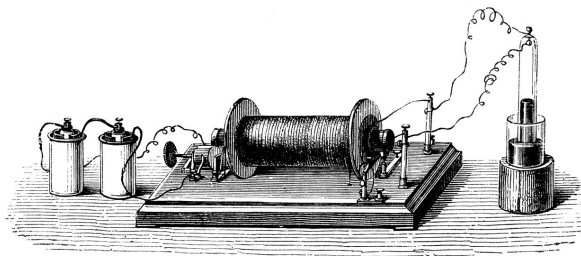


Villamosságtan

3. előadás

Összeállította: Kőházi-Kis Ambrus



Az előadás vázlata

- 1 Elektromos áram, elenállás
- 2 Egyszerű áramkörök
- 3 Thevenin- és Norton tétele
- 4 Az elektromos áram teljesítménye

A diasorozat az alábbi könyv tananyagának felhasználásával készült:

Erostyák János, Litz József, A fizika Alapjai,
Nemzeti Tankönyvkiadó, Budapest, 2002

Az elektromos áram

- Az elektromos áram a töltések rendezett áramlása.
- **Áramerősség:** I , mértékegysége: A (amper), $1 \text{ A} = 1 \text{ C/s}$

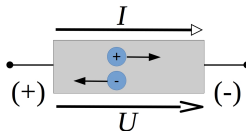
$$I = \frac{Q}{t},$$

ahol Q a vezető valamely keresztmetszetén t idő alatt átáramló töltés mennyisége.

- Az elektromos áramerősség megadja a vezető egy keresztmetszetén egységnyi idő alatt átáramló töltés nagyságát.
- Megállapodás szerint az áram iránya a pozitív töltések áramlási iránya (negatív töltések ellentétes irányú áramlásával egyenértékű).

Ellenálláson folyó áram

- Ellenállások feszültsége a két bekötési pontja közötti feszültség.
- A feszültség iránya a végpontok sorrendjét jelöli ki.
- Az ellenállásokon a töltések áramlását az elektromos tér hajtja.
- A bennük folyó áram iránya, azaz a pozitív töltések áramlási iránya a feszültség irányába, azaz a potenciálesésirányába esik.



- Ellenállásokon a feszültség és az áram iránya megegyezik.

Elektromos ellenállás – Ohm-törvénye

- **Elektromos ellenállás:** R , mértékegysége: Ω (ohm),
 $1 \Omega = 1 \text{V/A}$

$$R = \frac{U}{I},$$

ahol I az adott ellenálláson rákapcsolt U feszültség hatására folyó áram.

- A fenti „törvény” legalább annyira definiáló összefüggés, mint természettörvény.
- Bármely áramköri elemnek definiálhatjuk úgy az elektromos ellenállását mint a rákapcsolt feszültség és a rajta átfolyó áram hányadosát.
- Valójában csak az idealizált lineáris ohmikus ellenállásra teljesül Ohm-törvénye, azaz, hogy a feszültség és az áramszigorúan lineáris függvénykapcsolatban vannak egymással.
- Fémből készült ellenállásokra jó közelítéssel teljesül Ohm-törvénye.

Fémes vezeték ellenállása

- l hosszúságú, állandó A keresztmetszetű vezeték ellenállása:

$$R = \frac{\rho l}{A},$$

ahol ρ a vezeték anyagának fajlagos ellenállása.

- **Fajlagos ellenállás:** ρ , mértékegysége: $\Omega \text{ m}$

$$\rho = R \frac{A}{l}.$$

- A gyakran a fenti SI-egység tört részét szokták használni:

$$1 \Omega \frac{\text{mm}^2}{\text{m}} = 1 \Omega \frac{(10^{-3} \text{ m})^2}{\text{m}} = 10^{-6} \Omega \text{ m} = 1 \mu\Omega \text{ m}.$$

- Például: $\rho_{\text{Cu}} = 0,018 \mu\Omega \text{ m}$, $\rho_{\text{Al}} = 0,028 \mu\Omega \text{ m}$, $\rho_{\text{Fe}} = 0,12 \mu\Omega \text{ m}$ (20°C hőmérsékleten).
- A legjobb vezető anyagok a nemesfémek (arany, ezüst).

