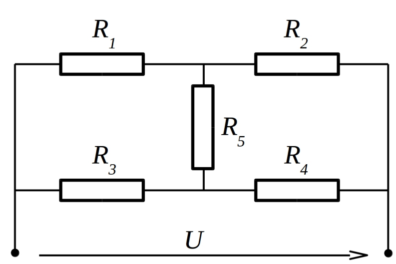
Csillag-delta átalakítások

Kőházi-Kis Ambrus

1. Csillag-delta átalakítások szükségessége

Vannak áramkörök, például az 1.1. ábrán adott áramkör (úgynevezett hídáramkör), amelyben az ellenállások kölcsönös viszonya nem vezetető vissza soros, vagy párhuzamos kapcsolatra.

Ilyen esetben megfelelő, egymással úgynevezett **csillag-kapcsolt (Y-kapcsolt) vagy delta-kapcsolt(háromszög-kapcsolt) ellenállás hármasok** megválasztásával átalakíthatjuk úgy a hálózatot, hogy annak az átalakításban részt nem vevő része ugyanúgy működik (ugyanaz a feszültsége, árama), mint az eredeti áramkör megfelelő része. Az átalakítás értelme pedig az, hogy a módosított áramkörben már az ellenállások kapcsolata értelmezhető soros-, párhuzamos-kapcsolások alapján – számolható az eredő ellenállás, meghatározható feszültség-, vagy áramosztással az áramöri elemek áramai, feszültségei.



1.1. ábra. A hídáramkör ellenállásai nincsenek egymással sem soros, sem párhuzmos kapcsolásban

Az 1.1. ábrán látható áramkörben kettő ellenálláscsoportot látunk csillag-kapcsolásba rendeződni: R_1, R_2 és R_5 ellenállások, és R_3, R_4 és R_5 ellenállások.

Az 1.1. ábrán látható áramkörben kettő ellenálláscsoportot látunk delta-kapcsolásba rendeződni: R_1, R_3 és R_5 ellenállások, és R_2, R_4 és R_5 ellenállások.

A továbbiakban részletesen bemutatom a csillag-delta és delta-csillag átalakítások módszereit, amelyeket egy konkrét példán keresztül demonstrálok is.

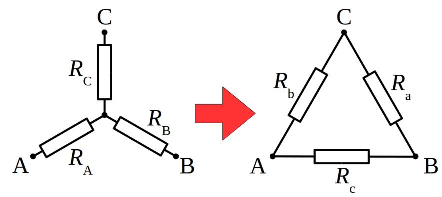
A példa-kapcsolás adatai: $R_1 = 20\,\mathrm{k\Omega}$, $R_2 = 40\,\mathrm{k\Omega}$, $R_3 = 30\,\mathrm{k\Omega}$, $R_4 = 120\,\mathrm{k\Omega}$, $R_5 = 80\,\mathrm{k\Omega}$.

2. Csillag-delta átalakítás

2.1. Csillag-delta átalakítás általában

A 2.1. ábrán jelölt csillag alakzatot kell keresni az eredeti áramörben és az ábrán A, B és C-vel jelölt pontok jelzik a megtalált csillag-alakzatnak az áramkör többi részéhez csatlakozó pontjait. Az átalakított, delta-kapcsolás ellenállásait úgy határozzuk meg, hogy az áramkörbe az A, B és C pontok közötti részt delta-kapcsolássá átalakítva az átalakításban részt nem vevő része az áramkörnek ugyanúgy működjön, mint az eredeti áramkörben.

Az ellenállások indexelése a geometriában rajzolt háromszögek csúcsainak és oldalainak jelöléséhez igazodnak: nagy betűvel indexeljük a csúcsokhoz tartozó ellenállásokat (csillag-kapcsolásban), kisbetűvel indexeljük az oldalakhoz tartozó ellenállásokat (delta-kapcsolásban).



