1. fejezet

Deriválás ismétlése, primitív függvény

Legyen $f(x)$ az $[a,b]$ intervallumon definiált korlátos függvény. Általánosan fogalmazva olyan F függvényt keresünk, melynek deriváltja f. Amennyiben létezik ilyen F függvény, azt a f **primitivfüggvény**ének nevezzük.

1.1. Definíció. Az F függvényt f egy primitív függvényének nevezzük az I intervallumon, ha $F'(x) = f(x)$ minden $x \in I$ esetén.

1.1. Példa. Keressük meg az $f(x) = 2x$ függvény primitív függvényét.

Megoldás: Az $F(x) = x^2$ nem az egyetlen olyan függvény, amelynek deriváltja $2x$. Az x^2+1 függvénynek is $2x$ a deriváltja, de ugyanígy az x^2+c függvénynek is, ahol c egy állandó. Így az $F(x) = x^2+c$ alakú a $2x$ függvény összes primitívfüggvénye. Tehát a feladatot megoldottuk. $\diamond$

1.1. Tétel. *Ha F az f egy primitív függvénye az I intervallumon, akkor f legáltalánosabb primitív függvénye az I-n az $F(x)+c$ függvény, ahol c tetszőleges állandó, vagyis egy függvénycsalád.*

Az f függvény primitív függvényeinek összességére speciális jelölést vezetünk be.

1.2. Definíció. Az f függvény összes primitív függvényének halmazát az f függvény x szerinti **határozatlan integrál**jának nevezzük, jelölése:

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x.$$

A $\int$ jel az **integráljel**. Az f függvény az integrál **integrandus**a, x az **integrál változója**.

1.2. Tétel. *Az alábbi táblázat első oszlopában megadtuk az f függvényt, a második oszlopban pedig ennek a határozatlan integrálját.*

f	$\int f(x)\,\mathrm{d}x$
x^n	$\frac{x^{n+1}}{n+1}+c$, *ha* $n\neq -1$
$\frac{1}{x}$	$\ln\lvert x\rvert+c$
a^x	$\frac{a^x}{\ln a}+c$
e^x	e^x+c
$\sin x$	$-\cos x+c$

f	$\int f(x)\,\mathrm{d}x$
$\cos x$	$\sin x+c$
$\frac{1}{\cos^2 x}$	$\mathrm{tg}\, x+c$
$\frac{1}{\sin^2 x}$	$-\mathrm{ctg}\, x+c$
$\frac{1}{1+x^2}$	$\mathrm{arctg} x+c$
$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arcsin x+c$

1.3. Tétel. *Összegfüggvény integrálja egyenlő a tagok integráljainak az összegével:*

$$\int f(x)+g(x)\,\mathrm{d}x=\int f(x)\,\mathrm{d}x+\int g(x)\,\mathrm{d}x.$$

Állandó szorzó az integráljel elé kiemelhető:

$$\int c\,f(x)\,\mathrm{d}x=c\int f(x)\,\mathrm{d}x.$$

1.2. Példa. Számítsa ki az alábbi határozatlan integrált:

$$\int\left(x^3+\sqrt{x}+\sqrt[4]{x}\right)\mathrm{d}x.$$

Megoldás: Először a gyökös kifejezéseket felírjuk hatvány alakban, így a fenti alapintegrálokat kapjuk:

$$\int\left(x^3+\sqrt{x}+\sqrt[4]{x}\right)\mathrm{d}x=\int\left(x^3+x^{\frac{1}{2}}+x^{\frac{1}{4}}\right)\mathrm{d}x=$$

A $\boxed{\int x^n\,\mathrm{d}x=\frac{x^{n+1}}{n+1}+c}$ alapján az összeg minden egyes tagjának határozatlan integrálja kiszámítható:

$$=\frac{x^4}{4}+\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}+\frac{x^{\frac{5}{4}}}{\frac{5}{4}}+c=\frac{x^4}{4}+\frac{2x^{\frac{3}{2}}}{3}+\frac{4x^{\frac{5}{4}}}{5}+c.$$

Tehát a feladatot megoldottuk. ⋄

1.3. Példa. Számítsa ki az alábbi határozatlan integrált:

$$\int \left(x\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} \right) \mathrm{d}x.$$

Megoldás: Az előző példához hasonlóan először a gyökös kifejezéseket felírjuk hatvány alakban, így a fenti alapintegrálokat kapjuk. Az $\frac{1}{x}$-et nem írjuk fel hatványalakban, mert annak a primitív függvénye $\ln|x|$, de az $\frac{1}{x^2}$-et már szintén hatványalakban írjuk fel:

$$\int \left(x\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} \right) \mathrm{d}x = \int \left(x^{\frac{3}{2}} + x^{-\frac{1}{2}} + \frac{1}{x} + x^{-2} \right) \mathrm{d}x$$

A $\boxed{\int x^n \,\mathrm{d}x = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c}$ és a $\boxed{\int \frac{1}{x} \,\mathrm{d}x = \ln|x| + c}$ alapján az összeg minden egyes tagjának határozatlan integrálja kiszámítható:

$$\frac{x^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}} + \frac{x^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + \ln|x| + \frac{x^{-1}}{-1} + c = \frac{2x^{\frac{5}{2}}}{5} + 2x^{\frac{1}{2}} + \ln|x| - \frac{1}{x} + c.$$

Tehát a feladatot megoldottuk. ⋄

1.4. Tétel. *Ha $F(x)$ a $f(x)$ függvény primitív függvénye, akkor*

$$\boxed{\int f(ax+b)\,\mathrm{d}x = \frac{F(ax+b)}{a} + c.}$$

1.4. Példa. Számítsa ki az alábbi határozatlan integrált:

$$\int e^{2x+3}\,\mathrm{d}x.$$

Megoldás: Vegyük észre, hogy az integrandus egy összetett függvény, ahol a külső függvény az $f(x) = e^x$ függvény, melynek primitív függvénye $F(x)$ önmaga, a belső függvény $2x+3$ pedig egy lineáris kifejezés, tehát alkalmazható a

$$\boxed{\int f(ax+b)\,\mathrm{d}x = \frac{F(ax+b)}{a} + c}$$

összefüggés:

$$\int e^{2x+3}\,\mathrm{d}x = \frac{e^{2x+3}}{2} + c.$$

Tehát a feladatot megoldottuk. ⋄

1.5. Példa. Számítsa ki az alábbi határozatlan integrált:

$$\int \frac{1}{1+(4x+3)^2}\,\mathrm{d}x.$$

Megoldás: Vegyük észre, hogy az integrandus egy összetett függvény, ahol a külső függvény $f(x)=\frac{1}{1+x^2}$, melynek primitív függvénye $F(x)=\operatorname{arctg} x$, a belső függvény $4x+3$ pedig egy lineáris kifejezés, tehát alkalmazható a

$$\boxed{\int f(ax+b)\,\mathrm{d}x = \frac{F(ax+b)}{a}+c}$$

összefüggés:

$$\int \frac{1}{1+(4x+3)^2}\,\mathrm{d}x = \frac{\operatorname{arctg}(4x+3)}{4}+c.$$

Tehát a feladatot megoldottuk. $\diamond$

1.1. Feladatok gyakorlatra

1.1. Feladat. Határozzuk meg a következő függvények deriváltját:

a) $f(x)=x^2$, $f(x)=x^3$, $f(x)=\sqrt{x}$, $f(x)=\sqrt[3]{x}$, $f(x)=x^{-1}$, $f(x)=(2x+1)^2$

b) $f(x)=2^x$, $f(x)=e^x$, $f(x)=\log_3 x$, $f(x)=\ln x$, $f(x)=e^{3x-5}$

c) $f(x)=\sin x$, $f(x)=\cos x$, $f(x)=\operatorname{tg} x$, $f(x)=\operatorname{ctg} x$, $f(x)=\operatorname{tg}(2x+\pi)$

d) $f(x)=\arcsin x$, $f(x)=\arccos x$, $f(x)=\operatorname{arctg} x$, $f(x)=\operatorname{arcctg} x$

e) $f(x)=\frac{x^2-x}{5}$, $f(x)=\frac{x^2+x+1}{x}$, $f(x)=\frac{x}{3x^2}+\frac{4}{2x}-\frac{2}{x^3}$, $f(x)=\sqrt[4]{x^6}$

f) $f(x)=\frac{2^x-\log_2 x}{2}$, $f(x)=\lg\sqrt{x}$

g) $f(x)=\frac{\sin^2 x+\cos x}{\sin x}$, $f(x)=\frac{1+2\sin x-\sin^2 x}{\cos x}$

h) $f(x)=2^x\cdot\sin x$, $f(x)=x^5\cdot\ln x$, $f(x)=\sqrt[4]{x}\cdot\operatorname{tg} x$, $f(x)=e^x\cdot\arcsin x$

i) $f(x)=\frac{x^2-x}{2x+3}$, $f(x)=\frac{\operatorname{tg} x}{\sqrt{x}}$, $f(x)=\frac{\arccos x}{\log_5 x}$, $f(x)=\frac{2^x}{\sin x}$

j) $f(x)=\sin^2 x$, $f(x)=\sin(x^2)$, $f(x)=\cos^3 x$, $f(x)=\cos(x^3)$

k) $f(x)=\sqrt{x^2+1}$, $f(x)=\sqrt{x^3+2x+1}$, $f(x)=\sqrt[4]{x^3+2x+1}$, $f(x)=\sqrt{(2x^2+1)^3}$

l) $f(x)=\sin(8x)$, $f(x)=\sin(\ln x)$, $f(x)=2^{\sin x}$, $f(x)=\operatorname{tg}\sqrt{x}$, $f(x)=\operatorname{arctg} x^2$, $f(x)=e^{-x^2}$

m) $f(x)=\operatorname{tg}\sqrt{x^2+x+2}$, $f(x)=\sqrt{2^{\operatorname{tg} x}}$, $f(x)=\log_3(\operatorname{arctg}^2 x)$

n) $f(x)=\ln(e^x+3)$, $f(x)=\ln(x^3+2)$, $f(x)=\ln\left(\frac{\sin x}{\sqrt{x}}\right)$, $f(x)=\mathrm{tg}\left(\frac{\ln x}{\sqrt{x^2+1}}\right)$, $f(x)=$ $=\frac{\ln^2(x+5)}{\sqrt{\sin x}}$

o) $f(x)=\arcsin\left(\frac{x^2}{\sqrt{x+4}}\right)+x^3\cdot\ln(x^3+2)$, $f(x)=\sqrt{\mathrm{ctg}\, x}+3^x\cdot\ln x$

p) $f(x)=x^x$, $f(x)=x^{\sin x}$, $f(x)=(\cos x)^{\sin x}$, $f(x)=(\ln x)^{\ln x}$, $f(x)=\sqrt[x]{x}$

1.2. Feladat. Határozzuk meg a következő függvények deriváltját:

a) $f(x)=(2x+1)^2$, $f(x)=(x^2+5x+6)^4$, $f(x)=x^{-1}$,

b) $f(x)=\sqrt{3x+4}$, $f(x)=\sqrt{x^2+1}$, $f(x)=\sqrt[3]{x^3+2x+1}$,

c) $f(x)=e^{2x+7}$, $f(x)=e^{x^4+5}$, $f(x)=3^{x^2+2x}$

d) $f(x)=\ln(5x)$, $f(x)=\ln(3x+2)$, $f(x)=\ln(x^3+x)$, $f(x)=\ln(\ln x)$, $f(x)=\ln(\cos x)$

e) $f(x)=\log_3(5x+4)$, $f(x)=\log_5(e^x+4)$,

f) $f(x)=\sin(3x+\pi)$, $f(x)=\cos(x^2+3)$, $f(x)=\cos^2 x$, $f(x)=\mathrm{ctg}(x^2)$, $f(x)=\mathrm{tg}(2x+\pi)$

g) $f(x)=\arcsin(2x+1)$, $f(x)=\mathrm{arctg}\,(3x+2)$, $f(x)=\mathrm{arctg}\,(x^2+4)$

1.3. Feladat. Határozzuk meg a következő függvények deriváltját:

a) $f(x)=x\cdot\sin(x)$, $f(x)=x^3\cdot\cos(x)$,$f(x)=x\cdot\ln(x)$, $f(x)=x^4\cdot e^x$,

b) $f(x)=e^x\cdot\sin(x)$, $f(x)=e^x\cdot\cos(x)$, $f(x)=e^x\cdot\ln(x)$,

c) $f(x)=4x\cdot\sin(6x)$,$f(x)=x^3\cdot e^{4x+5}$, $f(x)=5x\cdot\ln(5x)$,

1.4. Feladat. Adja meg a következő függvények egy primitív függvényét:

a) $f(x)=1$, $f(x)=x$, $f(x)=x^2$, $f(x)=\sqrt{x}$, $f(x)=x^{-1}$

b) $f(x)=\sin x$, $f(x)=\cos x$, $f(x)=e^x$

c) $f(x)=(2x+1)^2$, $f(x)=\sin(8x+1)$,

1.5. Feladat. Számítsa ki az alábbi határozatlan integrálokat:

a) $\int 4x^2-3x+1\,\mathrm{d}x$, $\int 5x^5+3x^2+\sqrt{x}\,\mathrm{d}x$, $\int \sqrt[3]{x}+\sqrt[4]{x}\,\mathrm{d}x$, $\int x\sqrt{x}\,\mathrm{d}x$, $\int \frac{x}{\sqrt[3]{x}}\,\mathrm{d}x$,

b) $\int \sqrt{x\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$, $\int \frac{1}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$, $\int \left(x\sqrt{x}-4e^x\right)\mathrm{d}x$, $\int \frac{x+1}{\sqrt[3]{x}}\,\mathrm{d}x$, $\int \frac{1}{(2x+1)^3}\,\mathrm{d}x$,

c) $\int e^{5x+3}\,\mathrm{d}x$, $\int \frac{1}{e^x}\,\mathrm{d}x$, $\int \frac{1}{x}+3^{x+2}\,\mathrm{d}x$ $\int \sin(2x+\pi)\,\mathrm{d}x$, $\int \cos(3x)\,\mathrm{d}x$

d) $\int \frac{1}{\cos^2(3x+\pi)}\,\mathrm{d}x$, $\int \left(e^{x+2}+\frac{1}{1+(5x+1)^2}\right)\mathrm{d}x$, $\int \left(\frac{1}{2x+3}+\frac{1}{\sqrt{1-(2x+3)^2}}\right)\mathrm{d}x$

1.2. Gyakorló feladatok

1.6. Feladat. Számítsa ki az alábbi határozatlan integrálokat: $\int 5x^4 - 7x^2 + 1 \,\mathrm{d}x$, $\int x\sqrt{x\sqrt{x}} \,\mathrm{d}x$, $\int \cos(3x+\pi) \,\mathrm{d}x$, $\int \frac{1}{\sin^2(4x)} \,\mathrm{d}x$.

2. fejezet

Határozatlan integrál

2.1. Tétel. *Ha a $K'(x)$ függvény a $K(x)$ deriváltja, akkor bármely olyan differenciálható $B(x)$ függvény esetén, amelyre $K'(B(x))$ értelmezve van egy intervallumon*

$$\int K'(B(x))B'(x)\,\mathrm{d}x = K(B(x)).$$

Egy-két fontosabb eset:

a) $\boxed{\displaystyle\int \frac{g'(x)}{g(x)}\,\mathrm{d}x = \ln|g(x)| + c}$

b) $\displaystyle\int g'(x)g^n(x)\,\mathrm{d}x = \frac{(g(x))^{n+1}}{n+1} + c,$ $n \neq -1$

c) $\displaystyle\int g'(x)\sin(g(x))\,\mathrm{d}x = -\cos(g(x)) + c$

d) $\displaystyle\int g'(x)e^{g(x)}\,\mathrm{d}x = e^{g(x)} + c$

2.1. Példa. Számítsa ki az alábbi határozatlan integrált: $\displaystyle\int \frac{\cos(2x)+1}{\sin(2x)+2x}\,\mathrm{d}x.$

Megoldás: Vegyük észre, hogy a nevező $g(x) = \sin(2x) + 2x$ deriváltja: $g'(x) = 2\cos(2x) + 2$.[1] Ez pontosan a számláló kétszerese. Tehát ha a számlálót szorzom 2-vel, akkor $\frac{1}{2}$-del is szorozni kell, hogy az integrál ne változzon meg:

$$\int \frac{\cos(2x)+1}{\sin(2x)+2x}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int \frac{2\cos(2x)+2}{\sin(2x)+2x}\,\mathrm{d}x.$$

Így most már az integrandus $\frac{g'}{g}$ tipusú, tehát a 2.1. a) tétel alapján

$$\int \frac{g'(x)}{g(x)}\,\mathrm{d}x = \ln|g(x)| + c,$$

így a primitív függvény:

[1] A $\sin(2x)$ deriváltja $2\cos(2x)$, hiszen a külső függvény $K(x) = \sin(x)$ deriváltja $K'(x) = \cos(x)$, a belső függvény $B(x) = 2x$ deriváltja $B'(x) = 2$, így a külső függvény deriváltja a belső függvény helyen szorozva a belső függvény deriváltjával $K'(B(x)) \cdot B'(x) = 2\cos(2x)$.

$$\int \frac{\cos(2x)+1}{\sin(2x)+2x}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int \frac{2\cos(2x)+2}{\sin(2x)+2x}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\ln(\sin(2x)+2x)+c.$$

Tehát a feladatot megoldottuk. $\diamond$

2.2. Példa. Számítsa ki az alábbi határozatlan integrált: $\int \frac{1}{x}\sqrt[3]{4+4\ln x}\,\mathrm{d}x$.

Megoldás: Vegyük észre, hogy a gyök alatti mennyiség $g(x) = 4+4\ln x$ deriváltja: $g'(x)=4\frac{1}{x}$. Tehát ha az $\frac{1}{x}$-t szorzom 4-gyel, akkor $\frac{1}{4}$-del is szorozni kell, hogy az integrál ne változzon meg:

$$\int \frac{1}{x}\sqrt[3]{4+4\ln x}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{4}\int 4\frac{1}{x}\sqrt[3]{4+4\ln x}\,\mathrm{d}x.$$

A gyökös kifejezést írjuk át hatvány alakra

$$\int \frac{1}{x}\sqrt[3]{4+4\ln x}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{4}\int 4\frac{1}{x}\sqrt[3]{4+4\ln x}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{4}\int 4\frac{1}{x}(4+4\ln x)^{\frac{1}{3}}\,\mathrm{d}x.$$

Így most már az integrandus $g'(x)g^n(x)$ tipusú, tehát a 2.1. b) tétel alapján

$$\boxed{\int g'(x)g^n(x)\,\mathrm{d}x = \frac{(g(x))^{n+1}}{n+1}+c, n \neq -1}$$

így a primitív függvény:

$$\int \frac{1}{x}\sqrt[3]{4+4\ln x}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{4}\int 4\frac{1}{x}(4+4\ln x)^{\frac{1}{3}}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{4}\frac{(4+4\ln x)^{\frac{4}{3}}}{\frac{4}{3}}+c.$$

Tehát a feladatot megoldottuk. $\diamond$

2.3. Példa. Számítsa ki az alábbi határozatlan integrált: $\int \frac{\sin x}{1+\cos^2 x}\,\mathrm{d}x$.

Megoldás: Vegyük észre, hogy a $g(x) = \cos x$ deriváltja: $g'(x) = -\sin x$. Tehát ha a $\sin x$-t szorzom -1-gyel, akkor mégegyszer kell -1-gyel szorozni, hogy az integrál ne változzon meg:

$$\int \frac{\sin x}{1+\cos^2 x}\,\mathrm{d}x = (-1)\int \frac{-\sin x}{1+\cos^2 x}\,\mathrm{d}x.$$

Így most már az integrandus $\frac{g'(x)}{1+g^2(x)}$ tipusú, tehát az (2.1 tétel) alapján

$$\boxed{\int \frac{g'(x)}{1+g^2(x)}\,\mathrm{d}x = \operatorname{arctg}(g(x))+c,}$$

így a primitív függvény:

$$\int \frac{\sin x}{1+\cos^2 x}\,\mathrm{d}x = (-1)\int \frac{-\sin x}{1+\cos^2 x}\,\mathrm{d}x = (-1)\cdot \operatorname{arctg}(\cos x)+c.$$

Tehát a feladatot megoldottuk. $\diamond$

Parciális integrálás

A szorzat függvény deriválási szabálya:

$$(f(x)\cdot g(x))' = f'(x)\cdot g(x)+f(x)\cdot g'(x)$$

Mindkét oldalt integrálva:

$$f(x)\cdot g(x) = \int f'(x)\cdot g(x)\,\mathrm{d}x + \int f(x)\cdot g'(x)\,\mathrm{d}x$$

Átrendezve kapjuk az alábbi tételt:

2.2. Tétel. *Ha f és g deriválható függvények az I intervallumon és $f(x)g'(x)$ integrálja létezik az I-n, akkor*

$$\boxed{\int f(x)g'(x)\,\mathrm{d}x = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)\,\mathrm{d}x.}$$

2.4. Példa. Számítsa ki az alábbi határozatlan integrált: $\int \ln(x+2)\,\mathrm{d}x$.

Megoldás: Az $\ln(x)$ függvényből látható, hogy a feladatot a parciális integrálás módszerével kell megoldani (2.2 tétel):

$$\int f(x)g'(x)\,\mathrm{d}x = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)\,\mathrm{d}x.$$

Az $f(x) = \ln(x+2)$ és a $g'(x) = 1$ választás megfelelő, hiszen az $\ln(x+2)$ függvényt deriválni tudom könnyen:

$$\begin{array}{ll} f(x) = \ln(x+2) & g'(x) = 1 \\ f'(x) = \frac{1}{x+2} & g(x) = x \end{array}$$

Ezután behelyettesítve a fenti képletbe:

$$\int \ln(x+2)\,\mathrm{d}x = x\cdot\ln(x+2) - \int \frac{1}{x+2}\cdot x\,\mathrm{d}x$$

Az $\int \frac{1}{x+2}\cdot x\,\mathrm{d}x$ integrál kiszámításához az integrandust egy kicsit átalakítjuk:

$$\int \frac{1}{x+2}\cdot x\,\mathrm{d}x = \int \frac{x+2-2}{x+2}\,\mathrm{d}x = \int \left(\frac{x+2}{x+2} - \frac{2}{x+2}\right)\mathrm{d}x = \int \left(1-\frac{2}{x+2}\right)\mathrm{d}x.$$

Így az $\int \left(1-\frac{2}{x+2}\right)\mathrm{d}x$ integrál könnyen kiszámítható:

$$\int \left(1-\frac{2}{x+2}\right)\mathrm{d}x = x - 2\ln|x+2| + c.$$

Tehát a feladat megoldása:

$$\int \ln(x+2)\,\mathrm{d}x = x\cdot\ln(x+2) - \int \frac{1}{x+2}\cdot x\,\mathrm{d}x = x\cdot\ln(x+2) - \int\left(1-\frac{2}{x+2}\right)\mathrm{d}x$$
$$= x\cdot\ln(x+2) - (x-2\ln|x+2|) + c = x\cdot\ln(x+2) - x + 2\ln|x+2| + c.$$

Tehát a feladatot megoldottuk. ⋄

2.5. Példa. Számítsa ki az alábbi határozatlan integrált: $\displaystyle\int x\sin 3x\,\mathrm{d}x.$

Megoldás: Mivel az x és a $\sin 3x$ függvények nem egymás deriváltfüggvényei, így a feladatot a parciális integrálás módszerével kell megoldani (2.2 tétel):

$$\int f(x)g'(x)\,\mathrm{d}x = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)\,\mathrm{d}x.$$

Az $f(x)=x$ és a $g'(x)=\sin 3x$ választás megfelelő, hiszen az x függvényt deriváltja egyszerűsíti az integrált:

$$\begin{array}{ll} f(x)=x & g'(x)=\sin 3x \\ f'(x)=1 & g(x)=\frac{-\cos 3x}{3} \end{array}$$

Ezután behelyettesítve a fenti képletbe:

$$\int x\sin 3x\,\mathrm{d}x = x\cdot\frac{-\cos 3x}{3} - \int 1\cdot\frac{-\cos 3x}{3}\,\mathrm{d}x$$

Az $\int 1\cdot\frac{-\cos 3x}{3}\,\mathrm{d}x$ integrál könnyen kiszámítható:

$$\int 1\cdot\frac{-\cos 3x}{3}\,\mathrm{d}x = \left(-\frac{1}{3}\right)\cdot\int \cos 3x\,\mathrm{d}x = \left(-\frac{1}{3}\right)\cdot\frac{\sin 3x}{3} + c.$$

Tehát a feladat megoldása:

$$\int x\sin 3x\,\mathrm{d}x = x\cdot\frac{-\cos 3x}{3} - \int 1\cdot\frac{-\cos 3x}{3}\,\mathrm{d}x$$
$$= x\cdot\frac{-\cos 3x}{3} + \frac{1}{3}\cdot\frac{\sin 3x}{3} + c = \frac{-x\cdot\cos 3x}{3} + \frac{1}{9}\cdot\sin 3x + c.$$

Tehát a feladatot megoldottuk. $\diamond$

Helyettesítéses integrálás

2.3. Tétel. *Bármely olyan differenciálható $x = x(t)$ függvény esetén, amelyre $f(x(t))$ értelmezve van egy intervallumon*

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x = \int f(x(t))x'(t)\,\mathrm{d}t.$$

Egy-két fontosabb eset:

a) $x = \sin(t)$, $x' = \cos(t)$

b) $\sqrt{x} = t$, $x = t^2$, $x' = 2t$

c) $e^x = t$, $x = \ln(t)$, $x' = \frac{1}{t}$

d) $\operatorname{tg}\frac{x}{2} = t$, $x = 2\cdot\operatorname{arctg}(t)$, $x' = \frac{2}{1+t^2}$, $\sin x = \frac{2t}{1+t^2}$, $\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$

2.6. Példa. Határozza meg a következő integrált helyettesítéssel:

$$\int x\sqrt{x+2}\,\mathrm{d}x.$$

Megoldás: A $\sqrt{x+2}$-t t-vel helyettesítjük, majd kifejezzük az x-et:

$$\sqrt{x+2} = t$$

$$x+2 = t^2$$

$$x = t^2 - 2.$$

A kapott egyenletet t szerint deriváljuk, t szerinti deriváltat is vesszővel jelöljük.

$$x' = 2t$$

Az x' helyére bevezetjük a $\frac{dx}{dt}$ jelölést, ebben a jelölésben jól látszik, hogy t szerinti deriváltról van szó:

$$\frac{dx}{dt} = 2t.$$

Formálisan szorzunk $\mathrm{d}t$-vel.[2]

$$\mathrm{d}x = 2t\,\mathrm{d}t.$$

Összefoglalva az alábbi helyettesítéseket írjuk az eredeti integrálba:

$$\boxed{\begin{aligned}\sqrt{x+2} &= t\\ x &= t^2-2\\ \mathrm{d}x &= 2t\,\mathrm{d}t.\end{aligned}}$$

A behelyettesítés után egy egyszerű polinom primitívfüggvényét kell meghatároznunk:

$$\int x\sqrt{x+2}\,\mathrm{d}x = \int (t^2-2)\cdot t\cdot 2t\,\mathrm{d}t = \int (2t^4-4t^2)\,\mathrm{d}t =$$

A primitívfüggvénybe a t helyére visszaírjuk a $\sqrt{x+2}$-t:

$$= \frac{2t^5}{5} - \frac{4t^3}{3} + c = \frac{2\cdot(\sqrt{x+2})^5}{5} - \frac{4\cdot(\sqrt{x+2})^3}{3} + c = \frac{2\cdot(x+2)^{\frac{5}{2}}}{5} - \frac{4\cdot(x+2)^{\frac{3}{2}}}{3} + c.$$

Tehát a feladatot megoldottuk. ◇

2.7. Példa. Határozza meg a következő integrált helyettesítéssel:

$$\int \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x.$$

Megoldás: Sajnos az előző feladatban alkalmazott helyettesítés nem vezet célra, mert a helyettesítés után is gyökös kifejezés lesz az integrandus. Így ennél a feladatnál más utat választunk. Észrevesszük, hogy ha az x-et $\sin(t)$-vel helyettesítjük[3], akkor

$$\sqrt{1-x^2} = \sqrt{1-\sin^2 t}.$$

Majd a $\sin^2 t + \cos^2 t = 1$ trigonometrikus összefüggést átrendezve és $1-\sin^2 t = \cos^2 t$-t helyettesítve a gyök alá:

$$\sqrt{1-x^2} = \sqrt{1-\sin^2 t} = \sqrt{\cos^2 t}.$$

[2] Matematikailag a leírt módszer nem precíz, a matematikailag pontos megfogalmazása a fenti tételben található. A gyakorlatban ezzel a módszerrel könnyebben látszik, hogy mi helyére mit kell helyettesíteni.

