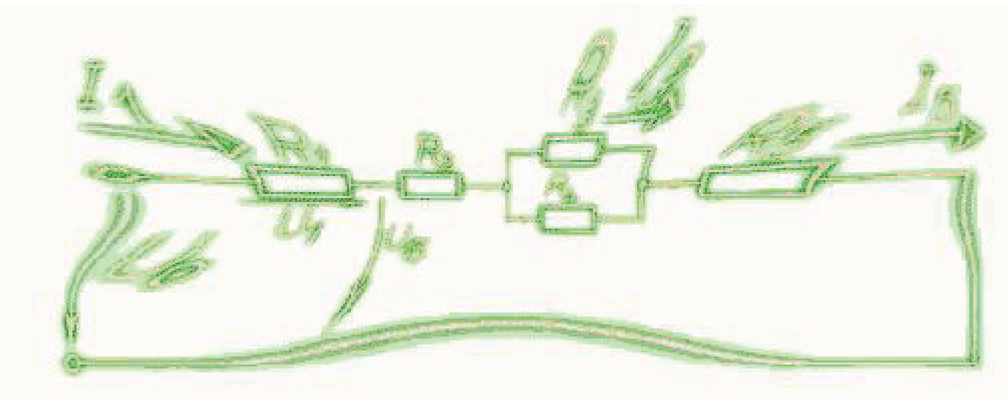
Széchenyi István Egyetem
Műszaki Tudományi Kar
Automatizálási Tanszék

Torda Béla

BEVEZETÉS AZ ELEKTROTECHNIKÁBA

1. EGYENÁRAMÚ HÁLÓZATOK



KÉZIRAT

Feleségemnek

ELŐSZÓ

Az elektrotechnika rejtelmeibe bevezető olvasmányt tart kezében a kedves olvasó. Bevezetőnek szántuk, ami azt jelenti, hogy sok helyen csak a továbblépés lehetőségét villantjuk fel, esetleg továbbgondolás mikéntjét mutatjuk meg, a részletes kifejtés nélkül. Ez az első rész az Elektrotechnika tantárgy legegyszerűbb, hálózatszámítási részének egyszerűbb első felével, az egyenáramú hálózatokkal foglalkozik. Célunk az alapvető összefüggések megismertetése és egy olyan szemlélet nyújtása, melyre majd a változó és váltakozóáramú hálózatok tárgyalása épülhet. Ebben a részben gyakorlati vonatkozást viszonylag keveset talál a kedves olvasó. Az egyenáramú hálózatok tárgyalása itt a fizikának a villamosságtan című fejezetébe tartozó, elméleti vizsgálatot jelenti. De fontosnak tartottuk, hogy az önellenőrzést és a szemlélet elmélyítését számpéldák bemutatásával és önállóan megoldandó feladatok megadásával segítsük.

A tantárgy célja a matematikai gondolkodás elmélyítése konkrét elektrotechnikai esetek vizsgálatával, a kapcsolási rajzok, diagramok, képletek sajátos műszaki nyelvezetének elsajátíttatása, a mértékegységekkel való műveletvégzés gyakoroltatása, logikus gondolkodásra ösztönzés.

Ajánljuk mindezt azoknak, akik ismereteiket az elektrotechnika területén a középiskola elvégzése után a felsőoktatásban, a most átalakuló főiskolai szintű képzés keretein belül, nem szakirányban kívánják elmélyíteni.

Köszönetet mondok mindazoknak, akik segítséget nyújtottak. Köszönöm ábrák készítését, gépelést, lektorálást, köszönöm a véleményeket, észrevételeket, tanácsokat. Külön köszönöm mindenkinek, aki a viszonylag nyugodt munkavégzés feltételeit biztosította.

Kívánom minden kedves olvasómnak, hogy elérje célját munkám kézbevételével. Észrevételeivel, javaslataival, ha vannak, kérem, keressen meg. Jó munkát, jó tanulást!

2005. július

a szerző
torda@sze.hu

1. Bevezetés. A villamos jelenségek alapja az elemi töltések létezése. A töltés és mértékegysége. Coulomb-törvény. Erővonalkép

A villamos jelenségek oka az atomon belül található egyes részecskék villamos tulajdonsága. Az atom fő alkotóelemei közül az atommagban található proton pozitív, míg, a Bohr-féle atommodell szerint, az atommag körül keringő elektron pontosan ugyanakkora negatív töltéssel rendelkezik.

A villamos töltés jele: Q és q.

Mértékegysége: coulomb, jele: C $\quad 1C = 1As$.

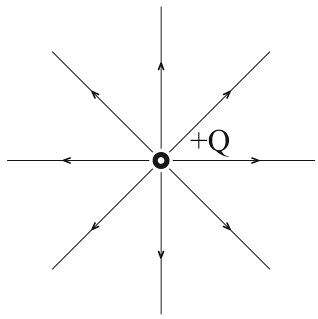
Az elektron töltése, az elemi töltés: $q_e = -1{,}603 \cdot 10^{-19}\,C$.

Az atomon belül általában ugyanannyi proton van, mint elektron. A kétféle, ellentétesen töltött részecskék villamosan egymást semlegesítik. Ugyanez mondható el anyagaink nagyobb térfogatú részeiről is. Ha a semleges állapotot megbontjuk azzal, hogy töltött részeket, például elektronokat szakítunk ki és távolítunk el, akkor a visszamaradó anyag pozitív töltéstöbblettel fog rendelkezni, röviden pozitív töltésű lesz.

A villamos töltések egymásra erővel hatnak. Az azonos töltések taszítják, a különneműek vonzzák egymást. Egy Q_1 és egy Q_2 nagyságú, pontszerű töltés között ható erő nagysága kiszámítható Coulomb törvénye szerint:

$$F = konst \cdot \frac{Q_1 \cdot Q_2}{r^2},$$

ahol r a két töltés közötti távolság. Az erő vektor, melyet a tér különböző pontjain erővonalképpel adhatunk meg. Az erő nagyságát az erővonalak sűrűsége érzékelteti, iránya a tér valamely pontján az erővonalhoz húzott érintő iránya és értelme (irányítottsága) az erővonal értelmével egyezik (1.1. ábra). A tér valamely pontját a három térbeli irány egy-egy távolságadatával, az erővektor nagyságát a három térbeli erőkomponens megadásával határozhatjuk meg. Mindez még időben változó is lehet.



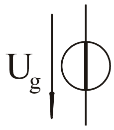
1.1. ábra

A villamos jelenségek ilyen általános tárgyalása bonyolult matematikai apparátust igényel, nehézkes és a lényeget gyakran elfedi. Célunk az, hogy először a lehető legegyszerűbb jelenségeket vizsgáljuk, azokból tapasztalatot gyűjtsünk, szemléletet szerezzünk, és ezekkel a lehető legjobban megalapozzuk az egyre összetettebb feladatok értelmezését és magyarázatát. Ennek szellemében a jelen tárgyban nagyrészt a hálózatszámítás törvényszerűségeivel foglalkozunk. Ezen belül először az időben változatlan, úgynevezett egyenáramú hálózatokat vizsgáljuk, majd az időben változó, főként szinuszos áramú hálózatokra általánosítjuk a megismert összefüggéseket. A villamos hálózatokat úgy tekintjük, mint az előbb körvonalazott általános villamos jelenségek egy dimenzióra korlátozott egyszerűbb esetei.

A tananyag további részében a villamos és a mágneses tér jellemzőit ismerhetik meg, majd az elméleti összefüggések alkalmazását a villamos gépek és a félvezetők területén.

2. A villamos hálózatok alapelemei és definícióik. A hálózatszámítás alapfogalmai és mértékegységeik. Ohm törvénye. Az ellenállás, mint lineáris elem

A villamos hálózatok alapelemeit két csoportra oszthatjuk, aktív és passzív alapelemekre. Az aktív alapelemeket generátoroknak nevezzük. A feszültséggenerátor rajzjele a 2.1. ábrán látható.

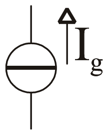


2.1. ábra

Definíció: A feszültséggenerátor kapcsain mindig U_g feszültség esik.

A feszültség jele: U, jelölésére lándzsahegyű nyilat használunk, amely túlnyúlik azon a hálózatrészen vagy elemen, amelyre vonatkozik. A feszültség mértékegysége a volt, jele: V. Szokásos mértékegységek: µV, mV, V, kV. A feszültséggel kapcsolatban az “esik” igét használjuk.

Az áramgenerátor rajzjele a 2.2. ábrán látható.



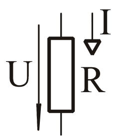
2.2. ábra

Definíció: Az áramgenerátoron mindig I_g áram folyik.

Az áram jele: I, jelölésére háromszöghegyű nyilat használunk, amelyet az azt vezető vezeték vagy hálózatelem mellé rajzolunk. A villamos áram a vezeték valamely keresztmetszetén egy másodperc alatt átáramló töltésmennyiséget fejezi ki. Az áram mértékegysége az amper, jele: A. Egy amper az áramerősség egy vezetéken, ha a keresztmetszetén egy másodperc alatt egy coulomb töltés halad át. A villamos áram szokásos mértékegységei: nA, µA, mA, A, kA. A “nano” ritkán használt prefixummal:

$$1nA = 10^{-9}\,A\,.$$

Az árammal kapcsolatban a “folyik” igét használjuk.



2.3. ábra

A villamos hálózatok passzív elemei között egyenáramú hálózatokban csak egyetlen általános elem fordul elő, az ellenállás. Ezen kívül tárgyalunk még két különleges elemet, az ideális vezetéket és az ideális szigetelést. Az ellenállás rajzjelét a 2.3. ábrán láthatjuk, az ellenállás jele: R. A feszültséget és az áramot ellenálláson azonos irányításúra szokás felvenni. Az ellenálláson a feszültség és az áram kapcsolatát a gyakran emlegetett Ohm törvénye fejezi ki:

$$\boxed{R = \frac{U}{I}}.$$

Ohm törvénye nem különleges törvény. A fizikában sokszor előforduló egyenes arányosságot jelenti a következők szerint. Az ellenálláson kétszer, háromszor, négyszer nagyobb feszültség hatására kétszer, háromszor, négyszer nagyobb áram folyik. Az ilyen elemet a matematikában lineáris elemnek nevezik, amit mi is többször fel fogunk használni. Ha az ellenállás áramát ábrázolnánk a feszültség függvényében, akkor egy origón átmenő ferde egyenest kapnánk, amelynek meredeksége az ellenállás reciproka.

$$R \cdot I = U \qquad I = \frac{U}{R}$$

Nem kell tehát a függvényt megrajzolni, elegendő az ellenállás értékét megadni. Az Ohm törvényében szereplő ellenállás tehát egy mértékegységes arányossági tényező. Az ellenállás mértékegysége: ohm, jele: Ω (görög nagy omega). Az 1 Ω-os ellenálláson 1 V feszültség hatására 1 A áram folyik.

$$1\Omega = \frac{1V}{1A}$$

Szokásos mértékegységek: Ω, kΩ, MΩ. A MΩ kiejtése: “megohm”. A műszaki gyakorlatban előforduló szerkezeti elemek és berendezések ellenállása általában az 1Ω ... 10 MΩ értéktartományba esik.

Vizsgáljuk meg most a passzív elemek csoportjába tartozónak tekinthető két különleges elemet, a vezetéket és a szigetelést. Ezek tulajdonképpen már ott szerepelnek az eddig vizsgált elemek mellett is. A vezetéket vagy más néven rövidzárt folytonos vonallal jelöljük (2.4.a ábra).

2.4. ábra

Definíció: A vezetéken sosem esik feszültség.
Keressük azt az ellenállást, amelyen tetszőleges véges áram mellett 0 V feszültség esik.

$R \cdot I = 0V$ miközben $I = konst.$

Az egyenlet megoldása $R = 0\Omega$. A vezetéket tehát az ellenállások nulla ohmos szélső értékének tekintjük. Ha jobban megvizsgáljuk a rövidzárra adott definíciót, akkor abban nem az ellenállásra, hanem a rövidzáron eső feszültségre teszünk kikötést. A rövidzár ezért felfogható egyben a feszültséggenerátorok egy szélső esetének is, ahol $U_g = 0V$. Ez a felismerés hasznos lehet a későbbiekben.

A szigetelést vagy más néven szakadást kereszttel megszakított folytonos vonallal jelöljük (2.4.b ábra).
Definíció: A szakadáson sosem folyik áram.
Keressük azt az ellenállást, amelyen tetszőleges véges feszültség mellett sosem folyik áram.

$\frac{U}{R} = 0A$ miközben $U = konst.$

Az egyenlet megoldása $R = \infty\Omega$. A vezetéket tehát az ellenállások végtelen ohmos szélső értékének tekintjük.

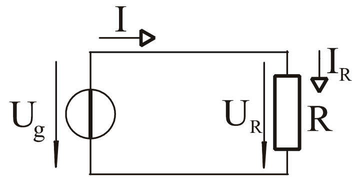
Ha jobban megvizsgáljuk a szakadásra adott definíciót is, akkor abban sem az ellenállásra, hanem a szakadáson folyó áramra teszünk kikötést. A szakadás ezért felfogható egyben az áramgenerátorok egy szélső esetének is, ahol $I_g = 0A$. Ez a felismerés is hasznos lehet a későbbiekben.

Az ilyen gondolatmenetek, a pozitív és negatív töltés létezésének megfogalmazása után, megerősíthetnek abban, hogy az elektrotechnikán végigvonul egy, a természet nagy rendjébe illeszkedő dualitás vagy kettősség. A dualitás egyes eseteiben való elmélyülés nagyban segíthet bennünket abban, hogy az elektrotechnika más problémáiban is biztosan eligazodjunk.

Az utoljára meghatározott két elemről pedig még annyit érdemes említeni, hogy a vezeték minden előtte definiált elem hozzávezetéseként, a szigetelés pedig körülvevő közegeként hallgatólagosan ott volt.

3. Az alapelemek összekapcsolása. Egyszerű villamos áramkör. Kirchhoff törvényei. A három alaptörvény

Kapcsoljunk össze most egy aktív és egy passzív hálózatelemet! Aktív elemnek válasszunk feszültséggenerátort! A 3.1. ábrán látható egyszerű áramkörben a generátor feszültsége áramot fog hajtani az ellenálláson keresztül. A vezetékben a töltéshordozók, mint apró golyók egy csőben, körben fognak haladni. A generátor és az ellenállás árama megegyezik. A generátor feszültsége pedig - mivel vezetéken feszültség nem esik - teljes egészében az ellenállásra jut.



3.1. ábra

$$I = I_R, \qquad U_g = U_R$$

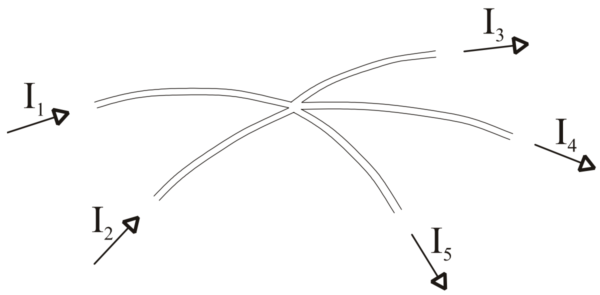
Az ellenállásra alkalmazható Ohm törvénye. Ennyi elegendő az egyszerű áramkör adatainak számításához. Ha például ismert a generátor feszültsége, U_g, és az ellenállás értéke, R, akkor a körben folyó áram számítható.

$$I = I_R = \frac{U_g}{R}$$

Az egyszerű áramkörnél tett megállapításainkat próbáljuk meg most általánosítani. A korábban meghatározott elemekből tetszőleges, összetett kapcsolásokat hozhatunk létre. Ezeket nevezzük összefoglaló néven villamos hálózatoknak. Az elemek elhelyezkedésével és az elrendezés bizonyos törvényszerűségeivel különböző hálózatokban, a gráfelmélet tudománya foglalkozik. A gráfelmélet három alapfogalma: csomópont, ág és hurok. Ezen fogalmakhoz kapcsolódóan villamos hálózatokban két alapvető törvényt ismerünk. Ezek a Gustav Robert Kirchhoff német fizikus által megfogalmazott csomóponti és huroktörvény.

