

Thevenin és Norton tétele

Kőházi-Kis Ambrus

1. Áramkörök helyettesítése

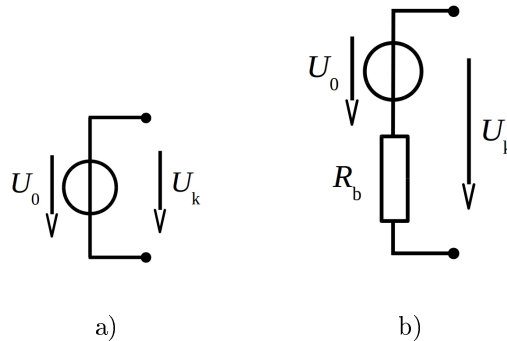
A kétpólus egy olyan villamos áramkör, hálózat, amely két csatlakozóponttal rendelkezik. A benne szereplő áramköri elemektől függően megkülönböztethetünk:

- aktív kétpólust: villamos energia leadására képes;
- passzív kétpólust: villamos energiát csak fogyasztani képes.

A fogalmilag legegyszerűbb aktív kétpólusok az ideális feszültséggenerátor és az ideális áramgenerátor.

1.1. Feszültséggenerátorok

Az ideális feszültséggenerátor olyan kétpólus, amely kapcsain bármilyen terhelése esetén mindig ugyanaz az U_0 feszültség esik. Ilyen generátor a valóságban nem létezhet, mert tetszőlegesen kis terhelő ellenállások esetén az Ohm-törvény ($I = U_0/R$) miatt tetszőlegesen nagy áramot kell tudnia a kapcsain leadni, hogy még ekkor is ugyanazt az U_0 feszültséget tartsa a kapcsain. A valóságos feszültséggenerátorok kapocsfeszültsége csökken a terhelőellenállás csökkentésével, amikor a leadott árama növekszik.

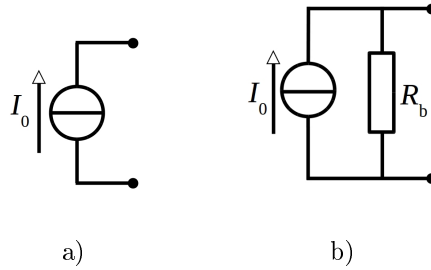


1.1. ábra. Ideális (a) és valóságos (b) feszültséggenerátor

A nem ideális viselkedést az úgynevezett valóságos feszültséggenerátor az ideális feszültséggenerátorral sorba kapcsolt belső ellenállással modellezi: amikor csökken a terhelőellenállás, akkor a növekvő áram a belső ellenálláson feszültségesést okoz, ami csökkenti a kapocsfeszültséget. Az ideális feszültséggenerátor belső ellenállása nulla.

1.2. Áramgenerátorok

Az ideális áramgenerátor olyan kétpólus, amely kivezetései között mindig ugyanaz az I_0 áram folyik. Ilyen generátor sem létezhet a valóságban, mert a terhelőellenállás minden határon túl növekedése esetén az Ohm-törvény ($U = R I_0$) miatt minden határon növelnie kellene tudni a kapocsfeszültséget. A



1.2. ábra. Ideális (a) és valóságos (b) áramgenerátor

valóságos áramgenerátorok árama csökken, a terhelőellenállás növelésével, amikor a kapcsolófeszültsége növekszik.

A nem ideális viselkedést az úgynevezett valóságos áramgenerátor az ideális áramgenerátorral párhuzamosan kapcsolt belső ellenállással modellezi: amikor nő a terhelő ellenállás, akkor a növekvő kapcsolófeszültség a belső ellenálláson egyre nagyobb áramot hoz létre, ami csökkenti a kimenő áramot. Az ideális áramgenerátor belső ellenállása végtelen.

1.3. A helyettesítő tételek viszonya

Két helyettesítő tételt is tanulunk:

- **Thevenin-tétel:** Tetszőleges áramkör bármely kétpólusa helyettesíthető egy valóságos (nem ideális) feszültséggenerátorral.
- **Norton-tétel:** Tetszőleges áramkör bármely kétpólusa helyettesíthető egy valóságos (nem ideális) áramgenerátorral.

A helyettesíthetőség azt jelenti, hogy minden áramkörre kapcsolva az eredeti és a helyettesített ugyanúgy viselkedik – ugyanaz a kapcsolófeszültsége, ugyanaz a rajta átfolyó áram is (Ilyen egyszerű formában ez csak lineáris áramköri elemekből felépülő áramkörökre teljesül. Általános esetben R_b nemlineáris: értéke függ a terheléstől.).