Ellenállások hőmérséklet-függése

- Fémes vezetők esetén szobahőmérséklet közelében az ellenállás jó közelítéssel lineárisan függ a hőmérséklettől:

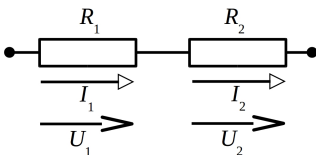
$$R = R_0 (1 + \alpha (T - T_0)) ,$$

ahol R_0 az ellenállás értéke T_0 hőmérsékleten (gyakran $T_0 = 20^\circ\text{C}$), α az ellenállás anyagának lineáris hőmérsékleti együtthatója, aminek mértékegysége: $1/\text{K} = 1/^\circ\text{C}$.

- Fémek esetén jellemzően a hőmérséklet növekedésével növekszik az ellenállás ($\alpha > 0$), félvezetők esetén azonban a hőmérséklet növekedésével egyre kisebb az ellenállás.
- Fémes anyagok esetén $T_0 = 20^\circ\text{C}$ közelében $\alpha \approx 4 \cdot 10^{-3} 1/\text{K}$.
- Például: egy $T_0 = 20^\circ\text{C}$ hőmérsékleten $R_0 = 100 \Omega$ -os ellenállás ha anyagának lineáris hőmérsékleti együtthatója $\alpha = 4 \cdot 10^{-3} 1/\text{K}$, akkor $T = 120^\circ\text{C}$ hőmérsékleten $R = 140 \Omega$.

Ellenállások soros és párhuzamos kapcsolása – 1

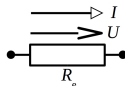
soros kapcsolás



$$U = U_1 + U_2$$

$$I = I_1 = I_2$$

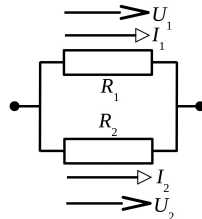
helyette:



$$R_e = \frac{U}{I}$$

$$R_e = R_1 + R_2$$

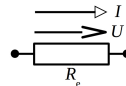
párhuzamos kapcsolás



$$I = I_1 + I_2$$

$$U = U_1 = U_2$$

helyette:

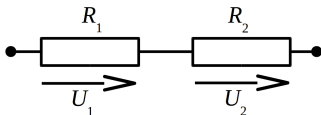


$$R_e = \frac{U}{I}$$

$$R_e = R_1 \times R_2 \equiv \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$$

Ellenállások soros és párhuzamos kapcsolása – 2

soros kapcsolás



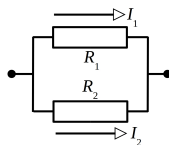
feszültségosztás:

$$U_1 = \frac{R_1 U}{R_1 + R_2},$$

$$U_2 = \frac{R_2 U}{R_1 + R_2},$$

$$\frac{U_1}{U_2} = \frac{R_1}{R_2}.$$

párhuzamos kapcsolás



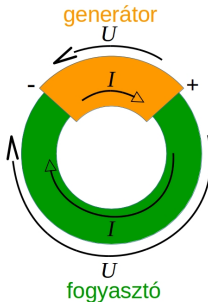
áramosztás:

$$I_1 = \frac{R_2 I}{R_1 + R_2},$$

$$I_2 = \frac{R_1 I}{R_1 + R_2},$$

$$\frac{I_1}{I_2} = \frac{R_2}{R_1} = \left(\frac{R_2}{R_1} \right)^{-1}$$

Egyszerű áramkör

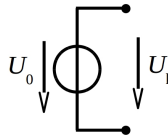


- Az áramkörben az áram körbe folyik.
- A feszültség értéke, előjele független az úttól, csak a kezdő és a végponttól függ.
- Generátorban az áram és a feszültség ellentétes irányú.
- A fogyasztóban az elektromos tér hajtja az áramot, ezért itt az áram és a feszültség azonos irányúak.

