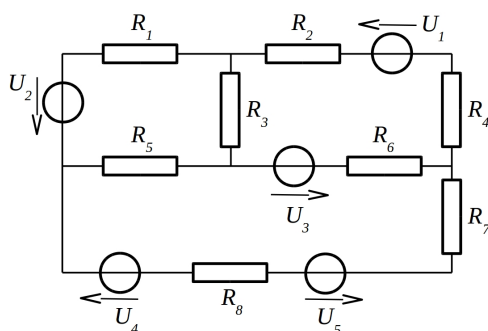


Kirchoff-egyenletek módszere

Kőházi-Kis Ambrus

1. Általános leírás

Áramkörök vizsgálatának általános módszere, vele gyakorlatilag minden áramkör leírható, megoldható. Az alapfeladatban adott az áramkör, (R_1, R_2, \dots) ellenállásaival és feszültséggenerátorainak a (U_1, U_2, \dots) feszültségértékeivel (lásd a 1.1. ábrát).



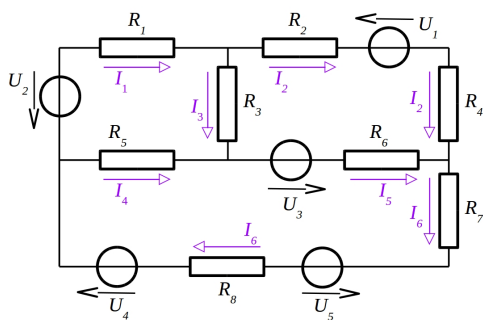
1.1. ábra. Adottak a feszültséggenerátorok bekötési irányai, forrásfeszültségei és az ellenállások értékei

Huroknak nevezzük az áramkör azon részét, amelyen az áram körbejuthat. Speciálisan **elemi hurok**nak nevezzük azokat a hurkokat, amelyek nem zárnak magukba kisebb hurkokat. Az elemi hurok az áramkörnek adott felrajzolásához tartoznak az elemi hurkok: az áramköröket át lehet úgy rajzolni, hogy más áramköri elemek tartozzanak egy-egy elemi hurokba. **Csomópont**nak nevezzük az áramkör azon pontjait, amelybe különböző áramok futhatnak be: csomópontba legalább három vezetéknek kell találkoznia. Az áramköri **ágak** az áramkör csomópontjai között futó áramköri szakaszok, amelyen elhelyezkedő áramköri elemek egymással sorba vannak kapcsolva, ezért a rajtuk folyó áramok egyenlők.

Gyakran érdemes az áramkört úgy lerajzolni, hogy már csak az ellenállások meghatározott értékei szerepeljenek. Ez azért lehet hasznos, hogy az áramkörbe bejelölt áramok indexei ne zavarodjanak össze az ellenállások indexeivel (erre azért kerülhet sor, mert az ismeretlen áramok száma nem az ellenállások számával, hanem az áramköri ágak számával egyenlő).

Ha az ellenállások $k\Omega$ mértékegységgel adottak, akkor nem érdemes azokat feltétlenül Ω -ba átírni, és számolásunk végén így mA mértékegységben kapjuk meg az áramok értékeit. Hasznos az ilyen értelmű egyszerűsítés, mert vele nem kell olyan nagy számokkal bajlódni, mint ha mindig kiírnánk az Ω mértékegységben adott ellenállásértékeket.

Kirchoff-egyenletek módszere alkalmazása esetén azzal kell kezdeni, hogy az egyes áramköri ágakba bejelölünk áramokat (lásd a 1.2. ábrát). A különböző ágakba feltétlenül különböző nagyságú, elvileg önkényesen kijelölhető irányú áramokat választhatunk. Általában, ha több generátor is van az áramkörben, akkor nem magától értetődő az egyes ellenállásokon folyó áram iránya, annak meghatározása esetenként lehet akár egyenértékű a teljes áramkör kiértékelésével. Nem szabad sokáig tanakodni az áram irányának megválasztásával: legfeljebb a számolásunk végén a berajzolt áramirány mellett negatív értéket kapunk, ami a berajzolt áramiránnyal együtt egyértelmű megoldást jelent.