A Norton-tétel és a Thevenin tétel egymással nagyon szoros, közeli kapcsolatban van. A számolás eredményessége, hasznossága miatt nem is lenne külön tanulni mind a két módszert, hiszen a számolás menete csupán a végén a (2.1) és a (3.1) összefüggések alkalmazásában különbözik. A két helyettesítőkép lényege éppen a szemléletes kép: két pólusú áramkörök helyettesíthetők áramgenerátorral, de feszültséggenerátorral is, még hozzá ugyanakkora R_b belső ellenállással. Éppen ez utóbbi alapján van értelme egy kétpólust inkább áramgenerátorral, vagy inkább feszültséggenerátorral helyettesíteni egy adott R_k terhelőellenállás esetén:

- ha $R_b < R_k$, akkor inkább feszültséggenerátorról érdemes beszélni, mert ekkor a terhelés változtatása hatására inkább a feszültség változik kevésbé, mint az áram;
- ha $R_b > R_k$, akkor inkább áramgenerátorról érdemes beszélni, mert ekkor a terhelés változtatása hatására inkább az áram változik kevésbé, mint a feszültség.

A tételek következő alkalmazásaiban nem figyeljük, hogy az adott kétpólus inkább feszültséggenerátor, avagy inkább áramgenerátor, ezekben csupán számolási módszerről van szó.

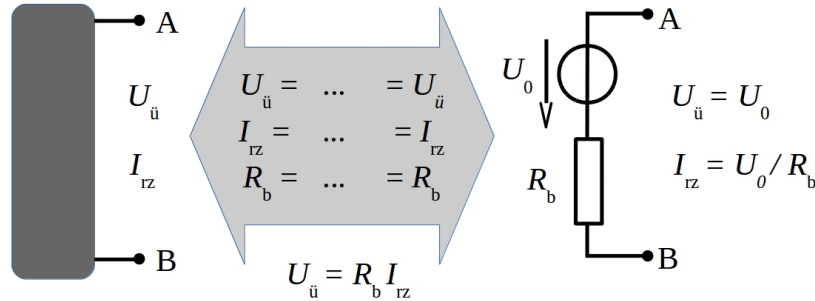
2. Thevenin-tételével

A Thevenin-tétel alkalmazása során jellemzően egy-egy ellenállás áramát lehet számolni. Ebben a fejezetben a Thevenin-tétel alkalmazásának általános leírása után csupán egy ellenálláson folyó áramot

határozzuk meg.

2.1. Thevenin tétele

Tétel: Tetszőleges áramkör bármely kétpólusa helyettesíthető egy valóságos (nem ideális) **feszültséggenerátorral**.



2.1. ábra. Egy akármilyen áramkör kétpólusa (két elektromos kivezetés mögött álló áramkör) helyettesíthető egy nem ideális (valóságos) feszültséggenerátorral

A helyettesítő feszültséggenerátor meghatározása annak két paraméterének (U_0 és R_b) meghatározásával egyenértékű. Ezt a két paramétert két munkapont (működési üzemállapot) segítségével kaphatjuk meg. Számolás esetén **a legegyszerűbb az üresjárást és a rövidzárast választani**.

Üresjárás azt jelenti, hogy a kétpólus kapcsaira végtelen nagy ellenállást, azaz szakadást (nem folyhat rajta áram) kapcsolunk. Üresjárás üzemállapotában az áramkör kapocsfeszültségét **üresjárási feszültségnek** ($U_{\text{ü}}$) nevezzük.

Rövidzárás azt jelenti, hogy a kétpólus kapcsait nulla ellenállású vezetékkel kötjük össze (rövidre zárjuk). Rövidzárási üzemállapotban az áramkörön átfolyó áramot **rövidzársi áramnak** (I_{rz}) nevezzük.

A helyettesítő generátortól elvárhatjuk, hogy **a választott két munkapontban is ugyanúgy viselkedjen**: üresjárásban ugyanaz legyen a kapocsfeszültségük, rövidzárársban ugyanaz legyen az áramuk is.