[3] Egyrészt világos, hogy a gyökös kifejezés miatt $1-x^2 \geq 0$, így az $-1 \leq x \leq 1$. Másrészt az $x(t) = \sin t$ függvény nem kölcsönösen égyértelmű, ezért megszorítjuk, a szokásos $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$ intervallumra, melyen a függvény szigorúan monoton nővő és így kölcsönösen egyértelmű, sőt ami számunkra még fontos, pontosan a $[-1;1]$ intervallumra képez.

Végül felhasználjuk, hogy $\sqrt{a^2} = |a|$

$$\sqrt{1-x^2} = \sqrt{1-\sin^2 t} = |\cos t|.$$

Az előző lábjegyzet alapján a $t \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$, így a $\cos t$ ezen az intervallumon pozitív, tehát az abszolútértéke önmaga:

$$\sqrt{1-x^2} = \sqrt{1-\sin^2 t} = |\cos t| = \cos t.$$

A $x(t) = \sin t$ egyenletet t szerint deriváljuk, t szerinti deriváltat is vesszővel jelöljük.

$$x' = \cos t$$

Az x' helyére bevezetjük a $\frac{dx}{dt}$ jelölést, ebben a jelölésben jól látszik, hogy t szerinti deriváltról van szó:

$$\frac{dx}{dt} = \cos t.$$

Formálisan szorzunk $\mathrm{d}t$-vel.

$$\mathrm{d}x = \cos t\,\mathrm{d}t.$$

Összefoglalva az alábbi helyettesítéseket írjuk az eredeti integrálba:

$$\boxed{\begin{gathered} x(t) = \sin t \\ \sqrt{1-x^2} = \cos t \\ \mathrm{d}x = \cos t\,\mathrm{d}t. \end{gathered}}$$

A behelyettesítés után a következő trigonometrikus függvényt kapjuk:

$$\int \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x = \int \cos t \cos t\,\mathrm{d}t = \int \cos^2 t\,\mathrm{d}t =$$

Felhasználjuk a $\cos^2 t = \frac{1+\cos 2t}{2}$ trigonometrikus össszefüggést és meghatározzuk a primitívfüggvényt:

$$= \int \frac{1+\cos 2t}{2}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}t + \frac{\sin 2t}{4} + c =$$

Az előző lábjegyzet szerint a $x(t) = \sin t$ függvény a megadott intervallumokon kölcsönösen egértelmű, így létezik az inverz függvénye, melyre

$$t = \arcsin x.$$

Ezt behelyettesítve kapjuk a megoldást:

$$= \frac{1}{2}\arcsin x + \frac{\sin(2\arcsin x)}{4} + c.$$

Tehát a feladatot megoldottuk. $\diamond$

2.1. Feladatok gyakorlatra

2.1. Feladat. Számítsa ki az alábbi határozatlan integrálokat:

a) $\int \frac{g'(x)}{g(x)}\,\mathrm{d}x$, $\int \frac{2x}{x^2+1}\,\mathrm{d}x$ $\int \frac{3x^2}{x^3+4}\,\mathrm{d}x$, $\int \frac{3x^2+2}{x^3+2x}\,\mathrm{d}x$, $\int \frac{x+1}{x^2+2x-1}\,\mathrm{d}x$,
$\int \frac{1}{x\ln x}\,\mathrm{d}x$, $\int \frac{1}{\cos^2 x\,\mathrm{tg}\,x}\,\mathrm{d}x$ $\int \frac{1}{(1+x^2)\mathrm{arctg}\,x}\,\mathrm{d}x$, $\int \frac{e^{3x}}{e^{3x}+1}\,\mathrm{d}x$, $\int \mathrm{tg}\,x\,\mathrm{d}x$,
$\int x^5\,\mathrm{tg}\,x^6\,\mathrm{d}x$, $\int \frac{\sin 2x}{1+\sin^2 x}\,\mathrm{d}x$, $\int \frac{\sqrt{1-x^2}}{(1-x^2)\arccos x}\,\mathrm{d}x$,

b) $\int g^n(x)g'(x)\,\mathrm{d}x$, $\int 2x\sqrt{x^2+1}\,\mathrm{d}x$, $\int x^2(2x^3+4)^2\,\mathrm{d}x$, $\int x^2\sqrt{6x^3+4}\,\mathrm{d}x$,
$\int (3x^2+2)\sqrt{x^3+2x}\,\mathrm{d}x$, $\int \frac{3x^2}{\sqrt{x^3-2}}\,\mathrm{d}x$, $\int \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\,\mathrm{d}x$, $\int \frac{2x}{\sqrt[3]{x^2+1}}\,\mathrm{d}x$,
$\int e^x(1-e^x)^3\,\mathrm{d}x$, $\int \frac{e^x}{\sqrt[3]{1+e^x}}\,\mathrm{d}x$, $\int \sin x\cos x\,\mathrm{d}x$, $\int \sin x\cos^3 x\,\mathrm{d}x$, $\int \frac{\sin^5 x}{\cos^7 x}\,\mathrm{d}x$,
$\int \frac{\mathrm{arctg}^{\,2} x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$,

c) $\int g'(x)e^{g(x)}\,\mathrm{d}x$, $\int g'(x)\sin g(x)\,\mathrm{d}x$, $\int \frac{g'(x)}{1+g^2(x)}\,\mathrm{d}x$, $\int \frac{g'(x)}{\sqrt{1-g^2(x)}}\,\mathrm{d}x$,
$\int xe^{-x^2}\,\mathrm{d}x$, $\int \sin 8x\,\mathrm{d}x$, $\int x\sin x^2\,\mathrm{d}x$, $\int x^2\sin x^3\,\mathrm{d}x$, $\int \frac{\cos(\ln x)}{x}\,\mathrm{d}x$,
$\int \frac{\cos x}{1+\sin^2 x}\,\mathrm{d}x$, $\int \frac{3^x}{1+3^{2x}}\,\mathrm{d}x$, $\int \frac{e^x}{\sqrt{1-e^{2x}}}\,\mathrm{d}x$, $\int \frac{x^2}{\sqrt{1-x^6}}\,\mathrm{d}x$ $\int \frac{1}{1+4x^2}\,\mathrm{d}x$,
$\int \frac{1}{4+x^2}\,\mathrm{d}x$, $\int \frac{1}{x^2+8x+17}\,\mathrm{d}x$, $\int \frac{1}{\sqrt{9-x^2}}\,\mathrm{d}x$,

2.2. Feladat. Számítsa ki az alábbi határozatlan integrálokat:

a) $\int \frac{g'(x)}{g(x)}\,\mathrm{d}x$, $\int \frac{2x+6}{x^2+4x+5}\,\mathrm{d}x$, $\int \frac{e^x+1}{e^x+e^{-x}+2}\,\mathrm{d}x$,

b) $\int g^n(x)g'(x)\,\mathrm{d}x$, $\int \sin^3 x\,\mathrm{d}x$, $\int \cos^3 x\,\sin^4 x\,\mathrm{d}x$,

2.3. Feladat. Határozza meg a következő integrálokat parciális integrálással:

$$\int f'(x)g(x)\,\mathrm{d}x = f(x)g(x) - \int f(x)g'(x)\,\mathrm{d}x.$$

a) $\int x^n e^x\,\mathrm{d}x$, $\int x^n\sin x\,\mathrm{d}x$, $\int xe^x\,\mathrm{d}x$, $\int x\sin x\,\mathrm{d}x$, $\int x\cos x\,\mathrm{d}x$, $\int x^3e^x\,\mathrm{d}x$,
$\int x^2e^{4x}\,\mathrm{d}x$, $\int x^3e^{-x^2}\,\mathrm{d}x$, $\int (2x+1)e^{x+1}\,\mathrm{d}x$, $\int (x+1)2^x\,\mathrm{d}x$, $\int 2x\sin 6x\,\mathrm{d}x$,
$\int 4x\cos 4x\,\mathrm{d}x$, $\int 3x^2\sin 5x\,\mathrm{d}x$, $\int 2x^3\sin(x^2)\,\mathrm{d}x$,

b) logaritmus- és arkuszfüggvények: $\int \ln x \,\mathrm{d}x$, $\int \lg x \,\mathrm{d}x$, $\int x \ln x \,\mathrm{d}x$, $\int \frac{\ln x}{x^2} \,\mathrm{d}x$, $\int x^5 \ln^2 x \,\mathrm{d}x$, $\int \operatorname{arctg} x \,\mathrm{d}x$, $\int x \operatorname{arctg} x \,\mathrm{d}x$, $\int \arcsin\left(\frac{x}{3}\right) \mathrm{d}x$

2.4. Feladat. Határozza meg a következő integrálokat helyettesítéssel:

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x = \int f(x(t))\,x'(t)\,\mathrm{d}t.$$

a) $\int \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x$, $\int \sqrt{16-x^2}\,\mathrm{d}x$, $\int \sqrt{25-4x^2}\,\mathrm{d}x$,

b) $\int x\sqrt{x+4}\,\mathrm{d}x$, $\int x\sqrt{5x+3}\,\mathrm{d}x$, $\int (3x+6)\sqrt{2x-4}\,\mathrm{d}x$, $\int \frac{2x}{\sqrt{x+1}}\,\mathrm{d}x$, $\int \frac{2x}{\sqrt{6x+4}}\,\mathrm{d}x$,

c) $\int \frac{e^x-1}{e^{3x}}\,\mathrm{d}x$,

2.2. Gyakorló feladatok

2.5. Feladat. Számítsa ki az alábbi határozatlan integrálokat!

$\int \frac{x}{2} e^{2x}\,\mathrm{d}x$, $\int x \sin(3x)\,\mathrm{d}x$, $\int \frac{1}{2} \ln x\,\mathrm{d}x$, $\int \operatorname{arctg} \frac{x}{2}\,\mathrm{d}x$.

2.6. Feladat. Számítsa ki az alábbi határozatlan integrálokat!

$\int \sin x \cos^2 x\,\mathrm{d}x$, $\int \frac{e^x}{e^x+2}\,\mathrm{d}x$, $\int \frac{\sin(x+\pi)}{\cos(x+\pi)}\,\mathrm{d}x$, $\int \frac{1}{x}\sqrt[5]{\ln x+1}\,\mathrm{d}x$.

2.7. Feladat. Számítsa ki az alábbi határozatlan integrálokat!

$\int \sqrt{16-x^2}\,\mathrm{d}x$, $\int x\sqrt{2x+1}\,\mathrm{d}x$,

2.3. Vizsgafeladatok

2.8. Feladat. Határozza meg a következő integrálokat parciális integrálással:

$$\int f'(x)g(x)\,\mathrm{d}x = f(x)g(x) - \int f(x)g'(x)\,\mathrm{d}x.$$

a) logaritmus- és arkuszfüggvények: $\int x^2 \ln(x^2+1)\,\mathrm{d}x$, $\int \arcsin(2x+3)\,\mathrm{d}x$, $\int \frac{x \arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x$, $\int x \arcsin x\,\mathrm{d}x$, $\int (4x^3+1) \operatorname{arctg} x\,\mathrm{d}x$,

b) $\int e^x \sin x \,\mathrm{d}x$, $\int e^x \cos^2 x \,\mathrm{d}x$, $\int \sin^2 x \,\mathrm{d}x$, $\int \cos^2 x \,\mathrm{d}x$, $\int \sin^4 x \,\mathrm{d}x$, $\int \cos^4 x \,\mathrm{d}x$,

2.9. Feladat. Határozza meg a következő integrálokat helyettesítéssel:

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x = \int f(x(t))\,x'(t)\,\mathrm{d}t.$$

a) $\int x^2\sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x$, $\int (2x+4)\sqrt{(1-x^2)^3}\,\mathrm{d}x$, $\int \frac{x^3}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x$, $\int \sqrt{2-2x-x^2}\,\mathrm{d}x$

b) $\int x^4\sqrt{5x+3}\,\mathrm{d}x$, $\int \frac{3x^2+2}{\sqrt[3]{6x-4}}\,\mathrm{d}x$,

c) $\int \frac{e^{2x}}{e^x-1}\,\mathrm{d}x$, $\int \frac{e^{2x}}{1+e^x}\,\mathrm{d}x$,

2.4. Kiegészítő anyag

2.10. Feladat. Határozza meg a következő integrálokat helyettesítéssel:

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x = \int f(x(t))\,x'(t)\,\mathrm{d}t.$$

a) $\int \frac{e^{2x}-2e^x}{1+e^{2x}}\,\mathrm{d}x$, $\int \frac{4}{e^{2x}-4}\,\mathrm{d}x$,

b) $\int \frac{1+\sin x}{1-\cos x}\,\mathrm{d}x$, $\int \frac{1}{\cos x}\,\mathrm{d}x$, $\int \frac{1}{1+\sin x}\,\mathrm{d}x$,

2.11. Feladat. Határozza meg a következő integrálokat parciális törtekre bontás módszerével:

a) $\int \frac{3x+6}{(x-2)(x+4)}\,\mathrm{d}x$, $\int \frac{2}{x^3-x}\,\mathrm{d}x$,

b) $\int \frac{x^2+5x+8}{(x+2)^3}\,\mathrm{d}x$, $\int \frac{2x+1}{(x-1)^2}\,\mathrm{d}x$,

c) $\int \frac{2x^2+2x+3}{(x^2+1)(2x^2+3)}\,\mathrm{d}x$, $\int \frac{5-18x-6x^2}{(2x^2+1)(x^2+4x+5)}\,\mathrm{d}x$,

d) $\int \frac{5}{x(x^2+1)}\,\mathrm{d}x$, $\int \frac{3x^2+4x+8}{x^2(x^2+2x+2)}\,\mathrm{d}x$,

3. fejezet

Határozott integrál

3.1. Tétel. *Ha f folytonos $[a,b]$-n, és F az f primitív függvénye az $[a,b]$-n, akkor*

$$\boxed{\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b) - F(a).}$$

3.1. Példa. Számítsa ki az alábbi határozott integrált: $\displaystyle\int\limits_1^2 \frac{\sqrt[5]{3\ln x - 1}}{x}\,\mathrm{d}x.$

Megoldás: Először is írjuk át az x-szel való osztást $\frac{1}{x}$-szel való szorzássá:

$$\int\limits_1^2 \frac{\sqrt[5]{3\ln x - 1}}{x}\,\mathrm{d}x = \int\limits_1^2 \frac{1}{x}\sqrt[5]{3\ln x - 1}\,\mathrm{d}x.$$

Majd vegyük észre, hogy a gyök alatti mennyiség $g(x) = 3\ln x - 1$ deriváltja: $g'(x) = 3\frac{1}{x}$. Tehát ha az $\frac{1}{x}$-t szorzom 3-mal, akkor $\frac{1}{3}$-dal is szorozni kell, hogy az integrál ne változzon meg:

$$\int\limits_1^2 \frac{1}{x}\sqrt[5]{3\ln x - 1}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{3}\int\limits_1^2 3\frac{1}{x}\sqrt[5]{3\ln x - 1}\,\mathrm{d}x.$$

Így most már az integrandus $g'(x)g^n(x)$ tipusú, tehát az 2.1 tétel alapján

$$\boxed{\int g'(x)g^n(x)\,\mathrm{d}x = \frac{(g(x))^{n+1}}{n+1} + c, n \neq -1}$$

így a primitív függvény megkapható, amiből az 3.1 tétel alapján számolható a keresett határozott integrál értéke:

$$\int_1^2 \frac{1}{x}\sqrt[5]{3\ln x - 1}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{3}\int_1^2 3\frac{1}{x}(3\ln x - 1)^{\frac{1}{5}}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{3}\left[\frac{(3\ln x-1)^{\frac{6}{5}}}{\frac{6}{5}}\right]_1^2.$$

Behelyettesítve a primitív függvénybe:

$$\frac{1}{3}\left[\frac{(3\ln x-1)^{\frac{6}{5}}}{\frac{6}{5}}\right]_1^2 = \frac{5}{18}(3\ln 2-1)^{\frac{6}{5}} - \frac{5}{18}(3\ln 1-1)^{\frac{6}{5}} = \frac{5}{18}(3\ln 2-1)^{\frac{6}{5}} - \frac{5}{18}.$$

Tehát a feladatot megoldottuk. ◇

3.2. Példa. Számítsa ki az alábbi határozott integrált: $\displaystyle\int_1^4 \operatorname{arctg}(2x)\,\mathrm{d}x.$

Megoldás: Először keressük meg az integrandus primitív függvényét. Az $\operatorname{arctg}(2x)$ függvényből látható, hogy a feladatot a parciális integrálás módszerével kell megoldani (2.2 tétel):

$$\boxed{\int f(x)g'(x)\,\mathrm{d}x = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)\,\mathrm{d}x.}$$

Az $f(x) = \operatorname{arctg}(2x)$ és a $g'(x) = 1$ választás megfelelő, hiszen az $\operatorname{arctg}(2x)$ függvényt deriválni tudom könnyen:

$$\begin{array}{ll} f(x) = \operatorname{arctg}(2x) & g'(x) = 1 \\ f'(x) = \frac{2}{1+(2x)^2} & g(x) = x \end{array}$$

Ezután behelyettesítve a fenti képletbe:

$$\int \operatorname{arctg}(2x)\,\mathrm{d}x = x\cdot\operatorname{arctg}(2x) - \int \frac{2}{1+(2x)^2}\cdot x\,\mathrm{d}x$$

Az $\int \frac{2}{1+(2x)^2}\cdot x\,\mathrm{d}x$ integrál kiszámításához az integrandust egy kicsit átalakítjuk:

$$\int \frac{2}{1+(2x)^2}\cdot x\,\mathrm{d}x = \int \frac{2}{1+4x^2}\cdot x\,\mathrm{d}x = \frac{1}{4}\int \frac{1}{1+4x^2}\cdot 8x\,\mathrm{d}x.$$

Így az $\int \frac{1}{1+4x^2}\cdot 8x\,\mathrm{d}x$ integrál könnyen kiszámítható:

$$\int \frac{1}{1+4x^2}\cdot 8x\,\mathrm{d}x = \ln(1+4x^2)+c.$$

Tehát a primitív függvény:

$$\int \mathrm{arctg}\,(2x)\,\mathrm{d}x = x\cdot\mathrm{arctg}\,(2x) - \int \frac{2}{1+(2x)^2}\cdot x\,\mathrm{d}x =$$

$$x\cdot\mathrm{arctg}\,(2x) - \frac{1}{4}\int \frac{1}{1+4x^2}\cdot 8x\,\mathrm{d}x = x\cdot\mathrm{arctg}\,(2x) - \frac{1}{4}\ln(1+4x^2)+c.$$

Az 3.1 tétel alapján számolható a keresett határozott integrál értéke:

$$\int_1^4 \mathrm{arctg}\,(2x)\,\mathrm{d}x = \left[x\cdot\mathrm{arctg}\,(2x) - \frac{1}{4}\ln(1+4x^2)\right]_1^4.$$

Behelyettesítve a primitív függvénybe:

$$\left[x\cdot\mathrm{arctg}\,(2x) - \frac{1}{4}\ln(1+4x^2)\right]_1^4 = 4\cdot\mathrm{arctg}\,(8) - \frac{1}{4}\ln(65) - \mathrm{arctg}\,(2) + \frac{1}{4}\ln(5).$$

Tehát a feladatot megoldottuk. $\diamond$

3.3. Példa. Számítsa ki a következő határozott integrált helyettesítéssel:

$$\int_1^3 \frac{x}{\sqrt{2x+1}}\,\mathrm{d}x.$$

Megoldás: Először is keressük meg az integrandus primitív függvényét. A $\sqrt{2x+1}$-t t-vel helyettesítjük, majd kifejezzük az x-et:

$$\sqrt{2x+1} = t$$

$$2x+1 = t^2$$

$$x = \frac{t^2-1}{2}.$$

A kapott egyenletet t szerint deriváljuk:

$$x' = t$$

Az x' helyére bevezetjük a $\frac{dx}{dt}$ jelölést:

$$\frac{dx}{dt} = t.$$

Formálisan szorzunk $\mathrm{d}t$-vel.

$$\mathrm{d}x = t\,\mathrm{d}t.$$

Összefoglalva az alábbi helyettesítéseket írjuk az eredeti integrálba:

$$\boxed{\begin{gathered}\sqrt{2x+1}=t\\ x=\frac{t^2-1}{2}\\ \mathrm{d}x=t\,\mathrm{d}t.\end{gathered}}$$

A behelyettesítés után egy egyszerű polinom primitívfüggvényét kell meghatároznunk:

$$\int \frac{x}{\sqrt{2x+1}}\,\mathrm{d}x=\int x\cdot\frac{1}{\sqrt{2x+1}}\,\mathrm{d}x=\int \frac{t^2-1}{2}\cdot\frac{1}{t}\cdot t\,\mathrm{d}t=\int \frac{t^2-1}{2}\,\mathrm{d}t=\frac{t^3}{6}-\frac{1}{2}t+c.$$

A primitívfüggvénybe a t helyére visszaírjuk a $\sqrt{2x+1}$-t, ezzel megkaptuk a keresett primitív függvényt:

$$\int \frac{x}{\sqrt{2x+1}}\,\mathrm{d}x=\frac{t^3}{6}-\frac{1}{2}t+c=\frac{(\sqrt{2x+1})^3}{6}-\frac{1}{2}\sqrt{2x+1}+c.$$

Behelyettesítve a primitív függvénybe:

$$\left[\frac{\sqrt{(2x+1)^3}}{6}-\frac{\sqrt{2x+1}}{2}\right]_1^3=\frac{\sqrt{343}}{6}-\frac{\sqrt{7}}{2}-\frac{\sqrt{27}}{6}+\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Tehát a feladatot megoldottuk. $\diamond$

3.4. Példa. Határozza meg a következő integrált helyettesítéssel:

$$\int_0^3 \sqrt{9-x^2}\,\mathrm{d}x.$$

Megoldás: Először keressük meg az integrandus primitív függvényét. A határozatlan integrálásnál megoldottunk egy hasonló példát. Itt is ezt a helyettesítést alkalmazzuk. Észrevesszük, hogy ha az x-et $3\sin(t)$-vel helyettesítjük[1], akkor

$$\sqrt{9-x^2}=\sqrt{9-(3\sin t)^2}=\sqrt{9-9\sin^2 t}=3\sqrt{1-\sin^2 t}.$$

[1]Egyrészt világos, hogy a gyökös kifejezés miatt $9-x^2\geq 0$, másrészt az integrálási határok miatt $0\leq x\leq 3$ között változhat az x. Mivel az $x(t)=3\sin t$ függvény nem kölcsönösen égyértelmű, ezért megszorítjuk, $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$ intervallumra, melyen a függvény szigorúan monoton nővő és így kölcsönösen egyértelmű, sőt ami számunkra még fontos, pontosan a $[0;3]$ intervallumra képez.

