

Szuperpozíció alkalmazása áramkörök vizsgálatára

Kőházi-Kis Ambrus

1. A szuperpozíció elve

A szuperpozíció elve lineáris egyenletekkel leírható fizikai rendszerre vonatkozó általános elv. A klasszikus fizikában valamely fizikai **menntiségek független összegződésének elve**. [1]

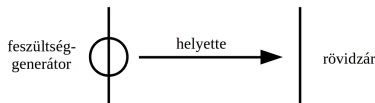
Áramköröket sokszor közelítően, bizonyos keretek között lineáris egyenletek írják le. Főként valamely munkapont közelében kis jelek esetén még nemlineáris áramköri elemeket is tartalmazó áramkörökben is alkalmazható. A módszer főként bonyolult áramkörök vizsgálatára ajánlott. A többgenerátoros eredeti áramkör problémáját több egygenerátoros áramköri problémára vezeti vissza, ezek egyszerűbben, átláthatóbban megoldhatók (bár a teljes megoldás lehet akár hosszabb is). A generátorok által külön-külön keltett áramokat előjelesen összegezve kapjuk az eredeti áramkör áramait. (lásd például [2])

A szuperpozíció elve fontos az áramkörök működésének megértése szempontjából is: az áramkörök Fourier-analízise is azon alapul, hogy kihasználjuk a különböző frekvenciákon gerjesztett áramok független összegződését.

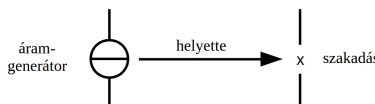
Ebben a kurzusban a szuperpozíció elvét lineáris áramköri elemek figyelembevételével gyakoroljuk.

2. A szuperpozíció elvének alkalmazása többgenerátoros áramkörök analízisére

1. Tegyük fel, hogy van egy N generátort tartalmazó áramkör (ebben a módszerben ezek a generátorok lehetnek akár feszültség, akár áramgenerátorok is).
2. N részprobléma megoldása. Végiglépkedve az összes generátoron N részproblémát kapunk.
 - (a) A kiválasztott generátoron kívül az összes többi kihagyjuk az áramkörből, az alábbi szabályok szerint:
 - i. feszültséggenerátort rövidzárral helyettesítjük:



- ii. áramgenerátort szakadással helyettesítjük:



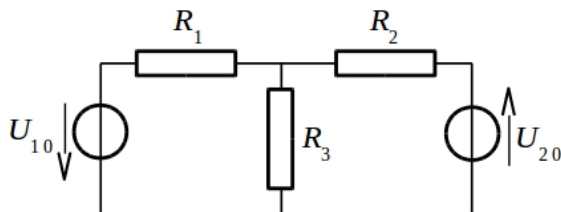
- (b) A kapott egygenerátoros áramkörben meghatározzuk a keresett áramokat.
3. A kapott áramokat előjelesen összegezzük.

3. A legegyszerűbb kétgenerátoros problémák

3.1. Két feszültséggenerátort tartalmazó áramkör

Határozzuk meg a 3.1.1. ábrán látható ellenállások áramait!

Adatok: $R_1 = 30 \text{ k}\Omega$, $R_2 = 40 \text{ k}\Omega$, $R_3 = 60 \text{ k}\Omega$, $U_1 = 8 \text{ V}$, $U_2 = 12 \text{ V}$.

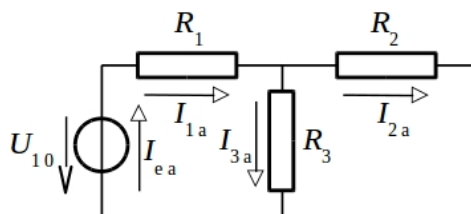


3.1.1. ábra. Két feszültséggenerátort tartalmazó áramkör

A szuperpozíció módszere szerint a két generátor miatt, két esetet kell vizsgálnunk.

