Tarea 3: Mecánica Clásica

Holman Daniel Quintero Salazar

• Ejercicio # 1: Potencial de Lennard-Jones

Con el potencial $V=\epsilon((r_m/r)^{12}-2(r_m/r)^6)$ y masas m_1 y m_2 podemos escribir un lagrangiano de tal forma que

$$\mathcal{L}=\frac{m_1+m_2}{2}\dot{R}^2+\frac{1}{2}\frac{m_1m_2}{m_1+m_2}\dot{r}^2-V$$

Podemos deshacernos del primer término y suponer que el centro de masa está fijo o moviéndose uniformemente, además, podemos reexpresar las masas m_1 y m_2 de la forma $\mu=\frac{m_1m_2}{m_1+m_2}$, siendo μ la masa reducida. Así, el lagrangiano es,

$$\mathcal{L}=\frac{1}{2}\mu(\dot{r}^2+r^2\dot{\theta}^2)-\epsilon\left(\left(\frac{r_m}{r}\right)^{12}-2\left(\frac{r_m}{r}\right)^6\right)$$

Igualmente podemos hacer la sustitución, $\dot{\theta}=\frac{l}{\mu r^2}$, y finalmente tener,

$$\mathcal{L}=\frac{1}{2}\mu\dot{r}^2+\frac{l^2}{2\mu r^2}-\epsilon\left(\left(\frac{r_m}{r}\right)^{12}-2\left(\frac{r_m}{r}\right)^6\right)$$

Dado que $\nabla\times\nabla V=0$, podemos establecer que

$$E=\frac{1}{2}\mu\dot{r}^2+\frac{l^2}{2\mu r^2}+\epsilon\left(\left(\frac{r_m}{r}\right)^{12}-2\left(\frac{r_m}{r}\right)^6\right)=cte$$

Para considerar que las moléculas están asociadas su energía deberá ser menor que el máximo de la barrera de potencial que separa los estados ligados y no ligados, así pues, para el mínimo cuando r_m,

$$V(r_m)=\epsilon\left(\left(\frac{r_m}{r_m}\right)^{12}-2\left(\frac{r_m}{r_m}\right)^6\right)=\epsilon\left(\frac{r_m^{12}}{r_m^{12}}-2\frac{r_m^6}{r_m^6}\right)=\epsilon(1-2)=-\epsilon$$

$$V(r_m)=V_{min}=-\epsilon \text{ en } r=r_m$$

por otro lado, para el máximo,

$$\lim_{r\to\infty}\epsilon\left(\left(\frac{r_m}{r}\right)^{12}-2\left(\frac{r_m}{r}\right)^6\right)=0$$

Finalmente, con estos resultados se establece que el rango de energías deberá oscilar entre

$$-\epsilon<E<0.$$

• Ejercicio #2: Teorema del virial con rozamiento.

Teniendo un sistema de partículas con vector posición $\vec{r_i}$ y fuerzas aplicadas $\vec{F_i}$ de la forma $\vec{F_i} = \vec{F_{ic}} + \vec{f_i}$, donde $\vec{F_{ic}}$ representa fuerzas conservativas y $\vec{f_i}$ fuerzas de rozamiento proporcionales a la velocidad de la forma $\vec{f_i} = -\alpha \dot{\vec{r}}$, procedemos a desarrollar el teorema del Virial.

$$G = \sum_i \vec{p_i} \cdot \vec{r_i}$$

$$\frac{dG}{dt} = \sum_i \dot{\vec{r_i}} \cdot \vec{p_i} + \sum_i \dot{\vec{p_i}} \cdot \vec{r_i}$$

$$\dot{\vec{P_i}} = \vec{F_i} = \vec{F_{ic}} + \vec{f_i} = \vec{F_{ic}} - \alpha \dot{\vec{r}}$$

$$\frac{dG}{dt} = \sum_i \dot{\vec{r_i}} \cdot \vec{p_i} + \sum_i (\vec{F_{ic}} - \alpha \dot{\vec{r}}) \cdot \vec{r_i}$$

$$\frac{dG}{dt} = \sum_i \dot{\vec{r_i}} \cdot \vec{P_i} + \sum_i \vec{F_{ic}} \cdot \vec{r_i} - \sum_i \alpha \dot{\vec{r}} \cdot \vec{r_i}$$

El componente $-\sum_i \alpha \dot{\vec{r}} \cdot \vec{r} \neq 0$, dado que el movimiento de las partículas se da respecto a un punto fijo (el centro de masa), movimientos hacia afuera y hacia adentro del sistema se cancelan y, además, el sistema se supone simétrico. Entonces,

$$\frac{dG}{dt} = \sum_i \dot{\vec{r_i}} \cdot \vec{P_i} + \sum_i \vec{F_{ic}} \cdot \vec{r_i} - \cancel{\alpha \sum_i \dot{\vec{r}} \cdot \vec{r_i}}^{\,0}$$

$$\frac{dG}{dt} = 2T + \sum_i \vec{F_{ic}} \cdot \vec{r_i}$$

$$\Rightarrow \sum_i \dot{\vec{r_i}} \cdot \vec{p_i} = \sum_i m_i \dot{\vec{r_i}} \cdot \dot{\vec{r_i}} = \sum_i m_i V_i^2 = 2T$$

Analizando la media temporal para un intervalo τ

$$\frac{1}{\tau}\int_0^{\tau} \frac{dG}{dt}\, dt = \left\langle \frac{dG}{dt} \right\rangle = \langle 2T \rangle + \left\langle \sum_i \vec{F_{ic}} \cdot \vec{r_i} \right\rangle$$

$$\langle 2T \rangle + \left\langle \sum_i \vec{F_{ic}} \cdot \vec{r_i} \right\rangle = \frac{1}{\tau}[G(\tau) - G(0)]$$

$$\langle 2T \rangle + \left\langle \sum_i \vec{F_{ic}} \cdot \vec{r_i} \right\rangle = 0$$

$$\langle T \rangle = -\frac{1}{2}\left\langle \sum_i \vec{F_{ic}} \cdot \vec{r_i} \right\rangle$$

• Ejercicio #3: Fuerza inversamente proporcional a la quinta potencia de la distancia

a) Si se supone que el centro de la fuerza se ubica en el origen, y la órbita de la partícula es un círculo de radio R centrado en $x=R$ y $y=0$, entonces, la ecuación de órbita para la trayectoria de la partícula será

$$r(\theta)=\sqrt{2}R(1+\cos 2\theta)^{1/2}$$

entonces,

$$u(\theta)=\frac{1}{r(\theta)}=\frac{1}{\sqrt{2}R(1+\cos 2\theta)^{1/2}}=\frac{1}{\sqrt{2}R}(1+\cos 2\theta)^{-1/2}$$

$$\frac{du}{d\theta}=\frac{1}{\sqrt{2}R}\cdot -\frac{1}{\cancel{2}}(1+\cos 2\theta)^{-3/2}\cdot -\cancel{2}\operatorname{sen} 2\theta=\frac{\operatorname{sen} 2\theta}{\sqrt{2}R(1+\cos 2\theta)^{3/2}}$$

$$\frac{d^2u}{d\theta^2}=\frac{d}{d\theta}\left(\frac{1}{\sqrt{2}R}\operatorname{sen} 2\theta\cdot(1+\cos 2\theta)^{-3/2}\right)\Rightarrow\frac{1}{\sqrt{2}R}\left(2\cos 2\theta\cdot(1+\cos 2\theta)^{-3/2}+\operatorname{sen} 2\theta\cdot -\frac{3}{2}(1+\cos 2\theta)^{-5/2}\cdot -2\operatorname{sen} 2\theta\right)$$

$$\frac{d^2u}{d\theta^2}=\frac{1}{\sqrt{2}R}\left(\frac{2\cos 2\theta}{(1+\cos 2\theta)^{3/2}}+\frac{3\operatorname{sen}^2 2\theta}{(1+\cos 2\theta)^{5/2}}\right)=\frac{1}{2\sqrt{2}R(1+\cos 2\theta)^{5/2}}(2\cos 2\theta+2\cos^2 2\theta+3\operatorname{sen}^2 2\theta)$$

