東工大情報理工学院情報工学系 H30 年度試験解答

文責：mn (twitter：@johrinotensai)

2020 年 4 月 9 日

（講評）
広く浅く分野を復習すると良さそう．基本的なことが多く問われていて, 忘れていたら復習するにはちょうどいい．初めて聞いた単語が出てきても説明されていることが多いので落ち着いて臨めば高得点は狙えそう．

大問 1
数学の分野である．ここで問われている数学の内容はほとんどが大学 1 年生の春学期で扱った内容である．確率の計算については高校数学でも求めることが出来るほど容易である．この大問は簡単すぎて話にならない．したがってこの大問で解き方が分からないことがある場合は要反省が必要．また解き方が思いつかないのなら院試を受けることはもちろん理系をやめたほうがよいと思われる．行列式は固有ベクトルを求めさせるめんどくさがあっても良かったに違いない．

大問 2
いわば情報数学．毛嫌いしやすい分野である．途中の問題では覚えていないといけないものがいくつかあるのでそれなりに勉強が必要である．定義をもう一度見直して理解を深めていくことがよいだろう．一方でオートマトンの分野に関しては基本的なものを聞いてくれる優しさを感じる．落ち着いて解けば満点は狙える分野ではある．

大問 3
見た目が嫌になる問題ばかりである．アルゴリズムの分野で見たことあるものを定式化して扱っていて問題文が非常に長くてはっきり言って初見では解きたくない．しかしこの問題を作成した教授はとても優しいであろう．問題文に丁寧に変数の説明・誘導がされていてこの大問が一番知識を必要としない．テスト本番では焦ってしまって全く解けない人と落ち着いて誘導に従いほぼ満点を取れる人の二極化がされる良い問題だと思う．

大問 4
ネイピア数 e や積分の d を斜体を消して表現しているあたり, 回路理論分野ではこういう文字の書き方を気にするのかと思った．定義式が与えられているのでその誘導に従えばいいのだが, この問題は一度見たことあるかないかで大きく難易度が変わる問題である．部分積分を何回もさせてくるが答えを予測できるできないで正答率は大きく変わる．解いているときは答えを予測しながら解かないと厳しいものがある大問である．選択であるのでこの分野が本当に苦手な人は選ばないほうがいいだろう．しかし大問 5 と比較すると簡単であるのでそれなりに解ける人は選択していきたいところ．

大問 5
ごりごり情報理工系って感じの問題がたくさん並んでいる．たぶん他の専門分野の人がみたら発狂するレベル．論理回路については経験の有無により差が大きく出る．この分野は多く問題を解く必要があり, 解き方のパターン化を整理して臨むことが最低条件でありそう．この大問は 1 問目が異なると 2 問目, 3 問目と芋づる式に間違えてしまうので落ち着いて解く必要があるが, 問題の性質上答えに自信が持てないのが厄介なところである．OS を自作したことある人には簡単な大問かもしれないが, そうでない人にとっては手強い敵だろう．完全な余談だが, ここで論理回路を LaTeX で描かなければならず自作パッケージで自動作成ツールを作れたのはいい経験だった．元々ついているパッケージが美しくないというのが本当のところであるが...

1. 以下の問に答えよ.

1) 次の行列式を計算せよ. ただし, c) の解答は x の多項式で示せ.

$$\text{a)} \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} \qquad \text{b)} \begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & -1 \\ 1 & -2 & -1 \end{vmatrix} \qquad \text{c)} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & x & 2 \\ 1 & 1 & x^2 & 4 \\ 1 & -1 & x^3 & 8 \end{vmatrix}$$

解説)

n 次元の行列式の値は

$$D = \sum_{\sigma \in S_n} \mathrm{sgn}(\sigma) \prod_{i=1}^{n} a_{i\sigma(i)} = \sum_{j=1}^{n} a_{kj} A_{kj} \tag{1-1}$$

基本法則を以下に列挙する.

1 単位行列の行列式の値は 1 である. すなわち

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \tag{1-2}$$

2 二つの列を入れ替えると行列式の値は -1 倍になる. 例えば

$$\begin{vmatrix} a_{13} & a_{12} & a_{11} \\ a_{23} & a_{22} & a_{21} \\ a_{33} & a_{32} & a_{31} \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \tag{1-3}$$

3 一つの列の各要素を c 倍すると行列式の値は c 倍になる. 例えば

$$\begin{vmatrix} ca_{11} & a_{12} & a_{13} \\ ca_{21} & a_{22} & a_{23} \\ ca_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = c \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \tag{1-4}$$

4 一つの列の各要素が二つの数の和であるとき, 行列の値は例えばつぎのように二つの行列式の和として表せる.

$$\begin{vmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31}+b_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{vmatrix} \tag{1-5}$$

5 転置をすることによって行列式の値は変わらない. すなわち

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \tag{1-6}$$

6 二つの列の一致する行列式の値は 0 である. 例えば

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{11} \\ a_{21} & a_{22} & a_{21} \\ a_{31} & a_{32} & a_{31} \end{vmatrix} = 0 \tag{1-7}$$

7 一つの列の定数倍を他の列に加えても行列式の値は変わらない. 例えば

$$\begin{vmatrix} a_{11}+ca_{13} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21}+ca_{23} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31}+ca_{33} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \tag{1-8}$$

これらの性質を用いて,

a)

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} &= 3 \cdot 5 - (-1) \cdot 2 \\ &= 17 \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned}\begin{vmatrix}2 & -1 & 0\\ 2 & 3 & -1\\ 1 & -2 & -1\end{vmatrix} &= -\begin{vmatrix}1 & -2 & -1\\ 2 & 3 & -1\\ 2 & -1 & 0\end{vmatrix}\\ &= -\begin{vmatrix}1 & -2 & -1\\ 0 & 7 & 1\\ 0 & 3 & 2\end{vmatrix}\\ &= -\begin{vmatrix}7 & 1\\ 3 & 2\end{vmatrix}\\ &= -11\end{aligned}$$

また, 3×3 行列の行列式に関しては公式が存在し,

$$\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} \tag{1.9}$$

を用いて求めることができて, それを用いると

$$\begin{aligned}\begin{vmatrix}2 & -1 & 0\\ 2 & 3 & -1\\ 1 & -2 & -1\end{vmatrix} &= -6+0+1-0-4-2\\ &= -11\end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned}\begin{vmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\ 1 & -1 & x & 2\\ 1 & 1 & x^2 & 4\\ 1 & -1 & x^3 & 8\end{vmatrix} &= \begin{vmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\ 0 & -2 & x-1 & 1\\ 0 & 0 & x^2-1 & 3\\ 0 & -2 & x^3-1 & 7\end{vmatrix}\\ &= \begin{vmatrix}-2 & x-1 & 1\\ 0 & x^2-1 & 3\\ -2 & x^3-1 & 7\end{vmatrix}\\ &= \begin{vmatrix}-2 & x-1 & 1\\ 0 & x^2-1 & 3\\ 0 & x^3-x & 6\end{vmatrix}\\ &= -2\begin{vmatrix}x^2-1 & 3\\ x^3-x & 6\end{vmatrix}\\ &= -2\left\{6(x^2-1)-3(x^3-x)\right\}\\ &= -2(-3x^3+6x^2+3x-6)\\ &= 6x^3-12x^2-6x+12\end{aligned}$$

2) 実計量ベクトル空間の部分空間 $\boldsymbol{W}$ の基底が $(1,1,0,1)^\intercal$, $(0,1,-1,0)^\intercal$ であるとする.$\boldsymbol{W}$ の直交補空間 $\boldsymbol{W}^\perp$ の基底を 1 つ求めよ. ただし, $\boldsymbol{x}^\intercal$ はベクトル $\boldsymbol{x}$ の転置を示し, ベクトル $(x_1, x_2, \cdots, x_n)^\intercal$ と $(y_1, y_2, \cdots, y_n)^\intercal$ の内積を $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i y_i$ と定義する.

解説)

ベクトル空間 $\boldsymbol{V}$ における部分空間 $\boldsymbol{W}$ の直交補空間 $\boldsymbol{W}^\perp$ は

$$W^\perp = \{\boldsymbol{a} \in V \mid \boldsymbol{a} \perp \boldsymbol{W}\} \tag{1-10}$$

$\boldsymbol{W}^\perp$ の基底の 1 つを $(x_1, x_2, x_3, x_4)^\intercal$ とおく．すると, $\boldsymbol{W}$ の基底との内積は 0 になるので

$$
\begin{aligned}
&(1,1,0,1)^\intercal(x_1,x_2,x_3,x_4) = 0 \\
\Longleftrightarrow\ \ & x_1 + x_2 + x_4 = 0
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&(0,1,-1,0)^\intercal(x_1,x_2,x_3,x_4) = 0 \\
\Longleftrightarrow\ \ & x_2 - x_4 = 0
\end{aligned}
$$

そのため, 例えば $(x_1, x_2, x_3, x_4)^\intercal = (0, 1, 1, -1)^\intercal$ とすれば $\boldsymbol{W}^\perp$ の基底の 1 つとなる.

3) x を実変数とする.

a) 関数 $f(x) = \log_e(1+x)$ の 1 次導関数 $f^{(1)}(x)$ を求めよ．ただし, $x > -1$ とする.

b) 関数 $f(x) = \log_e(1+x)$ の k 次導関数 $f^{(k)}(x)$ を求めよ．ただし, $x > -1$ とする.

c) 関数 $g(x) = \log_e(1-x^2)$ をマクローリン展開したとき, x^n の項の係数を $n \geq 1$ の場合について示せ．ただし, $-1 < x < 1$ とする.

解説)

a) $\log x$ の微分は

$$
(\log x)' = \frac{1}{x} \tag{1-11}
$$

であるから,

$$
f^{(1)}(x) = \frac{1}{1+x}
$$

となる.

b) 商の微分を用いて,$f^{(2)}(x), f^{(3)}(x), f^{(4)}(x)$ を求めてみると,

$$
\begin{aligned}
f^{(2)}(x) &= -\frac{1}{(1+x)^2} \\
f^{(3)}(x) &= -\frac{-2(1+x)}{(1+x)^4} = \frac{2}{(1+x)^3} \\
f^{(4)}(x) &= \frac{-6(1+x)^2}{(1+x)^6} = -\frac{6}{(1+x)^4}
\end{aligned}
$$

となる．これより $f^{(k)}(x)$ は

$$
f^{(k)}(x) = \frac{(-1)^{k+1}(k-1)!}{(1+x)^k} \tag{$*$}
$$

と予想される．これを数学的帰納法で証明する.