A helyettesítő feszültséggenerátor meghatározása érdekében ezért

- a tetszőleges kétpólusnak meghatározzuk az $U_{\text{ü}}$ üresjárási feszültségét és I_{rz} rövidzársi áramát,
- majd olyan feszültséggenerátort keresünk, amelynek $U_{\text{ü}}$ az üresjárási feszültsége és I_{rz} a rövidzársi árama:

$$U_0 = U_{\text{ü}} \quad , \quad R_b = \frac{U_{\text{ü}}}{I_{\text{rz}}} . \quad (2.1)$$

Az R_b belső ellenállást az eredeti áramkörben az A-B pontok közötti ellenállásként is lehet számolni úgy, hogy az áramkörből a generátorokat elhagyjuk.

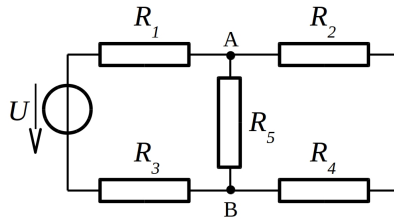
Ezek után a kapott feszültséggenerátor tetszőleges R_k terhelőellenállása esetén a kapcsok között folyó I_k áram, illetve a kapcsok között eső U_k feszültség:

$$I_k = \frac{U_0}{R_b + R_k} \quad , \quad U_k = \frac{U_0 R_k}{R_b + R_k} . \quad (2.2)$$

2.2. Egyszerű alkalmazási példa

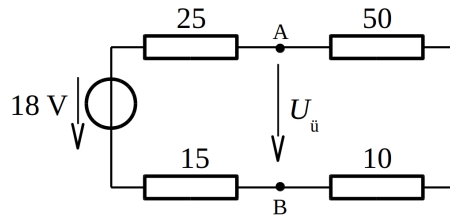
Adatok: $R_1 = 25 \text{ k}\Omega$, $R_2 = 50 \text{ k}\Omega$, $R_3 = 15 \text{ k}\Omega$, $R_4 = 10 \text{ k}\Omega$, $R_5 = 30 \text{ k}\Omega$, $U = 18 \text{ V}$.

Feladat: R_5 áramának, I_5 meghatározása a Thevenin-tétel alkalmazásával.



2.2. ábra. Egyszerű áramköri példa

2.2.1. Az üresjárási feszültség meghatározása



2.3. ábra. Az R_5 ellenállás kivétele után nyert A-B kétpólus üresjárása

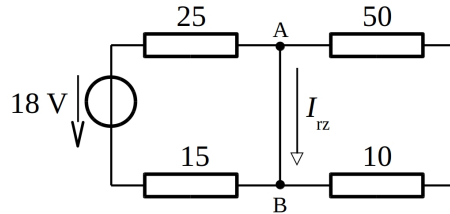
A 2.3. ábráról leolvasható, hogy

$$U_{\text{ü}} = U_{50} + U_{10}. \quad (2.3)$$

A 2.3. ábra kapcsolásában mindegyik ellenállás egymással sorba van kapcsolva, ezért

$$U_{\text{ü}} = 18 \text{ V} \frac{50 + 10}{(50 + 10) + 25 + 15} = 18 \text{ V} \frac{60}{60 + 40} = \underline{10,8 \text{ V}}. \quad (2.4)$$

2.2.2. A rövidzárási áram meghatározása



2.4. ábra. Az R_5 ellenállás kivétele után nyert A-B kétpólus rövidzárása

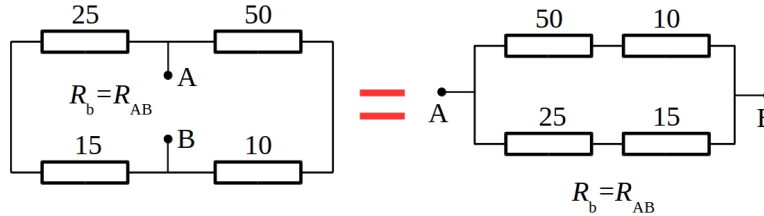
Az A-B kétpólus rövidrezárása miatt a 2.3. ábra áramkörében csak két ellenálláson folyik áram:

$$I_{\text{rz}} = \frac{18 \text{ V}}{(25 + 15) \text{ k}\Omega} = \underline{0,45 \text{ mA}}. \quad (2.5)$$

2.2.3. A kétpólus belső ellenállásának direkt meghatározása

A 2.3. ábrán is látható áramkör generátorának kihagyásával (feszültséggenerátor helyett rövidzár) átrajzolásával meghatározható a kétpólus belső ellenállása (lásd a 2.5. ábrát):

$$R_{\text{b}} = (50 + 10) \times (25 + 15) = 60 \times 40 = \underline{24 \text{ k}\Omega}. \quad (2.6)$$