Majd a $\sin^2 t + \cos^2 t = 1$ trigonometrikus összefüggést átrendezve és $1 - \sin^2 t = \cos^2 t$-t helyettesítve a gyök alá:

$$\sqrt{9 - x^2} = 3\sqrt{1 - \sin^2 t} = 3\sqrt{\cos^2 t}.$$

Végül felhasználjuk, hogy $\sqrt{a^2} = |a|$

$$\sqrt{9 - x^2} = 3\sqrt{1 - \sin^2 t} = 3|\cos t|.$$

Az előző lábjegyzet alapján a $t \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$, így a $\cos t$ ezen az intervallumon pozitív, tehát az abszolútértéke önmaga:

$$\sqrt{9 - x^2} = 3\sqrt{1 - \sin^2 t} = 3|\cos t| = 3\cos t.$$

A $x(t) = 3\sin t$ egyenletet t szerint deriváljuk, t szerinti deriváltat is vesszővel jelöljük.

$$x' = 3\cos t$$

Az x' helyére bevezetjük a $\frac{dx}{dt}$ jelölést, ebben a jelölésben jól látszik, hogy t szerinti deriváltról van szó:

$$\frac{dx}{dt} = 3\cos t.$$

Formálisan szorzunk $\mathrm{d}t$-vel.

$$\mathrm{d}x = 3\cos t\,\mathrm{d}t.$$

Összefoglalva az alábbi helyettesítéseket írjuk az eredeti integrálba:

$$\boxed{\begin{gathered} x(t) = 3\sin t \\ \sqrt{9 - x^2} = 3\cos t \\ \mathrm{d}x = 3\cos t\,\mathrm{d}t. \end{gathered}}$$

A behelyettesítés után a következő trigonometrikus függvényt kapjuk:

$$\int \sqrt{9 - x^2}\,\mathrm{d}x = \int 3\cos t \cdot 3\cos t\,\mathrm{d}t = \int 9\cos^2 t\,\mathrm{d}t =$$

Felhasználjuk a $\cos^2 t = \frac{1+\cos 2t}{2}$ trigonometrikus össszefüggést és meghatározzuk a primitívfüggvényt:

$$= \int 9\frac{1 + \cos 2t}{2}\,\mathrm{d}t = \frac{9}{2}t + \frac{9\sin 2t}{4} + c =$$

Az előző lábjegyzet szerint a $x(t) = 3\sin t$ függvény a megadott intervallumokon kölcsönösen egértelmű, így létezik az inverz függvénye, melyre

$$t = \arcsin\frac{x}{3}.$$

Ezt behelyettesítve kapjuk a megoldást:

$$= \frac{9}{2} \arcsin \frac{x}{3} + \frac{9\sin(2\arcsin \frac{x}{3})}{4} + c.$$

Behelyettesítve a primitív függvénybe:

$$\left[\frac{9}{2} \arcsin \frac{x}{3} + \frac{9\sin(2\arcsin \frac{x}{3})}{4}\right]_0^3 = \frac{9}{2} \arcsin 1 + \frac{9\sin(2\arcsin 1)}{4} - \frac{9}{2} \arcsin 0 - \frac{9\sin(2\arcsin 0)}{4} = \frac{9\pi}{4}.$$

Tehát a feladatot megoldottuk. $\diamond$

3.1. Feladatok gyakorlatra

3.1. Feladat. Egy autó indulásától számított 10 másodpercig a sebességét az $v(t) = 2t$ függvény írja le az idő (t) függvényében. Az idő mértékegysége: másodperc (s), a sebességé: $\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$.

a) A $t = 5$s időpillanatban mennyi volt az autó sebessége?

b) Mennyi utat tett meg az autó az indulástól eltelt 1 másodperc alatt?

c) Mennyi utat tett meg az autó az indulástól eltelt 2 másodperc alatt?

d) Mennyi utat tett meg az autó az indulástól eltelt 3 másodperc alatt?

e) Ábrázoljuk az idő függvényében a megtett utat, azaz adjuk meg az $s(t)$ függvényt!

f) Mi a kapcsolat az $s(t)$ és $v(t)$ függvények között?

3.2. Feladat. Számítsa ki az alábbi határozott integrálokat:

a) $\displaystyle\int_1^2 \sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x}}}\,\mathrm{d}x$, $\displaystyle\int_0^1 \left(x\sqrt{x} - 4e^{x+1}\right)\mathrm{d}x$, $\displaystyle\int_0^2 \left(2^x + \frac{1}{e^x}\right)\mathrm{d}x$ $\displaystyle\int_2^3 \left(2^x + \frac{1}{(2x+1)^3}\right)\mathrm{d}x$,
$\displaystyle\int_0^2 \left(e^{x+2} + \frac{1}{1+(5x+1)^2}\right)\mathrm{d}x$, $\displaystyle\int_{-\frac{4}{3}}^{-\frac{7}{6}} \left(\frac{1}{2x+3} + \frac{1}{\sqrt{1-(2x+3)^2}}\right)\mathrm{d}x$

b) $\displaystyle\int_1^2 \frac{x+1}{x^2+2x-1}\,\mathrm{d}x$, $\displaystyle\int_0^5 \frac{3x^2}{x^3+4}\,\mathrm{d}x$, $\displaystyle\int_e^4 \frac{1}{x\ln x}\,\mathrm{d}x$, $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \mathrm{tg}\,x\,\mathrm{d}x$, $\displaystyle\int_2^3 \frac{e^{3x}}{e^{3x}+1}\,\mathrm{d}x$,
$\displaystyle\int_2^4 x^2(2x^3+4)\,\mathrm{d}x$, $\displaystyle\int_1^4 x^2\sqrt{6x^3+4}\,\mathrm{d}x$, $\displaystyle\int_2^3 \frac{3x^2}{\sqrt{x^3-2}}\,\mathrm{d}x$, $\displaystyle\int_0^3 \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\,\mathrm{d}x$,
$\displaystyle\int_0^2 e^x(1-e^x)^3\,\mathrm{d}x$, $\displaystyle\int_1^2 \frac{e^x}{\sqrt[3]{1+e^x}}\,\mathrm{d}x$,

c) $\displaystyle\int_0^2 xe^{-x^2}\,\mathrm{d}x$, $\displaystyle\int_0^\pi x\sin x^2\,\mathrm{d}x$, $\displaystyle\int_0^1 \frac{3^x}{1+3^{2x}}\,\mathrm{d}x$, $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1+4x^2}\,\mathrm{d}x$, $\displaystyle\int_1^3 \frac{1}{x^2+8x+17}\,\mathrm{d}x$,

d) $\displaystyle\int_0^1 xe^x\,\mathrm{d}x$, $\displaystyle\int_0^1 x^3e^{-x^2}\,\mathrm{d}x$, $\displaystyle\int_0^\pi 2x\sin 6x\,\mathrm{d}x$, $\displaystyle\int_1^2 \ln x\,\mathrm{d}x$, $\displaystyle\int_1^4 x\ln x\,\mathrm{d}x$, $\displaystyle\int_0^1 x\arcsin x\,\mathrm{d}x$,
$\displaystyle\int_1^5 \mathrm{arctg}\,x\,\mathrm{d}x$, $\displaystyle\int_0^1 3x^2\mathrm{arctg}\,x\,\mathrm{d}x$,

e) $\displaystyle\int_0^\pi \cos^3 x\,\sin^4 x\,\mathrm{d}x$,

f) $\displaystyle\int_{-1}^1 \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x$, $\displaystyle\int_{-2}^2 \sqrt{4-x^2}\,\mathrm{d}x$,

g) $\displaystyle\int_0^1 x\sqrt{5x+3}\,\mathrm{d}x$, $\displaystyle\int_2^3 \frac{2x}{\sqrt{6x+4}}\,\mathrm{d}x$,

3.2. Gyakorló feladatok

3.3. Feladat. Számítsa ki az alábbi határozott integrálokat! $\displaystyle\int_1^2 \frac{x}{2}e^{2x}\,\mathrm{d}x$, $\displaystyle\int_0^\pi x\sin(2x)\,\mathrm{d}x$, $\displaystyle\int_2^4 \frac{1}{2}\ln x\,\mathrm{d}x$, $\displaystyle\int_0^\pi 2x\cos(2x)\,\mathrm{d}x$.

3.4. Feladat. Számítsa ki az alábbi határozott integrálokat! $\displaystyle\int_0^\pi \sin x\cos^2 x\,\mathrm{d}x$,

$$\int_1^2 \frac{e^x}{e^x+2}\,\mathrm{d}x, \int_0^\pi \frac{\sin(x+\pi)}{\cos(x+\pi)}\,\mathrm{d}x, \int_1^2 \frac{1}{x}\sqrt[5]{\ln x+1}\,\mathrm{d}x.$$

3.5. Feladat. Számítsa ki az alábbi határozott integrálokat! $\displaystyle\int_2^3 \frac{3x^2+2}{\sqrt[3]{3x-4}}\,\mathrm{d}x$,

$$\int_0^2 \sqrt{4-x^2}\,\mathrm{d}x.$$

3.3. Vizsgafeladatok

3.6. Feladat. Számítsa ki az alábbi határozott integrálokat:

a) $\displaystyle\int_{-1}^1 \frac{e^{2x}}{1+e^x}\,\mathrm{d}x$,

b) $\displaystyle\int_{-1}^1 x^2\sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x$,

c) $\displaystyle\int_0^1 x^2\sqrt[3]{x+2}\,\mathrm{d}x$,

3.4. Kiegészítő anyag

3.7. Feladat. Számítsa ki az alábbi határozott integrálokat:

a) $\displaystyle\int_{-1}^2 \frac{e^{2x}-2e^x}{1+e^{2x}}\,\mathrm{d}x, \int_0^1 \frac{4}{e^{2x}-4}\,\mathrm{d}x$,

b) $\displaystyle\int_2^3 \frac{e^{2x}-2e^x-1}{e^{3x}-e^x}\,\mathrm{d}x$,

3.8. Feladat. Számítsa ki az alábbi improprius integrálokat:

a) $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x, \int_{-2}^0 \frac{1}{2x+4}\,\mathrm{d}x, \int_0^1 \frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x, \int_0^1 \ln x\,\mathrm{d}x, \int_0^1 x\ln x\,\mathrm{d}x, \int_1^e \frac{1}{x\ln x}\,\mathrm{d}x$,

b) $\int\limits_1^{\infty} \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x$, $\int\limits_4^{\infty} \frac{1}{3x-6}\,\mathrm{d}x$, $\int\limits_1^{\infty} \frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x$, $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$, $\int\limits_0^{\infty} \frac{1}{e^{-x}}\,\mathrm{d}x$, $\int\limits_0^{\infty} \frac{1}{e^{x}}\,\mathrm{d}x$, $\int\limits_0^{\infty} \frac{2x}{x^2+1}\,\mathrm{d}x$, $\int\limits_0^{\infty} \frac{\operatorname{arctg} x}{x^2+1}\,\mathrm{d}x$, $\int\limits_0^{\infty} \frac{x}{e^{x}}\,\mathrm{d}x$,

3.9. Feladat. Számítsa ki az alábbi improprius integrálokat:

a) $\int\limits_0^{1} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x$, $\int\limits_{-2}^{0} \frac{2x}{\sqrt{x+2}}\,\mathrm{d}x$, $\int\limits_0^{1} \frac{1}{x^3-x}\,\mathrm{d}x$, $\int\limits_{-1}^{1} \frac{2x}{x^2-1}\,\mathrm{d}x$,

b) $\int\limits_2^{\infty} \frac{4}{(x+1)(x-3)}\,\mathrm{d}x$, $\int\limits_0^{\infty} \frac{1}{e^{2x}-1}\,\mathrm{d}x$,

4. fejezet

Integrálszámítás alkalmazása

4.1. Tétel. *Ha f és g az $[a,b]$ intervallumon folytonos függvények, továbbá $f(x) \geq g(x)$, akkor az $y = f(x)$ és $y = g(x)$ görbék közötti tartomány a és b közé eső darabjának területe az $(f-g)$ függvény a-tól b-ig vett integrálja:*

$$\boxed{T = \int_a^b (f(x) - g(x))\,\mathrm{d}x}$$

4.1. Példa. Számítsa ki az $f(x) = 10 - 3x$ és a $g(x) = x^2 - 10x + 20$ függvények görbéi által határolt síkidom területét!

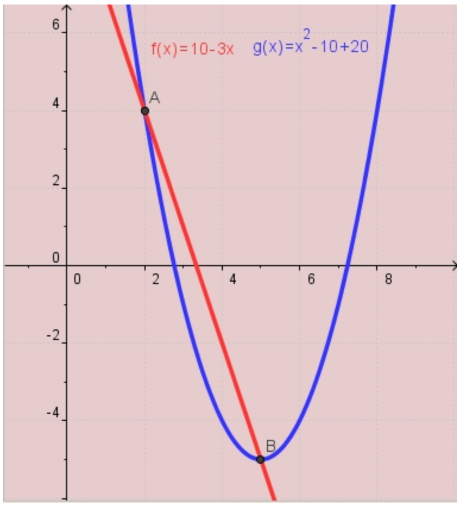
Megoldás: Először kiszámítjuk a két függvény görbéjének metszéspontját $f(x) = g(x)$:

$$10 - 3x = x^2 - 10x + 20.$$

Az egyenlet nullára rendezése után megoldjuk a másodfokú egyenletet:

$$x^2 - 7x + 10 = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{7 \pm \sqrt{(-7)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 10}}{2} = \frac{7 \pm 3}{2} = \begin{array}{l} \nearrow \quad x_1 = 2 \\ \searrow \quad x_2 = 5 \end{array}.$$



Tehát a 2 és az 5 adja az integrálási határokat a bezárt tartomány területének kiszámításához:

$$\int_2^5 (g(x)-f(x))\,\mathrm{d}x = \int_2^5 (x^2-10x+20)-(10-3x)\,\mathrm{d}x = \int_2^5 (x^2-7x+10)\,\mathrm{d}x =$$

A fenti integrál kiszámításához a primitív függvény kiszámítása után a Newton-Leibniz formulát alkalmazzuk:

$$= \left[\frac{x^3}{3}-\frac{7x^2}{2}+10x\right]_2^5 = \left(\frac{5^3}{3}-\frac{7\cdot 5^2}{2}+10\cdot 5\right)-\left(\frac{2^3}{3}-\frac{7\cdot 2^2}{2}+10\cdot 2\right) = -\frac{9}{2}$$

Tehát a két függvény görbéje által bezárt tartomány előjeles területe $-\frac{9}{2}$, ennek abszolútértéke adja a tartomány területét:

$$T = \left|-\frac{9}{2}\right| = \frac{9}{2} = 4{,}5.$$

Tehát a feladatot megoldottuk. $\diamond$

4.2. Tétel. *Az $[a,b]$ intervallumon folytonos és nemnegatív $y=f(x)$ függvény x tengely körüli megforgatásakor keletkezett forgástest térfogata*

$$\boxed{V = \pi\int_a^b f^2(x)\,\mathrm{d}x}$$

4.2. Példa. Számítsa ki a $[1{,}2]$ intervallumon az $f(x)=\frac{\sqrt{-x^2+3x+2}}{\sqrt{x}}$ függvény x tengely körüli megforgatásával nyert forgástest térfogatát!

Megoldás: A határok adottak, így az $f(x)$ függvény x tengely körüli megforgatásával nyert forgástest térfogatát a fenti képlet alapján számolhatjuk ki:

$$V=\pi\int_1^2\left(\frac{\sqrt{-x^2+3x+2}}{\sqrt{x}}\right)^2\mathrm{d}x=\pi\int_1^2\frac{-x^2+3x+2}{x}\,\mathrm{d}x=\pi\int_1^2\left(-x+3+\frac{2}{x}\right)\mathrm{d}x=$$

A négyzetre emelés, majd az osztás elvégzése után a primitívfüggvényt egyszerűen meghatározhatjuk. A Newton-Leibniz formulába behelyettesítve kapjuk a forgástest térfogatát:

$$=\pi\left[-\frac{x^2}{2}+3x+2\ln|x|\right]_1^2\mathrm{d}x=\pi\left(-\frac{2^2}{2}+3\cdot2+2\ln 2\right)-\pi\left(-\frac{1^2}{2}+3\cdot1+2\ln 1\right)=$$

Zárójel felbontás, összevonás után, továbbá felhasználva, hogy $\ln 1=0$, kapjuk a végeredményt:

$$=\pi\left(\frac{3}{2}+2\ln 2\right)\approx 9{,}07.$$

Tehát a feladatot megoldottuk. ◇

4.3. Tétel. *Legyen f nemkonstans, integrálható függvény az $[a,b]$ intervallumon, ekkor a függvény $[a,b]$ intervallumra vonatkozó átlagértékét úgy definiáljuk, mint a függvénygrafikon alatti terület és $b-a$ hányadosát.*

$$\boxed{\textit{átlag}=\tfrac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x}$$

4.3. Példa. Számítsa ki a $[-\pi,\pi]$ intervallumon az $f(x)=\sin(2x)e^{1-\cos(2x)}$ függvény átlagértékét!

Megoldás: Az f függvény átlagértékét a fenti tétel szerint

$$\text{átlag}=\frac{1}{\pi-(-\pi)}\int_{-\pi}^{\pi}\sin(2x)e^{1-\cos(2x)}\,\mathrm{d}x=$$

formula segítségével kapjuk. Vegyük észre, hogy az exponenciális függvény kitevőjében lévő függvény deriváltja majdnem megjelenik szorzótényezőként. Mivel a $1-\cos(2x)$ deriváltja $\sin(2x)\cdot 2$, ezért szorozzunk 2-vel és $\frac{1}{2}$-del is, hogy ne változzon a függvény értéke. A Newton-Leibniz formulába behelyettesítve kapjuk:

$$=\frac{1}{2\pi}\cdot\frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\sin(2x)\cdot2\cdot e^{1-\cos(2x)}\,\mathrm{d}x=\frac{1}{4\pi}\left[e^{1-\cos(2x)}\right]_{-\pi}^{\pi}=\frac{1}{4\pi}\left(e^{1-\cos(2\pi)}-e^{1-\cos(-2\pi)}\right)=0$$

Tehát a feladatot megoldottuk. ◇

4.1. Feladatok gyakorlatra

4.1. Feladat. Számítsa ki az $f(x)=\sin x$ függvény $[0,\pi]$ intervallumhoz tartozó görbéje és az x tengely által határolt síkidom területét.

4.2. Feladat. Számítsa ki az $f:[-2{,}0]\to\mathbb{R},\ f(x)=-x^2-2x$ függvény görbéje és az x tengely által határolt síkidom területét.

4.3. Feladat. Számítsa ki az $f:[-2{,}2]\to\mathbb{R},\ f(x)=-x^2-2x$ függvény görbéje és az x tengely által határolt síkidom területét.

4.4. Feladat. Számítsa ki az $f(x)=4+3x-x^2$ függvény görbéje és az x tengely által határolt síkidom területét.

4.5. Feladat. Számítsa ki az $f(x)=x^2-4x-12$ függvény görbéje és a koordináta tengelyek által határolt síkidom területét.

4.6. Feladat. Számítsa ki az $f(x)=x^2$ és a $g(x)=x+2$ függvények görbéi által határolt síkidom területét.

4.7. Feladat. Számítsa ki az $f(x)=x^2+6x+10$ és a $g(x)=x+4$ függvények görbéi által határolt síkidom területét.

4.8. Feladat. Számítsa ki az $f(x)=x^2+3x-4$ és a $g(x)=4x+2$ függvények görbéi által határolt síkidom területét.

4.9. Feladat. Számítsa ki az $f(x)=x^2-4x$ és a $g(x)=-2x+3$ függvények görbéi által határolt síkidom területét.

4.10. Feladat. Számítsa ki az $f(x)=-x^2+1$ és a $g(x)=x^2-1$ függvények görbéi által határolt síkidom területét.

4.11. Feladat. Számítsa ki az $f(x)=x^4$ és a $g(x)=8x$ függvények görbéi által határolt síkidom területét.

4.12. Feladat. Számítsa ki az $y^2=x$ és $y=x^2$ egyenlettel adott görbék által határolt területet.

4.13. Feladat. Számítsa ki az adott intervallumon az $f(x)$ függvény x tengely körüli megforgatásával nyert test térfogatát $\left(V=\pi\int\limits_a^b f^2(x)\,\mathrm{d}x\right)$:

a) $f(x)=2x$, $[0{,}1]$

b) $f(x)=\sqrt{1-x^2}$, $[-1{,}1]$

c) $f(x)=\sqrt{x}$, $[0{,}4]$

d) $f(x)=\frac{x}{\sqrt[4]{x^3+2}}$, $[0{,}1]$

e) $f(x)=e^x$, $[0{,}1]$

4.14. Feladat. Tekintse az $y = 8 - x^2$ és az $y = x^2$ egyenlettel adott függvények görbéi közötti síkrészt. Forgassa meg ezt a síkidomot x tengely körül és számítsa ki a térfogatát!

4.15. Feladat. Számítsa ki az $f(x) = 2 - x^2$ és az $g(x) = x^2$ tengely által határolt tartomány x tengely körüli megforgatásakor keletkezett forgástest térfogatát! Mire hasonlít ez a forgástest?

4.16. Feladat. Számítsa ki az adott intervallumon az $f(x)$ függvény átlagértékét $\left(\text{átlag} = \frac{1}{b-a} \int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\right)$:

a) $f(x) = 4 - x^2$, $[-2{,}2]$

b) $f(x) = -3x^2 - 1$, $[0{,}1]$

4.17. Feladat. A Tracey Burr Distributors 30 naponként kap egy-egy rakomány, azaz 1200 láda táblacsokoládét. A TBD rögzített áron adja tovább a csokoládét a kiskereskedőknek, s átlagos napi leltárkészlete a szállítmány megérkezése után t nappal $I(t) = 1200 - 40t, 0 \le t \le 30$. Mekkora az átlagos napi raktározási költség, ha egy láda raktározása 3 centbe kerül?

(**Átlagos napi leltárkészlet**$= I_{\text{átlag}} = \frac{1}{T} \int\limits_0^T I(t)\,\mathrm{d}t$)

4.18. Feladat. A Solon Container 30 naponként 450 hordónyi műanyaggolyót kap. A leltárfüggvény (a készleten lévő hordók száma mint a napok függvénye) $I(t) = 450 - t^2/2$. Számítsuk ki az átlagos napi leltárkészletet! Adjuk meg az átlagos napi raktározási költséget, ha egy hordó raktáron tartása naponta 2 centbe kerül.

4.2. Gyakorló feladatok

4.19. Feladat. Számítsa ki az $f(x) = 4 - x$ és a $g(x) = x^2 - 5x + 4$ függvények görbéi által határolt síkidom területét, valamint rajzolja is fel melyik ez a terület.

4.20. Feladat. Számítsa ki az $f(x) = 3x - x^2$ és az x tengely által határolt tartomány x tengely körüli megforgatásakor keletkezett forgástest térfogatát!

4.21. Feladat. Számítsa ki az $f(x) = \frac{x}{2} - x^2$ függvény átlagértékét a $[0{,}1/2]$ intervallumon!

4.3. Vizsgafeladatok

4.22. Feladat. Számítsa ki az $f(x) = \sin x + 2$ és a $g(x) = \frac{x}{\pi} + 1$ függvények görbéi, valamint az y tengely által határolt síkidom területét a $[0, \pi]$ intervallumon, valamint rajzolja is fel melyik ez a terület.

Megoldás:
Tehát a feladatot megoldottuk. $\diamond$

4.23. Feladat. Számítsa ki az $f(x) = x\ln x$ és a $g(x) = x$ függvények görbéi által határolt síkidom területét.

4.24. Feladat. Számítsa ki az $f(x) = x \cdot 2^x$ és a $g(x) = 4x$ függvények görbéi által határolt síkidom területét.

4.25. Feladat. Számítsa ki az $f(x)=\frac{3x}{x^2+2}$ és a $g(x)=x$ függvények görbéi által határolt síkidom területét.

4.26. Feladat. Számítsa ki az $f(x) = \frac{4x}{\sqrt{x^2+7}}$ és a $g(x) = x$ függvények görbéi által határolt síkidom területét.