Así,

$$\frac{d^2u}{d\theta^2}+u=\frac{1}{\sqrt{2}R(1+\cos 2\theta)^{5/2}}\left[(1+\cos 2\theta)^2+2\cos 2\theta+2\cos^2 2\theta+3\operatorname{sen}^2 2\theta\right]$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}R(1+\cos 2\theta)^{5/2}}(4+4\cos 2\theta)=\frac{4}{\sqrt{2}R(1+\cos 2\theta)^{3/2}}$$

Con $1+\cos 2\theta=(u\sqrt{2}R)^{-2}\rightarrow\frac{d^2u}{d\theta^2}+u=\frac{4}{\sqrt{2}R((u\sqrt{2}R)^{-2})^{3/2}}=\frac{4}{\sqrt{2}R\,u^{-3}(\sqrt{2})^{-3}R^{-3}}$

$$=\frac{4}{(\sqrt{2})^{-2}u^{-3}R^{-2}}=8R^2u^3$$

Con esto, la ecuación diferencial de la órbita será,

$$\frac{d^2u}{d\theta^2}+u=-\frac{m}{l^2}\frac{d}{du}V\left(\frac{1}{u}\right)$$

$$8R^2u^3=-\frac{m}{l^2}\frac{d}{du}V\left(\frac{1}{u}\right)\rightarrow V\left(\frac{1}{u}\right)=-\frac{2l^2R^2}{m}u^4$$

Realizando el cambio de variable tenemos

$$V(r) = -\frac{2l^2R^2}{mr^4}$$

Así,

$$F(r) = \nabla V(r) = \frac{d}{dr}V(r) = -\frac{8l^2R^2}{mr^5} \Rightarrow F(r) \propto r^{-5}$$

b) La energía cinética de la partícula es $T = \frac{m}{2}[\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2]$, así, teniendo r observamos que

$$\frac{d[\sqrt{2}R(1+\cos 2\theta)^{1/2}]}{dt} = \frac{dr}{dt} \qquad \frac{dr}{dt} = \dot{r} = \sqrt{2}R\frac{\operatorname{sen} 2\theta \ \dot{\theta}}{(1+\cos 2\theta)^{1/2}}$$

$$r^2 = 2R^2(1+\cos 2\theta) \quad , \quad \dot{r}^2 = 2R^2\frac{\operatorname{sen}^2 2\theta \ \dot{\theta}^2}{1+\cos 2\theta}$$

$$T = mR^2\dot{\theta}^2\left[\frac{\operatorname{sen}^2 2\theta}{1+\cos 2\theta} + 1 + \cos 2\theta\right]$$
$$= mR^2\dot{\theta}^2\left[\frac{\operatorname{sen}^2 2\theta + 1 + 2\cos 2\theta + \cos^2 2\theta}{1+\cos\theta}\right]$$
$$= 2mR^2\dot{\theta}^2$$

Sabiendo que $l = mr^2\dot{\theta}$, tenemos $T = \frac{2R^2l^2}{mr^4}$

Así, vemos que,

$$E = T + V = \frac{2R^2l^2}{mr^4} - \frac{2l^2R^2}{mr^4} = 0$$

c) Suponiendo que la partícula comienza en $x = 2R$ y $y = 0$, el tiempo requerido para realizar el movimiento es la mitad del periodo de la órbita, de forma recíproca, el ángulo que la partícula cubre será desde $\theta = 0$ a $\theta = \pi/2$. Así,

$$\mathcal{T} = 2\int_0^{\pi/2}\frac{dt}{d\theta}d\theta = 2\int_0^{\pi/2}\frac{d\theta}{\dot{\theta}}$$

$$\mathcal{T} = 2\int_0^{\pi/2}d\theta\,\frac{mr^2}{l} = \frac{2m}{l}\int_0^{\pi/2}r^2(\theta)\,d\theta = \frac{2m}{l}\int_0^{\pi/2}2R^2(1+\cos 2\theta)\,d\theta$$

$$\mathcal{T} = \frac{4mR^2}{l}\int_0^{\pi/2}1+\cos 2\theta\ d\theta = \frac{4mR^2}{l}\cdot\frac{\pi}{2} = \frac{2\pi mR^2}{l}$$

d) Teniendo $r=\sqrt{2}R\,(1+\cos 2\theta)^{1/2}$ y $x=r\cos\theta$ y $y=r\,\mathrm{sen}\,\theta$, obtendremos,

$$x=\sqrt{2}R(1+\cos 2\theta)\cos\theta \qquad y=\sqrt{2}R(1+\cos 2\theta)\,\mathrm{sen}\,\theta$$

$$\dot{x}=\frac{dx}{d\theta}\frac{d\theta}{dt}=\frac{dx}{d\theta}\dot{\theta} \qquad \dot{y}=\frac{dy}{d\theta}\frac{d\theta}{dt}=\frac{dy}{d\theta}\dot{\theta}$$

$$\dot{x}=\sqrt{2}R\left(-\frac{\mathrm{sen}\,2\theta\cos\theta}{(1+\cos 2\theta)^{1/2}}-\sqrt{1+\cos 2\theta}\,\mathrm{sen}\,\theta\right)\dot{\theta} \qquad \dot{y}=\sqrt{2}R\left(-\frac{\mathrm{sen}\,2\theta\,\mathrm{sen}\,\theta}{(1+\cos 2\theta)^{1/2}}+\sqrt{1+\cos 2\theta}\cos\theta\right)\dot{\theta}$$

$$V^2=\dot{r}^2+r^2\dot{\theta}^2=\frac{2R^2\,\mathrm{sen}^2\theta\,\dot{\theta}^2}{(1+\cos 2\theta)}+2R^2(1+\cos 2\theta)\dot{\theta}^2=\dot{x}^2+\dot{y}^2$$

· La partícula pasa por el centro de fuerzas cuando $r=0$, así, $1+\cos 2\theta=0 \Rightarrow \cos 2\theta=-1$, o bien, $2\theta=\pi \Rightarrow \theta=\frac{\pi}{2}$. Así, $(1+\cos 2\theta)^{1/2}$ se aproximará a cero, por lo tanto $dx/d\theta$ y $dy/d\theta$ divergirán. De esta manera $\dot{x}$, $\dot{y}$ y V tienden al infinito en tanto que la partícula pasa por el centro de masas.