Ideális feszültséggenerátor

- **Ideális feszültséggenerátor:** minden áramkörben pontosan az U_0 forrásfeszültségével egyenlő feszültséget kelt.

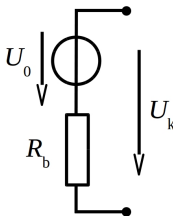
Jele:



- Az ideális feszültséggenerátor minden R_k ellenállásra ugyanazt az U_0 feszültséget kapcsolja. Ha R_k egyre kisebb, akkor ugyanazon feszültség rajta egyre nagyobb áramot kell áthajtson.
- A valóságos generátorok ezt vég nélkül nem tudják teljesíteni: növekvő áram esetén csökken az U_k kapocsfeszültségük.

Valóságos feszültséggenerátor

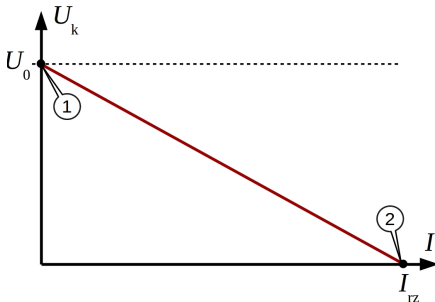
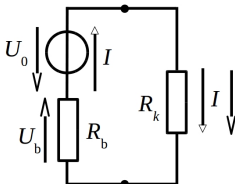
- **Valóságos (nem ideális) feszültséggenerátor:** a generátor véges teljesítőképességét egy R_b belső ellenállással vehetjük figyelembe:



- Ideális feszültséggenerátorok belső ellenállása nulla.
- Nem ideális feszültséggenerátor által keltett áram a belső ellenállásán az úgynevezett U_b belső feszültséget kelti, amely miatt az U_k kapocsfeszültség jellemzően kisebb, mint a generátor U_0 forrásfeszültsége:

$$U_k \leq U_0, \quad U_k = U_0 - U_b.$$

Egyszerű áramkör feszültséggenerátorral



$$U_k = U_0 - R_b I ,$$

$$U_k = \frac{R_k U_0}{R_b + R_k} ,$$

$$I = \frac{U_0}{R_b + R_k} .$$

1) Üresjárás:

$$U_k = U_0 ,$$

ekkor $R_k = \infty$.

2) Rövidzár:

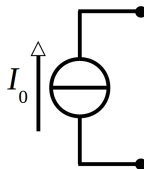
$$I = I_{rz} = \frac{U_0}{R_b} ,$$

ekkor $R_k = 0$.

Ideális áramgenerátor

- **Ideális áramgenerátor:** minden áramkörben pontosan az I_0 forrásárammal egyenlő áramot kelt.

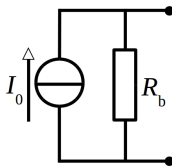
Jele:



- Az ideális áramgenerátor minden R_k ellenálláson ugyanazt az I_0 áramot hajtja keresztül. Ha R_k egyre nagyobb, akkor ugyanazon áram rajta egyre nagyobb feszültséget jelent.
- A valóságos generátorok ezt vég nélkül nem tudják teljesíteni: növekvő feszültség esetén csökken a generátor árama.