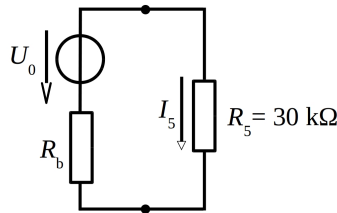
2.5. ábra. A kétpólus belső R_b ellenállása

2.2.4. A helyettesítő generátor

Thevenin-tétel esetén a kétpólust feszültséggenerátorral helyettesítjük. A (2.1) összefüggések szerint:

$$U_0 = U_{\text{ü}} = 10,8 \text{ V} \quad , \quad R_b = \frac{U_{\text{ü}}}{I_{\text{rz}}} = \frac{10,8 \text{ V}}{0,45 \text{ mA}} = \underline{24 \text{ k}\Omega} . \quad (2.7)$$

Látszik, hogy (2.6) és (2.7) egymással összhangban adják R_b értékét. Valójában (2.4)-(2.6) képletek közül elegendő kettőt használni $U_{\text{ü}}$, R_b és I_{rz} értékek meghatározására, az $U_{\text{ü}} = R_b I_{\text{rz}}$ összefüggéssel mindig megkapható a harmadik mennyiség.



2.6. ábra. A kétpólus belső R_b ellenállása

A (2.2) képletből megkapjuk az R_5 ellenálláson folyó I_5 áramot (lásd a 2.6. ábrát):

$$I_5 = \frac{U_0}{R_b + R_5} = \frac{10,8 \text{ V}}{(24 + 30) \text{ k}\Omega} = \underline{\underline{0,2 \text{ mA}}} .$$

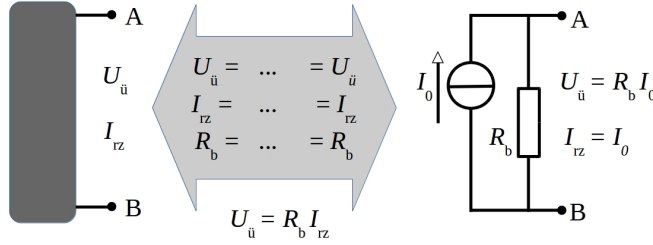
3. Norton-tétel alkalmazása

A Norton-tétel alkalmazása során jellemzően egy-egy ellenállás áramát lehet direkt módon számolni.

3.1. Norton tétele

Tétel: Tetszőleges áramkör bármely kétpólusa helyettesíthető egy valóságos (nem ideális) **áramgenerátorral**.

A helyettesítő áramgenerátor meghatározása annak két paraméterének (I_0 és R_b) meghatározásával egyenértékű. Ezt a két paramétert két munkapont (működési üzemállapot) segítségével kaphatjuk meg. Számolás esetén **a legegyszerűbb az üresjárást és a rövidzárast választani**.



3.1. ábra. Egy akármilyen áramkör kétpólusa (két elektromos kivezetés mögött álló áramkör) helyettesíthető egy nem ideális (valóságos) áramgenerátorral

Üresjárást azt jelenti, hogy a kétpólus kapcsaira végtelen nagy ellenállást, azaz szakadást (nem folyhat rajta áram) kapcsolunk. Üresjárási üzemiállapotában az áramkör kapocsfeszültségét **üresjárási feszültségnek** ($U_{\text{ü}}$) nevezzük.

Rövidzárást azt jelenti, hogy a kétpólus kapcsait nulla ellenállású vezetékkel kötjük össze (rövidre zárjuk). Rövidzárási üzemiállapotban az áramkörön átfolyó áramot **rövidzársi áramnak** (I_{rz}) nevezzük.

A helyettesítő generátortól elvárhatjuk, hogy **a választott két munkapontban is ugyanúgy viselkedjen**: üresjáráisban ugyanaz legyen a kapocsfeszültségük, rövidzáráisban ugyanaz legyen az áramuk is.

