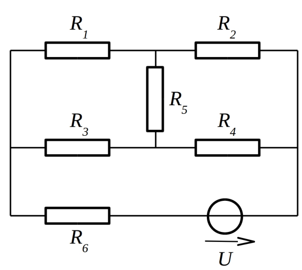
Többmódszeres esettanulmány egy áramkör vizsgálatára

Kőházi-Kis Ambrus

Tartalomjegyzék

1. Felvetés

Az 1.1. ábrán látható áramkör nem triviális. A feszültségforrást terhelő áramkör eredő ellenállása nem határozható meg csupán a soros és párhazamos kapcsolások figyelembevételével: az R_6 ellenállásról megállapítható, hogy a többi eredőjével sorba van kapcsolva (átmegy rajta az eredő áram). De például az R_1 és az R_3 ellenállás nincsenek párhuzamosan kapcsolva annak ellenére, hogy rajtuk megoszlik az áramkör eredő árama, mivel ezeken az ellenállásokra általában nem esik ugyanaz a feszültség, mert nincsen mindkét kivezetésük páronként összekötve: mivel R_5 ellenálláson általában lehet feszültség. Hasonlóan, például az R_1 és az R_2 ellenállások sincsenek sorba kötve annak ellenére, hogy feszültségeik összege megadja az R_6 ellenállással sorosan kötött blokk eredő feszültségét, mert az R_1 és az R_2 ellenállások árama általában nem egyenlő: az R_5 ellenálláson áram folyhat.



1.1. ábra. A vizsgált áramkör

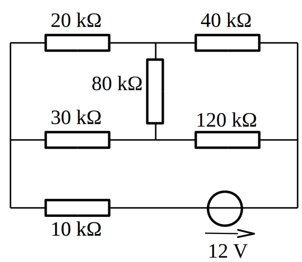
A 1.1. ábra áramköre tehát nem vizsgálható csupán a soros és párhuzamos ellenállások keresésével, viszont vizsgálható a

- Kirchoff-egyenletek segítségével (mint gyakorlatilag minden áramkör),
- hurokáramok módszerével,
- csomóponti potenciálok módszerével,
- csillag-delta átalakítással,

- delta-csillag átalakítással,
- a Thevenin-tétel segítségével,
- a Norton-tétel segítségével.

A következőkben az 1.1. ábra áramkörének egyes ellenállásain folyó áramokat fogjuk meghatározni a fent felsorolt módszerekkel, hogy azokat összehasonlíthassuk.

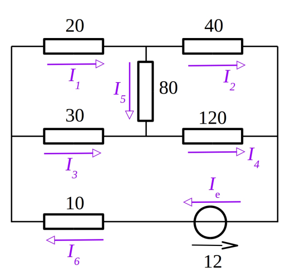
A könnyebb áttekinthetőség miatt határozott feszültség- és ellenállásértékekkel bíró áramkört fogunk vizsgálni: $R_1 = 20\,\mathrm{k\Omega}$, $R_2 = 40\,\mathrm{k\Omega}$, $R_3 = 30\,\mathrm{k\Omega}$, $R_4 = 120\,\mathrm{k\Omega}$, $R_5 = 80\,\mathrm{k\Omega}$, $R_6 = 10\,\mathrm{k\Omega}$, $U = 12\,\mathrm{V}$ (lásd a 1.2. ábrát).



1.2. ábra. A vizsgált áramkör mennyiségek értékeinek beírásával

2. Kirchoff-egyenetekkel

A 1.2. ábrán adott áramkör áramainak meghatározását a Kirchoff-egyenletek módszere alkalmazása esetén azzal kell kezdeni, hogy az egyes áramköri ágakba bejelölünk áramokat (lásd a 2.1. ábrát). A különböző ágakba feltétlenül különböző nagyságú, elvileg önkényesen kijelölhető irányú áramokat választhatunk. Általában, ha több generátor is van az áramkörben, akkor nem magától értetődő az egyes ellenállásokon folyó áram iránya, annak meghatározása esetenként lehet akár egyenértékű a teljes áramkör kiértékelésével. Nem szabad sokáig tankodni az áram irányának megválasztásával: legfeljebb a számolásunk végén a berajzolt áramirány mellett negatív értéket kapunk, ami a berajzolt áramiránnyal együtt egyértelmű megoldást jelent.



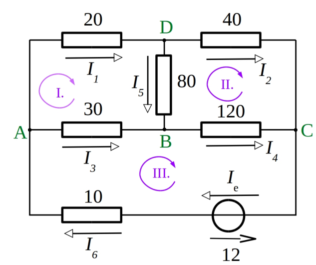
2.1. ábra. Az egyenlet vizsgálatát áramirányok felvételével kell kezdeni

A vizsgált áramkörünkben csupán egyetlen feszültségforrás van így könnyen, különösebb erőfeszítés nélkül berajzolhatjuk az áramok helyes irányát (igazából I_5 kivételével, mert annak iránya függ az ellenállások értékétől is): tudjuk, hogy a generátor a feszültségnyilával ellentétes irányú áramot keltenének (ha általában egyéb generátorok ebben meg nem akadályoznák).

A 2.1. ábrán már csak az ellenállások (esetünkben kΩ-ban) meghatárzott értékei szerepelhetnek: arra kell csak figyelnünk majd, hogy a megkapott ellenállások és áramok szorzatának V mértékegységű mennyiséget kell adniuk. Az ellenállások kΩ mértékegysége mellett számolásunk végén így mA mértékegységben kapjuk meg az áramok értékeit. Hasznos az ilyen értelmű egyszerűsítés, mert vele nem kell olyan nagy számokkal bajlódnunk, mint ha mindig kiírnánk az Ω mértékegységben adott ellenállásértékeket.

A számolásokhoz csupán a jelölések, egyenletek felírásának pontosítása érdekében bejelölhetők, hogy az egyes egyenletek az áramkör melyik részletére vonatkoznak. Ilyen értelemben lehet (lásd a 2.2. ábrát), de nem feltétlenül szükséges,

- a csomópontokat betűjellel (A, B, C, D, ...) azonosítani,
- illetve az elemi hurkokat római számokkal, és bennük a körüljárási irányokat jelölni.



2.2. ábra. Az egyenlet vizsgálatát áramirányok felvételével kell kezdeni

2.1. A Kirchoff-egyenletek felírása

Az előbb bevezetett jelölésekkel azonosíthatjuk a felírt egyenletek eredetét.

Az áramkörben 4 csomópont van. Mint ahogyan a Kirchoff-egyenletekkel kapcsolatban tanultuk: mindig elegendő csupán a csomópontok számánál eggyel kevesebb, esetünkben csak 3 csomóponti egyenletet felírni (akármelyik csomópontot kihagyhatjuk). Az A, B, C csomópontokra a kifutó áramokat pozitívnak véve írtam fel egyenleteket:

$$\begin{aligned} \text{A:} \quad & I_1 + I_3 - I_6 = 0\,, \\ \text{B:} \quad & I_4 - I_5 - I_3 = 0\,, \\ \text{C:} \quad & I_6 - I_2 - I_4 = 0\,. \end{aligned}$$

Hurokegyenletekből éppen az elemi hurkok számával egyenlő (esetünkben 3) hurokegyenletet kell felírni (a horkokhoz bejelölt körüljárási irányba eső feszültségeket vesszük pozitívnak):

$$\begin{aligned} \text{I:} \quad & 20\,I_1 + 80\,I_5 - 30\,I_3 = 0\,, \\ \text{II:} \quad & 40\,I_2 - 120\,I_4 - 80\,I_5 = 0\,, \\ \text{III:} \quad & 30\,I_3 + 120\,I_4 - 12 + 10\,I_6 = 0\,. \end{aligned}$$

A hurokegyenletek felírásakor a feszültségforrások U feszültségeit, illetve az ellenállások $R\,I$ (ellenállás szorozva a benne folyó árammal) feszültségeit összegezzük, figyelembe véve, hogy az ellenállásokon a feszültség és az áram iránya mindig azonos értelmű – ezért nem kell a 2.2. áramkörbe az ellenálások feszültségeinek az irányait is berajzolni, hiszen azokat az áramok irányai egyértelműen megadják.

Összesen hat ismeretlen áram meghatározására a három csomóponti és három hurokegyenlet, összesen hat egyenlet elegendő.

2.2. A Kirchoff-egyenletek megoldása

Az áttekinthetőség érdekében az egyenleteket egy közös blokkba rendezem:

$$\begin{array}{rrl}
\text{A:} & I_1 + I_3 - I_6 = 0\,, & \Longrightarrow I_1 = I_6 - I_3\,, \\
\text{B:} & I_4 - I_5 - I_3 = 0\,, & \\
\text{C:} & I_6 - I_2 - I_4 = 0\,, & \\
\text{I:} & 20\,I_1 + 80\,I_5 - 30\,I_3 = 0\,, & \\
\text{II:} & 40\,I_2 - 120\,I_4 - 80\,I_5 = 0\,, & \\
\text{III:} & 30\,I_3 + 120\,I_4 - 12 + 10\,I_6 = 0\,. &
\end{array}$$

Az egyenletrenszert úgy kell megoldani, hogy mindig ki kell választani egy egyenletet, abból ki kell fejezni egy ismeretlent, majd az eggyel kevesebb számú egyenletben mindenhonnan ki kell ejteni a kifejezett változót. Így eggyel kevesebb egyenlet, abban eggyel kevesebb ismeretlent kapunk. Ezt az eljárást végrehajtva bizonyosan eljutunk az egyetlen változót tartamazó egyetlen egyenletig, amelyet (különösen az esetünkben lineáris egyenletek figyelembe vételével) könnyedén meg tudunk oldani. Az előzőleg kiejtett ismeretlenek értékét éppen az ő kifejező egyenletei segítségével, visszahelyettesítésekkel határozhatjuk meg. A következőkben ezt a programot hajtom végre.

Az előbb felírt egyenletblokkban az A csomópontiegyenletből már ki is fejezünk egy ismeretlent:

$$\begin{array}{rrl}
\text{A}: & I_1 + I_3 - I_6 = 0\,, & \Rightarrow \quad I_1 = I_6 - I_3\,, \\
\text{B}: & I_4 - I_5 - I_3 = 0\,, & \\
\text{C}: & I_6 - I_2 - I_4 = 0\,, & \\
\text{I}: & 20\,I_1 + 80\,I_5 - 30\,I_3 = 0\,, & \\
\text{II}: & 40\,I_2 - 120\,I_4 - 80\,I_5 = 0\,, & \\
\text{III}: & 30\,I_3 + 120\,I_4 - 12 + 10\,I_6 = 0\,. &
\end{array} \tag{2.1}$$

Behylettesítjük I_1-t a többi eyenletbe:

$$\begin{array}{rl}
I_4 - I_5 - I_3 = 0\,, & \Rightarrow \quad I_3 = I_4 - I_5\,, \\
I_6 - I_2 - I_4 = 0\,, & \\
20\,(I_6 - I_3) + 80\,I_5 - 30\,I_3 = 0\,, & \\
40\,I_2 - 120\,I_4 - 80\,I_5 = 0\,, & \\
30\,I_3 + 120\,I_4 - 12 + 10\,I_6 = 0\,. &
\end{array} \tag{2.2}$$

Most I_3-t ejtjük ki a maradék négy egyenletből:

$$\begin{array}{rl}
I_6 - I_2 - I_4 = 0\,, & \Rightarrow \quad I_6 = I_2 + I_4\,, \\
20\,I_6 + 80\,I_5 - 50\,(I_4 - I_5) = 0\,, & \\
40\,I_2 - 120\,I_4 - 80\,I_5 = 0\,, & \\
30\,(I_4 - I_5) + 120\,I_4 - 12 + 10\,I_6 = 0\,. &
\end{array} \tag{2.3}$$

Most I_6-t ejtjük ki a maradék három egyenletből:

$$\begin{array}{rl}
20\,(I_2 + I_4) + 130\,I_5 - 50\,I_4 = 0\,, & \\
40\,I_2 - 120\,I_4 - 80\,I_5 = 0\,, & \Rightarrow \quad I_2 = \frac{120\,I_4 + 80\,I_5}{40}\,, \\
150\,I_4 - 30\,I_5 - 12 + 10\,(I_2 + I_4) = 0\,. &
\end{array} \tag{2.4}$$

Már csak két egyenletből tüntetjük el I_2-t:

$$\begin{array}{rl}
20\,(3\,I_4 + 2\,I_5) + 130\,I_5 - 30\,I_4 = 0\,, & \Rightarrow \quad I_4 = \frac{-170\,I_5}{30}\,, \\
160\,I_4 - 30\,I_5 - 12 + 10\,(3\,I_4 + 2\,I_5) = 0\,. &
\end{array} \tag{2.5}$$

Már csak egyetlen egyenlet maradt az I_5 ismeretlennel:

$$190\left(\frac{-17\,I_5}{3}\right) - 10\,I_5 - 12 = 0\,, \qquad / \times 3$$

$$-3230\, I_5 - 30\, I_5 - 36 = 0\,,$$

$$-3260\, I_5 - 36 = 0\,,$$

amiből:

$$I_5 = \frac{120\, I_4 + 80\, I_5}{40} = -\frac{36}{3260}\,\mathrm{mA} = \underline{\underline{-0,01104\,\mathrm{mA}}}\,. \tag{2.6}$$

Ezzel (2.5) egyenletből:

$$I_4 = \frac{-170\, I_5}{30} = \frac{-170 \cdot (-0,01104)}{30} = \underline{\underline{0,06258\,\mathrm{mA}}}\,. \tag{2.7}$$

Ezekkel (2.4) egyenletből:

$$I_2 = \frac{120\, I_4 + 80\, I_5}{40} = \frac{120 \cdot 0,06258 + 80 \cdot (-0,01104)}{40} = \underline{\underline{0,16565\,\mathrm{mA}}}\,. \tag{2.8}$$

Ezekkel (2.3) egyenletből:

$$I_6 = I_2 + I_4 = 0,16565 + 0,06258 = \underline{\underline{0,22823\,\mathrm{mA}}}\,. \tag{2.9}$$

Ezekkel (2.2) egyenletből:

$$I_3 = I_4 - I_5 = 0,06258 - (-0,01104) = \underline{\underline{0,07362\,\mathrm{mA}}}\,.$$

Ezekkel (2.1) egyenletből:

$$I_1 = I_6 - I_3 = 0,22823 - 0,07362\,\mathrm{mA} = \underline{\underline{0,15461\,\mathrm{mA}}}\,.$$

Ezzel a hosszas, de egyszerű számolás végén megkaptuk az összes áram értékét. Az I_5 áram értékére negatív értéket kaptunk, ami azt jelenti, hogy az áram nem a 2.2. ábrán bejelölt irányba folyik, hanem azzal ellentétes irányba. Nem kell semmit átírni: az ábrán bejelölt (mérő-) irány és a kiszámolt áram előjele egyértelműen megadja az áram tényleges irányát.