1.2. ábra. Az egyenlet vizsgálatát áramirányok felvételével kell kezdeni

A számolásokhoz csupán a jelölések, egyenletek felírásának pontosítása érdekében bejelölhetők, hogy az egyes egyenletek az áramkör melyik részletére vonatkoznak. Ilyen értelemben lehet (lásd a 1.2. ábrát), de nem feltétlenül szükséges,

- a csomópontokat betűjellel (A, B, C, D, ...) azonosítani,
- illetve az elemi hurkokat római számokkal, és bennük a körüljárási irányokat jelölni.

Ezekkel a bevezetett jelölésekkel azonosíthatjuk a felírt egyenletek eredetét.

1.1. A Kirchoff-egyenletek felírása

Az áramkörben 4 csomópont van. A Kirchoff-egyenletek felírásakor mindig elegendő csupán a csomópontok számánál eggyel kevesebb, esetünkben csak **3 csomóponti egyenletet** felírni (akármelyik csomópontot kihagyhatjuk). A csomópontokra lényegében a be- és kifutó áramok algebrai összegét írjuk fel, azt megfogalmazva, hogy a csomópontba időegység alatt ugyanannyi töltésnek kifolyni, mint amennyi oda befolyik:

$$\sum_i I_i = 0.$$

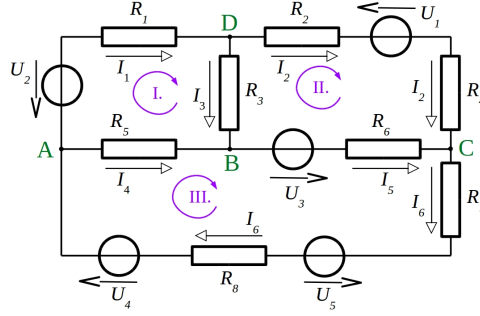
Legegyszerűbben azt úgy fogalmazhatjuk meg, hogy azért nem kell az összes csomópontra felírni az egyenleteket, mert az egyenletek nem lehetnek függetlenek: a kifolyó áramok az ágak végén egy másik csomópontba viszont befolyanak: ez matematikailag abban nyilvánul meg, hogy ha az összes csomópont-ra felíránk a csomóponti egyenletet, akkor azok nem lennének függetlenek, azaz az egyik (bármelyik) csomópont-ra felírt egyenlet a többi egyenlet lineáris kombinációjával kifejezhető.

Az A, B, C csomópontokra a kifutó áramokat pozitívnak véve írtam fel csomóponti egyenleteket (most éppen a D csomópontot hagytam ki):

$$\begin{aligned} \text{A: } & I_1 + I_4 - I_6 = 0, \\ \text{B: } & I_5 - I_3 - I_4 = 0, \\ \text{C: } & I_6 - I_2 - I_5 = 0. \end{aligned}$$

Hurokegyenletben a hurokban jelenlevő áramköri elemek feszültségeit adjuk össze valamilyen **körüljárási irányban**: egy áramköri elem két végpontja közötti feszültséget pozitívként írjuk az összegbe, ha annak iránya egybeesik a körüljárás irányával, viszont a feszültséget negatív előjellel írjuk az egyenletbe, ha annak iránya ellentétes a körüljárási irányval:

$$\sum_i U_i = 0.$$



1.3. ábra. Érdemes bejelölni a körüljárási irányokat és a csomópontokat

Hurokegyenletből az elemi hurok számával egyenlő egyenletet kell felírni (az elemi hurkok számát úgy lehet megkapni, hogy a lerajzolt áramkörön összeszámoljuk az áramköri ágak által elválasztott szigeteket). Célszerű éppen az elemi hurkokra hurokegyenleteket felírni, mert így nem követünk el olyan hibát, hogy egyenleteinkben nem szereplnének valamelyik ágba levő áramköri elemek értékei.