·Ejercicio #4: Orbitas circulares y parabólicas

a) Las ecuaciones que describen las órbitas son, respectivamente

$$\text{circulo} \quad r=\frac{c^2}{mK} \quad , \text{parábola} \quad r=\frac{c^2}{mK}\left(\frac{1}{1+\cos\theta}\right).$$

El perihelio de la parábola ocurre en $\theta=0$, así $\cos 0=1$, por lo tanto,

$$r=\frac{c^2}{mK}\left(\frac{1}{2}\right), \quad r=\frac{c^2}{2mK}$$, lo cual representa la mitad del radio del círculo.

b) Para la parábola se tiene que,

$$\frac{dr}{dt}=\dot{r}=\frac{d}{dt}\left(\frac{c^2}{mK}\left(\frac{1}{1+\cos\theta}\right)\right)=\frac{c^2}{mK}\left(\frac{\mathrm{sen}\,\theta}{(1+\cos\theta)^2}\right)\dot{\theta}=r\dot{\theta}\frac{\mathrm{sen}\,\theta}{1+\cos\theta},$$

así,

$$V^2=\dot{r}^2+r^2\dot{\theta}^2$$

$$V^2=r^2\dot{\theta}^2\left(\frac{\mathrm{sen}^2\theta}{(1+\cos\theta)^2}+1\right)=r^2\dot{\theta}^2\left(\frac{\mathrm{sen}^2\theta+1+2\cos\theta+\cos^2\theta}{(1+\cos\theta)^2}\right)$$

$$V^2=r^2\dot{\theta}^2\left(\frac{1+1+2\cos\theta}{1+\cos\theta}\right)=2r^2\dot{\theta}^2\left(\frac{1}{1+\cos\theta}\right)$$

Reemplazando tenemos que,

$$V^2 = \frac{2mKr^3\dot{\theta}^2}{l^2}$$ o bien, sabiendo que $l = mr^2\dot{\theta}^2$,

$$V^2 = \frac{2K}{mr} \Rightarrow V_p = \sqrt{\frac{2K}{mr}}$$

Por otro lado, vemos que para el círculo tendremos $\dot{r}=0$, así

$$V^2 = \cancel{\dot{r}^2} + r^2\dot{\theta} = \frac{l^2}{m^2r^2} = \frac{K}{mr}$$ bajo la consideración que $\frac{K}{r} = \frac{l^2}{mr^2}$

Igualando términos vemos que, $V_c = \sqrt{\frac{K}{mr}}$

$$V_p = \sqrt{2}\,V_c$$

• Ejercicio #5: Meteoro

Usando el teorema de conservación de la energía vemos que,

$$\frac{mV'^2}{2} - \frac{K}{r'} = \frac{mV^2}{2} - \frac{K}{r}$$

Vemos que,

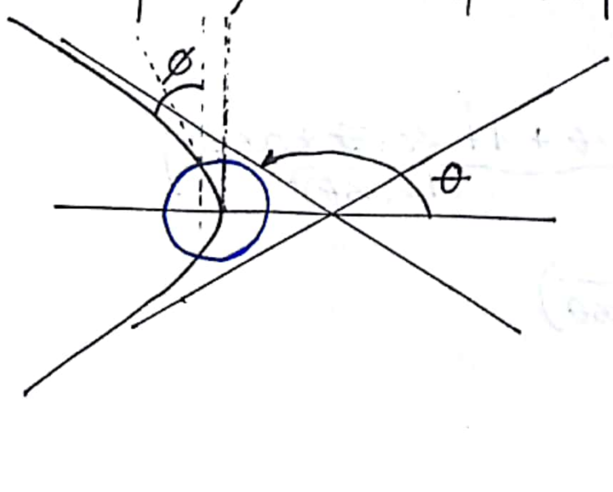
$$\lim_{r'\to\infty} \frac{K}{r'} = 0$$, por lo tanto,

$$\frac{mV'^2}{2} = \frac{mV^2}{2} - \frac{K}{r}$$, así, $V' = \sqrt{V^2 - \frac{2K}{mr}}$

Para el caso concreto $V = -\frac{GMm}{r}$, por lo que,

$$V' = \sqrt{V^2 - \frac{2GM}{r}}$$

Ahora bien, para ϕ' veremos que θ representa el ángulo máximo que hace el meteorito cuando $r\to\infty$,



Vemos entonces que ϕ' será $\phi' = \theta - \frac{\pi}{2}$ donde $\theta = \cos^{-1}(-\frac{1}{\epsilon})$, y sabemos que la excentricidad para una hipérbola viene dada por $\epsilon = \sqrt{1 + \frac{2El^2}{mK^2}}$

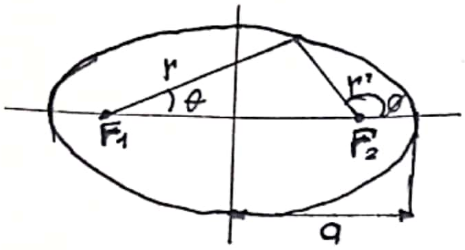
Finalmente,

$$\phi' = \cos^{-1}\left(-\frac{1}{\sqrt{1+\frac{2El^2}{mK^2}}}\right) - \frac{\pi}{2}$$

Ejercicio #6: Órbita elíptica

En una elipse, la suma de la distancia de cada punto a partir de los dos focos es constante y proporcional a dos veces el semieje mayor de la elipse, esto es,

$$r + r' = 2a = cte$$



Por otra parte, si el problema se plantea de tal forma que la velocidad se exprese en función de coordenadas polares θ y ϕ a partir de los focos tendríamos que,

$$V^2 = \dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 = \dot{r}'^2 + r'^2\dot{\phi}^2$$

Tomando $\frac{d(r+r')}{dt}$ vemos que $\dot{r} + \dot{r}' = 0$, por tanto $\dot{r} = -\dot{r}'$ o bien $\dot{r}^2 = \dot{r}'^2$. Sustituyendo vemos que

$$\cancel{\dot{r}^2} + r^2\dot{\theta}^2 = \cancel{\dot{r}'^2} + r'^2\dot{\phi}^2, \text{ así } r^2\dot{\theta}^2 = r'^2\dot{\phi}^2.$$

Sabiendo que $\dot{\theta} = \frac{l}{mr^2}$ vamos a tener que, $r^2\left(\frac{l}{mr^2}\right)^2 = r'^2\dot{\phi}^2$, por consiguiente,

$$\frac{\cancel{r^2}\, l^2}{m^2 r^{\cancel{4}}} = r'^2\dot{\phi}^2 \Rightarrow \dot{\phi}^2 = \frac{l^2}{m^2 r^2 r'^2}$$

$$\Rightarrow \dot{\phi} = \frac{l}{m r r'}$$

Con este resultado a la mano se debe probar que el producto rr' es constante a primer orden e. Recalcando que, para una elipse, tendremos las siguientes relaciones,

$$r' = 2a - r, \quad r = \frac{l^2}{mk}\,\frac{1}{1+e\cos\theta}, \quad a(1-e^2) = \frac{l^2}{mk}$$

Si expandimos utilizando las expresiones anteriores y considerando solo el primer orden de e tendremos,

$$r = a(\cancel{1-e^2})\frac{1}{1+e\cos\theta} = a(1+e\cos\theta)^{-1} = a(1 - e\cos\theta + \cos^2\theta\, e^2 + O(e^3))$$

$$r \approx a(1 - e\cos\theta).$$

Vemos entonces que,

$$r' = 2a - a(1-e\cos\theta) = a(1+e\cos\theta)$$

Computando el producto rr' vemos que,

$$rr' = a(1+e\cos\theta)\,a(1-e\cos\theta) = a^2(1-\cancel{e^2}\cos^2\theta) \approx a^2$$

Así,

$$rr' \approx a^2, \text{ por lo que tenemos } \dot{\phi} = \frac{l}{ma^2}.$$

La velocidad angular es uniforme con respecto al foco vacío.