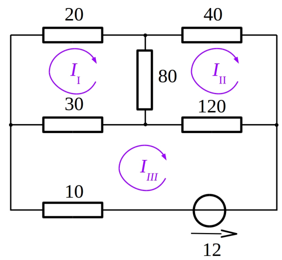
3. Hurokáramok módszerével

Ezen módszer keretlben csak hurokegyenletet írunk fel, csomóponti egyenletekre nincs is szükség. A csomóponti egyenletek azt fejezik ki, hogy az adott csomópontban nem halmozódik fel töltés: a befutó és kifutó áramok előjeles eredője nullát ad. Amikor az áramokat hurkokban körbefolyó áramok formájában keressük, akkor fel sem merül a töltések felhalmozódásának lehetősége, hiszen a hurokáramban bizonyosan körbeáramlanak a töltések. Így csak az elemi hurkok számával egyenlő számú hurokegyenletet kell felvenni, minden elemi hurokra egyet-egyet (lásd a 3.1. ábrát).

3.1. Az egyenletek felírása

Ha a köráramok iránya mind azonos értelmű, akkor nagyon egyszerű szerkezetűek az egyenletek. Egy hurokra vonatkozó egyenet bal oldalán pozitív előjellel szerepel a hurok árama megszorozva a hurok ellenállásainak összegével, negatív előjellel szerepelnek a szomszédos hurkok áramai szorozva a közös ellenállások értékével, továbbá a hurokban szereplő feszültségforrások pozitív előjellel szerepelnek, ha a hurokáram körülfutási irányával azonos a feszültség iránya, negatív előjellel szerepelnek ellenkező esetben:

$$\begin{aligned} I_{\mathrm{I}}\ (20+30+80) - I_{\mathrm{II}}\, 80 - I_{\mathrm{III}}\, 30 &= 0\,, \\ I_{\mathrm{II}}\ (40+80+120) - I_{\mathrm{I}}\, 80 - I_{\mathrm{III}}\, 120 &= 0\,, \\ I_{\mathrm{III}}\ (30+120+10) - I_{\mathrm{I}}\, 30 - I_{\mathrm{II}}\, 120 - 12 &= 0\,, \end{aligned} \tag{3.1}$$



3.1. ábra. Mindegyik elemi hurokhoz berajzolunk egy-egy köráramot, amelyek körbefordulási iránya azonos, pl. az óramutató járásával megegyező irányú

összevonva a tagokat:

$$\begin{aligned} I_{\mathrm{I}}\,130 - I_{\mathrm{II}}\,80 - I_{\mathrm{III}}\,30 &= 0\,, \\ I_{\mathrm{II}}\,240 - I_{\mathrm{I}}\,80 - I_{\mathrm{III}}\,120 &= 0\,, \\ I_{\mathrm{III}}\,160 - I_{\mathrm{I}}\,30 - I_{\mathrm{II}}\,120 - 12 &= 0\,. \end{aligned} \tag{3.2}$$

Az elemi hurkok számával megegyező számú lineáris egyenletet, mint egyenletrendszert kell megoldani.

3.2. Az egyenletek megoldása, az ágáramok meghatározása

Most is a 2.2. alfejezet elején leírt kifejezős módszer szerint kell megoldani az egyenletrendszert.

Például az első egyenletből kifejezhetjük az I_{I} áram értékét:

$$\begin{aligned} I_{\mathrm{I}}\,130 - I_{\mathrm{II}}\,80 - I_{\mathrm{III}}\,30 &= 0\,, \qquad \Rightarrow \quad I_{\mathrm{I}} = \tfrac{80\,I_{\mathrm{II}}+30\,I_{\mathrm{III}}}{130}\,, \\ I_{\mathrm{II}}\,240 - I_{\mathrm{I}}\,80 - I_{\mathrm{III}}\,120 &= 0\,, \\ I_{\mathrm{III}}\,160 - I_{\mathrm{I}}\,30 - I_{\mathrm{II}}\,120 - 12 &= 0\,. \end{aligned} \tag{3.3}$$

Behelyettesítve a maradék kettő egyenletbe I_{I}-t, majd az egyik egyenletből kifejezzük I_{II}-t:

$$\begin{aligned} I_{\mathrm{II}}\,240 - \left(\tfrac{80\,I_{\mathrm{II}}+30\,I_{\mathrm{III}}}{130}\right) 80 - I_{\mathrm{III}}\,120 &= 0\,, \qquad \Rightarrow \quad I_{\mathrm{II}} = \tfrac{180\,I_{\mathrm{III}}}{248}\,, \\ I_{\mathrm{III}}\,160 - \left(\tfrac{80\,I_{\mathrm{II}}+30\,I_{\mathrm{III}}}{130}\right) 30 - I_{\mathrm{II}}\,120 - 12 &= 0\,. \end{aligned} \tag{3.4}$$

Végül egy egyenletben egyetlen (I_{III}) ismeretlennel:

$$I_{\mathrm{III}}\,1990 - \left(\frac{180\,I_{\mathrm{III}}}{248}\right) 1800 - 156 = 0\,,$$

$$21190\,I_{\mathrm{III}} - 4836 = 0\,,$$

$$I_{\mathrm{III}} = \frac{4836}{21190} = \underline{\underline{0,2282\,\mathrm{mA}}}\,. \tag{3.5}$$

A (3.4) egyenletbe visszahelyetesítve:

$$I_{\mathrm{II}} = \frac{180\,I_{\mathrm{III}}}{248} = \frac{180 \cdot 0,2282}{248} = \underline{\underline{0,1656\,\mathrm{mA}}}\,. \tag{3.6}$$

A (3.3) egyenletbe visszahelyetesítve:

$$I_{\mathrm{I}} = \frac{80\,I_{\mathrm{II}} + 30\,I_{\mathrm{III}}}{130} = \frac{80 \cdot 0,1656 + 30 \cdot 0,2282}{130} = \underline{\underline{0,1546\,\mathrm{mA}}}\,. \tag{3.7}$$

3.3. Az áramköri ágakban folyó áramok meghatározása

Az 2.1. ábrán feltüntetett irányokban felvetett áramok egyszerűen számolhatók:

- abban az áramköri ágban, amely csak egyetlen hurokhoz tartozik a hurokáram folyik,
- abban az áramköri ágban, amely két hurok határán van a szomszédos hurkáramok különbsége folyik.

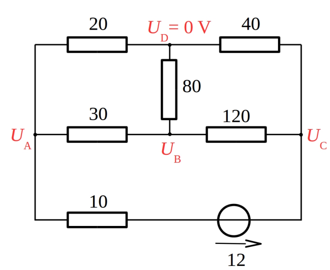
Mindezek alapján az . ábrán bejelölt áramok értéke:

$$\begin{aligned}
I_1 = I_{\mathrm{I}} &= \underline{\underline{0,1546\,\mathrm{mA}}}\,,\\
I_2 = I_{\mathrm{II}} &= \underline{\underline{0,1656\,\mathrm{mA}}}\,,\\
I_3 = I_{\mathrm{III}} - I_{\mathrm{I}} &= 0,2282 - 0,1546 = \underline{\underline{0,0736\,\mathrm{mA}}}\,,\\
I_4 = I_{\mathrm{III}} - I_{\mathrm{II}} &= 0,2282 - 0,1656 = \underline{\underline{0,0626\,\mathrm{mA}}}\,,\\
I_5 = I_{\mathrm{I}} - I_{\mathrm{II}} &= 0,1546 - 0,1656 = \underline{\underline{-0,0110\,\mathrm{mA}}}\,,\\
I_6 = I_{\mathrm{III}} &= \underline{\underline{0,2282\,\mathrm{mA}}}\,.
\end{aligned} \tag{3.8}$$

Megoldásul a 2. fejezetben kapottal megegyező eredményt kaptunk.

4. Csomóponti potenciálok módszerével

Ennek a módszernek a keretében csak csomóponti egyenleteket írunk fel. A csomópontok közül az egyiket nulla potenciálúnak jelöljük ki, a többi potenciálja alkotja a módszer meghatározandó ismeretlenjeit (lásd a 4.1. ábrát). Ilymódon a csomópontok számánál eggyel kevesebb számú ismeretlenünk van, amire most is elegendő lesz ugyanennyi csomóponti egyenletet felírni.



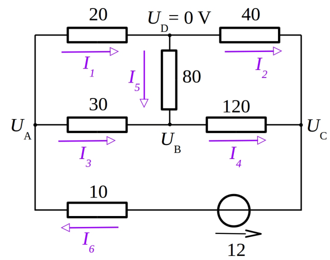
4.1. ábra. Az egyik csomópontot nulla potenciálúnak jelöljük, a többi csomópont potenciálját fogjuk a módszerrel elsődlegesen meghatározni

A csomóponti egyenletek egy csomópontba érkező áramköri ágak árama között teremt kapcsolatot, felírásukhoz ki kell fejezni a ágáramokat a csomóponti potenciálok segítségével.

4.1. A csomóponti egyenletek felírása

A csomóponti egyenletekhez fel kell venni az ágáramoknak áramirányokat (lásd a 4.2. ábrát).

Egy ágáram felírható az ág két végén levő potenciálok különbsége, mint feszültség, az ágban elhelyezkedő feszültségforrás feszültsége és az ellenállásokon eső feszültségével. Helyesen kell a feszültségek irányát összeegyeztetni: pl. figyelembe kell venni, hogy az ellenálláson eső feszültség azonos irányú a rajta folyó áram irányával. Minden ágra felírunk egy ilyen egyenletet,amelyekől rögtön ki is fejezzük



4.2. ábra. Tetszőlegesen megválaszthatók áramirányok az áramköri ágak számára

az ág-áramokat:

$$\begin{array}{rcl} U_\mathrm{A} - U_\mathrm{D} = 20\, I_1 & \Rightarrow & I_1 = \frac{U_\mathrm{A}-U_\mathrm{D}}{20}\,, \\ U_\mathrm{D} - U_\mathrm{C} = 40\, I_2 & \Rightarrow & I_2 = \frac{U_\mathrm{D}-U_\mathrm{C}}{40}\,, \\ U_\mathrm{A} - U_B = 30\, I_3 & \Rightarrow & I_3 = \frac{U_\mathrm{A}-U_\mathrm{B}}{30}\,, \\ U_\mathrm{B} - U_\mathrm{C} = 120\, I_4 & \Rightarrow & I_4 = \frac{U_\mathrm{B}-U_\mathrm{C}}{120}\,, \\ U_\mathrm{D} - U_\mathrm{B} = 80\, I_5 & \Rightarrow & I_5 = \frac{U_\mathrm{D}-U_\mathrm{B}}{80}\,, \\ U_\mathrm{C} - U_\mathrm{A} = -12 + 10\, I_6 & \Rightarrow & I_6 = \frac{U_\mathrm{C}-U_\mathrm{A}+12}{10}\,, \end{array} \tag{4.1}$$

Az ágáramokkal felírhatjuk a csomóponti egyenleteket (most a kifutó áramokat veszem pozitívnak):

$$\begin{array}{rl} \mathrm{A}: & I_1 + I_3 - I_6 = 0\,, \\ \mathrm{B}: & I_4 - I_3 - I_5 = 0\,, \\ \mathrm{C}: & I_6 - I_2 - I_4 = 0\,, \end{array} \tag{4.2}$$

Amelyekbe beírva a csomóponti áramok (4.1) kifejezéseit ($U_\mathrm{D} = 0$):

$$\begin{array}{c} \frac{U_\mathrm{A}-0}{20} + \frac{U_\mathrm{A}-U_\mathrm{B}}{30} - \frac{U_\mathrm{C}-U_\mathrm{A}+12}{10} = 0\,, \\ \frac{U_\mathrm{B}-U_\mathrm{C}}{120} - \frac{U_\mathrm{A}-U_\mathrm{B}}{30} - \frac{0-U_\mathrm{B}}{80} = 0\,, \\ \frac{U_\mathrm{C}-U_\mathrm{A}+12}{10} - \frac{0-U_\mathrm{C}}{40} - \frac{U_\mathrm{B}-U_\mathrm{C}}{120} = 0\,. \end{array} \tag{4.3}$$