4.27. Feladat. Számítsa ki az $y^2-2x-4y+6=0$ és $y=-x+3$ egyenlettel adott görbék által határolt területet.

4.28. Feladat. Számítsa ki az adott intervallumon az $f(x)$ függvény ívhosszát $\left(s = \int\limits_a^b \sqrt{1+(f'(x))^2}\,\mathrm{d}x\right)$:

a) $f(x) = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}$, $[0,1]$

b) $f(x) = \sqrt{1-x^2}$, $[-1,1]$

c) $f(x) = \ln(x)$, $[2,6]$

d) $f(x) = \ln(x^2-1)$, $[2,4]$

4.29. Feladat. Számítsa ki az adott intervallumon az $f(x)$ függvény x tengely körüli megforgatásával nyert test térfogatát $\left(V = \pi \int\limits_a^b f^2(x)\,\mathrm{d}x\right)$:

a) $f(x) = \sin x$, $[0,\pi]$

b) $f(x) = \sin x + 2$, $[0, \frac{5\pi}{2}]$

c) $f(x) = \ln x$, $[1,6]$

4.30. Feladat. Számítsa ki az adott intervallumon az $f(x)$ függvény x tengely körüli megforgatásával nyert test felszínét $\left(F = 2\pi \int\limits_a^b f(x)\sqrt{1+[f'(x)]^2}dx\right)$

a) $f(x) = x^3$, $[0,2]$

b) $f(x) = 2\sqrt{x}$, $[0,4]$

c) $f(x) = \sqrt{1-x^2}$, $[-1,1]$

4.31. Feladat. Számítsa ki a [0,4] intervallumon az $f(x) = \sqrt{x}$ függvény x tengely körüli megforgatásával nyert test térfogatát és tömegét, ha sűrűségfüggvény $s(x) = x$, illetve $s(x) = \sin x$.

$$\left(M = \pi \int\limits_a^b s(x) f^2(x) \, \mathrm{d}x \right)$$

5. fejezet

Sorok, hatványsorok(Kiegészítő anyag)

5.1. Tétel. *Ha $|q| < 1$, akkor $a + aq + aq^2 + \cdots + aq^{n-1} + \cdots$ mértani sor az $a/(1-q)$ számhoz konvergál*

$$\boxed{\sum_{k=1}^{\infty} aq^{k-1} = \frac{a}{1-q}, \qquad |q| < 1.}$$

Ha $|q| > 1$, akkor a sor divergál.

5.1. Példa. Számítsa ki az alábbi végtelen sor összegét!

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^{n+2}}{7^{2n-3}}$$

Megoldás: Alakítsuk át először a sor általános tagját a következőképpen:

$$\frac{2^{n+2}}{7^{2n-3}} = \frac{2^n \cdot 2^2}{7^{2n} \cdot 7^{-3}} = \frac{2^n}{(7^2)^n} \cdot \frac{2^2}{7^{-3}} = \left(\frac{2}{49}\right)^n \cdot 2^2 \cdot 7^3.$$

Tehát egy mértani sor összegét kell megadni, ami a fenti tétel szerint:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^{n+2}}{7^{2n-3}} = \sum_{n=0}^{\infty} 1372 \cdot \left(\frac{2}{49}\right)^n = 1372 \cdot \frac{1}{1 - \frac{2}{49}} = \frac{67228}{47}$$

Tehát a feladatot megoldottuk. ⋄

5.2. Tétel. *Ha $\sum a_n$ és $\sum b_n$ konvergens sorok, továbbá $\sum a_n = A$ és $\sum b_n = B$, akkor*

a) $\boxed{\sum(a_n + b_n) = \sum a_n + \sum b_n = A + B \text{ (összegszabály);}}$

b) $\sum(a_n - b_n) = \sum a_n - \sum b_n = A - B$ *(különbségszabály);*

c) $\sum k a_n = k \sum a_n = kA$, *$k$ tetszőleges állandó (konstansszoros-szabály).*

5.2. Példa. Adja meg a következő sor összegét!

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{2}{4^{2n+3}}+\frac{7}{3^{3n-1}}\right)$$

Megoldás: A sor általános tagjáról jól látható, hogy két sor általános tagjának összegeként áll elő. Így a fenti tétel szerint, ha ezen sorok konvergensek, akkor azok összegeinek összegeként kapjuk az eredeti sor összegét, azaz:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{2}{4^{2n+3}}+\frac{7}{3^{3n-1}}\right)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2}{4^{2n+3}}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{7}{3^{3n-1}}.$$

Ezen sorok általános tagját az előző feladatban látottakhoz hasonlóan átalakítjuk.

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2}{4^{2n+3}}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{7}{3^{3n-1}}=\frac{2}{4^3}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(4^2)^n}+\frac{7}{3^{-1}}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(3^3)^n}=$$

$$\frac{1}{32}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{16}\right)^n+21\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{27}\right)^n,$$

azaz ismét két mértani sor összegét kell meghatározni, amit a már előző feladatban is alkalmazott tétel szerint kapunk.

$$\frac{1}{32}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{16}\right)^n+21\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{27}\right)^n=\frac{1}{32}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{16}}+21\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{27}}=$$

$$\frac{1}{32}\cdot\frac{16}{15}+21\cdot\frac{27}{26}=\frac{1}{30}+\frac{567}{26}=\frac{8518}{390}.$$

Tehát a feladatot megoldottuk. $\diamond$

5.3. Példa. Írja fel a megadott végtelen sor első néhány tagját, majd adja meg a következő sor összegét!

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+n}$$

Megoldás: A sor első néhány tagját felírva

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+n}=\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\frac{1}{12}+\frac{1}{20}+\frac{1}{30}+\dots$$

még nem látszik mi lesz az összeg. Először az általános tagot alakítjuk át

$$\frac{1}{n^2+n}=\frac{1}{n(n+1)},\quad \text{minden } n\text{-re}$$

ami a racionális törtekre bontás tétele szerint felbontható a következőképpen

$$\frac{1}{n(n+1)} = \frac{A}{n} + \frac{B}{n+1}, \text{ minden } n\text{-re.}$$

Az A és B konstansok meghatározásához végezzük el az összeadást a jobb oldalon

$$\frac{1}{n(n+1)} = \frac{A(n+1)+Bn}{n(n+1)}, \text{ minden } n\text{-re.}$$

A két tört pontosan akkor egyenlő, ha számlálóik egyenlők egymással, azaz

$$1 = A(n+1)+Bn, \text{ minden } n\text{-re}$$

$$1 = A+(A+B)n, \text{ minden } n\text{-re.}$$

Amiből pedig kapjuk, hogy

$$A = 1 \text{ és } A+B = 0$$

$$A = 1 \text{ és } B = -1.$$

Tehát

$$\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} + \frac{-1}{n+1}, \text{ minden } n\text{-re.}$$

Most felírva sor első néhány tagját

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots$$

már látjuk, hogy ez egy teleszkópikus sor, melynek összege

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots = 1$$

Tehát a feladatot megoldottuk. ⋄

5.1. Definíció. Az $x = 0$ hely körüli **hatványsor**nak nevezzük a

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \cdots + c_n x^n + \cdots$$

alakú végtelen sorokat; $x = a$ körüli hatványsornak pedig a

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-a)^n = c_0 + c_1(x-a) + c_2(x-a)^2 + \cdots + c_n(x-a)^n + \cdots$$

alakú sorokat. Az utóbbiban az a számot a **hatványsor középpontjának** nevezzük, a $c_0, c_1, \dots, c_n, \dots$ állandók a sor **együtthatói**.

5.3. Tétel. *Ha $|x|<1$, akkor a $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ mértani sor összege:*

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1+x+x^2+\cdots+x^n+\cdots = \frac{1}{1-x}.$$

5.4. Példa. Írja fel a megadott függvény $x=0$ körüli hatványsorát!

$$f(x) = \frac{3}{4+x^2}$$

Megoldás: A fenti tétel szerint $\boxed{\frac{1}{1-y} = \sum_{n=0}^{\infty} y^n}$ ($|y|<1$ esetén), ezért átalakítjuk a függvényt $\frac{1}{1-y}$ alakúra

$$\frac{3}{4+x^2} = 3\cdot\frac{1}{4(1+\frac{x^2}{4})} = \frac{3}{4}\cdot\frac{1}{1-(\frac{-x^2}{4})}.$$

Most alkalmazzuk a fenti tételt

$$\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{1-(\frac{-x^2}{4})} = \frac{3}{4}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{-x^2}{4}\right)^n = \frac{3}{4}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n}}{4^n} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{3\cdot(-1)^n}{4^{n+1}}x^{2n}.$$

Tehát a feladatot megoldottuk. ⋄

5.4. Tétel. *Ha az $f(x)$ függvény $x=a$ körüli hatványsora az I intervallumon a*

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n$$

hatványsor, akkor deriváltja is hatványsorba fejthető $x=a$ körül az I intervallumon, mégpedig

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n n(x-a)^{n-1}.$$

5.5. Példa. Írja fel az alábbi függvény $x=0$ körüli hatványsorát!

$$f(x) = \frac{1}{(1+x)^2}$$

Megoldás: **1. megoldás:** Ismerjük a mértani sor összegét:

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n.$$

A fenti tétel szerint az egyenlőség mindkét oldalát deriváljuk:

$$\left(\frac{1}{1-x}\right)' = \left((1-x)^{-1}\right)' = (-1)(1-x)^{-2}(-1) = \frac{1}{(1-x)^2}$$

$$\boxed{\frac{1}{(1-x)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1}.}$$

Az x helyére $-x$-et írunk, akkor a keresett függvénynek megkapjuk a hatványsorát:

$$\frac{1}{(1+x)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} n(-x)^{n-1}.$$

A hatványozás azonosságait felhasználva:

$$\frac{1}{(1+x)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} nx^{n-1}.$$

2. megoldás: Integráljuk először az $f(x)$ függvényt:

$$\int \frac{1}{(1+x)^2}\,\mathrm{d}x = \int (1+x)^{-2}\,\mathrm{d}x = \frac{(1+x)^{-1}}{-1} + C = \frac{-1}{1+x} + C,$$

A $g(x) = \frac{-1}{1+x}$ függvény $x = 0$ körüli hatványsorát már fel tudjuk írni:

$$\frac{-1}{1+x} = -1 \cdot \frac{1}{1-(-x)} = -1 \cdot \sum_{n=0}^{\infty} (-x)^n = -1 \cdot \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} x^n.$$

A fenti tétel szerint $g(x)$ deriváltjának hatványsora létezik és megegyezik $g(x)$ hatványsorának deriváltjával. Tehát

$$\left(\frac{-1}{1+x}\right)' = \left(\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} x^n\right)',$$

azaz

$$\frac{1}{(1+x)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} nx^{n-1}.$$

Tehát a feladatot megoldottuk. $\diamond$

5.5. Tétel. *Ha az $f(x)$ függvény $x = a$ körüli hatványsora az I intervallumon a*

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-a)^n$$

hatványsor, akkor az integráltja is hatványsorba fejthető $x = a$ körül az I intervallumon, mégpedig

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \frac{(x-a)^{n+1}}{n+1} + C.$$

5.6. Példa. Írja fel az alábbi függvény $x=0$ körüli hatványsorát!

$$f(x)=\ln(1+x^2)$$

Megoldás: 1. megoldás: Ismerjük a mértani sor összegét:

$$\frac{1}{1-x}=\sum_{n=0}^{\infty}x^n.$$

A fenti tétel szerint az egyenlőség mindkét oldalát integráljuk:

$$\int\frac{1}{1-x}\,\mathrm{d}x=\int\sum_{n=0}^{\infty}x^n\,\mathrm{d}x$$

$$\boxed{\ln(1-x)=-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{n+1}}{n+1}.}$$

Az egyenlet mindkét oldalát szorozzuk -1-gyel és az x helyére $-x^2$-et írunk, akkor a keresett függvénynek megkapjuk a hatványsorát:

$$\ln(1+x^2)=-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-x^2)^{n+1}}{n+1}=-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}x^{2n+2}}{n+1}.$$

A hatványozás azonosságait felhasználva:

$$\ln(1+x^2)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n+1}x^{2n+2}.$$

2. megoldás: Deriváljuk le először az $f(x)$ függvényt:

$$f'(x)=\frac{1}{1+x^2}2x$$

A $g(x)=\frac{1}{1+x^2}$ függvény $x=0$ körüli hatványsorát fel tudjuk írni:

$$\frac{1}{1+x^2}=\frac{1}{1-(-x^2)}=\sum_{n=0}^{\infty}(-x^2)^n=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^nx^{2n}.$$

Ekkor $h(x)=\frac{2x}{1+x^2}$ $x=0$ körüli hatványsora:

$$\frac{2x}{1+x^2}=2x\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^nx^{2n}=\sum_{n=0}^{\infty}2(-1)^nx^{2n+1}.$$

A fenti tétel szerint $h(x)$ integráljának hatványsora létezik és megegyezik $h(x)$ hatványsorának integráljával. Tehát

$$\int\frac{2x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x=\int\sum_{n=0}^{\infty}2(-1)^nx^{2n+1}\,\mathrm{d}x$$

azaz

$$\ln(1+x^2) = \sum_{n=0}^{\infty} 2(-1)^n \int x^{2n+1}\,\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{\infty} 2(-1)^n \frac{x^{2n+2}}{2n+2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} x^{2n+2}.$$

Tehát a feladatot megoldottuk. $\diamond$

5.1. Feladatok gyakorlatra

5.1. Feladat. Írjuk fel a megadott végtelen sor n-edik tagjának, részletösszegének képletét; a konvergens sorok esetében határozzuk meg az összegüket is

a) $2+\frac{2}{3}+\frac{2}{9}+\frac{2}{27}+\cdots$

b) $9+\frac{9}{100}+\frac{9}{100^2}+\frac{9}{100^3}+\cdots$

c) $7+7\cdot 2+7\cdot 2^2+7\cdot 2^3+\cdots$

d) $2+\frac{5}{1\cdot 2}+\frac{5}{2\cdot 3}+\frac{5}{3\cdot 4}+\cdots$

e) $1-2+4-8+16+\cdots$

5.2. Feladat. Írjuk fel a megadott sorok első néhány tagját, majd állapítsuk meg az összegüket

a) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{4}\right)^n$

b) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{4^n}$

c) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{7}{4^n}$

d) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2}{8^n}$

e) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{5}{4^n}$

f) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{3}{4^n}+\frac{1}{3^n}\right)$

g) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{3}{3^{2n}}+\frac{5}{3^{2n}}\right)$

h) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{3^{n+1}}{5^n}$

i) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n+5^n}{10^n}$

j) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^{3n}+6^n}{7^n}$

5.3. Feladat. Írjuk fel a megadott sorok első néhány tagját, majd állapítsuk meg az összegüket!

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}$

b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+2)}$

c) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n^2-1}$

d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$

5.4. Feladat. Írjuk fel a megadott végtelen tizedes törteket két egész szám hányadosaként

a) 0,232323...

b) 0,234234234...

c) 0,77777...

d) 0,0666666...

5.5. Feladat. Négy méter magasból leejtünk egy labdát. Minden alkalommal, amikor a labda h magasságból indul, $0{,}75h$ magasságig pattan vissza. Adjuk meg a labda által függőleges irányban megtett út teljes hosszát!

5.6. Feladat. Mi az $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ hatványsor összege?

5.7. Feladat. Írjuk fel a megadott függvények $x = 0$ körüli hatványsorát

a) $f(x) = \frac{1}{1+x}$

b) $f(x) = \frac{3}{1+x}$

c) $f(x) = \frac{1}{1-x^2}$

d) $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$

e) $f(x) = \frac{1}{2-x}$

f) $f(x) = \frac{1}{1-x^3}$

5.8. Feladat. Írjuk fel a megadott függvények $x = 0$ körüli hatványsorát

a) $f(x) = \frac{2}{(1-x)^2}$

b) $f(x) = \frac{1}{(1+x)^2}$

c) $f(x) = \frac{2x}{(1-x)^2}$

d) $f(x) = \frac{1}{(1-x^3)^2}$

e) $f(x) = \operatorname{arctg} x$

f) $f(x) = \operatorname{arctg} x^2$

g) $f(x) = \ln(1+x)$

h) $f(x) = x^2 \ln(1-x)$

5.2. Gyakorló feladatok

5.9. Feladat. Négy méter magasból leejtünk egy labdát. Minden alkalommal, amikor a labda h magasságból indul, $0{,}68h$ magasságig pattan vissza. Adjuk meg a labda által függőleges irányban megtett út teljes hosszát!

5.10. Feladat. Írjuk fel a 0,545454... végtelen tizedes törteket két egész szám hányadosaként!

5.11. Feladat. Írjuk fel a megadott sor első néhány tagját, majd állapítsuk meg az összegét!

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{3}{3^{2n}} + \frac{5}{2^{2n}} \right)$$

5.12. Feladat. Írjuk fel a megadott függvény hatványsorát:

$$f(x) = \frac{2}{1-x^3}.$$

5.13. Feladat. Írjuk fel a megadott függvény hatványsorát $f(x) = \frac{x}{(1-x)^2}$.

5.3. Vizsgafeladatok

5.14. Feladat. Írjuk fel a megadott sorok első néhány tagját, majd állapítsuk meg az összegüket

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{3^n} \cos \frac{2n\pi}{3}$

b) $\displaystyle\sum_{n=5}^{\infty} \frac{3}{4-5n+n^2}$

c) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{(2^n+1)(2^{n+1}+1)}$

d) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(n^2-n-1)(n!)}$

6. fejezet

Taylor-sor, Fourier-sor(Kiegészítő anyag)

6.1. Definíció. Legyen f olyan függvény, amely végtelen sokszor differenciálható egy olyan intervallumon, amelynek egyik belső pontja a. Az f **által generált Taylor-sor az** $x = a$ **helyen**:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \cdots$$

Az f függvény **Maclaurin-sora** az $x = 0$-beli Taylor-sor:

$$\boxed{\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \cdots}$$

6.1. Példa. Adja meg az alábbi függevény Maclaurin-sorát!

$$f(x) = e^x$$

Megoldás: Határozzuk meg $f(x)$ első néhány deriváltját:

$$f'(x) = e^x, \; f''(x) = e^x, \dots, f^{(n)}(x) = e^n.$$

Így a Maclaurin-sorának együtthatói:

$$f'(0) = e^0 = 1, \; f''(0) = e^0 = 1, \dots, f^{(n)}(0) = e^0 = 1.$$

e^x Maclaurin-sora:

$$\boxed{e^x = 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \dots + \frac{1}{n!}x^n + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}x^k}$$

Tehát a feladatot megoldottuk. $\diamond$

6.2. Példa. Adja meg az alábbi függvény $x = \pi$ helyen vett Taylor-sorát!

$$f(x) = \sin x$$

Megoldás: Írjuk fel $f(x)$ első néhány deriváltját:

$$f'(x) = \cos x,\ \ f''(x) = -\sin x, f'''(x) = -\cos x, f^{(4)}(x) = \sin x, f^{(5)}(x) = \cos x, \dots$$

ez alapján

$$f^{(n)}(x) = \begin{cases} \sin x, & \text{ha } n = 4k, \\ \cos x, & \text{ha } n = 4k+1, \\ -\sin x, & \text{ha } n = 4k+2, \\ -\cos x, & \text{ha } n = 4k+3. \end{cases}$$

Így az $x = \pi$ helyen vett Taylor-sorának együtthatói:

$$f'(\pi) = \cos(\pi) = -1,\ \ f''(\pi) = -\sin(\pi) = 0, f'''(\pi) = -\cos(\pi) = 1, f^{(4)}(\pi) = \sin(\pi) = 0, \dots$$

vagyis

$$f^{(n)}(\pi) = \begin{cases} 0, & \text{ha } n = 2k, \\ (-1)^{k+1}, & \text{ha } n = 2k+1. \end{cases}$$

a $\sin x$ függvény $x = \pi$ helyen vett Taylor-sora:

$$\boxed{\sin x = 0 + (-1)(x-\pi) + \frac{0}{2!}(x-\pi)^2 + \frac{1}{3!}(x-\pi)^3 + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{(2k+1)!}(x-\pi)^{2k+1}}$$

Tehát a feladatot megoldottuk. $\diamond$

6.3. Példa. Adja meg az alábbi függgevény Maclaurin-sorát!

$$f(x) = x^2 e^{x^3}$$

Megoldás: e^x Maclaurin-sorát már ismerjük:

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} x^k.$$

Így e^{x^3} Maclaurin-sora:

$$e^{x^3} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} (x^3)^k.$$

Amit x^2-tel megszorozva kapjuk $f(x)$ Maclaurin-sorát:

$$x^2 e^{x^3} = x^2 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} x^{3k} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} x^{3k+2}.$$

Tehát a feladatot megoldottuk. ◇

6.2. Definíció. Legyen f olyan függvény, amelynek egy, az a számot belső pontként tartalmazó intervallumon minden $k = 1,2,\ldots,N$ esetén létezik a k-adik deriváltja. Legyen n egy 0 és N közötti egész szám. Az f függvény által generált n**-edrendű Taylor-polinom** az $x = a$ helyen:

$$\begin{aligned} P_n(x) &= \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k \\ &= f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n \end{aligned}$$

6.4. Példa. Adja meg az alábbi függvény köbös közelítését az origóban vett harmadrendű Taylor-polinomjával!

$$f(x) = \sqrt{1+x^2}$$

Megoldás: Határozzuk meg $f(x)$ első három deriváltját:

$$f'(x) = \frac{1}{2}(1+x^2)^{-\frac{1}{2}}2x = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}},$$

$$f''(x) = \frac{\sqrt{1+x^2} - x\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}}{(\sqrt{1+x^2})^2} = \frac{1}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}},$$

$$f'''(x) = -\frac{3}{2}(1+x^2)^{-\frac{5}{2}}2x = \frac{-3x}{(1+x^2)^{\frac{5}{2}}}.$$

Ezek 0-ban vett helyettesítési értéke:

$$f(0) = 1, \quad f'(0) = 0, \quad f''(0) = 1, \quad f'''(0) = 0.$$

Így $f(x)$ harmadrendű Taylor-polinomja:

$$P_3(x) = 1 + 0\cdot x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{0}{3!}x^3 = 1 + \frac{x^2}{2}.$$

Tehát a feladatot megoldottuk. ◇

6.3. Definíció. A $[0, 2\pi]$ zárt intervallumon értelmezett f függvényt egy Riemann-integrálható függvény, akkor az ő Fourier-sora:

$$f(x) \sim a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)\right),$$

ahol

$$\boxed{\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} f(x)\,\mathrm{d}x, \\ a_k &= \frac{1}{\pi} \int\limits_0^{2\pi} f(x)\cos(kx)\,\mathrm{d}x, \\ b_k &= \frac{1}{\pi} \int\limits_0^{2\pi} f(x)\sin(kx)\,\mathrm{d}x, \;\; k = 1{,}2\ldots \end{aligned}}$$

6.5. Példa. Írja fel a megadott függvény Fourier-sorát!

$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{ha } 0 \le x \le \pi \\ \pi, & \text{ha } \pi < x \le 2\pi. \end{cases}$$

Megoldás: A Fourier-sor a_0 együtthatóját egyszerűen megkapjuk:

$$a_0 = \frac{1}{2\pi}\left(\int_0^{\pi} x\,\mathrm{d}x + \int_{\pi}^{2\pi} \pi\,\mathrm{d}x\right) = \frac{1}{2\pi}\left(\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^{\pi} + [\pi x]_{\pi}^{2\pi}\right) = \frac{1}{2\pi}\left(\frac{\pi^2}{2} + 2\pi^2 - \pi^2\right) =$$
$$= \frac{3\pi^2}{4\pi} = \frac{3\pi}{4}.$$

Az a_k együtthatók meghatározásánál az első tagnál parciális integrálási szabályt alkalmazva:

$$\begin{aligned} a_k &= \frac{1}{\pi}\left(\int_0^{\pi} x\cos(kx)\,\mathrm{d}x + \int_{\pi}^{2\pi} \pi\cos(kx)\,\mathrm{d}x\right) = \\ &= \frac{1}{\pi}\left(\left[x\frac{\sin(kx)}{k}\right]_0^{\pi} - \int_0^{\pi} \frac{\sin(kx)}{k}\,\mathrm{d}x + \left[\pi\frac{\sin(kx)}{k}\right]_{\pi}^{2\pi}\right) = \\ &= \frac{1}{\pi}\left(\left[x\frac{\sin(kx)}{k}\right]_0^{\pi} + \left[\frac{\cos(kx)}{k^2}\right]_0^{\pi} + \left[\pi\frac{\sin(kx)}{k}\right]_{\pi}^{2\pi}\right) =^1 \\ &= \frac{1}{\pi}\left(\frac{\cos(k\pi)}{k^2} - \frac{\cos(k \cdot 0)}{k^2}\right) = \frac{1}{\pi}\left(\frac{(-1)^k}{k^2} - \frac{1}{k^2}\right) \end{aligned}$$

A b_k együtthatók meghatározása hasonlóan történik:

$$
\begin{aligned}
b_k &= \frac{1}{\pi}\left(\int_0^{\pi} x\sin(kx)\,\mathrm{d}x + \int_{\pi}^{2\pi} \pi\sin(kx)\,\mathrm{d}x\right) = \\
&= \frac{1}{\pi}\left(\left[x\frac{-\cos(kx)}{k}\right]_0^{\pi} - \int_0^{\pi}\frac{-\cos(kx)}{k}\,\mathrm{d}x + \left[\pi\frac{\cos(kx)}{k}\right]_{\pi}^{2\pi}\right) = \\
&= \frac{1}{\pi}\left(\left[x\frac{-\cos(kx)}{k}\right]_0^{\pi} + \left[\frac{\sin(kx)}{k^2}\right]_0^{\pi} - \left[\pi\frac{\cos(kx)}{k}\right]_{\pi}^{2\pi}\right) = \\
&= \frac{1}{\pi}\left(\pi\frac{-\cos(k\pi)}{k} - \left(\pi\frac{\cos(k2\pi)}{k} - \pi\frac{\cos(k\pi)}{k}\right)\right) = \frac{1}{\pi}\left(-\pi\frac{1}{k}\right) = -\frac{1}{k}
\end{aligned}
$$

