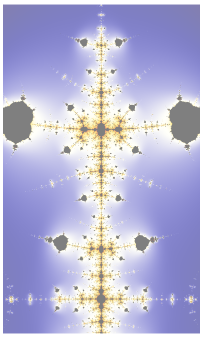
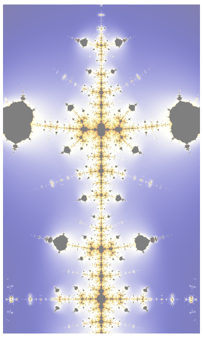
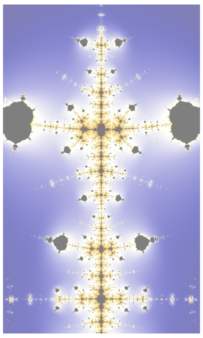
ANALÍZIS II SEGÉDLET

elemi függvények deriváltjai	
$f(x)$	$f'(x)$
c	0
x^n	nx^{n-1} , ha $n \neq 0$
$\ln x$	$\frac{1}{x}$
e^x	e^x
a^x	$a^x \cdot \ln a$
$\sin x$	$\cos x$
$\cos x$	$-\sin x$
$\operatorname{tg} x$	$\frac{1}{\cos^2 x}$
$\operatorname{ctg} x$	$-\frac{1}{\sin^2 x}$
$\arcsin x$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, ahol $\lvert x\rvert < 1$
$\arccos x$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, ahol $\lvert x\rvert < 1$
$\operatorname{arctg} x$	$\frac{1}{1+x^2}$
$\operatorname{arcctg} x$	$-\frac{1}{1+x^2}$







elemi függvények integráljai	
$f(x)$	$\int f(x)\,\mathrm{d}x$
a	$ax + C$, ha $a \in \mathrm{R}$
x^n	$\frac{x^{n+1}}{n+1} + C$, ha $n \neq -1$
$\frac{1}{x}$	$\ln \lvert x\rvert + C$
e^x	$e^x + C$
a^x	$\frac{a^x}{\ln a} + C$
$\sin x$	$-\cos x + C$
$\cos x$	$\sin x + C$
$\frac{1}{\cos^2 x}$	$\operatorname{tg} x + C$
$\frac{1}{\sin^2 x}$	$-\operatorname{ctg} x + C$
$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arcsin x + C$
$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arccos x + C$
$\frac{1}{1+x^2}$	$\operatorname{arctg} x + C$
$-\frac{1}{1+x^2}$	$\operatorname{arcctg} x + C$

integráltípusok:

- lineáris belső függvény esetén: $$\int f(ax+b)\,\mathrm{d}x = \frac{F(ax+b)}{a} + C$$
- derivált és a függvény hányadosa: $$\int \frac{g'(x)}{g(x)}\,\mathrm{d}x = \ln \lvert g(x)\rvert + C$$
- a függvény hatványa és deriváltja: $$\int g^n(x) \cdot g'(x)\,\mathrm{d}x = \frac{g^{n+1}(x)}{n+1} + C$$
- általánosan: $$\int f(g(x)) \cdot g'(x)\,\mathrm{d}x = F(g(x)) + C$$

parciális integrálás: $$\int u(x) \cdot v'(x)\,\mathrm{d}x = u(x) \cdot v(x) - \int u'(x) \cdot v(x)\,\mathrm{d}x$$

helyettesítéses integrálás: $$\int f(x)\,\mathrm{d}x = \left(\int f(x(t)) \cdot x'(t)\,\mathrm{d}t \right) \circ x^{-1}(t)$$

integrálszámítás alkalmazásai:

(1) f és g függvények görbéi közötti tartomány területe: $T = \left| \int_a^b f(x) - g(x)\,\mathrm{d}x \right|$

(2) Forgástest térfogata: $V = \pi \int_a^b f^2(x)\,\mathrm{d}x$

Kétváltozós függvények

szélsőérték létezésének szükséges, és elégséges feltételei: Az f függvénynek az (x_0, y_0) pontban
(1) létezhet lokális szélsőértéke, ha $f'_x(x_0, y_0) = 0$ és $f'_y(x_0, y_0) = 0$.
(2) létezik lokális szélsőértéke, ha a fenti (1)-s feltételen kívül még a

$$H(x_0, y_0) = \begin{pmatrix} f''_{xx}(x_0, y_0) & f''_{xy}(x_0, y_0) \\ f''_{yx}(x_0, y_0) & f''_{yy}(x_0, y_0) \end{pmatrix}$$

Hesse-mátrix determinánsa pozítiv, azaz $|H(x_0, y_0)| > 0$ is teljesül.

Ekkor ha $f''_{xx}(x_0, y_0) > 0$, akkor minimum, illetve ha $f''_{xx}(x_0, y_0) < 0$, akkor maximum van az (x_0, y_0)-ban.

Elsőrendű differenciálegyenletek

szétválasztható változójú egyenlet $y'(x) = f(x)g(y(x))$ megoldása:

$$\int \frac{1}{g(y(x))} y'(x)\,\mathrm{d}x = \int f(x)\,\mathrm{d}x \quad \Longrightarrow \quad \int \frac{1}{g(y(x))}\,\mathrm{d}y = \int f(x)\,\mathrm{d}x \quad \text{alapján}$$

szétválaszthatóra visszavezethetők új változó u bevezetésével:

$$y' = f\left(\frac{y}{x}\right) \quad \text{típusnál} \quad u(x) = \frac{y(x)}{x}$$

$$y' = f(ax + by + c) \quad \text{típusnál} \quad u(x) = ax + by(x) + c$$

lineáris inhomogén egyenlet $y'(x) + f(x)y(x) = g(x)$ megoldása: $y = y_h \cdot p$ alakban,
ahol az y_h és p függvények az $y'_h + f y_h = 0$ és a $p' \cdot y_h = g$ egyenletek megoldásai.

Másodrendű differenciálegyenletek

elsőrendűre visszavezethetők új változó bevezetésével:

$F(y'', y', x) = 0$ típusnál $p(x) = y'(x)$, ekkor $y''(x) = p'(x)$;
$F(y'', y', y) = 0$ típusnál $r(y) = y'(x)$, ekkor $y''(x) = r'(y)r(y)$

lineáris állandó együtthatós homogén egyenlet $y'' + by' + cy = 0$ megoldása:

a $\lambda^2 + b\lambda + c = 0$ karakterisztikus egyenlet megoldásai alapján

$y = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x}$, ha $\lambda_1 \neq \lambda_2 \in \mathbb{R}$

$y = e^{\lambda_1 x}(C_1 x + C_2)$, ha $\lambda_1 = \lambda_2 \in \mathbb{R}$

$y = e^{\alpha x}(C_1 \sin \beta x + C_2 \cos \beta x)$, ha $\lambda_1 = \overline{\lambda_2}$ komplexek és $\lambda_1 = \alpha + i\beta$

lineáris állandó együtthatós inhomogén egyenlet $y'' + by' + cy = g$ megoldása:

$y = y_h + p$ alakban, ahol
y_h a feladat homogén változatának általános megoldása,
p egy g típusú próbafüggvény alapján kapott megoldás.

próbafüggvények	
$g(x)$	$p(x)$
x^3	$A_3x^3 + A_2x^2 + A_1x + A_0$
$e^{\alpha x}$	$Ae^{\alpha x}$
$\sin \alpha x$	$A \sin \alpha x + B \cos \alpha x$
$\cos \alpha x$	$A \sin \alpha x + B \cos \alpha x$