4.2. Az egyenletrendszer megoldása

Ha papíron számolunk érdemes a nevezők legkisebb közös többszörösével (rendre: 60, 240, 120) beszorozni és a tagokat összevonni:

$$\begin{array}{c} 11\, U_\mathrm{A} - 2\, U_\mathrm{B} - 6\, U_\mathrm{C} - 72 = 0\,, \\ 13\, U_\mathrm{B} - 2\, U_\mathrm{C} - 8\, U_\mathrm{A} = 0\,, \\ 16\, U_\mathrm{C} - 12\, U_\mathrm{A} - U_\mathrm{B} + 144 = 0\,. \quad \Rightarrow \quad U_\mathrm{B} = 16\, U_\mathrm{C} - 12\, U_\mathrm{A} + 144\,. \end{array} \tag{4.4}$$

Az utolsó egyenletből a kifejezett U_B-t kiejtjük a másik két egyenletből is:

$$\begin{array}{c} 11\, U_\mathrm{A} - 2\, (16\, U_\mathrm{C} - 12\, U_\mathrm{A} + 144) - 6\, U_\mathrm{C} - 72 = 0\,, \\ 13\, (16\, U_\mathrm{C} - 12\, U_\mathrm{A} + 144) - 2\, U_\mathrm{C} - 8\, U_\mathrm{A} = 0\,, \end{array}$$

amit egyszerűsítve kapjuk:

$$\begin{array}{c} 35\, U_\mathrm{A} - 38\, U_\mathrm{C} - 360 = 0\,, \quad \Rightarrow \quad U_\mathrm{C} = \frac{35\, U_\mathrm{A}-360}{38}\,, \\ 206\, U_\mathrm{C} - 164\, U_\mathrm{A} + 1872 = 0\,. \end{array} \tag{4.5}$$

A

$$206\left(\frac{35\, U_\mathrm{A} - 360}{38}\right) - 164\, U_\mathrm{A} + 1872 = 0\,,$$

$$978\,U_{\mathrm{A}} - 3024 = 0\,,$$

$$U_{\mathrm{A}} = \frac{3024}{978} = \underline{\underline{3,09202\,\mathrm{V}}}\,. \tag{4.6}$$

A (4.5) egyenletből:

$$U_{\mathrm{C}} = \frac{35\,U_{\mathrm{A}} - 360}{38} = \frac{35 \cdot 3,09202 - 360}{38} = \underline{\underline{-6,62577\,\mathrm{V}}}\,. \tag{4.7}$$

A (4.5) egyenletből:

$$U_{\mathrm{B}} = 16\,U_{\mathrm{C}} - 12\,U_{\mathrm{A}} + 144 = 16 \cdot (-6,62577) - 12 \cdot (3,09202) + 144 = \underline{\underline{0,88344\,\mathrm{V}}}\,. \tag{4.8}$$

4.3. Az áramköri ágakban folyó áramok meghatározása

A potenciálok ismeretében a 4.1. alfejezetben felírt egyenletek segítségével meghatározhatjuk az áramköri ágakban folyó áramokat:

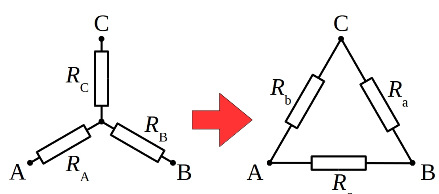
$$\begin{gathered}
I_1 = \tfrac{U_{\mathrm{A}} - U_{\mathrm{D}}}{20} = \tfrac{3,09202-0}{20} = 0,1546\,\mathrm{mA}\,,\\
I_2 = \tfrac{U_{\mathrm{D}} - U_{\mathrm{C}}}{20} = \tfrac{0-(-6,62577)}{40} = 0,1656\,\mathrm{mA}\,,\\
I_3 = \tfrac{U_{\mathrm{A}} - U_{\mathrm{B}}}{30} = \tfrac{3,09202-0,88344}{30} = 0,0736\,\mathrm{mA}\,,\\
I_4 = \tfrac{U_{\mathrm{B}} - U_{\mathrm{C}}}{120} = \tfrac{0,88344-(-6,62577)}{120} = 0,0626\,\mathrm{mA}\,,\\
I_5 = \tfrac{U_{\mathrm{D}} - U_{\mathrm{B}}}{80} = \tfrac{0-0,88344}{80} = -0,0110\,\mathrm{mA}\,,\\
I_6 = \tfrac{U_{\mathrm{C}} - U_{\mathrm{A}} + 12}{10} = \tfrac{-6,62577-3,09202+12}{10} = 0,2282\,\mathrm{mA}\,.
\end{gathered}$$

Az előző két módszerrel azonos eredményt kaptunk úgy, hogy megfelelően sok jegyre pontosan számolunk.w

5. Csillag-delta átalakítással

5.1. Csillag-delta átalakítás általában

Vannak áramkörök, például az 1.1. ábrán adott áramkör, amelyben az ellenállások kölcsönös viszonya nem vezető vissza soros, vagy párhuzamos kapcsolatra. Ilyen esetben megfelelő egymással úgynevezett **csillag-, vagy Y-kapcsolt ellenállás hármasok** megválasztásával átalakíthatjuk úgy a hálózatot, hogy annak az átalakításban részt nem vevő része ugyanúgy működik (ugyanaz a feszültsége, árama), mint az eredeti áramkör megfelelő része. Az átalakítás értelme pedig az, hogy a módosított áramkörben már az ellenállások kapcsolata értelmezhető soros-, párhuzamos-kapcsolások alapján – számolható az eredő ellenállás, meghatározható feszültség-, vagy áramosztással az áramöri elemek áramai, feszültségei.



5.1. ábra. Csillag-Delta átalakítás

A 5.1. ábrán jelölt csillag alakzatot kell keresni az eredeti áramörben és az ábrán A, B és C-vel jelölt pontok jelzik a megtalált csillag-alakzatnak az áramkör többi részéhez csatlakozó pontjait.

Az átalakított, delta-kapcsolás ellenállásait úgy határozták meg, hogy az áramkörbe az A, B és C pontok közötti részt delta-kapcsolássá átalakítva az átalakításban részt nem vevő része az áramkörnek ugyanúgy működjön, mint az eredeti áramkörben.

Az ellenállások indexelése a geometriában rajzolt háromszögek csúcsainak és oldalainak jelöléséhez igazodnak: nagy betűvel indexeljük a csúcsokhoz tartozó ellenállásokat (csillag-kapcsolásban), kisbetűvel indexeljük az oldalakhoz tartozó ellenállásokat (delta-kapcsolásban).

Az átalakítás képletei:

$$R_{\mathrm{a}} = \frac{R_{\mathrm{B}}\, R_{\mathrm{C}}}{R_{\mathrm{Y}}}\,, \tag{5.1}$$

$$R_{\mathrm{b}} = \frac{R_{\mathrm{A}}\, R_{\mathrm{C}}}{R_{\mathrm{Y}}}\,, \tag{5.2}$$

$$R_{\mathrm{c}} = \frac{R_{\mathrm{A}}\, R_{\mathrm{B}}}{R_{\mathrm{Y}}}\,, \tag{5.3}$$

ahol ($\times$ a replussz műveletet jelöli, a replussz művelet asszociatív)

$$R_{\mathrm{Y}} = R_{\mathrm{A}} \times R_{\mathrm{B}} \times R_{\mathrm{C}} = \frac{1}{\frac{1}{R_{\mathrm{A}}} + \frac{1}{R_{\mathrm{B}}} + \frac{1}{R_{\mathrm{C}}}}\,. \tag{5.4}$$

Az (5.1)-(5.3) képletek bemagolása helyett lényegüket geometriai úton is megjegyezhetjük. Amikor a delta-kapcsolás egy oldalához tartozó ellenállást (pl. R_{b}-t) akarjuk számolni, akkor annak az oldalnak két végén levő csúcshoz tartozó (példánkban R_{A} és R_{C}) ellenállásokat (lásd a 5.1. ábrát) kell összeszorozni és osztani az R_{Y} értékével.

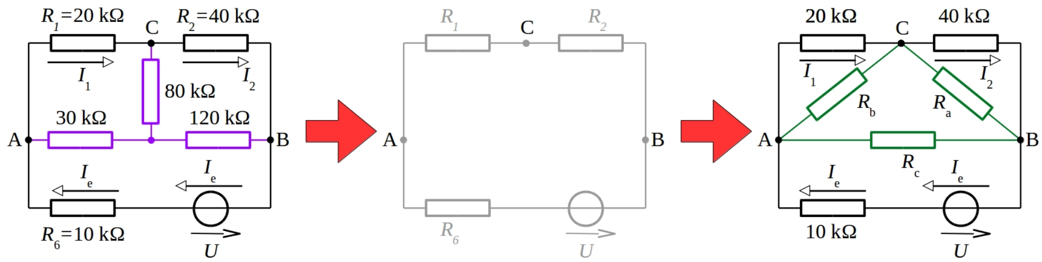
5.2. R_1 és R_2 áramának számolásához célszerű csillag-delta átalakítás

Az eredeti áramkörben három ellenálláscsoportot látunk csillagba rendeződni:

- R_1, R_2 és R_5 cseréje után a maradék ellenállásokban (R_3, R_4, R_6) folyik ugyanaz az áram folyik, feszültség esik, mint az eredeti áramkörben;
- R_3, R_4 és R_5 cseréje után a maradék ellenállásokban (R_1, R_2, R_6) folyik ugyanaz az áram folyik, feszültség esik, mint az eredeti áramkörben;
- R_1, R_3 és R_6 cseréje után a maradék ellenállásokban (R_2, R_4, R_5) folyik ugyanaz az áram folyik, feszültség esik, mint az eredeti áramkörben. (Ezen ellenállások csillag-delta átalakítása után sem kapunk soros- és párhuzamos kapcsolások szerint felbontható hálózatot.)

R_1 és R_2 ellenállások áramának, feszültségének meghatározásához ezek szerint az R_3, R_4 és R_5 ellenállások átalakítására van szükség. Az átalakítást úgy kell elvégezni (lásd a 5.2. ábrát), hogy

1. azonosítjuk azt a három pontot (A, B, C), amelyeken keresztül ez a három ellenállás az áramkör többi részéhez csatlakozik;
2. újrarajzoljuk az áramkört az átalakításra kiválasztott ellenállások nélkül, majd az A, B, C csúcsokhozberajzolunk a csúcsok közé egy-egy ellenállást (delta-, vagy háromszög-kapcsolásba);
3. Az ellenállásoknak új nevet adunk – ez elkerülhetetlen, mert ezek ellenállásértékei nem egyeznek meg általában egyetlen az eredeti áramkörben szereplő ellenállás értékeivel. Javasolt elnevezés: az A csúccsal szemben legyen R_{a}, B-vel szemben R_{b} és C-vel szemben R_{c} (hasonlóan a háromszög oldalainak elnevezéséhez).



5.2. ábra. Az R_3, R_4 és R_5 ellenállások csillag-delta átalakítása után a többi ellenálláson folyó áram ugyanaz marad, ha az új ellenállásokat a 5.1. alfejezet szerint számoljuk

5.2.1. Az átalakítással bevezetett ellenállásértékek számolása

A 5.1. alfejezetben leírtak szerint számolunk.

Először kiszámoljuk az átalakítás során segédeszközként használt R_Y értékét: az átalakításban szereplő ellenállásokból ($R_3 = 30\,\mathrm{k\Omega}$, $R_4 = 120\,\mathrm{k\Omega}$ és $R_5 = 80\,\mathrm{k\Omega}$) kell számolni (lásd a 5.2. ábrát):

$$R_\mathrm{Y} = \frac{1}{\frac{1}{R_\mathrm{A}} + \frac{1}{R_\mathrm{B}} + \frac{1}{R_\mathrm{C}}} = \frac{1}{\frac{1}{30} + \frac{1}{120} + \frac{1}{80}} = \frac{240}{8+2+3} = \frac{240}{13}\,\mathrm{k\Omega}\,. \tag{5.5}$$

Az R_a ellenállás a B és a C csúcsok között kapott helyet (lásd a 5.2. ábrát), így a B-be csatlakozó 120 kΩ-os és a C-be csatlakozó 80 kΩ-os ellenállásokkal kell számolni:

$$R_\mathrm{a} = \frac{120 \cdot 80}{240/13} = 520\,\mathrm{k\Omega}\,. \tag{5.6}$$

Hasonlóan, az R_b ellenállás az A és a C csúcsok között kapott helyet (lásd a 5.2. ábrát), így az A-ba csatlakozó 30 kΩ-os és a C-be csatlakozó 80 kΩ-os ellenállásokkal kell számolni:

$$R_\mathrm{b} = \frac{30 \cdot 80}{240/13} = 130\,\mathrm{k\Omega}\,. \tag{5.7}$$

Hasonlóan, az R_c ellenállás az A és a B csúcsok között kapott helyet (lásd a 5.2. ábrát), így az A-ba csatlakozó 30 kΩ-os és a B-be csatlakozó 120 kΩ-os ellenállásokkal kell számolni:

$$R_\mathrm{c} = \frac{30 \cdot 120}{240/13} = 195\,\mathrm{k\Omega}\,. \tag{5.8}$$

5.2.2. Az eredőellenállás számolása

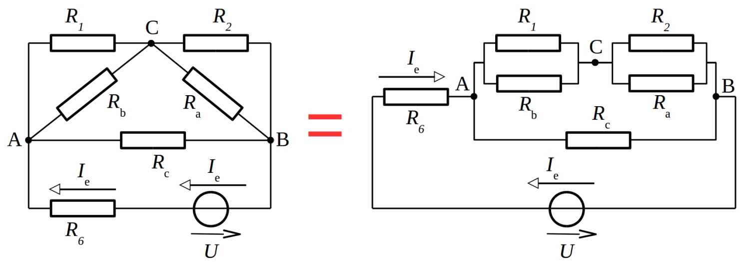
Az átalakítás után kialakult ármakört átrajzolhatjuk olyan formába is, amelyen nyilvánvaló, hogy az ellenállások hogyan vannak sorba vagy párhuzamosan kapcsolva (lásd a 5.3. ábrát). Az R_1 és R_b, illetve R_2 és R_a ellenállások párhuzamosan, eredő ellenállásuk sorba vannak kapcsolva, amelyek eredőjével R_c van párhuzamosan kötve; ezek eredője pedig sorba van kötve R_6 ellenállással.