2.1. ábra. Csillag-Delta átalakítás

Az átalakítást úgy kell elvégezni, hogy

1. azonosítjuk azt a három pontot (A, B, C), amelyeken keresztül ez a három ellenállás az áramkör többi részéhez csatlakozik;
2. újrarajzoljuk az áramkört az átalakításra kiválasztott ellenállások nélkül, majd az A, B, C csúcsokhoz berajzolunk a csúcsok közé egy-egy ellenállást (delta-, vagy háromszög-kapcsolásba);
3. Az ellenállásoknak új nevet adunk – ez elkerülhetetlen, mert ezek ellenállásértékei nem egyeznek meg általában egyetlen az eredeti áramkörben szereplő ellenállás értékeivel. Javasolt elnevezés: az A csúccsal szemben legyen R_a, B-vel szemben R_b és C-vel szemben R_c (hasonlóan a háromszög oldalainak elnevezéséhez).

Az átalakítás képletei:

$$R_a = \frac{R_B\, R_C}{R_Y}\,, \tag{2.1}$$

$$R_b = \frac{R_A\, R_C}{R_Y}\,, \tag{2.2}$$

$$R_c = \frac{R_A\, R_B}{R_Y}\,, \tag{2.3}$$

ahol (× a replussz műveletet jelöli, a replussz művelet asszociatív)

$$R_Y = R_A \times R_B \times R_C = \frac{1}{\frac{1}{R_A} + \frac{1}{R_B} + \frac{1}{R_C}}\,. \tag{2.4}$$

Az (2.1)-(2.3) képletek bemagolása helyett lényegüket geometriai úton is megjegyezhetjük. Amikor a delta-kapcsolás egy oldalához tartozó ellenállást (pl. R_b-t) akarjuk számolni, akkor annak az oldalnak két végén levő csúcshoz tartozó (példánkban R_A és R_C) ellenállásokat (lásd a 2.1. ábrát) kell összeszorozni és osztani az R_Y értékével.

2.2. R_1 és R_2 áramának számolásához célszerű csillag-delta átalakítás

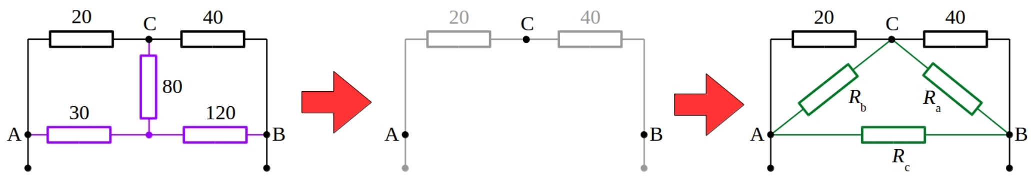
R_1 és R_2 ellenállások áramának, feszültségének meghatározásához ezek szerint az R_3, R_4 és R_5 ellenállások átalakítására van szükség.

Először kiszámoljuk az átalakítás során segédeszközként használt R_Y értékét: az átalakításban szereplő ellenállásokból ($R_3 = 30\,\mathrm{k\Omega}$, $R_4 = 120\,\mathrm{k\Omega}$ és $R_5 = 80\,\mathrm{k\Omega}$) kell számolni (lásd a 2.2. ábrát):

$$R_Y = \frac{1}{\frac{1}{R_A} + \frac{1}{R_B} + \frac{1}{R_C}} = \frac{1}{\frac{1}{30} + \frac{1}{120} + \frac{1}{80}} = \frac{240}{8+2+3} = \frac{240}{13}\,\mathrm{k\Omega}\,. \tag{2.5}$$

Az R_a ellenállás a B és a C csúcsok között kapott helyet (lásd a 2.2. ábrát), így a B-be csatlakozó 120 kΩ-os és a C-be csatlakozó 80 kΩ-os ellenállásokkal kell számolni:

$$R_a = \frac{120 \cdot 80}{240/13} = 520\,\mathrm{k\Omega}\,. \tag{2.6}$$



2.2. ábra. Az R_3, R_4 és R_5 ellenállások csillag-delta átalakítása után a többi ellenálláson folyó áram ugyanaz marad, ha az új ellenállásokat a 2.1. alfejezet szerint számoljuk

Hasonlóan, az R_b ellenállás az A és a C csúcsok között kapott helyet (lásd a 2.2. ábrát), így az A-ba csatlakozó 30 kΩ-os és a C-be csatlakozó 80 kΩ-os ellenállásokkal kell számolni:

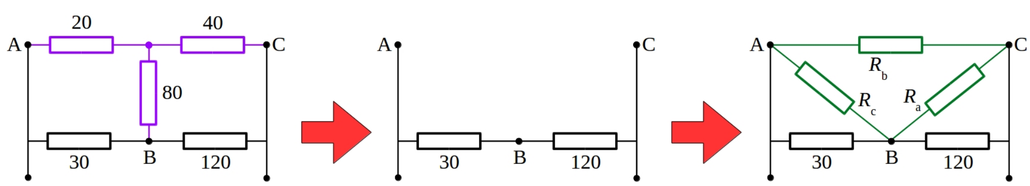
$$R_\mathrm{b} = \frac{30 \cdot 80}{240/13} = 130\,\mathrm{k\Omega}\,. \tag{2.7}$$

Hasonlóan, az R_c ellenállás az A és a B csúcsok között kapott helyet (lásd a 2.2. ábrát), így az A-ba csatlakozó 30 kΩ-os és a B-be csatlakozó 120 kΩ-os ellenállásokkal kell számolni:

$$R_\mathrm{c} = \frac{30 \cdot 120}{240/13} = 195\,\mathrm{k\Omega}\,. \tag{2.8}$$

2.3. R_3 és R_4 áramának számolásához célszerű csillag-delta átalakítás

R_3 és R_4 ellenállások áramának, feszültségének meghatározásához az R_1, R_2 és R_5 ellenállások átalakítására van szükség (lásd a 2.3. ábrát).



2.3. ábra. Az R_1, R_2 és R_5 ellenállások csillag-delta átalakítása után a többi ellenálláson folyó áram ugyanaz marad, ha az új ellenállásokat a 2.1. alfejezet szerint számoljuk

Először kiszámoljuk az átalakítás során segédeszközként használt R_Y értékét: az átalakításban szereplő ellenállásokból ($R_1 = 20\,\mathrm{k\Omega}$, $R_2 = 40\,\mathrm{k\Omega}$ és $R_5 = 80\,\mathrm{k\Omega}$) kell számolni (lásd a 2.3. ábrát):

$$R_\mathrm{Y} = \frac{1}{\frac{1}{R_\mathrm{A}} + \frac{1}{R_\mathrm{B}} + \frac{1}{R_\mathrm{C}}} = \frac{1}{\frac{1}{20} + \frac{1}{40} + \frac{1}{80}} = \frac{80}{4+2+1} = \frac{80}{7}\,\mathrm{k\Omega}\,. \tag{2.9}$$

Az R_a ellenállás a B és a C csúcsok között kapott helyet (lásd a 2.3. ábrát), így a B-be csatlakozó 80 kΩ-os és a C-be csatlakozó 40 kΩ-os ellenállásokkal kell számolni:

$$R_\mathrm{a} = \frac{80 \cdot 40}{80/7} = 280\,\mathrm{k\Omega}\,. \tag{2.10}$$

Hasonlóan, az R_b ellenállás az A és a C csúcsok között kapott helyet (lásd a 2.3. ábrát), így az A-ba csatlakozó 20 kΩ-os és a C-be csatlakozó 40 kΩ-os ellenállásokkal kell számolni:

$$R_\mathrm{b} = \frac{20 \cdot 40}{80/7} = 70\,\mathrm{k\Omega}\,. \tag{2.11}$$

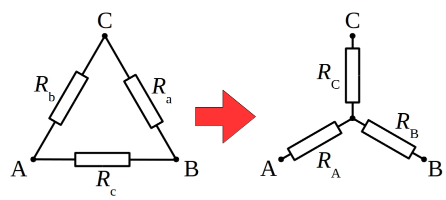
Hasonlóan, az R_c ellenállás az A és a B csúcsok között kapott helyet (lásd a 2.3. ábrát), így az A-ba csatlakozó 20 kΩ-os és a B-be csatlakozó 80 kΩ-os ellenállásokkal kell számolni:

$$R_\mathrm{c} = \frac{20 \cdot 80}{80/7} = 140\,\mathrm{k}\Omega\,. \tag{2.12}$$

3. Delta-csillag átalakítás

3.1. Delta-csillag átalakítás általában

A 3.1. ábrán jelölt delta alakzatot kell keresni az eredeti áramörben és az ábrán A, B és C-vel jelölt pontok jelzik a megtalált delta-alakzatnak az áramkör többi részéhez csatlakozó pontjait. Az átalakított, csillag-kapcsolás ellenállásait úgy határozták meg, hogy az áramkörbe az A, B és C pontok közötti részt csillag-kapcsolássá átalakítva az átalakításban részt nem vevő része az áramkörnek ugyanúgy működjön, mint az eredeti áramkörben.