3.1.1. Csak U_{10} marad (a-eset)

A másik, azaz az U_{20} feszültséggenerátort kihagyjuk – helyette rövidzárat teszünk (lásd a 3.1.2. ábrát).



3.1.2. ábra. Ha csak egy generátor van az áramkörben, akkor könnyen megadhatjuk az áramok irányát

Ha egyetlen feszültséggenerátor van egy áramkörben, akkor feltétlenül az határozza meg az áram irányát. Egy feszültséggenerátor a forrásfeszültségének irányával ellentétes irányú áramot kelt (a 3.1.2. ábrán I_{ea}). Amely egyenlő az R_1 ellenállás áramával és eloszlik R_2 és R_3 párhuzamos ellenállásokon.

Az eredő ellenállás:

$$R_{ea} = R_1 + R_2 \times R_3 = 30 + 40 \times 60 = 30 + 24 = 54 \text{ k}\Omega ,$$

ezzel számolhatjuk az eredő áramot:

$$I_{1a} = I_{ea} = \frac{U_{10}}{R_{ea}} = \frac{8 \text{ V}}{54 \text{ k}\Omega} = 0,1481 \text{ mA} .$$

Az áramosztó-képlet segítségével:

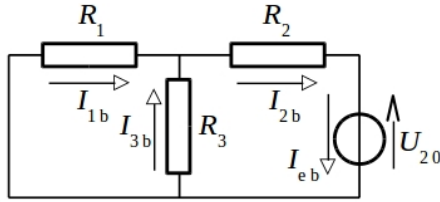
$$I_{2a} = I_{1a} \frac{R_3}{R_3 + R_2} = 0,1481 \text{ mA} \frac{60}{60 + 40} = 0,0889 \text{ mA} ,$$

a másik ágon folyó áram:

$$I_{3a} = I_{1a} - I_{2a} = 0,1481 - 0,0889 = 0,0592 \text{ mA} .$$

3.1.2. Csak U_{20} marad (b-eset)

A másik, azaz az U_{10} feszültséggenerátort kihagyjuk – helyette rövidzárat teszünk (lásd a 3.1.3. ábrát).



3.1.3. ábra. Most is az egyetlen generátor határozza meg az áramok irányait

Most is a feszültséggenerátor a forrásfeszültségének irányával ellentétes irányú áramot kelt (a 3.1.3. ábrán I_{eb}). Amely egyenlő az R_2 ellenállás áramával és eloszlik R_1 és R_3 párhuzamos ellenállásokon. Az eredő ellenállás:

$$R_{eb} = R_2 + R_1 \times R_3 = 40 + 30 \times 60 = 40 + 20 = 60 \text{ k}\Omega ,$$

ezzel számolhatjuk az eredő áramot:

$$I_{2b} = I_{eb} = \frac{U_{20}}{R_{eb}} = \frac{12 \text{ V}}{60 \text{ k}\Omega} = 0,2000 \text{ mA} .$$

Az áramosztó-éplet segítségével:

$$I_{1b} = I_{2b} \frac{R_3}{R_3 + R_1} = 0,2000 \text{ mA} \frac{60}{60 + 30} = 0,1333 \text{ mA} ,$$

a másik ágon folyó áram:

$$I_{3b} = I_{2b} - I_{1b} = 0,2000 - 0,1333 = 0,0667 \text{ mA} .$$

3.1.3. Összegzés

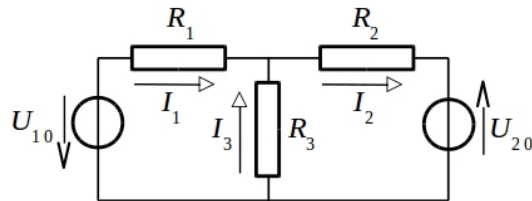
A 3.1.2. és a 3.1.3. ábrákon bejelölt áramirányok alapján (az azonos irányú áramok eredője is az adott áramirány, míg ellenétes áramirányok esetén a nagyobb áram iránya adja az eredő áram irányát):

$$I_1 = I_{1a} + I_{1b} = 0,1481 + 0,1333 = \underline{\underline{0,2814 \text{ mA} (\rightarrow)}} ,$$

$$I_2 = I_{2a} + I_{2b} = 0,0889 + 0,2000 = \underline{\underline{0,2889 \text{ mA} (\rightarrow)}} ,$$

$$I_3 = I_{3b} - I_{3a} = 0,0667 - 0,0592 = \underline{\underline{0,0075 \text{ mA} (\uparrow)}} .$$