$k = 1$ のとき,

$$
f^{(1)}(x) = \frac{1}{1+x} = \frac{(-1)^{1+1}0!}{(1+x)^1}
$$

となるので, $(*)$ は成立する.

$k = n$ のとき $(*)$ が成立すると仮定して $k = n + 1$ のときは

$$
\begin{aligned}
f^{(n+1)}(x) &= \left(\frac{(-1)^{n+1}(n-1)!}{(1+x)^n}\right)' \\
&= \frac{(-1)^{n+1}(n-1)! \cdot \left\{-n(1+x)^{n-1}\right\}}{(1+n)^{2n}} \\
&= \frac{(-1)^{n+2}n!(1+x)^{n-1}}{(1+n)^{2n}} \\
&= \frac{(-1)^{n+2}n!}{(1+x)^{n+1}}
\end{aligned}
$$

となり, $(*)$ を満たす. よって数学的帰納法より

$$f^{(k)}(x) = \frac{(-1)^{k+1}(k-1)!}{(1+x)^k}$$

c) 関数 $g(x)$ に関して, $-1 < x < 1$ において

$$\begin{aligned} g(x) &= \log_e(1-x^2) \\ &= \log_e |1+x||1-x| \\ &= \log_e |1+x| + \log_e |1-x| \\ &= \log_e(1+x) + \log_e(1-x) \end{aligned}$$

となる. ここで, $-1 < x < 1$ において

$$g(x) = f(x) + f(-x)$$

と表すことができるので,

$$\begin{aligned} g^{(k)}(x) &= f^{(k)}(x) + f^{(k)}(-x) \\ &= \frac{(-1)^{k+1}(k-1)!}{(1+x)^k} + \frac{(-1)^{k+1}(k-1)!}{(1-x)^k} \end{aligned}$$

となる. ここで, マクローリン展開は

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} f^{(k)}(0)\frac{x^k}{k!} \tag{1-12}$$

である. したがって, $g(x)$ のマクローリン展開は

$$\begin{aligned} g(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} g^{(n)}(0)\frac{x^n}{n!} \\ &= \log_e(1-0^2) + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{(-1)^{n+1}(n-1)!}{(1+0)^n} + \frac{(-1)^{n+1}(n-1)!}{(1-0)^n}\right)\frac{x^n}{n!} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} 2\cdot(-1)^{n+1}(n-1)!\cdot\frac{x^n}{n!} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2\cdot(-1)^{n+1}}{n}x^n \end{aligned}$$

よって, x^n の項の係数の $n \geq 1$ の場合は

$$\frac{2\cdot(-1)^{n+1}}{n}$$

である.

4) 0 または 1 の値をとる確率変数 X, Y について考える. X の値が 0 および 1 である確率をそれぞれ $P_X(0) = p$ および $P_X(1) = 1-p$ とする. ただし, $0 < p < 1$ とする. X の値 $x \in \{0, 1\}$ が与えられたとき, Y の値が $y \in \{0, 1\}$ である条件付き確率を次式で定めるとする.

$$P_{Y|X}(y|x) = \begin{cases} 1-q & (x = y) \\ q & (x \neq y) \end{cases}$$

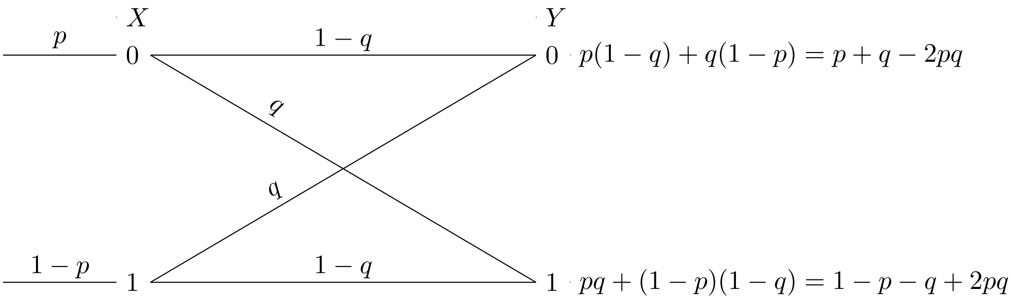
ただし, $0 < q < 1$ とする. このとき, Y の値が与えられたときの X の条件付き確率 $P_{X|Y}(1|0)$ を求めよ.

解説)

条件付き確率としてベイズの定理がある. ベイズの定理とは

$$P(X_i|Y) = \frac{P(X_i \cap Y)}{P(Y)} = \frac{P(X_i)P(Y|X_i)}{P(Y)} \tag{1-13}$$

というものである.
関係図は以下のようになる.



これより, $P_Y(0)$ は

$$P_Y(0)=p(1-q)+q(1-p)=p+q-2pq$$

であるから, ベイズの定理より

$$\begin{aligned}
P_{X|Y}(1|0)&=\frac{P_X(1)P_{(Y|X)}(0|1)}{P_Y(0)}\\
&=\frac{q(1-p)}{p+q-2pq}\\
&=\frac{-p+q}{p+q-2pq}
\end{aligned}$$

2. 以下の問に答えよ.

1) 次の真理値表を完成させせよ.

P	Q	R	$(\neg P \wedge Q) \to (P \vee R)$
T	T	T	(a)
T	T	F	(b)
T	F	T	(c)
T	F	F	(d)
F	T	T	(e)
F	T	F	(c)
F	F	T	(c)
F	F	F	(c)

解説)

P ならば Q という関係において P が偽である場合, この命題は真 (T) となる. また Q が偽ならば, この命題は偽となる.

まず P が F または Q が T ならば P と R が T である必要がある.

つまり命題が T となるときは,

a) P が T かつ Q が F

b) P,Q,R が T

である. これをまとめると以下のようになる.

P	Q	R	$(\neg P \wedge Q) \to (P \vee R)$
T	T	T	T
T	T	F	F
T	F	T	T
T	F	F	T
F	T	T	F
F	T	F	F
F	F	T	F
F	F	F	F

2) 論理式 P と論理式 Q の NAND(否定論理積) を P|Q と表記する. P|Q は P と Q の論理積の否定であるため, その真理値表は $\neg(P \wedge Q)$ と等しい. 多くの論理式は NAND のみで表現することが可能であり, 例えば,¬P は P|P に, $P \vee Q$ は (P|P)|(Q|Q) と書き直すことができる. NAND のみを利用し, P→Q を書き直せ.

解説)

まず P→Q は P が偽または P が真で Q も真ということであり, つまり P が偽または Q が真ということであるので $\neg P \vee Q$ といえる. よって,

$$
\begin{aligned}
P \to Q &\iff \neg P \vee Q \\
&\iff P|P \vee Q \\
&\iff ((P|P)|(P|P))|(Q|Q)
\end{aligned}
$$

3) 次の表はチョムスキーの分類による文法, 文法の生成規則の例, その文法から生成された言語を認識する計算モデルの関係を示したものである. 下の表中の (a)〜(h) に対応する用語を用語群から選択し回答せよ. ただし, 用語群の用語は一度しか使用できないものとする.

文法分類	文法	生成規則の例	計算モデル
0 型文法	句構造文法	(c)	(f)
1 型文法	(a)	bS→bb	線形有界オートマトン※
2 型文法	文脈自由文法	(d)	(g)
3 型文法	(b)	(e)	(h)

用語群：
（ア）文脈依存文法（イ）正則文法（ウ）接辞文法（エ）S→aSa（オ）S→aA
（カ）AS→b（キ）チューニングマシン（ク）プッシュダウン・オートマトン
（ケ）有限オートマトン

※線形有界オートマトン (linear bounded automaton) は線形拘束オートマトンと訳される場合もある.

解説)
0 型文法 (type 0 grammar) は句構造文法 (phrase structure grammer: PSG) とも呼ばれる文法である.
非終端記号の有限集合 N, 終端記号の有限集合 Σ, 生成規則の有限集合 P, および開始記号 S を指定することにより規定される形式文法

$$G = \{N, \Sigma, P, S\}$$

で生成規則 ($\in P$) が次の形式のものである.

$$\alpha \to \beta \quad (\alpha \in (N \cup \Sigma)^* N (N \cup \Sigma)^*, \beta \in (N \cup \Sigma)^*) \tag{2-1}$$

つまり式 (2-1) が示していることは生成規則の左辺に少なくとも 1 個の非終端記号が含まれること以外には何ら制限の付けられていないものである.
1 型文法 (type 1 grammar) は文脈依存文法 (context-sensitive grammar: CSG) とも呼ばれる文法である．生成規則は以下である.

$$\beta A \gamma \to \beta \alpha \gamma \quad (\alpha, \beta, \gamma \in (N \cup \Sigma)^*, A \in N, \alpha \neq \varepsilon) \tag{2-2}$$

記号列中の A を α で書き換えることができるのは, A が左右の文脈 β, γ 中にあるときだけに限られることを由来している.
2 型文法 (type 2 grammar) は文脈自由文法 (context-free grammar: CFG) とも呼ばれる文法である．生成規則は以下である.

$$A \to \alpha \quad (A \in N, \alpha (\Sigma \cup N)^*) \tag{2-3}$$

生成規則の左辺が非終端記号 1 個であい, 右辺は終端記号と非終端記号から成る有限長の記号列というだけで, とくにその中の非終端記号の個数や位置に制限はない.
3 型文法 (type 3 grammar) は正規文法 (または正則文法)(regular grammar: RG) と呼ばれる文法である．生成規則は以下である.

$$\begin{array}{l} A \to aB \quad (A, B \in N, a \in \Sigma) \\ \text{または} \\ A \to a \quad (a \in \Sigma) \end{array} \tag{2-4}$$

開始記号 S に関しては, 例外として生成規則

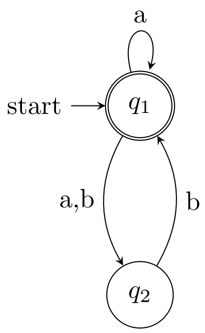
$$S \to \varepsilon$$

も許される.
これらのことから表は以下のように書ける.

文法分類	文法	生成規則の例	計算モデル
0 型文法	句構造文法	AS→b	チューニングマシン
1 型文法	文脈依存文法	bS→bb	線形有界オートマトン※
2 型文法	文脈自由文法	S→aSa	プッシュダウン・オートマトン
3 型文法	正規文法	S→aA	有限オートマトン

つまり
(a) :（ア）, (b) :（イ）, (c) :（カ）, (d) :（エ）, (e) :（オ）, (f) :（キ）, (g) :（ク）, (h) :（ケ）
である.