Az eredőellenállás:

$$R_\mathrm{e} = R_6 + R_\mathrm{c} \times (R_1 \times R_\mathrm{b} + R_2 \times R_\mathrm{a}) = 10 + 195 \times (20 \times 130 + 40 \times 520)\;,$$

$$R_\mathrm{e} = 10 + 195 \times \left(\frac{20 \cdot 130}{20+130} + \frac{40 \cdot 520}{40+520}\right) = 10 + 195 \times (17{,}333 + 37{,}143)\;,$$

$$R_\mathrm{e} = 10 + 195 \times 54{,}476 = 10 + \frac{195 \cdot 54{,}476}{195 + 54{,}476} = 10 + 42{,}581 = 52{,}581\,\mathrm{k\Omega}\,. \tag{5.9}$$



5.3. ábra. Az átalakított áramkörben az ellenállások eredője egyszerűen számolható

5.2.3. R_1 és R_2 áramának számolása

Az eredő áram:

$$I_\mathrm{e} = \frac{U}{R_\mathrm{e}} = \frac{12\,\mathrm{V}}{52,581\,\mathrm{k\Omega}} = 0,2282\,\mathrm{mA}\,,$$

amivel egyenlő az R_6 ellenállás árama is:

$$I_6 = I_\mathrm{e} = \underline{\underline{0,2282\,\mathrm{mA}}}\,.$$

Ez az áram oszlik meg az R_6 ellenállással sorba kapcsolt blokk párhuzamos ágain (lásd a 5.2. ábrát). Az alsó ágban van az $R_\mathrm{c} = 195\,\mathrm{k\Omega}$ ellenállás, a felső ág eredő ellenállása pedig $54,476\,\mathrm{k\Omega}$, így a felső ágba jutó I_f áram erőssége:

$$I_\mathrm{f} = 0,2282\,\mathrm{mA}\,\frac{195}{195 + 54,476} = 0,1784\,\mathrm{mA}\,,$$

amely viszont megoszlik egyszer az R_1 és R_b ellenállásokon, így az R_1 ellenálláson folyó áram:

$$I_1 = 0,1784\,\mathrm{mA}\,\frac{130}{130 + 20} = \underline{\underline{0,1546\,\mathrm{mA}}}\,,$$

másrészt I_f megoszlik az R_2 és R_a ellenállásokon is, így az R_2 ellenálláson folyó áram:

$$I_2 = 0,1784\,\mathrm{mA}\,\frac{520}{520 + 40} = \underline{\underline{0,1657\,\mathrm{mA}}}\,.$$

Látható, hogy I_1, I_2 és I_6 áramértékekre a numerikus számolás hibája okozta eltérés mellett a korábbi módszerekkel számolt értékekkel megegyezőt kaptunk.

5.2.4. Az eredeti áramkörből számolhatjuk a többi ellenállás áramát is

A 5.4. ábrán látszik, hogy I_6 és I_1 különbségéből megkapható I_3:

$$I_3 = I_6 - I_1 = 0,2282 - 0,1546 = \underline{\underline{0,0736\,\mathrm{mA}}}\,.$$

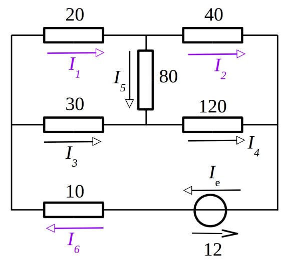
Hasonlóan az is leolvasható a 5.4. ábráról, hogy I_4 áram I_6 és I_2 különbsége:

$$I_4 = 0,2282 - 0,1657 = \underline{\underline{0,0625\,\mathrm{mA}}}\,.$$

Az I_5 áram kétféleképpen is számolható. A 5.4. ábrán a bejelölt áramirányok alapján:

$$I_5 = I_4 - I_3 = 0,0625 - 0,0736 = \underline{\underline{-0,0111\,\mathrm{mA}}}\,,$$

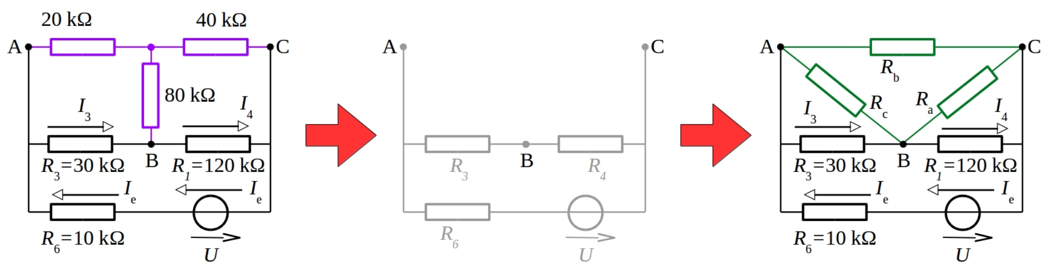
ami megegyezik a másik csomópotra felírható $I_5 = I_1 - I_2 = 0,1546 - 0,1657 = -0,0111\,\mathrm{mA}$ értékkel.



5.4. ábra. I_1, I_2 és I_6 ismeretében a többi áram is számolható

5.3. R_3 és R_4 áramának számolásához célszerű csillag-delta átalakítás

R_3 és R_4 ellenállások áramának, feszültségének meghatározásához az R_1, R_2 és R_5 ellenállások átalakítására van szükség (lásd a 5.5. ábrát).



5.5. ábra. Az R_1, R_2 és R_5 ellenállások csillag-delta átalakítása után a többi ellenálláson folyó áram ugyanaz marad, ha az új ellenállásokat a 5.1. alfejezet szerint számoljuk

5.3.1. Az átalakítással bevezetett ellenállásértékek számolása

A 5.1. alfejezetben leírtak szerint számolunk.

Először kiszámoljuk az átalakítás során segédeszközként használt R_Y értékét: az átalakításban szereplő ellenállásokból ($R_1 = 20\,\mathrm{k\Omega}$, $R_2 = 40\,\mathrm{k\Omega}$ és $R_5 = 80\,\mathrm{k\Omega}$) kell számolni (lásd a 5.5. ábrát):

$$R_\mathrm{Y} = \frac{1}{\frac{1}{R_\mathrm{A}} + \frac{1}{R_\mathrm{B}} + \frac{1}{R_\mathrm{C}}} = \frac{1}{\frac{1}{20} + \frac{1}{40} + \frac{1}{80}} = \frac{80}{4+2+1} = \frac{80}{7}\,\mathrm{k\Omega}\,. \tag{5.10}$$

Az R_a ellenállás a B és a C csúcsok között kapott helyet (lásd a 5.5. ábrát), így a B-be csatlakozó $80\,\mathrm{k\Omega}$-os és a C-be csatlakozó $40\,\mathrm{k\Omega}$-os ellenállásokkal kell számolni:

$$R_\mathrm{a} = \frac{80 \cdot 40}{80/7} = 280\,\mathrm{k\Omega}\,. \tag{5.11}$$

Hasonlóan, az R_b ellenállás az A és a C csúcsok között kapott helyet (lásd a 5.5. ábrát), így az A-ba csatlakozó $20\,\mathrm{k\Omega}$-os és a C-be csatlakozó $40\,\mathrm{k\Omega}$-os ellenállásokkal kell számolni:

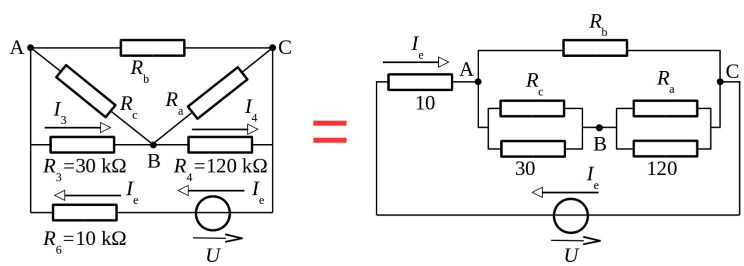
$$R_\mathrm{b} = \frac{20 \cdot 40}{80/7} = 70\,\mathrm{k\Omega}\,. \tag{5.12}$$

Hasonlóan, az R_c ellenállás az A és a B csúcsok között kapott helyet (lásd a 5.5. ábrát), így az A-ba csatlakozó 20 kΩ-os és a B-be csatlakozó 80 kΩ-os ellenállásokkal kell számolni:

$$R_\mathrm{c} = \frac{20 \cdot 80}{80/7} = 140\,\mathrm{k\Omega}\,. \tag{5.13}$$

5.3.2. Az eredőellenállás számolása

Az átalakítás után kialakult ármakört átrajzolhatjuk olyan formába is, amelyen nyilvánvaló, hogy az ellenállások hogyan vannak sorba vagy párhuzamosan kapcsolva (lásd a 5.6. ábrát). Az R_1 és R_b, illetve R_2 és R_a ellenállások párhuzamosan, eredő ellenállásuk sorba van kapcsolva, amellyel R_c van párhuzamosan kötve; ezek eredője pedig sorba van kötve R_6 ellenállással.



5.6. ábra. Az átalakított áramkörben az ellenállások eredője egyszerűen számolható

Az eredőellenállás:

$$R_\mathrm{e} = R_6 + R_\mathrm{b} \times (R_3 \times R_\mathrm{c} + R_4 \times R_\mathrm{a}) = 10 + 70 \times (30 \times 140 + 120 \times 280)\ ,$$

$$R_\mathrm{e} = 10 + 70 \times \left(\frac{30 \cdot 140}{30 + 140} + \frac{120 \cdot 280}{120 + 280}\right) = 10 + 70 \times (24,706 + 84,000)\,,$$

$$R_\mathrm{e} = 10 + 70 \times 108,706 = 10 + \frac{70 \cdot 108,706}{70 + 108,706} = 10 + 42,581 = 52,581\,\mathrm{k\Omega}\,. \tag{5.14}$$

5.3.3. R_3 és R_4 áramának számolása

Az eredő áram:

$$I_\mathrm{e} = \frac{U}{R_\mathrm{e}} = \frac{12\,\mathrm{V}}{52,581\,\mathrm{k\Omega}} = 0,2282\,\mathrm{mA}\,,$$

amivel egyenlő az R_6 ellenállás árama is:

$$I_6 = I_\mathrm{e} = \underline{\underline{0,2282\,\mathrm{mA}}}\,.$$

Ez az áram oszlik meg az R_6 ellenállással sorba kapcsolt blokk párhuzamos ágain (lásd a 5.6. ábrát). Az felső ágban van az $R_\mathrm{b} = 70\,\mathrm{k\Omega}$ ellenállás, az alsó ág eredő ellenállása pedig $108,706\,\mathrm{k\Omega}$, így az alsó ágba jutó I_a áram erőssége:

$$I_\mathrm{a} = 0,2282\,\mathrm{mA}\,\frac{70}{70 + 108,706} = 0,0894\,\mathrm{mA}\,,$$

amely viszont megoszlik egyszer az R_3 és R_c ellenállásokon, így az R_3 ellenálláson folyó áram:

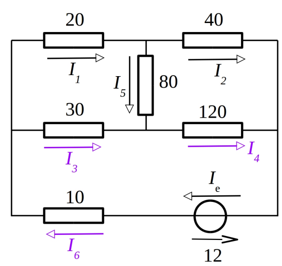
$$I_3 = 0,0894\,\mathrm{mA}\,\frac{140}{140 + 30} = \underline{\underline{0,0736\,\mathrm{mA}}}\,,$$

másrészt I_a megoszlik az R_4 és R_a ellenállásokon is, így az R_4 ellenálláson folyó áram:

$$I_4 = 0,0894\,\mathrm{mA}\,\frac{280}{280+120} = \underline{\underline{0,0626\,\mathrm{mA}}}\,.$$

Látható, hogy I_3, I_4 és I_6 áramértékekre a numerikus számolás hibája okozta eltérés mellett a korábbi módszerekkel számolt értékekkel megegyezőt kaptunk.

5.3.4. Az eredeti áramkörből számolhatjuk a többi ellenállás áramát is



5.7. ábra. I_3, I_4 és I_6 ismeretében a többi áram is számolható

A 5.7. ábrán látszik, hogy I_6 és I_3 különbségéből megkapható I_1:

$$I_1 = I_6 - I_3 = 0,2282 - 0,0736 = \underline{\underline{0,1546\,\mathrm{mA}}}\,.$$

Hasonlóan az is leolvasható a 5.7. ábráról, hogy I_2 áram I_6 és I_4 különbsége:

$$I_2 = 0,2282 - 0,0626 = \underline{\underline{0,1656\,\mathrm{mA}}}\,.$$

Az I_5 áram kétféleképpen is számolható. A 5.7. ábrán a bejelölt áramirányok alapján:

$$I_5 = I_4 - I_3 = 0,0625 - 0,0736 = \underline{\underline{-0,0111\,\mathrm{mA}}}\,,$$

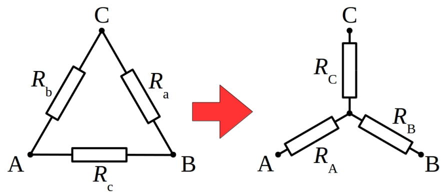
ami megegyezik a másik csomópotra felírható $I_5 = I_1 - I_2 = 0,1546 - 0,1657 = -0,0111\,\mathrm{mA}$ értékkel.

