

Módszerek áramkörök vizsgálatára

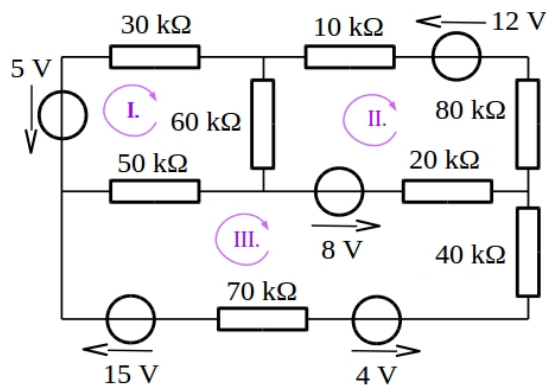
Kőházi-Kis Ambrus

Tartalomjegyzék

1. Hurokáramok módszerével	1
1.1. Az egyenletek felírása	2
1.2. Az egyenletek egyszerűsített felírása	3
1.3. Az egyenletek megoldása	3
1.4. Az ellenállások áramainak számolása	4
2. Csomóponti potenciálok módszerével	4
2.1. A csomóponti egyenletek felírása	4
2.2. Az egyenletek megoldása	5
2.3. Az áramok számolása	6

1. Hurokáramok módszerével

Ezen módszer keretében csak hurokegyenletet írunk fel, csomóponti egyenletekre nincs is szükség. A csomóponti egyenletek azt fejezik ki, hogy az adott csomópontban nem halmozódik fel töltés: a befutó és kifutó áramok előjeles eredője nullát ad. Amikor az áramokat hurkokban körbefolyó áramok formájában keressük, akkor fel sem merül a töltések felhalmozódásának lehetősége, hiszen a hurok-áramban bizonyosan körbeáramlanak a töltések. Így csak az elemi hurkok számával egyenlő számú hurokegyenletet kell felvenni, minden elemi hurokra egyet-egyét (lásd a 1.1. ábrát).



1.1. ábra. Mindegyik elemi hurokhoz berajzolunk egy-egy köráramot, amelyek körbefordulási iránya azonos, pl. az óramutató járásával megegyező irányú

1.1. Az egyenletek felírása

A hurokáramokat használjuk változóként, viszont az egyes ellenállásokon folyó áramokat kifejezhetjük a hurokáramok segítségével:

- ha egy ellenállás csak egy hurokban van benne, akkor annak árama megegyezik a hurokáram ellenállásával;
- ha egy ellenállás két hurok atárán van, akkor áram a két hurokáram különbsége.

Ezek alapján a 1.1. ábra áramkörének ellenállásain folyó áramok:

$$\begin{aligned} I_{30} &= I_I (\rightarrow), & I_{10} &= I_{II} (\rightarrow), & I_{50} &= I_I - I_{III} (\leftarrow), & I_{60} &= I_I - I_{II} (\downarrow), \\ I_{20} &= I_{II} - I_{III} (\leftarrow), & I_{80} &= I_{II} (\downarrow), & I_{40} &= I_{III} (\downarrow), & I_{70} &= I_{III} (\leftarrow). \end{aligned} \quad (1.1)$$

A hurokegyenletek felírása a Kirchoff-egyenletekkel kapcsolatban tanultak szerint (az egyes ellenállásokon folyó áramok feltételezett irányát az előző egyenletekben jelöltem):

$$\begin{aligned} 30 I_{30} + 60 I_{60} + 50 I_{50} - 5 &= 0, \\ 10 I_{10} - 12 + 80 I_{80} + 20 I_{20} - 8 - 60 I_{60} &= 0, \\ -50 I_{50} + 8 - 20 I_{20} + 40 I_{40} - 4 + 70 I_{70} + 15 &= 0, \end{aligned} \quad (1.2)$$

ezekbe beírva az (1.1) kifejezéseket:

$$\begin{aligned} 30 I_I + 60 (I_I - I_{II}) + 50 (I_I - I_{III}) - 5 &= 0, \\ 10 I_{II} - 12 + 80 I_{II} + 20 (I_{II} - I_{III}) - 8 - 60 (I_I - I_{II}) &= 0, \\ -50 (I_I - I_{III}) + 8 - 20 (I_{II} - I_{III}) + 40 I_{III} - 4 + 70 I_{III} + 15 &= 0, \end{aligned} \quad (1.3)$$

rendezve:

$$\begin{aligned} (30 + 60 + 50) I_I - 60 I_{II} - 50 I_{III} - 5 &= 0, \\ (10 + 80 + 20 + 60) I_{II} - 20 I_{III} - 60 I_I - 12 - 8 &= 0, \\ (50 + 20 + 40 + 70) I_{III} - 50 I_I - 20 I_{II} + 8 - 4 + 15 &= 0. \end{aligned} \quad (1.4)$$

Ez a viszonylag összetett példa mintáján felírhatjuk a hurokáramok módszere során felírható hurokegyenletek általános sémáját. Minden elemi hurokra fel kell írni a hurokegyenletet a következő formában:

$$R_a I_a - \sum_b R_{a,b} I_b + \sum_i U_{a,i} = 0, \quad (1.5)$$

ahol

- R_a az „a” hurok úgynevezett hurokellenállása, ami a hurokban szereplő ellenállások összege,
- I_a az „a” hurok hurokárama,
- $R_{a,b}$ az „a” hurok és a szomszédos hurokokkal közös ellenállás,
- I_b az „b” (az „a” hurokkal szomszédos) hurok hurokárama,
- $U_{a,i}$ az „a” hurokban levő feszültséggenerátorai feszültségeinek előjeles összege (a hurokáram irányába esőket kell pozitívként, vele ellentéteseket kell negatívként figyelembe venni).

1.2. Az egyenletek egyszerűsített felírása

Ha a köráramok iránya mind azonos értelmű, akkor nagyon egyszerű szerkesztűek az egyenletek (lásd a (1.5) összefüggést). Egy hurokra vonatkozó egyenlet bal oldalán pozitív előjellel szerepel a hurok árama megszorozva a hurok ellenállásainak összegével (hurokellenállás), negatív előjellel szerepelnek a szomszédos hurok áramai szorozva a közös ellenállások értékével, továbbá a hurokban szereplő feszültségforrások pozitív előjellel szerepelnek, ha a hurokáram körülfutási irányával azonos a feszültség iránya, negatív előjellel szerepelnek ellenkező esetben.

Ezek alapján azonnal felírhatjuk a 1.1. ábrán látható áramkörre:

$$\begin{aligned}(30 + 60 + 50) I_I - 60 I_{II} - 50 I_{III} - 5 &= 0, \\(10 + 80 + 20 + 60) I_{II} - 20 I_{III} - 60 I_I - 12 - 8 &= 0, \\(50 + 20 + 40 + 70) I - 50 I_I - 20 I_{II} + 8 - 4 + 15 &= 0.\end{aligned}\tag{1.6}$$

összevonva a tagokat:

$$\begin{aligned}140 I_I - 60 I_{II} - 50 I_{III} - 5 &= 0, \\170 I_{II} - 20 I_{III} - 60 I_I - 20 &= 0, \\180 I_{III} - 50 I_I - 20 I_{II} + 19 &= 0.\end{aligned}\tag{1.7}$$

Az elemi hurok számával megegyező számú lineáris egyenletet, mint egyenletrendszert kell megoldani.

1.3. Az egyenletek megoldása

A (1.7) egyenletek közül a legelsőből kifejezzük I_I áramot:

$$I_I = \frac{60 I_{II} + 50 I_{III} + 5}{140},\tag{1.8}$$

amit behelyettesítünk a maradék két egyenletbe:

$$\begin{aligned}170 I_{II} - 20 I_{III} - 60 \frac{60 I_{II} + 50 I_{III} + 5}{140} - 20 &= 0, \\180 I_{III} - 50 \frac{60 I_{II} + 50 I_{III} + 5}{140} - 20 I_{II} + 19 &= 0,\end{aligned}\tag{1.9}$$