Ezek segítségével már berajzolhatjuk az eredeti áramkörbe az áramok irányát (lásd a 3.1.4. ábrát).

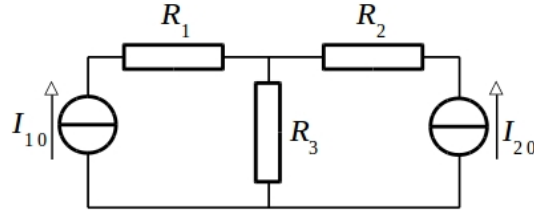


3.1.4. ábra. Az eredő áramok iránya berajzolva az eredeti áramkörbe

3.2. Két áramgenerátort tartalmazó áramkör

Határozzuk meg a 3.2.1. ábrán látható ellenállások áramait!

Adatok: $R_1 = 30\text{ k}\Omega$, $R_2 = 10\text{ k}\Omega$, $R_3 = 70\text{ k}\Omega$, $I_{10} = 16\text{ mA}$, $I_{20} = 12\text{ mA}$.

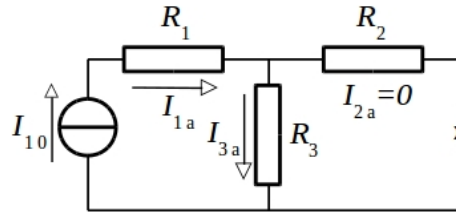


3.2.1. ábra. Két feszültséggenerátort tartalmazó áramkör

A szuperpozíció módszere szerint a két generátor miatt, két esetet kell vizsgálnunk.

3.2.1. Csak I_{10} marad (a-eset)

A másik, azaz az I_{20} feszültséggenerátort kihagyjuk – helyette szakadást teszünk (lásd a 3.2.2. ábrát).



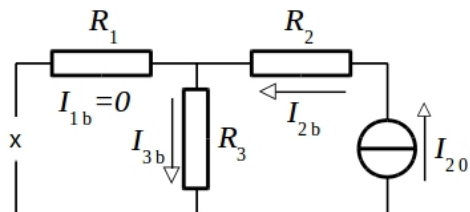
3.2.2. ábra. Az áramgenerátor forrásáramiránya meghatározza áramköri ágában az áram irányát, így R_1 ellenállás irányát is, és R_2 ellenálláson nem folyik áram mert ágában van egy szakadás

Mivel az R_2 ellenállást tartalmazó áramköri ágban szakadás van, így arra nem folyik áram. A 3.2.2. ábra áramkörében csupán egy körben, az R_1 -t és R_3 -t tartalmazó hurokban folyik, ahol ezek az ellenállások sorosan kapcsoltak, így ezek áramát a velük szintén sorosan kapcsolt áramgenerátor határozza meg:

$$I_{1a} = I_{3a} = I_{10} = 16\text{ mA}.$$

3.2.2. Csak I_{20} marad (b-eset)

A másik, azaz az I_{10} áramgenerátort kihagyjuk – helyette szakadást teszünk (lásd a 3.2.3. ábrát).