• Ejercicio #7: Precesión de Mercurio

Teniendo un potencial de la forma $V(r) = -\frac{k}{r} + \frac{h}{r^2}$, podemos emplear $\frac{d^2u}{d\theta^2} + u = -\frac{m}{l^2}\frac{d}{d\theta}V\left(\frac{1}{u}\right)$ tal que

$$\frac{d^2u}{d\theta^2} + u = -\frac{m}{l^2}\frac{d}{d\theta}(-ku + hu^2) = \frac{mk}{l^2} - \frac{2hm}{l^2}u$$

o bien,

$$\frac{d^2u}{d\theta^2} + u\left(1 + \frac{2hm}{l^2}\right) = \frac{mk}{l^2}$$

Si tomamos $\chi^2 = 1 + \frac{2hm}{l^2}$ tendremos $\frac{d^2u}{d\theta^2} + \chi^2 u = \frac{mk}{l^2}$, o bien

$$\frac{d^2}{d\theta^2}\left(u - \frac{mk}{l^2}\right) + \chi^2\left(u - \frac{mk}{\chi^2 l^2}\right) = 0$$

$$\gamma = u - \frac{mk}{\chi^2 l^2}$$

$$\frac{d^2\gamma}{d\theta^2} + \chi^2\gamma = 0$$

Resolviendo tendríamos que, con el ansatz exponencial $\gamma(\theta) = e^{\lambda\theta}$

$$\frac{d^2}{d\theta^2}(e^{\lambda\theta}) + \chi^2 e^{\lambda\theta} = 0$$

$$\lambda^2 e^{\lambda\theta} + \chi^2 e^{\lambda\theta} = 0 \Rightarrow (\lambda^2 + \chi^2)e^{\lambda\theta} = 0 \Rightarrow \lambda^2 + \chi^2 = 0$$

Tenemos,

$$\lambda = i\chi,\ \lambda = -i\chi \Rightarrow \gamma(\theta) = C_1 e^{-i\chi\theta} + C_2 e^{i\chi\theta}$$

$$\text{o bien, } \gamma(\theta) = u - \frac{mk}{\chi^2 l^2} = C_1\cos\chi\theta + C_2\,\text{sen}\,\chi\theta$$

Cuando el planeta está en el perihelio $\chi\theta = 0$, por lo tanto,

$$u - \frac{mk}{\chi^2 l^2} = C_1 \cancel{\cos 0}^{1} + \cancel{C_2 \operatorname{sen} 0}^{0}$$

$$u - \frac{mk}{\chi^2 l^2} = C_1 = \frac{1}{r_{min}} - \frac{mk}{\chi^2 l^2}$$

De la misma manera, en el perihelio $du/d\theta = 0$, por lo tanto,

$$0 = \frac{du}{d\theta} = \frac{d}{d\theta}\left(C_1 \cos \chi\theta + C_2 \operatorname{sen} \chi\theta + \frac{mk}{\chi^2 l^2}\right) \Rightarrow \chi C_2 \cos \chi\theta = 0 \Rightarrow C_2 = 0$$

Así, tenemos que,

$$u - \frac{mk}{\chi^2 l^2} = \left(\frac{1}{r_{min}} - \frac{mk}{\chi^2 l^2}\right) \cos \chi\theta$$

o bien,

$$r = \frac{\chi^2 l^2}{mk} \frac{1}{1 + e\cos\chi\theta}$$

$$\frac{1}{r} - \frac{mk}{\chi^2 l^2} = \left(\frac{1}{r_{min}} - \frac{mk}{\chi^2 l^2}\right)\cos\chi\theta$$

$$A = \frac{mk}{\chi^2 l^2} \; ; \; B = \frac{1}{r_{min}} - A$$

$$\frac{1}{r} = A + B\cos\chi\theta$$

$$r = 1/A + B\cos\chi\theta$$

$$r = 1\Big/\frac{mk}{\chi^2 l^2} + \left(\frac{1}{r_{min}} - \frac{mk}{\chi^2 l^2}\right)\cos\chi\theta$$

$$r = \frac{\chi^2 l^2}{mk} \frac{1}{1 + \left(\frac{\chi^2 l^2}{mk r_{min}} - 1\right)\cos\chi\theta}$$

$$r = \frac{\chi^2 l^2}{mk} \frac{1}{1 + e\cos\chi\theta},$$

$$e = \frac{\chi^2 l^2}{mk r_{min}} - 1$$

Esta expresión entonces representará la elipse que precesa, Ahora bien, para hallar la velocidad de precesión se necesita encontrar θ cuando $\chi\theta = 2\pi$, esto es,

$$\theta = \frac{2\pi}{\chi} = \frac{2\pi}{\sqrt{1 + \frac{2hm}{l^2}}} = 2\pi\left(1 + \frac{2hm}{l^2}\right)^{-\frac{1}{2}}$$

Expandiendo tenemos,

$$\left(1 + \frac{2hm}{l^2}\right)^{-1/2} \approx 1 - \frac{1}{2}\frac{2hm}{l^2} + \frac{(-1/2)(-3/2)}{2}\left(\frac{2hm}{l^2}\right)^2 - \dots$$

Entonces,

$$\theta = 2\pi\left(1 - \frac{hm}{l^2}\right) = 2\pi - \frac{2\pi hm}{l^2}$$

Esto quiere decir que la precesion ocurre $\Delta\theta = \frac{2\pi hm}{l^2}$ cada vez: o bien, si tomamos el periodo como T, podemos ver que $\dot{\Omega} = \frac{2\pi mh}{l^2 T}$ //

Ahora bien, para el caso de Mercurio tendremos que,

$$e^2 = 1 - \frac{l^2}{mKa}$$

$$\frac{l^2}{m} = Ka(1-e^2)$$

con

$$\dot{\Omega} = \frac{2\pi m h}{l^2 T} = \frac{2\pi h}{T} \cdot \frac{1}{Ka(1-e^2)}$$, y con $\eta = \frac{h}{Ka}$, tendremos,

$$\dot{\Omega} = \frac{2\pi}{T} \cdot \frac{h}{Ka} \cdot \frac{1}{(1-e^2)} = \frac{2\pi}{T} \eta \frac{1}{(1-e^2)}$$

o bien,

$$\eta = \frac{\dot{\Omega} T (1-e^2)}{2\pi}$$, reemplazando los valores numéricos vamos a tener que,

$\dot{\Omega} = 40''/\text{siglo}$, $T = 0.24$ años , $e = 0.206$

$$\dot{\Omega} = 40''/\text{siglo} \times \frac{1\,\text{siglo}}{100\,\text{años}} \times \frac{1'}{60''} \frac{1^\circ}{60'} \times \frac{\pi\,\text{rad}}{180^\circ} \approx 1.9392\times 10^{-6}\,\text{rad/año}$$

$$\underline{\eta \approx 7\times 10^{-8}} \Longleftarrow \eta = \frac{1.9392\times 10^{-4}\,\text{rad/año}\ 0.24\,\text{año} \cdot (1-0.206^2)}{2\pi\,\text{rad}}$$

• Ejercicio #8: Cociente entre la masa de la Tierra y la masa del Sol

Considerando, para una órbita elíptica, se tiene que, $\frac{l^2}{mK} = a(1-e^2)$ y $r = \frac{a(1-e^2)}{1+e\cos\theta}$, así;

$$r = \frac{l^2}{mK} \frac{1}{1+e\cos\theta}$$, asumimos que las excentricidades Sol-Tierra y Tierra-Luna son muy pequeñas ($e_{\odot-\oplus} \approx 0.0167$, $e_{\oplus-☾} \approx 0.0549$), así

$$r = \frac{l^2}{mK} \cancel{\frac{1}{1+e\cos\theta}} = \frac{l^2}{mK}$$

Entonces,

$$r_{\odot-\oplus} = \frac{l_\oplus^2}{m_\oplus K_{\odot-\oplus}} \quad , \quad r_{\oplus-☾} = \frac{l_☾^2}{m_☾ K_{\oplus-☾}}$$

Siendo $\odot$ = Sol, $\oplus$ = Tierra y ☾ = Luna.

