1. előadás

Évközben 60 pont + 40 pont vizsgadolgozat

3 NagyZH 6-9-12. héten (18 pont → 6 pont min)

5 kisZH 2 pontos

Utolsó héten lehet NagyZH-kat javítani.

Ismétlés, deriválás

$$\left[2\cdot x^7\right]' = 2\cdot\left[x^7\right]' = 2\cdot 7\cdot x^6 = 14x^6$$

$$\left[e^x\cdot \cos x\right]' = \left[e^x\right]'\cdot\cos x + e^x\left[\cos x\right]' = e^x\cos x + e^x\cdot(-\sin x)$$

$$\left[e^{3x}\right]' = e^{3x}\cdot 3$$

$$\left[e^y\right]' = e^y$$

$$\left[3x\right]' = 3$$

$$\left[f(g(x))\right]' = f'(g(x))\cdot g'(x)$$

---

pl. $\left[x^x\right]' = \left[e^{\ln(x^x)}\right]' = \left[e^{x\cdot\ln x}\right]' = \underbrace{e^{x\ln x}\cdot(\ln x+1)}_{x^x(\ln x+1)}$

$f(y) = e^y$

$f'(y) = e^y$

$g(x) = x\ln x$

$g'(x) = \underbrace{\ln x + x\cdot\frac{1}{x}}_{\ln x+1}$

Integrálás Mit deriváljunk, hogy az adott függvényt kapjuk?

$[e^x]' = e^x \quad [x^2]' = 2x \quad \left[\frac{x^3}{3}\right]' = x^2 \quad \left[\frac{x^6}{6}\right]' = x^5$

$[\ln x]' = \frac{1}{x} \quad \left[\frac{x^{n+1}}{n+1}\right] = x^n$

$[-\cos x]' = (-1)[\cos x]' = (-1)\cdot(-\sin x) = \sin x$

$[e^x + 2]' = [e^x]' + [2]' = e^x$

$[x^2 - 8]' = 2x$ (primitív függvénye)

konstans

Def: Azt mondjuk, hogy a f függvénynek a F függvény egy primitív függvénye, ha $F' = f$.

Tétel: Ha F egy primitív függvénye f-nek, akkor $F(x) + c$ is primitív f.v.e. f-nek.

Ha $G(x)$ is primitív függvénye $f(x)$-nek, akkor van olyan C állandó, amellyel $G(x) = F(x) + C$

Def: A f fgv. határozatlan integrálja az f primitív függvényeinek összessége

Jelölés: $\int f$ vagy $\int f(x)\,dx = F(x) + C$

$C \in \mathbb{R}$

$$\int \sqrt{x}\, dx = \int x^{\frac{1}{2}} dx = \frac{x^{3/2}}{3/2} + C$$

$$\int \frac{1}{1+x^2} dx = \operatorname{arc\,tg} + C$$

Alapszabályok:

1.) $\int c \cdot f(x)\, dx = c \cdot \int f(x)\, dx$

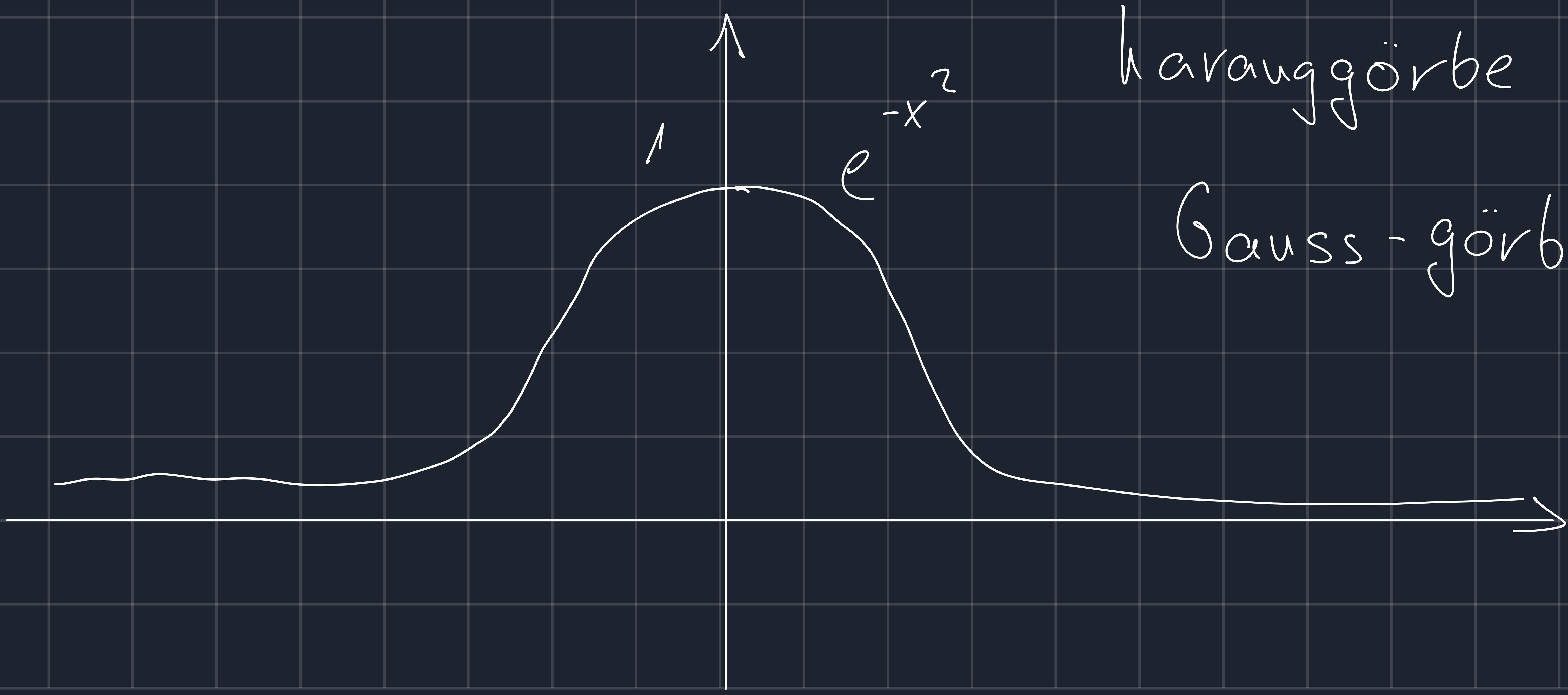
2.) $\int f(x) + g(x)\, dx = \int f(x)\, dx + \int g(x)\, dx$