Kirchhoff csomóponti törvénye
Egy csomópontba ágak futnak be. Az ágakhoz befolyó vagy kifolyó áramok rendelhetők.

Definíció: Kirchhoff csomóponti törvénye szerint a csomópont áramainak előjelhelyes összege nulla (3.2. ábra).



3.2. ábra

$$I_1 + I_2 - I_3 - I_4 - I_5 = 0$$

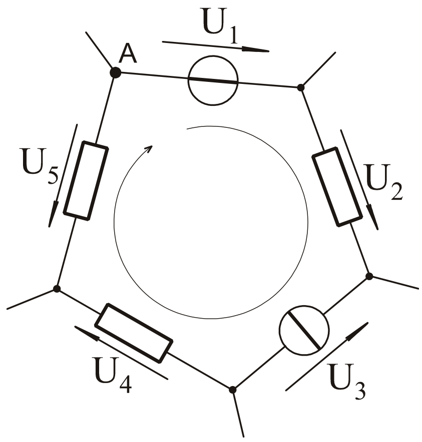
Az összegzéskor a befolyó és a kifolyó áramokat ellentétes előjellel kell figyelembe venni. Átrendezve:

$$I_1 + I_2 = I_3 + I_4 + I_5.$$

Ebben a formájában a csomóponti törvény a következőt is jelenti: a befolyó áramok összege egyenlő a kifolyó áramok összegével. A belépő és kilépő elemi töltött részecskék száma azonos. Ez a fizika általános anyagmegmaradási törvényének egy elektrotechnikai esete. A csomóponti törvény általános megfogalmazása:

$$\boxed{\sum_{j=1}^{n} I_j = 0}$$

Kirchhoff huroktörvénye
A hurok a villamos hálózatban egy tetszőleges zárt körüljárás. Az egyszerűség kedvéért a hurok képzésekor a hurokba bevonni kívánt hálózatelemeket csak egyszer járjuk át, de ez nem kötelező. Egy ilyen, általános hálózatból kiemelt hurok látható a 3.3. ábrán.



3.3. ábra

Definíció: Kirchhoff huroktörvénye szerint a hurokban szereplő feszültségek előjelhelyes összege nulla.
Válasszunk a példaként szereplő hurokban egy kiinduló csomópontot, A-t és egy körüljárási irányt! A-ból kiindulva, és a körüljárással egyező irányú feszültségeket pozitívnak véve írható:

$$U_1 + U_2 - U_3 + U_4 - U_5 = 0$$

Kirchhoff huroktörvénye általános alakja:

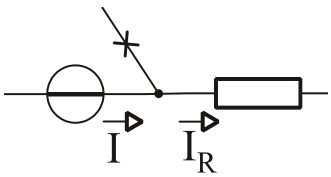
$$\boxed{\sum_{i=1}^{m} U_i = 0}$$

Az eddig megismert három törvény, Kirchhoff két törvénye és Ohm törvénye a hálózatszámítás három alaptörvénye. Az egyenáramú hálózatokban több, gyakran előforduló kapcsolásra ezen három alaptörvény segítségével fogunk törvényszerűségeket megállapítani. Továbbá azt is remélhetjük, hogy az időben változó áramú hálózatok tárgyalása során is segítségünkre lesznek.

4. Soros és párhuzamos kapcsolás, jellemzőik. Generátorok soros és párhuzamos kapcsolása

A villamos hálózatok két kivezetéssel rendelkező elemeit kétpólusoknak nevezzük.

Soros kapcsolás



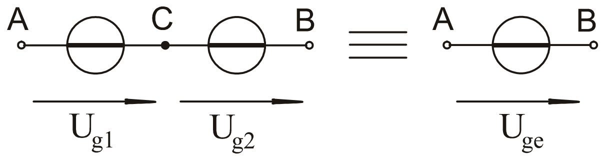
4.1. ábra

Két kétpólus sorosan van kapcsolva, ha egy-egy kivezetésükkel össze vannak kötve és erre az összeköttetésre nem csatlakozik harmadik ág (4.1. ábra).

Definíció: Sorosan kapcsolt elemeken az áram azonos (csomóponti törvény).

$$I = I_R$$

A sorosan kapcsolt elemeken az eredő feszültséget az elemeken eső részfeszültségek (előjelhelyes) összegeként számíthatjuk.



4.2. ábra

Kapcsoljunk most két feszültséggenerátort sorosan (4.2. ábra). A két generátor eredő feszültsége a huroktörvény alapján:

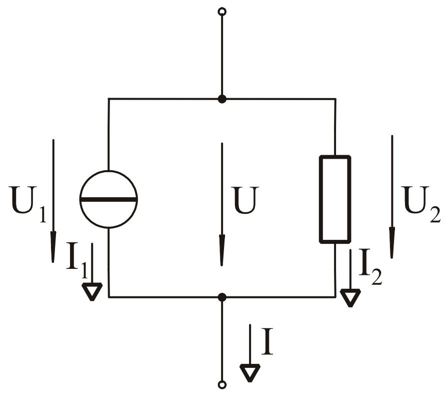
$$U_{AB} = U_{g1} + U_{g2}$$

A két feszültséggenerátort helyettesíthetjük egyetlen eredő feszültséggenerátorral amelynek forrásfeszültsége a két generátorfeszültség összege.

$$U_{ge} = U_{g1} + U_{g2}$$

Az összevonás után a C pont eltűnik, többé már nem hozzáférhető.

Párhuzamos kapcsolás



4.3. ábra

Két kétpólus párhuzamosan van kapcsolva, ha mindkét kivezetésükkel össze vannak kötve (4.3. ábra). (A párhuzamos kapcsoltságnak további kiegészítő feltétele - mint a sorosnak - nincsen.) Ha több kétpólus van mindkét kivezetésével összekötve, akkor valamennyi egymással párhuzamos kapcsolásban van.

Definíció: Párhuzamosan kapcsolt elemeken a feszültség azonos.

$$U_1 = U_2 = U$$

Ez belátható, ha két párhuzamosan kapcsolt elem által alkotott hurokra alkalmazzuk a huroktörvényt.

Párhuzamosan kapcsolt elemeken az eredő áramot az egyes ágak vagy elemek áramának (előjelhelyes) összegeként számíthatjuk.

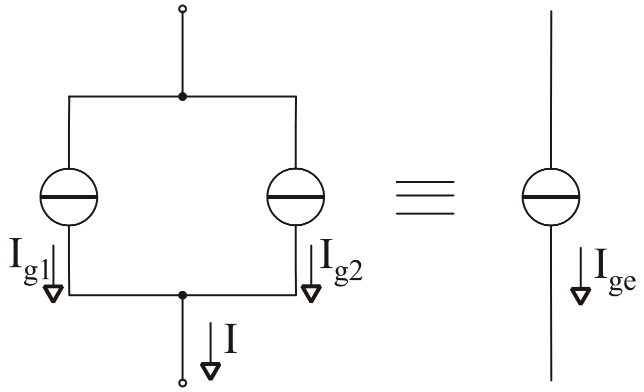
$$I = I_1 + I_2$$

Kapcsoljunk most két tetszőleges áramgenerátort párhuzamosan (4.4. ábra)! A két generátor eredő árama a csomóponti törvény alapján:

$$I = I_{g1} + I_{g2}$$

A két áramgenerátort helyettesíthetjük egyetlen eredő áramgenerátorral, amelynek forrásárama a két generátor áramának összege.

$$I_{ge} = I_{g1} + I_{g2}$$

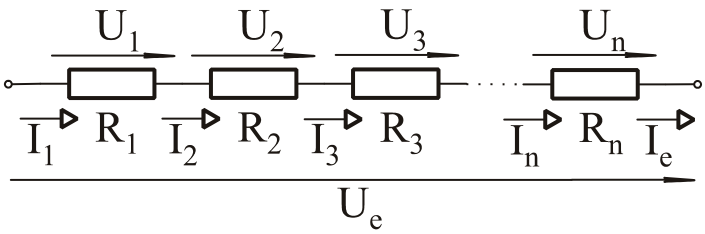


4.4. ábra

Az összevonás után azonban a két ág külön-külön már nem hozzáférhető. (Megjegyzés: két áramgenerátor soros kapcsolása illetve két feszültséggenerátor párhuzamos kapcsolása csak akkor nem vezet ellentmondásra, ha a forrásáramuk illetve forrásfeszültségük azonos. Ilyenkor pedig az ág áramának illetve a két csomópont közötti feszültségnek a meghatározásához két generátor fölösleges, elegendő egyetlen generátor.)

5. Ellenállások soros és párhuzamos eredője

Sorosan kapcsolt ellenállások eredője (5.1. ábra):



5.1. ábra

Ohm törvénye alapján:

$$R_1 = \frac{U_1}{I_1},\ R_2 = \frac{U_2}{I_2},\ R_3 = \frac{U_3}{I_3},\ \ldots\ R_n = \frac{U_n}{I_n}. \qquad (1)$$

Kirchhoff csomóponti törvénye alapján:

$$I_1 = I_2 = I_3 = \ldots = I_n = I_e \qquad (2)$$

Kirchhoff huroktörvénye alapján:

$$U_1 + U_2 + U_3 + \ldots + U_n = U_e \qquad (3)$$

Létezik egy fiktív, eredő ellenállás, amely az eredő feszültség és az eredő áram hányadosaként számítható. Erre is érvényes, hogy kétszer, háromszor, négyszer nagyobb feszültség hatására kétszer, háromszor, négyszer nagyobb áram alakul ki. Próbálkozzunk az R_{es} értékét a részellenállások értékével kifejezni!

$$R_{es} = \frac{U_e}{I_e} = \frac{U_1 + U_2 + U_3 + \ldots + U_n}{I_e} \qquad \text{(3) alapján}$$

$$R_{es} = \frac{U_1}{I_1} + \frac{U_2}{I_2} + \frac{U_3}{I_3} + \ldots + \frac{U_n}{I_n} \qquad \text{(2) alapján}$$

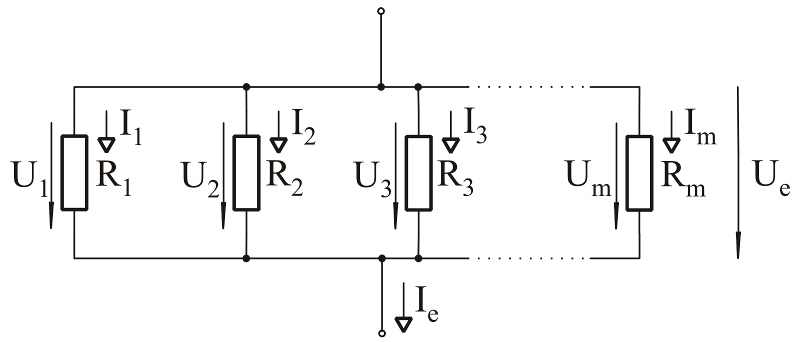
$$R_{es} = R_1 + R_2 + R_3 + ... + R_n \qquad \text{(1) alapján}$$

$$\boxed{R_{es} = \sum_{i=1}^{n} R_i}$$

Tétel: Sorosan kapcsolt ellenállások eredője a részellenállások összegével egyenlő.

Ez azt is jelenti, hogy a sorosan kapcsolt ellenállások eredője minden részellenállásnál nagyobb. Bármilyen kis ellenállást kapcsolunk sorosan egy tetszőlegesen nagy ellenállással, az eredő nagyobb lesz a nagy ellenállásnál is, mert a töltéshordozóknak nagyobb akadályt kell leküzdeniük, hogy keresztülhaladjanak. Ha *n* darab azonos értékű ellenállást kapcsolunk sorosan, az eredő a soros elemek ellenállásának *n*-szerese lesz.

Párhuzamosan kapcsolt ellenállások eredője (5.2. ábra):



5.2. ábra

Ohm törvénye alapján:

$$R_1 = \frac{U_1}{I_1},\ R_2 = \frac{U_2}{I_2},\ R_3 = \frac{U_3}{I_3},\ ...\ R_m = \frac{U_m}{I_m}. \qquad (1)$$

Kirchhoff csomóponti törvénye alapján:

$$I_1 + I_2 + I_3 + ... + I_m = I_e \qquad (2)$$

Kirchhoff huroktörvénye alapján:

$$U_1 = U_2 = U_3 = ... = U_m = U_e \qquad (3)$$

Párhuzamosan kapcsolt ellenállások is úgy tekinthetők a külső szemlélő számára mint egyetlen ellenállás. A párhuzamos kapcsolás helyettesíthető egyetlen eredővel:

$$R_{ep} = \frac{U_e}{I_e} = \frac{1}{\frac{I_e}{U_e}} = \frac{1}{\frac{I_1 + I_2 + I_3 + ... + I_m}{U_e}} \qquad \text{(2) alapján,}$$

$$R_{ep} = \frac{1}{\frac{I_1}{U_1} + \frac{I_2}{U_2} + \frac{I_3}{U_3} + ... + \frac{I_m}{U_m}} \qquad \text{(3) alapján,}$$

$$R_{ep} = \frac{1}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} + ... + \frac{1}{R_m}} \qquad \text{(1) alapján.}$$

Röviden:

$$\boxed{R_{ep} = \frac{1}{\sum_{j=1}^{m} \frac{1}{R_j}}}$$

A képlet egyszerűbb alakú, ha vezetésekkel írjuk fel:

$$\boxed{G_e = \sum_{i=1}^{m} G_i}$$

(Az eredő vezetés minden részvezetésnél nagyobb, ezért:)

Tétel: Párhuzamosan kapcsolt ellenállások eredő vezetése a részvezetések összege.

Ez azt is jelenti, hogy a párhuzamosan kapcsolt ellenállások eredő ellenállása minden részellenállásnál kisebb. Bármilyen nagy ellenállást kapcsolunk párhuzamosan egy tetszőlegesen kis ellenállással, az eredő kisebb lesz a kis ellenállásnál is, mert a töltéshordozók számára több áramút áll rendelkezésre, hogy keresztülhaladjanak. Ha n darab azonos értékű ellenállást kapcsolunk párhuzamosan, az eredő a párhuzamos elemek ellenállásának n-edrésze lesz.

Két párhuzamosan kapcsolt ellenállás eredője

$$R_{e12} = \frac{1}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}}$$

Közös nevezőre hozva:

$$R_{e12} = \frac{1}{\frac{R_2 + R_1}{R_1 \cdot R_2}} = \frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2}$$

$$\boxed{R_{e12} = \frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2} = R_2 \times R_1}$$

A $\times$ jel neve: replusz. Elsősorban összetett kifejezések közötti párhuzamos eredő számításának jelölése esetén előnyös használata.

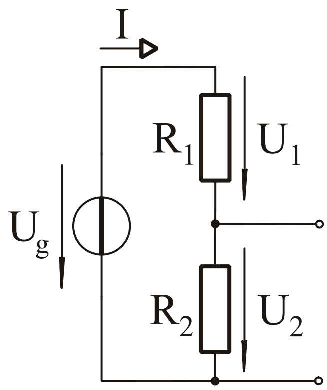
6. Feszültségosztó és áramosztó

Feszültségosztó

Két ellenállás soros kapcsolása feszültségosztót képez (6.1. ábra).
Kirchhoff huroktörvénye alapján:

$$U_g = U_1 + U_2$$

A tápláló feszültség megoszlik az R_1 és R_2 ellenállás között. Ebből származik a feszültségosztó elnevezés. Egyenáramú hálózatban a rendelkezésre álló feszültségnél nagyobb feszültség nem állítható elő. Mind U_1, mind U_2 legfeljebb U_g értékével lehet egyenlő akkor, ha a másiknak az értéke nulla.