6

Tendremos también que $l = mr^2\dot\theta$ y $k = GmM$, tendremos

$$\frac{r_{\odot-\oplus}}{r_{\oplus-☾}} = \frac{\dfrac{l_\oplus^2}{m_\oplus k_{\odot-\oplus}}}{\dfrac{l_☾^2}{m_☾ k_{\oplus-☾}}} = \frac{l_\oplus^2 m_☾ k_{\oplus-☾}}{l_☾^2 m_\oplus k_{\odot-\oplus}}$$

$$\frac{r_{\odot-\oplus}}{r_{\oplus-☾}} = \frac{\cancel{m_\oplus^2} r_{\odot-\oplus}^4 \cancel{G} M_\oplus \cancel{m_☾} \cancel{m_☾} \dot\theta_\oplus^2}{\cancel{m_☾^2} r_{\oplus-☾}^4 \cancel{G} M_\odot \cancel{m_\oplus} \cancel{m_\oplus} \dot\theta_☾^2} = \frac{M_\oplus r_{\odot-\oplus}^4 \dot\theta_\oplus^2}{M_\odot r_{\oplus-☾}^4 \dot\theta_☾^2}$$

$$\frac{\cancel{r_{\odot-\oplus}}}{\cancel{r_{\oplus-☾}}} = \frac{M_\oplus r_{\odot-\oplus}^{\cancel{4}} \dot\theta_\oplus^2}{M_\odot r_{\oplus-☾}^{\cancel{4}} \dot\theta_☾^2} \Rightarrow \frac{M_\odot}{M_\oplus} = \frac{r_{\odot-\oplus}^3 \dot\theta_\oplus^2}{r_{\oplus-☾}^3 \dot\theta_☾^2}$$

Siendo $\dot\theta = \frac{2\pi}{T}$, así,

$$\frac{M_\odot}{M_\oplus} = \frac{r_{\odot-\oplus}^3 \dfrac{(2\pi)^2}{T_\oplus^2}}{r_{\oplus-☾}^3 \dfrac{(2\pi)^2}{T_☾^2}} = \frac{r_{\odot-\oplus}^3 T_☾^2}{r_{\oplus-☾}^3 T_\oplus^2},$$

entonces,

$r_{\odot-\oplus} = 1.49\times10^8\,Km$, $r_{\oplus-☾} = 3.8\times10^5\,Km$, $T_\oplus = 365.25$ días, $T_☾ = 27.3$ días

$$\frac{M_\odot}{M_\oplus} = \frac{(1.49\times10^8\,Km)^3\,(27.3d)^2}{(3.8\times10^5\,Km)^3\,(365.25d)^2} = 336785.09$$

Con datos de la masa de La Tierra y la masa del sol tenemos,

$$\frac{M_\odot}{M_\oplus} = \frac{1.99\times10^{30}\,Kg}{5.97\times10^{24}\,Kg} = 333333.33$$

Vemos que el resultado es consistente.

Ejercicio #9: Ángulos de Euler

Con la matriz de rotación $A = BCD$ y $B = \begin{bmatrix} \cos\psi & \operatorname{sen}\psi & 0 \\ -\operatorname{sen}\psi & \cos\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$; $C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & \operatorname{sen}\theta \\ 0 & -\operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$

y $D = \begin{bmatrix} \cos\phi & \operatorname{sen}\phi & 0 \\ -\operatorname{sen}\phi & \cos\phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ tendremos,

$$A = \begin{bmatrix} \cos\psi & \operatorname{sen}\psi & 0 \\ -\operatorname{sen}\psi & \cos\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & \operatorname{sen}\theta \\ 0 & -\operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\phi & \operatorname{sen}\phi & 0 \\ -\operatorname{sen}\phi & \cos\phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} \cos\psi & \operatorname{sen}\psi & 0 \\ -\operatorname{sen}\psi & \cos\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\phi & \operatorname{sen}\phi & 0 \\ -\operatorname{sen}\phi\cos\theta & \cos\phi\cos\theta & \operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\phi\operatorname{sen}\theta & -\cos\phi\operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

Finalmente,

$$A = \begin{bmatrix} \cos\psi\cos\phi - \cos\theta\operatorname{sen}\phi\operatorname{sen}\psi & \cos\psi\operatorname{sen}\phi + \cos\theta\cos\phi\operatorname{sen}\psi & \operatorname{sen}\psi\operatorname{sen}\theta \\ -\operatorname{sen}\psi\cos\phi - \cos\theta\operatorname{sen}\phi\cos\psi & -\operatorname{sen}\psi\operatorname{sen}\phi + \cos\theta\cos\phi\cos\psi & \cos\psi\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\phi & -\operatorname{sen}\theta\cos\phi & \cos\theta \end{bmatrix}$$

Se demuestra que las condiciones de ortogonalidad se cumplen en función de,

$\hat{i}\cdot\hat{i} = (\cos\psi\cos\phi - \operatorname{sen}\psi\operatorname{sen}\phi\cos\theta)^2 + (-\operatorname{sen}\psi\cos\phi - \operatorname{sen}\phi\cos\psi\cos\theta)^2 + (\operatorname{sen}\theta\cos\phi)^2 = \underline{\underline{1}}$

$\hat{j}\cdot\hat{j} = (\cos\psi\operatorname{sen}\phi + \operatorname{sen}\psi\cos\theta\cos\phi)^2 + (-\operatorname{sen}\psi\operatorname{sen}\phi + \cos\phi\cos\phi\cos\theta)^2 + (-\operatorname{sen}\theta\cos\phi)^2 = \underline{\underline{1}}$

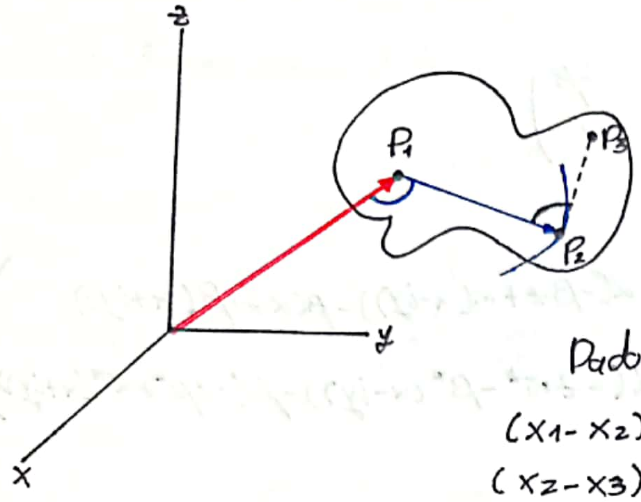
$\hat{k}\cdot\hat{k} = (\operatorname{sen}\psi\operatorname{sen}\theta)^2 + (\cos\psi\operatorname{sen}\theta)^2 + (\cos\theta)^2 = \underline{\underline{1}}$