Feszültséggenerátor esetén a hurokegyenletbe nyilvánvalóan a generátor feszültségét kell beírni, míg az ellenállások esetén a rá eső U_i feszültséget, amely nagysága egyenlő a rajta folyó I_i áram és az R ellenállás értékének szorzatával:

$$U_i = R I_i .$$

Az ellenálláson eső feszültség iránya mindig megegyezik a rajta átfolyó áram irányával, így elegendő az ellenállásokon folyó áramok irányát bejelölni, a feszültség iránya ezzel megegyezik.

Hurokegyenletekből éppen az elemi hurkok számával egyenlő (esetünkben 3) hurokegyenletet kell felírni (a hurokhoz bejelölt körüljárási irányba eső feszültségeket vesszük pozitívnak):

$$\begin{aligned} \text{I:} \quad & R_1 I_1 + R_3 I_3 - R_5 I_4 - U_2 = 0 , \\ \text{II:} \quad & R_2 I_2 - U_1 + R_4 I_2 - R_6 I_5 - U_3 - R_3 I_3 = 0 , \\ \text{III:} \quad & R_5 I_4 + U_3 + R_6 I_5 + R_7 I_6 - U_5 + R_8 I_6 + U_4 = 0 . \end{aligned}$$

Összesen hat ismeretlen áram meghatározására a három csomóponti és három hurokegyenlet, összesen hat egyenlet elegendő.

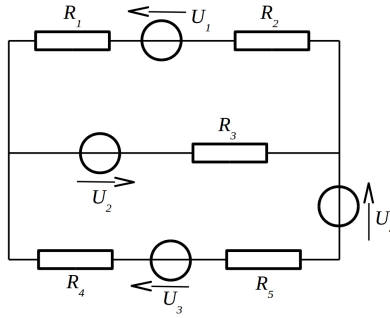
Gráfelméletből ismert, hogy a huromáramok száma (h) és a csomópontok számánál eggyel kevesebb ($cs - 1$) összege mindig a csomópontokat összekötő ágak számával (\acute{a}) egyenlő, így mindig fel tudunk írni annyi egyenletet írni, amennyi ismeretlenünk van:

$$\acute{a} = h + cs - 1$$

A példaként felírt egyenlet azért lett ilyen bonyolult, hogy a megértéshez mindenféle áramirány, feszültségirány előfordulhasson. A kapott összesen hat egyenlet azonban nagyon hosszadalmasan oldható meg kézzel (számítógépes programokkal lineáris egyenletrendszerek könnyedén megoldhatók, például akár Excel-programmal). Gyakorlatokon, számonkérésken csak két hurkos, két csomópontos áramköröket kell tudni számolni, mint ahogyan azt a következő részben egy példán bemutatom.

2. Példa áramkör áramainak meghatározására Kirchhoff-egyenletek segítségével

Példaként a 2.1. ábrán adott áramkört tekintjük.

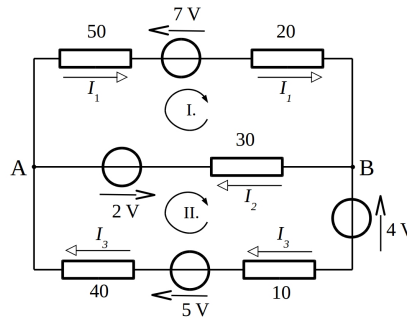


2.1. ábra. Adott egy két elemi hurokkal, két csomóponttal és három áramköri ággal rendelkező áramkör

Adatok: $R_1 = 50 \text{ k}\Omega$, $R_2 = 20 \text{ k}\Omega$, $R_3 = 30 \text{ k}\Omega$, $R_4 = 40 \text{ k}\Omega$, $R_5 = 10 \text{ k}\Omega$, $U_1 = 7 \text{ V}$, $U_2 = 2 \text{ V}$, $U_3 = 5 \text{ V}$, $U_4 = 4 \text{ V}$.

Feladat az ellenállásokon folyó áramok meghatározása.

A megoldást érdemes azzal kezdeni, hogy az áramkört lerajzolom az ellenállás- és feszültségértékekkel, felveszek áramirányokat, és felveszek körüljárási irányokat és bejelölöm a csomópontokat is (lásd a 2.2. ábrát).