3.2.3. ábra. Az áramgenerátor forrásáramiránya meghatározza áramköri ágában az áram irányát, így R_2 ellenállás irányát is, és R_1 ellenálláson nem folyik áram mert ágában van egy szakadás

Hasonlóan, mint az a-esetben:

$$I_{2b} = I_{3b} = I_{20} = 12 \text{ mA} .$$

3.2.3. Összegzés

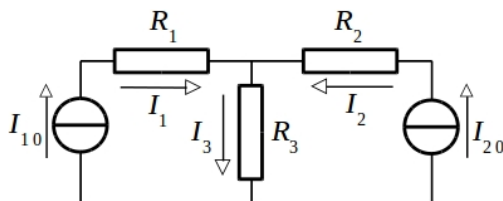
A 3.2.2. és a 3.2.3. ábrákon bejelölt áramirányok alapján (az azonos irányú áramok eredője is az adott áramirány, míg ellenétes áramirányok esetén a nagyobb áram iránya adja az eredő áram irányát):

$$I_1 = I_{1a} = \underline{\underline{16 \text{ mA} (\rightarrow)}} ,$$

$$I_2 = I_{2b} = \underline{\underline{12 \text{ mA} (\leftarrow)}} ,$$

$$I_3 = I_{3a} + I_{3b} = 16 + 12 = \underline{\underline{28 \text{ mA} (\downarrow)}} .$$

Ezek segítségével már berajzolhatjuk az eredeti áramkörbe az áramok irányát (lásd a 3.2.4. ábrát).

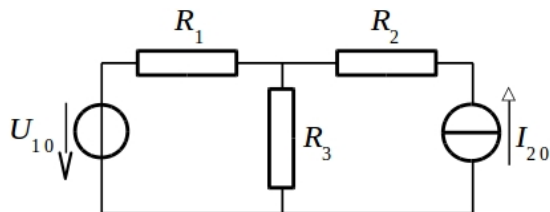


3.2.4. ábra. Az eredő áramok iránya berajzolva az eredeti áramkörbe

3.3. Egy áramgenerátort és egy feszültséggenerátort tartalmazó áramkör

Határozzuk meg a 3.3.1. ábrán látható ellenállások áramait!

Adatok: $R_1 = 20 \text{ k}\Omega$, $R_2 = 10 \text{ k}\Omega$, $R_3 = 80 \text{ k}\Omega$, $U_{10} = 5 \text{ V}$, $I_{20} = 120 \text{ }\mu\text{A}$.

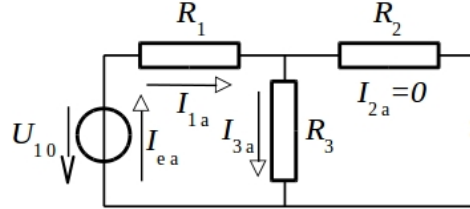


3.3.1. ábra. Két feszültséggenerátort tartalmazó áramkör

A szuperpozíció módszere szerint a két generátor miatt, két esetet kell vizsgálnunk.

3.3.1. Csak U_{10} marad (a-eset)

A másik, azaz az I_{20} áramgenerátort kihagyjuk – helyette szakadást teszünk (lásd a 3.3.2. ábrát).



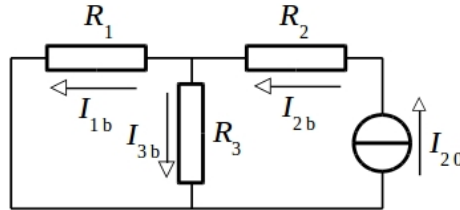
3.3.2. ábra. A feszültséggenerátor által gerjesztett áram ellentétes a forrásfeszültség irányával, és R_2 ellenálláson nem folyik áram mert ágában van egy szakadás

Mivel az R_2 ellenállást tartalmazó áramköri ágban szakadás van, így arra nem folyik áram. A 3.3.2. ábra áramkörében csupán egy körben, az R_1 -t és R_3 -t tartalmazó hurokban folyik, ahol ezek az ellenállások sorosan kapcsoltak, így ezek áramát a velük szintén sorosan kapcsolt feszültséggenerátor határozza meg:

$$I_{1a} = I_{3a} = \frac{U_{10}}{R_1 + R_3} = \frac{5 \text{ V}}{20 \text{ k}\Omega + 80 \text{ k}\Omega} = 0,05 \text{ mA} = 50 \mu\text{A} .$$

3.3.2. Csak I_{20} marad (b-eset)

A másik, azaz az U_{10} feszültséggenerátort kihagyjuk – helyette rövidzárat teszünk (lásd a 3.3.3. ábrát).