Valóságos áramgenerátor

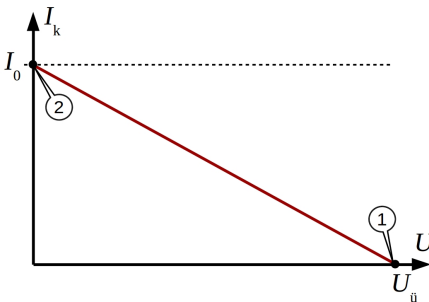
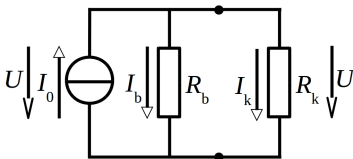
- **Valóságos (nem ideális) áramgenerátor:** a generátor véges teljesítőképességét egy R_b belső ellenállással vehetjük figyelembe:



- Ideális áramgenerátorok belső ellenállása végtelen.
- Nem ideális áramgenerátor a belső ellenállásán folyik áram, ezért a kapcspon kiáramló áram általában kisebb, mint a generátor forrásárama:

$$I_k \leq I_0, \quad I_k = I_0 - I_b.$$

Egyszerű áramkör áramgenerátorral



$$I_k = I_0 - U/R_b,$$

$$I_k = \frac{R_b I_0}{R_b + R_k},$$

$$U = I (R_b + R_k).$$

1) Üresjárás:

$$U_k = U_{\text{ü}} = I_0 R_b,$$

ekkor $R_k = \infty$.

2) Rövidzár:

$$I = I_{\text{rz}} = I_0,$$

ekkor $R_k = 0$.

Műszerek idealitása

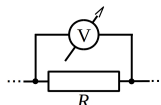
- Mérőműszerekkel szemben alapvető elvárás, hogy kalibráltak legyenek: kijelzőjük azt az értéket mutassa, amelyet érzékelője észlel.
- A műszerek ennek teljesülése esetén sem tekinthetők ideálisnak: nem feltétlenül azt mérik, amit szeretnénk.
- Általában ugyanis a műszer a mérés során kölcsönhat a mért rendszerrel, annak viselkedését módosítja.
- Mi általában nem a mérés által megzavart rendszer jellemzőire vagyunk kíváncsiak, hanem a megzavarás (a mérőműszer bekapcsolása) nélküli rendszer paramétereire.
- Ideális műszereknek nevezzük azokat a műszereket, amelyek mérés során **nem zavarják meg a mért rendszert**.

Ideális feszültségmérő

- Ideális feszültségmérő jele:



- Az áramköri elemek feszültségén mindig a bekötési pontjai közötti feszültséget értjük.
- Feszültségmérő bekötése: **párhuzamosan**

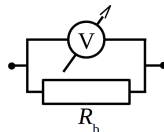


- A feszültségmérő akkor nem zavarja a mérendő áramkört, akkor tekinthető **ideálisnak**, ha olyan, mintha ott se lenne, ha **szakadásként viselkedik**, azaz belső elleállása végtelen:

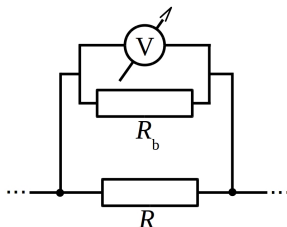
$$R_b = \infty, \quad \text{gyakorlatilag: } R_b \gg R.$$

Nem ideális (valóságos) feszültségmérő

- A feszültségmérőt csupán belső ellenállásával kell figyelembevenni, mert az ideális műszer olyan, mintha ott se lenne.

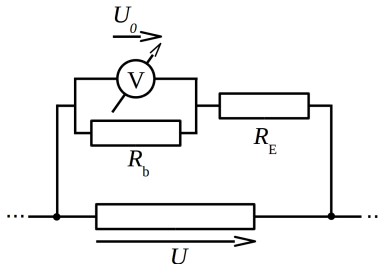


- Kapcsolása: **párhuzamosan**



Feszültségmérő méréshatárának kiterjesztése – 1

- Adott egy alaplámpásunk: U_0 a méréshatára, R_b a belső ellenállása.
- Szeretnénk U feszültségig méréseket végezni, de $U > U_0$.
- Az alaplámpással egy úgynevezett R_E előtétellenállást kell sorba kapcsolni:



- Minél nagyobb az előtétellenállás, annál kisebb része esik az U feszültségnek a műszerre.