Így a Fourier-sor

$$f(x) \sim \frac{3\pi}{4} + \sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{(-1)^k - 1}{\pi k^2}\cos(kx) - \frac{1}{k}\sin(kx)\right)$$

Tehát a feladatot megoldottuk. $\diamond$

6.1. Feladatok gyakorlatra

6.1. Feladat. Adjuk meg a megadott függvények Maclaurin sorát(ha létezik) és $a = 2$-beli Taylor-sorát!

a) $f(x) = \frac{1}{x}$

b) $f(x) = e^x$

c) $f(x) = \sin(x)$

d) $f(x) = \cos(x)$

6.2. Feladat. Adjuk meg a megadott függvények Maclaurin sorát!

a) $f(x) = e^{-x^2}$

b) $f(x) = xe^{-x}$

c) $f(x) = \sin(3x)$

d) $f(x) = x^2\sin\left(\frac{x}{2}\right)$

e) $f(x) = \cos(x^2)$

f) $f(x) = x^3\cos(x^2)$

6.3. Feladat. Adjuk meg a következő függvények Maclaurin polinomjának első három tagját!

a) $f(x) = \operatorname{tg} x$

b) $f(x) = \frac{1}{\ln x}$

c) $f(x) = \sqrt{x+4}$

d) $f(x) = \sqrt{1-x^5}$

6.4. Feladat. Írja fel a megadott függvények Fourier-sorát! Vázolja a függvények grafikonját is!

a) $f(x) = 1, \quad 0 \le x \le 2\pi,$

b) $f(x) = \begin{cases} 1, & \text{ha } 0 \leq x \leq \pi \\ -1, & \text{ha } \pi < x \leq 2\pi, \end{cases}$

c) $f(x) = \begin{cases} 1, & \text{ha } 0 \leq x \leq \pi \\ 0, & \text{ha } \pi < x \leq 2\pi, \end{cases}$

d) $f(x) = \begin{cases} 2, & \text{ha } 0 \leq x \leq \pi \\ -x, & \text{ha } \pi < x \leq 2\pi. \end{cases}$

6.2. Gyakorló feladatok

6.5. Feladat. Adjuk meg a megadott függvény Maclaurin sorát!

a) $f(x) = e^{-2x}$

b) $f(x) = x^2 e^{-x}$

c) $f(x) = \cos(2x)$

d) $f(x) = \sin(x^2)$

6.3. Vizsgafeladatok

6.6. Feladat. Írja fel a megadott függvény Fourier-sorát! Vázolja a függvény grafikonját is! $f(x) = \begin{cases} 1, & \text{ha } 0 \leq x \leq \pi \\ -1, & \text{ha } \pi < x \leq 2\pi. \end{cases}$

6.7. Feladat. Írja fel a megadott függvények Fourier-sorát! Vázoljuk a függvények grafikonját is!

a) $f(x) = e^x, \quad 0 \leq x \leq 2\pi,$

b) $f(x) = \begin{cases} \cos x, & \text{ha } 0 \leq x \leq \pi \\ 0, & \text{ha } \pi < x \leq 2\pi, \end{cases}$

c) $f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{ha } 0 \leq x \leq \pi \\ 0, & \text{ha } \pi < x \leq 2\pi, \end{cases}$

7. fejezet

Kétváltozós függvények és deriváltjaik

7.1. Példa. Adja meg és rajzolja fel az alábbi kétváltozós függvény értelmezési tartományát

$$f(x,y) = \frac{2}{\sqrt{4-y-x^2}}.$$

Megoldás: Két dologra kell figyelnünk. Egyrészt, hogy nullával nem tudunk osztani, másrészt, hogy negatív számból nem tudunk gyököt vonni. Vagyis $\sqrt{4-y-x^2} \neq 0$ és $4-y-x^2 \geq 0$. Egy gyökös kifejezés úgy nem lehet 0, ha a gyök alatti mennyiség nem 0, vagyis $4-y-x^2 \neq 0$. A két feltételnek együtt kell teljesülnie, így $4-y-x^2 > 0$. Ez az x és y változókat tartalmazó egyenlőtlenség az $\mathbb{R}^2$ sík egy tartományát jelöli ki. Keressük meg a tartomány határárát! Az $4-y-x^2 = 0$ egyenlet adja meg azt a görbét, ami határolja az értelmezési tartományt. Ebből y-t kifejezve

$$y = 4 - x^2$$

egyenletű parabolát kapjuk. Az értelmezési tartományt a $4-x^2 > y$ egyenlőtlenség adja, mely a parabola alatti tartomány. Vagyis az értelmezési tartomány

$$D_f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 4-x^2 > y\}.$$

Tehát a feladatot megoldottuk. $\diamond$

7.2. Példa. Határozza meg az alábbi kétváltozós függvény parciális deriváltjait

$$f(x,y) = x^2 - 2xy^2 + 2y^2 + 4.$$

Megoldás: Az f kétváltozós függvény x, illetve y szerinti parciális deriváltjait:

$$f'_x = 2x - 2y^2,$$

$$f'_y = -4xy + 4y,$$

mivel ha az x szerinti változását vizsgáljuk a függvénynek, akkor y nem változik, vagyis konstansnak tekinthető és fordítva. Tehát a feladatot megoldottuk. $\diamond$

7.3. Példa. Határozza meg az alábbi kétváltozós függvény parciális deriváltjait

$$f(x,y) = \operatorname{arctg} \frac{x^2+y}{x+y^2}.$$

Megoldás: Az f kétváltozós függvény x, illetve y szerinti parciális deriváltjait:

$$f'_x = \frac{1}{1+(\frac{x^2+y}{x+y^2})^2} \cdot \frac{2x(x+y^2)-(x^2+y)\cdot 1}{(x+y^2)^2},$$

$$f'_y = \frac{1}{1+(\frac{x^2+y}{x+y^2})^2} \cdot \frac{1\cdot(x+y^2)-(x^2+y)\cdot 2y}{(x+y^2)^2},$$

mivel ez a kétváltozós függvény egy olyan összetett függvény, amely belső függvénye egy hányados; valamint ha az x szerinti változását vizsgáljuk a függvénynek, akkor y nem változik, vagyis konstansnak tekinthető és fordítva. Tehát a feladatot megoldottuk. $\diamond$

7.1. Feladatok gyakorlatra

7.1. Feladat. a) Határozza meg az alábbi függvények értelmezési tartományát!

b) Adja meg az alábbi c-khez tartozó szintvonalakat! Milyen görbék a szintvonalak?

c) Ábrázolja a függvényt! Milyen felületek ezek?

- $f(x,y) = 1-x-y$; $c = 2,\ 4$
- $f(x,y) = 4+2x+y$; $c = 2,\ 4$
- $f(x,y) = x^2+y^2$; $c = 0,\ 1,\ 4,\ 9$
- $f(x,y) = 9-x^2-y^2$; $c = 0,\ 5,\ 8,\ 9$
- $f(x,y) = xy$; $c = 1,\ 2$
- $f(x,y) = xy+2$; $c = 1,\ 2$
- $f(x,y) = \sqrt{1-x^2-y^2}$; $c = 0$
- $f(x,y) = \sqrt{4-x^2-y^2}$; $c = 0,\ 2$

7.2. Feladat. Határozza meg az alábbi függvények értelmezési tartományát!

a) $f(x,y) = \sqrt{xy}$

b) $f(x,y) = \sqrt{3-x^2-y^2}$

c) $f(x,y) = \sqrt{y-\sqrt{x}}$

d) $f(x,y) = \sqrt{y}+\sqrt{\sin(x)}$

e) $f(x,y) = \frac{1}{x-y}$

f) $f(x,y) = \frac{1}{y-x^2}$

g) $f(x,y) = \frac{1}{x-y^2}$

h) $f(x,y) = \ln(x-2y)$

i) $f(x,y) = \ln(\sin(x)\sin(y))$

j) $f(x,y) = \operatorname{tg}\ (x+y)$

7.3. Feladat. Ábrázolja az alábbi kétváltozós függvényeket!

a) $f(x,y) = 4-x^2-y^2$

b) $f(x,y)=\frac{x+y}{x-y}$

7.4. Feladat. Ábrázolja az alábbi kétváltozós függvények $c=1,2,3$-hoz tartozó szintvonalait!

a) $f(x,y)=25-x^2-y^2$

b) $f(x,y)=\sqrt{5x^2+5y^2}$

7.5. Feladat. Határozza meg az alábbi függvények első- és másodrendű parciális deriváltjait!

a) $f(x,y)=x^4+y^4-4x^2y^2$

b) $f(x,y)=2x^3+3x^2y-2y^2$

c) $f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}$

d) $f(x,y)=\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}$

e) $f(x,y)=xy\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$

f) $f(x,y)=\mathrm{tg}\,(xy)$

g) $f(x,y)=\sin x\ln y+\ln x\cos y$

h) $f(x,y)=\frac{\cos x^2}{y}$

i) $f(x,y)=\ln\left(\mathrm{tg}\,\frac{x}{y}\right)$

j) $f(x,y)=\arcsin\frac{x-y}{x+y}$

k) $f(x,y)=e^{xy}$

l) $f(x,y)=xye^{\sin xy}$

7.6. Feladat. Az $x=1$ sík a $z=x^2+y^2$ paraboloidot egy parabolában metszi. Adjuk meg a parabola érintőjének meredekségét a parabola $(1,2,5)$ pontjában!

7.2. Gyakorló feladatok

7.7. Feladat. Adja meg és rajzolja fel az $f(x,y)$ kétváltozós függvény értelmezési tartományát, valamint rajzolja be az értelmezési tartományba az $f(x,y)=1$ szintvonalat!

$$f(x,y)=\sqrt{y-\frac{1}{3}x^2}$$

7.8. Feladat. Adja meg és rajzolja fel az $f(x,y)$ kétváltozós függvény értelmezési tartományát, valamint rajzolja be az értelmezési tartományba az $f(x,y)=6$ szintvonalat!

$$f(x,y)=\sqrt{100-y^2-x^2}$$

7.9. Feladat. Határozza meg az alábbi függvény első- és másodrendű parciális deriváltjait! $f(x,y)=\arcsin\frac{x-y}{x+y}$

7.3. Vizsgafeladatok

7.10. Feladat. Határozza meg az alábbi függvények értelmezési tartományát!

a) $f(x,y)=\sqrt{\sin\left(x^2+y^2\right)}$

b) $f(x,y)=\sqrt{\ln\left(\sin(xy)\right)}$

c) $f(x,y)=\sqrt{\sin\left(\ln(xy)\right)}$

d) $f(x,y)=\arcsin\frac{x}{y^2}$

e) $f(x,y)=\operatorname{arctg}\frac{y}{x}$

f) $f(x,y)=\sqrt{\log_{\frac{1}{2}}\left(\operatorname{tg}(xy)\right)}$

8. fejezet

Kétváltozós függvények szélsőértéke

8.1. Tétel. *Ha az $f(x,y)$ kétváltozós függvénynek lokális maximuma vagy minimuma van az értelmezési tartományának (a,b) belső pontjában, és itt az első parciális deriváltak léteznek, akkor $f'_x(a,b)=0$ és $f'_y(a,b)=0$.*

8.2. Tétel. *Tegyük fel, hogy az $f(x,y)$ kétváltozós függvény első és második parciális deriváltjai folytonosak egy (a,b) középpontú körlapon, és $f'_x(a,b)=f'_y(a,b)=0$. Jelöljük D-vel az* $\boxed{f''_{xx}(a,b)\cdot f''_{yy}(a,b)-(f''_{xy}(a,b))^2}$ *számot. Ekkor*

a) ha $D>0$ és $f''_{xx}(a,b)>0$, akkor f-nek (a,b)-ben lokális minimuma van.

b) ha $D>0$ és $f''_{xx}(a,b)<0$, akkor f-nek (a,b)-ben lokális maximuma van.

c) ha $D<0$, akkor f-nek (a,b)-ben nyeregpontja van.

d) ha $D=0$, akkor a második deriváltakkal nem eldönthető, hogy van-e szélsőértéke f-nek (a,b)-ben. Ekkor más úton kell vizsgálódnunk.

8.1. Példa. Határozza meg az alábbi kétváltozós függvény szélsőértékeit:

$$f(x,y)=x^4-4xy^2+8y.$$

Megoldás: A lehetséges szélsőérték pontokat (stacionárius pontok) keresve, először kiszámítjuk a kétváltozós függvény x, illetve y szerinti parciális deriváltjait:

$$f'_x=4x^3-4y^2,$$

$$f'_y=-8xy+8.$$

A parciális deriváltakat 0-val tesszük egyenlővé, így egy kétismeretlenes egyenlet rendszert kapunk:

$$\begin{aligned} 4x^3-4y^2 &= 0\\ -8xy+8 &= 0 \end{aligned}$$

A második egyenletből kifejezzük az y változót:

$$-8xy + 8 = 0$$

$$8xy = 8$$

$$y = \frac{1}{x}$$

Ezt az első egyenletbe behelyettesítve, majd rendezve:

$$4x^3 - 4\left(\frac{1}{x}\right)^2 = 0$$

$$4x^3 - 4\frac{1}{x^2} = 0$$

$$4x^3 = 4\frac{1}{x^2}$$

$$x^5 = 1$$

$$x = 1.$$

Az $y = \frac{1}{x}$ kifejezésbe az $x = 1$-et helyettesítve $y = 1$-et kapunk. Tehát egyetlen egy lehetséges szélsőérték pontot kaptunk:

$$(a,b) = (1{,}1).$$

A szélsőérték tipusának eldöntéséhez először a második deriváltakat kell kiszámítani:

$$f''_{xx} = 12x^2$$

$$f''_{xy} = -8y$$

$$f''_{yy} = -8x$$

Ezeknek az (1,1) pontban vett helyettesítési értékei:

$$f''_{xx}(1{,}1) = 12 \cdot 1^2 = 12$$

$$f''_{xy}(1{,}1) = -8 \cdot 1 = -8$$

$$f''_{yy}(1{,}1) = -8 \cdot 1 = -8$$

Így a D diszkrimináns értéke:

$$D = 12 \cdot (-8) - (-8)^2 = -96 - 64 = -160.$$

Tehát a fenti tétel alapján az (1,1) pontban a függvénynek nyeregpontja van. Tehát a feladatot megoldottuk. $\diamond$

8.2. Példa. Egy szállító cég csak olyan téglatest alakú dobozokat fogad el, amelyeknél a leghosszabb oldal hossza és a rá merőleges oldal kerülete együttesen 240 centiméter (ha a leghosszabb oldal z, akkor $z+2x+2y=240$). Milyen méretek mellett lesz a küldemény térfogata maximális?

Megoldás: Ha a három oldalt x,y,z jelöli, akkor a küldemény térfogata (mint x,y,z függvénye)

$$V(x,y,z)=x\cdot y\cdot z.$$

Azon feltétel mellett, hogy leghosszabb oldal hosszának és a rá merőleges oldal kerületének együttesen 240 centiméternek kell lennie, vagyis $z+2x+2y=240$, z igazából x-től és y-tól függ $z=240-(2x+2y)$. Így a térfogat kifejezhető, mint x és y függvénye

$$V(x,y)=x\cdot y\cdot(240-2x-2y)=240xy-2x^2y-2xy^2.$$

Ezen felül meg kell határozni, az (x,y) síknak azt a T tartományát, amelyen a szöveges feladat értelmezhető. Az $x,y,z>0$-nak kell teljesülni, különben a térfogat 0. A $z>0$ miatt

$$240-(2x+2y)>0$$

$$x+y<120.$$

Tehát a T tartomány egy nyílt háromszög lemez:

$$T=\{(x,y)|x,y>0,x+y<120\}.$$

Mivel a T tartomány egy nyílt halmaz, így a határán nem kell a szélsőértéket vizsgálni. Így elegendő a lehetséges szélsőérték pontokat (stacionárius pontok) keresve, először a kétváltozós függvény x, illetve y szerinti parciális deriváltjait kiszámítani:

$$f'_x=240y-4xy-2y^2,$$

$$f'_y=240x-2x^2-4xy.$$

A parciális deriváltakat 0-val tesszük egyenlővé, így egy kétismeretlenes egyenlet rendszert kapunk:

$$\begin{array}{rcl}240y-4xy-2y^2&=&0\\240x-2x^2-4xy&=&0\end{array}$$

Az egyenleteket alakítsuk szorzattá:

$$y(240-4x-2y)=0$$

$$x(240-2x-4y)=0$$

Egy szorzat akkor lehet 0, ha valamelyik tényezője 0. Vagyis

$$y=0 \text{ vagy } 240-4x-2y=0, \text{ innen } y=120-2x$$

$$x=0 \text{ vagy } 240-4y-2x=0, \text{ innen } x=120-2y.$$

Ekkor a szöveges feladat szempontjából három, nem valódi megoldást kapunk: (0,0); (0,120); (120,0) (ilyen dobozok nem léteznek, ezek a pontok a T háromszögtartomány csúcspontjai, melyek nyílt tartományról lévén szó nem tartoznak T-hez); és egy lehetséges szélsőértékhelyet az

$$y = 120 - 2x$$
$$x = 120 - 2y$$

egyenletrendszerből.

Ezt az elsőt behelyettesítve a másodikba, majd rendezve:

$$x = 120 - 240 + 4x$$

$$x = 40.$$

Az $y = 120 - 2x$ kifejezésbe az $x = 40$-et helyettesítve $y = 40$-et kapunk. Tehát egyetlen egy lehetséges szélsőérték pontot kaptunk:

$$(a, b) = (40{,}40).$$

A szélsőérték tipusának eldöntéséhez először a második deriváltakat kell kiszámítani:

$$f''_{xx} = -4y$$

$$f''_{xy} = 240 - 4x - 4y$$
$$f''_{yy} = -4x$$

Ezeknek az (40,40) pontban vett helyettesítési értékei:

$$f''_{xx}(40{,}40) = -160$$

$$f''_{xy}(40{,}40) = -80$$
$$f''_{yy}(40{,}40) = -160$$

Így a D diszkrimináns értéke:

$$D = (-160) \cdot (-160) - (-80) \cdot (-80) = 19200.$$

Tehát a fenti tétel alapján az (40,40) pontban a függvénynek maximuma van. Tehát a feladatot megoldottuk. ⋄

8.1. Feladatok gyakorlatra

8.1. Feladat. Határozza meg az alábbi kétváltozós függvények szélsőértékeit!

a) $f(x, y) = x^2 + 2y^2 - x - 2y - 1$

b) $f(x, y) = 2x^2 + 4xy + y^4$

c) $f(x, y) = 3x^3 + 6xy - y^2 + 5$

d) $f(x, y) = x^2 - xy + 2y^2 + 2x - y - 3$

e) $f(x,y)=x^3-3x^2+2xy+y^2-4$

f) $f(x,y)=4x^3+2x^2y-y^2$

g) $f(x,y)=x^3+y^3+3xy$

h) $f(x,y)=x^3+y^3$

i) $f(x,y)=x^4+y^4$

j) $f(x,y)=x^4+y^4+4xy$

k) $f(x,y)=2x^4+y^4-x^2-2y^2$

l) $f(x,y)=xy+\frac{50}{x}+\frac{20}{y}$

8.2. Feladat. Egy téglatest egy csúcsból induló éleinek összege 15 cm. Mikor lesz a térfogata maximális?

8.3. Feladat. Egy téglatest éleinek összege 48 cm. Mikor lesz a felszíne maximális?

8.4. Feladat. Egy felül nyitott téglatest alakú tartály térfogata 4 dm^3. Mikor lesz a tartály felszíne a legkisebb?

8.5. Feladat. Egy téglatest alakú csomag térfogata 10 dm^3. A csomagot egyik élére merőlegesen kétszer, a másikra merőlegesen egyszer kötjük át. Milyen méretek mellett lesz a felhasznált zsineg hossza minimális?

8.6. Feladat. Egy 2 m hosszú, 20 cm széles bádog lemezből trapéz keresztmeszetű vályút szeretnénk készíteni. Hogyan válasszuk meg a trapéz méreteit, hogy a keresztmetszet a lehető legnagyobb legyen?

8.7. Feladat. Egy üzem kétféle terméket gyárt, darabonként 200, ill. 100 forintos önköltséggel. Az első termék iránti kereslet $k_1=\frac{1000000}{xy}$, a második iránti pedig ennek kétszerese, ahol x, y a termékek eladási árai. Milyen árak mellett érné el az üzem a maximális tiszta összhozamot?

8.2. Gyakorló feladatok

8.8. Feladat. Határozza meg az alábbi kétváltozós függvény szélsőértékeit!

$$f(x,y)=\frac{1}{2}xy+x^2+y^2-2x-2y-3$$

8.9. Feladat. Határozza meg az alábbi kétváltozós függvény szélsőértékeit!

$$f(x,y)=\frac{1}{2}xy+x^2+y^2-x-y+5$$

8.10. Feladat. Egy szállító cég csak olyan téglatest alakú dobozokat fogad el, amelyeknél a leghosszabb oldal hossza és a rá merőleges oldal kerülete együttesen 240 centiméter (ha a leghosszabb oldal z, akkor $z+2x+2y=240$). Milyen méretek mellett lesz a küldemény térfogata maximális?

8.3. Vizsgafeladatok

8.11. Feladat. Határozza meg az alábbi függvények első- és másodrendű parciális deriváltjait!

a) $f(x,y) = \text{arctg}\,(x^2 - y^2) \cdot e^{tg(x+y)}$

b) $f(x,y) = \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}$

c) $f(x,y) = \arcsin \frac{x-y}{x+y}$

d) $f(x,y) = xye^{\sin xy}$

8.12. Feladat. Határozza meg az alábbi kétváltozós függvények szélsőértékeit!

a) $f(x,y) = 16x^2 + 24xy + 9y^2 + 11$

b) $f(x,y) = (y - x^2)(y - 3x^2)$

c) $f(x,y) = x^4 + 2x^2y^2 + y^4 - x^2 - y^2$

d) $f(x,y) = (3 - 2x + y)\, e^{-y^2}$

e) $f(x,y) = (8x^2 - 6xy + 3y^2)\, e^{2x+3y}$

f) $f(x,y) = xy \ln(x^2 + y^2)$

9. fejezet

Kétváltozós függvények integrálása

9.1. Példa. Határozza meg az alábbi kétváltozós függvény integrálját:

$$\int_0^2 \int_0^1 x^4 - 4xy^2 + 8y \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y.$$

Megoldás: Feladatunk egy egyszerű téglalap tartományon vett kettős integrál, így először x szerint integrálunk, azaz meghatározzuk a primitívfüggvényt, majd a határozott integrált számítjuk ki:

$$\int_0^2 \int_0^1 x^4 - 4xy^2 + 8y \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y = \int_0^2 \left[\frac{x^5}{5} - 2x^2y^2 + 8xy\right]_0^1 \mathrm{d}y = \int_0^2 \left(\frac{1}{5} - 2y^2 + 8y\right) \mathrm{d}y =$$

Majd y szerint integrálunk:

$$\left[\frac{1}{5}y - \frac{2y^3}{3} + 4y^2\right]_0^2 = \frac{2}{5} - \frac{2 \cdot 2^3}{3} + 16 = \frac{6 - 80 + 240}{15} = \frac{166}{15}.$$

Így a kettősintegrál értéke: $\frac{166}{15}$. Tehát a feladatot megoldottuk. $\diamond$

9.1. Tétel. *Legyen f folytonos függvény a T tartományon. Ha T az $a \le x \le b$, $g_1(x) \le$ $\le y \le g_2(x)$ egyenlőtlenségekkel van megadva, ahol $g_1(x)$, $g_2(x)$ folytonos függvények, akkor*

$$\boxed{\iint_T f(x,y) \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y = \int_a^b \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x,y) \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}x.}$$

9.2. Példa. Határozza meg az alábbi kétváltozós függvény integrálját a T tartományon:

$$f(x,y) = 3x - 2y + 5, \quad T = \{-2 \le x \le 1, \ x - 1 \le y \le 1 - x^2\}.$$

Megoldás: A fenti tétel szerint a T tartományon vett kettős integrált átírhatjuk a következő kettős integrállá:

$$\iint_T 3x-2y+5\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_{-2}^{1}\int_{x-1}^{1-x^2} 3x-2y+5\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x.$$

Tehát először y szerint integrálunk, azaz meghatározzuk a primitívfüggvényt, majd a határozott integrált számítjuk ki:

$$\int_{-2}^{1}\int_{x-1}^{1-x^2} 3x-2y+5\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x = \int_{-2}^{1}\left[3xy-2\frac{y^2}{2}+5y\right]_{x-1}^{1-x^2}\mathrm{d}x =$$

$$\int_{-2}^{1}\left(3x(1-x^2)-(1-x^2)^2+5(1-x^2)-3x(x-1)+(x-1)^2-5(x-1)\right)\,\mathrm{d}x =$$

$$\int_{-2}^{1}\left(10-4x-2x^2-3x^3-x^4\right)\,\mathrm{d}x =$$

Majd x szerint integrálunk:

$$\left[10x-4\frac{x^2}{2}-2\frac{x^3}{3}-3\frac{x^4}{4}-\frac{x^5}{5}\right]_{-2}^{1} = \left(10-2-\frac{2}{3}-\frac{3}{4}-\frac{1}{5}\right)-\left(-20-8+\frac{16}{3}-12+\frac{32}{5}\right) =$$

$$\frac{383}{60}-\frac{1696}{60} = -\frac{1313}{60}.$$

Így a kettősintegrál értéke:-$\frac{1313}{60}$. Tehát a feladatot megoldottuk. $\diamond$

9.1. Feladatok gyakorlatra

9.1. Feladat. Határozza meg az alábbi kétváltozós függvények integrálját!

a) $\displaystyle\int_0^1\int_0^2 (y^2+x^2-xy)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y,$

b) $\displaystyle\int_0^2\int_0^1 (3x^2+x^2y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y,$

c) $\displaystyle\int_1^2\int_0^3 (x^3y^2-x-y^{-1})\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y,$

d) $\displaystyle\int_0^2\int_1^2 \frac{x^2+3y^3}{x^3}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y,$

e) $\displaystyle\int_0^{\pi}\int_0^{\pi} (\sin 2x+\cos 4y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y,$

f) $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{\cos^2 x}-\frac{1}{\sin^2 y}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y,$

g) $\displaystyle\int_0^1\int_0^1 e^{x+y}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y,$

h) $\displaystyle\int_0^1\int_0^{\frac{\pi}{2}} y\sin x\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y,$

i) $\displaystyle\int_0^1\int_0^{\sqrt{3}} \frac{x^2}{1+y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y,$

j) $\displaystyle\int_0^2\int_0^4 \frac{x^2-1}{1+y}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y,$

k) $\displaystyle\int_1^2\int_0^3 \frac{2x}{x^2+1}2y\sqrt{1+y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y,$

l) $\displaystyle\int_0^1\int_0^1 y(3x^2+2)\sqrt{\frac{x^3+2x}{y+1}}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y,$

m) $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{(\sin y)\cos^3 y}{(\cos^2 x)\operatorname{tg} x}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y,$

n) $\displaystyle\int_1^2\int_0^3 (y+\ln x)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y,$

o) $\displaystyle\int_0^{\pi}\int_0^{\pi} 4xy\cos(x^2+y^2)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y,$

p) $\displaystyle\int_0^1\int_0^2 x^2 e^{xy}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y,$

9.2. Feladat. Határozza meg az alábbi kétváltozós függvények integrálját az adott T tartományon!

a) $f(x,y)=\frac{1}{(1+x^2)(1+y^2)}$, $T=\{0\le x\le 1,\ 0\le y\le x\}$

b) $f(x,y)=\frac{1}{x+y}$, $T=\{-1\le x\le 2,\ -x+2\le y\le 3\}$

c) $f(x,y)=x+y+3$, $T=\{0\le x\le 1,\ x^2\le y\le 2-x\}$

d) $f(x,y)=xy$, $T=\{0\le x\le 2,\ 0\le y\le \sqrt{4x-x^2}\}$

9.3. Feladat. Határozza meg az $xy=21$ és az $x+y=10$ egyenletű görbék által határolt síkidom területét kettős integrál segítségével.

