T E O R Í A   C L Á S I C A   DE   C A M P O S

Tarea 4 (lunes 7 de abril a las 23:59)

1. En $(1+1)$ dimensiones, es posible derivar la ecuación de onda a partir de la acción

$$S[\psi(t,\vec{x})] = \int_{t_1}^{t_2} dt \int_{-\infty}^{\infty} dx \left[\left(\frac{\partial \psi}{\partial t} \right)^2 - v^2 \left(\frac{\partial \psi}{\partial x} \right)^2 \right], \tag{1}$$

   en donde esta expresión es únicamente válida para un observador en reposo con respecto al medio material sobre el cual se propaga la onda. Realizar una transformación de Galileo e identificar la forma general que toma la acción (1) vista por un observador inercial arbitrario. A partir de esta nueva expresión para la acción obtener la ecuación del movimiento y encontrar su solución general. Interpretar el resultado.

2. Consideren una cuerda continua de longitud infinita sobre la cual se propagan dos ondas planas de la misma amplitud y longitud de onda, una desplazándose hacia la derecha y la otra hacia la izquierda. Demostrar que la superposición de ambas ondas es una solución de la ecuación de onda. Analizar el comportamiento resultante de la cuerda a partir de esta superposición. ¿Pueden identificar algún patrón que les resulte interesante? Estudiar el flujo de energía a lo largo de la cuerda y discutir su interpretación física.

3. Demostrar que la ecuación de Klein-Gordon para un campo escalar masivo complejo $\phi(t,\vec{x})$ puede derivase a partir de la siguiente acción:

$$S[\phi(t,\vec{x}),\phi^*(t,\vec{x})] = \int_{t_1}^{t_2} dt \int_V dV \left[\frac{\partial \phi}{\partial t}\frac{\partial \phi^*}{\partial t} - c^2 \vec{\nabla}\phi \cdot \vec{\nabla}\phi^* - \frac{m^2c^4}{\hbar^2}\phi\phi^* \right]. \tag{2}$$

   Encontrar la solución general a la ecuación del movimiento y demostrar que ésta puede expresarse como una combinación lineal de ondas planas de energía positiva y negativa. Escribir la expresión que relaciona los coeficientes que acompañan a estas ondas con los datos iniciales del problema.

4. La solución general a la ecuación de Klein-Gordon compleja puede expresarse como una combinación lineal de ondas planas de energía positiva y negativa

$$\phi^{(+)}(t,\vec{x}) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} e^{-i[\omega(k)t - \vec{k}\cdot\vec{x}]}, \quad \phi^{(-)}(t,\vec{x}) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} e^{+i[\omega(k)t - \vec{k}\cdot\vec{x}]}, \tag{3}$$

respectivamente, con $\omega(k) \equiv \sqrt{c^2k^2 - m^2c^4/\hbar^2}$. Introducir $\phi^{(+)}(t,\vec{x})$ y $\phi^{(-)}(t,\vec{x})$ en la ecuación de Klein-Gordon y comprobar que efectivamente satisfacen la ecuación del movimiento. Demostrar que la energía de estas ondas diverge, aunque la densidad de energía es constante y definida positiva en ambos casos. ¿De dónde proviene entonces el nombre de ondas planas de energía "positiva" y "negativa"? Calcular la velocidad de fase $v_{\text{fase}} = \frac{\omega(k)}{k}$ y la velocidad de grupo $v_{\text{grupo}} = \frac{d\omega(k)}{dk}$ de estas ondas e interpretar el resultado.

5. Si expresamos al campo de Klein-Gordon complejo en la forma $\phi(t,\vec{x}) = e^{-i\frac{mc^2}{\hbar}t}\Psi(t,\vec{x})$, y nos enfocamos en soluciones que no exciten modos de energía negativa ni modos comparables o menores a la longitud de Compton $\lambda_{\text{Compton}} = \frac{h}{mc}$, es posible convencerse de que el nuevo campo $\Psi(t,\vec{x})$ satisface la ecuación de Schrödinger libre. Siguiendo los mismos pasos, a partir de la acción para el campo de Klein-Gordon complejo, ecuación (2), encontrar la acción que describe al campo de Schrödinger libre. Variar esta acción y comprobar que efectivamente obtienen la ecuación de Schrödinger libre. ¿Es invariante la acción de Schrödinger libre bajo transformaciones de Galielo? Interpretar el resultado.

6. Sea $f(x)$ una función bien comportada en todo su dominio, el cual asumiremos como el conjunto de todos los números reales, $-\infty < x < \infty$. En el intervalo $0 \leq x \leq L$, podremos expresar esta función por medio de su transformada discreta de Fourier,

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{L}} \sum_k f_k e^{ikx}, \tag{4}$$

con $k = \frac{2n\pi}{L}$, $n \in \mathbb{Z}$, mientras que en $-\infty < x < \infty$ por medio de su transformada continua de Fourier,

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{f}(k) e^{ikx} dk. \tag{5}$$

Determinar las dimensiones de las funciones f_k y $\tilde{f}(k)$. Demostrar que si la función $f(x)$ es real, entonces $f_k = f^*_{-k}$, $\tilde{f}(k) = \tilde{f}(-k)$, y además las dos expresiones anteriores pueden escribirse como una combinación lineal de senos y cosenos. Identificar los coeficientes que acompañan a estas funciones trigonométricas y dar la expresión que nos permite calcularlos a partir de la función original $f(x)$.

7. Demostrar que la solución a la ecuación de onda en $(1+1)$ dimensiones con datos iniciales $\psi(t=0,x)$ y $\dot{\psi}(t=0,x)$ puede expresarse en la forma:

$$\begin{aligned} \psi(t,x) &= \int_{-\infty}^{\infty} dx' \psi(t=0,x') \dot{K}(t,x;t=0,x') \\ &+ \int_{-\infty}^{\infty} dx' \dot{\psi}(t=0,x') K(t,x;t=0,x'), \end{aligned} \tag{6}$$

en donde $K(t,x;t=0,x')$ representa el propagador de la ecuación de onda. Encontrar la expresión para $K(t,x;t=0,x')$ y demostrar que se trata de la solución a la ecuación de onda con condiciones iniciales $K(t=0,x;t=0,x')=0$ y $\dot{K}(t=0,x;t=0,x')=\delta(x-x')$.