3.3.3. ábra. Az áramgenerátor forrásáramiránya meghatározza áramköri ágában az áram irányát, így R_2 ellenállás irányát is, ami megoszlik R_1 és R_3 párhuzamos kapcsolt ellenállásokon

R_2 ellenállás áramát meghatározza az áramgenerátor:

$$I_{2b} = I_{20} = 120 \mu\text{A} .$$

Az áramosztó-képlet segítségével:

$$I_{1b} = I_{2b} \frac{R_3}{R_3 + R_1} = 120 \mu\text{A} \frac{80}{80 + 20} = 96 \mu\text{A} ,$$

a másik ágon folyó áram:

$$I_{3b} = I_{2b} - I_{1b} = 120 - 96 = 24 \mu\text{A} .$$

3.3.3. Összegzés

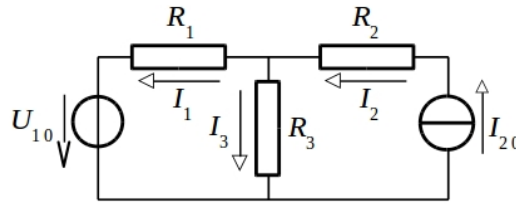
A 3.3.2. és a 3.3.3. ábrákon bejelölt áramirányok alapján (az azonos irányú áramok eredője is az adott áramirány, míg ellenétes áramirányok esetén a nagyobb áram iránya adja az eredő áram irányát):

$$I_1 = I_{1b} - I_{1a} = 96 - 50 = \underline{\underline{46 \mu\text{A} (\leftarrow)}} ,$$

$$I_2 = I_{2b} = \underline{\underline{120 \text{mA} (\leftarrow)}} ,$$

$$I_3 = I_{3a} + I_{3b} = 50 + 24 = \underline{\underline{74 \mu\text{A} (\downarrow)}} .$$

Ezek segítségével már berajzolhatjuk az eredeti áramkörbe az áramok irányát (lásd a 3.3.4. ábrát).



3.3.4. ábra. Az eredő áramok iránya berajzolva az eredeti áramkörbe

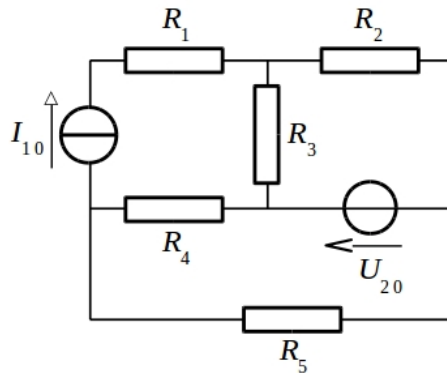
4. Kicsit összetettebb kétgenerátoros probléma

Akár vizsgán is előfordulhat ...

4.1. Egy ármagenerátort és egy feszültséggenerátort tartalmazó áramkör

Határozzuk meg a 4.1.1. ábrán látható ellenállások áramait!

