# T E O R Í A   C L Á S I C A   D E   C A M P O S

## Tarea 6 (lunes 12 de mayo a las 23:59)

1. Demostrar que las ecuaciones de Maxwell inhomogéneas expresadas en términos de los potenciales $\phi$ y $\vec{A}$:

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2} - \nabla^2\phi - \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{c^2}\frac{\partial\phi}{\partial t} + \vec{\nabla}\cdot\vec{A}\right) = \frac{\rho}{\epsilon_0}, \tag{1a}$$

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\vec{A}}{\partial t^2} - \nabla^2\vec{A} + \vec{\nabla}\left(\frac{1}{c^2}\frac{\partial\phi}{\partial t} + \vec{\nabla}\cdot\vec{A}\right) = \mu_0\vec{J}, \tag{1b}$$

son invariantes de norma.

2. En su expresión vectorial clásica, las ecuaciones de Maxwell toman la forma:

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}, \quad \vec{\nabla}\cdot\vec{B} = 0, \quad \vec{\nabla}\times\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}, \quad \vec{\nabla}\times\vec{B} = \mu_0\left(\vec{J} + \epsilon_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}\right), \tag{2}$$

en donde $\epsilon_0$ y $\mu_0$ representan la permitividad y permeabilidad del vacío, respectivamente. Por el contrario, las mismas ecuaciones expresadas en forma covariante se escriben como:

$$\partial_\nu F^{\mu\nu} = \mu_0 J^\mu, \quad \partial_{[\lambda}F_{\mu\nu]} = 0, \tag{3}$$

en donde únicamente aparece la permeabilidad del vacío $\mu_0$. ¿Cómo es esto posible?

3. Demostrar que si identificamos $F_{i0} = \frac{1}{c}E_i$ y $F_{ij} = \epsilon_{ijk}B_k$ en las ecuaciones de Maxwell expresadas en su forma covariante, ecuaciones (3), obtenemos las ecuaciones de Maxwell expresadas en su forma vectorial clásica, ecuaciones (2).

4. Demostrar que el campo eléctrico y magnético transforman como un vector bajo rotaciones, mientras que transforman como:

$$E'_x = E_x, \quad E'_y = \gamma(E_y - v_0 B_z), \quad E'_z = \gamma(E_z + v_0 B_y), \tag{4a}$$

$$B'_x = B_x, \quad B'_y = \gamma(B_y + \frac{v_0}{c^2}E_z), \quad B'_z = \gamma(B_z - \frac{v_0}{c^2}E_y) \tag{4b}$$

bajo un boost a lo largo del eje $x$.

5. La acción de la electrodinámica clásica está dada en términos de la siguiente expresión:
$$S[A_\mu(x^\alpha)] = \int d^4x \frac{1}{c}\left(-\frac{1}{4\mu_0}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + A_\mu J^\mu\right), \tag{5}$$
en donde $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$ es el tensor electromagnético y $J^\mu$ la densidad de corriente eléctrica. Demostrar que las ecuaciones de Maxwell se encuentran codificadas en esta expresión para la acción.

6. Demostrar que el tensor de energía-momento canónico asociado al campo electromagnético no es simétrico.

7. Calcular las componentes ${T_0}^0$, ${T_i}^0$, ${T_0}^i$ y ${T_i}^j$ del tensor de energía-momento simétrico e identificarlas con algunas de las cantidades que aprendieron en su curso de electromagnetismo.

8. Demostrar las identidades matemáticas: $\vec{\nabla}\times(\vec{\nabla}\times\vec{V}) = \vec{\nabla}(\vec{\nabla}\cdot\vec{V}) - \nabla^2\vec{V}$, $\vec{\nabla}\times(s\vec{V}) = s(\vec{\nabla}\times\vec{V}) - \vec{V}\times(\vec{\nabla}s)$, $\vec{\nabla}\cdot(s\vec{V}) = s(\vec{\nabla}\cdot\vec{V}) + \vec{V}\cdot(\vec{\nabla}s)$,$\vec{\nabla}\times(\vec{\nabla}s) = 0$, $\vec{\nabla}\cdot(\vec{\nabla}\times\vec{V}) = 0$, en donde $s$ y $\vec{V}$ representan un campo escalar y uno vectorial, respectivamente. (Consejo: utilicen el lenguaje de índices.)