4) 次に示す非決定性有限オートマトン $(Q, \Sigma, \delta, q_1, F)$ を考える. ここで, 状態の集合 $Q = \{q_1, q_2\}$, アルファベット $\Sigma = \{a, b\}$, 受理状態の集合 $F = \{q_1\}$ であり, 初期状態は q_1 とする. また, δ は遷移関数を意味するものとする.



a) 次の文字列ア）〜キ）のうち受理するものの記号をすべて答えよ.
ア）ab　イ）abbb　ウ）bbba　エ）aaab　オ）aaabba　カ）bbabb　キ）aabaa

b) この非決定性有限オートマトンが受理する言語の正規表現を与えよ. ただし, 選択には +, Kleene 閉包には $*$ の記号を用い, 連接を表現する記号は省略して良い.

c) この非決定性有限オートマトンと等価な決定性有限オートマトンを構成せよ.

解説)

a) 最初に a が何回来てもよく, 最後が ab のセットか bb のセットであれば受理することがわかる. また状態 q_2 において a が入力されると受理されないことに注意すると,
ア）, イ）, エ）, オ）, カ）, キ）
となる.

b) ある言語 L に対し L を n 回続けて連接したものを L^n で表す. すなわち
1. $L^0 = \{\varepsilon\}$
2. $n \geq 1$ である任意の n に対して $L^n = LL^{n-1}$
とし,
3. このとき, Kleene 閉包 (クリーネ閉包, スター閉包, star closure)L^* を

$$L^* = \bigcup_{n=0}^{\infty} L^n = \{\varepsilon\} \cup L \cup L^2 \cup L^3 \cup \cdots \tag{2-5}$$

と定義される. つまり, L^* は L に属する任意個の記号列を任意回数, 任意の順序で並べて得られる記号列のすべてから成る無限集合である.

これに対して正スター閉包 L^+ は

$$L^+ = \bigcup_{n=1}^{\infty} L^n = L \cup L^2 \cup L^3 \cup \cdots \tag{2-6}$$

と定義されるので,

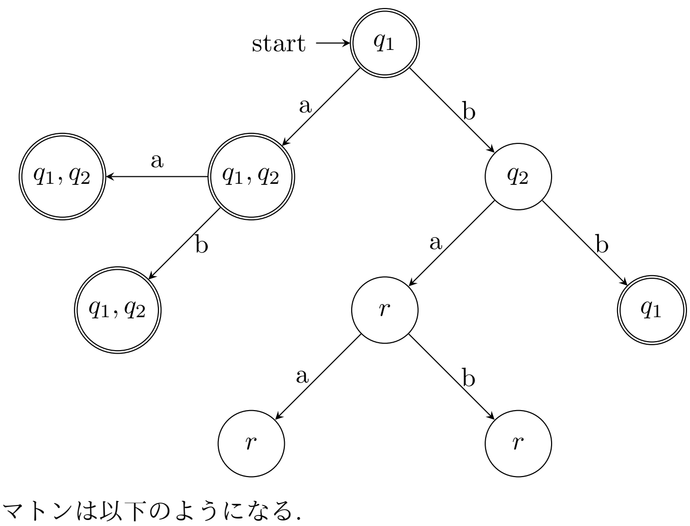
$$L^* = \{\varepsilon\} \cup L^+ \tag{2-7}$$

また, 選択として使われる + について $\boldsymbol{L}_1, \boldsymbol{L}_2$ をおのおの Σ 上の正規集合 L_1, L_2 を表す正規表現としたとき, $(\boldsymbol{L}_1 + \boldsymbol{L}_2)$ を $L_1 \cup L_2$ を表す Σ 上の正規表現とする.
初期状態で受理状態であることから a の入力回数は 0 回でも受理である. 一方で b が入力されたらその前には必ず a または b がある. すると受理状態に戻るのでこの繰り返しを任意回すればいいことが分かる. したがって答えは

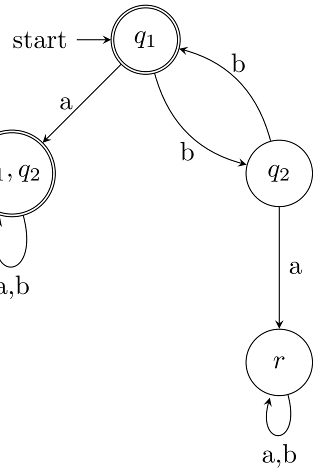
$$(\mathrm{a} + (\mathrm{a} + \mathrm{b})\mathrm{b})^*$$

これ以外の解答として $(\mathrm{a} + \mathrm{ab} + \mathrm{bb})^*$ などもある.

5) 決定性有限オートマトン (deterministic finite automaton: DFA) とは有限オートマトンにおいて, 現在時の状態とそれへの入力に対してその推移先状態は一意的に必ず定められるオートマトンのことである. 一方で非決定性有限オートマトンとは有限オートマトンにおいて決定性有限オートマトンよりも条件を緩めて現在の状態と入力記号との組み合わせによってはそれから先の推移を許さなかったり, あるいは, 現在の状態とある入力記号との組み合わせに対していくつかの異なった推移の可能性を許したオートマトンのことである.
今回の問題では状態 q_2 において入力 a がなされた場合は読み込みを行わない死状態というものが存在する. この状態を r として木を構成していく. 木の構成の仕方として初期状態を根としてそこから入力に応じて行きうる全ての状態を新しい木の葉とする. その葉からさらに入力に応じて行きうる全ての状態を新しい木の葉とする. 同じ葉ができるまでこれをくり返す. 今回の問題を表現すると以下のようになる.



これより構成したオートマトンは以下のようになる.


start
q_1
a
b
b
q_1, q_2
q_2
a,b
a
r
a,b

3. 1) N 個の品物の集合を G とし, 品物 $g \in G$ の体積を volume(g), 価値を value(g) とする．G の要素を体積の小さい順に並べた列を $(g_1, g_2, \cdots, g_N)$, つまり $1 \leq i \leq i' \leq N$ のとき, volume(g_i) $\leq$volume($g_{i'}$) とする．ここで容積 W のナップザックが与えられた時, W の範囲内で価値の総和が最大となる品物の集合 $S \subseteq G$ を見つけることを考える.

以下, S を G と W のナップザック問題解と呼ぶ.

G_0 を空集合 $\emptyset$ とし,$1 \leq i \leq N$ であるような i について $G_i = G_{i-1} \cup \{g_i\}$ とする．次に 0 個以上の品物の体積の合計となり得る値の集合 $\{\sum_{g \in X} \mathrm{volume}(g) \,|\, X \subseteq G\}$ の要素の値を小さい順に並べた列を $W_0, W_1, \cdots, W_j, \cdots$ とする．ただし W_0 は品物が 0 個の時の合計体積をあらわす.

このとき, 品物の集合 G_i と容積 W_j のナップザックに対するナップザック問題解 $S_{i,j}$ の価値の総和 $T_{i,j}$ は下記の式で与えられる．ただし max$U$ は実数の有限集合 U の最大値を返す.

$$
\begin{aligned}
T_{0,0} &= 0 \\
T_{0,j} &= ① \qquad\qquad\qquad (\text{ただし } 1 \leq j) \\
T_{i,0} &= ② \\
T_{i,j} &= \begin{cases} T_{i-1,j} & (W_j < \mathrm{volume}(g_i) \text{ かつ } 1 \leq j) \\ \max\{T_{i-1,j}, T_{i-1,h} + \mathrm{value}(g_i)\} & (W_j \geq \mathrm{volume}(g_i) \text{ かつ } 1 \leq j) \end{cases} \\
& \qquad \text{ただし}, h = \max\{k \,|\, W_k \leq (W_j - \mathrm{volume}(g_i))\}
\end{aligned}
$$

具体的に $G = \{g_1, g_2, g_3, g_4\}$ とし, それぞれの品物の体積と価値を表 3.1 で与える．この G における G_i と W_j に対するナップザック問題解 $S_{i,j}$ を計算するための $T_{i,j}$ の値の表の一部の表 3.2 に示す．この表の i 行 j 列に $T_{i,j}$ の値を入れる．以下の問に答えよ.

表 1　3.1 : 各品物の体積と価値

品物	volume	value
g_1	10	5
g_2	15	6
g_3	20	7
g_4	30	8

表 3.2 : $T_{i,j}$ の値の表

$T_{i,j}$	W_0	W_1	W_2	W_3	W_4	W_5	W_6	W_7	W_8
G_0	0	①	①	①	①	①	①	①	①
G_1	②	5	5	5	5	5	5	5	5
G_2	②	5	6	6	11	11	11	11	11
G_3	②	5	6	7	11	③	④	⑤	⑥
G_4	②	5	6	7	11				

a) G_1, G_2, G_3, G_4 の要素をそれぞれ列挙せよ.

b) $W_j (j = 0, \cdots 8)$ の各値を示せ.

c) 表 3.2 の①〜⑥の中に当てはまる値を記せ.

d) G_4 と W_5, W_6, W_7, W_8 に対するナップザック問題解 $S_{4,5}, S_{4,6}, S_{4,7}, S_{4,8}$ の品物の組み合わせと価値の合計をそれぞれ求めよ.

解説)

a) G については問題文に

$$G_i = G_{i-1} \cup \{g_i\}$$

という記述があり, $G_0 = \emptyset$ であることから,

$$
\begin{aligned}
G_1 &= \{g_1\} \\
G_2 &= \{g_1, g_2\} \\
G_3 &= \{g_1, g_2, g_3\} \\
G_4 &= \{g_1, g_2, g_3, g_4\}
\end{aligned}
$$

である.

b) W に関しては容積の合計値を小さい順に並べたものであるから,

$$\begin{aligned} W_0 &= 0 \\ W_1 &= 10 \\ W_2 &= 15 \\ W_3 &= 20 \\ W_4 &= 25 \\ W_5 &= 30 \\ W_6 &= 35 \\ W_7 &= 40 \\ W_8 &= 45 \end{aligned}$$

となる.

c) G_0 に関しては空集合であるため, ①は 0 である. また, $W_0 = 0$ であるから②も 0 である. ③は $g_1 + g_3 = 12$ が最大となる.④は 13,⑤は 13, ⑥は 18 となる.
この考え方として 1 行前の合計値と品物の価値を足して値を判断するという方式である. その i 行目に関しては g_i を足して大小を判断するだけで済む.

d) c) と同様にして計算すればよい. g_1 と g_2 を足したものが g_4 より volume が小さくて value が高いので, 価値については G_3 の行と同じ結果になることは想像がつく.

$$\begin{aligned} &S_{4,5} = \{g_1, g_3\} \\ &T_{4,5} = 12 \\ &S_{4,6} = \{g_2, g_3\} \\ &T_{4,6} = 13 \\ &S_{4,7} = \{g_2, g_3\} \text{ または } \{g_1, g_4\} \\ &T_{4,7} = 13 \\ &S_{4,8} = \{g_1, g_2, g_3\} \\ &T_{4,8} = 18 \end{aligned}$$

2) 言語 ω の項を以下のように帰納的に定義する.