9.4. Feladat. Határozza meg az $xy=21$ és az $x+y=10$ egyenletű görbék által határolt lemez tömegét, ha sűrűségfüggvénye $s(x,y)=x-y$.

9.5. Feladat. Határozza meg az $y=x^4$ és az $y=8x$ egyenletű görbék által határolt lemez tömegét, ha sűrűségfüggvénye $s(x,y)=4x+y$.

9.6. Feladat. Határozza meg az $y=x\ln x$ és az $y=x$ egyenletű görbék által határolt lemez tömegét, ha sűrűségfüggvénye $s(x,y)=x+1$.

9.2. Gyakorló feladatok

9.7. Feladat. Határozza meg az alábbi kétváltozós függvény integrálját!

$$\int_0^1\int_0^3 (y^2-xy)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y,$$

9.8. Feladat. Határozza meg az alábbi kétváltozós függvény integrálját!

$$\int_0^1 \int_0^2 \frac{2y}{1+x}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y,$$

9.9. Feladat. Határozza meg az alábbi kétváltozós függvény integrálját!

$$\int_0^1 \int_0^{\sqrt{2}} \frac{x}{1+y}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y,$$

9.10. Feladat. Határozza meg az alábbi kétváltozós függvény integrálját a T tartományon:

$$f(x,y) = x - y, \quad T = \{0 \le x \le 1,\ x \le y \le 2 - x^2\}.$$

9.3. Vizsgafeladatok

9.11. Feladat. Határozza meg az alábbi kétváltozós függvények integrálját!

a) $\displaystyle\int_0^1 \int_0^1 \frac{2xy}{x^2-y^2+1}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y,$

b) $\displaystyle\int_0^1 \int_0^{\frac{\pi}{2}} y\sin^2 x\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y,$

c) $\displaystyle\int_0^\pi \int_0^\pi \sin(x+y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y,$

9.12. Feladat. Határozza meg az alábbi kétváltozós függvények integrálját az adott T tartományon!

a) $f(x,y) = \sqrt{2x+y}$, $T = \{0 \le x \le 2,\ 2x \le y \le -\frac{1}{2}x+5\}$

b) $f(x,y) = \frac{2x}{y(x^2+y^2)}$, A T tartomány a $A(0{,}1)$, $B(1{,}1)$, $C(e,e)$, $D(0,e)$ négyszög.

9.13. Feladat. Határozza meg annak a testnek a térfogatát, melyet a koordinátasíkok és a $6x+4y+3z=12$ sík határol.

9.14. Feladat. Határozza meg annak a testnek a tömegét, melyet a koordinátasíkok és a $6x+4y+3z=12$ sík határol és sűrűségfüggvénye $s(x,y) = 12-6x-4y$.

9.4. Kiegészítő tananyag

9.15. Feladat. Határozza meg az alábbi kétváltozós függvények integrálját az adott T tartományon!

a) $f(x,y) = \frac{1}{x^2+2x+2}$, A T tartomány a $P_1(1{,}0)$, $P_1(3{,}2)$, $P_1(4,-1)$ háromszög.

b) $f(x,y) = 1+2x-3y$, $T = \{-5 \le x \le 5,\ 0 \le y \le \sqrt{25-x^2}\}$

c) $f(x,y) = 1$, $T = \{0 \le x \le 4,\ 0 \le y \le \sqrt{4x-x^2}\}$

d) $f(x,y) = \operatorname{arctg} \frac{y}{x}$, $T = \{1 \le x^2+y^2 \le 4,\ x \le y \le x\sqrt{3}\}$

9.16. Feladat. Határozza meg az alábbi kétváltozós függvények integrálját az adott T tartományon!

a) $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$, $T = \{x^2+y^2 \le 1\}$

b) $f(x,y) = \ln(1+x^2+y^2)$, $T = \{0 \le x \le 2,\ 0 \le y \le \sqrt{4-x^2}\}$

9.17. Feladat. Határozza meg annak a gyűrű alakú testnek a térfogatát, melyet $z=0$ koordinátasík az $x^2+y^2=1$ és a $x^2+y^2=9$ egyenletű hengerek, valamint $x+y-z=6$ sík határol.

10. fejezet

Közönséges elsőrendű differenciálegyenletek

10.1. Definíció. Legyen adva egy egyváltozós függvény. Ezt $y(x)$-szel vagy egyszerűen csak y-nal jelöljük.(Korábban megszokott $f(x)$ helyett.) Közönséges differenciálegyenletnek nevezzük, azt az egyenletet, amelyben konstansok, az x független változó valamint az x-től függő $y(x)$ függvény és ennek $y'(x)$, $y''(x)$, stb. deriváltjai szerepelnek.

10.2. Definíció. Elsőrendűnek nevezünk egy közönséges differenciálegyenletet, ha az $y(x)$ függvény deriváltjai közül csak $y'(x)$ fordul elő a differenciálegyenletben.

10.1. Példa. Oldja meg a $y' = 2x$ differenciálegyenletet!

Megoldás: A y' helyére bevezetjük a $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ jelölést

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 2x.$$

Majd az egyenletet szorozva $\mathrm{d}x$-szel[1] szétválasztjuk a differenciálegyenlet változóit, úgy hogy az egyenelet egyik oldalán csak x, a másikon csak y maradjon:

$$\mathrm{d}y = 2x\,\mathrm{d}x.$$

Ezután az egyenlet mindkét oldalát integráljuk a megfelelő változók szerint:

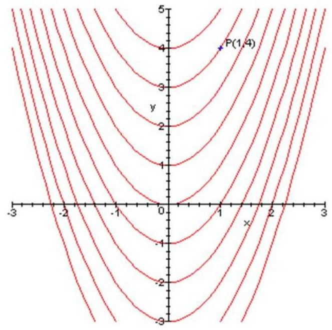
$$\int 1\,\mathrm{d}y = \int 2x\,\mathrm{d}x$$

$$y(x) = x^2 + c.$$

Látjuk, hogy a megoldás nem egyetlen egy függvény, hanem végtelen sok, hiszen c tetszőleges valós szám. Az így kapott megoldást nevezzük a differenciálegyenlet **általános megoldás**ának. Tehát a feladatot megoldottuk. ⋄

Ha a $y(x) = x^2 + c$ függvényeket ábrázoljuk, c helyére tetszőleges számokat írva, úgynevezett **görbeseregé**t kapunk.

[1] Hasonlóan jártunk el a helyettesítéses integrálásnál.



Ha c helyére egy számot írunk, akkor kapjuk a differenciálegyenlet egy **partikuláris megoldás**át, például:

$$y(x) = x^2 + 3.$$

Partikuláris megoldást kapunk, akkor is ha az általános megoldásból azt a függvényt választjuk ki, mely kielégíti például a

$$y(1) = 4$$

feltételt is, ezt a feltételt nevezzük **kezdeti feltétel**nek. Ez azt jelenti, hogy az $x = 1$ helyen a $y(x)$ függvény értéke 4, így a $4 = 1^2 + c$-ből, $c = 3$ adódik. Tehát a kezdeti feltételt kielégítő partikuláris megoldás

$$y(x) = x^2 + 3.$$

10.2. Példa. Adja meg az alábbi szétválasztható változójú differenciálegyenlet általános megoldását!

$$(1+x^2)y'y^2 = 1.$$

Megoldás: A y' helyére bevezetjük a $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ jelölést

$$(1+x^2)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}y^2 = 1.$$

Majd az egyenletet szorozva $\mathrm{d}x$-szel és osztva $1+x^2$-tel szétválasztjuk a differenciálegyenlet változóit, úgy hogy az egyenelet egyik oldalán csak x, a másikon csak y maradjon:

$$y^2\,\mathrm{d}y = \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x.$$

Ezután az egyenlet mindkét oldalát integráljuk a megfelelő változók szerint:

$$\int y^2\,\mathrm{d}y = \int \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$$

$$\frac{y^3}{3} = \operatorname{arctg} x + c.$$

A most kapott megoldást, amikor az y nincs kifejezve az egyenletből, a differenciálegyenlet **implicit megoldás**ának nevezzük. Ennél a feladatnál ki tudjuk fejezni az y-t az egyenletből és így megkapjuk a differenciálegyenlet **explicit megoldás**át. Általában nem biztos, hogy elő tudjuk állítani az explicit megoldást, ilyenkor megelégszünk az implicit megoldással is.

$$y = \sqrt[3]{3\operatorname{arctg} x + 3c}.$$

Tehát a feladatot megoldottuk. ◇

10.3. Definíció. Lineárisnak nevezünk egy elsőrendű differenciálegyenletet, ha $y(x)$ és $y'(x)$ is legfeljebb az első hatványon szerepel az egyenletben, valamint szorzatuk nincs az egyenletben. Így általános alakjukat a következőképpen lehet felírni $a(x)y'(x) + b(x)y(x) = e(x)$. Egy elsőrendű lineáris differenciálegyenlet homogén, ha az előző általános alakban $e(x) = 0$. Ebben az esetben a differenciálegyenlet szétválasztható változójú. Egy elsőrendű lineáris differenciálegyenlet inhomogén, ha $e(x) \neq 0$.

10.1. Tétel. *Az $a(x)y'(x)+b(x)y(x) = e(x)$ alakú elsőrendű lineáris inhomogén differenciálegyenlet megoldása a következő lépésekből áll:*

a) Oldjuk meg az $a(x)y'(x)+b(x)y(x) = 0$ homogén egyenletet.

b) Majd konstans variálással keressük meg az inhomogén egyenlet megoldását.

c) Az inhomogén általános megoldását a homogén általános megoldása és az inhomogén egy partikuláris megoldása adja.

10.3. Példa. Adja meg az alábbi elsőrendű lineáris inhomogén differenciálegyenlet általános megoldását

$$xy' - y = x^3 + x + 1.$$

Megoldás: Először megoldjuk a homogén egyenletet, mely egy egyszerű szétválasztható változójú differenciálegyenlet:

$$xy' - y = 0.$$

Az y' helyére beírjuk a $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ jelölést:

$$x\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} - y = 0.$$

A következő lépésben formálisan szorzunk $\mathrm{d}x$-szel.[2]

$$x\,\mathrm{d}y - y\,\mathrm{d}x = 0.$$

[2]Nagyon szigorú matematikai értelemben ez nem helyes, de formálisan egyszerűbb lesz a megoldás. Mi ezt a differenciálegyenletek megoldásánál szokásos mérnöki utat követjük.

A $\mathrm{d}x$-es tagokat az egyenlet egyik, a $\mathrm{d}y$-os tagokat a másik oldalra visszük:

$$x\,\mathrm{d}y = y\,\mathrm{d}x.$$

Majd a célunk az, hogy az egyenlet azon oldalán, ahol a $\mathrm{d}x$-es tagok vannak ott, csak az x változó, ahol $\mathrm{d}y$-os tagok vannak ott csak az y változó függvényei maradjanak. Nyilván, ha ezt meg tudjuk tenni, akkor szétválasztható változójú a differenciálegyenlet. Ezért a fenti egyenletet osztjuk x-szel és y-nal is:

$$\frac{1}{y}\,\mathrm{d}y = \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x.$$

Majd mindkét oldalt integrálva:

$$\int \frac{1}{y}\,\mathrm{d}y = \int \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x$$

$$\ln|y| = \ln|x| + \ln|c|.$$

A konstanst $\ln|c|$ alakban írtuk fel, hogy a logaritmikus egyenletet könnyebben tudjuk megoldani:

$$\ln|y| = \ln(|x||c|)$$

$$|y| = |c||x|.$$

Mivel a c konstans értéke pozitív és negatív is lehet, így az abszolútértékes egyenletettel ekvivalens az

$$y = c \cdot x$$

egyenlettel. Ez a homogén rész megoldása. Az inhomogén egyenletet a konstans variálásának a módszerével oldjuk meg. Ez azt jelenti, hogy a homogén egyenlet megoldásában a c konstans helyére $c(x)$-et, azaz egy függvényt írunk:

$$y = c(x) \cdot x.$$

Az így kapott szorzatfüggvényt deriváljuk:

$$y' = c'(x) \cdot x + c(x).$$

Az y-t és az y'-t az eredeti inhomogén egyenletbe behelyettesítjük:

$$x \cdot (c'(x) \cdot x + c(x)) - c(x) \cdot x = x^3 + x + 1.$$

A zárójelet felbontjuk, majd összevonunk. Ha jól csináltuk a feladatot a $c(x)$-es tagok kiesnek az egyenletből:

$$c'(x) \cdot x^2 + c(x) \cdot x - c(x) \cdot x = x^3 + x + 1$$

$$c'(x) \cdot x^2 = x^3 + x + 1.$$

Ha x^2-tel osztunk, az egyenlet egyik oldalán $c'(x)$ marad, melyből inegrálással kapjuk meg a $c(x)$-et:

$$c'(x) = x + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}$$

$$c(x) = \frac{x^2}{2} + \ln|x| - \frac{1}{x} + c.$$

Végül az $y = c(x) \cdot x$ homogén rész megoldásába az $c(x)$ helyére a fent kapott kifejezést beírva megkapjuk a differenciálegyenlet megoldását:

$$y(x) = \left(\frac{x^2}{2} + \ln|x| - \frac{1}{x} + c\right) \cdot x$$

$$y(x) = \frac{x^3}{2} + x \cdot \ln|x| - 1 + c \cdot x.$$

Tehát a feladatot megoldottuk. $\diamond$

10.1. Feladatok gyakorlatra

10.1. Feladat. Adja meg az alábbi szétválasztható változójú differenciálegyenletek általános megoldását!

a) $y' = 2x$

b) $y' = \sin x$

c) $y' = x^3 + e^x$

d) $y' = \ln x$

e) $y'y^2 = 1$

f) $y' = y^2$

g) $y' = 1 + y^2$

h) $y + xy' = 0$

i) $y' \mathrm{tg}\, x = y$

j) $x + yy' = 0$

k) $(1 + x^2)y'y^2 = 1$

l) $x^3 + (y+1)^2 y' = 0$

m) $e^x \cos y + (1 + e^x) \sin y y' = 0$

n) $y'y^2x - y^2y' + x^2y + x^2 = 0$

o) $y(4 + 4x^2)y' = 1$

10.2. Feladat. Adja meg az alábbi elsőrendű lineáris differenciálegyenletek általános megoldását!

a) $y' - y = x$

b) $y' - y = 2x + 2$

c) $y' - y = x^2 + 2$

d) $y' - y = e^x$

e) $y' - 2y = 3e^{2x}$

f) $y' - \frac{y}{x} = x + 1$

g) $y' - \frac{y}{x} = x^2 + 3x - 2$

h) $y' + x^2y = x^2$

i) $xy' - 2y = x^5$

j) $y' - 3x^2 y = (1-2x)e^{x^3}$

k) $y' - y\,\mathrm{tg}\,x = 1 - x$

10.2. Gyakorló feladatok

10.3. Feladat. Oldja meg az alábbi szétválasztható változójú differenciálegyenletet. Adja meg az általános megoldást! Ha talál a megoldás során partikulárist, azt is.

$$\cos x y' + \sin x(2y+1) = 0$$

10.4. Feladat. Oldja meg az alábbi szétválasztható változójú differenciálegyenletet. Adja meg az általános megoldást! Ha talál a megoldás során partikulárist, azt is.

$$e^{2x}\sin y + (2+e^{2x})\cos y y' = 0$$

10.5. Feladat. Adja meg az alábbi elsőrendű inhomogén differenciálegyenlet általános megoldását $xy' - 2y = x^2 + 2x$!

10.6. Feladat. Adja meg az alábbi elsőrendű inhomogén differenciálegyenlet általános megoldását $y' - 3x^2 y = e^{x^3+5x}$!

10.3. Vizsgafeladatok

10.4. Definíció. Az $y' = f(x,y)$ alakú differenciálegyenletet **homogén fokszámú**nak nevezzük, ha $f(x,y)$ kifejezésben az x, illetve y helyére λx-et, illetve λy-t írva, λ valamely hatványát kiemelve az eredeti kifejezést kapjuk. A fokszám megegyezik λ kitevőjével.

A differenciálegyenlet megoldása során az $u = \frac{y}{x}$ helyettesítést alkalmazva:

$$y = ux$$

$$y' = u + u'x$$

Az $y' = f(ax+by+c)$ alakú diferenciálegyenleteket a

$$t = ax + by + c$$

helyettesítést alkalmazva oldjuk meg. Ezt deriválva $t' = a + by'$, melyből y' kifejezhető:

$$y' = \frac{t'-a}{b}.$$

10.7. Feladat. Adja meg az alábbi homogén fokszámú differenciálegyenletek általános megoldását!

a) $y' = \frac{x^2+y^2}{xy}$

b) $(y^2 - xy) + x^2 y' = 0$

c) $(2x+y) + (x+y)y' = 0$

d) $xy' - y - \sqrt{x^2-y^2} = 0$

10.8. Feladat. Adja meg az alábbi $y' = f(ax+by+c)$ típusú differenciálegyenletek általános megoldását!

a) $y' = x+y$

b) $y' = (x+y+1)^2$

c) $y' = \mathrm{tg}^2(x+y)$

10.9. Feladat. Adja meg az alábbi homogén fokszámú differenciálegyenletek általános megoldását!

a) $x^3 + y^3 = 3xy^2y'$

10.10. Feladat. Adja meg az alábbi $y' = f(ax+by+c)$ típusú differenciálegyenletek általános megoldását!

a) $y' + 4x + 6y = 4x^2 + 12xy + 9y^2 + 1$

10.11. Feladat. Adja meg az alábbi elsőrendű lineáris differenciálegyenletek általános megoldását!

a) $y' - y = \sin x$

b) $xy' - 2y = (x-2)e^x$

c) $(x-2)y' - y = 2(x-3)^3$

11. fejezet

Közönséges másodrendű differenciálegyenletek

11.1. Definíció. Másodrendűnek nevezünk egy közönséges differenciálegyenletet, ha az $y(x)$ függvény legmagasabb rendű deriváltja $y''(x)$.

11.1. Tétel. *Másodrendű hiányos differenciálegyenletek*

a) *Csak $y''(x)$, x és konstansok szerepelnek az egyenletben. Az egyenlet $y''(x) = f(x)$ alakra rendezhető és kétszer integrálva megkapjuk $y(x)$ megoldást.*

b) *Az $y(x)$ hiányzik az egyenletből, ekkor $y'(x) = p(x)$, $y''(x) = p'(x)$ helyettesítéssel elsőrendűre vezethető vissza a differenciálegyenlet.*

c) *A differenciálegyenletből hiányzik az x független változó. Ilyenkor $y'(x) = p(y)$ helyettesítést végezzük, azaz $y'(x)$-et y függvényeként írjuk fel. Így*

$$y'' = \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}y' = \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}p.$$

11.1. Példa. Adja meg az alábbi másodrendű hiányos differenciálegyenlet általános megoldását

$$y''(x^2+2x) = (4x+4)y'.$$

Megoldás: A másodrendű differenciálegyenletből az y hiányzik, így az $y' = p$, $y'' = p'$ helyettesítést alkalmazva elsőrendű differenciálegyenletet kapunk:

$$p'(x^2+2x) = (4x+4)p.$$

A differenciálegyenlet szétválasztható változójú, tehát a p' helyére bevezetjük a $\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}$ jelölést:

$$\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}(x^2+2x) = (4x+4)p.$$

Formálisan szorzunk $\mathrm{d}x$-szel:

$$(x^2+2x)\,\mathrm{d}p=(4x+4)p\,\mathrm{d}x.$$

Majd az egyenlet egyik oldalára rendezzük az x-es tagokat, a másik oldalra a p-s eket. Ezért a fenti egyenletet osztjuk x^2+2x-szel és p-vel is:

$$\frac{1}{p}\,\mathrm{d}p=\frac{4x+4}{x^2+2x}\,\mathrm{d}x.$$

Mindkét oldalt integráljuk:

$$\int\frac{1}{p}\,\mathrm{d}p=\int\frac{4x+4}{x^2+2x}\,\mathrm{d}x.$$

Vegyük észre, hogy a jobboldali integrál esetén az x^2+2x deriváltja $2x+2$, pontosan a számláló fele, így ha 2-t kiemelünk, akkor a számlálóban pontosan a nevező deriváltja szerepel:

$$\int\frac{1}{p}\,\mathrm{d}p=2\int\frac{2x+2}{x^2+2x}\,\mathrm{d}x.$$

Felhasználva, hogy az integrandus $\frac{g'(x)}{g(x)}$ tipusú $\boxed{\int\frac{g'(x)}{g(x)}\,\mathrm{d}x=\ln|g(x)|+c}$ alapján meghatározzuk a primitívfüggvényt:

$$\ln|p|=2\ln|x^2+2x|+\ln c_1.$$

A logaritmus azonosságait felhasználva rendezzük az egyenletet, hogy mindkét oldalon egy kifejezés logaritmusa legyen

$$\ln|p|=\ln c_1(x^2+2x)^2.$$

A logaritmus függvény szigorú monotonitása miatt az eredetivel ekvivalens egyenletet kapunk:

$$p=c_1(x^2+2x)^2.$$

A p helyére y'-t visszaírva:

$$y'=c_1(x^4+4x^3+4x^2).$$

Az y-t integrálással kapjuk:

$$y=\int c_1(x^4+4x^3+4x^2)\,\mathrm{d}x$$

$$\boxed{y=c_1\left(\frac{x^5}{5}+x^4+\frac{4x^3}{3}\right)+c_2}$$

Tehát a feladatot megoldottuk. $\diamond$

11.2. Példa. Adja meg az alábbi másodrendű hiányos differenciálegyenlet általános megoldását
$$y''y^2+y'=0.$$

Megoldás: A differenciálegyenletből hiányzik az x független változó. Ilyenkor $y'(x)=$ $=p(y)$ helyettesítést végezzük, azaz $y'(x)$-et y függvényeként írjuk fel. Így

$$y''=\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}y'=\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}p.$$

Tehát összefoglalva az

$$\boxed{\begin{aligned} y'(x)&=p(y)\\ y''&=\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}p \end{aligned}}$$

helyettesítést kell alkalmazni:
$$\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}p\,y^2+p=0.$$
A kapott egyenlet y-ban és p-ben szétválasztható változójú. Az egyenlet mindkét oldálából elveszünk p-t, majd szorzunk $\mathrm{d}y$-nal:

$$p\,y^2\,\mathrm{d}p=-p\,\mathrm{d}y.$$

Az egyenlet mindkét oldalát osztjuk $p\neq 0$ és $y^2\neq 0$-val:

$$\mathrm{d}p=-\frac{1}{y^2}\,\mathrm{d}y.$$

A baloldalt p szerint a jobboldalt y szerint integráljuk:

$$\int\mathrm{d}p=\int-\frac{1}{y^2}\,\mathrm{d}y$$

$$p=\frac{1}{y}+c_1.$$

A p helyére visszaírjuk az $y'=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$-et:

$$y'=\frac{1}{y}+c_1$$

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{1}{y}+c_1.$$

Az így kapott egyenlet is szétválasztható változójú x-ben és y-ban. Tehát szorzunk y-nal és $\mathrm{d}x$-szel:
$$y\,\mathrm{d}y=(1+c_1y)\,\mathrm{d}x.$$