6.1. ábra

$$U_1 = I \cdot R_1$$

$$U_2 = I \cdot R_2$$

$$\frac{U_1}{U_2} = \frac{I \cdot R_1}{I \cdot R_2}$$

$$\boxed{\frac{U_1}{U_2} = \frac{R_1}{R_2}}$$

Tétel: Feszültségosztóban a feszültség az ellenállásokkal egyenes arányban oszlik meg.

Határozzuk meg most a feszültségosztó kimenő feszültségének, U_2-nek az értékét a tápláló feszültség U_g és az ellenállások ismeretében!

$$U_2 = I \cdot R_2$$

A körben folyó áramot felírhatjuk a generátorra csatlakozó eredő ellenállással, R_1 és R_2 soros eredőjével:

$$I = \frac{U_g}{R_1 + R_2}, \text{ ebből}$$

$$U_2 = \frac{U_g}{R_1 + R_2} \cdot R_2 \ .$$

$$\boxed{U_2 = U_g \cdot \frac{R_2}{R_1 + R_2}}$$

Ez a feszültségosztó képlet. Az U_g utáni tört mértékegység nélküli, értéke legfeljebb egy. Ez felel meg annak, hogy U_2 legfeljebb U_g értékű lehet.
Összetett kapcsolásainkat is gyakran célszerű két ellenállás soros kapcsolására egyszerűsíteni és utána a részfeszültségek meghatározásához a feszültségosztó képletet alkalmazni.

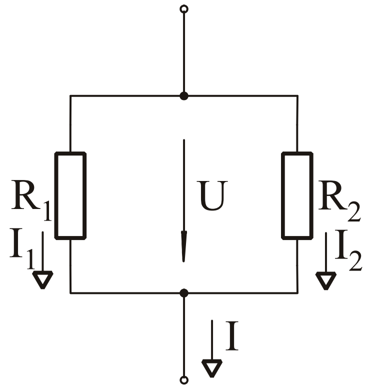
Áramosztó

Két ellenállás párhuzamos kapcsolása áramosztót képez (6.2. ábra).

Kirchhoff csomóponti törvénye alapján:

$$I = I_1 + I_2$$

A közös áram megoszlik R_1 és R_2 ellenállás között. Ebből származik az áramosztó elnevezés. Az áramokra is érvényes, hogy sem I_1, sem I_2 nem lehet nagyobb a közös I áramnál.



6.2. ábra

$$I_1 = \frac{U}{R_1}$$

$$I_2 = \frac{U}{R_2}$$

$$\frac{I_1}{I_2} = \frac{\frac{U}{R_1}}{\frac{U}{R_2}}$$

Tétel: Áramosztóban az áram az ellenállásokkal fordított arányban oszlik meg.

$$\boxed{\frac{I_1}{I_2} = \frac{R_2}{R_1}}$$

Határozzuk meg most az áramosztó egyik ellenállásán, például R_2-n az áram értékét a közös áram és az ellenállások értékének ismeretében!

$$I_2 = \frac{U}{R_2}$$

Az ellenállásokon eső feszültséget felírhatjuk a közös áram és a két párhuzamosan kapcsolt ellenállás eredője segítségével.

$$U = I \cdot R_e = I \cdot (R_1 \times R_2) = I \cdot \frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2}$$

Behelyettesítve:

$$I_2 = \frac{1}{R_2} \cdot I \cdot \frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2}\text{, ebből}$$

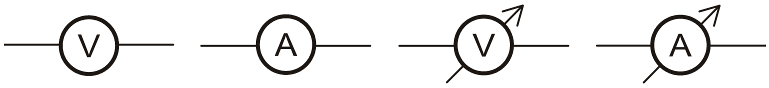
$$\boxed{I_2 = I \cdot \frac{R_1}{R_1 + R_2}}\,.$$

Ez az áramosztó képlet. Felépítésére hasonlít a feszültségosztó képlethez azzal a lényeges különbséggel, hogy itt a tört számlálójában szereplő ellenállás és a keresett áram indexe nem azonos, hanem éppen ellentétes. Összetett kapcsolásainkat is gyakran célszerű két ellenállás párhuzamos kapcsolására visszavezetni és az áramosztó összefüggéseit alkalmazni.

7. Feszültség és áram mérése, ideális és valós mérőműszerek, méréshatárkiterjesztés, voltonkénti belső ellenállás

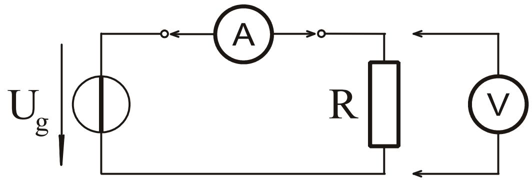
Áram mérésére a hálózat valamely ágát megszakítva, abba sorosan árammérőt iktatunk be. Az ideális árammérő vezetékként viselkedik, ellenállása nulla ohm. Ha ez teljesül, akkor az árammérő beiktatása nem változtatja meg a mérendő hálózatot, tehát a mérendő áram értékét sem. A sorosan beiktatott árammérőn átfolyik a mérendő áram.

Feszültség mérésére a hálózat két pontja közé párhuzamosan feszültségmérőt iktatunk be. Az ideális feszültségmérő szigetelésként viselkedik, ellenállása végtelen ohm.



7.1. ábra

A feszültség- és árammérő szabványos rajzjele a kör, és benne a mérendő mennyiség mértékegysége. A szakirodalomban gyakran találkozunk ennek – a műszer mutatójára emlékeztető – nyíllal történő kiegészítésével (7.1. ábra). A kiegészítés segíti a más hasonló rajzjelektől való megkülönböztetést, ezért gyakori. Egy áramkörben a feszültség- és árammérő elhelyezése látható a 7.2. ábrán.



7.2. ábra

A valós mérőműszerek ellenállása az ideálistól lényegesen eltér. A gyártók nem is gyártanak külön feszültség- és árammérőt, hanem nagy érzékenységű, úgynevezett “alapműszert”. Egy alapműszer mutatója U_m feszültség és I_m áram mellett lendül végkitérésbe. A végkitéréshez (FSD, Full Scale Deflection) tartozó skálaérték tehát egyaránt értelmezhető feszültség- és áramértékként is. Továbbá, mivel U_m és I_m a műszer ugyanazon állapotához (FSD) tartozó értékek, segítségükkel az alapműszer ellenállása kiszámítható:

$$R_m = \frac{U_m}{I_m} .$$

Vegyünk egy gyakori példát! Egy tipikus alapműszer végkitérésbe lendül

$U_m = 50mV$ és

$I_m = 50\mu A$ hatására.

A műszer ellenállása:

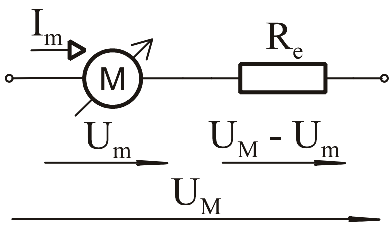
$$R_m = \frac{50mV}{50\mu A} = \frac{50 \cdot 10^{-3} V}{50 \cdot 10^{-6} A} = 10^3 \Omega = 1000\Omega = 1k\Omega .$$

Ezekkel az értékekkel kapcsolatban két lényeges probléma merül fel. Az első probléma az, hogy a műszaki gyakorlatban az 1Ω ... 10MΩ ellenállás-értéktartományba esnek általában a berendezések és eszközök ellenállásértékei. 1Ω-nál kisebb az elfogadható vezetékek ellenállása és a 10MΩ-os értéknél nagyobbakra mondjuk, hogy szigetelésnek tekinthetők (a jó szigetelők sokkal nagyobb ellenállásúak). Ezért az 1kΩ-os alapműszerünk nem tekinthető sem ideális árammérőnek, sem ideális feszültségmérőnek.

A második probléma az, hogy alapműszerünkkel reménytelen a szokásos több voltos, sőt több ezer voltos feszültségek vagy a több amperes áramok megmérése. Az alapműszer skálájáról csak a 0 ... U_m illetve a 0 ... I_m tartományba eső értékek olvashatók le. A végkitéréshez tartozó értékeknél lényegesen nagyobb értékek pedig biztosan tönkre is teszik a műszert. Ezen utóbbi probléma megoldására alkalmazható a méréshatár-kiterjesztés. Ilyenkor vagy az áram-, vagy a feszültség-méréshatárt növeljük. Az első problémáról nem megfeledkezve oldjuk meg először a méréshatár-kiterjesztést.

Feszültség-méréshatár kiterjesztése

Feladatunk, hogy az U_m-nél nagyobb feszültség mérésére nem alkalmas alapműszert annál nagyobb, U_M mérendő feszültség mérésére alkalmassá tegyük. Mindkét értéket ugyanazon állapotra, végkitérésre vonatkoztatjuk. Azt az elrendezést, melyben egy rendelkezésre álló feszültségnek csak egy része jut az egyik elemre, soros kapcsolással hozzuk létre és feszültségosztónak nevezzük. Az U_M mérendő feszültségből a műszerre U_m-nek kell jutni, hogy végkitérésbe lendüljön. A megmaradó U_M-U_m feszültséget egy megfelelően méretezett ellenállás veszi magára, melynek neve előtétellenállás. A feszültségosztóban a műszert egy R_m nagyságú ellenállásnak tekintjük. A kapcsolás, feszültség és áramértékeivel a 7.3. ábrán látható.



7.3. ábra

Azt, hogy a méréshatárt hányszorosára növeljük, egy szorzóval adjuk meg:

$$n = \frac{U_M}{U_m}$$

Ez általában egész szám, sőt gyakran 10 egész kitevőjű hatványa, 100, 1000 stb. is, mert a műszer skálájáról történő leolvasás így a legegyszerűbb.

Az előtétellenállás értéke az azon eső feszültség, és a rajta átfolyó áram hányadosaként számítható.

$$R_e = \frac{U_e}{I_e} = \frac{U_M - U_m}{I_m} = \frac{n \cdot U_m - U_m}{I_m} = \frac{(n-1) \cdot U_m}{I_m} = (n-1) \cdot R_m$$

Egy alapműszer feszültségméréshatára egy azzal sorosan kapcsolt előtétellenállással terjeszthető ki, melynek értéke:

$$\boxed{R_e = (n-1) \cdot R_m}$$

Példa: Terjesszük ki az előző példában szereplő alapműszer méréshatárát $U_M = 5V$ -ra!

$$U_m = 50mV$$

$$I_m = 50\mu A$$

A műszer ellenállása:

$$R_m = \frac{50mV}{50\mu A} = \frac{50 \cdot 10^{-3} V}{50 \cdot 10^{-6} A} = 10^3 \Omega = 1000\Omega = 1k\Omega \ .$$

$$n = \frac{U_M}{U_m} = \frac{5V}{50mV} = \frac{5V}{5 \cdot 10^{-2} V} = 10^2 = 100$$

$$R_e = (n-1) \cdot R_m = (100-1) \cdot 1k\Omega = 99k\Omega$$

Az alapműszer méréshatára tehát kiterjeszthető egy sorosan kapcsolt $99k\Omega$ nagyságú előtétellenállás segítségével. Az alapműszer és az előtétellenállás soros kapcsolása együtt

$R_m + R_e = 1k\Omega + 99k\Omega = 100k\Omega$ ellenállású.

Ez n-szeres növekedés az R_m-hez képest. A feszültség-méréshatár kiterjesztés tehát arányos ellenállás-növekedéssel jár. Ez megoldás az alapműszerrel kapcsolatos első problémára. A méréshatár növelésével a feszültségmérő ellenállása nő, és bár általában nem lesz közel ideális, elhanyagolhatóan nagy, a mért értéket elfogadjuk, ritkán számítással korrigáljuk.

A kapcsolás ellenállása a méréshatárral egyenesen arányos. Kétszer, háromszor, négyszer nagyobb méréshatárhoz kétszer, háromszor, négyszer nagyobb R_m+R_e eredő ellenállás tartozik. A feszültségmérőt méréshatártól függetlenül jellemzi az úgynevezett “voltonkénti belső ellenállás” vagy érzékenység:

$$\acute{e} = \frac{R_m + R_e}{U_M} \left[\frac{k\Omega}{V}\right]$$

A példában szereplő adatokkal

$$\acute{e} = \frac{R_m + R_e}{U_M} = \frac{1k\Omega + 99k\Omega}{5V} = \frac{100k\Omega}{5V} = 20\frac{k\Omega}{V}$$

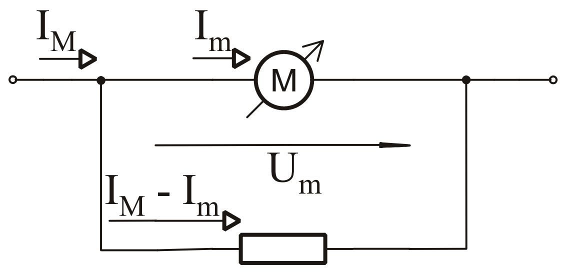
Ezt az értéket kapjuk akkor is, ha az alapműszer adataiból számolunk:

$$\acute{e} = \frac{R_m}{U_m} = \frac{1k\Omega}{50mV} = \frac{1k\Omega}{5 \cdot 10^{-2} V} = \frac{10^2 k\Omega}{5V} = 20\frac{k\Omega}{V}$$

Laboratóriumokban elterjedt és gyakran használt a kapcsolóval tág határok között változtatható, sok méréshatárú feszültségmérő. Az ilyen műszerek skáláján fő jellemzőként szerepeltetik a voltonkénti belső ellenállás értékét.

Áram-méréshatár kiterjesztése

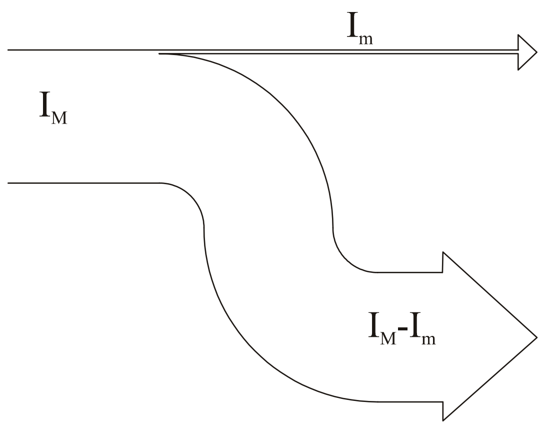
Az áram-méréshatár kiterjesztése akkor szükséges, ha az alapműszerrel végkitérésnél mérhető I_m áramnál nagyobbat akarunk mérni. Jelöljük az új, végkitérésnél mérendő áramot I_M-mel!



7.4. ábra

A mérendő áram megosztását két részre, a műszerre megengedettre és a fennmaradó többlet áramra, áramosztóval végezhetjük. A 7.4. ábrán látható áramosztó egyik ágát az alapműszer, másik ágát egy megfelelően méretezett ellenállás alkotja. Az ellenállás neve söntellenállás, jele: R_S.

Az áramoknak a két ág közötti megosztását áramszalag-diagram érzékelteti (7.5. ábra).