- 定数記号 S, K, I は ω の項である.
- x, y が ω の項のとき, $(x \cdot y)$ は ω の項である.
- 以上のように定義されるもののみが ω の項である.

この演算子 $\cdot$ は左結合的であり, 記述を簡潔にするために演算子 $\cdot$ は省略できるものとする. すなわち $x, y, z \in \omega$ のとき $((x \cdot y) \cdot z)$ は xyz, $(x \cdot (y \cdot z))$ は $x(yz)$ と書くことができる.
次に $x, y, z \in \omega$ に対して, S, K, I それぞれの計算規則 (左辺から右辺への変換規則) を以下のように定義する.

$$\begin{array}{rcl} Ix & \Rightarrow & x \\ Kxy & \Rightarrow & x \\ Sxyz & \Rightarrow & xz(yz) \end{array}$$
$$x \Rightarrow x' \text{ ならば } xy \Rightarrow x'y$$
$$y \Rightarrow y' \text{ ならば } xy \Rightarrow xy'$$

上記の計算規則を用いて ω の項を変換することをリダクションと呼ぶ. リダクションはそれ以上変換できないと

き停止するものとする．これ以上リダクションできない項は正規形と呼ばれる．リダクションの例を以下に示す．

$$
\begin{aligned}
&SIIx \Rightarrow Ix(Ix) \Rightarrow x(Ix) \Rightarrow xx \\
&S(K(SI))Kxy \Rightarrow K(SI)x(Kx)y \Rightarrow SI(Kx)y \Rightarrow Iy(Kxy) \Rightarrow y(Kxy) \Rightarrow yx
\end{aligned}
$$

a) 任意の $x \in \omega$ について $SKKx$ と Ix のリダクションの結果が同じとなることを示せ．

b) T, F を以下のように定義する．

$$
\begin{aligned}
T &= K \\
F &= KI
\end{aligned}
$$

このとき, 以下の式 (i)(ii) を正規形までリダクションせよ．ただし, x, y は正規形とする．
また, リダクション結果とともに正規形を求めた過程を示すこと．

(i) Txy

(ii) Fxy

c) さらに $\vee, \wedge, \neg$ を以下のように定義する．

$$
\begin{aligned}
\vee &= SI(KT) \\
\wedge &= SS(K(KF)) \\
\neg &= S(SI(KF))(KT)
\end{aligned}
$$

これより, 任意の $x, y \in \omega$ に対して,

$$
\begin{aligned}
\vee xy =& SI(KT)xy \Rightarrow Ix(KTx)y \Rightarrow x(KTx)y \Rightarrow xTy \\
\wedge xy =& SS(K(KF))xy \Rightarrow Sx(K(KF)x)y \Rightarrow xy(K(KF)xy) \Rightarrow xy(KFy) \Rightarrow xyF \\
\neg x =& S(SI(KF))(KT)x \Rightarrow SI(KF)x(KTx) \Rightarrow Ix(KFx)(KTx) \Rightarrow x(KFx)(KTx) \\
&\Rightarrow xF(KTx) \Rightarrow xFT
\end{aligned}
$$

となる．このとき, 以下の式 (iii)(iv)(v)(vi) を正規形までリダクションせよ．また, リダクション結果とともに正規形を求めた過程を示すこと．

(iii) $\vee(\neg T)T$

(iv) $\vee(\neg T)F$

(v) $\wedge(\neg F)T$

(vi) $\wedge(\neg F)F$

解説)

a) 生成規則に従うだけである．

$$
\begin{aligned}
&SKKx \Rightarrow Kx(Kx) \Rightarrow x \\
&Ix \Rightarrow x
\end{aligned}
$$

これより題意は示された．

b) (i)

$$Txy \Rightarrow Kxy \Rightarrow x$$

(ii)

$$Fxy \Rightarrow KIxy \Rightarrow xy$$

c) 問題文で示されている $\vee xy, \wedge xy, \neg xy$ を用いて求めていく.

(iii)

$$\vee(\neg T)T \Rightarrow \neg TTT \Rightarrow TFTT \Rightarrow KFTT \Rightarrow FT \Rightarrow KIT \Rightarrow I$$

(iv)

$$\vee(\neg T)F \Rightarrow (\neg T)TF \Rightarrow TFTTF \Rightarrow KFTTF \Rightarrow FTF \Rightarrow KITF \Rightarrow IF \Rightarrow F \Rightarrow KI$$

(v)

$$\wedge(\neg F)T \Rightarrow (\neg F)TF \Rightarrow FFTTF \Rightarrow KIFTTF \Rightarrow ITTF \Rightarrow TTF \Rightarrow KTF \Rightarrow T \Rightarrow K$$

(vi)

$$\wedge(\neg F)F \Rightarrow (\neg F)FF \Rightarrow FFTFF \Rightarrow KIFTFF \Rightarrow ITFF \Rightarrow TFF \Rightarrow KFF \Rightarrow F \Rightarrow KI$$

4. 実数 t を変数とする実関数 $f(t)$ のラプラス変換 $F(s)$ を，式 (4.1) で定義する．ここで，s は複素変数で，かつ実部が正であるとする．以下の問に答えよ．

$$F(s) = \int_0^{\infty} f(t)\mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}t \tag{4.1}$$

1)

a) $f(t) = t$ b) $f(t) = \sin\omega t$(ωは実定数)

解説)

式 (4.1) に代入して積分していく．今回の問題では s の実部が正であることから s が 0 の場合は考えなくてよい．部分積分の公式は

$$\int f'(x)g(x)\mathrm{d}x = f(x)g(x) - \int f(x)g'(x)\mathrm{d}x \tag{4-1}$$

a)

$$\begin{aligned}
F(s) &= \int_0^{\infty} t\mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}t \\
&= \left[-\frac{1}{s}\mathrm{e}^{-st}t\right]_0^{\infty} - \int_0^{\infty}\left(-\frac{1}{s}\mathrm{e}^{-st}\right)\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{s}\int_0^{\infty}\mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}t \\
&= -\frac{1}{s^2}\left[\mathrm{e}^{-st}\right]_0^{\infty} \\
&= \frac{1}{s^2}
\end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned}
F(s) &= \int_0^{\infty}\sin\omega t\,\mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}t \\
&= \left[\sin\omega t\cdot -\frac{1}{s}\mathrm{e}^{-st}\right]_0^{\infty} - \int_0^{\infty}\left(\omega\cos\omega t\cdot\left(-\frac{1}{s}\mathrm{e}^{-st}\right)\right)\mathrm{d}t \\
&= \frac{\omega}{s}\int_0^{\infty}\cos\omega t\,\mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}t \\
&= \frac{\omega}{s}\left\{\left[\cos\omega t\cdot\frac{1}{s}\mathrm{e}^{-st}\right]_0^{\infty} - \int_0^{\infty}\left(-\omega\sin\omega t\cdot\left(-\frac{1}{s}\mathrm{e}^{-st}\right)\right)\mathrm{d}t\right\} \\
&= \frac{\omega}{s^2} - \frac{\omega^2}{s^2}\int_0^{\infty}\sin\omega t\,\mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}t \\
&= \frac{\omega}{s^2} - \frac{\omega^2}{s^2}F(s)
\end{aligned}$$

これより，

$$\begin{aligned}
& F(s) = \frac{\omega}{s^2} - \frac{\omega^2}{s^2}F(s) \\
\iff & \left(1 + \frac{\omega^2}{s^2}\right)F(s) = \frac{\omega}{s^2} \\
\iff & \frac{\omega^2 + s^2}{s^2}F(s) = \frac{\omega}{s^2} \\
\iff & F(s) = \frac{\omega}{s^2}\cdot\frac{s^2}{\omega^2 + s^2} \\
\iff & F(s) = \frac{\omega}{\omega^2 + s^2}
\end{aligned}$$

2) 単位ステップ関数 $u(t)$ のラプラス変換は, $U(s) = 1/s$ である. 幅 T_1 で高さ 1 のパルス波 $p(t)$ は, 単位ステップ関数 $u(t)$ を用いて

$$p(t) = u(t) - u(t - T_1) \tag{4.2}$$

と表すことができる. $p(t)$ のラプラス変換 $P(s)$ を求めよ.

解説)
平行移動すると e^{-sT_1} される. 式 (4.2) より

$$\begin{aligned}
P(s) &= \int_0^\infty p(t)\mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}t \\
&= \int_0^\infty (u(t) - u(t - T_1))\mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{s} - \int_0^\infty u(t - T_1)\mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{s} - \int_{-T_1}^\infty u(t')\mathrm{e}^{-s(t'+T_1)}\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{s} - \mathrm{e}^{-sT_1}\int_0^\infty u(t')\mathrm{e}^{-st'}\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{s} - \mathrm{e}^{-sT_1}\frac{1}{s} \\
&= \frac{1 - \mathrm{e}^{-sT_1}}{s}
\end{aligned}$$

3) 実数 t を変数とする実関数 $g(t)$ のラプラス変換を $G(s)$ とする.

$$\int_0^\infty g(t - T)u(t - T)\mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}t$$

を, $G(s)$ を用いて表わせ. ただし, T を正定数とする.

解説)
$t' = t - T$ として計算すればよい.