A változókat szétválasztjuk, azaz osztunk $1+c_1y$-nal:

$$\frac{y}{1+c_1y}\,\mathrm{d}y = \mathrm{d}x.$$

Majd inegrálunk:

$$\int \frac{y}{1+c_1y}\,\mathrm{d}y = \int \mathrm{d}x.$$

A bal oldali integrált külön kiszámítjuk:

$$\int \frac{y}{1+c_1y}\,\mathrm{d}y = \frac{1}{c_1}\int \frac{c_1y}{1+c_1y}\,\mathrm{d}y = \frac{1}{c_1}\int \frac{1+c_1y-1}{1+c_1y}\,\mathrm{d}y = \frac{1}{c_1}\int \left(\frac{1+c_1y}{1+c_1y} - \frac{1}{1+c_1y}\right)\mathrm{d}y =$$

$$= \frac{1}{c_1}\int 1 - \frac{1}{1+c_1y}\,\mathrm{d}y = \frac{1}{c_1}\left(y - \frac{\ln|1+c_1y|}{c_1}\right) + c_2 = \frac{y}{c_1} - \frac{1}{c_1^2}\ln|1+c_1y| + c_2.$$

Tehát a feladatunk implicit megoldása:

$$\boxed{x = \frac{y}{c_1} - \frac{1}{c_1^2}\ln|1+c_1y| + c_2.}$$

Tehát a feladatot megoldottuk. ◇

11.2. Tétel. *Az $ay'' + by' + cy = 0$ alakú egyenletet másodrendű állandó együtthatós lineáris homogén differenciálegyenletnek nevezzük. Az $a\lambda^2 + b\lambda + c = 0$ karakterisztikus egyenlet gyökeitől függően 3 esetet különböztetünk meg:*

a) $\lambda_1 \neq \lambda_2$ *mindkét gyök valós szám. Az általános megoldás:*

$$y = c_1e^{\lambda_1 x} + c_2e^{\lambda_2 x}.$$

b) $\lambda_1 = \lambda_2$ *mindkét gyök valós szám. Az általános megoldás:*

$$y = c_1e^{\lambda x} + c_2xe^{\lambda x}.$$

c) λ_1, λ_2 *mindkét gyök komplex szám (egymás konjugáltjai, általános alakjuk $a \pm bi$.) Az általános megoldás:*

$$y = e^{ax}\left(c_1\cos(bx) + c_2\sin(bx)\right).$$

11.3. Példa. Adja meg az alábbi másodrendű állandóegyütthatós differenciálegyenlet általános megoldását

$$y'' - 5y' + 6y = 0.$$

Megoldás: A karakterisztikus egyenlet:

$$\lambda^2 - 5\lambda + 6 = 0.$$

A másodfokú egyenletet megoldva:

$$\lambda_{1,2} = \frac{5 \pm \sqrt{(-5)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 6}}{2} = \frac{5 \pm \sqrt{1}}{2} = \frac{5 \pm 1}{2} = \begin{matrix} \nearrow & \lambda_1 = 2 \\ \searrow & \lambda_2 = 3 \end{matrix} .$$

Mivel mindkét gyök valós és nem egyeznek meg, így a differenciálegyenlet megoldása:

$$\boxed{y = c_1 e^{2x} + c_2 e^{3x}}$$

Tehát a feladatot megoldottuk. ⋄

11.4. Példa. Adja meg az alábbi másodrendű állandóegyütthatós differenciálegyenlet általános megoldását

$$y'' - 6y' + 9y = 0.$$

Megoldás: A karakterisztikus egyenlet:

$$\lambda^2 - 6\lambda + 9 = 0.$$

A másodfokú egyenletet megoldva:

$$\lambda_{1,2} = \frac{6 \pm \sqrt{(-6)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 9}}{2} = \frac{6 \pm \sqrt{0}}{2} = \frac{6}{2} = 3.$$

Mivel mindkét gyök valós és megegyeznek, így a differenciálegyenlet megoldása:

$$\boxed{y = c_1 e^{3x} + c_2 x e^{3x}}$$

Tehát a feladatot megoldottuk. ⋄

11.5. Példa. Adja meg az alábbi másodrendű állandóegyütthatós differenciálegyenlet általános megoldását

$$y'' + 2y' + 2y = 0.$$

Megoldás: A karakterisztikus egyenlet:

$$\lambda^2 + 2\lambda + 2 = 0.$$

A másodfokú egyenletet megoldva:

$$\lambda_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{(2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 2}}{2} = \frac{-2 \pm \sqrt{-4}}{2} = \frac{-2 \pm 2i}{2} = -1 \pm i$$

A megoldás komplex szám, ahol $a = -1$, $b = 1$. Tehát a differenciálegyenlet megoldása:

$$\boxed{y = e^{-x} \left(c_1 \cos(x) + c_2 \sin(x) \right)}$$

Tehát a feladatot megoldottuk. ⋄

11.1. Feladatok gyakorlatra

11.1. Feladat. Adja meg az alábbi másodrendű hiányos differenciálegyenletek általános megoldását! (y, y' hiányzik)

a) $xy'' = 1$

b) $y'' = x + \cos x$

c) $y'' = e^{2x} + 1$

d) $x^2 y'' + y'' = 2x$

e) $y'' = \frac{2+3x}{2\sqrt{1+x}}$

11.2. Feladat. Adja meg az alábbi másodrendű hiányos differenciálegyenletek általános megoldását! (y hiányzik)

a) $xy'' - y' = 0$

b) $xy'' - y' = x^3$

c) $y'' = y' + e^x$

d) $(2x-5)y' = (x-3)y''$

e) $(1+x^2)y'' = 2xy'$

11.3. Feladat. Adja meg az alábbi másodrendű hiányos differenciálegyenletek általános megoldását! (x hiányzik)

a) $yy'' = (y')^2$

b) $yy'' = 2(y')^2 - 2y'$

c) $yy'' = (y')^2 - (y')^3$

d) $y''y^2 + y' = 0$

e) $y'' = (y')^3 + y'$

11.4. Feladat. Adja meg az alábbi másodrendű állandó együtthatós differenciálegyenletek általános megoldását!

a) $y'' - 6y' + 8y = 0$

b) $y'' + y' - 12y = 0$

c) $y'' - y' - 6y = 0$

d) $y'' + 2y' + y = 0$

e) $y'' - 10y' + 25y = 0$

f) $y'' - 8y' + 16y = 0$

g) $y'' - 2y' + 5y = 0$

h) $4y'' + 4y' + 37y = 0$

11.2. Gyakorló feladatok

11.5. Feladat. Adja meg az alábbi másodrendű hiányos differenciálegyenlet általános megoldását $y'' \sin x = y' \cos x$!

11.6. Feladat. Adja meg az alábbi másodrendű hiányos differenciálegyenlet általános megoldását $y''(x^3+3x) = 3(x^2+1)y'$!

11.7. Feladat. Adja meg az alábbi másodrendű állandóegyütthatós differenciálegyenlet általános megoldását $y'' - 4y' + 13y = 0$!

11.8. Feladat. Adja meg az alábbi másodrendű állandóegyütthatós differenciálegyenlet általános megoldását $y'' - 6y' + 13y = 0$!

11.3. Vizsgafeladatok

11.9. Feladat. Adja meg az alábbi másodrendű hiányos differenciálegyenletek általános megoldását! (x hiányzik)

a) $yy'' = (y')^2 + y^2y'$

11.4. Kiegészítő tananyag

11.10. Feladat. Adja meg az alábbi másodrendű állandó együtthatós differenciálegyenletek általános megoldását!

a) $y'' + 5y' + 6y = 12x$

b) $y'' - 3y' + 2y = e^x$

c) $y'' - y' - 2y = 2x^2$

d) $y'' - 4y' + 4y = x^2$

e) $y'' - 6y' + 9y = 12 \sin x$

f) $y'' + 10y' + 16y = 27e^x$

g) $y'' - 2y' + 10y = e^{2x}$

h) $y'' + 2y' + 5y = \frac{1}{e^x \cos 2x}$

12. fejezet

Közönséges differenciálegyenletek alkalmazásai

12.1. Példa. Egy $5\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$ sebességgel emelkedő hőlégballonból 30 m-re a talajtól kiejtjük a telefonunkat. Mennyi idő alatt éri el földet a telefonunk?

Megoldás: Jelölje a telefonunk sebességét $v(t)$, talajtól mért távolságát $s(t)$. Feltételezve, hogy a telefonra a nehézségi erőn kívül nem hat más, telefonunk gyorsulása: $g = 10\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$. Mivel a gyorsulás a sebesség idő szerinti deriváltja:

$$g = v'(t) = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$$

Így az alábbi differenciálegyenletet kapjuk:

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = -10$$
$$v(0) = 5.$$

A $\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = -10$ differenciálegyenlet változóit szétválasztva:

$$\mathrm{d}v = -10\,\mathrm{d}t.$$

Majd integrálva megkapjuk a differenciálegyenlet általános megoldását:

$$\int 1\,\mathrm{d}v = \int -10\,\mathrm{d}t$$
$$v = -10t + c.$$

A $v(0) = 5$ kezdeti feltétel felhasználva:

$$5 = -10 \cdot 0 + c,$$

ahonnan $c = 5$. Így a partikuláris megoldás, azaz a telefon sebességfüggvénye:

$$v = -10t + 5.$$

Továbbá a segesség a megtett út idő szerinti deriváltja

$$v = s'(t) = \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}.$$

Az előbb kapott eredményt behelyettesítve egy újabb differenciálegyenletet kapunk

$$\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = -10t + 5$$

$$s(0) = 30$$

A kezdeti feltételt abból kaptuk, hogy 30 m-re volt a talajtól a hőlégballon, mikor kiejtettük a telefonunkat. A differenciálegyenlet változóit szétválasztva:

$$\mathrm{d}s = -10t + 5\,\mathrm{d}t.$$

Majd integrálva megkapjuk a differenciálegyenlet általános megoldását:

$$\int 1\,\mathrm{d}s = \int -10t + 5\,\mathrm{d}t$$

$$s = -5t^2 + 5t + c.$$

A $s(0) = 30$ kezdeti feltétel felhasználva:

$$30 = -5 \cdot 0^2 + 5 \cdot 0 + c,$$

ahonnan $c = 30$. Így a partikuláris megoldás, azaz a telefon talajtól való távolsága a t időpontban:

$$s(t) = -5t^2 + 5t + 30.$$

Ha azt akarjuk megtudni, hogy mikor ér földet a telefon, az $s(t) = 0$ egyenletet kell megoldanunk, azaz

$$-5t^2 + 5t + 30 = 0$$

$$t^2 - t - 6 = 0.$$

A megoldóképlet alapján:

$$t_1 = -2, t_2 = 3.$$

Tehát 3 s alatt ér földet a telefonunk. Tehát a feladatot megoldottuk. ⋄

12.2. Példa. Egy autó gyorsulását (lassulását) a városi forgalomban $a(t) = 2\sin(t)$ függvény írja le. Mennyi utat tesz meg az autó az indulástól eltelt 1 perc alatt, ha $t = 0$ időpontban a sebessége $10\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$?

Megoldás: Mivel a gyorsulás a sebesség idő szerinti deriváltja:

$$a(t) = v'(t) = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$$

Így az alábbi differenciálegyenletet kapjuk:

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = 2\sin(t)$$
$$v(0) = 10.$$

A differenciálegyenlet változóit szétválasztva:

$$\mathrm{d}v = 2\sin(t)\,\mathrm{d}t.$$

Majd integrálva megkapjuk a differenciálegyenlet általános megoldását:

$$\int 1\,\mathrm{d}v = \int 2\sin(t)\,\mathrm{d}t$$
$$v(t) = -2\cos(t) + c.$$

A $v(0) = 10$ kezdeti feltétel felhasználva:

$$10 = -2\cdot\cos(0) + c,$$

ahonnan $c = 12$. Így a partikuláris megoldás, azaz az autó sebességfüggvénye:

$$v(t) = -2\cos(t) + 12.$$

Továbbá a segesség a megtett út idő szerinti deriváltja

$$v = s'(t) = \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}.$$

Az előbb kapott eredményt behelyettesítve egy újabb differenciálegyenletet kapunk:

$$\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = -2\cos(t) + 12$$

A differenciálegyenlet változóit szétválasztva:

$$\mathrm{d}s = -2\cos(t) + 12\,\mathrm{d}t.$$

Majd integrálva, megkapjuk a differenciálegyenlet általános megoldását:

$$\int 1\,\mathrm{d}s = \int -2\cos(t) + 12\,\mathrm{d}t$$
$$s(t) = -2\sin(t) + 12t + c.$$

A differenciálegyenlet partikuláris megoldását nem tudjuk megadni, de erre nincs is szükségünk annak kiszámításához, hogy 0 és 60 másodperc között mennyi utat tett meg az autó:

$$s(60) - s(0) = (-2\sin(60) + 12\cdot 60 + c) - (-2\sin(0) + 12\cdot 0 + c)$$
$$s(60) - s(0) \approx 720{,}61.$$

Tehát a feladatot megoldottuk. $\diamond$

12.1. Tétel. *Számos olyan szituáció van, amelyben egy y mennyiség növekedése vagy csökkenése az illető mennyiség t időpontbeli mennyiségével arányos. Például: A radioaktív bomlás, a befektetési alapok növekedése, a populációk nagysága egyaránt ilyen módon változik. Ezeket a változásokat az alábbi differenciálegyenlet írja le:*

$$y'(t) = ky(t).$$

12.3. Példa. Egy radioaktív anyag bomlását az $y' = -0{,}01y$ differenciálegyenlet írja le a napok függvényében. Adja meg a felezési időt!

Megoldás: Vezessük be az y' helyett a $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$-et: $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -0{,}01y$ Szorozzunk $\mathrm{d}x$-szel és osszunk y-nal, hogy az egyenlet egyik oldalán csak x, a másikon csak y maradjon:

$$\frac{1}{y}\,\mathrm{d}y = -0{,}01\,\mathrm{d}x$$

Mindkét oldalt integrálva:

$$\int \frac{1}{y}\,\mathrm{d}y = \int -0{,}01\,\mathrm{d}x$$
$$\ln|y| = -0{,}01\cdot x + c.$$

Az y-t kifejezve az egyenletből és az $e^c = C$ helyettesítés után megkapjuk a differenciálegyenlet általános megoldását:

$$y = e^{-0{,}01\cdot x + c}$$

$$y = C\cdot e^{-0{,}01x}.$$

Ha a felezési időt akarjuk meghatározni és kezdetben y_0 mennyiségű anyagunk volt, akkor az a kérdés, hogy mikor lesz $\frac{y_0}{2}$ mennyiségű anyagunk. Kezdetben volt

$$y_0 = y(0) = C\cdot e^{-0{,}01\cdot 0} = C$$

mennyiségű anyagunk, tehát a

$$\frac{C}{2} = C\cdot e^{-0{,}01x}$$

egyenletet kell megoldanunk. C-vel osztva:

$$\frac{1}{2} = e^{-0{,}01x}.$$

Az egyenletből kifejezve x-et megkapjuk a megoldást:

$$\ln\left(\frac{1}{2}\right) = -0{,}01x$$

$$x = \frac{\ln\left(\frac{1}{2}\right)}{-0{,}01} \approx 69{,}3.$$

A felezési idő 69,3 nap. Tehát a feladatot megoldottuk. ◇

12.2. Tétel. *Egy vizsgált test hőmérséklet-változásának üteme jó közelítéssel egyenesen arányos a test és környezete hőmérsékletének különbségével. Ezt a tapasztalati tényt* ***Newton-féle hűlési törvény****nek nevezik, bár a felmelegedésre éppúgy alkalmazható, mint a lehűlésre.*

A hűlési törvény képletének levezetéséhez jelölje $T(t)$ a test hőmérsékletét a t időpontban, T_S pedig a környezet (állandónak feltételezett) hőmérsékletét. A törvény szerinti differenciálegyenlet ekkor:

$$T'(t) = k(T(t) - T_S).$$

12.4. Példa. Egy $120°C$-os motor hőmérséklete 30 perc elteltével már csak 60°C-os. Hány perc múlva lesz a hőmérséklete 40°C-os, ha a külső hőmérséklet 30°C.

Megoldás: Adatok: a külső hőmérséklet:

$$T_S = 30°C$$

Kezdetben a motor hőmérséklete (kezdeti feltétel):

$$T(0) = 120°C$$

30 perc elteltével a motor hőmérséklete:

$$T(30) = 60°C$$

A kérdés pedig, hogy mikor lesz a motor hőmérséklete $40°C$:

$$T(x) = 40°C$$

Behelyettesítve a Newton-féle hűlési törvénybe a

$$T'(t) = k(T(t) - 30)$$

alakú differenciálegyenletet kapjuk. A $T'(t)$ helyére $\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t}$-t írunk:

$$\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t} = k(T(t) - 30).$$

Szorzunk $\mathrm{d}t$-vel és osztunk $T(t) - 30$-cal, hogy az egyenlet egyik oldalán csak T a másikon csak t maradjon:

$$\frac{1}{T(t) - 30} = k\,\mathrm{d}t.$$

Az egyenlet mindkét oldalát integráljuk:

$$\int \frac{1}{T(t) - 30} = \int k\,\mathrm{d}t.$$

$$\ln|T(t)-30| = k\cdot t + c$$

Végül $T(t)$ kifejezzük az egyenletből:

$$|T(t)-30| = e^{k\cdot t+c}$$

$$T(t) = e^{k\cdot t}\cdot e^{c} + 30.$$

Az $e^c = C$ helyettesítés után a hőmérséklet válzozását leíró függvény:

$$T(t) = C\cdot e^{k\cdot t} + 30.$$

A függvényünk még tartalmaz két paramétert, de ezek a $T(0)=120°C$ és a $T(30)=60°C$ feltételek alapján kiszámíthatók

$$120 = C\cdot e^{0} + 30.$$

Ahonnan $C = 90$. Majd a $T(30) = 60°C$ feltételt felhasználva:

$$60 = 90\cdot e^{30\cdot k} + 30.$$

Ebből e^k-t kifejezve:

$$\frac{1}{3} = e^{30\cdot k}$$

$$e^{k} = \left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{1}{30}}.$$

A kapott paramétereket visszaírva az általános megoldásba, megkapjuk a differenciálegyenlet egy partikuláris megoldását:

$$T(t) = 90\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{t}{30}} + 30.$$

Végül pedig azt kell kiszámítani, hogy mikor lesz a motor hőmérséklete $40°C$-os, azaz a fenti kifejezést egyenlővé kell tenni 40-nel:

$$90\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{t}{30}} + 30 = 40$$

Átrendezve, megoldva:

$$\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{t}{30}} = \frac{1}{9}$$

$$\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{t}{30}} = \left(\frac{1}{3}\right)^{2}$$

$$\frac{t}{30} = 2$$

$$t = 60.$$

Tehát 60 perc múlva hűl le a motor hőmérséklete $40°C$-ra. Tehát a feladatot megoldottuk. $\diamond$

12.3. Tétel. *Egy tartályból az alsó csapon kifolyó pillanatnyi vízmennyiség arányos a felette lévő vízmagasság négyzetgyökével. A k arányossági tényező a nyílás méretétől függ.*

12.5. Példa. Egy 1,2 m magas 180 l-es henger alakú saválló acéltartály $\frac{3}{4}$ részéig van borral tele. Mennyi idő alatt ürül ki a tartály, ha az arányossági tényező $k = 6\,\frac{\mathrm{dm}^{\frac{1}{2}}}{\mathrm{min}}$?

Megoldás: Adatok:

$$V = \frac{3}{4} \cdot 180\ \mathrm{dm}^3 = 135\ \mathrm{dm}^3$$

$$m = \frac{3}{4} \cdot 12\ \mathrm{dm} = 9\ \mathrm{dm}$$

A henger alapterülete:

$$A = \frac{V}{m} = \frac{135}{9} = 15$$

Így ha a folyadék időben(t) változó magasságát $x(t)$-vel jelöljük, akkor a térfogat:

$$V(x(t)) = 15x(t)$$

Torricelli törvény alapján

$$V'(x(t)) = -k\sqrt{x}$$

Behelyettesítve:

$$15x'(t) = -6\sqrt{x}$$

$$15\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = -6\sqrt{x}$$

A változók szétválasztásával:

$$\frac{1}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x = -0{,}4\,\mathrm{d}t$$

Átalakítjuk, majd integráljuk:

$$\int x^{-\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}x = \int -0{,}4\,\mathrm{d}t$$

$$2x^{\frac{1}{2}} = -0{,}4t + c$$

Felhasználva, hogy a $t = 0$ időpontban a bor magassága $m = 9$ dm, azaz $x(0) = 9$

$$2\sqrt{9} = -0{,}4 \cdot 0 + c$$

$$c = 6$$

Ezt beírva a kapott általános megoldásba:

$$2x^{\frac{1}{2}} = -0{,}4t + 6$$

Majd x-et kifejezve, megkapjuk, hogy hogyan változik az idő függvényében a víz magassága:

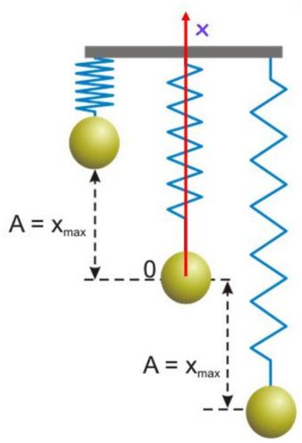
$$x(t) = (3 - 0{,}2t)^2$$

Ha $x = 0$, akkor ürül ki a tartály:

$$0 = (3 - 0{,}2t)^2$$

Ennek a megoldása $t = 15$. Tehát 15 perc alatt ürül ki a tartály. Tehát a feladatot megoldottuk. $\diamond$

12.1. Definíció. *Rezgés*nek az olyan mozgást nevezzük, amikor egy test a nyugalmi helyzete körül végez kilengéseket.



Legyen $y(t)$ a tömegpont pozíciója t-ben, $y'(t)$ a tömegpont sebessége és $y''(t)$ a tömegpont gyorsulása. Az $y = 0$ a tömegpont egyensúlyi helyzete. Newton 2. törvénye szerint

$$F = ma.$$

Ha a surlódási erőtől eltekintünk akkor a testre hat a **harmonikus erő** (harmonikus rezgőmozgás), amely Hooke törvénye szerint egyenesen arányos az elmozdulással, de ellentétes irányú, vagyis $-ky(t)$, ahol $k > 0$ a rugóállandó. Így differenciálegyenletünk:

$$-ky(t) = my''(t)$$

12.6. Példa. Egy 2 kg tömegű testet az egyensúlyi helyzetéből felfele kimozdítunk 10 cm-re. Írjuk le e test helyzetét az idő függvényében, ha tudjuk, hogy $\frac{\pi}{2}$ másodperc múlva kerül újra a test az egyensúlyi helyzetnek megfelelő pontba és a rugóállandó $k = 2$. (Feltételezzük, hogy nincs súrlódás.)

Megoldás: Mivel $m = 2$ és $k = 2$, így a differenciálegyenletünk:

$$-2y = 2y''.$$

Melyből átrendezés után egy másodrendű (hiányos) állandó együtthatós differenciálegyenletet kapunk:

$$2y'' + 2y = 0.$$

Osztva 2-vel:

$$y'' + y = 0.$$

A karakterisztikus egyenlet:

$$\lambda^2 + 1 = 0.$$

Melynek a megoldása komplex szám lesz:

$$\lambda = \pm i.$$

Így $a = 0$ és $b = 1$ alapján a differenciálegyenlet általános megoldása:

$$\boxed{y = e^0\left(c_1\cos(x) + c_2\sin(x)\right) = c_1\cos(x) + c_2\sin(x)}$$

Nyilvánvalóan az exponenciális tényező nem szerepel a megoldásban, mert harmonikus (csillapítatlan) rezgőmozgásról van szó. A differenciálegyenlet partikuláris megoldásához írjuk fel a feladat szövegében szereplő kezdeti feltételeket:

$$y(0) = 10$$
$$y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0.$$

Felhasználva az első kezdeti feltételt:

$$10 = c_1\cos 0 + c_2\sin 0.$$

Mivel $\cos 0 = 1$ és $\sin 0 = 0$, így

$$c_1 = 10.$$

A másik kezdeti feltétel alapján:

$$0 = c_1\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + c_2\sin\left(\frac{\pi}{2}\right).$$

Mivel $\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$ és $\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$, így

$$c_2 = 0.$$

Tehát a differenciálegyenletünk partikuláris megoldása:

$$\boxed{y(x) = 10\cos(x).}$$

Tehát a feladatot megoldottuk. $\diamond$

Ha a harmonikus erő mellett a **surlódási erő**t is figyelembe vesszük, amely $-by'(t)$, ahol $b \leq 0$ a surlódási együttható, akkor csillapított rezgőmozgásról beszélünk. Ebben az esetben az alábbi differenciálegyenlet írja a rugó mozgását, $y(0) = 0$ és $y'(0) = v_0$ kezdeti feltételekkel:

$$-ky(t) - by'(t) = my''(t)$$

Az így adódó differenciálegyenlet egy másodrendű állandó együtthatós lineáris differenciálegyenlet.