Feszültségmérő méréshatárának kiterjesztése – 2

- Az U feszültségnek csak egy, az R_b és R_E ellenállások arányától függő rögzített hányadát mérjük a műszerrel, amely átskálázásával így már a nagyobb feszültség is mérhető.

- A feszültségosztás:

$$U_0 = \frac{R_b U}{R_b + R_E} .$$

- Legyen $k = U/U_0$, a méréshatárnövelés szorzója, ezzel

$$R_E = R_b (k - 1) .$$

- Az R_E ellenállással kibővített műszerünk R'_b belső ellenállása:

$$R'_b = k R_b .$$

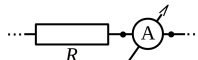
- Az univerzális mérőműszerekben a feszültségmérés méréshatárának változtatásakor az előtétellenállást változtatjuk.

Ideális árammérő

- Ideális árammérő jele:



- Az elektromos áram a vezeték egy keresztmetszetén időegység alatt átáramló töltés mennyiségét jelenti.
- Árammérő bekötése: **sorosan**

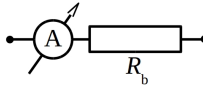


- Az áramkört meg kell szakítani, hogy az árammérőt beiktassuk az áramkörbe, hogy a mérendő áram átfolyhasson rajta.
- Az árammérő akkor nem zavarja a mérendő áramkört, akkor tekinthető **ideálisnak**, ha olyan, mintha ott se lenne, ha **rövidzárként viselkedik**, azaz belső ellenállása nulla:

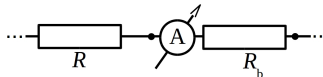
$$R_b = 0, \quad \text{gyakorlatilag : } R_b \ll R.$$

Nem ideális (valóságos) árammérő

- Az árammérőt csupán belső ellenállásával kell figyelembevenni, mert az ideális műszer olyan, mintha ott se lenne.



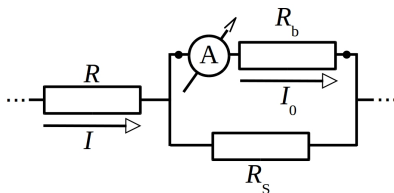
- Kapcsolása: **sorosan**



- Az árammérő műszer akkor zavarja kevésbé a vizsgált áramkör működését, ha a vizsgált áramköri ágba egymással sorbakötött ellenállások összegénél lényegesebb a belső ellenállása.

Árammérő méréshatárának kiterjesztése – 1

- Adott egy alapműszerünk: I_0 a méréshatára, R_b a belső ellenállása.
- Szeretnénk I áramig méréseket végezni, de $I > I_0$.
- Az alapműszerrel egy úgynevezett R_s **söntellenállást** kell sorba kapcsolni:



- Minél kisebb a söntellenállás, annál kisebb része folyik az I áramnak a műszer felé.

Árammérő méréshatárának kiterjesztése – 2

- Az I áramnak csak egy, az R_b és R_S ellenállások arányától függő rögzített hányadát mérjük a műszerrel, amely átskálázásával így már a nagyobb áram is mérhető.
- A feszültségosztás:

$$I_0 = \frac{R_S I}{R_b + R_S} .$$

- Legyen $k = I/I_0$, a méréshtárnövelés szorzója, ezzel

$$R_S = \frac{R_b}{k - 1} .$$

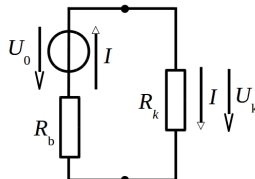
- Az R_E ellenállással kibővített műszerünk R'_b belső ellenállása:

$$R'_b = \frac{R_b}{k} .$$

- Az univerzális mérőműszerekben az árammérés méréshatárának változtatásakor a söntellenállást változtatjuk.