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty g(t - T)u(t - T)\mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}t &= \int_{-T}^\infty g(t')u(t')\mathrm{e}^{-s(t'+T)}\mathrm{d}t' \\
&= \mathrm{e}^{-sT}\int_{-T}^\infty g(t')u(t')\mathrm{e}^{-st'}\mathrm{d}t' \\
&= \mathrm{e}^{-sT}\int_0^\infty g(t')u(t')\mathrm{e}^{-st'}\mathrm{d}t' \\
&= \mathrm{e}^{-sT}\int_0^\infty g(t)u(t)\mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}t \\
&= \mathrm{e}^{-sT}G(s)
\end{aligned}$$

4) 時刻 t において, 容量 C のコンデンサに流れ込む電流 $i_c(t)$ とコンデンサの両端の電位差 $v_c(t)$ を, 図 4.1 のように定義すると, $i_c(t)$ と $v_c(t)$ の間には式 (4.3) の関係が成立する.

$$i_c(t) = C\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}v_c(t) \tag{4.3}$$

式 (4.3) より, $i_c(t)$ のラプラス変換 $I_c(t)$ と $v_c(t)$ のラプラス変換 $V_c(s)$ との間に成り立つ関係式を導出せよ. ここで, $|v_c(t)| < \infty$ であるとする.

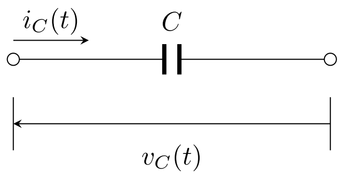


図 4.1　コンデンサ

解説)

微分のラプラス変換が

$$\int_0^\infty f'(t)\mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}t = sF(s) - f(0) \tag{4-2}$$

であることを既知とすれば容易である．そうでない場合は部分積分を施して求めていく．

$$\begin{aligned}
I_C(s) &= \int_0^\infty C\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}v_C(t)\mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}t \\
&= \Big[Cv_C(t)\mathrm{e}^{-st}\Big]_0^\infty - C\int_0^\infty \big(v_C(t)\cdot\big(-s\mathrm{e}^{-st}\big)\big)\,\mathrm{d}t \\
&= -Cv_C(0) + sC\int_0^\infty v_C(t)\mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}t \\
&= sCV_C(s) - Cv_C(0)
\end{aligned}$$

5) 図 4.2 に示すように抵抗値 R の抵抗と容量 C のコンデンサが接続された回路がある．入力を電圧 $e(t)$, 出力をコンデンサ両端の電圧 $v_C(t)$ とする．問 5) においては, $t=0$ で回路は静止状態にあるものとする．静止状態とは, すべての素子に流れる電流, 及び素子両端間の電位差が 0 である状態をいう．

a) この回路の入出力間の伝達関数 $H(s) = V_C(s)/E(s)$ を求めよ．ここで, $V_C(s), E(s)$ は, それぞれ, $v_C(t)$ と $e(t)$ のラプラス変換である．

b) この回路を入力として, 高さ v_0 のステップ電圧 $e(t) = v_0u(t)$ を与えた時の出力 $v_C(t)$ を求め, さらに図示せよ．ただし, $v_0 > 0$ とする．

c) この回路に入力として, パルス幅 T_1 で高さ v_0 のパルス電圧を与えた時の出力 $v_C(t)$ を求め, さらに図示せよ．このとき, 入力 $e(t)$ は, 式 (4.2) で定義したパルス波 $p(t)$ を用いて, $e(t) = v_0p(t)$ と表すことができる．

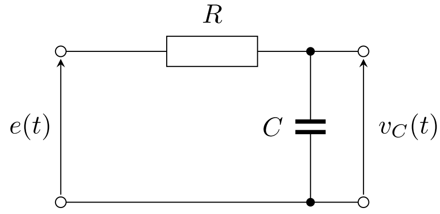


図 4.2　RC 回路

解答)

a) 以下のように電流を配置する．

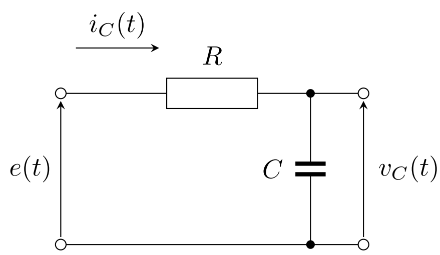


図 4-1　 RC 回路

すると回路の方程式は以下のように表すことが出来る.

$$e(t) = Ri_C(t) + v_C(t)$$

これにラプラス変換を施し,4) を結果を用いると

$$\begin{aligned}
E(s) &= RI(s) + V_C(s) \\
&= R(sCV_C(s) - Cv_C(0)) + V_C(s) \\
&= (1 + sRC)V_C(s) - RCv_C(0)
\end{aligned}$$

となる. 本問において $t = 0$ において静止状態であるから $v_C(0) = 0$ となるので, 伝達関数は

$$\begin{aligned}
&E(s) = (1 + sRC)V_C(t) \\
\Longleftrightarrow\ &H(s) = \frac{1}{1 + sRC}
\end{aligned}$$

b) ステップ電圧 $e(t) = v_0 u(t)$ をラプラス変換すると以下のようになる.

$$E(s) = v_0 \cdot \frac{1}{s}$$

したがって, a) の結果を用いて

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{1 + sRC} = \frac{V_C(s)}{E(s)} \\
\Longleftrightarrow\ &\frac{1}{1 + sRC} = \frac{V_C(s)}{v_0 \cdot \frac{1}{s}} \\
\Longleftrightarrow\ &V_C(s) = \frac{v_0}{s(1 + sRC)} \\
\Longleftrightarrow\ &V_C(s) = v_0 \left(\frac{1}{s} - \frac{RC}{1 + sRC} \right) \\
\Longleftrightarrow\ &V_C(s) = v_0 \left(\frac{1}{s} - \frac{1}{s + \frac{1}{RC}} \right)
\end{aligned}$$

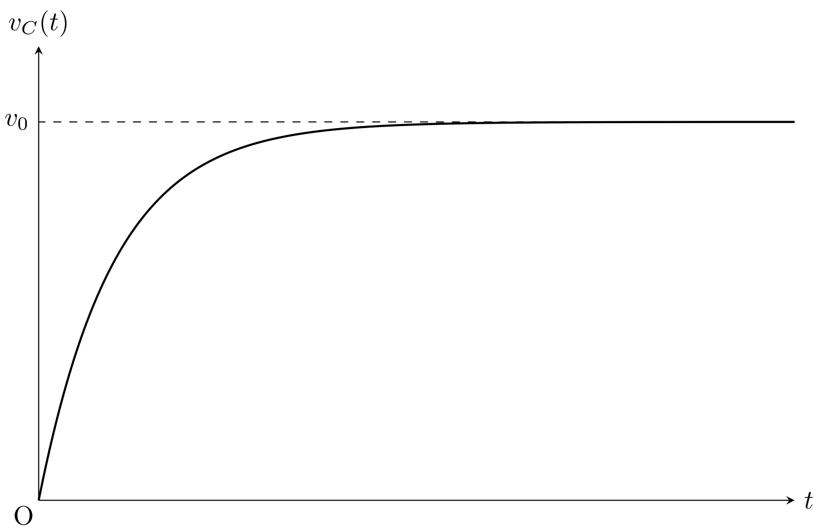
したがって, 逆ラプラス変換を施す. ここで,

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s + a} \right] = \mathrm{e}^{-at} \tag{4-3}$$

であることから, $V_C(s)$ に対する逆ラプラス変換は

$$v_C(t) = v_0 \left(1 - \mathrm{e}^{-\frac{1}{RC}t} \right)$$

また, これを図示すると以下のようになる.



c) b) のときと同じように導いていけばよい.

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{1+sRC}=\frac{V_C(s)}{E(s)}\\
\Longleftrightarrow\ &\frac{1}{1+sRC}=\frac{V_C(s)}{v_0\cdot\frac{1-\mathrm{e}^{-sT_1}}{s}}\\
\Longleftrightarrow\ &V_C(s)=\frac{v_0}{s(1+sRC)}\left(1-\mathrm{e}^{-sT_1}\right)\\
\Longleftrightarrow\ &V_C(t)=v_0\left(\frac{1}{s}-\frac{1}{s+\frac{1}{RC}}\right)\left(1-\mathrm{e}^{-sT_1}\right)
\end{aligned}$$

ここで,

$$F(s)=v_0\left(\frac{1}{s}-\frac{1}{s+\frac{1}{RC}}\right)$$

とおくと, b) の結果より,

$$\mathcal{L}^{-1}\left[F(s)\right]=v_0\left(1-\mathrm{e}^{-\frac{1}{RC}t}\right)$$

となる. また,$\mathcal{L}^{-1}[F(s)]=f(t)$ とすると

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\mathrm{e}^{-sT_1}F(s)\right]=f(t-T_1)u(t-T_1) \tag{4-4}$$

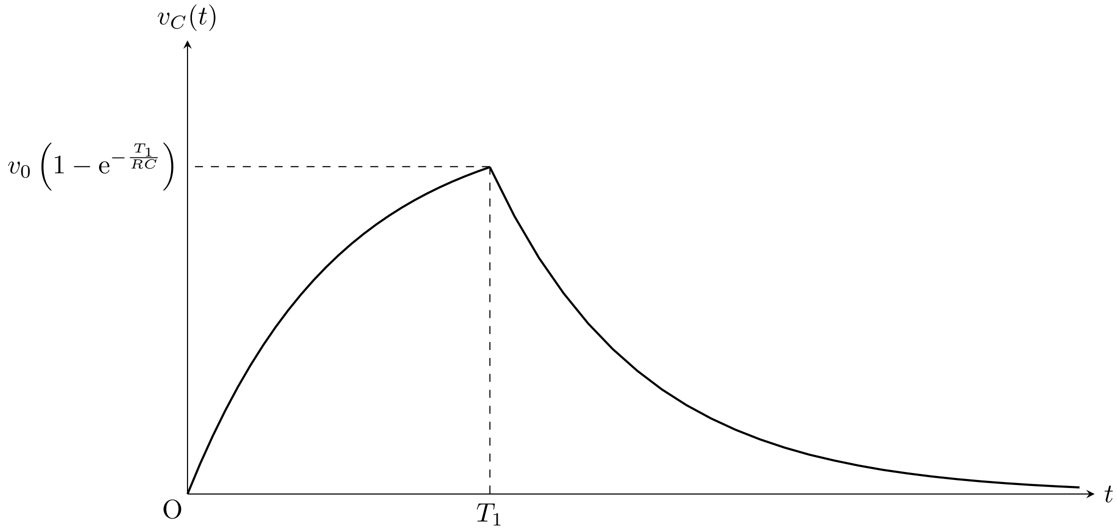
であることを用いれば,

$$\begin{aligned}
&V_C(t)=F(s)(1-\mathrm{e}^{-sT_1})\\
\Longleftrightarrow\ &V_C(t)=F(s)-\mathrm{e}^{-sT_1}F(s)\\
\Longleftrightarrow\ &v_C(t)=f(t)u(t)-f(t-T_1)u(t-T_1)\\
\Longleftrightarrow\ &v_C(t)=v_0\left(1-\mathrm{e}^{-\frac{1}{RC}t}\right)u(t)-v_0\left(1-\mathrm{e}^{-\frac{1}{RC}(t-T_1)}\right)u(t-T_1)
\end{aligned}$$