$\hat{i}\cdot\hat{j} = (\cos\psi\cos\phi - \operatorname{sen}\psi\operatorname{sen}\phi\cos\theta)(\cos\psi\operatorname{sen}\phi + \operatorname{sen}\psi\cos\theta\cos\phi) + (-\operatorname{sen}\psi\cos\phi - \operatorname{sen}\phi\cos\psi\cos\theta)\cdot$
$(-\operatorname{sen}\psi\operatorname{sen}\phi + \cos\phi\cos\phi\cos\theta) + (\operatorname{sen}\theta\cos\phi)(-\operatorname{sen}\theta\cos\phi) = \underline{\underline{0}}$

$\hat{i}\cdot\hat{k} = (\cos\psi\cos\phi - \operatorname{sen}\psi\operatorname{sen}\phi\cos\theta)(\operatorname{sen}\psi\operatorname{sen}\theta) + (-\operatorname{sen}\psi\cos\phi - \operatorname{sen}\phi\cos\psi\cos\theta)(\cos\psi\operatorname{sen}\theta) +$
$+ (\operatorname{sen}\theta\cos\phi)(\cos\theta) = \underline{\underline{0}}$

$\hat{j}\cdot\hat{k} = (\cos\psi\operatorname{sen}\phi + \operatorname{sen}\psi\cos\theta\cos\phi)(\operatorname{sen}\psi\operatorname{sen}\theta) + (-\operatorname{sen}\psi\operatorname{sen}\phi + \cos\phi\cos\phi\cos\theta)(\cos\psi\operatorname{sen}\theta)$
$+ (-\operatorname{sen}\theta\cos\phi)(\cos\theta) = \underline{\underline{0}}$

• Ejercicio #10: Conteo de los grados de libertad de un cuerpo rígido



Si tenemos tres puntos no colineales de un cuerpo rígido, los cuales están fijos en el espacio, el cuerpo entero estará fijo. Si establecemos (x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2) y (x_3, y_3, z_3) como las coordenadas de esos puntos tendremos un total de 9 grados de libertad.

Dado que se habla de un cuerpo rígido se cumple que,

$$(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2 = cte,$$
$$(x_2 - x_3)^2 + (y_2 - y_3)^2 + (z_2 - z_3)^2 = cte$$
$$(x_3 - x_2)^2 + (y_3 - y_2)^2 + (z_3 - z_2)^2 = cte$$

por tanto 3 coordenadas se pueden expresar en función de las otras 6.

Se necesitan entonces 6 coordenadas independientes para describir el movimiento, esto es, hay 6 grados de libertad.

Alternativamente, se puede decir que, para fijar un punto del cuerpo rígido (por ejemplo P_1) se requieren 3 coordenadas. Para fijar la posición del punto P_2 tan solo se necesitan 2 coordenadas (por ejemplo, usando los cosenos directores del eje adyacente a P_1). Una rotación alrededor de este eje se puede describir por una coordenada angular. El número total de coordenadas requeridas, esto es, el número de grados de libertad es, $3 + 2 + 1 = 6$.

• Ejercicio # 11: Parámetros de Caley - Klein

Se debe relacionar la rotación $A \in SO(3)$ con la transformación $Q \in SU(2)$, para ello usaremos la correspondencia entre $SU(2)$ y $so(3)$, esto es, para un vector V,

$$V = V_x\sigma_x + V_y\sigma_y + V_z\sigma_z = \begin{pmatrix} V_z & V_x - iV_y \\ V_x + iV_y & -V_z \end{pmatrix}$$

con σ_i siendo las matrices de Pauli.

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\Downarrow$$

$$V' = Q V Q^\dagger$$

Siendo $Q = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta^* & \alpha^* \end{pmatrix}$ y $Q^\dagger = \begin{pmatrix} \alpha^* & -\beta \\ \beta^* & \alpha \end{pmatrix}$

Con esto en consideración vamos a tener que,

$$\begin{pmatrix} z' & x'-iy' \\ x'+iy' & -z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta^* & \alpha^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z & x-iy \\ x+iy & -z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha^* & -\beta \\ \beta^* & \alpha \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \alpha^*(\alpha z + \beta(x+iy)) + \beta^*(-\beta z + \alpha(x-iy)) & \alpha(-\beta z + \alpha(x-iy)) - \beta(\alpha z + \beta(x+iy)) \\ \beta^*(-z\alpha^* - \beta^*(x-iy)) + \alpha^*(-z\beta^* + \alpha^*(x+iy)) & \alpha(-z\alpha^* - \beta^*(x-iy)) - \beta(-z\beta^* + \alpha^*(x+iy)) \end{pmatrix}$$

Condensando $x+iy$ como X_+ y $x-iy$ como X_-, tendremos,

$$= \begin{pmatrix} \alpha^*\alpha z + \alpha^*\beta X_+ + \beta^*\beta z + \alpha\beta^* X_- & -\alpha\beta z + \alpha\alpha X_- - \beta\alpha z + \beta\beta X_+ \\ -\alpha^*\beta^* z - \beta^*\beta^* X_- + \alpha^*\beta^* z + \alpha^*\alpha^* X_+ & -\alpha\alpha^* z - \alpha\beta^* X_- + \beta\beta^* z + \beta\alpha^* X_+ \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} z' & x'_- \\ x'_+ & -z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\alpha^2 - \beta^2) z + \alpha\beta^* X_- + \alpha^*\beta X_+ & -2\beta^*\alpha^* z + (\beta^*)^2 X_- + \alpha^2 X_+ \\ 2\beta\alpha z - (\beta)^2 X_+ + \alpha^2 X_- & -((\alpha^2 - \beta^2) z + \alpha\beta^* X_- + \alpha^*\beta X_+ \end{pmatrix}$$

Reconocemos entonces que,

$$z' = (\alpha^2 - \beta^2) z + \alpha\beta^* X_- + \alpha^*\beta X_+$$

$$z' = (\alpha^2 - \beta^2) z + \alpha\beta^* x - i\alpha\beta^* y + \alpha^*\beta x + i\alpha^*\beta y$$

$$z' = (\alpha^2 - \beta^2) z + (\alpha\beta^* + \alpha^*\beta) x + i(\alpha^*\beta - \alpha\beta^*) y$$

De manera recíproca, vemos que, en $SO(3)$ sucede que

$$\vec{z}' = A\vec{z} \Rightarrow \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \Longrightarrow \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z \\ a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z \end{bmatrix}$$

Por lo que,

$$z' = a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z$$

Igualando podemos ver que,

$$a_{31} = \alpha\beta^* + \alpha^*\beta \quad , \quad a_{32} = i(\alpha^*\beta - \alpha\beta^*) \quad , \quad a_{33} = \alpha^2 - \beta^2$$

• Ejercicio # 12:

Se quiere encontrar el elemento de $SU(2)$ que se mapea a una rotación en $SO(3)$, específicamente se habla de una matriz A tal que la rotación sucede en el eje x, esto es,

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ 0 & \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

Para una rotación alrededor de un eje unitario $\hat{n} = (n_x, n_y, n_z)$ y ángulo θ, el correspondiente elemento de $SU(2)$ obedece que,

$$Q(\theta, \hat{n}) = \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) I + i\operatorname{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right)(n_x\sigma_x + n_y\sigma_y + n_z\sigma_z)$$

Siendo σ_i nuevamente las matrices de Pauli.