7.5. ábra

Vezessük be a méréshatár növelését jellemző szorzót:

$$n = \frac{I_M}{I_m}$$

A söntellenállás áramát ismerjük, feszültsége pedig a párhuzamos kapcsolás miatt a műszer feszültségével egyezik meg. (Minden feszültség és áram végkitérésre vonatkozik.) A söntellenállás így már számítható:

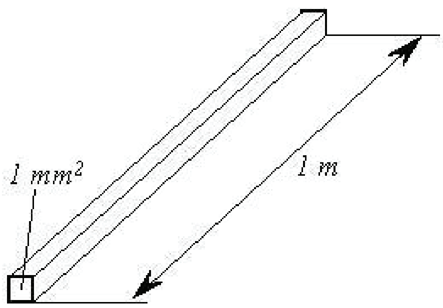
$$R_s = \frac{U_s}{I_s} = \frac{U_m}{I_M - I_m} = \frac{U_m}{n \cdot I_m - I_m} = \frac{U_m}{(n-1) \cdot I_m} = \frac{R_m}{(n-1)}$$

Egy alapműszer áram-méréshatára egy azzal párhuzamosan kapcsolt söntellenállással terjeszthető ki, melynek értéke:

$$\boxed{R_s = \frac{R_m}{(n-1)}}$$

8. Anyagok fajlagos ellenállása

A fajlagos ellenállás valamely anyag 1mm² keresztmetszetű, 1m hosszú darabjának az ellenállása (8.1. ábra). A fajlagos ellenállás anyagjellemző.



8.1. ábra

Jele: ρ (ejtsd: ró, görög kisbetű)

Mértékegysége: $\Omega \cdot \frac{mm^2}{m}$

$$1\Omega \cdot \frac{mm^2}{m} = 10^{-6}\,\Omega m$$

Néhány fém fajlagos ellenállása:

anyag	vegyjel	ρ $\left[\Omega \cdot \frac{mm^2}{m}\right]$
réz	Cu	0,0178
alumínium	Al	0,0286
ezüst	Ag	0,0160
arany	Au	0,0220

Ezek a legjobb vezetők. Az adatok elemi, nagy (legalább 99,99 %) tisztaságú anyagokra vonatkoznak. Napjainkban vezeték céljára legelterjedtebb a vörösréz. Rögzített, beépített helyeken tömör, mozgatható helyeken több vékony szálból sodrott, hajlékony vezetéket használnak. Beépített helyeken gyakran találunk tömör alumínium vezetéket is. Az alumínium előnye a kisebb súly, hátránya a rosszabb mechanikai tulajdonságokban van. Az aranyat, kihasználva korrózióállóságát, igényes, sokpólusú csatlakozók és kapcsolók érintkezőinek bevonataként használják.

Ha a fémeket ötvözzük, a fajlagos ellenállásuk nő. Egy vezeték ellenállása a következőképpen számítható:

$$\boxed{R_v = \rho \cdot \frac{l}{A}}, \text{ ahol}$$

R_v a vezeték ellenállása $[\Omega]$,

ρ a fajlagos ellenállás $\left[\Omega \cdot \frac{mm^2}{m}\right]$,

l a vezeték hossza $[m]$,

A a vezeték keresztmetszete $[mm^2]$.

A vezeték ellenállása egyenesen arányos a hosszával és fordítottan arányos a keresztmetszetével. Az anyagok fajlagos ellenállásuk szerint három csoportba sorolhatók.
Vezetők: fémek, szén, sós ionos oldatok.
Félvezetők: szilícium, germánium stb.
Szigetelők: üveg, porcelán, gumi, a legtöbb műanyag, a száraz levegő és általában a gázok, olaj.

A legjobb vezető és a legjobb szigetelő fajlagos ellenállása között nagyon nagy, 25 nagyságrend különbség van. Ez azt jelenti, hogy a műszaki megvalósítások során alkalmazott vezetékek illetve szigetelések elfogadhatók az elméleti számítások során feltételezett, ideális nulla ohmos illetve végtelen ohmos ellenállásúaknak.

Az anyagok ellenállását, illetve fajlagos ellenállását általában 20°*C* hőmérsékletre vonatkoztatva adják meg. Kis, legfeljebb néhányszor 10°*C*-os hőmérsékletváltozásig szokásos az ellenállás-változás lineáris közelítése. Valamely R ellenállás 20°*C* hőmérsékleten mutatott R_o ellenállása egy más, T_1 hőmérsékleten:

$$\boxed{R_1 = R_0(1 + \alpha \cdot (T_1 - 20°C))}, \text{ ahol}$$

R_1 az ellenállás értéke T_1 hőmérsékleten,

α hőfoktényező.

Az α hőfoktényező lehet pozitív és negatív is. A hőmérséklet növekedésével az előbbi esetben nő, az utóbbi esetben csökken az ellenállás. Fémekre a hőfoktényező jó közelítéssel:

$$\alpha = 4 \frac{‰}{K} \ .$$

A hőfoktényező mértékegysége:

$$[\alpha] = \frac{1}{K} = \frac{1}{°C} = 100 \frac{\%}{K} = 100 \frac{\%}{°C}, \quad \text{ahol } K\text{: Kelvin.}$$

A hőfoktényező összefüggésébe R_1 és R_o helyett természetesen a fajlagos ellenállás ρ_1 és ρ_o értékét is írhatjuk.

9. Hálózatszámítási módszerek. Ellenálláshű átalakítás. Ellenállások csillag-háromszög átalakítása

A hálózatszámítás célja a hálózatban előforduló elemek (kétpólusok: generátorok és passzív elemek) feszültségének és áramának meghatározása. Ha a hálózat valamennyi elemének feszültségét és áramát ismerjük, a hálózat teljesen határozottnak tekinthető, mivel az esetlegesen ismeretlen ellenállásokat vagy teljesítményeket már elemenként számíthatjuk.

Hálózatszámítási módszerek:

Ellenálláshű átalakítás,
Helyettesítő generátorok (Thèvenin és Norton) tétele,
Szuperpozíció.

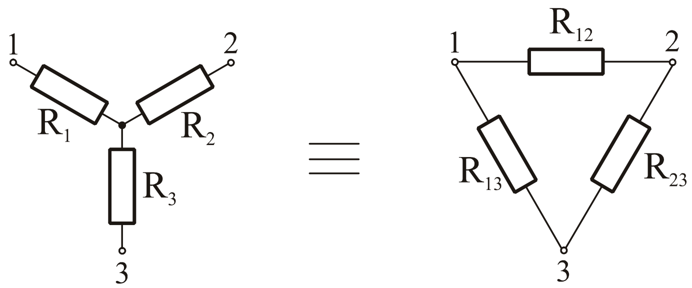
Ellenálláshű átalakítás

Az ellenálláshű átalakítás módszerével összetett ellenállás-hálózatunkat egyszerűsíthetjük. Akkor célszerű alkalmazni, ha csak ellenállásokat tartalmazó hálózatunk van, vagy csak egyetlen generátor van a hálózatunkban. Utóbbi esetben a generátorra csatlakozó hálózat értelemszerűen már csak ellenállást tartalmazhat.

Az eredő ellenállás számításához soros és párhuzamos részkapcsolásokat kell keresnünk. Ezeket eredőjükkel helyettesíthetjük. Ha sem sorosan, sem párhuzamosan kapcsolt ellenállásokat nem találunk, akkor a hálózatnak valamely általunk választott részén csillag-háromszög átalakítást kell végrehajtanunk. A soros, a párhuzamos és a csillag-háromszög átalakítás együttesen biztosan elegendő minden probléma megoldására.

A csillag-háromszög átalakítás.

Tegyük fel, hogy három csomópont között három-három ellenállás egyik esetben csillag, másik esetben háromszög kapcsolást alkot (9.1. ábra). Az ellenállások megfelelő megválasztása esetén a két kapcsolás ekvivalens, külső hálózat számára azonosnak látszik, semmilyen külső vizsgálattal köztük különbség nem tehető.



9.1. ábra

Az ellenállásokat indexeljük aszerint, hogy melyik csomóponthoz illetve mely csomópontpárhoz csatlakoznak. A háromszögkapcsolásból csillagba történő átszámításhoz vezessük be a következő jelölést: $R_h = R_{12} + R_{13} + R_{23}$

Az átszámítás:

$$\boxed{R_1 = \frac{R_{12} \cdot R_{13}}{R_h}}$$

$$\boxed{R_2 = \frac{R_{12} \cdot R_{23}}{R_h}}$$

$$\boxed{R_3 = \frac{R_{13} \cdot R_{23}}{R_h}}$$

A csillagból háromszögbe történő átszámításhoz hasonló struktúrájú képleteket kapunk, ha áttérünk a villamos vezetésre (a $G_{cs} = G_1 + G_2 + G_3$ jelölés bevezetésével):

$$\boxed{G_{12} = \frac{G_1 \cdot G_2}{G_{cs}}}$$

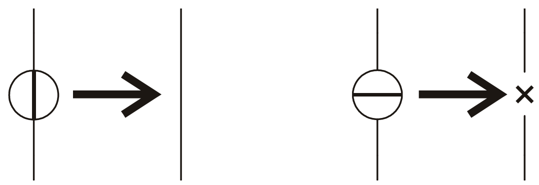
$$\boxed{G_{13} = \frac{G_1 \cdot G_3}{G_{cs}}}$$

$$\boxed{G_{23} = \frac{G_2 \cdot G_3}{G_{cs}}}$$

10. Szuperpozíció tétele

Ha a hálózatunk több generátort tartalmaz, akkor használhatjuk a keresett feszültségek és áramok kiszámítására a szuperpozíció tételt. A hálózatban található generátorokat külön-külön, egyenként vesszük figyelembe és ezáltal részeredményeket kapunk. Valamely keresett feszültség vagy áram értékét úgy számítjuk ki, hogy a részeredmények előjelhelyes összegét képezzük. Ez utóbbi lépés a tulajdonképpeni szuperpozíció.

Ahhoz, hogy egy generátor hatását külön tudjuk számítani, az összes többi generátort helyettesíteni, szakkifejezéssel dezaktivizálni kell. A hálózati elemek jellemzésénél megállapítottuk, hogy szélső esetben egy rövidzár tekinthető egy nulla voltos feszültséggenerátornak és egy szakadás egy nulla amperes áramgenerátornak. Ez a dezaktivizálás alapja (10.1. ábra). Természetesen speciális esetben az előbbitől eltérhetünk, ha két vagy három generátor hatása együtt is könnyen számítható. A fontos csak az, hogy a hálózatban található valamennyi generátort egyszer és csakis egyszer vegyük figyelembe.



10.1. ábra

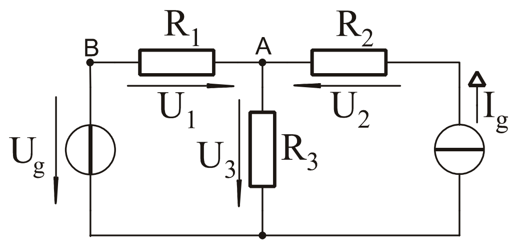
A szuperpozíció tétel csak akkor alkalmazható, ha a hálózatunk lineáris. Ez egyenáramú hálózatban akkor teljesül, ha a benne található valamennyi passzív elem Ohm törvényének eleget tesz, tehát lineáris, ohmos ellenállás. Eddig kizárólag ilyen eseteket tárgyaltunk.

(Megjegyzés: az ohmos ellenállás feszültség-áram karakterisztikája egy origón átfutó ferde egyenes. A karakterisztikát nem szokás megrajzolni, hanem elegendő azt a meredekségével, azaz az ellenállás értékével jellemeznünk. Nemlineáris elem esetén a görbe érintőjének a meredeksége pontról pontra változik. Nemlineáris elemek például a félvezető eszközök, a diódák, tranzisztorok, tirisztorok. A gyártók ezeket vastag katalógusokban megadott, részletes feszültség-áram karakterisztikákkal jellemzik.)

A szuperpozíció tétel az összetett hálózatot több egyszerű részhálózatra bontja. Így a megoldás egyszerűbb, de hosszadalmasabb lesz, mint az összetett hálózatot közvetlenül kezelő módszereké. Szuperpozíció alkalmazása a bonyolultabb hálózatok esetén előnyös inkább.

Vizsgáljuk meg egy példán keresztül a tétel alkalmazását!

10.1. Példa: Tekintsük az 10.2. ábrán látható kapcsolást!



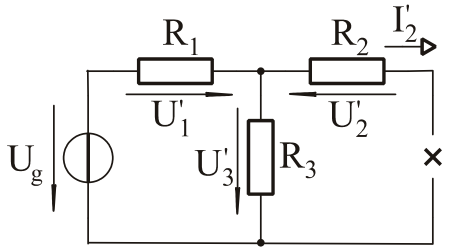
10.2. ábra

$U_g = 100V$

$I_g = 1A$

$R_1 = R_2 = R_3 = 100\Omega$

1. eset: A feszültséggenerátor hatásának vizsgálata. Helyettesítsük az áramgenerátort szakadással (10.3. ábra)!



10.3. ábra

Vegyük fel a keresett három feszültség nyílirányát a kiinduló feladatban megadottal azonosan! Különböztessük meg a részfeszültségeket és a részáramot felső vesszővel az eredeti kapcsolásbeli értékektől.
Az R_2 ellenálláson nem folyik áram, mert szakadás kapcsolódik vele sorosan.

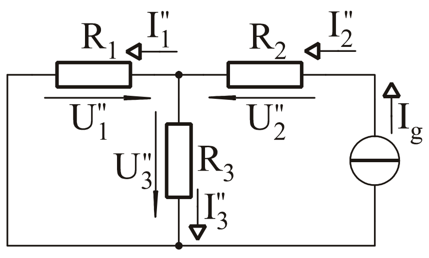
$$I_2' = 0A, \qquad U_2' = I_2' \cdot R_2 = 0V$$

R_1 és R_3 feszültségosztónak tekinthető, áramuk azonos, mivel I_2' értéke nulla.

$$U_1' = U_g \cdot \frac{R_1}{R_1 + R_3} = 100V \cdot \frac{100\Omega}{100\Omega + 100\Omega} = 100V \cdot \frac{100\Omega}{200\Omega} = 50V$$

$$U_3' = U_g \cdot \frac{R_3}{R_1 + R_3} = 100V \cdot \frac{100\Omega}{100\Omega + 100\Omega} = 100V \cdot \frac{100\Omega}{200\Omega} = 50V$$

2. eset: Az áramgenerátor hatásának vizsgálata. Helyettesítsük a feszültséggenerátort rövidzárral (10.4. ábra)!



10.4. ábra

Vegyük fel a keresett három feszültség nyílirányát ismét a kiinduló feladatban megadottal azonosan! Különböztessük meg a részfeszültségeket és a részáramokat két felső vesszővel a korábbi jelölésektől.

Az R_2 ellenállás árama az áramgenerátor áramával megegyezik.

$$I_2'' = I_g\,, \qquad U_2'' = I_2'' \cdot R_2 = I_g \cdot R_2 = 1A \cdot 100\Omega = 100V$$

R_1 és R_3 párhuzamosan vannak kapcsolva, áramosztót képeznek.

$$I_1'' = I_2'' \cdot \frac{R_3}{R_1 + R_3} = I_g \cdot \frac{R_3}{R_1 + R_3} = 1A \cdot \frac{100\Omega}{100\Omega + 100\Omega} = 1A \cdot \frac{100\Omega}{200\Omega} = 0{,}5A$$

$$I_3'' = I_2'' \cdot \frac{R_1}{R_1 + R_3} = I_g \cdot \frac{R_1}{R_1 + R_3} = 1A \cdot \frac{100\Omega}{100\Omega + 100\Omega} = 1A \cdot \frac{100\Omega}{200\Omega} = 0{,}5A$$

Ohm törvénye alapján: $U_3'' = I_3'' \cdot R_3 = 0{,}5A \cdot 100\Omega = 50V$

Az R_1 ellenálláson a feszültség és az áram iránya ellentétes, ezért

$$U_1'' = -I_1'' \cdot R_1 \;!$$

Behelyettesítve

$$U_1'' = -0{,}5A \cdot 100\Omega = -50V\,.$$

Szuperpozíció: Összegezzük előjelhelyesen a részeredményeket! Most élvezzük annak előnyét, hogy mindkét esetben és mindhárom feszültségre következetesen az eredeti irányokat megtartottuk. Ezért valamennyi részfeszültséget pozitív előjellel kell szerepeltetnünk.

$$U_1 = U_1' + U_1'' = 50V - 50V = 0V$$
$$U_2 = U_2' + U_2'' = 0V + 100V = 100V$$
$$U_3 = U_3' + U_3'' = 50V + 50V = 100V$$

Értékelés:

Némileg váratlan, hogy az R_1 ellenállás feszültsége nulla, de az ellenőrzés ezt alátámasztja: U_g és U_3 azonos, $100V$ értékű és R_1 felől nézve ellentétesek. Az eredőjük valóban nulla. R_1 kapcsai között nincs feszültségkülönbség: az A és B pontok „ekvipotenciálisak”. Jó tudni, hogy ha egy ellenállás ilyen helyzetbe kerül, akkor elvehetjük, azaz szakadással helyettesíthetjük, rövidre zárhatjuk, illetve értékét tetszőlegesre módosíthatjuk anélkül, hogy a kapcsolás többi elemének villamos állapota megváltozna. Példánkban ez azt jelenti, hogy a feszültséggenerátor árammentes, az R_2, az R_3 és az áramgenerátor árama $1A$. Némi megfontolás után belátható, hogy R_1 változása ezen áramokra nincs hatással.