Egy egyszerű áramkör ideális feszültséggenerátorral

- Legyen $U_0 = 12 \text{ V}$, $R_b = 20 \Omega$, $R_k = 100 \Omega$.



- A külső ellenálláson eső feszültség:

$$I = \frac{U_0}{R_b + R_k} = \frac{12 \text{ V}}{20 \Omega + 100 \Omega} = 0,1 \text{ A}$$

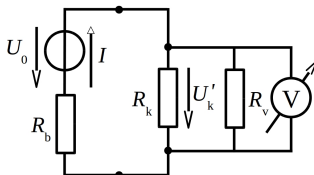
- A külső ellenálláson folyó áram:

$$U_k = \frac{R_k U_0}{R_b + R_k} = \frac{100 \Omega \cdot 12 \text{ V}}{20 \Omega + 100 \Omega} = 10 \text{ V}$$

- Megvizsgáljuk, hogy hogyan módosulnak a mérni kívánt áram, illetve feszültségértékek, ha nem ideális mérőműszerrel mérjük őket.

Mérés nem ideális feszültségmérővel

- Megmérjük a kapocsfeszültséget egy $R_v = 900 \Omega$ belső ellenállású feszültségmérővel:



- Az ideális feszültségmérő mintha ott se lenne, viszont az R_v ellenállással lényegében megváltozik a külső ellenállás R'_k értéke:

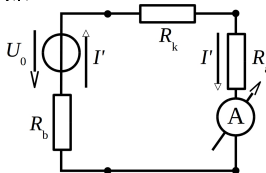
$$R'_k = R_k \times R_v = \frac{100 \Omega \cdot 900 \Omega}{100 \Omega + 900 \Omega} = 90 \Omega.$$

- A lényegében kisebb külső ellenállás kisebb U'_k kapocsfeszültséget eredményez:

$$U'_k = \frac{R'_k U_0}{R_b + R'_k} = \frac{90 \Omega \cdot 12 \text{ V}}{20 \Omega + 90 \Omega} = \underline{\underline{9,82 \text{ V}}}$$

Mérés nem ideális árammérővel

- Megmérjük az R_k ellenálláson folyó áramot egy $R_a = 10\ \Omega$ belső ellenállású árammérővel:



- Az ideális árammérő mintha ott se lenne, viszont az R_a ellenállással lényegében megváltozik a külső ellenállás R'_k értéke:

$$R'_k = R_k + R_a = 100\ \Omega + 10\ \Omega = 110\ \Omega.$$

- A lényegében nagyobb külső ellenállás kisebb I' áramerősséget eredményez:

$$I' = \frac{U_0}{R_b + R'_k} = \frac{12\ \text{V}}{20\ \Omega + 110\ \Omega} = \underline{\underline{0,092\ \text{A}}}$$

Egyszerűsítő képek

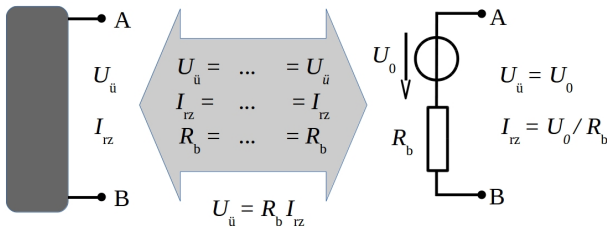
- Elemek, akkumulátorok, tápegységek, vagy akár a hálózati feszültség gyakran névleges feszültségükkel meghatározottak, attól függetlenül, hogy éppen milyen bonyolult áramkör is van mögötte.



- Áramgenerátorok külön nem kaphatók boltban, de összetett áramkörök részecskéit lehet áramgenerátornak tekinteni, pl .