Aplicamos teniendo en cuenta que $A(\theta)$ y $\hat{n} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, entonces,

$$Q(\theta, \hat{n}) = \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) I + i\operatorname{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right)\left(1 \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \cancel{0\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}} + \cancel{0\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}}\right)$$

$$Q = \cos(\theta/2)\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + i\operatorname{sen}(\theta/2)\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$Q = \begin{pmatrix} \cos\theta/2 & 0 \\ 0 & \cos\theta/2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & i\operatorname{sen}\theta/2 \\ i\operatorname{sen}\theta/2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta/2 & i\operatorname{sen}\theta/2 \\ i\operatorname{sen}\theta/2 & \cos\theta/2 \end{pmatrix}$$

Por lo tanto,

$$A \mapsto Q \quad \text{con } A \in SO(3) \text{ y } Q \in SU(2).$$

Más aún se puede ver que

$$Q Q^{\dagger} = \begin{bmatrix} \cos\theta/2 & i\operatorname{sen}\theta/2 \\ i\operatorname{sen}\theta/2 & \cos\frac{\theta}{2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \cos\frac{\theta}{2} & -i\operatorname{sen}\frac{\theta}{2} \\ -i\operatorname{sen}\frac{\theta}{2} & \cos\frac{\theta}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I$$

mostrando que $Q \in SU(2)$.

• Ejercicio # 13:

Se debe hacer notar, antes que nada, que SO(3) es el grupo de todas las rotaciones en el espacio tridimensional $\mathbb{R}^3$, el cual está compuesto por matrices ortogonales 3×3 con determinante igual a 1 y goza de conectividad sencilla.

Por su parte, el grupo de matrices unitarias 2×2 con determinante igual a 1, que actúa en $\mathbb{C}^2$ es SU(2), el cual goza de conectividad doble.

Se dice que el isomorfismo entre SO(3) y SU(2) es doble-evaluado debido a que, para cada rotación en SO(3) existen exactamente dos elementos en SU(2) que se mapean a esa rotación. Estos elementos son Q y −Q en SU(2) y ambos representan la misma rotación en SO(3). Así,

$$\pi(Q) = \pi(-Q) = A$$

donde $A \in SO(3)$ es una matriz de rotación y $Q, -Q \in SU(2)$ son las dos preimágenes bajo el mapeo π.

Otra forma de verlo es que, cuando se tiene una rotación de 360° en SO(3), el objeto regresa a su posición inicial en el espacio tridimensional. Sin embargo, en SU(2), esa rotación completa de 360° corresponde a un elemento distinto de la identidad. Se requiere una rotación de 720° en SU(2) para que el sistema regrese a su configuración original.

• Ejercicio # 14:

Con la trasformación de similaridad a la matriz ϵ tal que $B\epsilon B^{-1}$, se puede demostrar que:

a) Se preserva la traza de tal forma que con $\epsilon' = B\epsilon B^{-1}$ $tr(\epsilon') = tr(\epsilon)$.

$$tr(\epsilon') = tr(B\epsilon B^{-1})$$
$$tr(\epsilon') = tr(\epsilon B^{-1}B)$$
$$tr(\epsilon') = tr(\epsilon I)$$
$$tr(\epsilon') = tr(\epsilon) \qquad \square$$

b) si es ortogonal

$\hookrightarrow (\epsilon')^T = (\epsilon')^{-1}$ preserva la antisimetría $(\epsilon')^T = -\epsilon'$

$$(\epsilon')^T = (B\epsilon B^{-1})^T = (B^{-1})^T \epsilon^T B^T$$

$$B^T = B^{-1} \longrightarrow (\epsilon')^T = B\epsilon^T B^{-1} \Rightarrow (\epsilon')^T = B(-\epsilon)B^{-1} = -B\epsilon B^{-1}$$

$$\epsilon^T = -\epsilon$$

$$(\epsilon')^T = -B\epsilon B^{-1} = -\epsilon'$$
$$(\epsilon')^T = -\epsilon' \qquad \square$$

c) Si es unitaria preserva la hermeticidad $(\epsilon')^{\dagger} = \epsilon'$;

$$(\epsilon')^{\dagger} = (B\epsilon B^{-1})^{\dagger}$$
$$(\epsilon')^{\dagger} = (B^{-1})^{\dagger}\epsilon^{\dagger}B^{\dagger}$$
$$(\epsilon')^{\dagger} = B\epsilon^{\dagger}B^{-1} \longleftarrow B^{\dagger} = B^{-1}$$
$$(\epsilon')^{\dagger} = B\epsilon B^{-1} \longleftarrow \epsilon^{\dagger} = \epsilon$$
$$(\epsilon')^{\dagger} = B\epsilon B^{-1} = \epsilon' \qquad \square$$

• Ejercicio #16:

Demostrar que, siendo B una matriz ortogonal y $d\vec{\Omega}$ el vector que codifica las rotaciones infinitesimales entonces $d\vec{\Omega}' = B \cdot d\vec{\Omega}$.

• Si consideramos que

$$\epsilon = \begin{bmatrix} 0 & d\Omega_3 & -d\Omega_2 \\ -d\Omega_3 & 0 & d\Omega_1 \\ d\Omega_2 & -d\Omega_1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d\Omega_1 \\ d\Omega_2 \\ d\Omega_3 \end{bmatrix}$$

en términos de índices esto es,

$$\epsilon_{mn} = \epsilon_{mnj}\, d\Omega_j \qquad \text{con} \quad \epsilon_{mnj} = \begin{cases} +1 & \text{perm. par}(1,2,3) \\ -1 & \text{perm. impar}(1,2,3) \\ 0 & \text{otro (repetidos)} \end{cases}$$

Por el ejercicio anterior sabemos que,

$$\epsilon' = B\epsilon B^{-1} = B\epsilon B^{T}.$$

así,

$$\epsilon'_{kl} = b_{km}\, b_{ln}\, \epsilon_{mn}$$

igualmente
$$\epsilon'_{kl} = \epsilon_{kli}\, d\Omega'_i$$

Entonces,

$$\epsilon_{kli}\, d\Omega'_i = b_{km}\, b_{ln}\, \epsilon_{mn}$$
$$\epsilon_{kli}\, d\Omega'_i = b_{km}\, b_{ln}\, \epsilon_{mnj}\, d\Omega_j$$

Ahora bien, el determinante de B lo podemos expresar como,

$\epsilon_{mnj}|B| = \epsilon_{pqi}\, b_{pm}\, b_{qn}\, b_{ij}$, dado que $|B|^2 = 1$ tendremos que $\epsilon_{mnj} = \epsilon_{pqi}\, b_{pm}\, b_{qn}\, b_{ij}|B|$

Así,

$$\epsilon_{kli}\, d\Omega'_i = \epsilon_{pqi}\, b_{km} b_{pm} b_{ln} b_{qn} b_{ij} |B|\, d\Omega_j$$

$$\epsilon_{kli}\, d\Omega'_i = \epsilon_{pqi}\, \delta_{kp} \delta_{lq} b_{ij} |B|\, d\Omega_j$$

$$\epsilon_{kli}\, d\Omega'_i = \epsilon_{kli}\, b_{ij} |B|\, d\Omega_j$$

O bien,

$$d\Omega'_i = |B|\, b_{ij}\, d\Omega_j$$

Dado que es una matriz de rotación, y no de inversión, tendremos que, $|B| = 1$, por lo que,

$$d\Omega'_i = b_{ij}\, d\Omega_j$$

lo que es identicamente a.

$$d\vec{\Omega}' = B \cdot d\vec{\Omega} \qquad \square$$

• Ejercicio #17:

Del ejercicio inmediatamente anterior se pudo demostrar que, la transformación para $d\Omega$ sigue

$$d\Omega'_i = |B|\, b_{ij}\, d\Omega_j$$

ahora bien, un vector regular obedece a

$$x' = b_{ij}\, x_j$$

si se aplica una inversión $S = -\delta_{ij}$, se puede ver que todas las componentes de $\vec{x}$ cambian de signo, esto es,

$$x' = -\delta_{ij}\, x_j = -x_i$$

Para el caso de $d\Omega$, se tiene que, si se aplica la misma transformación, se tiene,

$$d\Omega'_i = |S| - \delta_{ij}\, d\Omega_j, \quad \det(S) = -1, \text{ por lo que } \quad d\Omega'_i = -1 \cdot -\delta_{ij}\, d\Omega_j$$

$d\Omega'_i = \delta_{ij}\, d\Omega_j = d\Omega_i \rightarrow$ Las componentes de $d\Omega$ no cambian de signo ante una inversión, es un pseudovector.