3.1. ábra. Delta-Csillag átalakítás

Az átalakítást úgy kell elvégezni (lásd a 3.2. ábrát), hogy

1. azonosítjuk azt a három pontot (A, B, C), amelyeken keresztül ez a három ellenállás az áramkör többi részéhez csatlakozik;
2. újrarajzoljuk az áramkört az átalakításra kiválasztott ellenállások nélkül, majd az A, B, C csúcsoktól egy közös pontig (csillag-pontig) berajzolunk egy-egy ellenállást (csillag-, vagy Y-kapcsolásba);
3. Az ellenállásoknak új nevet adunk – ez elkerülhetetlen, mert ezek ellenállásértékei nem egyeznek meg általában egyetlen az eredeti áramkörben szereplő ellenállás értékeivel. Javasolt elnevezés: az A csúcshoz csatlakozó legyen R_A, B-hez csatlakozó legyen R_B és C-hez csatlakozó legyen R_C (hasonlóan a háromszög csúcsainak elnevezéséhez).

Az ellenállások indexelése a geometriában rajzolt háromszögek csúcsainak és oldalainak jelöléséhez igazodnak: nagy betűvel indexeljük a csúcsokhoz tartozó ellenállásokat (csillag-kapcsolásban), kisbetűvel indexeljük az oldalakhoz tartozó ellenállásokat (delta-kapcsolásban).

Az átalakítás képletei:

$$R_\mathrm{A} = \frac{R_\mathrm{a}\,R_\mathrm{c}}{R_\mathrm{a} + R_\mathrm{b} + R_\mathrm{c}}\,, \tag{3.1}$$

$$R_\mathrm{B} = \frac{R_\mathrm{a}\,R_\mathrm{c}}{R_\mathrm{a} + R_\mathrm{b} + R_\mathrm{c}}\,, \tag{3.2}$$

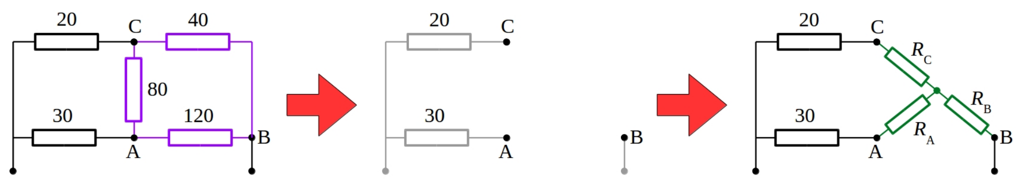
$$R_\mathrm{C} = \frac{R_\mathrm{a}\,R_\mathrm{b}}{R_\mathrm{a} + R_\mathrm{b} + R_\mathrm{c}}\,. \tag{3.3}$$

Ez a delta-csillag átalakítás inverze a (2.1)-(2.4) egyenletekkel definiált csillag-delta átalakításnak.

Az (3.1)-(3.3) képletek bemagolása helyett lényegüket geometriai úton is megjegyezhetjük. Amikor a csillag-kapcsolás egy csúcsához tartozó ellenállást (pl. R_B-t) akarjuk számolni, akkor ahhoz a csúcshoz csatlakozó két oldalhoz tartozó (példánkban R_a és R_c) ellenállásokat (lásd a 3.1. ábrát) kell összeszorozni és osztani a eredeti áramkör delta-kapcsolásában szereplő ellenállások összegével, amit hurokelleneállásnak is szoktak nevezni.

3.2. R_1 és R_3 áramának számolásához célszerű delta-csillag átalakítás

R_1 és R_3 ellenállások áramának, feszültségének meghatározásához az R_2, R_4 és R_5 ellenállások átalakítására van szükség.