Thevenin tétele

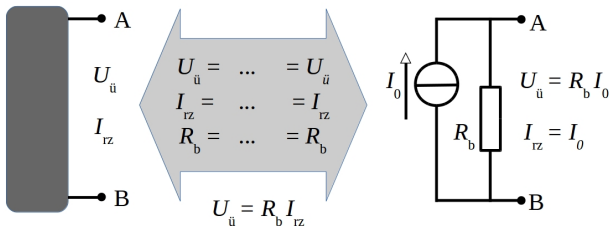
- Tetszőleges áramkör bármely kétpólusa helyettesíthető egy valóságos (nem ideális) **feszültséggenerátorral**.



- Összetett áramkörök úgy tekinthetők, mint egy nem ideális feszültséggenerátor – bármilyen bonyolult szerkezete is van.
- Az R_b belső ellenállást az eredeti áramkörben az A-B pontok közötti ellenállásként kell számolni úgy, hogy az áramkörből a generátorokat elhagyjuk.
- Általános esetben R_b nemlineáris: értéke függ a terheléstől.

Norton tétele

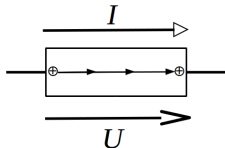
- Tetszőleges áramkör bármely kétpólusa helyettesíthető egy valóságos (nem ideális) **áramgenerátorral**.



- Összetett áramkörök úgy tekinthetők, mint egy nem ideális áramgenerátor – bármilyen bonyolult szerkezete is van.
- Az R_b belső ellenállást az eredeti áramkörben az A-B pontok közötti ellenállásként kell számolni úgy, hogy az áramkörből a generátorokat elhagyjuk.
- Általános esetben R_b nemlineáris: értéke függ a terheléstől.

Az elektromos tér munkát végez az áramló töltéseken

- I áram azt jelenti, hogy Δt idő alatt $\Delta Q = I \Delta t$ töltés áramlik át a vezető egy keresztmetszetén.



- Az U feszültségen áthaladó ΔQ töltésen az elektromos tér munkája

$$\Delta W = U \Delta Q .$$

- Az egységnyi idő alatt végzett munka a P **teljesítmény**:

$$P = \frac{\Delta W}{\Delta t} = \frac{U \Delta Q}{\Delta t} = UI .$$

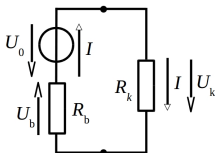
Az elektromos áram teljesítménye

- Az ellenállásokon az áram teljesítménye hőt generál – Joule-hő.
- Egyéb fogyasztókon az elektromos energia egyéb energiaformává is átalakulhat. pl.:
 - villanymotor – mechanikai energia,
 - elektromos fényforrás (LED, lézerdíóda, izzólámpa, fénycső) – fényenergia
 - akkumulátor töltő – elektromos energia
- Az elektromos teljesítmény másképpen is felírható az Ohm-törvény ($U = R I$) felhasználásával:

$$P = U I = R I^2 = \frac{U^2}{R} .$$

Fogyasztó illesztése a feszültségforráshoz

- Mekkora ellenállású fogyasztó esetén nyerhető egy feszültségforrásból a maximális teljesítmény?



$$P_k = R_k I_k^2 = \frac{R_k U_0^2}{(R_b + R_k)^2},$$

$$I = \frac{U_0}{R_b + R_k}.$$

- Ebben a felvetésben P_k lényegében R_k függvénye (R_b és U_0 állandó paramétereknek tekinthetők)
- P_k maximális, ha

$$\frac{d P_k}{d R_k} = 0,$$

$$\frac{d P_k}{d R_k} = \frac{U_0^2 \left[1 (R_b + R_k)^2 - R_k 2 (R_b + R_k) \right]}{(R_b + R_k)^4} = 0,$$

amiből

$$R_k = R_b,$$

azaz akkor nyerhető egy generátorból a legnagyobb teljesítmény, ha annak belső ellenállásával megegyező nagyságú fogyasztóval terheljük.

Köszönöm a figyelmet!