$

Vậy suy ra $\alpha_i = \lfloor \log_2 i \rfloor + 1$

$Gán(n) = 2 + 4n + 2\sum_{i=1}^{n}(\lfloor \log_2 i \rfloor + 1)\ = 2 + 6n + 2\sum_{i=1}^{n}(\lfloor \log_2 i \rfloor)$

$SS(n) = n + 1 + \sum_{i=1}^{n}(\lfloor \log_2 i \rfloor + 1 + 1)\ =\ 1 + 3n + 2\sum_{i=1}^{n}(\lfloor \log_2 i \rfloor + 1)$

**Bài 5.**

Gọi $\alpha_i$ là số lần lặp của while( $j \leq\ 2 * i$) (xét độc lập với while ngoài)

$\beta_i$ là số lần lặp của while( $k > 0$) (xét độc lập với while ngoài)

$Gán(n) = 2 + 3n + 2\sum_{i=1}^{n}\alpha_i + 2\sum_{i=1}^{n}\beta_i$

$SS(n) = n + 1 + \sum_{i=1}^{n}(\alpha_i + 1) + \sum_{i=1}^{n}(\beta_i + 1)$

$\alpha_i$ = số con j với j chạy từ n-1 tới 2i bước tăng là 2

Vòng while ($j \leq\ 2i$) chỉ thực hiện khi $j \leq 2i \Leftrightarrow n - i \leq 2i \Leftrightarrow i \geq\ n/2$

Vậy: $\alpha_i = \begin{cases} 0,\ nếu\ i < n/2 \\ (2i - (n-i))/2\ + 1,\ nếu\ i \geq n/2 \end{cases}$

$$\alpha_i = \begin{cases} 0,\ nếu\ i < n/2 \\ (3i - n)/2\ + 1,\ nếu\ i \geq n/2 \end{cases}$$

$\beta_i$ = số con k chạy từ i đến 1 bước nhảy là k/2

= số con $l \in$ N sao cho $\frac{i}{2^l} \geq\ 0$ => $0 \leq k \leq \log_2 i$

Vậy: $\beta_i\ = \lfloor \log_2 i \rfloor + 1$

$Gán(n) = 2 + 3n + 2\sum_{i=1}^{n} \alpha_i + 2\sum_{i=1}^{n} \beta_i$

$$=\ 2 + 3n + 2\sum_{i=\frac{n}{2}}^{n}\left(\frac{3i-n}{2} + 1\right) + 2\sum_{i=1}^{n}(\lfloor \log_2 i \rfloor + 1\ )$$

$$=\ 2 + 5n + \frac{5n^2+18n+16}{8} + 2\sum_{i=1}^{n}(\lfloor \log_2 i \rfloor)$$

$SS(n) = n + 1 + \sum_{i=1}^{n}(\alpha_i + 1) + \sum_{i=1}^{n}(\beta_i + 1)$

$$= n + 1 + \sum_{i=\frac{n}{2}}^{n}\left(\frac{3i-n}{2} + 1\right) + \sum_{i=1}^{n} 1 + \sum_{i=1}^{n}(\lfloor \log_2 i \rfloor + 1 + 1)$$

$$= 4n + 1 + \frac{5n^2+18n+16}{16} + \sum_{i=1}^{n}(\lfloor \log_2 i \rfloor)$$

**Bài 6.**

Gọi $\alpha_i$ là số lần lặp của while($j \leq x$) (xét độc lập với while ngoài)

| i | 1 n | 2n | 3n | 4n |
|---|---|---|---|---|
| x | − | + | + | − |
| y | − | − | + | + |

Câu lệnh if(y>0) chỉ thực hiện khi

$x > 0 \Leftrightarrow (n-i)(i-3n) > 0 \Leftrightarrow n < i < 3n$

Số lần thực hiện so sánh y>0 = số con i chạy từ n+1 đến 3n-1 bước tăng là 1

= $(3n-1)-(n+1)+1 = 2n-1$

Số lần thực hiện câu lệnh gán count = count +1 là số con i thoả 2 điều kiện là x>0 và y>0. Số lần thực hiện gán count là $(3n-1)-(2n+1)+1 = n-1$

$Gán(n) = 2 + 16n + 2\sum_{i=1}^{4n}\alpha_i + n - 1$

$= 1 + 17n + 2\sum_{i=1}^{4n}\alpha_i$

$SS(n) = 4n + 1 + 4n + 2n - 1 + \sum_{i=1}^{4n}(\alpha_i + 1)$

$= 10n + \sum_{i=1}^{4n}(\alpha_i + 1)$

$\alpha_i$ = số con *j* chạy từ 1 đến *x* với bước tăng là 2

Vòng while trong chỉ thực hiện khi $x \geq 1$ hay $x > 0$

$\Rightarrow n < i < 3n$

Vậy: $\alpha_i = \begin{cases} 0, \ nếu\ i \leq n\ hoặc\ i \geq 3n \\ \frac{4ni-3n^2-i^2}{2}, \ nếu\ n < i < 3n \end{cases}$