Végeredményünket alátámasztja a következő gondolatmenet is. Áramgenerátorral sorosan kapcsolt ellenállás árama a generátor áramával, feszültséggenerátorral párhuzamosan kapcsolt ellenállás feszültsége a generátor feszültségével megegyezik. Ezekre az esetekre a szuperpozíció alkalmazása mellőzhető. Példánkban az R_2 árama, és ezzel feszültsége is így ellenőrizhető, és helyes.

A szuperpozíció egy további előnyét is érdemes tanulmányozni. A részeredményeket fizikai tartalommal ugyan nem ruházhatjuk fel, de számítási eljárásunkban sajátos tulajdonságuk van. Valamely generátor megváltozása ugyanis csak azon részeredmények értékére van hatással, amelyeket az adott generátor figyelembevételével számítottunk. A többi részeredmény számításánál az adott generátor dezaktivizált, passzív.

10.2. Példa: Hogyan változnak meg az eredmények az előző példánkban, ha az áramgenerátor kapcsait felcseréljük?

Egy olyan egygenerátoros kapcsolásban, mint amilyen a szuperpozíció tétel alapján végzett részszámításaink során is szerepel, érvényes a következő szabály. A kapcsolás valamennyi árama és feszültsége a generátor jellemzőjének megváltoztatását arányosan követi. Ha a tápláló generátor forrásfeszültségét vagy forrásáramát kétszer, háromszor, négyszer nagyobb értékűre választjuk, akkor a kapcsolás valamennyi feszültsége és árama is kétszeresére, háromszorosára, négyszeresére nő. (Megjegyzés: az állítás azért igaz, mert lineáris a hálózatunk.) Példánkban a generátor kapcsainak felcserélése egyenértékű I_g értékének előjelváltásával. A generátor áramának előjelváltása pedig a hálózat valamennyi feszültségének és áramának előjelváltását eredményezi. Az előző példa 2. esete részeredményeinek előjelváltásával a végeredmény:

$$U_1 = U_1' - U_1'' = 50V + 50V = 100V$$

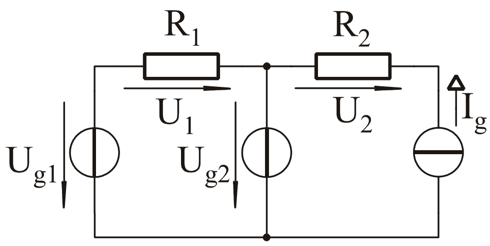
$$U_2 = U_2' - U_2'' = 0V - 100V = -100V$$

$$U_3 = U_3' - U_3'' = 50V - 50V = 0V$$

Értékelés:

Az U_2 előjelváltással követte az áramgenerátor áramának előjelváltását. Ebben a példában az A és C pont ekvipotenciális, R_3 elhagyható, rövidre zárható, megváltoztatható. Végül levonhatunk egy következtetést: a szuperpozíciós részeredmények ismerete jelentős könnyebbséget ad a többgenerátoros hálózat valamely generátora megváltozásának gyors követésére számításainkban.

10.3. Példa: Tekintsük a 10.5. ábrán látható kapcsolást. Az adatok:



10.5. ábra

$$U_{g1} = U_{g2} = 100V$$

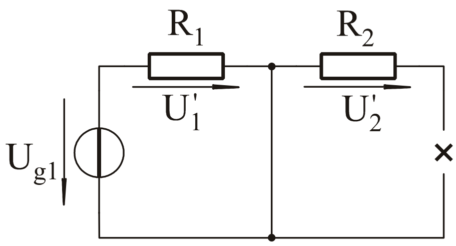
$$I_g = 1A$$

$$\underline{R_1 = R_2 = 100\Omega}$$

$$U_1 =$$

$$U_2 =$$

1. eset:

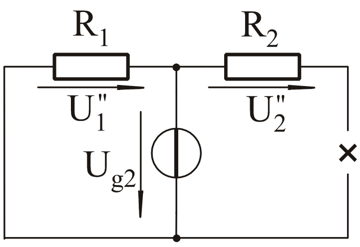


10.6. ábra

$$U_1' = U_{g1} = 100V$$

$$U_2' = 0A \cdot R_2 = 0V$$

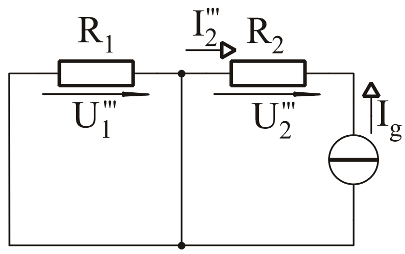
2. eset:



10.7. ábra

$$U_1'' = -U_{g2} = -100V$$
$$U_2'' = 0A \cdot R_2 = 0V$$

3. eset:



10.8. ábra

$$U_1''' = 0A \cdot R_1 = 0V$$
$$I_2''' = -I_g$$
$$U_2''' = I_2''' \cdot R_2 = -I_g \cdot R_2 = -1A \cdot 100\Omega = -100V$$

Összegzés:

$$U_1 = U_1' + U_1'' + U_1''' = 100V - 100V + 0V = 0V$$
$$U_2 = U_2' + U_2'' + U_2''' = 0V + 0V - 100V = -100V$$

Ellenőrzés: $U_1 = U_{g1} - U_{g2} = 0V$, feszültségmentes (huroktörvény alapján),

I_g átfolyik R_2-n (soros kapcsolás), ezért $U_2 = -I_g \cdot R_2 = -100V$.

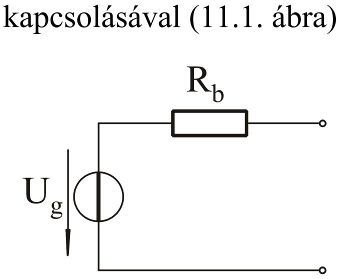
11. Helyettesítő generátorok (Thèvenin és Norton) tétele

Valós feszültséggenerátor

Az ideális feszültséggenerátor kapcsain a feszültség minden körülmények között a rá megadott, „definiált” érték. Nem függ attól, hogy mekkora terhelő ellenállást csatlakoztatunk rá, vagy más megfogalmazásban attól, hogy mekkora árammal terheljük. És nem változik meg attól sem, ha bármilyen összetett hálózatra csatlakoztatjuk.

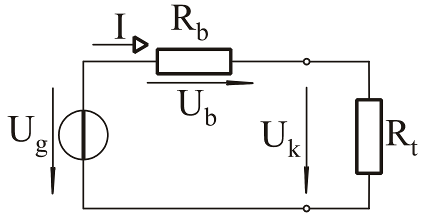
A gyakorlatban generátoraink többnyire feszültséggenerátorok, az áramgenerátor megvalósítása nehézkesebb. Mégis ritkán fogadhatjuk el a műszaki megvalósítást ideálisnak. Nem kell azonban az eddig megismert, ideális elemekkel történő modellezést feladunk.

Tétel: Egy valós feszültséggenerátor modellezhető egy ideális feszültséggenerátor és egy úgynevezett „belső ellenállás” soros kapcsolásával (11.1. ábra).



11.1. ábra

A valós feszültséggenerátor közel ideális, ha terhelt állapotban (11.2. ábra) a kapocsfeszültség, U_k megegyezik U_g-vel, vagy ahhoz közeli értékű. Ha a körben áram folyik, akkor a belső ellenálláson egy belső feszültségesés jön létre. Ez a kapocsfeszültséget csökkenti:



11.2. ábra

$$U_k = U_g - U_b = U_g - I \cdot R_b .$$

A kapocsfeszültség tehát akkor közelíti meg az ideális generátor forrásfeszültségét, ha mind az áram, mind a belső ellenállás kicsi. Ebből a felismerésből két következtetés vezethető le. Az egyik az, hogy ha a belső ellenállás értéke nulla, akkor a valós feszültséggenerátor határeseteként az ideális feszültséggenerátorhoz jutunk. Ha nem így lenne, akkor következtetés-láncolatunkban valahol hibát követtünk volna el.

A másik kérdés az, hogy mikor fogadhatjuk el a valós feszültséggenerátort közel ideálisnak. Ez akkor teljesül, ha

$$U_k \approx U_g ,$$

$$U_g - U_b \approx U_g ,$$

$$U_b << U_g ,$$

$$I \cdot R_b << U_g .$$

Az áramot kifejezhetjük a generátorfeszültség és a két ellenállás soros eredőjének hányadosával:

$$I = \frac{U_g}{R_b + R_t} \text{, ebből}$$

$$\frac{U_g}{R_b + R_t} \cdot R_b << U_g ,$$

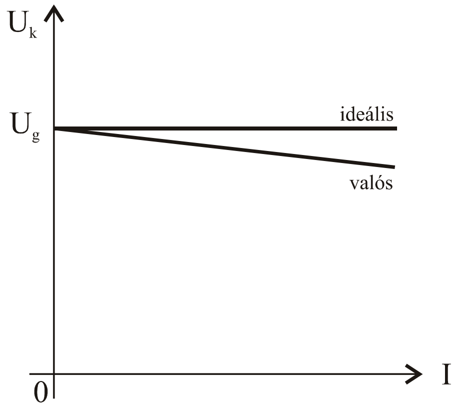
$$\frac{R_b}{R_b + R_t} << 1 ,$$

$$R_b << R_b + R_t ,$$

$\boxed{R_b << R_t}$ reláció következik.

A valós feszültséggenerátor tehát akkor tekinthető közel ideálisnak, ha a belső ellenállása az éppen alkalmazott terhelő ellenállásnál lényegesen kisebb. A reláció általános érvényű, de a mértékét minden esetben a támasztott pontossági követelmények alapján külön-külön kell meghatározni.

A kapocsfeszültség alakulását egy diagramon is szemlélhetjük (11.3. ábra). Ha a terhelő áram nulla, akkor a kapocsfeszültség a generátorfeszültséggel megegyezik. Ebből a pontból a diagramon ideális feszültséggenerátor esetén egy vízszintes egyenes, valós generátor esetén egy enyhén lejtő ferde egyenes indul ki. Minél kisebb a ferde egyenes lejtése, annál jobban közelíti a valós generátor az ideálisat.

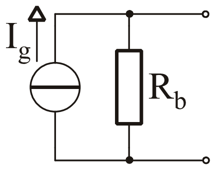


11.3. ábra

Valós áramgenerátor

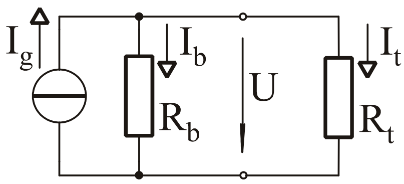
Az ideális áramgenerátor mindig a rá jellemző, „definiált” áramot hajtja keresztül a csatlakozó hálózaton. A gyakorlatban áramgenerátorokat legtöbbször elektronikusan valósítunk meg és ezek csak jól meghatározott korlátok között képesek az ideálisat megközelíteni. Generátoraink kapcsait gyakran hagyjuk szabadon. Ez a feszültséggenerátornál nem, de az áramgenerátornál ellentmondáshoz vezet. A szakadáson ugyanis nem folyhat áram, az ideális generátornak viszont át kellene hajtani az áramát. Ilyenkor az áramgenerátorunk hibája megmutatkozik.

A valós áramgenerátor modellje egy ideális áramgenerátorból és egy párhuzamosan kapcsolt belső ellenállásból áll (11.4. ábra).



11.4. ábra

A valós áramgenerátor akkor közelíti az ideálisat, ha belső ellenállása kellően nagy. Az ideális áramgenerátor belső ellenállása végtelen nagy.



11.5. ábra

Ha az áramgenerátor nem ideális, akkor a forrásárama megoszlik a belső ellenállás és a terhelő ellenállás között (11.5. ábra).

$$I_g = I_b + I_t$$

A valós áramgenerátor közel ideális, ha a generátoráram csaknem teljes egészében a terhelésre jut.

$$I_g \approx I_t$$

Ez akkor teljesül, ha a terhelő ellenállás árama mellett a belső ellenállás árama elhanyagolható.

$I_g >> I_b$ és $I_t >> I_b$.

Utóbbiba behelyettesítve:

$$\frac{U}{R_t} >> \frac{U}{R_b}$$

$$\frac{1}{R_t} >> \frac{1}{R_b}$$

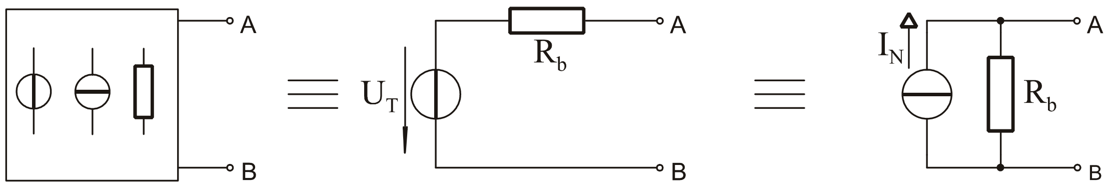
$$\boxed{R_t << R_b}$$

A valós áramgenerátor tehát akkor tekinthető közel ideálisnak, ha a belső ellenállása az éppen alkalmazott terhelő ellenállásnál lényegesen nagyobb.

Helyettesítő generátorok tétele

Tétel: Egy általános, (ellenállásokat, feszültséggenerátorokat, áramgenerátorokat tartalmazó) lineáris hálózat két pontjára helyettesíthető mind egy valós feszültséggenerátorral, Thèvenin generátorral, mind egy valós áramgenerátorral, Norton generátorral.

A két pontot megkülönböztetésül A-val és B-vel jelöljük (11.6. ábra).



11.6. ábra

A Thèvenin és a Norton generátor természetesen egymásba is átalakítható. A helyettesítő generátorok jellemző adatainak meghatározásához a helyettesítendő hálózat két tetszőleges, különböző állapotát kell ismernünk. Legegyszerűbb, ha az üresjárási és a rövidzárási állapotot vizsgáljuk.

Üresjárási állapot

Üresjárásban egy hálózat kimenetén áram nem folyik. Ezért elegendő a három esetre az üresjárási feszültséget meghatározni. Ha a három kapcsolás üresjárási feszültsége megegyezik, akkor erre az esetre a három kapcsolás azonosan viselkedik, egymást helyettesíti. Jelöljük a helyettesítendő hálózat üresjárási feszültséget $U_ü$-vel! Értékét számítással vagy méréssel határozhatjuk meg, a feladat jellegének megfelelően.