$$\int 2 \cdot \sin x\, dx = 2 \cdot \int \sin x\, dx = 2 \cdot -\cos x + C$$

$$\int \frac{2}{5x^5} + \frac{3}{\sin^2 x} dx = \frac{2}{5} \int \frac{1}{x^5} dx + 3 \int \frac{1}{\sin^2 x} dx =$$

$$= 2/5 \cdot \frac{x^{-4}}{-4} + 3 \cdot (-\operatorname{ctg} x) + C$$

$\int e^{-x^2} dx \longrightarrow$ nem írható fel primitív függvénye



haranggörbe

Gauss-görbe

Integráltípusok

$$\left[F(g(x))\right]' = F'(g(x)) \cdot g'(x)$$

4.) $$\int \sin(x^2) \cdot \underbrace{2x}_{} \, dx = -\cos(x^2) + C$$

$f'(x)$ $g(x)$ $g'(x)$

$$\int x \cdot e^{-x^2} \, dx = \int -\frac{1}{2} \cdot (-2x) \cdot e^{-x^2} = -\frac{1}{2} \cdot e^{-x^2} + C$$

$g(x)$ $g(x)$ $g'(x)$

$$\left[-\frac{1}{2} \cdot e^{-x^2}\right]' = -\frac{1}{\cancel{2}} \cdot e^{-x^2} \cdot (\cancel{-2}) \cdot x + 0 = e^{-x^2} \cdot x$$

1.) Lineáris belső függvény: $g(x) = ax + b$

$$\int f(ax+b) \, dx = \frac{1}{a} \cdot \int \underbrace{f(ax+b)}_{g(x)} \cdot \underbrace{a}_{g'(x)} \, dx =$$

$$= \frac{1}{a} \cdot F(ax+b) + C$$

$$\| $$

$$\frac{F(ax+b)}{a} + C$$

Pl. $$\int e^{2x} \, dx = \frac{e^{2x}}{2} + C \quad \Big\} \quad f(y) = e^y \quad F(y) = e^y$$

a

$ax + b = 2x + 0$

$b = 0$

$$\int (3-8x)^7\,dx = \frac{\frac{(3-8x)^8}{8}}{-8}$$

$$f(y) = y^7 \qquad F(y) = \frac{y^8}{8}$$

$$ax+b = -8x+3$$

$$\int \cos^2 x\,dx$$

$$\left.\begin{aligned} \cos^2 x + \sin^2 x &= 1 \\ \oplus\ \cos^2 x - \sin^2 x &= \cos 2x \end{aligned}\right\}$$ azonosságok

$$\cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}$$

$$\ominus\ \sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}$$

$$\int \cos^2 x\,dx = \int \frac{1+\cos 2x}{2}\,dx = \frac{1}{2}\int 1+\cos 2x\,dx =$$

$$= \frac{1}{2}\left(x + \frac{\sin 2x}{2}\right) + C$$

2.) $f(y) = \frac{1}{y}$

$$\int \frac{g'(x)}{g(x)}\,dx = \int \frac{1}{g(x)} \cdot g'(x) = \ln|g(x)| + C$$

pl. $\int \frac{2x+e^x}{x^2+e^x}\,dx = \ln|x^2+e^x| + C$

$$[x^2+e^x]' = 2x+e^x$$

$$\int \operatorname{ctg} x = \int \frac{\cos x}{\sin x}\, dx = \ln|\sin x| + C$$

$$\int \frac{x+1}{x^2+2x+2}\, dx = \int \frac{1}{2} \cdot \frac{2(x+1)}{x^2+2x+2}\, dx = \frac{1}{2} \ln|x^2+2x+2| + C$$

$$[x^2+2x+2]' = 2x+2 = 2(x+1)$$

$$[\ln x]' = \frac{1}{x} \qquad [\ln(-x)]' = \frac{1}{-x} \cdot (-1) = \frac{1}{x}$$