3.2. ábra. Az R_2, R_4 és R_5 ellenállások delta-csillag átalakítása után a többi ellenálláson folyó áram ugyanaz marad, ha az új ellenállásokat a 3.1. alfejezet szerint számoljuk

Az R_A ellenállást az A csúcshoz csatlakoztatjuk, amelyből eredetileg a $80\,\mathrm{k\Omega}$-os és a $120\,\mathrm{k\Omega}$-os ellenállások indulnak ki (lásd a 3.2. ábrát), így:

$$R_\mathrm{A} = \frac{120 \cdot 80}{40 + 80 + 120} = 40\,\mathrm{k\Omega}\,. \tag{3.4}$$

Az R_B ellenállást az B csúcshoz csatlakoztatjuk, amelyből eredetileg a $40\,\mathrm{k\Omega}$-os és a $120\,\mathrm{k\Omega}$-os ellenállások indulnak ki (lásd a 3.2. ábrát), így:

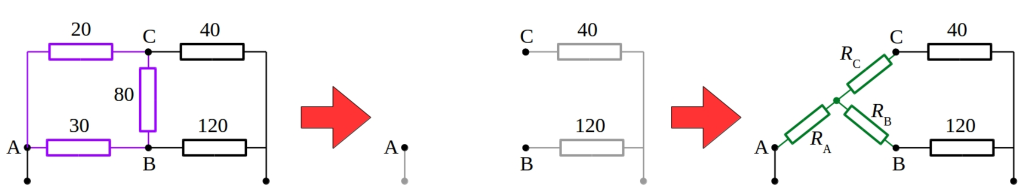
$$R_\mathrm{B} = \frac{120 \cdot 40}{40 + 80 + 120} = 20\,\mathrm{k\Omega}\,. \tag{3.5}$$

Az R_C ellenállást az C csúcshoz csatlakoztatjuk, amelyből eredetileg a $40\,\mathrm{k\Omega}$-os és a $80\,\mathrm{k\Omega}$-os ellenállások indulnak ki (lásd a 3.2. ábrát), így:

$$R_\mathrm{C} = \frac{40 \cdot 80}{40 + 80 + 120} = 13,333\,\mathrm{k\Omega}\,. \tag{3.6}$$

3.3. R_2 és R_4 áramának számolásához célszerű delta-csillag átalakítás

R_2 és R_4 ellenállások áramának, feszültségének meghatározásához az R_1, R_3 és R_5 ellenállások átalakítására van szükség.



3.3. ábra. Az R_1, R_3 és R_5 ellenállások delta-csillag átalakítása után a többi ellenálláson folyó áram ugyanaz marad, ha az új ellenállásokat a 3.1. alfejezet szerint számoljuk

Az R_{A} ellenállást az A csúcshoz csatlakoztatjuk, amelyből eredetileg a $20\,\mathrm{k\Omega}$-os és a $30\,\mathrm{k\Omega}$-os ellenállások indulnak ki (lásd a 3.3. ábrát), így:

$$R_{\mathrm{A}} = \frac{20 \cdot 30}{20 + 30 + 80} = 4,615\,\mathrm{k\Omega}\,. \tag{3.7}$$

Az R_{B} ellenállást az B csúcshoz csatlakoztatjuk, amelyből eredetileg a $30\,\mathrm{k\Omega}$-os és a $80\,\mathrm{k\Omega}$-os ellenállások indulnak ki (lásd a 3.3. ábrát), így:

$$R_{\mathrm{B}} = \frac{30 \cdot 80}{20 + 30 + 80} = 18,462\,\mathrm{k\Omega}\,. \tag{3.8}$$

Az R_{C} ellenállást az C csúcshoz csatlakoztatjuk, amelyből eredetileg a $20\,\mathrm{k\Omega}$-os és a $80\,\mathrm{k\Omega}$-os ellenállások indulnak ki (lásd a 3.3. ábrát), így:

$$R_{\mathrm{C}} = \frac{20 \cdot 80}{20 + 30 + 80} = 12,308\,\mathrm{k\Omega}\,. \tag{3.9}$$