$$\begin{aligned}170 I_{II} - 20 I_{III} - (25,714 I_{II} + 21,429 I_{III} + 2,143) - 20 &= 0, \\180 I_{III} - (21,429 I_{II} + 17,857 I_{III} + 1,786) - 20 I_{II} + 19 &= 0,\end{aligned}\tag{1.10}$$

$$\begin{aligned}144,286 I_{II} - 41,429 I_{III} - 22,143 &= 0, \\162,143 I_{III} - 41,429 I_{II} + 17,214 &= 0,\end{aligned}\tag{1.11}$$

most a felső egyenletből I_{II} -t fejezem ki:

$$I_{II} = \frac{41,429 I_{III} + 22,143}{144,286} = 0,28713 I_{III} + 0,15347,\tag{1.12}$$

amit beírunk a maradék egyenletbe:

$$162,143 I_{III} - 41,429 (0,28713 I_{III} + 0,15347) + 17,214 = 0,\tag{1.13}$$

$$150,371 I_{III} + 10,856 = 0,\tag{1.14}$$

amiből:

$$I_{III} = -\frac{10,856}{150,371} \text{ mA} = \underline{-0,07219 \text{ mA}}.\tag{1.15}$$

Visszahelyettesítve (1.12) kifejezésbe:

$$I_{II} = 0,28713 \cdot (-0,07219) + 0,15347 = \underline{0,13274 \text{ mA}}.\tag{1.16}$$

Az I_I áramot pedig a (1.8) kifejezésbe visszahelyettesítéssel kapjuk:

$$I_I = \frac{60 \cdot 0,13274 + 50 \cdot (-0,07219) + 5}{140} = \underline{0,0668 \text{ mA}},\tag{1.17}$$

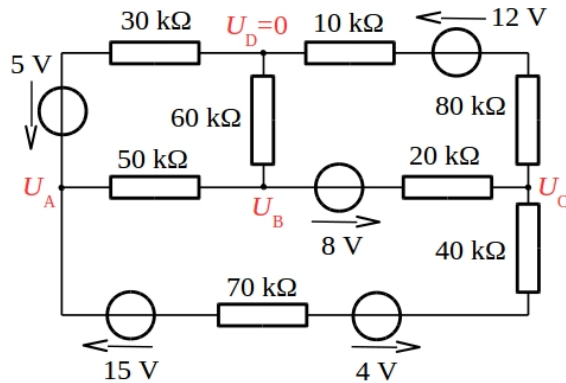
1.4. Az ellenállások áramainak számolása

A (1.1) összefüggésekből számolhatjuk az ellenállások áramait:

$$\begin{aligned}
 I_{30} &= I_I = \underline{\underline{-0,06680 \text{ mA}}} \text{ (} \rightarrow \text{)} , \\
 I_{10} &= I_{II} = \underline{\underline{0,13274 \text{ mA}}} \text{ (} \rightarrow \text{)} , \\
 I_{50} &= I_I - I_{III} = 0,0668 - (-0,07219) = \underline{\underline{0,1390 \text{ mA}}} \text{ (} \leftarrow \text{)} , \\
 I_{60} &= I_I - I_{II} = 0,0668 - 0,13274 = \underline{\underline{-0,0659 \text{ mA}}} \text{ (} \downarrow \text{)} , \\
 I_{20} &= I_{II} - I_{III} = 0,13274 - (-0,07219) = \underline{\underline{-0,2049 \text{ mA}}} \text{ (} \leftarrow \text{)} , \\
 I_{80} &= I_{II} = \underline{\underline{0,13274 \text{ mA}}} \text{ (} \downarrow \text{)} , \\
 I_{40} &= I_{III} = \underline{\underline{-0,07219 \text{ mA}}} \text{ (} \downarrow \text{)} , \\
 I_{70} &= I_{III} = \underline{\underline{-0,07219 \text{ mA}}} \text{ (} \leftarrow \text{)} .
 \end{aligned} \tag{1.18}$$

2. Csomóponti potenciálok módszerével

Ennek a módszernek a keretében csak csomóponti egyenleteket írunk fel. A csomópontok közül az egyiket nulla potenciálúnak jelöljük ki, a többi potenciálja alkotja a módszer meghatározandó ismeretlenjeit (lásd a 2.1. ábrát). Ilymódon a csomópontok számánál eggyel kevesebb számú ismeretlenünk van, amire most is elegendő lesz ugyanennyi csomóponti egyenletet felírni.