6. Delta-csillag átalakítással

6.1. Delta-csillag átalakítás általában

Vannak áramkörök, például az 1.1. ábrán adott áramkör, amelyben az ellenállások kölcsönös viszonya nem vezető vissza soros, vagy párhuzamos kapcsolatra. Ilyen esetben megfelelő egymással úgynevezett **delta-, vagy háromszög-kapcsolt ellenállás hármasok** megválasztásával átalakíthatjuk úgy a hálózatot, hogy annak az átalakításban részt nem vevő része ugyanúgy működik (ugyanaz a feszültsége, árama), mint az eredeti áramkör megfelelő része. Az átalakítás értelme pedig az, hogy a módosított áramkörben már az ellenállások kapcsolata értelmezhető soros-, párhuzamos-kapcsolások alapján – számolható az eredő ellenállás, meghatározható feszültség-, vagy áramosztással az áramöri elemek áramai, feszültségei.

A 6.1. ábrán jelölt delta alakzatot kell keresni az eredeti áramörben és az ábrán A, B és C-vel jelölt pontok jelzik a megtalált delta-alakzatnak az áramkör többi részéhez csatlakozó pontjait. Az átalakított, csillag-kapcsolás ellenállásait úgy határozták meg, hogy az áramkörbe az A, B és C



6.1. ábra. Delta-Csillag átalakítás

pontok közötti részt csillag-kapcsolássá átalakítva az átalakításban részt nem vevő része az áramkörnek ugyanúgy működjön, mint az eredeti áramkörben.

Az ellenállások indexelése a geometriában rajzolt háromszögek csúcsainak és oldalainak jelöléséhez igazodnak: nagy betűvel indexeljük a csúcsokhoz tartozó ellenállásokat (csillag-kapcsolásban), kisbetűvel indexeljük az oldalakhoz tartozó ellenállásokat (delta-kapcsolásban).

Az átalakítás képletei:

$$R_{\mathrm{A}} = \frac{R_{\mathrm{a}}\, R_{\mathrm{c}}}{R_{\mathrm{a}} + R_{\mathrm{b}} + R_{\mathrm{c}}}\,, \tag{6.1}$$

$$R_{\mathrm{B}} = \frac{R_{\mathrm{a}}\, R_{\mathrm{c}}}{R_{\mathrm{a}} + R_{\mathrm{b}} + R_{\mathrm{c}}}\,, \tag{6.2}$$

$$R_{\mathrm{C}} = \frac{R_{\mathrm{a}}\, R_{\mathrm{b}}}{R_{\mathrm{a}} + R_{\mathrm{b}} + R_{\mathrm{c}}}\,. \tag{6.3}$$

Ez a delta-csillag átalakítás inverze a (5.1)-(5.4) egyenletekkel definiált csillag-delta átalakításnak.

Az (6.1)-(6.3) képletek bemagolása helyett lényegüket geometriai úton is megjegyezhetjük. Amikor a csillag-kapcsolás egy csúcsához tartozó ellenállást (pl. R_{B}-t) akarjuk számolni, akkor ahhoz a csúcshoz csatlakozó két oldalhoz tartozó (példánkban R_{a} és R_{c}) ellenállásokat (lásd a 6.1. ábrát) kell összeszorozni és osztani a eredeti áramkör delta-kapcsolásában szereplő ellenállások összegével, amit hurokelleneállásnak is szoktak nevezni.

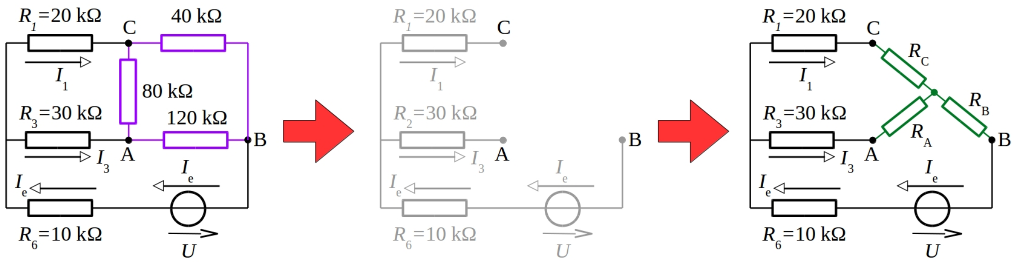
6.2. R_1 és R_3 áramának számolásához célszerű delta-csillag átalakítás

R_1 és R_3 ellenállások áramának, feszültségének meghatározásához az R_2, R_4 és R_5 ellenállások átalakítására van szükség. Az átalakítást úgy kell elvégezni (lásd a 6.2. ábrát), hogy

1. azonosítjuk azt a három pontot (A, B, C), amelyeken keresztül ez a három ellenállás az áramkör többi részéhez csatlakozik;
2. újrarajzoljuk az áramkört az átalakításra kiválasztott ellenállások nélkül, majd az A, B, C csúcsoktól egy közös pontig (csillag-pontig) berajzolunk egy-egy ellenállást (csillag-, vagy Y-kapcsolásba);
3. Az ellenállásoknak új nevet adunk – ez elkerülhetetlen, mert ezek ellenállásértékei nem egyeznek meg általában egyetlen az eredeti áramkörben szereplő ellenállás értékeivel. Javasolt elnevezés: az A csúcshoz csatlakozó legyen R_{A}, B-hez csatlakozó legyen R_{B} és C-hez csatlakozó legyen R_{C} (hasonlóan a háromszög csúcsainak elnevezéséhez).

6.2.1. Az átalakítással bevezetett ellenállásértékek számolása

A 6.1. alfejezetben leírtak szerint számolunk.



6.2. ábra. Az R_2, R_4 és R_5 ellenállások delta-csillag átalakítása után a többi ellenálláson folyó áram ugyanaz marad, ha az új ellenállásokat a 6.1. alfejezet szerint számoljuk

Az R_A ellenállást az A csúcshoz csatlakoztatjuk, amelyből eredetileg a $80\,\mathrm{k\Omega}$-os és a $120\,\mathrm{k\Omega}$-os ellenállások indulnak ki (lásd a 6.2. ábrát), így:

$$R_\mathrm{A} = \frac{120 \cdot 80}{40 + 80 + 120} = 40\,\mathrm{k\Omega}\,. \tag{6.4}$$

Az R_B ellenállást az B csúcshoz csatlakoztatjuk, amelyből eredetileg a $40\,\mathrm{k\Omega}$-os és a $120\,\mathrm{k\Omega}$-os ellenállások indulnak ki (lásd a 6.2. ábrát), így:

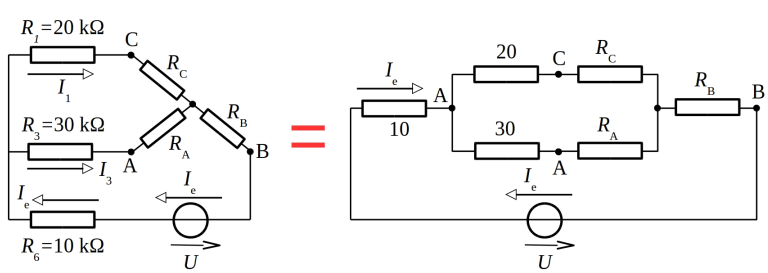
$$R_\mathrm{B} = \frac{120 \cdot 40}{40 + 80 + 120} = 20\,\mathrm{k\Omega}\,. \tag{6.5}$$

Az R_C ellenállást az C csúcshoz csatlakoztatjuk, amelyből eredetileg a $40\,\mathrm{k\Omega}$-os és a $80\,\mathrm{k\Omega}$-os ellenállások indulnak ki (lásd a 6.2. ábrát), így:

$$R_\mathrm{C} = \frac{40 \cdot 80}{40 + 80 + 120} = 13,333\,\mathrm{k\Omega}\,. \tag{6.6}$$

6.2.2. Az eredőellenállás számolása

Az átalakítás után kialakult ármakört átrajzolhatjuk olyan formába is, amelyen nyilvánvaló, hogy az ellenállások hogyan vannak sorba vagy párhuzamosan kapcsolva (lásd a 6.3. ábrát). Az R_1 és R_C, illetve R_3 és R_A ellenállások sorosan, eredő ellenállásuk párhuzamosan vannak kapcsolva, amelyek eredőjével R_c ésR_6 ellenállások vannak sorba kapcsolva.



6.3. ábra. Az átalakított áramkörben az ellenállások eredője egyszerűen számolható

Az eredőellenállás:

$$R_\mathrm{e} = R_6 + (R_1 + R_\mathrm{C}) \times (R_3 + R_\mathrm{A}) + R_\mathrm{B} = 10 + (20 + 13,333) \times (30 + 40) + 20\,,$$

$$R_{\mathrm{e}} = 30 + 33,333 \times 70 = 30 + \left(\frac{33,333 \cdot 70}{33,333 + 70}\right) = 30 + 22,581\,,$$

$$R_{\mathrm{e}} = 52,581\,\mathrm{k\Omega}\,. \tag{6.7}$$

6.2.3. R_1 és R_3 áramának számolása

Az eredő áram:

$$I_{\mathrm{e}} = \frac{U}{R_{\mathrm{e}}} = \frac{12\,\mathrm{V}}{52,581\,\mathrm{k\Omega}} = 0,2282\,\mathrm{mA}\,,$$

amivel egyenlő az R_6 ellenállás árama is:

$$I_6 = I_{\mathrm{e}} = \underline{\underline{0,2282\,\mathrm{mA}}}\,.$$

Ez az áram oszlik meg az R_6 ellenállással sorba kapcsolt blokk párhuzamos ágain (lásd a 6.3. ábrát). Az alsó ágban van az $R_3 + R_{\mathrm{A}} = 30 + 40 = 70\,\mathrm{k\Omega}$ ellenállás, a felső ágban pedig $R_1 + R_{\mathrm{C}} = 20 + 13,333 = 33,333\,\mathrm{k\Omega}$ ellenállás, így a felső ágba jutó I_{f} áram erőssége, amely egyben egynlő az R_1ellenálláson folyó I_1 árammal:

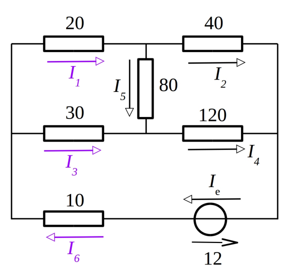
$$I_1 = I_{\mathrm{f}} = 0,2282\,\mathrm{mA}\,\frac{70}{70 + 33,333} = \underline{\underline{0,1546\,\mathrm{mA}}}\,,$$

az alsó ágba jutó I_{a} áram erőssége, amely egyben egynlő az R_3ellenálláson folyó I_3 árammal:

$$I_3 = I_{\mathrm{a}} = 0,2282\,\mathrm{mA}\,\frac{33,333}{70 + 33,333} = \underline{\underline{0,0736\,\mathrm{mA}}}\,.$$

Látható, hogy I_1, I_3 és I_6 áramértékekre a korábbi módszerekkel számolt értékekkel megegyezőt kaptunk.

6.2.4. Az eredeti áramkörből számolhatjuk a többi ellenállás áramát is



6.4. ábra. I_1, I_3 és I_6 ismeretében a többi áram is számolható

Mivel ismerjük R_6 ellenállás áramát, így azámolhatjuk feszültségét:

$$U_6 = R_6\,I_6 = 10\,\mathrm{k\Omega}\;0,2282\,\mathrm{mA} = 2,282\,\mathrm{V}\,,$$

hasonlóan számolhatjuk R_1 és R_3 feszültségeit:

$$U_1 = R_1\,I_1 = 20\,\mathrm{k\Omega}\;0,1546\,\mathrm{mA} = 3,092\,\mathrm{V}\,,$$

$$U_3 = R_3\,I_3 = 30\,\mathrm{k\Omega}\;0,0736\,\mathrm{mA} = 2,208\,\mathrm{V}\,,$$

A 6.4. ábráról leolvasható, hogy

$$U_2 = 12 - U_6 - U_1 = 12 - 2,282 - 3,092 = 6,626\,\mathrm{V}\,,$$
$$U_4 = 12 - U_6 - U_3 = 12 - 2,282 - 2,208 = 7,510\,\mathrm{V}\,.$$

Ezekből vizont Ohm-törvénye segítségével számolhatjuk R_2 és R_4 áramát:

$$I_2 = \frac{U_2}{R_2} = \frac{6,626\,\mathrm{V}}{40\,\mathrm{k\Omega}} = \underline{\underline{0,1657\,\mathrm{mA}}}\,,$$
$$I_4 = \frac{U_4}{R_4} = \frac{7,510\,\mathrm{V}}{120\,\mathrm{k\Omega}} = \underline{\underline{0,0626\,\mathrm{mA}}}\,.$$

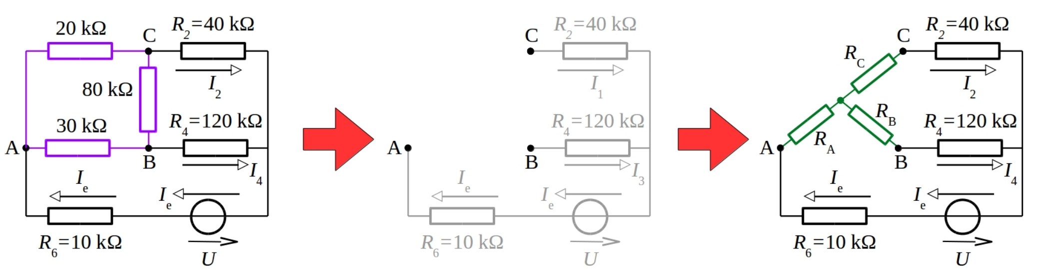
Az I_5 áram kétféleképpen is számolható. A 6.4. ábrán a bejelölt áramirányok alapján:

$$I_5 = I_4 - I_3 = 0,0626 - 0,0736 = \underline{\underline{-0,0110\,\mathrm{mA}}}\,,$$

ami megegyezik a másik csomópotra felírható $I_5 = I_1 - I_2 = 0,1546 - 0,1657 = -0,0111\,\mathrm{mA}$ értékkel (az utolsó jegyben való eltérés csupán a véges pontossággal végszett számolás numerikus hibája eredménye).