A helyettesítő áramgenerátor meghatározása érdekében ezért

- a tetszőleges kétpólusnak meghatározzuk az $U_{\text{ü}}$ üresjárási feszültségét és I_{rz} rövidzársi áramát,
- majd olyan áramgenerátort keresünk, amelynek $U_{\text{ü}}$ az üresjárási feszültsége és I_{rz} a rövidzársi árama:

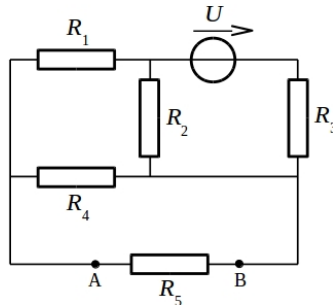
$$I_0 = I_{\text{rz}} \quad , \quad R_b = \frac{U_{\text{ü}}}{I_{\text{rz}}} . \quad (3.1)$$

Az R_b belső ellenállást az eredeti áramkörben az A-B pontok közötti ellenállásként is lehet számolni úgy, hogy az áramkörből a generátorokat elhagyjuk.

Ezek után a kapott áramgenerátor tetszőleges R_k terhelőellenállása esetén a kapcsok között folyó I_k áram, illetve a kapcsok között eső U_k feszültség:

$$I_k = \frac{I_0 R_b}{R_b + R_k} \quad , \quad U_k = \frac{I_0 R_b R_k}{R_b + R_k} . \quad (3.2)$$

3.2. Alkalmazási példa

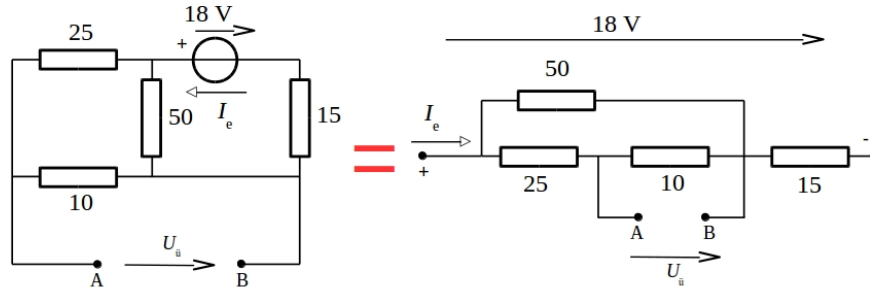


3.2. ábra. Egyszerű áramköri példa

Adatok: $R_1 = 25 \text{ k}\Omega$, $R_2 = 50 \text{ k}\Omega$, $R_3 = 15 \text{ k}\Omega$, $R_4 = 10 \text{ k}\Omega$, $R_5 = 30 \text{ k}\Omega$, $U = 18 \text{ V}$.

Feladat: R_5 áramának, I_5 meghatározása a Norton-tétel alkalmazásával.

3.2.1. Az üresjárási feszültség meghatározása



3.3. ábra. Az R_5 ellenállás kivétele után nyert A-B kétpólus üresjárása

A 3.3. ábráról leolvasható, hogy

$$U_{\text{ü}} = U_{10} . \quad (3.3)$$

A 3.3. ábra kapcsolását érdemes lehet átrajzolni, hogy egyértelmű legyen az ellenállások közötti kapcsolatok. Az eredő ellenállás:

$$R_e = 50 \times (25 + 10) + 15 = 35,588 \text{ k}\Omega ,$$

ami segítségével az eredő áram:

$$I_e = \frac{U}{R_e} = \frac{18 \text{ V}}{35,588 \text{ k}\Omega} = 0,5058 \text{ mA} .$$

Ez az áram folyik a $15 \text{ k}\Omega$ -os ellenálláson is, amin eső feszültség:

$$U_{15} = 15 \text{ k}\Omega I_e = 15 \text{ k}\Omega \cdot 0,5058 \text{ mA} = 7,587 \text{ V} .$$

A maradék feszültség jut a többi ellenállásra, amely megoszlik a $25 \text{ k}\Omega$ -os és $10 \text{ k}\Omega$ -os ellenállásokon:

$$U_{\text{ü}} = U_{10} = (18 - 7,587) \frac{10}{10 + 25} = \underline{2,975 \text{ V}} . \quad (3.4)$$

3.2.2. A rövidzárási áram meghatározása

Az A-B kétpólus rövidzárása miatt a 3.4. ábra áramkörében a $10 \text{ k}\Omega$ -os ellenálláson nem folyik áram, mert vele párhuzamosan elhelyeztünk egy rövidzárát (rövidrezártuk).