12.7. Példa. Egy 1 kg tömegű testet az egyensúlyi helyzetéből kimozdítunk 10 cm-re. Írjuk le e test helyzetét az idő függvényében, ha tudjuk, hogy $\frac{\pi}{2}$ másodperc múlva kerül újra a test az egyensúlyi helyzetnek megfelelő pontba és a rugóállandó $k = 1{,}0025$, surlódási eggyüttható $b = 0{,}1$.

Megoldás: Mivel $m = 1$, $k = 1{,}0025$, $b = 0{,}1$, így a differenciálegyenletünk:

$$-1{,}0025y - 0{,}1y' = y''.$$

Melyből átrendezés után egy másodrendű állandó együtthatós differenciálegyenletet kapunk:

$$y'' + 0{,}1y' + 1{,}0025y = 0.$$

A karakterisztikus egyenlet:

$$\lambda^2 + 0{,}1\lambda + 1{,}0025 = 0.$$

Melynek a megoldása komplex szám lesz:

$$\lambda_{1,2} = \frac{-0{,}1 \pm \sqrt{0{,}1^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1{,}0025}}{2} = \frac{-0{,}1 \pm \sqrt{-4}}{2} = \frac{-0{,}1 \pm 2i}{2} = -0{,}05 \pm i$$

Így $a = -0{,}05$ és $b = 1$ alapján a differenciálegyenlet általános megoldása:

$$y = e^{-0{,}05x}\left(c_1 \cos(x) + c_2 \sin(x)\right)$$

A differenciálegyenlet partikuláris megoldásához írjuk fel a feladat szövegében szereplő kezdeti feltételeket:

$$y(0) = 10$$
$$y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0.$$

Felhasználva az első kezdeti feltételt:

$$10 = e^{-0{,}05 \cdot 0}\left(c_1 \cos 0 + c_2 \sin 0\right)$$

Mivel $e^0 = 1$, $\cos 0 = 1$ és $\sin 0 = 0$, így

$$c_1 = 10.$$

A másik kezdeti feltétel alapján:

$$0 = e^{-0{,}05 \cdot \frac{\pi}{2}}\left(c_1 \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + c_2 \sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\right).$$

Mivel $\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$ és $\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$, így

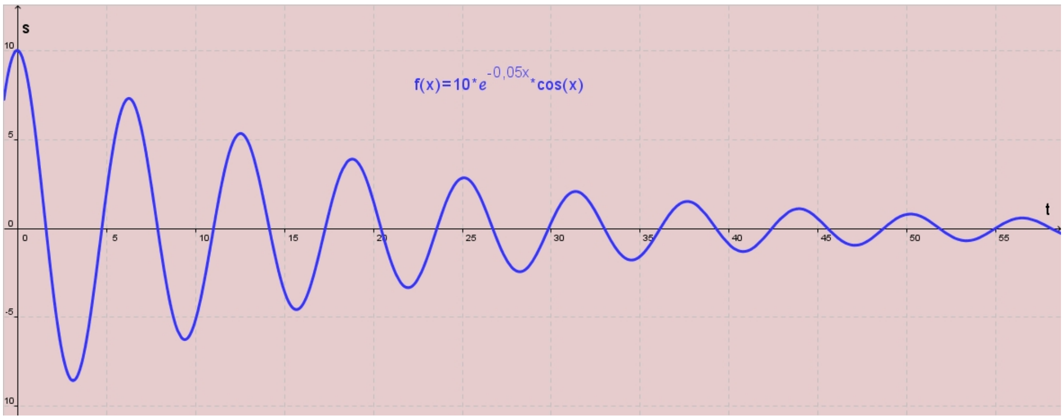
$$0 = e^{-0{,}05 \cdot \frac{\pi}{2}}\left(c_1 \cdot 0 + c_2 \cdot 1\right)$$

$$c_2 = 0.$$

Tehát a differenciálegyenletünk partikuláris megoldása:

$$y(x) = 10e^{-0{,}05x}\cos(x).$$

Az idő függvényében az elmozdulást az alábbi grafikon mutatja:



Tehát a feladatot megoldottuk. ◇

12.1. Feladatok gyakorlatra

12.1. Feladat. Egy repülőgép sebességét az indulástól eltelt első 10 másodpercben $v(t) = t^2$ függvény írja le. Mennyi utat tesz meg a repülőgép az indulástól eltelt 10 másodperc alatt?

12.2. Feladat. Egy autó sebességét az indulástól eltelt első 30 másodpercben $v(t) = \ln(1+t)$ függvény írja le. Mennyi utat tesz meg az autó az indulástól eltelt 30 másodperc alatt?

12.3. Feladat. Egy repülőgép gyorsulását az indulástól eltelt első 20 másodpercben $a(t) = 2t+3$ függvény írja le. Mennyi utat tesz meg a repülőgép az indulástól eltelt 20 másodperc alatt?

12.4. Feladat. Egy autó gyorsulását az indulástól eltelt első 5 másodpercben $a(t) = \frac{1}{1+t}$ függvény írja le. Mennyi utat tesz meg az autó az indulástól eltelt 5 másodperc alatt?

12.5. Feladat. Egy nemzeti parkról tudjuk, hogy el tud tartani 100 szürke (grizzly) medvét, de többet nem. Jelenleg 10 medve van a parkban. A medvenépességet az alábbi differenciálegyenlettel modellezzük: $y' = 0{,}01y$.

a) Hány év múlva éri el a populáció az ötvenes létszámot?

b) Hány év múlva éri el a populáció a százas létszámot?

12.6. Feladat. A 210-es tömegszámú polóniumizotóp igen rövid életű, így célszerű, ha az időt nem években, hanem napokban mérjük. Egy minta $y(t)$ elemszámát az $y' = -5\cdot 10^{-3}y$ differenciálegyenlet írja le. Adjuk meg a felezési időt!

12.7. Feladat. Egy személyautó hűtővízének hőmérséklete leállításkor 90°C. A hűlést leíró differenciálegyenlet $T' = -0{,}1 \cdot T + 2$. Hány perc múlva lesz a hűtővíz hőmérséklete 30°C-os?

12.8. Feladat. Egy 16 dm magas henger alakú saválló acéltartály tele van borral. Hány perc alatt ürül ki a tartály, ha a tartály kiürülését az $y' + \sqrt{y} = 0$ differenciálegyenlet írja le, ahol $y(x)$ a bor magasságát jelöli az x idő(perc) függvényében?

12.9. Feladat. Egy test harmonikus rezgőmozgást végez a $-4y(t) = y''(t)$ differenciálegyenlet szerint. Írjuk le e test helyzetét az idő függvényében, ha tudjuk, hogy $y(0) = 0$ és $y\left(\frac{\pi}{4}\right) = 5$.

12.10. Feladat. Egy test csillapított rezgőmozgást végez a $y''(t) + 0{,}4y'(t) + 0{,}68y(t) = 0$ differenciálegyenlet szerint. Írjuk le e test helyzetét az idő függvényében, ha tudjuk, hogy $y(0) = 0$ és $y\left(\frac{\pi}{4}\right) = 5$.

12.2. Gyakorló feladatok

12.11. Feladat. Egy baktériumpopuláció növekedését az $y' = 2y$ differenciálegyenlet írja le. Ha kezdetben egy 1000-es populációnk volt, hány baktérium lesz 6 óra elteltével?

12.12. Feladat. Egy teherautó hűtővízének hőmérséklete leállításkor 80°C. A hűlést leíró differenciálegyenlet $T' = -0{,}2 \cdot T + 2$. Hány perc múlva lesz a hűtővíz hőmérséklete 20°C-os?

12.3. Vizsgafeladatok

12.13. Feladat. Egy baktériumpopuláció ideális, laboratóriumi körülmények között exponenciálisan növekszik; kezdetben egy 1000-es populációnk volt, 6 óra elteltével a populáció 5000 baktériumból áll. Hány baktérium lesz 1 nap múlva?

12.14. Feladat. A polónium felezési ideje 139 nap, a polóniumot alkalmazó berendezésünk azonban csak addig használható, amíg a benne lévő polóniummennyiség az eredeti szint 5%-a. Körülbelül hány napig használhatjuk a berendezést?

12.4. Tétel (Newton féle hűlési törvény). *Egy test hőmérséklet változása egyenesen arányos a test és környezete hőmérsékletének különbségével.*

12.15. Feladat. Egy személyautó hűtővízének hőmérséklete leállításkor 90°C. 5 perc múlva a hűtővíz hőmérséklete: 70°C. Hány perc múlva lesz a hűtővíz hőmérséklete 30°C-os, ha a külső hőmérséklet 20°C?

12.16. Feladat. Egy teherautó hűtővízének hőmérséklete leállításkor 80°C. 10 perc múlva a hűtővíz hőmérséklete: 50°C. Hány perc múlva lesz a hűtővíz hőmérséklete 20°C-os, ha a külső hőmérséklet 10°C?

12.5. Tétel (Torricelli törvénye). *Egy tartályból az alsó csapon kifolyó pillanatnyi vízmennyiség arányos a felette lévő vízmagasság négyzetgyökével. A k arányossági tényező a nyílás méretétől függ.*

12.17. Feladat. Egy 1,2 m magas 150 l-es henger alakú saválló acéltartály $\frac{3}{4}$ részéig van borral tele. Mennyi idő alatt ürül ki a tartály, ha az arányossági tényező $k=4\,\frac{\mathrm{dm}^{\frac{5}{2}}}{\mathrm{min}}$?

12.4. Kiegészítő tananyag

12.6. Tétel (Ellenállások). *Gördülési ellenállás (ellenálló erő) egyenesen arányos a sebességgel. A légellenállás pedig négyzetesen arányos a sebességgel.*

12.18. Feladat. Megaméter II. tömege vezetővel együtt kb. 80 kg. A jármű $10\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$ sebességet elérve gurul, míg sebessége $5\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$-ra csökken. Ha csak a gördülési ellenállást vesszük figyelembe hány méter utat tesz meg ezalatt? Először legyen a gördülési ellenállási tényező $k_1 = 2\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{s}}$, második esetben egy jobb gumival $k_2 = 1{,}8\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{s}}$. Hány méter a különbség?

12.19. Feladat. Megaméter II. tömege vezetővel együtt kb. 80 kg. A jármű $10\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$ sebességet elérve gurul, míg sebessége $5\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$-ra csökken. Ha csak a légellenállást vesszük figyelembe hány méter utat tesz meg ezalatt? Először legyen az arányossági tényező (függ a felület nagyságától, annak alkjától, stb) $k_1 = 0{,}2\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}}$, második esetben egy speciális felületbevonatnak köszönhetőn $k_2 = 0{,}19\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}}$. Hány méter a különbség?

12.20. Feladat. Megaméter II. tömege vezetővel együtt kb. 80 kg. A jármű $8\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$ sebességet elérve gurul, míg sebessége $5\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$-ra csökken. Ha csak a légellenállást vesszük figyelembe hány méter utat tesz meg ezalatt? Legyen az arányossági tényező $k_1=0{,}2\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}}$. Az előző feladattal összehasonlítva melyik esetben tesz meg fajlagosan több métert? Mindkét esetben állandó $3\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$ gyorsulást és a gyorsítás 1 s-e alatt azonos fogyasztást feltételezünk.

12.7. Tétel (Csillapítatlan szabad rezgés). *Ha minden csillapítást elhanyagolunk és nincs külső erő, amely hatna a rendszerre (vagyis a rendszer szabad rezgést végez), akkor a tömegre ható rugóerő arányos a kitéréssel. Az arányossági együttható, k a rugómerevség, egysége erő/elmozdulás (N/m):*

12.21. Feladat. Írja fel a csillapítatlan szabad rezgés differenciálegyenletét és adja meg ennek általános megoldását!

12.8. Tétel (Csillapított szabad rezgés). *Az előbbi modellt most egészítsük ki viszkózus csillapítással, melyet az jellemez, hogy a csillapító erő arányos a tömeg sebességével. Ezt a csillapítást viszkózusnak nevezik, mivel a folyadék csillapítását modellezi. A c arányosság tényezőt csillapítási tényezőnek nevezik, mértékegysége N s/m.*

12.22. Feladat. Írja fel a csillapított szabad rezgés differenciálegyenletét és adja meg ennek általános megoldását!

13. fejezet

Vizsgafeladatok

13.1. Mintavizsga

13.1. Feladat. Számítsa ki az $f(x) = \frac{2x}{\sqrt[4]{4x^3+3}}$ függvény x tenegely körüli megforgatásával kapott forgástest térfogatát a [0,1]-n. (10 pont)

13.2. Feladat. Határozza meg az alábbi kétváltozós függvény szélsőértékeit! (10 pont)

$$f(x,y) = 9x^2 - 12xy + 4y^2 + 4$$

13.3. Feladat. Határozza meg az alábbi kétváltozós függvény integrálját: (10 pont) $\int\limits_0^\pi \int\limits_0^x 4x^4 \cos xy \,\mathrm{d}y \,\mathrm{d}x$!

13.4. Feladat. Adja meg az alábbi differenciálegyenlet általános megoldását: (10 pont)

$$y' = \frac{1-x-y}{x+y}$$

valamint az $y(2) = 0$ kezdeti feltétel kielégítő partikuláris megoldást!

13.2. Mintavizsga

13.5. Feladat. Határozza meg az $f(x) = \sqrt{16-x^2}$ függvény ívhossszát a [0,2] intervallumon!

13.6. Feladat. Határozza meg az alábbi kétváltozós függvény szélsőértékeit! (10 pont)

$$f(x,y) = x^2 - xy^2 + 2y^2 + 4$$

13.7. Feladat. Határozza meg az alábbi kétváltozós függvény integrálját: (10 pont) $\int\limits_1^e \int\limits_1^x \ln(xy) \,\mathrm{d}y \,\mathrm{d}x$!

13.8. Feladat. Egy személyautó hűtővízének hőmérséklete leállításkor 90°C. 5 perc múlva a hűtővíz hőmérséklete: 70°C. Hány perc múlva lesz a hűtővíz hőmérséklete 30°C-os, ha a külső hőmérséklet 20°C?

13.3. Mintavizsga

13.1. Tétel. *Ha f folytonos és differenciálható a zárt $[a,b]$ intervallumon, akkor az $y=f(x)$ görbe $x=a$ és $x=b$ közötti szakaszának hossza:*

$$\boxed{s=\int_a^b \sqrt{1+[f'(x)]^2}\,\mathrm{d}x}$$

13.1. Példa. Határozza meg az $f(x)=\sqrt{25-x^2}$ függvény ívhossszát a $[0{,}5]$ intervallumon!

Megoldás: Tehát első lépésben deriváljuk a függvényt:

$$f'(x)=\left(\sqrt{25-x^2}\right)'=\left((25-x^2)^{\frac{1}{2}}\right)'=\frac{1}{2}(25-x^2)^{-\frac{1}{2}}(-2x)=\frac{-x}{\sqrt{25-x^2}}$$

Helyettesítsnk be a fenti képletbe:

$$s=\int_a^b \sqrt{1+[f'(x)]^2}\,\mathrm{d}x=\int_0^5 \sqrt{1+\left[\frac{-x}{\sqrt{25-x^2}}\right]^2}\,\mathrm{d}x=\int_0^5 \sqrt{1+\frac{x^2}{25-x^2}}\,\mathrm{d}x=$$

$$=\int_0^5 \sqrt{\frac{25-x^2+x^2}{25-x^2}}\,\mathrm{d}x=\int_0^5 \sqrt{\frac{25}{25-x^2}}\,\mathrm{d}x=\int_0^5 \frac{5}{\sqrt{25-x^2}}\,\mathrm{d}x=\int_0^5 \frac{5}{5\sqrt{1-\left(\frac{x}{5}\right)^2}}\,\mathrm{d}x=$$

$$=\int_0^5 \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{5}\right)^2}}\,\mathrm{d}x=\left[5\arcsin\left(\frac{x}{5}\right)\right]_0^5=5\arcsin\left(\frac{5}{5}\right)-5\arcsin\left(\frac{0}{5}\right)=5\arcsin 1=5\frac{\pi}{2}.$$

Tehát a feladatot megoldottuk. ◇

13.2. Példa. Határozza meg az alábbi kétváltozós függvény szélsőértékeit: $f(x,y)==x+y\cdot e^{x+y}$!

Megoldás: A lehetséges szélsőérték pontokat (stacionárius pontok) keresve, először kiszámítjuk a kétváltozós függvény x, illetve y szerinti parciális deriváltjait:

$$f'_x=1+y\cdot e^{x+y}$$

$$f'_y=e^{x+y}+y\cdot e^{x+y}$$

A parciális deriváltakat 0-val tesszük egyenlővé, így egy kétismeretlenes egyenlet rendszert kapunk:

$$\begin{aligned}1+y\cdot e^{x+y} &= 0\\ e^{x+y}+y\cdot e^{x+y} &= 0\end{aligned}$$

A második egyenletből kiemeljük e^{x+y}-t:

$$e^{x+y}(1+y)=0$$

Mivel az $e^{x+y}>0$, ezért

$$1+y=0$$

$$y=-1.$$

Ezt az első egyenletbe behelyettesítve, majd rendezve:

$$1-1\cdot e^{x-1}=0$$

$$e^{x-1}=1$$

$$x-1=\ln 1$$

$$x=1.$$

Tehát egyetlen egy lehetséges szélsőérték pontot kaptunk:

$$(a,b)=(1,-1).$$

A szélsőérték tipusának eldöntéséhez először a második deriváltakat kell kiszámítani:

$$f''_{xx}=y\cdot e^{x+y}$$

$$f''_{xy}=e^{x+y}+y\cdot e^{x+y}$$

$$f''_{yy}=e^{x+y}+e^{x+y}+y\cdot e^{x+y}$$

Ezeknek az $(1,-1)$ pontban vett helyettesítési értékei:

$$f''_{xx}(1,-1)=-1$$

$$f''_{xy}(1,-1)=0$$

$$f''_{yy}(1,-1)=1$$

Így a D diszkrimináns értéke:

$$D=(-1)\cdot 1-0^2=-1.$$

Tehát a fenti tétel alapján az $(1,-1)$ pontban a függvénynek nyeregpontja van. Tehát a feladatot megoldottuk. $\diamond$

13.3. Példa. Határozza meg az alábbi kétváltozós függvény integrálját: $\displaystyle\int_{-1}^{6}\int_{0}^{x}\frac{2y}{\sqrt[3]{x+2}}\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x$

Megoldás: Először y szerint integrálunk, majd a Newton-Leibniz formulába helyettesítünk:

$$\int_{-1}^{6}\int_{0}^{x} \frac{2y}{\sqrt[3]{x+2}}\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x = \int_{-1}^{6}\left[\frac{y^2}{\sqrt[3]{x+2}}\right]_0^x \mathrm{d}x = \int_{-1}^{6}\frac{x^2}{\sqrt[3]{x+2}}\,\mathrm{d}x$$

Tehát feladatunk egy egyváltozós integrál kiszámítása, határozzuk meg először a függvény primitívfüggvényét, azaz a határozatlan integrált. A feladatot helyettesítéssel oldjuk meg. A $\sqrt[3]{x+2}$-t t-vel helyettesítjük, majd kifejezzük az x-et:

$$\sqrt[3]{x+2} = t$$

$$x+2 = t^3$$

$$x = t^3-2.$$

A kapott egyenletet t szerint deriváljuk, t szerinti deriváltat is vesszővel jelöljük.

$$x' = 3t^2$$

Az x' helyére bevezetjük a $\frac{dx}{dt}$ jelölést, ebben a jelölésben jól látszik, hogy t szerinti deriváltról van szó:

$$\frac{dx}{dt} = 3t^2.$$

Formálisan szorzunk $\mathrm{d}t$-vel.

$$\mathrm{d}x = 3t^2\,\mathrm{d}t.$$

Összefoglalva az alábbi helyettesítéseket írjuk az eredeti integrálba:

$$\boxed{\begin{gathered}\sqrt[3]{x+2} = t\\ x = t^3-2\\ \mathrm{d}x = 3t^2\,\mathrm{d}t.\end{gathered}}$$

A behelyettesítés után egy egyszerű polinom primitívfüggvényét kell meghatároznunk:

$$\int \frac{x^2}{\sqrt[3]{x+2}}\,\mathrm{d}x = \int \frac{(t^3-2)^2}{t}3t^2\,\mathrm{d}t = \int (t^6-4t^3+4)\cdot 3t\,\mathrm{d}t = \int 3t^7-12t^4+12t\,\mathrm{d}t =$$

A primitívfüggvénybe a t helyére visszaírjuk a $\sqrt[3]{x+2}$-t:

$$= \frac{3t^8}{8} - \frac{12t^5}{5} + \frac{12t^2}{2} + c = \frac{3\left(\sqrt[3]{x+2}\right)^8}{8} - \frac{12\left(\sqrt[3]{x+2}\right)^5}{5} + 6\left(\sqrt[3]{x+2}\right)^2 + c$$

Most már könnyen kiszámíthatjuk a határozott integrált:

$$\int_{-1}^{6} \frac{x^2}{\sqrt[3]{x+2}}\,\mathrm{d}x = \left[\frac{3\left(\sqrt[3]{x+2}\right)^8}{8} - \frac{12\left(\sqrt[3]{x+2}\right)^5}{5} + 6\left(\sqrt[3]{x+2}\right)^2\right]_{-1}^{6} =$$

$$= \left(\frac{3\left(\sqrt[3]{6+2}\right)^8}{8} - \frac{12\left(\sqrt[3]{6+2}\right)^5}{5} + 6\left(\sqrt[3]{6+2}\right)^2\right) -$$

$$\left(\frac{3\left(\sqrt[3]{-1+2}\right)^8}{8} - \frac{12\left(\sqrt[3]{-1+2}\right)^5}{5} + 6\left(\sqrt[3]{-1+2}\right)^2\right) =$$

$$= \left(\frac{3\cdot 2^8}{8} - \frac{12\cdot 2^5}{5} + 6\cdot 2^2\right) - \left(\frac{3}{8} - \frac{12}{5} + 6\right) = 96 - \frac{384}{5} + 24 - \frac{3}{8} + \frac{12}{5} - 6 =$$

$$= 114 - \frac{372}{5} - \frac{3}{8} = \frac{1569}{40} = 39{,}225.$$

Így a kettősintegrál értéke: $\frac{1569}{40}$. Tehát a feladatot megoldottuk. ◇

13.4. Példa. Adja meg az alábbi másodrendű hiányos differenciálegyenlet általános megoldását

$$y'' = (1 + x + y')^2,$$

valamint az $y(0) = y'(0) = 0$ kezdeti feltételeket kielégítő partikuláris megoldást.

Megoldás: A másodrendű differenciálegyenletből az y hiányzik, így az $y' = p$, $y'' = p'$ helyettesítést alkalmazva elsőrendű differenciálegyenletet kapunk:

$$p' = (1 + x + p)^2.$$

Differenciálegyenletünk $y' = f(ax + by + c)$ alakú, ezt a

$$t = ax + by + c$$

helyettesítést alkalmazva oldjuk meg, azaz

$$1 + x + p = t.$$

Ebből p-t kifejezzük, majd deriváljuk:

$$p = t - x - 1,$$

$$p' = t' - 1.$$

Ezt visszahehyettesítve a fenti egyenletbe, egy szétválasztható változójú differenciálegyenletet kapunk:

$$t' - 1 = t^2.$$

A t' helyére $\frac{dt}{dx}$-et írunk, majd szétválasztjuk a változókat és integrálunk:

$$\frac{dt}{dx} = 1+t^2$$

$$\frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t = 1\,\mathrm{d}x$$

$$\int \frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t = \int 1\,\mathrm{d}x$$

$$\operatorname{arctg} t = x + c_1$$

A kapott megoldásból kifejezzük a t-t:

$$t = \operatorname{tg}(x+c_1).$$

A $p = t - x - 1$-be visszahelyettesítjük a megoldást:

$$p = \operatorname{tg}(x+c_1) - x - 1.$$

Ide pedig a $p = y'$ be helyettesítve egy integrálással megkapjuk a megoldást:

$$y' = \operatorname{tg}(x+c_1) - x - 1$$

$$y = \int \frac{\sin(x+c_1)}{\cos(x+c_1)} - x - 1.$$

Tehát a differenciálegyenletünk általános megoldása:

$$y = -\ln|\cos(x+c_1)| - \frac{x^2}{2} - x + c_2.$$

A c_1 meghatározásához felhasználjuk a $y'(0)=0$ kezdeti feltételt. Az $y'=\operatorname{tg}(x+c_1)-x-1$ egyenletbe $x=0$-t írunk:

$$0 = \operatorname{tg}(c_1) - 0 - 1$$

$$\operatorname{tg}(c_1) = 1$$

$$c_1 = \frac{\pi}{4}.$$

A c_2 meghatározásához felhasználjuk a $y(0) = 0$ kezdeti feltételt. Az $y = -$ $-\ln\left|\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\right| - \frac{x^2}{2} - x + c_2.$ egyenletbe $x = 0$-t írunk:

$$0 = -\ln\left|\cos\left(0+\frac{\pi}{4}\right)\right| - \frac{0^2}{2} - 0 + c_2.$$

$$c_2 = \ln\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Tehát a differenciálegyenletünk partikuláris megoldása:

$$y = -\ln\left|\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\right| - \frac{x^2}{2} - x + \ln\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Tehát a feladatot megoldottuk. ◇