A Thèvenin generátor üresjárási feszültsége megegyezik feszültséggenerátorának forrásfeszültségével. Ezért a helyettesítéshez az

$$\boxed{U_T = U_ü}$$

azonosságot kell biztosítani.

A Norton generátor kapcsain üresjárásban a generátoráram által a belső ellenálláson ejtett feszültség jelenik meg. A helyettesítéshez tehát teljesítendő:

$I_N \cdot R_{bN} = U_ü$.

Rövidzárási állapot

Rövidrezárt állapotban egy hálózat kimenetén feszültség nem esik. Ezért elegendő a három, egymást helyettesítő esetre a rövidzárási áramot meghatározni. Ha a három kapcsolás rövidzárási árama megegyezik, akkor erre az esetre a három kapcsolás azonosan viselkedik, egymást helyettesíti. Jelöljük a helyettesítendő hálózat rövidzárási áramát I_{rz}-vel! Határozzuk meg az értékét!

A Norton generátor áramgenerátorának árama teljes egészében a rövidzáron folyik. A belső ellenálláson nem folyik áram. Ezért

$$\boxed{I_N = I_{rz}}$$

A Thèvenin generátor rövidre zárásával egy zárt áramkör alakul ki. A kialakuló áramot a feszültséggenerátor feszültsége és a belső ellenállás nagysága határozza meg. Ezért az

$\frac{U_T}{R_{bT}} = I_{rz}$ egyenlőséget kell a helyettesítéshez teljesíteni.

A Thèvenin generátor belső ellenállása:

$$R_{bT} = \frac{U_T}{I_{rz}} = \frac{U_ü}{I_{rz}} \; .$$

A Norton generátor belső ellenállása:

$$R_{bN} = \frac{U_ü}{I_N} = \frac{U_ü}{I_{rz}}$$

A két belső ellenállás tehát megegyezik, ahogyan az a 11.6. ábra jelöléseiben is látható:

$$\boxed{R_b = \frac{U_ü}{I_{rz}}}$$

A belső ellenállás úgy is meghatározható, hogy a kapcsolásban található összes feszültséggenerátort rövidzárral, az összes áramgenerátort szakadással helyettesítjük (a hálózatot „dezaktivizáljuk”). Az ezután az A-B kapcsok között kialakuló eredő ellenállás megegyezik a belső ellenállással.

Tétel: Ha az általános lineáris hálózatunkat egy Thèvenin illetve egy Norton generátor két tetszőleges állapotban (például üresjárásban és rövidzár esetén) helyettesíti, akkor minden más állapotban is helyettesíti.

A helyettesítő generátorok alkalmazása akkor célszerű, ha egy hálózatunknak az A-B kapcsaira csatlakozó több különböző terhelése mellett kell a feszültség- és az áramállapotát meghatároznunk.

12. Villamos teljesítmény

A villamos teljesítmény jele: P .

Valamely villamos hálózati elem feszültségének és áramának szorzata a villamos teljesítmény vagy munkavégzőképesség.

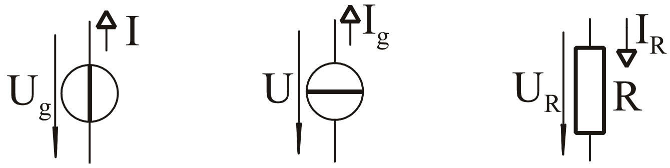
$$\boxed{P = U \cdot I}$$

A teljesítmény mértékegysége: watt,

jele: W , $1W = 1V \cdot 1A$.

További szokásos mértékegységek: mW, kW, MW.

Generátorok és ellenállások feszültségét és áramát a 12.1. ábrán látható nyílirányok szerint szokás megadni. Ha ezek után a számított teljesítmény pozitív, akkor az a generátornál leadott, az ellenállásnál pedig felvett teljesítmény. Negatív érték generátornál felvett teljesítményt jelent, ami egy akkumulátor töltésének felel meg. Negatív teljesítmény ellenálláson nem értelmezhető, aktív, energiatermelő fogyasztót nehéz elképzelni.



12.1. ábra

Egy ellenálláson a teljesítményt, Ohm törvényét felhasználva háromféleképpen is számíthatjuk, aszerint, hogy a három jellemző mennyiség közül éppen melyik kettőt ismerjük.

$$\boxed{P = U \cdot I = \frac{U^2}{R} = I^2 \cdot R}$$

A villamos munka jele: W,
a villamos energia jele: E, az angol elnevezésük kezdőbetűje alapján.
A villamos munka vagy energia, a teljesítmény és a munkavégzésre fordított idő szorzataként számítható, ugyanúgy, mint a fizika más területein.

$$W = E = P \cdot t = U \cdot I \cdot t$$

A villamos munka és a villamos energia mértékegysége a wattszekundum, jele: Ws,

$$1Ws = 1V \cdot 1A \cdot 1s\,.$$

Kapcsolata a mechanikai munka mértékegységeivel:

$$1Ws = 1J = 1Nm$$

Tehát a villamos hálózat $1Ws$ munkája egyenértékű az $1N$ erő ellenében $1m$ úton végzett mechanikai munkával. A wattszekundum kicsi mértékegység, háztartások, műhelyek, gépek fogyasztásának jellemzésére az általánosan elterjedt mértékegység a kilowattóra.

$$1kWh = 1000W \cdot 1h = 1000W \cdot 60 \cdot 60s = 3600000Ws = 3{,}6 \cdot 10^6\,Ws$$

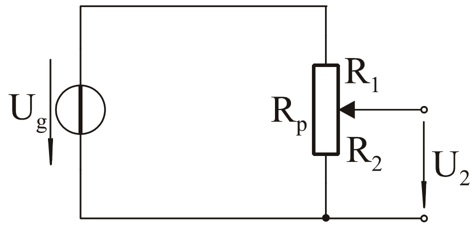
A kilowattóra, amelyből egy háztartásban naponta többet elfogyasztunk, és amelyért napjainkban néhányszor tíz forintot fizetünk, jelentős, több millió newtonméter mechanikai energiának felel meg. A villamos energiaellátás alig több mint száz éves múltra tekint vissza, mégis a legelterjedtebb. A villamos energia szállítása távvezetéken egyszerű, a felhasználása tiszta, a felhasználásához az eszközök rendelkezésre állnak. Hátránya, hogy tárolása villamos állapotban egyáltalán nem, bármely más módon is csak erősen korlátozott mértékben oldható meg. A villamos energiaellátó hálózatban ezért a termelésnek és a fogyasztásnak minden pillanatban egyensúlyban kell lenni. Az erőművek és a nagy fogyasztók szigorú, előre meghatározott, percre pontos ütemterv szerint kapcsolnak be illetve ki.

Ha egy villamos hálózatban megkülönböztethető a hasznos és az összes teljesítmény, akkor ugyanúgy, mint a fizika más területein értelmezhető, a hatásfok (η) fogalma:

$$\eta = \frac{P_{hasznos}}{P_{összes}}\,.$$

13. A potencióméter. Terheletlen és terhelt potencióméter kimenő feszültsége, teljesítménye, hatásfoka. Teljesítményillesztés

A potencióméter (13.1. ábra):



13.1. ábra

Gyakran van szükség a rendelkezésre álló feszültség folyamatos változtatási lehetőségére, állítható feszültségosztóra. Ilyenkor egy ellenállás teljes ellenálláspályájának két kivezetése között egy harmadik, mozgó érintkezőt, csúszkát is elhelyeznek mely az így kialakított potencióméter R_p ellenállását két részre osztja.

$$R_p = R_1 + R_2 \qquad (1)$$

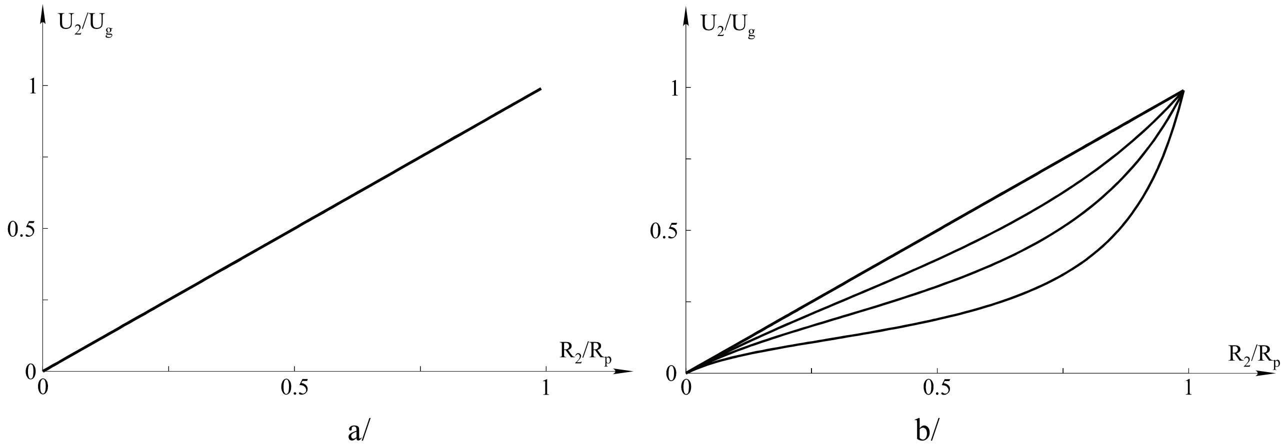
A leosztott feszültség a feszültségosztónál megismert összefüggés szerint számítható.

$$U_2 = U_g \frac{R_2}{R_1 + R_2} \qquad (2)$$

A csúszka helyzetével a két részellenállást *0* és R_p, a leosztott feszültséget pedig *0* és U_g között változtatni tudjuk. Ábrázoljuk a leosztott feszültség relatív értékét U_2/U_g-t az osztóellenállás relatív értékének R_2/R_p-nek függvényében. A (2) egyenletet átrendezve és (1)-et behelyettesítve:

$$\frac{U_2}{U_g} = \frac{R_2}{R_1 + R_2} = \frac{R_2}{R_p} \ .$$

Ezt ábrázolva, a függvény a (0,0) és (1,1) pontok között értelmezett ferde egyenes. A két ponton túl a függvény nincs értelmezve! Ezt nevezzük a terheletlen potencióméter esetének (13.2. ábra).



13.2. ábra

A gyakorlatban azonban általában terhelt potencióméterrel találkozunk. A leosztott feszültséget továbbvezetjük, az osztó kimenetére valamilyen berendezés bemenete csatlakozik. Ezt az állapotot egy véges, R_t ellenállású terheléssel vesszük figyelembe.

Az új helyzetben az osztó alsó tagjának az eredeti R_2 ellenállás és a terhelő ellenállás párhuzamos eredőjét tekintjük.

$$R_{2t} = R_2 \times R_t \qquad (3)$$

A megváltozott kimenő feszültség:

$$U_{2t} = U_g \cdot \frac{R_{2t}}{R_1 + R_{2t}} \qquad (4)$$

Vizsgáljuk meg, hogyan változott a kimenő feszültség a terhelés hatására! Két ellenállás párhuzamos eredője kisebb, mint bármelyik összetevő, ezért

$$R_{2t} \le R_2$$

A (4) egyenlet átrendezésével a kimenő feszültség:

$$U_{2t} = U_g \cdot \frac{1}{1 + \frac{R_1}{R_{2t}}}$$

Az ellenállásokra írható a (3) egyenlőtlenség felhasználásával:

$$\frac{R_1}{R_2} \le \frac{R_1}{R_{2t}}$$

$$1 + \frac{R_1}{R_2} \le 1 + \frac{R_1}{R_{2t}}$$

$$\frac{1}{1 + \frac{R_1}{R_2}} \ge \frac{1}{1 + \frac{R_1}{R_{2t}}}$$

Ebből a kimenő feszültség:

$$U_g \cdot \frac{1}{1 + \frac{R_1}{R_2}} \ge U_g \cdot \frac{1}{1 + \frac{R_1}{R_{2t}}}$$

$$\boxed{U_2 \ge U_{2t}}$$

A terheletlen potencióméternek tehát a terhelés rákapcsolásakor - változatlan csúszkaállás mellett - lecsökken a kimenő feszültsége. Ez az állítás megerősíthető ha a potenciométer Thèvenin helyettesítő generátorára gondolunk. A generátor üresjárási feszültsége, ami a terheletlen állapotnak felel meg, mindig nagyobb, mint a terhelés esetén a kimenetre jutó feszültség.

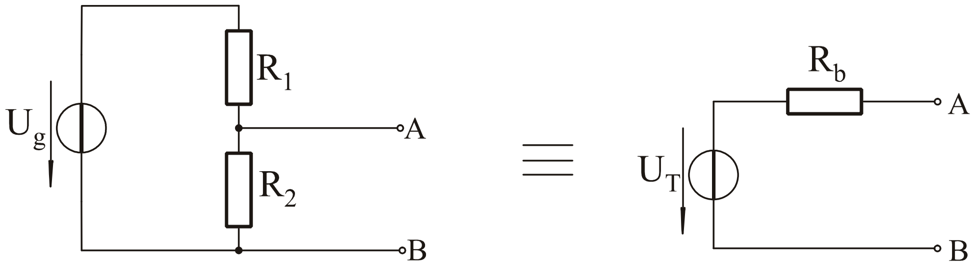
A 13.2. ábrán a terhelt potenciométer kimenő feszültségére több görbét láthatunk. Valamennyi görbe a terheletlen esetnek megfelelő ferde egyenes alatt fut. A terhelt eset görbéje annál jobban eltávolodik a terheletlen eset egyenesétől, minél nagyobb a terhelés, minél kisebb a terhelő ellenállás értéke. (Megjegyzés: a terhelt potenciométer kimenő feszültségének görbéjében inflexiós pont van. Az origótól kiindulva a görbe egyre csökkenő meredekségű, majd az inflexiós pontnál vált, és attól egyre növekvő meredekségű pontok következnek.)

Határozzuk meg most a terheletlen potenciométernek mint feszültségosztónak Thèvenin helyettesítő kapcsolását! A Thèvenin generátor forrásfeszültsége a terheletlen potenciométer üresjárási kimenő feszültsége. A feszültségosztó képlettel:

$$U_T = U_g \cdot \frac{R_2}{R_1 + R_2}$$

A Thèvenin generátor belső ellenállása meghatározható úgy, hogy a 13.1. ábrán látható U_g feszültségű generátor helyére rövidzárt képzelünk. Ekkor a potenciométer kimeneti kapcsai között az ellenállás a keresett belső ellenállás:

$$R_b = R_1 \times R_2 \ .$$



13.3. ábra

A Thèvenin helyettesítő kapcsolás a 13.3. ábrán látható. Vizsgáljuk meg ennek segítségével, hogy a mekkora teljesítmény jut a terhelő ellenállásra.

$$P_t = I^2 \cdot R_t$$

Ugyanekkor a belső ellenállásra jutó teljesítmény:

$$P_b = I^2 \cdot R_b$$

A terhelésre jutó teljesítményt hasznosnak, a belső ellenállásra jutó teljesítményt veszteségnek tekintve megfogalmazhatjuk a hatásfokot, a hasznos és az összes teljesítmény hányadosát.

$$\eta = \frac{P_{hasznos}}{P_{összes}} = \frac{I^2 \cdot R_t}{I^2 \cdot R_t + I^2 \cdot R_b} = \frac{R_t}{R_t + R_b} = \frac{1}{1 + \frac{R_b}{R_t}}$$

A potenciométer hatásfoka a terhelő ellenállás értékének növekedésével monoton növekvő értéket vesz fel.