となる. これを図示するためにさらに整理すると

$$\begin{aligned}
&v_C(t)=\begin{cases} v_0\left(1-\mathrm{e}^{-\frac{1}{RC}t}\right)-v_0\left(1-\mathrm{e}^{-\frac{1}{RC}(t-T_1)}\right) & t>T_1\\ v_0\left(1-\mathrm{e}^{-\frac{1}{RC}t}\right) & t<T_1\end{cases}\\
\Longleftrightarrow\ &v_C(t)=\begin{cases} v_0\mathrm{e}^{-\frac{1}{RC}(t-T_1)}-v_0\mathrm{e}^{-\frac{1}{RC}t} & t>T_1\\ v_0\left(1-\mathrm{e}^{-\frac{1}{RC}t}\right) & t<T_1\end{cases}\\
\Longleftrightarrow\ &v_C(t)=\begin{cases} v_0\mathrm{e}^{-\frac{1}{RC}t}\left(\mathrm{e}^{\frac{1}{RC}T_1-1}\right) & t>T_1\\ v_0\left(1-\mathrm{e}^{-\frac{1}{RC}t}\right) & t<T_1\end{cases}
\end{aligned}$$

また, これを図示すると以下のようになる.



6) 図 4.2 の回路の入力として, パルス幅 T_1 で高さ v_0 のパルス電圧を周期 T で繰り返し与える. ただし, $T > T_1$ とする. 十分に遠い過去から入力が与えられ, $t \geq 0$ では回路が定常状態に達しているとする. 定常状態では, $v_C(t) = v_C(t+T)$ となっている. このとき, $0 \leq t \leq T$ の 1 周期の出力を求めたい.

a) 図 4.2 の回路で, $v_C(0) \neq 0$ の場合の, $E(s)$ と $V_C(s)$ の間に成り立つ関係式を求めよ. ここで, $V_C(s)$, $E(s)$ は, それぞれ, $v_C(t)$ と $e(t)$ のラプラス変換である.

b) 上記 a) で求めた関係式を用いて, 入力 $e(t)$ として $v_0 p(t)$ を与えた時の出力 $v_C(t)$ を求めよ. ただし, $v_C(0)$ を未知数として残したままで解くこと.

c) 上記 b) で求めた式で, $v_C(0) = v_C(T)$ の関係を用いて $v_C(0)$ を求めよ.

解説)

a) これは 5) の導出の一部である.

$$
\begin{aligned}
E(s) &= RI(s) + V_C(s) \\
&= R(sCV_C(s) - Cv_C(0)) + V_C(s) \\
&= (1 + sRC)V_C(s) - RCv_C(0)
\end{aligned}
$$

b) これは 5) と比較すると, $-RCv_C(0)$ が付け加えられただけであることを考えれば, すこし加わっただけである.

a) について $V_C(s)$ について整理すると,

$$
\begin{aligned}
& E(s) = (1 + sRC)V_C(s) - RCv_C(0) \\
\iff & \frac{1 - \mathrm{e}^{-sT_1}}{s} = (1 + sRC)V_C(s) - RCv_C(0) \\
\iff & V_C(s) = \frac{1 - \mathrm{e}^{-sT_1}}{s(1 + sRC)} + \frac{1}{s + \frac{1}{RC}} v_C(0) \\
\iff & v_C(t) = \begin{cases} v_0 \mathrm{e}^{-\frac{1}{RC}t} \left(\mathrm{e}^{\frac{1}{RC}T_1 - 1} \right) + \mathrm{e}^{-\frac{1}{RC}t} v_C(0) & t > T_1 \\ v_0 \left(1 - \mathrm{e}^{-\frac{1}{RC}t} \right) + \mathrm{e}^{-\frac{1}{RC}t} v_C(0) & t < T_1 \end{cases}
\end{aligned}
$$

c) $T > T_1$ であるから $t > T_1$ の場合の $v_C(t)$ を代入して

$$
\begin{aligned}
& v_C(T) = v_0 \mathrm{e}^{-\frac{1}{RC}T} \left(\mathrm{e}^{\frac{1}{RC}T_1 - 1} \right) + \mathrm{e}^{-\frac{1}{RC}T} v_C(0) \\
\iff & \left(1 - \mathrm{e}^{-\frac{1}{RC}T} \right) v_C(0) = v_0 \mathrm{e}^{-\frac{1}{RC}T} \left(\mathrm{e}^{\frac{1}{RC}T_1} - 1 \right) \\
\iff & v_c(0) = \frac{\mathrm{e}^{-\frac{1}{RC}T} \left(\mathrm{e}^{\frac{1}{RC}T_1} - 1 \right)}{1 - \mathrm{e}^{-\frac{1}{RC}T}} \\
\iff & v_C(0) = \frac{\mathrm{e}^{\frac{1}{RC}T_1} - 1}{\mathrm{e}^{\frac{1}{RC}T} - 1} v_0
\end{aligned}
$$

5. 1) 論理回路について, 空欄 (A)〜(N) に最も適切な語句を図 5.1 の選択群から選んで, その番号を回答せよ. ただし, 同一の語句を何回用いても良い.

0 または 1 の値を取る変数を $\boxed{\text{(A)}}$ と呼ぶ. $\boxed{\text{(B)}}$ とは, $\boxed{\text{(A)}}$ を AND,OR,NOT などの基本論理演算で結合して得られる式のことである. 基本論理演算において, NAND や $\boxed{\text{(C)}}$ は一種類の演算ですべての論理式を表すことができる.

$\boxed{\text{(B)}}$ を実際に実現する回路を論理回路という. 論理回路には, $\boxed{\text{(D)}}$ と $\boxed{\text{(E)}}$ がある. $\boxed{\text{(D)}}$ は出力がその時点の入力の組合せだけで定まる回路であり, $\boxed{\text{(E)}}$ は出力がその時点の入力の組合せだけで定まらず, 過去から現在までの入力の系列によって定まる回路である.

フリップフロップは, $\boxed{\text{(F)}}$ 個の安定状態をもつことで $\boxed{\text{(G)}}$ ビット状態を表現することが出来る $\boxed{\text{E}}$ の基本要素である. 論理回路において, フリップフロップなどにより状態を保持する装置を $\boxed{\text{(H)}}$ と呼ぶ. コンピュータの $\boxed{\text{(H)}}$ は, 情報を保持するために電力供給が必要である $\boxed{\text{(I)}}$ メモリと電力を供給しなくとも格納した情報を保持できる $\boxed{\text{(J)}}$ メモリに分類される. 現代の多くのコンピュータで $\boxed{\text{(I)}}$ メモリとして用いられている $\boxed{\text{(K)}}$ は, $\boxed{\text{(G)}}$ ビットの情報を保持する素子として $\boxed{\text{(L)}}$ を用いている. $\boxed{\text{(L)}}$ は時間の経過とともに自然放電するために, $\boxed{\text{(M)}}$ 動作と呼ばれる定期的な再書き込みが必要である. 一方, $\boxed{\text{(N)}}$ はフリップフロップを用いており電力供給がある限り同じ情報を保持でき, $\boxed{\text{(M)}}$ 動作は不要である.

(1) リフレッシュ,(2)DRAM, (3) 組合せ回路,(4)SRAM, (5) 演算装置,(6) 不揮発性,
(7) 局所性, (8) 論理変数, (9)1,(10)2,(11)3,(12) コンデンサ, (13)LRU,(14)AND,
(15) 昇順,(16) 標準形,(17) 水晶振動子,(18) ド・モルガンの定理, (19) ランダム,
(20) 記憶装置, (21) 論理式,(22) 極小万能, (23) 順序回路, (24) ダイオード,(25)NOR,
(26) 揮発性,(27) 二次電池, (28)NOT,(29) コイル, (30) 多機能, (31) 結合的, (32)OR

図 5.1 選択群

解説)

単語の説明

- リフレッシュ : 保持している情報の意地や更新を目的として行われる動作
- DRAM : Dynamic Random Access Memory. コンピュータなどに使用される半導体メモリによる RAM の 1 種で, コンピュータの主記憶装置やディジタル・テレビやディジタル・カメラなど多くの情報機器の, 内部での大規模な作業用記憶として用いられる. 揮発性 (電源供給がなくなると記憶情報も失われる) であるばかりでなく, IC チップ中の素子に小さなキャパシタが付随すること (寄生容量) を利用した記憶素子であるため, 常にリフレッシュを必要とするダイナミックメモリである. SRAM に比べてリフレッシュのために常に電力を消費することが欠点であるが, 今のところ大容量を安価に提供できるという利点から, DRAM が使われ続けている.
- SRAM : Static Random Access Memory. 定期的なリフレッシュが不要となり内部構造的にフリップフロップ等の順序回路という「スタティック (静的) な回路方式により情報を記憶するもの」であることからこの名前になった. 基本的には電力の供給がなくなると記憶内容が失われる揮発性メモリ (volatile memory) である.
- 順序回路 : 過去の内部状態と取得時の入力信号とで出力が決まる回路のこと. フリップフロップも順序回路

の一種である.