2.2. ábra. Az egyenlet vizsgálatát áramirányok felvételével kell kezdeni

Az ellenállásértékeket $\text{k}\Omega$ egységekben írtam be, erre azért kell emlékezni, mert a megoldás végén kapott az áramok számértékeit mA egységekben kell majd értelmezni.

Az egy ágba szereplő ellenállásokon ugyanannyi áramnak kell folynia (hiszen sorba vannak kapcsolva). Egyébként a három áramirány megválasztása teljesen önkényes: a végén a berajzolt áramirány és az áram előjele együtt adja majd meg az adott áramköri elemen folyó áram értékét.

Két csomópont van az áramkörben: A és B. Elegendő csak az egyikre felírni egy csomóponti egyenletet (itt különösen tisztán látszik, hogy a másik egyenlet semmi újat nem adna, hiszen az áramok az egyik csomópontból ki- a másikba viszont befolyanak). A B csomópontra a csomóponti egyenlet (most a befutó áramot vettem pozitívnak):

$$I_1 - I_2 - I_3 = 0 \quad (2.1)$$

A két elemi hurokra a hurokegyenletek:

$$50 I_1 - 7 + 20 I_1 + 30 I_2 - 2 = 0, \quad (2.2)$$

$$2 - 30 I_2 - 4 + 10 I_3 + 5 + 40 I_3 = 0, \quad (2.3)$$

összevonva:

$$70 I_1 + 30 I_2 - 9 = 0, \quad (2.4)$$

$$-30 I_2 + 50 I_3 + 3 = 0. \quad (2.5)$$

Az egyenletrendszert úgy kell megoldani, hogy kiválasztunk egy egyenletet, kifejezzük belőle az egyik ismeretlent, majd az ismeretlent kiejtjük a maradék egyenletekből. Így mindig eggyel kevesebb egyenletre és benne eggyel kevesebb ismeretlenre jutunk. A végén biztosan eljutunk az egy egyenlet – egy ismeretlen esethez, amelyet lineáris egyenletek esetén könnyedén megoldhatunk.

Érdemes a 2.1. egyenletből kifejezni pl. I_1 -t:

$$I_1 = I_2 + I_3. \quad (2.6)$$

I_1 -t ki kell ejteni mindkét egyenletből (a másodikban éppen nincs is benne, ha a . egyenletből I_2 -t fejeztük volna ki, akkor mindkét fennmaradó egyenlettel dolgozni kellene):

$$70 I_2 + 70 I_3 + 30 I_2 - 9 = 0, \quad (2.7)$$

$$-30 I_2 + 50 I_3 + 3 = 0. \quad (2.8)$$

Az utóbbi egyenletből kifejezem I_2 -t, és az előbbit rendezem:

$$100 I_2 + 70 I_3 - 9 = 0, \quad (2.9)$$

$$I_2 = \frac{50 I_3 + 3}{30}. \quad (2.10)$$

I_2 -t behelyettesítve (2.9) egyenletbe már csak egy ismeretlenem marad:

$$100 \frac{50 I_3 + 3}{30} + 70 I_3 - 9 = 0, \quad / \cdot 3$$

$$500 I_3 + 30 + 210 I_3 - 27 = 0,$$

$$710 I_3 = -3,$$

$$I_3 = \frac{-3}{710} \text{ mA} = \underline{\underline{-0,0042 \text{ mA}}}. \quad (2.11)$$

I_2 -t megkapjuk (2.10)-ből:

$$I_2 = \frac{50 I_3 + 3}{30} = \frac{50 (-0,0042) + 3}{30} = \underline{\underline{0,0930 \text{ mA}}}. \quad (2.12)$$

I_1 -t pedig (2.6) egyenletbe való behelyettesítéssel kapjuk:

$$I_1 = I_2 + I_3 = 0,0930 - 0,0042 = \underline{\underline{0,0888 \text{ mA}}}. \quad (2.13)$$