Vizsgáljuk meg most a kimenő teljesítményt! A terhelésre jutó teljesítmény az ellenállás értékének változásával jelentősen változik. Ha a terhelő ellenállás helyén rövidzár van, akkor az átfolyó áram maximális, a rövidzárási áram. De a terhelésen eső feszültség értéke nulla. Ha a terhelő ellenállás helyén szakadás van, akkor a terhelésre jutó feszültség maximális, az üresjárási feszültség. Ekkor viszont a terhelésen átfolyó áram értéke nulla. A terhelésre jutó teljesítmény, a feszültség és áram szorzata, mindkét szélső esetben nulla. Véges terhelő ellenállás érték mellett azonban mind a feszültség, mind az áram és így a szorzatuk is véges. A teljesítménynek a terhelő ellenállástól való folytonos, egyértékű függvényében (legalább egy) maximumhelynek kell lenni. A szélsőértékkeresés szabályai szerint a

$$P_t = \frac{U_t^2}{R_t} = \frac{1}{R_t}\left(U_T \cdot \frac{R_t}{R_b + R_t}\right)^2 = U_T^2 \left(\frac{1}{\frac{R_b}{R_t} + 1}\right)^2 \frac{1}{R_t}$$

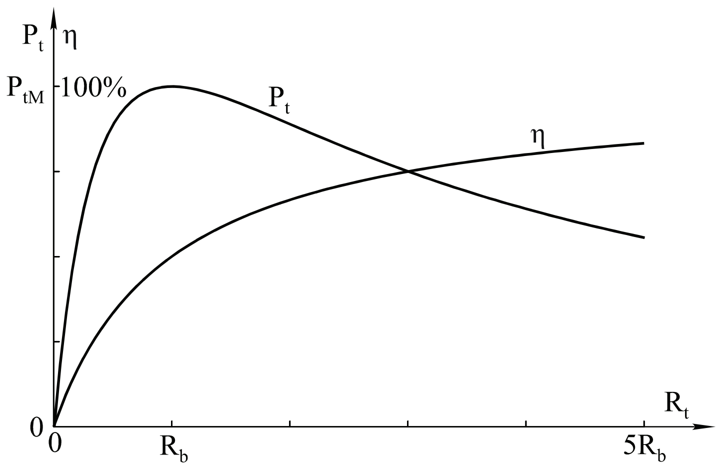
függvénynek az

$$\boxed{R_t = R_b}$$

helyen van maximuma. Ezt nevezzük teljesítményillesztésnek. Ekkor mind a belső ellenállásra, mind a terhelő ellenállásra a Thèvenin generátor feszültségének fele jut. A generátorból a terhelésen kivehető maximális teljesítmény:

$$\boxed{P_{tM} = \frac{U_T^2}{4 \cdot R_b}}$$

A teljesítményillesztés megvalósítására törekszünk kis jelek feldolgozásánál de nem törekszünk az energiaellátásban, mert a teljesítményillesztés esetén a hatásfok csak 50 %. A terhelésre jutó teljesítménynek és a hatásfoknak a terhelő ellenállástól való függése látható a 13.4. ábrán.

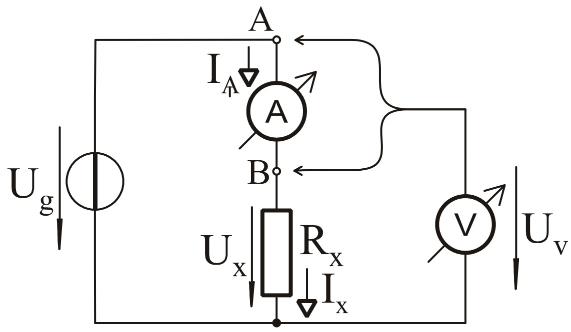


13.4. ábra

14. Ellenállásmérési módszerek

Egy ellenállás értékét meghatározhatjuk, ha külön-külön megmérjük a rajta eső feszültséget és a rajta átfolyó áramot. Ezután az ismeretlen ellenállás értékét az ellenállás megmért feszültsége és megmért árama hányadosaként számítással határozzuk meg. Pontos mérés esetén

$$R_x = R_{számított} = \frac{U_x}{I_x} \ .$$



14.1. ábra

Ennek a módszernek a hibája a 14.1. ábrán követhető. Ha a voltmérőt az A jelű pontra csatlakoztatjuk, akkor hibát okoz, hogy a voltmérő az ellenállás feszültségéhez hozzáméri az ampermérőn eső feszültséget is. A mért feszültség és áram hányadosaként számított érték

$$R_{számított} = \frac{U_V}{I_A} = R_x + R_A$$

Ez a módszer nagy ellenállások mérésénél használható, amikor az ampermérő ellenállása elhanyagolhatóan kicsi.

$$R_x >> R_A$$

Ha a voltmérőt a B pontra csatlakoztatjuk, akkor az okoz hibát, hogy az ampermérő a voltmérő áramát is méri. A mért feszültség és áram hányadosaként számított érték:

$$R_{számított} = \frac{U_V}{I_A} = R_x \times R_V \ .$$

Ez a módszer kis ellenállások mérésére használható, amikor a voltmérő ellenállása a mérendő ellenállás értéke mellett elhanyagolhatóan nagy.

$$R_x << R_V$$

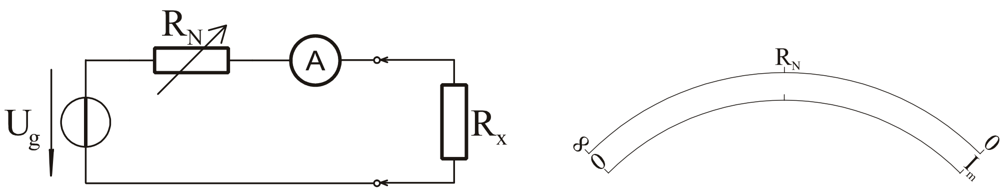
Ha betartjuk, hogy a kis ellenállásokat az első, a nagy ellenállásokat a második kapcsolási változat szerint mérjük, akkor a mérési hiba nem lesz számottevő. (Megjegyzés: azt, hogy egy ellenállást kicsinek vagy nagynak kell tekintenünk, a jelen esetben a két műszer ellenállása dönti el. A kicsi illetve nagy minősítés határesete a voltmérő és az ampermérő ellenállásának mértani közepe, azaz a két műszer ellenállásának szorzatából vont négyzetgyök értéke.)

Hibát okoz viszont az, hogy két műszerrel mérünk. Általában a laboratóriumi műszerek 1-3% hibával mérnek. De arra, hogy adott esetben a két műszer hibája egymást erősíti, vagy esetleg egymást gyengíti, nem tudunk választ adni.

A két műszerrel történő mérés nehézkességét elkerülhetjük közvetlenmutató ellenállásmérővel.

Soros közvetlenmutató ellenállásmérő

A soros közvetlenmutató ellenállásmérő kapcsolását a 14.2.a ábrán láthatjuk.



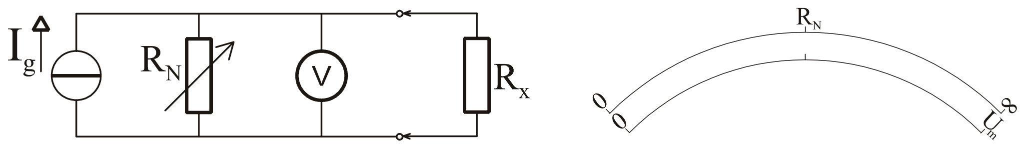
a) b)

14.2. ábra

Ha R_x helyén rövidzár van, az árammérő műszer végkitérésbe lendül. Ha R_x helyén szakadás van, nincs zárt áramkör, a műszer alaphelyzetben marad. A skála nemlineáris, fordított (14.2.b ábra). Az átfolyó áram 0 ... I_m közötti növekedése tükrözi az ismeretlen ellenállás végtelentől nulláig való csökkenését.

Párhuzamos közvetlenmutató ellenállásmérő

A párhuzamos közvetlenmutató ellenállásmérő kapcsolása a 14.3.a ábrán látható. Ha R_x helyén rövidzár van, a feszültségmérő műszer nyugalomban marad. Rövidzáron az átfolyó I_g áram ellenére sem esik feszültség. Ha R_x helyén szakadás van, a generátor árama az R_N ellenálláson folyik keresztül. I_g és R_N értékét úgy választjuk meg, hogy a feszültségmérő éppen végkitérésig térjen ki. A skála nemlineáris, egyenes (14.3.b ábra).



a) b)

14.3. ábra

A közvetlenmutató ellenállásmérőket megtaláljuk univerzális laboratóriumi kéziműszerekben, ahol üzemmódváltó kapcsolóval feszültség-, áram- és ellenállásmérő módot állíthatunk. Egy-egy üzemmódon belül pedig méréshatárváltó kapcsolóval több méréshatár közül választhatunk. A generátor, az R_N normálellenállás és a mérőműszer az univerzális műszer részét képezi, azon belül kerül elhelyezésre.

15. Számítási feladatok gyakorlása

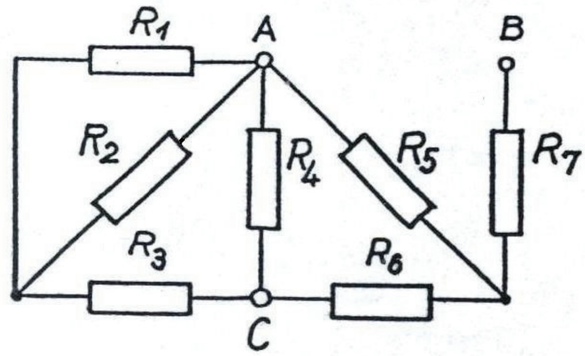
A tanulási cél az, hogy az egyáramú hálózatok tárgyalásának befejezéseképpen gyakorló számításokat végezzünk először eredő ellenállásoknak, majd egygenerátoros kapcsolások feszültségeinek és áramainak meghatározására.

Eredő ellenállás számítása

1. Példa

Számítsuk ki a kapcsolás jelölt kapcsai közötti eredő ellenállásokat (15.1. ábra)!

$R_1 = R_2 = R_3 = R_4 = R_5 = R_6 = R_7 = 13\Omega$



15.1. ábra

Megoldás

$R_{AB} = ((R_1 \times R_2 + R_3) \times R_4 + R_6) \times R_5 + R_7 = 21\Omega$

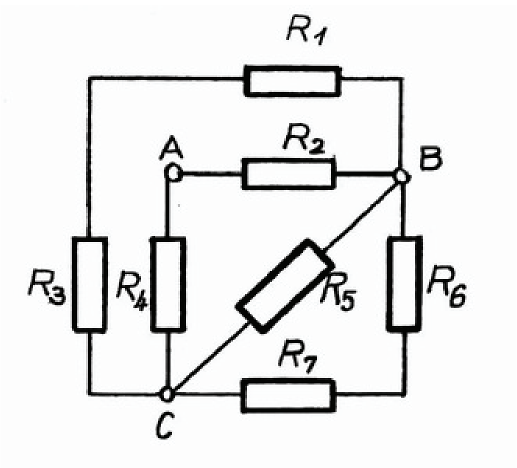
$R_{AC} = (R_1 \times R_2 + R_3) \times R_4 \times (R_5 + R_6) = 6\Omega$ R_7 értéke itt az eredményt nem befolyásolja.

$R_{BC} = ((R_1 \times R_2 + R_3) \times R_4 + R_5) \times R_6 + R_7 = 21\Omega$

2. Példa

Számítsuk ki a kapcsolás jelölt kapcsai közötti eredő ellenállásokat (15.2. ábra)!

$R_1 = R_2 = R_3 = R_4 = R_5 = R_6 = R_7 = R$



15.2. ábra

Megoldás

$$R_{AB} = ((R_1 + R_3) \times R_5 \times (R_6 + R_7) + R_4) \times R_2 = \frac{3}{5} R$$

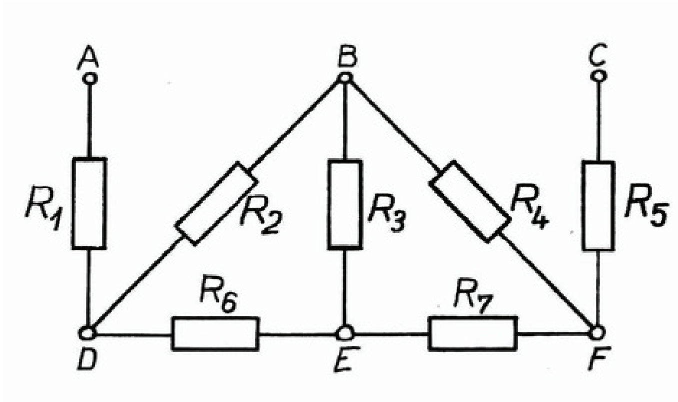
$$R_{AC} = ((R_1 + R_3) \times R_5 \times (R_6 + R_7) + R_2) \times R_4 = \frac{3}{5} R$$

$$R_{BC} = (R_1 + R_3) \times (R_2 + R_4) \times R_5 \times (R_6 + R_7) = \frac{2}{5} R$$

3. Példa

Számítsunk ki a kapcsolásban példaképpen néhány eredő ellenállást (15.3. ábra)!

$R_1 = R_2 = R_3 = R_4 = R_5 = R_6 = R_7 = 80\Omega$



15.3. ábra

Megoldás

$R_{AB} = ((R_4 + R_7) \times R_3 + R_6) \times R_2 + R_1 = 130\Omega$

$R_{AD} = R_1 = 80\Omega$

$R_{BD} = ((R_4 + R_7) \times R_3 + R_6) \times R_2 = 50\Omega$

$R_{BE} = (R_2 + R_6) \times R_3 \times (R_4 + R_7) = 40\Omega$

$R_{BF} = ((R_2 + R_6) \times R_3 + R_7) \times R_4 = 50\Omega$

$R_{DE} = ((R_4 + R_7) \times R_3 + R_2) \times R_6 = 50\Omega$

$R_{CE} = ((R_2 + R_6) \times R_3 + R_4) \times R_7 + R_5 = 130\Omega$

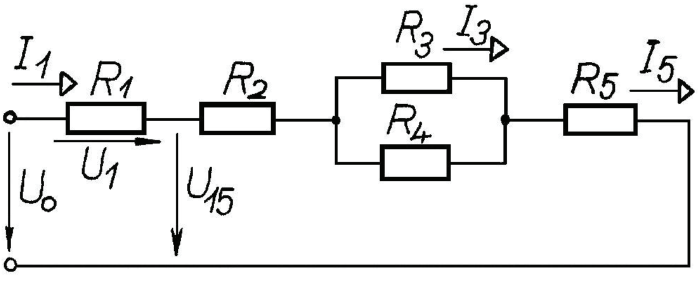
$R_{EF} = ((R_2 + R_6) \times R_3 + R_4) \times R_7 = 50\Omega$

Feszültségek és áramok számítása

4. Példa

Számítsuk ki a kapcsolásban jelölt feszültségeket és áramokat (15.4. ábra)!

$R_1 = R_2 = R_3 = 30\Omega$, $R_4 = R_5 = 60\Omega$, $U_0 = 420V$



15.4. ábra

Megoldás

$R_e = R_1 + R_2 + R_3 \times R_4 + R_5 = 30\Omega + 30\Omega + 60\Omega \times 30\Omega + 60\Omega = 140\Omega$

$$I_1 = I_5 = \frac{U_0}{R_e} = \frac{420V}{140\Omega} = 3A$$

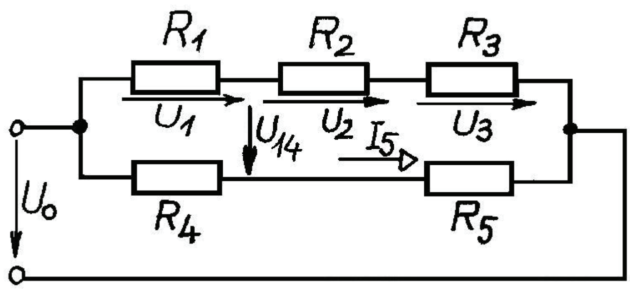
$U_1 = I_1 \cdot R_1 = 3A \cdot 30\Omega = 60V$

$$I_3 = I_1 \cdot \frac{R_4}{R_3 + R_4} = 3A \cdot \frac{60\Omega}{30\Omega + 60\Omega} = 2A$$

5. Példa

Számítsuk ki a kapcsolásban jelölt feszültségeket és áramokat (15.5. ábra)!
Számítsuk ki, hogy mekkora teljesítmény alakul hővé az R_2-es ellenálláson!