$Gán(n) = 1 + 17n + 2\sum_{i=1}^{4n}\alpha_i$

$= 1 + 17n + 2\sum_{i=n+1}^{3n-1}(\frac{4ni-3n^2-i^2}{2})$

$= 1 + 17n + \frac{4n^3-n}{3} = \frac{4n^3+50n+3}{3}$

$SS(n) = 10n + \sum_{i=1}^{4n}(\alpha_i + 1)$

$$= 10n + \sum_{i=n+1}^{3n-1}(\frac{4ni-3n^2-i^2}{2}) + 4n$$

$$= 10n + \frac{4n^3-n}{6} + 4n = \frac{4n^3+83n}{6}$$

**Bài 7.**

Gọi $\alpha_i$ là số lần lặp của while trong (xét độc lập với while ngoài)

<table>
<tr><td>i</td><td colspan="3">1        n                    3n      4n</td></tr>
<tr><td>x</td><td>−</td><td>+</td><td>−</td></tr>
</table>

$\alpha_i$ = số con *j* chạy từ 1 đến *x* với bước tăng là 1

Vòng while trong chỉ thực hiện khi $x \geq 1$ hay $x > 0$

$\Rightarrow n < i < 3n$

Vậy: $\alpha_i = \begin{cases} 0, \ nếu\ i \leq n\ hoặc\ i \geq 3n \\ 4ni - 3n^2 - i^2 - 1 + 1, \ nếu\ n < i < 3n \end{cases}$

Câu lệnh count = count -2 chỉ thực hiện khi while trong thực hiện và

$i \geq 2y \Leftrightarrow i \geq 2(i-2n) \Leftrightarrow i \leq 4n$

⇒ Số lần thực hiện câu lệnh gán count = count+2 là số lần lặp của while trong

$$Gán(n) = 2 + 16n + 2\sum_{i=1}^{4n}\alpha_i$$

$$= 2 + 16n + 2\sum_{i=n+1}^{3n-1}(4ni - 3n^2 - i^2)$$

$$= 2 + 16n + \frac{8n^3-2n}{3} = \frac{8n^3+46n+6}{3}$$

$$SS(n) = 4n + 1 + \sum_{i=1}^{4n}(\alpha_i + 1) + \sum_{i=1}^{4n}\alpha_i$$

$$= 4n + 1 + \sum_{i=n+1}^{3n-1}(4ni - 3n^2 - i^2) + 4n + \sum_{i=n+1}^{3n-1}(4ni - 3n^2 - i^2)$$

$= 8n + 1 + \frac{4n^3 - n}{3} + \frac{4n^3 - n}{3} = \frac{8n^3 + 22n + 3}{3}$

**Bài 8.**

Gọi $\alpha_i$ là số lần lặp của while trong (xét độc lập với while ngoài)\

| i | 1 n | 2n | 3n |
|---|---|---|---|
| x | + | + | − |
| y | − | + | + |

$\alpha_i$ = số con *j* chạy từ 1 đến *x* với bước tăng là 1

Vòng while trong chỉ thực hiện khi $x \geq 1$ hay $x > 0$

$\Rightarrow i < 2n$

Vậy: $\alpha_i = \begin{cases} 0, \ nếu \ i \geq 2n \\ 2n - i, \ nếu \ i < 2n \end{cases}$

Câu lệnh count = count - 1 chỉ thực hiện khi while trong thực hiện và $j \geq n$

$\Rightarrow n \leq x \Leftrightarrow i \leq n$

⇒ Số lần thực hiện câu lệnh gán count = count-1 là số con j chạy từ n tới x bước tăng là 1. Số lần thự hiện gán count =count -1 là:

$2n - i - n + 1 = n - i + 1$ với $i \leq n$

Câu lệnh if(x>0) chỉ thực hiện khi

$y > 0 \Leftrightarrow i - n > 0 \Leftrightarrow i > n$

Số lần thực hiện so sánh x>0 = số con i chạy từ n+1 đến 3n bước tăng là 1

$= 3n - n - 1 + 1 = 2n$

Số lần thực hiện câu lệnh gán count = count +1 là số con i thoả 2 điều kiện là y>0 và x>0. Số lần thực hiện gán count = count+1 là:

$(2n-1)-(n+1)+1=n-1$

$Gán(n) = 2 + 12n + \sum_{i=1}^{3n} \alpha_i + \sum_{i=1}^{3n} \ (n-i+1) + n - 1$

$= 1 + 13n + \sum_{i=1}^{2n-1}(2n-i) + \sum_{i=1}^{n} \ (n-i+1)$

$= 1 + 13n + 2n^2 - n + \frac{n^2+n}{2} \ = \ \frac{5n^2+25n+2}{2}$

$SS(n) = \ 3n + 1 + \ \sum_{i=1}^{3n}(\alpha_i + 1) \ + \sum_{i=1}^{3n} \alpha_i + 3n + 2n$

$= \ 8n + 1 + \sum_{i=1}^{2n-1}(2n-i) \ + 3n + \sum_{i=1}^{2n-1}(2n-i)$

$= 11n + 1 + 4n^2 - 2n = 4n^2 + 9n + 1$

**Bài 9.**

Gọi $\alpha_i$ là số lần lặp của vòng while trong($P_i$)(xét độc lập với while ngoài)

$Gán(n) = 2 + 3n + 3\sum_{i=1}^{n} \alpha_i$

$SS(n) = \ n + 1 + \ \sum_{i=1}^{n}(\alpha_i + 1)$

Các giá trị có thể có của j là: 1;4;9;16;25

Suy ra j có dạng $m^2$

while trong chỉ thực hiện khi j≤i

$\Rightarrow \alpha_i = số\ con\ m \in \mathrm{N} sao\ cho\ \mathrm{m} \geq 1 \text{ và } m^2 \leq i \ \Leftrightarrow 1 \leq \mathrm{m} \leq \sqrt{i}$

$= \ \lfloor\sqrt{i}\rfloor$

$Gán(n) = 2 + 3n + 3\sum_{i=1}^{n} \alpha_i$

$= 2 + 3n + 3\sum_{i=1}^{n}\lfloor\sqrt{i}\rfloor$

$SS(n) = n + 1 + \sum_{i=1}^{n}(\lfloor\sqrt{i}\rfloor + 1) = 1 + 2n + \sum_{i=1}^{n}\lfloor\sqrt{i}\rfloor$

**Bài 10:**

Gọi $\alpha_i$ là số lần lặp của vòng while trong (xét độc lập với while ngoài)

Lệnh gán idx = i thực hiện khi i=j và i+j = n+1 ⟺ $i = j = \frac{n+1}{2}$

⇒ Số lần thực hiện câu lệnh gán idx = i là: $\begin{cases} 1, \text{ nếu } n \text{ là số lẻ} \\ 0, \text{ nếu } n \text{ là số chẵn} \end{cases}$

Lệnh gán sum = sum-a[idx][idx] thực hiện khi idx!=-1 hay câu lệnh idx =i được thực hiện trước đó ⇒ Số lần thực hiện câu lệnh gán idx = i là: $\begin{cases} 1, \text{ nếu } n \text{ là số lẻ} \\ 0, \text{ nếu } n \text{ là số chẵn} \end{cases}$

$Gán(n) = \begin{cases} 3 + 2n + 2\sum_{i=1}^{n}\alpha_i + 1 + 1, \text{ nếu } n \text{ là số lẻ} \\ 3 + 2n + 2\sum_{i=1}^{n}\alpha_i, \text{ nếu } n \text{ là số chẵn} \end{cases}$

$SS(n) = n + 1 + \sum_{i=1}^{n}(\alpha_i + 1) + 2\sum_{i=1}^{n}\alpha_i + 1$

$\alpha_i$ = số con j với j chạy từ 1 tới n bước tăng là 1

$= n - 1 + 1 = n$

$Gán(n) = \begin{cases} 5 + 2n + 2\sum_{i=1}^{n}\alpha_i, \text{ nếu } n \text{ là số lẻ} \\ 3 + 2n + 2\sum_{i=1}^{n}\alpha_i, \text{ nếu } n \text{ là số chẵn} \end{cases}$

$= \begin{cases} 5 + 2n + 2\sum_{i=1}^{n} n, \text{ nếu } n \text{ là số lẻ} \\ 3 + 2n + 2\sum_{i=1}^{n} n, \text{ nếu } n \text{ là số chẵn} \end{cases}$

$= \begin{cases} 5 + 2n + 2n^2, \text{ nếu } n \text{ là số lẻ} \\ 3 + 2n + 2n^2, \text{ nếu } n \text{ là số chẵn} \end{cases}$

$$SS(n) = n + 2 + \sum_{i=1}^{n}(n+1) + 2\sum_{i=1}^{n} n$$

$$= n + 2 + n(n+1) + 2n^2 = 3n^2 + 2n + 2$$