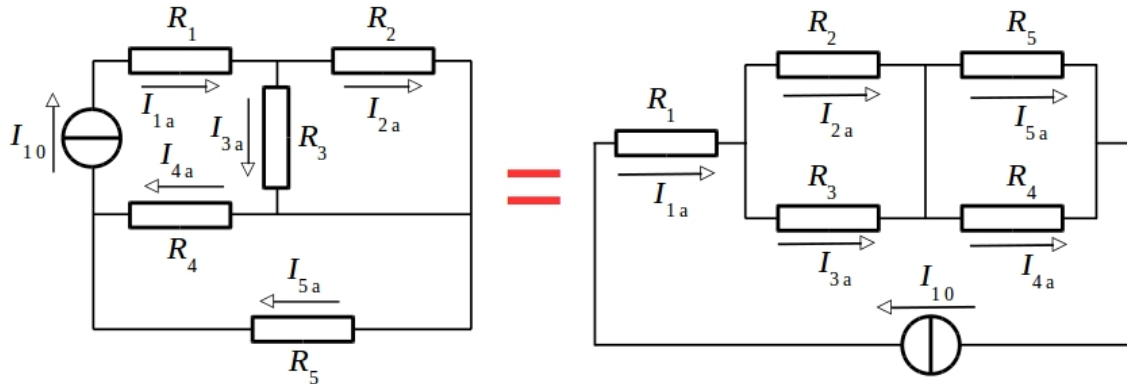
Adatok: $R_1 = 20 \text{ k}\Omega$, $R_2 = 10 \text{ k}\Omega$, $R_3 = 80 \text{ k}\Omega$, $R_4 = 40 \text{ k}\Omega$, $R_5 = 70 \text{ k}\Omega$, $I_{10} = 90 \mu\text{A}$, $U_{20} = 5 \text{ V}$.



4.1.1. ábra. Egy áram- és egy feszültséggenerátort tartalmazó áramkör

4.1.1. Csak I_{10} marad (a-eset)

Az U_{20} feszültséggenerátor helyére rövidzárát teszük. Az ármagenerátor, mint egyetlen generátor által keltett áramokat a 4.1.2. ábrán láthatjuk.



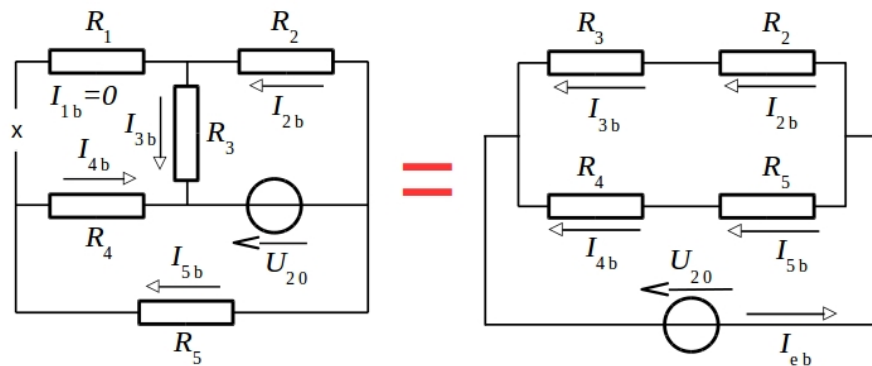
4.1.2. ábra. A feszültséggenerátor kihagyása után olyan áramkört kapunk, amit érdemes átrajzolni, hogy egyértelmű legyen az ellenállások közötti kapcsolat

Az áramgenerátor I_{10} árama egyenlő R_1 ellenállás áramával, és megoszlik R_2 és R_3 , majd R_4 és R_5 párhuzamosan kapcsolt ellenállásokon (a 4.1.2. ábra alapján):

$$\begin{aligned}
 I_{1a} &= I_{10} = 90 \mu\text{A}, \\
 I_{2a} &= I_{1a} \frac{R_3}{R_3 + R_2} = 90 \mu\text{A} \frac{80}{80 + 10} = 80 \mu\text{A}, \\
 I_{3a} &= I_{1a} - I_{2a} = 90 - 80 = 10 \mu\text{A}, \\
 I_{5a} &= I_{1a} \frac{R_4}{R_4 + R_5} = 90 \mu\text{A} \frac{40}{40 + 70} = 32,73 \mu\text{A}, \\
 I_{4a} &= I_{1a} - I_{5a} = 90 - 32,73 = 57,27 \mu\text{A}.
 \end{aligned}$$

4.1.2. Csak U_{20} marad (a-eset)

Az I_{10} áramgenerátor helyére szakadást teszünk. Az feszültséggenerátor, mint egyetlen generátor által keltett áramokat a 4.1.3. ábrán láthatjuk.