$R_1 = R_3 = 20\Omega$, $R_2 = R_4 = R_5 = 80\Omega$, $U_0 = 240V$



15.5. ábra

Megoldás

$$U_1 = U_0 \cdot \frac{R_1}{R_1 + (R_2 + R_3)} = 240V \cdot \frac{20\Omega}{20\Omega + 80\Omega + 20\Omega} = 40V$$

$$U_2 = U_0 \cdot \frac{R_2}{R_1 + R_2 + R_3} = 240V \cdot \frac{80\Omega}{20\Omega + 80\Omega + 20\Omega} = 160V$$

$$U_3 = U_0 \cdot \frac{R_3}{R_1 + R_2 + R_3} = 240V \cdot \frac{20\Omega}{20\Omega + 80\Omega + 20\Omega} = 40V$$

Ellenőrzés: $U_0 = U_1 + U_2 + U_3 = 40V + 160V + 40V = 240V$

(Megjegyzés: vegyük észre, hogy a három feszültség értékét a kapcsolás alsó ágának figyelembe vétele nélkül tudtuk kiszámítani!)

$$I_5 = \frac{U_0}{R_4 + R_5} = \frac{240V}{80\Omega + 80\Omega} = 1{,}5A$$

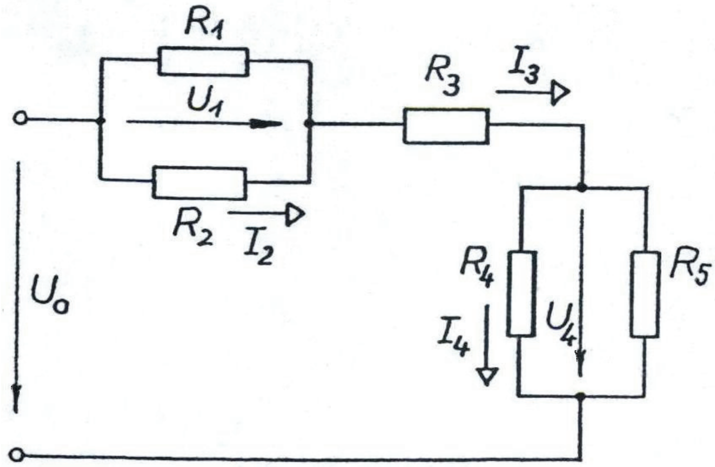
$$U_{14} = U_0 - U_1 - I_5 \cdot R_5 = 240V - 40V - 1{,}5A \cdot 80\Omega = 80V$$

$$P_2 = \frac{U_2^2}{R_2} = \frac{(160V)^2}{80\Omega} = 320W$$

6. Példa

Számítsuk ki a kapcsolásban jelölt feszültségeket és áramokat (15.6. ábra)!
Számítsuk ki, hogy mekkora teljesítmény disszipálódik az R_3-as ellenálláson!

$R_1 = R_2 = R_3 = 40\Omega$, $R_4 = 60\Omega$, $R_5 = 120\Omega$, $U_0 = 300V$



15.6. ábra

Megoldás

$R_e = R_1 \times R_2 + R_3 + R_4 \times R_5 = 40\Omega \times 40\Omega + 40\Omega + 60\Omega \times 120\Omega = 100\Omega$

$I_3 = \frac{U_0}{R_e} = \frac{300V}{100\Omega} = 3A$

$I_2 = I_3 \cdot \frac{R_1}{R_1 + R_2} = 3A \cdot \frac{40\Omega}{40\Omega + 40\Omega} = 1{,}5A$

$I_4 = I_3 \cdot \frac{R_5}{R_4 + R_5} = 3A \cdot \frac{120\Omega}{60\Omega + 120\Omega} = 2A$

$U_1 = U_2 = I_2 \cdot R_2 = 1{,}5A \cdot 40\Omega = 60V$

$U_4 = I_4 \cdot R_4 = 2A \cdot 60\Omega = 120V$

$P_3 = U_3 \cdot I_3 = I_3^2 \cdot R_3 = (2A)^2 \cdot 40\Omega = 160W$

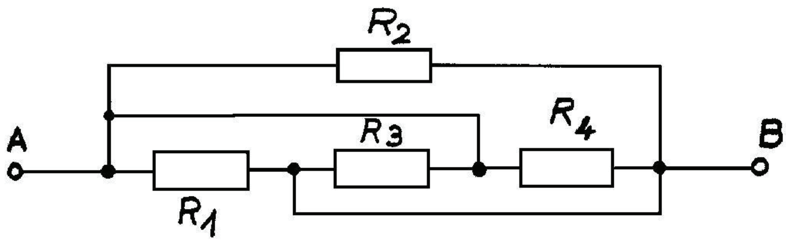
Ellenőrző feladatok

1. *Feladat*

Számítsa ki a kapcsolás jelölt kapcsai közötti eredő ellenállást (15.7. ábra)!

$R_1 = R_2 = R_3 = R_4 = 20\Omega$

Válassza ki a helyes végeredményt!



15.7. ábra

Válaszok R_{AB}

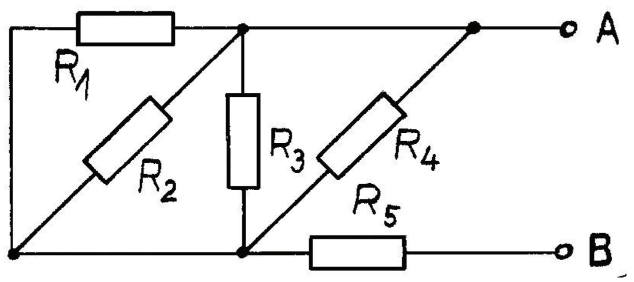
5Ω
10Ω
20Ω
40Ω
50Ω

2. *Feladat*

Számítsa ki a kapcsolás jelölt kapcsai közötti eredő ellenállást (15.8. ábra)!

$R_1 = R_2 = R_3 = R_4 = R_5 = 100\Omega$

Válassza ki a helyes végeredményt!



15.8. ábra

Válaszok R_{AB}

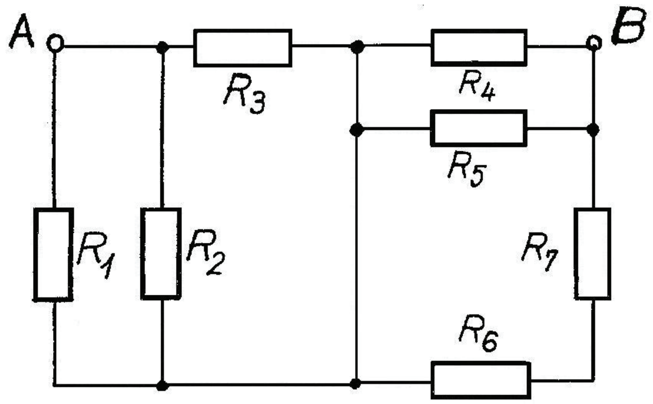
100Ω
125Ω
150Ω
200Ω
250Ω

3. Feladat

Számítsa ki a kapcsolás jelölt kapcsai közötti eredő ellenállást (15.9. ábra)!

$R_1 = R_2 = R_3 = R_4 = R_5 = R_6 = R_7 = 30\Omega$

Válassza ki a helyes végeredményt!



15.9. ábra

Válaszok R_{AB}

10Ω
12Ω
22Ω
25Ω
3Ω

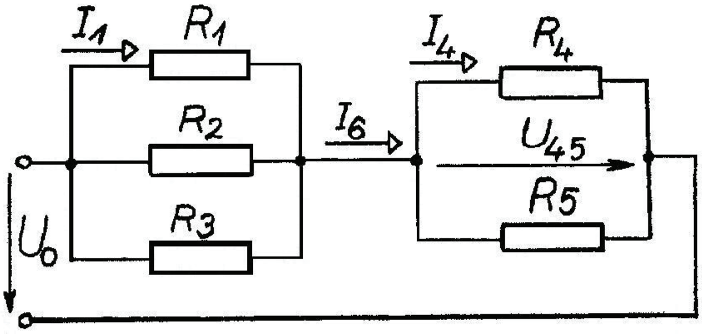
4. Feladat

Számítsa ki a kapcsolásban jelölt feszültséget és áramokat (15.10. ábra)!

Számítsa ki, hogy mekkora teljesítmény alakul hővé az R_4-es ellenálláson!

$R_1 = R_2 = R_3 = R_4 = 60\Omega$, $R_5 = 30\Omega$, $U_0 = 240V$

Válassza ki a helyes végeredményt!



15.10. ábra

Válaszok I_1

1A
2A
4A
6A
12A

Válaszok I_4

1A
2A
4A
6A
12A

Válaszok I_6

1A
2A
4A
6A
12A

Válaszok U_{45}

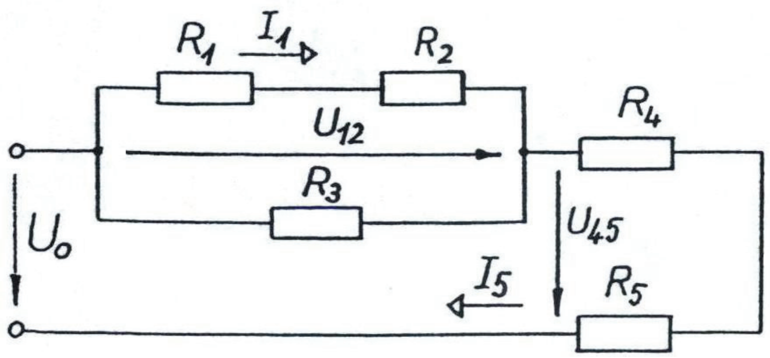
80V
120V
160V
240V
480V

Válaszok P_4

1W
20W
240W
400W
1200A

5. *Feladat*

Számítsa ki a kapcsolásban jelölt feszültségeket és áramokat (15.11. ábra)!
Számítsa ki, hogy mekkora teljesítmény alakul hővé az R_3-as ellenálláson!
$R_1 = R_2 = R_3 = R_4 = R_5 = 300\Omega$, $U_0 = 300V$
Válassza ki a helyes végeredményeket!



15.11. ábra

Válaszok I_1

0,1A
0,125A
0,375A
1A
1,2A

Válaszok I_5

0,1A
0,125A
0,375A
1A
1,2A

Válaszok U_{12}

5V
25V
75V
125V
225V

Válaszok U_{45}

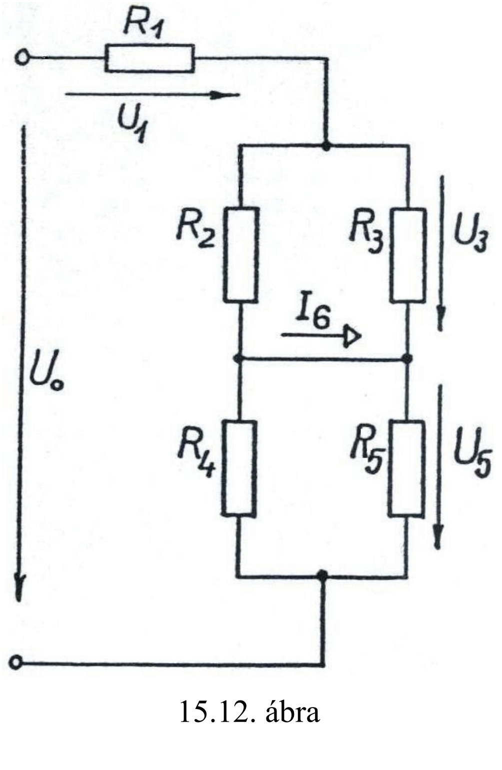
5V
25V
75V
125V
225V

Válaszok P_3

5W
18,75W
25W
125W
300W

6. Feladat

Számítsa ki a kapcsolásban jelölt feszültségeket és áramot (15.12. ábra)!
Számítsa ki, hogy mekkora teljesítmény alakul hővé az R_2-es ellenálláson!
$R_1 = 16\Omega$, $R_2 = 40\Omega$, $R_3 = R_5 = 60\Omega$, $R_4 = 30\Omega$, $U_0 = 180V$
Válassza ki a helyes végeredményeket!



15.12. ábra

Válaszok U_1

5V
25V
48V
72V
200V

Válaszok U_3

5V
25V
48V
72V
200V

Válaszok U_5

5V
20V
50V
60V
100V

Válaszok I_6

0,1A
0,2A
-0,1A
-0,2A
-1A

Válaszok P_2

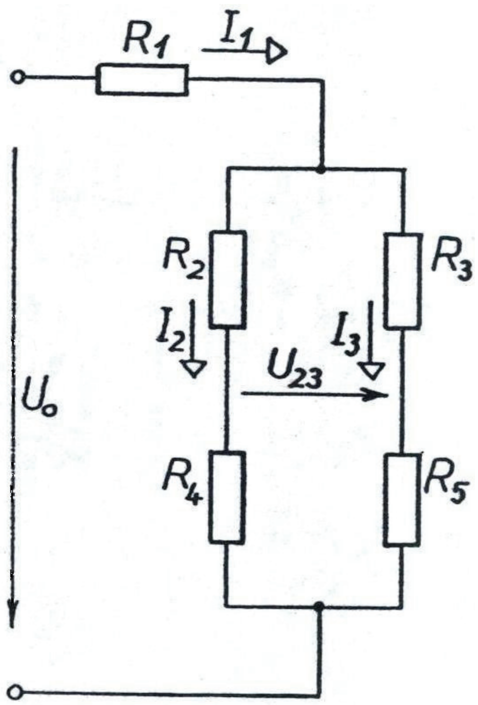
52,7W
129,6W
251W
282W
300W

7. *Feladat*

Számítsa ki a kapcsolásban jelölt feszültséget és áramokat (15.13. ábra)!

$R_1 = R_4 = 20\Omega$, $R_2 = R_3 = 40\Omega$, $R_5 = 80\Omega$, $U_0 = 180V$

Válassza ki a helyes végeredményeket!



15.13. ábra

Válaszok I_1

1A
2A
3A
4A
-4A

Válaszok I_2

1A
2A
3A
4A
-4A

Válaszok I_3

1A
2A
3A
4A
-4A

Válaszok U_{23}

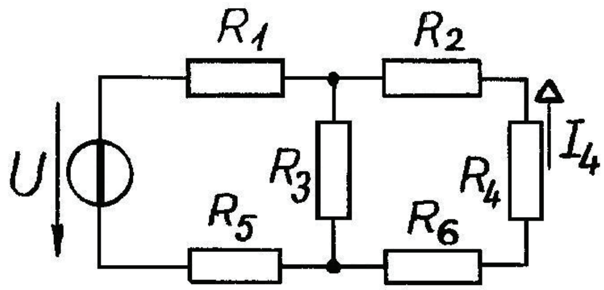
10V
20V
40V
50V
60V

8. *Feladat*

Számítsa ki a kapcsolásban jelölt áramot (15.14. ábra)!

$R_1 = R_2 = R_4 = R_5 = R_6 = 1\Omega$, $R_3 = 6\Omega$, $U_0 = 120V$

Válassza ki a helyes végeredményt!



15.14. ábra

Válaszok I_4

-10A
20A
-20A
30A
-30A
40A
-4A

TARTALOMJEGYZÉK