6.3. R_2 és R_4 áramának számolásához célszerű delta-csillag átalakítás

R_2 és R_4 ellenállások áramának, feszültségének meghatározásához az R_1, R_3 és R_5 ellenállások átalakítására van szükség.



6.5. ábra. Az R_1, R_3 és R_5 ellenállások delta-csillag átalakítása után a többi ellenálláson folyó áram ugyanaz marad, ha az új ellenállásokat a 6.1. alfejezet szerint számoljuk

6.3.1. Az átalakítással bevezetett ellenállásértékek számolása

A 6.1. alfejezetben leírtak szerint számolunk.

Az R_A ellenállást az A csúcshoz csatlakoztatjuk, amelyből eredetileg a $20\,\mathrm{k\Omega}$-os és a $30\,\mathrm{k\Omega}$-os ellenállások indulnak ki (lásd a 6.5. ábrát), így:

$$R_\mathrm{A} = \frac{20 \cdot 30}{20 + 30 + 80} = 4,615\,\mathrm{k\Omega}\,. \tag{6.8}$$

Az R_B ellenállást az B csúcshoz csatlakoztatjuk, amelyből eredetileg a $30\,\mathrm{k\Omega}$-os és a $80\,\mathrm{k\Omega}$-os ellenállások indulnak ki (lásd a 6.5. ábrát), így:

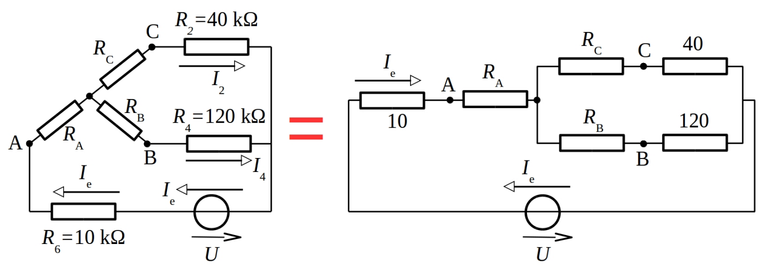
$$R_\mathrm{B} = \frac{30 \cdot 80}{20 + 30 + 80} = 18,462\,\mathrm{k\Omega}\,. \tag{6.9}$$

Az R_C ellenállást az C csúcshoz csatlakoztatjuk, amelyből eredetileg a $20\,\mathrm{k\Omega}$-os és a $80\,\mathrm{k\Omega}$-os ellenállások indulnak ki (lásd a 6.5. ábrát), így:

$$R_\mathrm{C} = \frac{20 \cdot 80}{20 + 30 + 80} = 12,308\,\mathrm{k\Omega}\,. \tag{6.10}$$

6.3.2. Az eredőellenállás számolása

Az átalakítás után kialakult ármakört átrajzolhatjuk olyan formába is, amelyen nyilvánvaló, hogy az ellenállások hogyan vannak sorba vagy párhuzamosan kapcsolva (lásd a 6.6. ábrát). Az R_1 és R_C, illetve R_3 és R_A ellenállások sorosan, eredő ellenállásuk párhuzamosan vannak kapcsolva, amelyek eredőjével R_c ésR_6 ellenállások vannak sorba kapcsolva.



6.6. ábra. Az átalakított áramkörben az ellenállások eredője egyszerűen számolható

Az eredőellenállás:

$$R_\mathrm{e} = R_6 + R_\mathrm{A} + (R_\mathrm{C} + R_2) \times (R_\mathrm{B} + R_4) = 10 + 4,615 + (12,308 + 40) \times (18,462 + 120) \ ,$$

$$R_\mathrm{e} = 14,615 + 52,308 \times 138,462 = 14,615 + \left(\frac{52,308 \cdot 138,462}{52,308 + 138,462}\right) = 14,615 + 37,966 \ ,$$

$$R_\mathrm{e} = 52,581\,\mathrm{k\Omega}\ . \tag{6.11}$$

6.3.3. R_2 és R_4 áramának számolása

Az eredő áram:

$$I_\mathrm{e} = \frac{U}{R_\mathrm{e}} = \frac{12\,\mathrm{V}}{52,581\,\mathrm{k\Omega}} = 0,2282\,\mathrm{mA}\,,$$

amivel egyenlő az R_6 ellenállás árama is:

$$I_6 = I_\mathrm{e} = \underline{\underline{0,2282\,\mathrm{mA}}}\,.$$

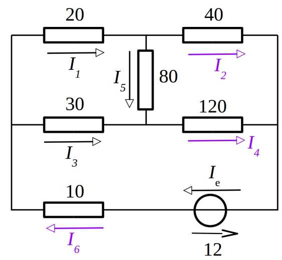
Ez az áram oszlik meg az R_6 ellenállással sorba kapcsolt blokk párhuzamos ágain (lásd a 6.6. ábrát). Az alsó ágban van az $R_\mathrm{B} + R_4 = 18,462 + 120 = 138,462\,\mathrm{k\Omega}$ ellenállás, a felső ágban pedig $R_\mathrm{C} + R_2 = 12,308 + 40 = 52,308\,\mathrm{k\Omega}$ ellenállás, így a felső ágba jutó I_f áram erőssége, amely egyben egynlő az R_2ellenálláson folyó I_2 árammal:

$$I_2 = I_\mathrm{f} = 0,2282\,\mathrm{mA}\,\frac{138,462}{138,462 + 52,308} = \underline{\underline{0,1656\,mA}}\,,$$

az alsó ágba jutó I_a áram erőssége, amely egyben egynlő az R_4 ellenálláson folyó I_4 árammal:

$$I_4 = I_\mathrm{a} = 0,2282\,\mathrm{mA}\,\frac{52,308}{138,462 + 52,308} = \underline{\underline{0,0626\,\mathrm{mA}}}\,.$$

Látható, hogy I_2, I_4 és I_6 áramértékekre a korábbi módszerekkel számolt értékekkel megegyezőt kaptunk.



6.7. ábra. I_2, I_4 és I_6 ismeretében a többi áram is számolható

6.3.4. Az eredeti áramkörből számolhatjuk a többi ellenállás áramát is

Mivel ismerjük R_6 ellenállás áramát, így azámolhatjuk feszültségét:

$$U_6 = R_6\, I_6 = 10\,\mathrm{k\Omega}\; 0,2282\,\mathrm{mA} = 2,282\,\mathrm{V}\,,$$

hasonlóan számolhatjuk R_2 és R_4 feszültségeit:

$$U_2 = R_2\, I_2 = 40\,\mathrm{k\Omega}\; 0,1656\,\mathrm{mA} = 6,624\,\mathrm{V}\,,$$

$$U_4 = R_4\, I_4 = 120\,\mathrm{k\Omega}\; 0,0626\,\mathrm{mA} = 7,512\,\mathrm{V}\,,$$

A 6.7. ábráról leolvasható, hogy

$$U_1 = 12 - U_6 - U_2 = 12 - 2,282 - 6,624 = 3,094\,\mathrm{V}\,,$$

$$U_3 = 12 - U_6 - U_4 = 12 - 2,282 - 7,512 = 2,206\,\mathrm{V}\,.$$

Ezekből vizont Ohm-törvénye segítségével számolhatjuk R_1 és R_3 áramát:

$$I_1 = \frac{U_1}{R_1} = \frac{3,094\,\mathrm{V}}{20\,\mathrm{k\Omega}} = \underline{\underline{0,1547\,\mathrm{mA}}}\,,$$

$$I_3 = \frac{U_3}{R_3} = \frac{2,206\,\mathrm{V}}{30\,\mathrm{k\Omega}} = \underline{\underline{0,0735\,\mathrm{mA}}}\,.$$

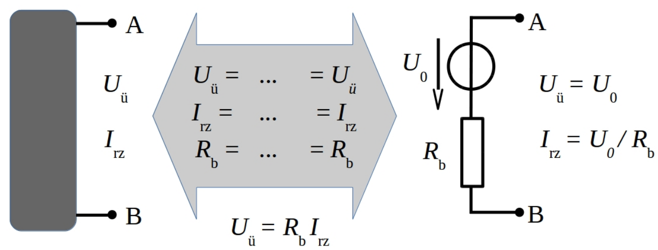
Az I_5 áram kétféleképpen is számolható. A 6.7. ábrán a bejelölt áramirányok alapján:

$$I_5 = I_4 - I_3 = 0,0626 - 0,0735 = \underline{\underline{-0,0111\,\mathrm{mA}}}\,,$$

ami megegyezik a másik csomópotra felírható $I_5 = I_1 - I_2 = 0,1547 - 0,1656 = -0,0109\,\mathrm{mA}$ értékkel (az utolsó jegyben való eltérés csupán a véges pontossággal végszett számolás numerikus hibája eredménye).

7. Thevenin-tételével

A Thevenin-tétel alkalmazása során jellemzően egy-egy ellenállás áramát lehet számolni. Ebben a fejezetben a Thevenin-tétel alkalmazásának általános leírása után csupán egy ellenállás, az R_5 ellenálláson folyó áramot határozzuk meg.



7.1. ábra. Egy akármelyen áramkör kétpólusa (két elektromos kivezetés mögött álló áramkör) helyettesíthető egy nem ideális (valóságos) feszültséggenerátorral

7.1. Thevenin tétele

Tétel: Tetszőleges áramkör bármely kétpólusa helyettesíthető egy valóságos (nem ideális) **feszültséggenerátorral**.

A helyettesíthetőség azt jelenti, hogy minden áramkörre kapcsolva az eredeti és a helyettesített ugyanúgy viselkedik – ugyanaz a kapocsfeszültsége, ugyanaz a rajta átfolyó áram is (Ilyen egyszerű formában ez csak lineáris áramköri elemekből felépülő áramkörökre teljesül. Általános esetben R_b nemlineáris: értéke függ a terheléstől.).

A helyettesítő feszültséggenerátor meghatározása annak két paraméterének (U_0 és R_b) meghatározásával egyenértékű. Ezt a két paramétert két munkapont (működési üzemállapot) segítségével kaphatjuk meg. Számolás esetén **a legegyszerűbb az üresjárást és a rövidzárást választani**.

Üresjárás azt jelenti, hogy a kétpólus kapcsaira végtelen nagy ellenállást, azaz szakadást (nem folyhat rajta áram) kapcsolunk. Üresjárás üzemállapotában az áramkör kapocsfeszültségét **üresjárási feszültség**nek ($U_ü$) nevezzük.

Rövidzárás azt jelenti, hogy a kétpólus kapcsait nulla ellenállású vezetékkel kötjük össze (rövidre zárjuk). Rövidzárási üzemállapotban az áramkörön átfolyó áramot **rövidzársi áram**nak (I_{rz}) nevezzük.

A helyettesítő generátortól elvárhatjuk, hogy **a választott két munkapontban is ugyanúgy viselkedjen**: üresjárásban ugyanaz legyen a kapocsfeszültségük, rövidzárásban ugyanaz legyen az áramuk is.

A helyettesítő feszültséggenerátor meghatározása érdekében ezért

- a tetszőleges kétpólusnak meghatározzuk az $U_ü$ üresjárási fesültségét és I_{rz} rövidzárási áramát,
- majd olyan feszültséggenerátort keresünk, amelynek $U_ü$ az üresjárási feszültsége és I_{rz} a rövidzárási árama:

$$U_0 = U_ü \quad , \qquad R_b = \frac{U_ü}{I_{rz}} \, . \tag{7.1}$$

Az R_b belső ellenállást az eredeti áramkörben az A-B pontok közötti ellenállásként is lehet számolni úgy, hogy az áramkörből a generátorokat elhagyjuk.