• Ejercicio #18:

Si $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$ es un pseudovector, su transformación $\vec{L}'$ ante una inversión no debería cambiar de signo. Siendo $S = -\delta_{ij}$, tenemos,

$$\vec{L}' = S\vec{L}$$
$$\vec{L}' = S[\vec{r} \times \vec{p}]$$

Dado que la matriz ~~es ortogonal~~, esta no altera el espacio subyacente donde se realiza la inversión, por lo tanto,

$$\vec{L}' = S\vec{r} \times S\vec{p}$$

$$\begin{bmatrix} L_1' \\ L_2' \\ L_3' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} L_1' \\ L_2' \\ L_3' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -r_1 \\ -r_2 \\ -r_3 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} -p_1 \\ -p_2 \\ -p_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (-r_2)(-p_3) - (-r_3)(-p_2) \\ (-r_3)(-p_1) - (-r_1)(-p_3) \\ (-r_1)(-p_2) - (-r_2)(-p_1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_2p_3 - r_3p_2 \\ r_3p_1 - r_1p_3 \\ r_1p_2 - r_2p_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{bmatrix}$$

lo cual es idénticamente a $\vec{L}$ por definición. Así, se demuestra que $\vec{L}' = S\vec{L} = \vec{L}$, siendo $\vec{L}$ un pseudovector.

• Ejercicio #19: Velocidades angulares vs ángulos de Euler

Tenemos que $\vec{\omega} = \dot{\phi}\,\hat{n}_\phi + \dot{\theta}\,\hat{n}_\theta + \dot{\psi}\,\hat{n}_\psi$, donde $\hat{n}$ son los vectores unitarios con respecto a z, la línea de nodos y z' respectivamente. Se puede establecer entonces que

$$\hat{n}_\phi = \hat{z}$$
$$\hat{n}_\theta = D^T\hat{x} \qquad \text{con } D^T = \begin{bmatrix} \cos\phi & -\operatorname{sen}\phi & 0 \\ \operatorname{sen}\phi & \cos\phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad y \quad C^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ 0 & \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$
$$\hat{n}_\psi = D^TC^T\hat{z}$$

$$\hat{n}_\theta = D^T \hat{x} = \hat{x}\cos\phi + \hat{y}\,\text{sen}\,\phi$$

$$\hat{n}_\psi = D^T C^T \hat{z} = \hat{x}\,\text{sen}\,\theta\,\text{sen}\,\phi - \hat{y}\,\text{sen}\,\theta\cos\phi + \hat{z}\cos\theta$$

Así,

$$\vec{\omega} = \dot{\phi}\hat{z} + \dot{\theta}(\hat{x}\cos\phi + \hat{y}\,\text{sen}\,\phi) + \dot{\psi}(\hat{x}\,\text{sen}\,\theta\,\text{sen}\,\phi - \hat{y}\,\text{sen}\,\theta\cos\phi + \hat{z}\cos\theta)$$

$$\vec{\omega} = \dot{\phi}\hat{z} + \dot{\theta}\cos\phi\,\hat{x} + \dot{\theta}\,\text{sen}\,\phi\,\hat{y} + \dot{\psi}\,\text{sen}\,\theta\,\text{sen}\,\phi\,\hat{x} - \dot{\psi}\,\text{sen}\,\theta\cos\theta\,\hat{y} + \dot{\psi}\cos\theta\,\hat{z}$$

Por consiguiente,

$$\vec{\omega} = (\dot{\theta}\cos\phi + \dot{\psi}\,\text{sen}\,\theta\,\text{sen}\,\phi)\hat{x} + (\dot{\theta}\,\text{sen}\,\phi - \dot{\psi}\,\text{sen}\,\theta\cos\phi)\hat{y} + (\dot{\psi}\cos\theta + \dot{\phi})\hat{z}$$

O bien,

$$\omega_x = \dot{\theta}\cos\phi + \dot{\psi}\,\text{sen}\,\theta\,\text{sen}\,\phi$$

$$\omega_y = \dot{\theta}\,\text{sen}\,\phi - \dot{\psi}\,\text{sen}\,\theta\cos\phi$$

$$\omega_z = \dot{\psi}\cos\theta + \dot{\phi}$$

- Ejercicio #20: Algebra de Lie de SO(3)

Se tiene que probar que $[M_i, M_j] = \epsilon_{ijk} M_k$, siendo los generadores de rotación infinitesimal M

$$M_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad M_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad M_3 = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Podemos ver que cuando $i=j \Rightarrow [\,,\,]=0$, para $i \neq j$ tendríamos 123, 132, 213, 231, 312, 321

Para 123 se tiene que

$$[M_1, M_2] = M_1 M_2 - M_2 M_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$[M_1, M_2] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = M_3 \quad \text{Se cumple//}$$

Podemos observar que,

$$[M_1, M_2]^T = [M_2^T, M_1^T] = [M_2, M_1] = -M_3$$

dado que son matrices antisimétricas.

$$[M_2, M_1] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = -M_3 = -\begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{Se cumple//}$$

Siguiendo el mismo razonamiento se puede ver que,

$$[M_2, M_3] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = M_1 \quad \text{Se cumple//}$$

$$[M_1, M_3] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = -M_2 \quad \text{Se cumple//}$$

• Ejercicio #21:

El teorema de Euler reza: El desplazamiento más general de un cuerpo rígido con un punto fijo es una rotación alrededor de algún eje que pase por el punto fijo.

Así, si A es la matriz propia ortogonal que toma al cuerpo rígido de su posición inicial a una configuración subsecuente, el teorema se puede probar en tanto que exista un vector no nulo tal que

$$A\vec{x} = \vec{x}$$

o bien,

$$(A - I)\vec{x} = 0$$

Si la matriz A es invertible, entonces,

$$(A-I)^{-1}(A-I)^{-1}\vec{x} = 0$$

$$I\vec{x} = 0$$

$$\vec{x} = 0$$

Con este resultado vemos que existirá un vector no nulo $\vec{x} \neq 0$ si $(A-I)$ no tiene inversa, esto es,

$$\det(A - I) = 0$$

A partir de la identidad

$$A - I = A - AA^T = A(I - A^T)$$

$$A(I - A^T) = -A(A - I)^T = (-I)A(A - I)^T$$

Se puede decir que,

$$\det(A - I) = \det(-I)\det A \det(A - I) = -\det A \det(A - I)$$

Sabiendo que $\det(A) = 1$, entonces,

$$\det(A - I) = -\det(A - I)$$

Esto también implica que en la ecuación,

$$A\vec{x} = \vec{x}\lambda$$

al menos uno de los eigenvalores deberá ser igual a $\lambda = +1$.

CamScanner