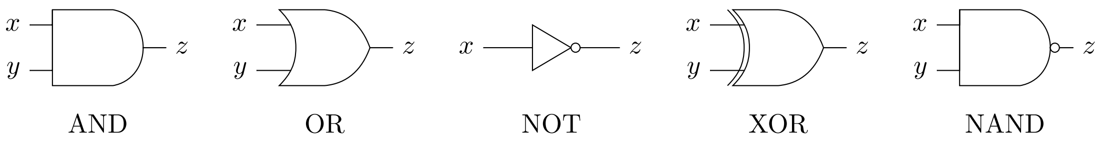
- 組合せ回路：現在の入力のみで出力が決まる回路のこと.
- 局所性：1 つのリソースに複数アクセスする処理に関する情報工学上の概念である. 参照の局所性には時間的局所性, 空間的局所性, 逐次局所性の 3 つの概念が存在する.
- 論理変数：“0” か “1” かのいずれかの値を取る変数
- LRU : Least Recently Used. キャッシュメモリや仮想メモリが扱うデータのリソースへの割当を決定するアルゴリズムである. 小容量で高速な記憶装置 (キャッシュメモリなど) がいっぱいになったとき, その中にあるデータのうち, 未使用の時間が最も長いデータを大容量で低速な記憶装置 (主記憶など) に保存するという基本のアルゴリズムである. 対義語は Most Recently Used(MRU).
- 水晶振動子：水晶 (石英) の圧電効果を利用して高い周波数精度の発振を起こす際に用いられる受動素子の一つである. Xtal と略記されることもある.
- 極小万能：NOT-AND-OR 型式ですべての関数を表すことができ, このように全ての関数が表すことが出来る時の集合を万能という. これに対し, 集合中のどの一つの要素でも除外すると万能でなくなるときに極小万能という. たとえば {NOT, AND) などのことである.
- 二次電池：蓄電池, 充電式電池ともいい, 一回限りではなく, 充電を行うことにより繰り返し使用することができる電池のこと.

A については 0 または 1 の値を取る変数なので, 論理変数である. B は論理演算の結合して得られる式なので論理式である. C は論理演算を一種類の演算で表せるものなので NOR である. 論理回路は組合せ回路と順序回路があり, その時点の入力の組合せだけで出力が定まるものが組合せ回路なので D が組合せ回路であり, E は順序回路となる. フリップフロップは 0 と 1 の状態をもつので F は 2 個となり, これは 1 ビットである. フリップフロップは順序回路の一種であることから E のヒントにもなる. 状態を保持する装置を記憶装置というので, H は記憶装置であり, 保持のために電力供給が必要なのが揮発性メモリで, その逆が不揮発性メモリである. ゆえに I が揮発性, J が不揮発性である. K については 1 ビットの情報を保持する素子であるので, 記憶装置と成る. また L は時間の経過とともに自然放電する記憶装置であることから DRAM, N は SRAM であることが分かる. DRAM ではリフレッシュ動作を必要なので, M はリフレッシュである.

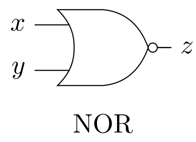
まとめると
(A):(8) (B):(21) (C):(25) (D):(3) (E):(23) (F):(10) (G):(9) (H):20 (I):(6) (J):(26) (K):(20) (L);(2) (M):(1) (N):(4)

2) 次の問に答えよ.

a) 図 5.2(a) に示す論理ゲート AND,OR,NOT,XOR,NAND を図 5.2(b) に示す 2 入力の NOR ゲートのみで実現したい. その際, AND は 3 個, OR は 2 個, NOT は 1 個, XOR は 5 個, NAND は 4 個の NOR ゲートのみを用いて実現せよ.



(a)



(b)

図 5.2 論理ゲート

b) 論理変数 A,B,X,Y,Z について，A と B の論理和を A+B，論理積 (AND) を AB，A の否定 (NOT) を $\bar{\mathrm{A}}$ と表現する．複数の入力の大小を比較し，その結果を出力する機能を持った回路について考える．1 ビットの 1 つの入力を A,B とし 3 つの出力を X,Y,Z とする．ビットの大小関係を 0¡1 であると定義する．

（ア）A>B のとき,X= 1,Y= 0,Z= 0,A=B のとき，X= 0,Y= 1,X= 0,A<B のとき X=0,Y=0,Z=1 となる比較器の真理値表を表 5.1 にならい書け．

（イ）（ア）で完成させた真理値表について，X,Y,Z それぞれを入力 A,B を用いて論理式として表わせ．

（ウ）1 ビットの比較器を（イ）で求めた 3 つの論理式に基づき 1 つの論理回路で実現する．図 5.3 の (i)〜(iii) のそれぞれに図 5.4 の選択群から適切なゲート素子を 1 つ選択し，その番号を回答せよ．ただし，同一のゲート素子を何回用いても良い．

表 5.1　 1 ビット比較器の真理値表

A	B	X(A>B)	Y(A=B)	Z(A<B)
0	0			
0	1			
1	0			
1	1			

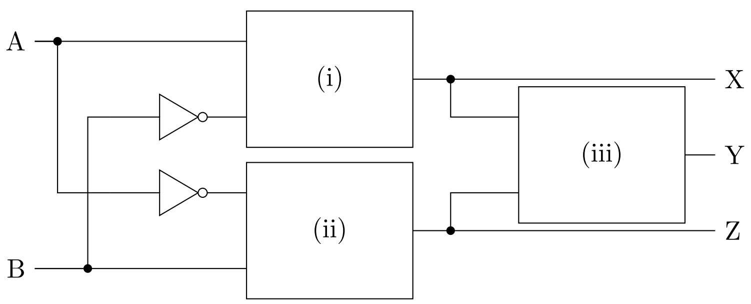


図 5.3　 1 ビット比較器の論理回路

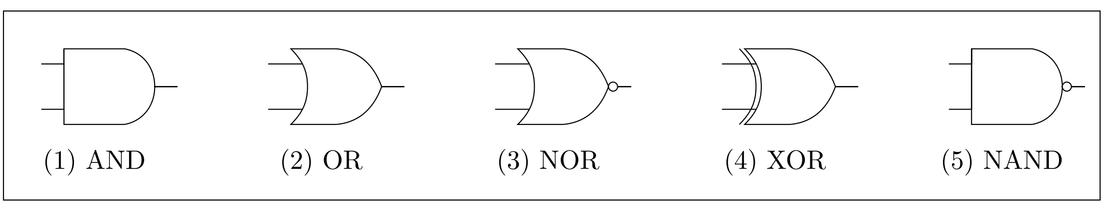


図 5.4　選択群

c) 2 ビットの入力 A= A_1A_0, B= B_1B_0 は, 最下位ビットを A_0B_0, 最上位ビットを A_1, B_1 とする. 2 ビットの大小関係を, 00<01<10<11 であると定義し, A と B の比較結果を X,Y,Z に出力する比較器を考える.

（ア）A>B のとき X=1, Y=0, Z=0, A=B のとき X=0, Y=1, Z=0, A<B のとき X=0,Y=0, Z=1 であるとする. X と Y それぞれについて図 5.5 の形式でカルノー図を完成させよ.

（イ）（ア）で求めたカルノー図を利用して, X,Y それぞれについて入力 A_1, A_0, B_1, B_0 を用いて積和標準形 (積項の和形式, NOT-AND-OR 形式) で項数が最小となるように簡単化し, 論理式で表わせ.

A_1A_0 \ B_1B_0	00			
00				

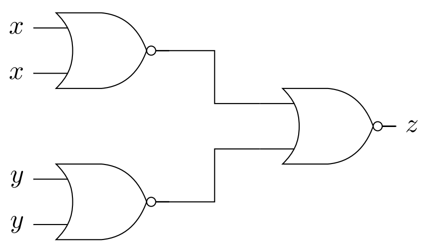
図 5.5 カルノー図

解説)

a) AND 回路について

$$
\begin{aligned}
z &= xy \\
&= ((xy)')' \\
&= (x' + y')' \\
&= (x'x' + y'y')' \\
&= ((x+x)' + (y+y)')'
\end{aligned}
$$

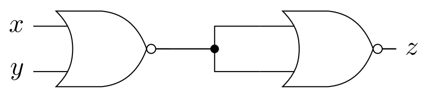
となるので,



OR 回路について

$$
\begin{aligned}
z &= x + y \\
&= (x+y)(x+y) \\
&= (((x+y)(x+y))')' \\
&= ((x+y)' + (x+y)')'
\end{aligned}
$$

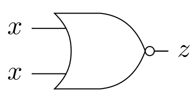
となるので,



NOT 回路について

$$
\begin{aligned}
z &= x' \\
&= x'x' \\
&= (x+x)'
\end{aligned}
$$

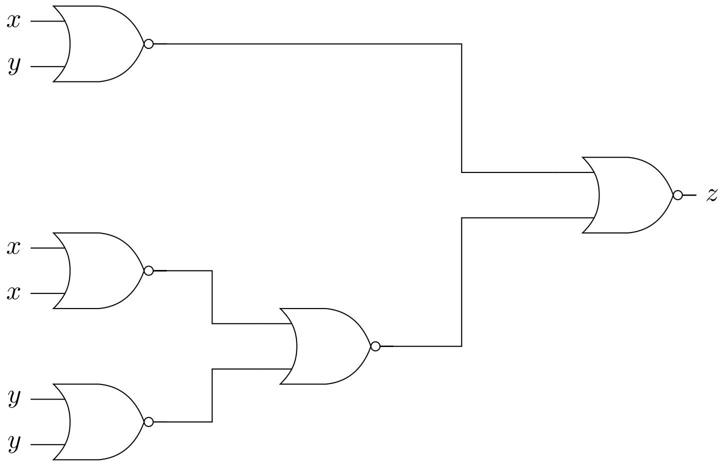
となるので,



XOR 回路について, AND 回路と OR 回路, NOT 回路の結果を用いて整理していく.

$$\begin{aligned}z &= xy' + x'y \\ &= ((xy' + x'y)')' \\ &= ((xy')'(x'y)')' \\ &= (x'x + x'y' + xy + yy')' \\ &= (x'y' + xy)' \\ &= (((x'y')')' + xy)' \\ &= ((x+y)' + xy)' \\ &= ((x+y)' + ((x+x)' + (y+y)')')'\end{aligned}$$

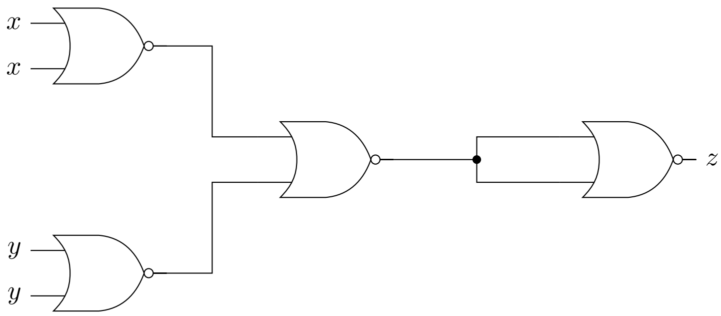
となるので,



NAND 回路について

$$\begin{aligned}z &= (xy)' \\ &= x' + y' \\ &= (x+x)' + (y+y)' \\ &= ((x+x)' + (y+y)')((x+x)' + (y+y)') \\ &= ((((x+x)' + (y+y)')'((x+x)' + (y+y)'))')' \\ &= (((x+x)' + (y+y)')' + ((x+x)' + (y+y)')')'\end{aligned}$$

となるので,



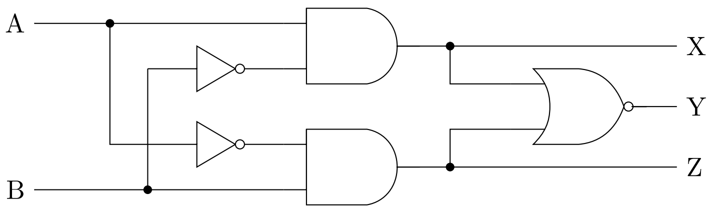
b)(ア) 値を代入するだけで求まる. 対応関係をよくみて記入するだけである. X は A>B のときのみ 1 となる. Y は A=B のときのみ 1 となる. Z は A<B のときのみ 1 となるように組んでいる.