Ezek után a kapott feszültséggenerátor tetszőleges R_k terhelőellenállása esetén a kapcsok között folyó I_k áram, illetve a kapcsok között eső U_k feszültség:

$$I_k = \frac{U_0}{R_b + R_k} \quad , \qquad U_k = \frac{U_0 \, R_k}{R_b + R_k} \, . \tag{7.2}$$

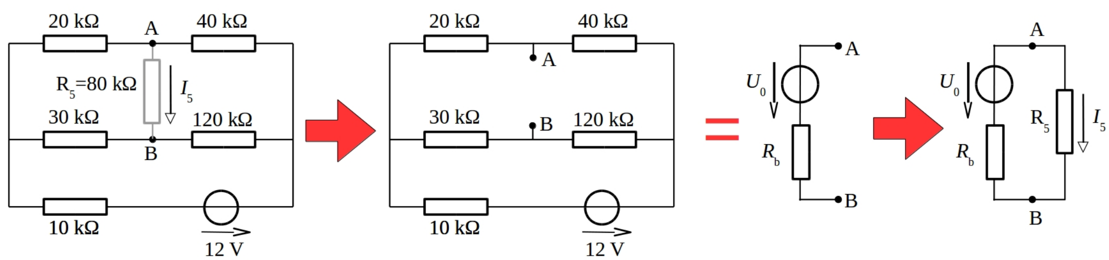
7.2. Az R_5 ellenállás áramának meghatározása

Ha az R_5 ellenálláson folyó I_5 áramra vagyunk kíváncsiak (lásd a 7.2. ábrát), akkor

1. kivesszük az R_5 ellenállást az áramkörből,

2. a kivétel után maradt két csatlakozási pont (két pólus), mint kivezetésre helyettesítjük a megmaradt áramkört egy nem ideális feszültséggenerátorral,

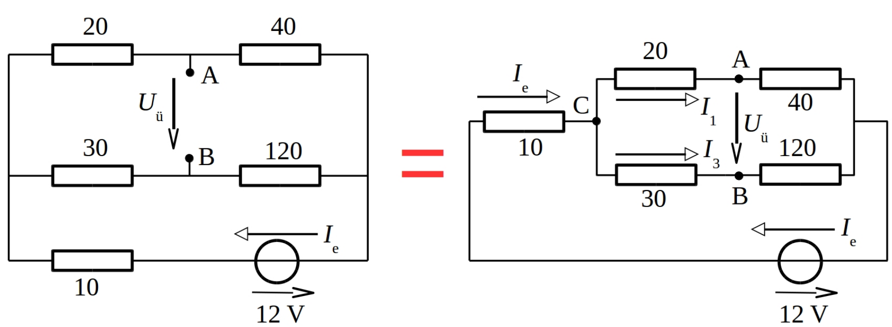
3. majd kapott helyettesítő generátorra rákapcsoljuk az R_5 ellenállást, amelyen átfolyó áram I_5 erősséget és a rajta eső U_5 feszültséget a (7.2) összefüggésekkel analóg összefüggésekből kapjuk:
$$I_5 = \frac{U_0}{R_\mathrm{b} + R_5} \quad , \qquad U_5 = I_5\, R_5 = \frac{U_0\, R_5}{R_\mathrm{b} + R_5} \, . \tag{7.3}$$
Az így kapott értékek az eredeti áramkörben az R_5 ellenállásra helyes érékek, hiszen a helyettesítő generátor egyenértékű az eredeti áramkörből R_5 ellenállás kivételével nyert kétpólussal, így a végén gyakorlatilag az elején meglévő helyére visszaraktuk az ellenállást.



7.2. ábra. A kivett ellenállás után maradt kétpólust helyettesítjük egy nem ideális feszültséggenerátorral, majd arra visszakapcsolva az ellenállást megkapjuk az eredeti áramkörben rajta folyó áram erősségét

7.2.1. Az üresjárási feszültség számolása

Ebben az alfejezetben minden változó, így R_e, I_e, I_1, I_3, U_1, U_3 csupán a 7.3. ábrán adott áramkörre vonatkoznak, csupán $U_\text{ü}$ üresjárási feszültséget fogjuk ezen alfejezeten kívül is használni.



7.3. ábra. Az R_5 eltávolítása után nyert áramkör kiértékelhető a soros- és a párhuzamos kapcsolás figyelembevételével

A 7.3. ábra alapján az R_e eredőellenállás értéke:
$$R_\mathrm{e} = 10 + (20 + 40) \times (30 + 120) = 10 + \frac{60 \cdot 150}{60 + 150} = 10 + 42,857 = 52,857\,\mathrm{k\Omega} \, .$$

Az I_e eredő áram értéke:

$$I_\mathrm{e} = \frac{12\,\mathrm{V}}{52,857\,\mathrm{k\Omega}} = 0,2270\,\mathrm{mA}\ ,$$

ami a párhuzamos kapcsolás alsó $(30 + 120 = 150\,\mathrm{k\Omega})$ és felső $(20 + 40 = 60\,\mathrm{k\Omega})$ ágán kettő részre oszlik:

$$I_1 = I_\mathrm{e}\,\frac{150}{150+60} = 0,1621\,\mathrm{mA}\ , \quad I_3 = I_\mathrm{e} - I_1 = 0,0649\,\mathrm{mA}\ .$$

Az R_1, illetve R_3 ellenállásokon eső feszültségek:

$$U_1 = R_1\,I_1 = 20 \cdot 0,1621 = 3,242\,V\ , \quad U_3 = R_3\,I_3 = 30 \cdot 0,0649 = 1,947\,\mathrm{V}\ .$$

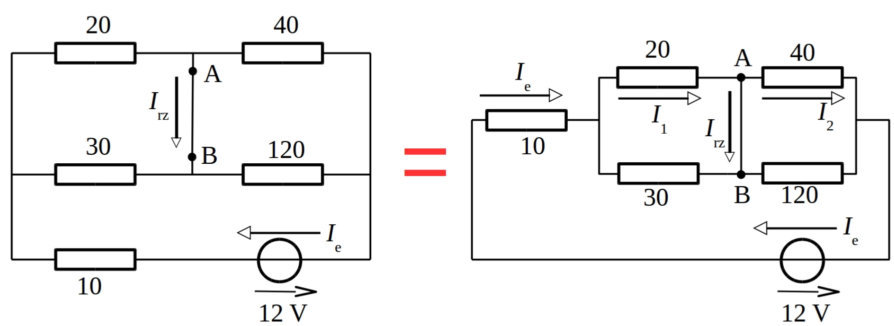
Ezeket a feszültségeket potenciáloknak a ellentetjét is tekinthetjük, amelyek a 7.3. ábra C-pontja mint referenciaponthoz képest adja az A- illetve a B pontok potenciálját ($U_\mathrm{A} = -U_1$ és $U_\mathrm{B} = -U_2$), ennek segítségével:

$$U_\mathrm{ü} = U_\mathrm{AB} = U_\mathrm{A} - U_\mathrm{B} = U_2 - U_1 = 1,947 - 3,242 = \underline{-1,295\,\mathrm{V}}\ .$$

Azaz a B pont van nagyobb potenciálon, mint az A pont.

7.2.2. A rövidzárási áram számolása

Ebben az alfejezetben minden változó, így R_e, I_e, I_1, I_2 csupán a 7.4. ábrán adott áramkörre vonatkoznak, csupán I_rz rövidzárási áramot fogjuk ezen alfejezeten kívü is használni.



7.4. ábra. Az R_5 eltávolítása után nyert áramkör kétpólusa rövidzárásával kapott ármakör kiértékelhető a soros- és a párhuzamos kapcsolás figyelembevételével

A 7.4. ábra alapján az R_e eredőellenállás értéke:

$$R_\mathrm{e} = 10 + 20 \times 30 + 40 \times 120 = 10 + \frac{20 \cdot 30}{20+30} + \frac{40 \cdot 120}{40+120} = 10 + 12 + 30 = 52\,\mathrm{k\Omega}\ .$$

Az I_e eredő áram értéke:

$$I_\mathrm{e} = \frac{12\,\mathrm{V}}{52\,\mathrm{k\Omega}} = 0,2308\,\mathrm{mA}\ ,$$

ami a $20\,\mathrm{k\Omega}$-os és a $30\,\mathrm{k\Omega}$-os ellenállások párhuzamos kapcsolása alsó és felső ágán kettéoszlik:

$$I_1 = I_\mathrm{e}\,\frac{30}{30+20} = 0,1385\,\mathrm{mA}\ .$$

Az eredő áram szintén kettéoszlik a $40\,\mathrm{k\Omega}$-os és a $120\,\mathrm{k\Omega}$-os ellenállások párhuzamos kapcsolása alsó és felső ágán:

$$I_2 = I_\mathrm{e}\,\frac{120}{120+40} = 0,1731\,\mathrm{mA}\ .$$

A B pontra érvényes csomóponti egyeletből:

$$I_{\mathrm{rz}} = I_1 - I_2 = 0,1385 - 0,1731 = \underline{-0,0346\,\mathrm{mA}}\,.$$

Az I_{rz} negatív előjele azt jelenti, hogy A és B pontok rövidzárása esetén áram nem A-tól B-ig, hanem fordítva folyik.

7.2.3. A helyettesítő generátor paramétereinek számolása

A konkrét probléma eredeti árakörének bonyolultságától függ az előző két alfejezetnek megfelelő tevékenység nehézsége, bonyolultsága. Ha viszont ismert $U_{\mathrm{ü}}$ és I_{rz} értéke, akkor csak a (7.1) összefüggéseket kell alkalmazni:

$$U_0 = U_{\mathrm{ü}} = -1,295\,\mathrm{V} \quad , \qquad R_{\mathrm{b}} = \frac{U_{\mathrm{ü}}}{I_{\mathrm{rz}}} = \frac{-1,295\,\mathrm{V}}{-0,0346\,\mathrm{mA}} = 37,428\,\mathrm{k\Omega}\,.$$

7.2.4. Az I_5 áram számolása

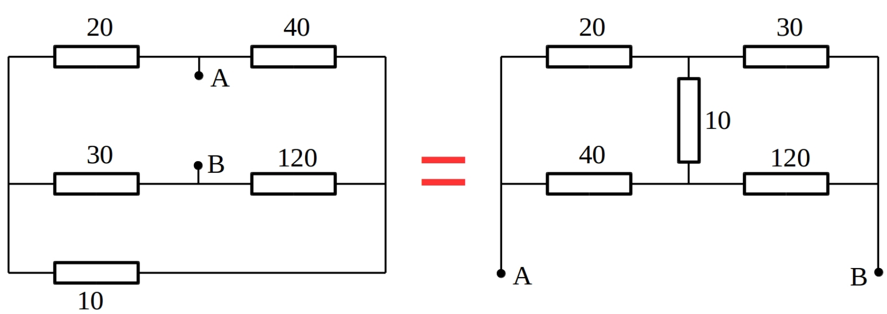
Az R_5 ellenálláson folyó I_5 áram a helyettesítő feszültséggenerátorra kapcsolva ($R_{\mathrm{k}} = R_5$, lásd a (7.2) összefüggéseket), ami megegyezik az eredeti áramkörben rajta folyó áram erősségével:

$$I_5 = \frac{U_0}{R_{\mathrm{b}} + R_5} = \frac{-1,295\,\mathrm{V}}{37,428\,\mathrm{k\Omega} + 80\,\mathrm{k\Omega}} = \underline{\underline{-0,110\,\mathrm{mA}}}\,.$$

A kapott áramérték megegyezik az 2-6. fejezetekben kapott értékkel.

7.2.5. Megjegyzés a helyettesítő generátor belső ellenállásának alternatív meghatározásához

Elvileg példánkban is lenne egy alternatív út a helyettesítő generátor R_{b} belső ellenállásának meghatározására – azonban ez az út jelen esetben bonyolult. A belső ellenállást most úgy is megkaphatjuk, hogy az R_5 ellenállás kivétele után kapott kétpólusból elhagyjuk a feszültségenerátort (rövödzárral helyettesítjük), majd meghatározzuk az így kapott ellenálláshálózat eredő ellenállását a két pólus irányából meghatározva. Ehhez érdemes az ellenálláshálózatot átrajzolni, hogy annak szerkezete jobban értelmezhető legyen (lásd a 7.5. ábrát).



7.5. ábra. Az A és B pólusok felől nézve az ellenálláshálózat eredő ellenállásának meghatározásához érdemes egyenértékűen átrajzolni az ellenálláshálózatot

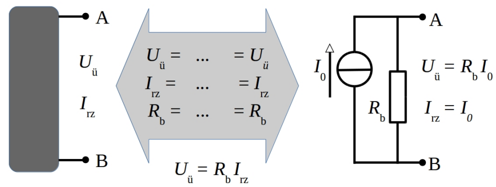
A 7.5. ábráról jól látszik, hogy az ellenálláshálózat szintén hídáramkör, így ellenállásának meghatározása nem egyszerűbb, mint az ereredi 1.2. ábrán adott áramkör eredő ellenállásának meghatározása, így most nem érdemes ezzel foglalkozni – előnyösebb a 7.2.1-7.2.3. alfejezetekben részletezett utat követni.

8. Norton-tételével

A Norton-tétel alkalmazása során jellemzően egy-egy ellenállás áramát lehet számolni. Ebben a fejezetben a Norton-tétel alkalmazásának általános leírása után csupán egy ellenállás, az R_1 ellenálláson folyó áramot határozzuk meg.

8.1. Norton tétele

Tétel: Tetszőleges áramkör bármely kétpólusa helyettesíthető egy valóságos (nem ideális) **áramgenerátorral**.



8.1. ábra. Egy akármelyen áramkör kétpólusa (két elektromos kivezetés mögött álló áramkör) helyettesíthető egy nem ideális (valóságos) áramgenerátorral

A helyettesíthetőség azt jelenti, hogy minden áramkörre kapcsolva az eredeti és a helyettesített ugyanúgy viselkedik – ugyanaz a kapocsfeszültsége, ugyanaz a rajta átfolyó áram is (Ilyen egyszerű formában ez csak lineáris áramköri elemekből felépülő áramkörökre teljesül. Általános esetben R_b nemlineáris: értéke függ a terheléstől.).

A helyettesítő áramgenerátor meghatározása annak két paraméterének (I_0 és R_b) meghatározásával egyenértékű. Ezt a két paramétert két munkapont (működési üzemállapot) segítségével kaphatjuk meg. Számolás esetén **a legegyszerűbb az üresjárást és a rövidzárást választani**.