4.1.3. ábra. Az áramgenerátor kihagyása után olyan áramkört kapunk, amit érdemes átrajzolni, hogy egyértelmű legyen az ellenállások közötti kapcsolat

Az R_1 ellenálláson nem folyik áram, mert szakadás van az áramköri ágában:

$$I_{1b} = 0$$

A soros-párhuzamos viszonyok tisztázása érdekében nagyon hasznos az áramkör átrajzolása, mint ahogyan ez a 4.1.3. ábrán láthatjuk.

Az R_{eb} eredőellenállás:

$$R_{\text{eb}} = (R_3 + R_2) \times (R_4 + R_5) = (80 + 10) \times (40 + 70) = 49,5 \text{ k}\Omega ,$$

amivel az eredő áram:

$$I_{\text{eb}} = \frac{U_{20}}{R_{\text{eb}}} = \frac{5 \text{ V}}{49,5 \text{ k}\Omega} = 0,1010 \text{ mA} = 101 \mu\text{A} ,$$

ami megoszlik a párhuzamosan kapcsolt elenálláspárokon:

$$I_{2\text{b}} = I_{3\text{b}} = I_{\text{eb}} \frac{(R_2 + R_3)}{(R_2 + R_3) + (R_4 + R_5)} = 101 \mu\text{A} \frac{(10 + 80)}{(10 + 80) + (40 + 70)} = 45,45 \mu\text{A} ,$$

$$I_{4\text{b}} = I_{5\text{b}} = I_{\text{eb}} - I_{2\text{b}} = 101,0 - 45,45 = 55,55 \mu\text{A} .$$

4.1.3. Összegzés:

A 4.1.2. és a 4.1.3. ábrák még át nem rajzolt áramköreiről olvashatjuk le az áramok előjeles összegeit:

$$I_1 = I_{1\text{a}} = \underline{\underline{90 \mu\text{A} (\rightarrow)}} ,$$

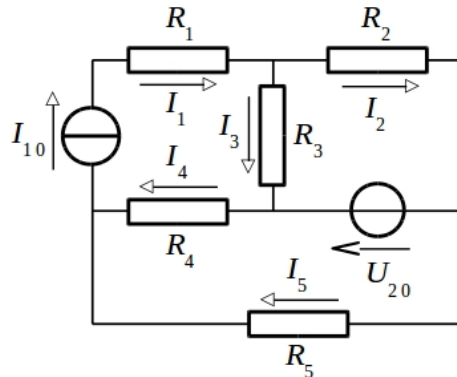
$$I_2 = I_{2\text{a}} - I_{2\text{b}} = 80 - 45,45 = \underline{\underline{34,55 \mu\text{A} (\rightarrow)}} ,$$

$$I_3 = I_{3\text{a}} + I_{3\text{b}} = 10 + 45,45 = \underline{\underline{55,45 \mu\text{A} (\downarrow)}} ,$$

$$I_4 = I_{4\text{a}} - I_{4\text{b}} = 57,27 - 55,55 = \underline{\underline{1,82 \mu\text{A} (\leftarrow)}} ,$$

$$I_5 = I_{5\text{a}} + I_{5\text{b}} = 32,73 + 55,55 = \underline{\underline{88,28 \mu\text{A} (\leftarrow)}} .$$

Ezek segítségével már berajzolhatjuk az eredeti áramkörbe az áramok irányát (lásd a 4.1.4. ábrát).



4.1.4. ábra. Az eredő áramok iránya berajzolva az eredeti áramkörbe

Hivatkozások

[1] Szuperpozíció, A Wikipédiából, a szabad enciklopédiából

[2] Torda Béla: Bevezetés az elektrotechnikába, kézirat