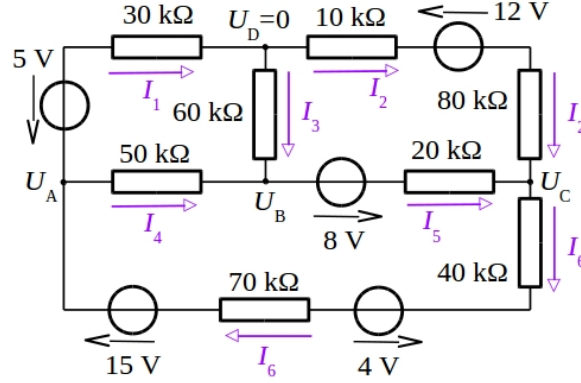
2.1. ábra. Az egyik csomópontot nulla potenciálúnak jelöljük, a többi csomópont potenciálját fogjuk a módszerrel elsődlegesen meghatározni

A csomóponti egyenletek egy csomópontba érkező áramköri ágak árama között teremt kapcsolatot, felírásukhoz ki kell fejezni a ágáramokat a csomóponti potenciálok segítségével.

2.1. A csomóponti egyenletek felírása

A csomóponti egyenletekhez fel kell venni az ágáramoknak áramirányokat (lásd a 2.2. ábrát).

Egy ágáram felírható az ág két végén levő potenciálok különbsége, mint feszültség, az ágban elhelyezkedő feszültségforrás feszültsége és az ellenállásokon eső feszültséggel. Helyesen kell a feszültségek irányát összeegyeztetni: pl. figyelembe kell venni, hogy az ellenálláson eső feszültség azonos irányú a



2.2. ábra. Tetszőlegesen megválaszthatók áramirányok az áramköri ágak számára

rajta folyó áram irányával. Minden ágra felírunk egy ilyen egyenletet, amelyekből rögtön ki is fejezzük az ág-áramokat:

$$\begin{aligned}
 U_A - U_D &= 30 I_1 - 5 & \Rightarrow & I_1 = \frac{U_A - U_D + 5}{30}, \\
 U_D - U_C &= 10 I_2 - 12 + 80 I_2 & \Rightarrow & I_2 = \frac{U_D - U_C + 12}{90}, \\
 U_D - U_B &= 60 I_3 & \Rightarrow & I_3 = \frac{U_D - U_B}{60}, \\
 U_A - U_B &= 50 I_4 & \Rightarrow & I_4 = \frac{U_A - U_B}{50}, \\
 U_B - U_C &= 8 + 20 I_5 & \Rightarrow & I_5 = \frac{U_B - U_C - 8}{20}, \\
 U_C - U_A &= 40 I_6 - 4 + 70 I_6 + 15 & \Rightarrow & I_6 = \frac{U_C - U_A - 11}{110},
 \end{aligned} \tag{2.1}$$

Az ágáramokkal felírhatjuk a csomóponti egyenleteket (most a kifutó áramokat veszem pozitívnak):

$$\begin{aligned}
 A: & I_1 + I_4 - I_6 = 0, \\
 B: & I_5 - I_3 - I_4 = 0, \\
 C: & I_6 - I_2 - I_5 = 0,
 \end{aligned} \tag{2.2}$$

Amelyekbe beírva a csomóponti áramok (2.1) kifejezéseit ($U_D = 0$):

$$\begin{aligned}
 \frac{U_A - 0 + 5}{30} + \frac{U_A - U_B}{50} - \frac{U_C - U_A - 11}{110} &= 0, \\
 \frac{U_B - U_C - 8}{20} - \frac{0 - U_B}{60} - \frac{U_A - U_B}{50} &= 0, \\
 \frac{U_C - U_A - 11}{110} - \frac{0 - U_C + 12}{90} - \frac{U_B - U_C - 8}{20} &= 0.
 \end{aligned} \tag{2.3}$$