Üresjárás azt jelenti, hogy a kétpólus kapcsaira végtelen nagy ellenállást, azaz szakadást (nem folyhat rajta áram) kapcsolunk. Üresjárás üzemállapotában az áramkör kapocsfeszültségét **üresjárási feszültség**nek ($U_\mathrm{ü}$) nevezzük.

Rövidzárás azt jelenti, hogy a kétpólus kapcsait nulla ellenállású vezetékkel kötjük össze (rövidre zárjuk). Rövidzárási üzemállapotban az áramkörön átfolyó áramot **rövidzársi áram**nak (I_rz) nevezzük.

A helyettesítő generátortól elvárhatjuk, hogy **a választott két munkapontban is ugyanúgy viselkedjen**: üresjárásban ugyanaz legyen a kapocsfeszültségük, rövidzárásban ugyanaz legyen az áramuk is.

A helyettesítő áramgenerátor meghatározása érdekében ezért

- a tetszőleges kétpólusnak meghatározzuk az $U_\mathrm{ü}$ üresjárási fesültségét és I_rz rövidzárási áramát,
- majd olyan áramgenerátort keresünk, amelynek $U_\mathrm{ü}$ az üresjárási feszültsége és I_rz a rövidzárási árama:

$$I_0 = I_\mathrm{rz} \quad , \qquad R_\mathrm{b} = \frac{U_\mathrm{ü}}{I_\mathrm{rz}} \,. \tag{8.1}$$

Az R_b belső ellenállást az eredeti áramkörben az A-B pontok közötti ellenállásként is lehet számolni úgy, hogy az áramkörből a generátorokat elhagyjuk.

Ezek után a kapott áramgenerátor tetszőleges R_k terhelőellenállása esetén a kapcsok között folyó I_k áram, illetve a kapcsok között eső U_k feszültség:

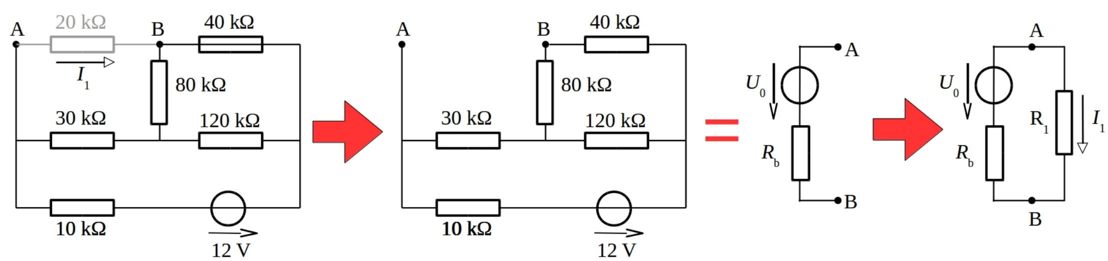
$$I_\mathrm{k} = \frac{I_0\,R_\mathrm{b}}{R_\mathrm{b}+R_\mathrm{k}} \quad , \qquad U_\mathrm{k} = \frac{I_0\,R_\mathrm{b}\,R_\mathrm{k}}{R_\mathrm{b}+R_\mathrm{k}} \,. \tag{8.2}$$

A Norton-tétel a Thevenin tétellel nagyon szoros, közeli kapcsolatban van. A számolás eredményessége miatt nem is lenne külön tanulni mind a két módszert, hiszen a számolás menete csupán a végén a (7.1) és a (8.1) összefüggések alkalmazásában különbözik. A két helyettesítőkép lényege éppen a szemléletes kép: két pólusú áramkörök helyettesíthetők áramgenerátorral, de feszültséggenerátorral is, méghozzá ugyanakkora R_b belső ellenállással. Éppen ez utóbbi alapján van értelme egy kétpólust inkább áramgenerátorral, vagy inkább feszültséggenerátorral helyettesíteni egy adott R_k terhelőellenállás esetén:

- **ha $R_\mathrm{b} < R_\mathrm{k}$, akkor inkább feszültséggenerátor**ról érdemes beszélni, mert ekkor inkább a feszültség változik kevésbé, mint az áram a terhelés megváltoztatása hatására;
- **ha $R_\mathrm{b} > R_\mathrm{k}$, akkor inkább áramgenerátor**ról érdemes beszélni, mert ekkor inkább az áram változik kevésbé, mint a feszültség a terhelés megváltoztatása hatására.

8.2. Az R_1 ellenállás áramának meghatározása

A Norton-tétel alkalmazása keretében a 1.2. ábrán adott ármakörben kivesszük az R_1 ellenállást, és a maradék kétpólust helyettesítjük egy nem ideális áramgenerátorral (lásd a 8.2. ábrát).



8.2. ábra. A kivett ellenállás után maradt kétpólust helyettesítjük egy nem ideális feszültséggenerátorral, majd arra visszakapcsolva az ellenállást megkapjuk az eredeti áramkörben rajta folyó áram erősségét

8.2.1. Az üresjárási feszültség számolása

Ebben az alfejezetben minden változó, így R_e, U_3, U_5, U_p, csupán a 8.3. ábrán adott áramkörre vonatkoznak, csupán $U_\mathrm{ü}$ üresjárási feszültséget fogjuk ezen alfejezeten kívü is használni.

A 8.3. ábráról látszik, hogy az $U_\mathrm{ü}$ üresjárási feszültséget adó A és B pontok közötti feszültség egyenlő az R_3 és az R_5 ellenállásokon eső feszültség összegével:

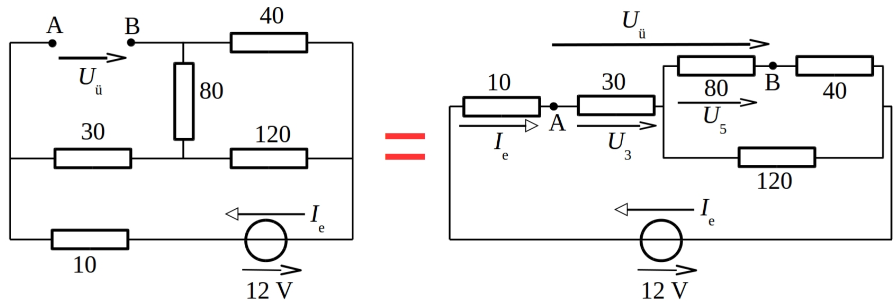
$$U_\mathrm{ü} = U_3 + U_5\,, \tag{8.3}$$

amely feszültségeket a feszültségosztó képletekkel határozzuk meg.

A 12 V a sorosan kapcsolt 10 kΩ-os, a 30 kΩ-os és a párhuzamosan kapcsolt blokkon oszlik meg. A feszülstégosztóképlet alaklmazásához a minket érdeklő 30 kΩ-os ellenállást egy, a maradék ellenállásokat egy másik blokkba soroljuk és ezekre írjuk fel az osztóképletet:

$$U_3 = 12\,\mathrm{V}\,\frac{30}{30 + (10 + (80 + 40) \times 120)} = 12\,\mathrm{V}\,\frac{30}{30 + 70} = 3,6\,\mathrm{V}\,. \tag{8.4}$$

Az U_5 számolása egy feszültségosztó képlettel nem határozható meg, mert R_5 a kapcsolásban nincs soros kapcsolásban a többi ellenállással, hogy rajta egyszerűen osztódjon a 12 V-os feszültség. A



8.3. ábra. Az R_1 eltávolítása után nyert áramkörben az A és B pontok közötti feszültség egyenlő a kiértékelhető a soros- és a párhuzamos kapcsolás figyelembevételével

párhuzamos kapcsoláson eső U_p feszültség viszont számolható feszültségosztó képlettel:

$$U_\mathrm{p} = 12\,\mathrm{V}\,\frac{(80+40)\times 120}{(80+40)\times 120 + (10+30)} = 12\,\mathrm{V}\,\frac{60}{60+40} = 7,2\,\mathrm{V}\,,$$

amely feszültség viszont megoszlik az egymással soros kapcsolásban levő $80\,\mathrm{k\Omega}$-os és $40\,\mathrm{k\Omega}$-os ellenállásokon:

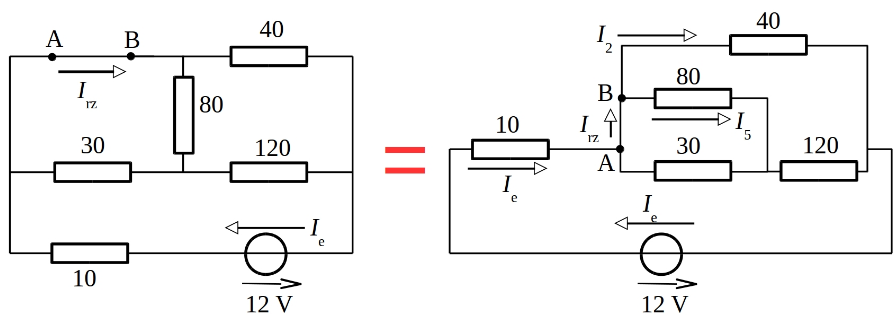
$$U_5 = 7,2\,\mathrm{V}\,\frac{80}{80+40} = 4,8\,\mathrm{V}\,. \tag{8.5}$$

A ()-() egyenletek eredményeképpen kapjuk:

$$U_ü = 3,6 + 4,8 = \underline{8,4\,\mathrm{V}}\,. \tag{8.6}$$

8.2.2. A rövidzárási áram számolása

Ebben az alfejezetben minden változó, így R_e, I_e, I_1, I_2, I_a csupán a 8.4. ábrán adott áramkörre vonatkoznak, csupán I_rz rövidzárási áramot fogjuk ezen alfejezeten kívül is használni.



8.4. ábra. Az R_1 eltávolítása után nyert áramkör kétpólusa rövidzárásával kapott ármakör kiértékelhető a soros- és a párhuzamos kapcsolás figyelembevételével

A 8.4. ábráról leolvasható, hogy az I_rz rövidzárási áram értéke az R_2 és az R_5 ellenállásokon folyó áramok összege:

$$I_\mathrm{rz} = I_2 + I_5\,. \tag{8.7}$$

Az I_2 és I_5 áramok értékeit áramosztó képletekkel fogom számolni.
A 8.4. ábra alapján az R_e eredőellenállás értéke:

$$R_\mathrm{e} = 10 + (30 \times 80 + 120) \times 40 = 10 + \left(\frac{30 \cdot 80}{30+80} + 120\right) \times 40 \; ,$$

$$R_\mathrm{e} = 10 + (21,818 + 120) \times 40 = 10 + 141,818 \times 40 = 10 + \frac{141,818 \cdot 40}{141,818 + 40} \; ,$$

$$R_\mathrm{e} = 10 + 31,200 = 41,200\,\mathrm{k\Omega} \; .$$

Az I_e eredő áram értéke:

$$I_\mathrm{e} = \frac{12\,\mathrm{V}}{41,200\,\mathrm{k\Omega}} = 0,2913\,\mathrm{mA} \; ,$$

ami megoszlik két párhuamosan kapcsolt ágon, amelyekből az alsóban még két párhuzamos ág is van. I_2 számolása:

$$I_2 = I_\mathrm{e}\,\frac{80 \times 30 + 120}{80 \times 30 + 120 + 40} = 0,2913\,\mathrm{mA}\,\frac{141,818}{141,818 + 40} = 0,2272\,\mathrm{mA} \; . \tag{8.8}$$

Az alsó ágra $I_\mathrm{a} = I_\mathrm{e} - I_2 = 0,0641\,\mathrm{mA}$ áram jut, amely még megoszlik a párhuzamosan kapcsolt $80\,\mathrm{k\Omega}$-os és a $30\,\mathrm{k\Omega}$-os ellenállásokon (lásd a 8.4. ábrát):

$$I_5 = I_\mathrm{a}\,\frac{30}{30+80} = 0,0641\,\mathrm{mA}\,\frac{30}{110} = 0,0175\,\mathrm{mA} \; . \tag{8.9}$$

A (8.7)-(8.9) egyenletek alapján:

$$I_\mathrm{rz} = I_2 + I_5 = 0,2272 + 0,0175 = \underline{0,2447\,\mathrm{mA}} \; .$$

8.2.3. A helyettesítő generátor paramétereinek számolása

A konkrét probléma eredeti árakörének bonyolultságától függ az előző két alfejezetnek megfelelő tevékenység nehézsége, bonyolultsága. Ha viszont ismert $U_\mathrm{ü}$ és I_rz értéke, akkor csak a (8.1) összefüggéseket kell alkalmazni:

$$I_0 = I_\mathrm{rz} = 0,2447\,\mathrm{mA} \quad , \qquad R_\mathrm{b} = \frac{U_\mathrm{ü}}{I_\mathrm{rz}} = \frac{8,4\,\mathrm{V}}{0,2447\,\mathrm{mA}} = 34,328\,\mathrm{k\Omega} \; .$$

8.2.4. Az I_1 áram számolása

Az R_1 ellenálláson folyó I_1 áram a helyettesítő áramgenerátorra kapcsolva ($R_\mathrm{k} = R_1$, lásd a (8.2) összefüggéseket), ami megegyezik az eredeti áramkörben rajta folyó áram erősségével (lásd (8.2) képleteket):

$$I_1 = \frac{R_\mathrm{b}\,I_0}{R_\mathrm{b} + R_5} = \frac{34,328\,\mathrm{k\Omega} \cdot 0,2447\,\mathrm{mA}}{34,328\,\mathrm{k\Omega} + 20\,\mathrm{k\Omega}} = \underline{\underline{0,1546\,\mathrm{mA}}} \; .$$

0,1546

A kapott áramérték megegyezik az 2-6. fejezetekben kapott értékkel.