Az eredő ellenállás:

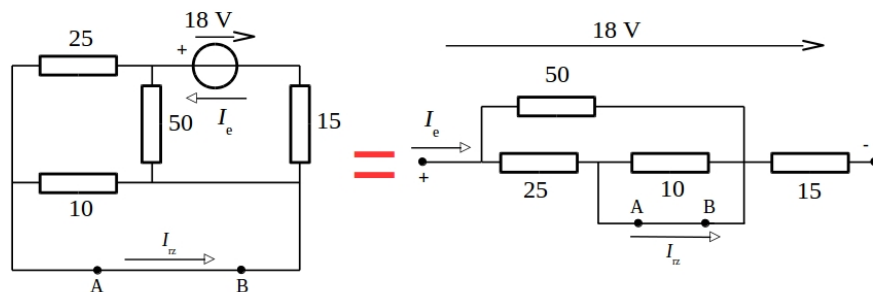
$$R_e = 50 \times 25 + 15 = 31,667 \text{ k}\Omega ,$$

amellyel megkapjuk a mostani eredőáram értékét:

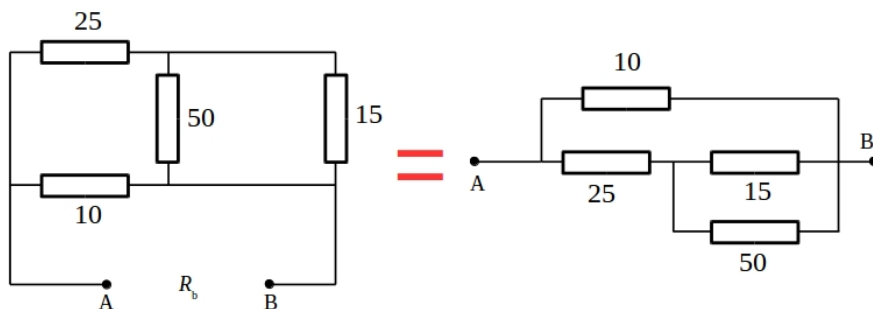
$$I_e = \frac{U}{R_e} = \frac{18 \text{ V}}{31,667 \text{ k}\Omega} = 0,5684 \text{ mA} .$$

Az I_{rz} rövidzárási áram megegyezik a $25 \text{ k}\Omega$ -os ellenállás áramával:

$$I_{\text{rz}} = I_e \frac{50}{50 + 25} = 0,5684 \text{ mA} \frac{50}{50 + 25} = \underline{0,3789 \text{ mA}} . \quad (3.5)$$



3.4. ábra. Az R_5 ellenállás kivétele után nyert A-B kétpólus rövidzárása



3.5. ábra. A kétpólus belső R_b ellenállása

3.2.3. A kétpólus belső ellenállásának direkt meghatározása

A 3.3. ábrán is látható áramkör generátorának kihagyásával (feszültséggenerátor helyett rövidzár) átrajzolásával meghatározható a kétpólus belső ellenállása (lásd a 3.5. ábrát):

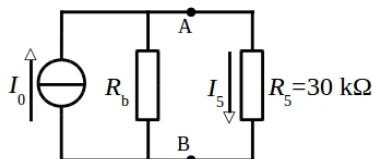
$$R_b = 10 \times (25 + 15 \times 50) = \underline{7,851 \text{ k}\Omega}. \quad (3.6)$$

3.2.4. A helyettesítő generátor

Norton-tétel esetén a kétpólust áramgenerátorral helyettesítjük. A (3.1) összefüggések szerint:

$$I_0 = I_{rz} = 0,3789 \text{ mA} \quad , \quad R_b = \frac{U_{\ddot{u}}}{I_{rz}} = \frac{2,975 \text{ V}}{0,3789 \text{ mA}} = \underline{7,852 \text{ k}\Omega}. \quad (3.7)$$

Látszik, hogy (3.6) és (3.7) egymással összhangban adják R_b értékét. Valójában (3.4)-(3.6) képletek közül elegendő kettőt használni $U_{\ddot{u}}$, R_b és I_{rz} értékek meghatározására, az $U_{\ddot{u}} = R_b I_{rz}$ összefüggéssel mindig megkapható a harmadik mennyiség.



3.6. ábra. A kétpólus belső R_b ellenállása

A (3.2) képletből megkapjuk az R_5 ellenálláson folyó I_5 áramot (lásd a 3.6. ábrát):

$$I_5 = I_0 \frac{R_b}{R_b + R_5} = 0,3789 \text{ mA} \frac{24}{24 + 30} = \underline{\underline{0,168 \text{ mA}}}. \quad (3.8)$$

q,