2.2. Az egyenletek megoldása

Az egyenleteket beszorzom a nevezők legkisebb közös többszörösével (ez csak a kézzel végzett számolás esetén hasznos, érdekes) (1650, 300, 1980):

$$\begin{aligned}
 55 U_A + 275 + 33 U_A - 33 U_B - 15 U_C + 15 U_A + 165 &= 0, \\
 15 U_B - 15 U_C - 120 + 5 U_B - 6 U_A + 6 U_B &= 0, \\
 18 U_C - 18 U_A - 198 + 22 U_C - 264 - 99 U_B + 99 U_C + 792 &= 0.
 \end{aligned} \tag{2.4}$$

Összevonva:

$$\begin{aligned}
 103 U_A - 33 U_B - 15 U_C + 440 &= 0, \\
 26 U_B - 15 U_C - 6 U_A - 120 &= 0, \\
 139 U_C - 18 U_A - 99 U_B + 330 &= 0.
 \end{aligned} \tag{2.5}$$

Az első egyenletből kifejezem U_A -t:

$$U_A = \frac{33 U_B + 15 U_C - 440}{103}, \tag{2.6}$$

amit beírunk a maradék két egyenletbe:

$$\begin{aligned} 26 U_B - 15 U_C - 6 \frac{33 U_B + 15 U_C - 440}{103} - 120 &= 0, \\ 139 U_C - 18 \frac{33 U_B + 15 U_C - 440}{103} - 99 U_B + 330 &= 0, \end{aligned} \quad (2.7)$$

$$\begin{aligned} 24,078 U_B - 15,159 U_C - 94,369 &= 0, \\ 136,379 U_C - 104,767 U_B + 406,893 &= 0. \end{aligned} \quad (2.8)$$

A felső egyenletből:

$$U_B = \frac{15,159 U_C + 94,369}{24,078}, \quad (2.9)$$

amit behelyettesítünk az alsó egyenletbe:

$$136,379 U_C - 104,767 \frac{15,159 U_C + 94,369}{24,078} + 406,893 = 0, \quad (2.10)$$

$$70,420 U_C - 3,7207 = 0, \quad (2.11)$$

$$U_C = \frac{3,7207}{70,420} = \underline{\underline{-0,052836 \text{ V}}}. \quad (2.12)$$

A (2.9) kifejezésből:

$$U_B = \frac{15,159 \cdot (-0,052836) + 94,369}{24,078} = \underline{\underline{3,1184 \text{ V}}}. \quad (2.13)$$

A (2.6) kifejezésből:

$$U_A = \frac{33 \cdot 3,1184 + 15 \cdot (-0,052836) - 440}{103} = \underline{\underline{-3,2804 \text{ V}}}, \quad (2.14)$$

2.3. Az áramok számolása

Az áramokat a (2.1) összefüggésekből kaphatjuk:

$$\begin{aligned} I_1 &= \frac{U_A - U_D + 5}{30} = \frac{-3,2804 - 0 + 5}{30} = \underline{\underline{0,0573 \text{ mA}}}, \\ I_2 &= \frac{U_D - U_C + 12}{90} = \frac{0 - (-0,052836) + 12}{90} = \underline{\underline{0,13392 \text{ mA}}}, \\ I_3 &= \frac{U_D - U_B}{60} = \frac{0 - 3,1184}{60} = \underline{\underline{-0,0520 \text{ mA}}}, \\ I_4 &= \frac{U_A - U_B}{50} = \frac{-3,2804 - 3,1184}{50} = \underline{\underline{-0,1280 \text{ mA}}}, \\ I_5 &= \frac{U_B - U_C - 8}{20} = \frac{3,1184 - (-0,052836) - 8}{20} = \underline{\underline{-0,2414 \text{ mA}}}, \\ I_6 &= \frac{(-0,052836) - (-3,2804) - 11}{110} = \underline{\underline{-0,1293 \text{ mA}}}. \end{aligned} \quad (2.15)$$