A	B	X(A>B)	Y(A=B)	Z(A<B)
0	0	0	1	0
0	1	0	0	1
1	0	1	0	0
1	1	0	1	0

（イ）1 となるときのみ論理式に加えればいい．このとき A と B の論理積 (の論理和) で表される．論理積になる理由として A が〜かつ B が〜であるときに 1 という「かつ」という積 (AND) で表されるためである．ここで, A=1 のときはそのまま A でよいが, A=0 のときは $\bar{\mathrm{A}}$ で表すことに注意する (0 は否定となる)．よって,

$$\mathrm{X} = \mathrm{A}\bar{\mathrm{B}}$$
$$\mathrm{Y} = \bar{\mathrm{A}}\bar{\mathrm{B}} + \mathrm{AB}$$
$$\mathrm{Z} = \bar{\mathrm{A}}\mathrm{B}$$

（ウ）(i) について, 入力が A と $\bar{\mathrm{B}}$ である．これの出力が X であるので, (1)AND 回路であることがわかる．
(ii) について, 入力が $\bar{\mathrm{A}}$ と B である．これの出力が Z であるので, (1)AND 回路であることがわかる．
(iii) について, 論理式で比較すると全てのパターンを当てはめたり, 論理式の変形をしたりして時間がかかってしまう．ここで X,Y,Z の関係について見比べてみる．すると Y が 1 となるのは, X,Z が 0 のときのみである．そのためこのようになるのは (3)NOR 回路であることがわかる (それぞれの回路の真理値表を頭の中で想像できればわかるはず)．



c) これも問題文に沿って記入していくだけである．ここで図 5.5 に疑問を持ってほしいのだが, 00 の右側, 下側が空白となっている．これはそのあとが 01,10,11 と続かないことを暗黙的に意図している．カルノー図から積和標準形と求めていく際には項数が最小となるように論理式を組んでいくが, ここで重要なのでカルノー図を利用して容易に求められるということである．つまり 00,01,10,11 という順に表を記入してしまうとカルノー図とは言えない (ただの真理値表)．

（ア）カルノー図は 00,01,11,10 という順で記入されていく．これは一度に 2 ビット反転されず 1 ビット反転できるようにするためである．1 ビット反転ずつすることで $\bar{\mathrm{A}} + \mathrm{A} = 1$ という関係式が使えるので簡単化されるためである．これに注意してカルノー図を埋めると以下のようになる．

<u>X の場合について</u>

$\mathrm{A}_1\mathrm{A}_0$ \ $\mathrm{B}_1\mathrm{B}_0$	00	01	11	10
00	0	0	0	0
01	1	0	0	0
11	1	1	0	1
10	1	1	0	0

<u>Y の場合について</u>

B_1B_0 \ A_1A_0	00	01	11	10
00	1	0	0	0
01	0	1	0	0
11	0	0	1	0
10	0	0	0	1

（イ）最も簡単な形を求める方法としては表の中で 1 となるところを囲み, まとめて答えを出すことである.
囲み方は 2 の倍数ずつ ($A + \bar{A} = 1$ とするのが目的) である. 3 つ連続していても消してはならないが, 右端と左端をまとめて消すことは可能である.
X のカルノー図についてまとめると以下のようになる.

B_1B_0 \ A_1A_0	00	01	11	10
00	0	0	0	0
01	1	0	0	0
11	1	1	0	1
10	1	1	0	0

つまり以下のようになる.

$$X = A_1\bar{B}_1 + A_0\bar{B}_1\bar{B}_0 + A_1A_0B_1$$

一方で Y については囲むことが出来ないので, このまま記述したものが最も項数が少なくなる. よって,

$$Y = \bar{A}_1\bar{A}_0\bar{B}_1\bar{B}_0 + \bar{A}_1A_0\bar{B}_1B_0 + A_1A_0B_1B_0 + A_1\bar{A}_0B_1\bar{B}_0$$

3) 次の問に答えよ.
2^5 のアドレス空間のメモリを持つコンピュータにおける, 8 ブロックからなるダイレクト・マップ方式のキャッシュメモリ (以下, キャッシュと略す) を考える. ブロックの大きさは 1 語であるとする. メモリ・アドレスの下位 3 ビットがキャッシュのブロック番号を表すものとする. 表 5.2 におけるインデックスおよびタグの欄は 2 進数で表す. キャッシュの初期状態は空であり, キャッシュの有効ビット (表 5.2 の「有効」欄) はすべて N に設定されている. キャッシュのブロックが有効な場合は Y が設定される. タグにはキャッシュされている情報を指し示すのに必要十分である当該アドレスの上位 2 ビットを用いるものとする. 2 進数表記を行う際は, 1001_2 のように右下に小さく 2 を添え字として書く. メモリ中の各アドレスのデータは, そのアドレスと一致するものとする. 例えば, アドレス 10110_2 には語 10110_2 が入っている. ここで A を 10 進数表記でのメモリ・アドレスの参照系列とし, 系列 A : 10,15,2,15,10,2 とする.

表 5.2　キャッシュの状態表

インデックス	有効	タグ	データ
000_2			
001_2			
010_2			
011_2			
100_2			
101_2			
110_2			
111_2			

表 5.3　6 回のメモリ参照が行われたときの一連の動作

参照先アドレスの 10 進数表記	参照先アドレスの 2 進数表記	ヒット/ミスの別	割り当てられる キャッシュ・ブロック番号
10			
15			
2			
15			
10			
2			

a) 初期状態のキャッシュに対して, メモリ・アドレスの参照系列 A の左から順に 6 回のメモリ参照が行われたとき, 一連の動作を示すよう表 5.3 を埋めよ. この一連の動作が行われた後のキャッシュの状態を表 5.2 の形式で示せ.

b) a) で使用したダイレクト・マップ方式のキャッシュをブロック数を維持したまま 2 ウェイ・セット・アソシアティブ方式に変更した. 置換アルゴリズムは lRU(Least Recently Used) 法とする. このキャッシュの初期状態は空である. 系列 A の左から順に 6 回のメモリ参照が行われたとき, キャッシュミスが何回発生するか答えよ.

c) a) と b) の結果について, ダイレクト・マップ方式とセット・アソシアティブ方式のキャッシュのヒット率が異なる理由を 100 字以内で述べよ.

解説)

a) ヒットになる場合はキャッシュに割り当てられている場合で, それ以外の場合はミスとなる. 最初は空となるのでミスである. 一回格納されるとその後参照があればヒットなるが下位 3 ビットが同じである場合キャッシュで格納される場所は同じであるので情報が書き換えられてしまうことに注意する. 今回の問題では 10 と 2 の下位 3 ビットが同じであるのでキャッシュに格納される情報が書き換えられてしまうことに注意すると, 表 5.3 は以下のように書くことができる.

表 5.3(解)　6 回のメモリ参照が行われたときの一連の動作

参照先アドレスの 10 進数表記	参照先アドレスの 2 進数表記	ヒット/ミスの別	割り当てられる キャッシュ・ブロック番号
10	01010_2	ミス	010_2
15	01111_2	ミス	111_2
2	00010_2	ミス	010_2
15	01111_2	ヒット	111_2
10	01010_2	ミス	010_2
2	00010_2	ミス	010_2

タグには上位 2 ビットが格納され, データは参照先アドレス 2 進数表記 (タグ + インデックス) である. はじめの状態は N が設定されているがキャッシュが割り当てられた場合には Y に変わる. つまり今回の問題では N の場合はタグとデータは何も存在しない. すると 010_2 においては 10 進数表記では 10 と 2 がキャッシュされたが, 最後に 2 がキャッシュされるので 2 が格納されている. このことに注意して以下のようにキャッシュの状態を記入することが出来る.

表 5.2(解)　キャッシュの状態表

インデックス	有効	タグ	データ
000_2	N		
001_2	N		
010_2	Y	00	00010
011_2	N		
100_2	N		
101_2	N		
110_2	N		
111_2	Y	01	01111

b) 2 ウェイ・セット・アソシアティブ方式は割り当てられるキャッシュブロック番号が 2 つ存在する．したがって, 下位 3 ビットの値が同じ値であったとしても, 格納先が 2 つ存在することになる．つまり下位 2 ビットの値で格納するが選択肢が 2 通りある．つまり 2 と 10 に関してはキャッシュ・ブロック番号が同じであるが格納先が同じであった場合はブロック番号の最上位ビットを書き換えることで実装する (もしくは上位 2 ビット比較を行って下位 1 ビットを格納先として指定する).
よって 2 回目に同じ値が参照される場合は全てヒットするので, ヒット率は 50% である.

c) 解答としては以下のようになる.
ダイレクト・マップ方式は下位 3 ビットが同じである場合はキャッシュの情報が書き換えられるが, セット・アソシアティブ方式は下位 3 ビットが同じでも格納選択肢が複数存在するため, 空きが多くなりやすいから.(100 字)
解説として下位 2 ビットを割り当てるキャッシュ・ブロック番号に割り当てる情報だとする．すると下位 2 ビットなので下位 3 ビットに比べて同じキャッシュブロック番号になる確率は 2 倍となる．しかしキャッシュで使われる番号が偏る場合はダイレクトマップ方式は頻繁にキャッシュの内容が書き換わり効率が悪い．しかし, そのような場合は同じブロックのかたまりを用意することで回避することができる．それをセット・アソシアティブ方式で回避する．同じブロックのかたまりを指定するのでかぶる可能性が増えるのを引き換えにそのブロックのかたまり内で配置できる場所が増えるので, 指定する場所が似ている場合はこちらのほうが有効である.