Tarea 6

Holman Daniel Quintero Salazar
hd.quinterosalazar@ugto.mx
Relatividad General - Dr. Luis Arturo Ureña López

25/11/24

Nota 1

Para la realización de esta tarea se elaboró un *snippet* de `Python` empleando la librería `SymPy`, esto con el fin de agilizar y corroborar los cálculos de los símbolos de Christoffel y los componentes del tensor de Riemann.
Se hará referencia a dicho código en algunos ejercicios. El código es de autoría propia y se hizo de manera exclusiva para la entrega de esta asignación. El código está comentado y es accesible en el siguiente enlace: `RG6_HD`.

Ejercicio 1. En coordenadas polares, calcular el tensor de curvatura de Riemann de la esfera de radio unitario, cuya métrica está dada por:

$$g_{\alpha\beta} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \operatorname{sen}^2(\theta) \end{bmatrix}$$

Solución. Si tenemos la métrica de una esfera unitaria de la forma,

$$g_{\alpha\beta} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \sin^2\theta \end{bmatrix}$$

podremos ver que, de hecho, $g^{\alpha\beta}$ será g^{-1}. Por lo tanto,

$$g^{\alpha\beta} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sin^2\theta} \end{bmatrix}.$$

Para calcular los símbolos de Christoffel usaremos la relación,

$$\Gamma^i_{kl} = \frac{1}{2} g^{im} \left(\frac{\partial g_{mk}}{\partial x^l} + \frac{\partial g_{ml}}{\partial x^k} - \frac{\partial g_{kl}}{\partial x^m} \right)$$

, usando el *snippet* mencionado en la Nota 1 podremos observar que los símbolos de Christoffel en forma de arreglo asumirán los valores,

$$\Gamma^0_{ij} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -\sin\theta\cos\theta \end{bmatrix}$$
$$\Gamma^1_{ij} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{\cos\theta}{\sin\theta} \\ \frac{\cos\theta}{\sin\theta} & 0 \end{bmatrix}$$

, por lo que concluimos que los símbolos de Christoffel distintos de cero serán $\Gamma^{\theta}_{\phi\phi} = -\sin\theta\cos\theta$, $\Gamma^{\phi}_{\theta\phi} = \Gamma^{\phi}_{\phi\theta} = \cos\theta/\sin\theta^*$.

Una vez calculados los símbolos de Christoffel podemos calcular el tensor de Riemann de la forma,

$$R^{\alpha}_{\beta\mu\nu} = \partial_\mu \Gamma^{\alpha}_{\beta\nu} - \partial_\nu \Gamma^{\alpha}_{\beta\mu} \Gamma^{\alpha}_{\sigma\mu} \Gamma^{\sigma}_{\beta\nu} - \Gamma^{\alpha}_{\sigma\nu} \Gamma^{\sigma}_{\beta\mu}$$

lo que nos dará como resultado,

$$\begin{aligned} R^{\theta}_{\phi\theta\phi} &= \sin^2\theta \\ R^{\theta}_{\phi\phi\theta} &= -\sin^2\theta \\ R^{\phi}_{\theta\theta\phi} &= -1 \\ R^{\phi}_{\theta\phi\theta} &= 1 \end{aligned}$$

los demás componentes son iguales a 0.

Una vez calculados los componentes distintos a cero del tensor de Riemann, procedemos a calcular los componentes en su forma totalmente covariante de la forma,

$$R_{\alpha\beta\mu\nu} = g_{\alpha\rho} R^{\rho}_{\beta\mu\nu}$$

así, vemos que,

$$\begin{aligned} R_{\theta\phi\theta\phi} &= \sin^2\theta \\ R_{\theta\phi\phi\theta} &= -\sin^2\theta \\ R_{\phi\theta\theta\phi} &= -\sin^2\theta \\ R_{\phi\theta\phi\theta} &= \sin^2\theta \end{aligned}$$

Finalmente, podemos aplicar las relaciones de antisimetría y pares a los componentes de la forma totalmente covariante del tensor de Riemann, esto es,

$$R_{\rho\sigma\mu\nu} = -R_{\rho\sigma\nu\mu} \;,\; R_{\rho\sigma\mu\nu} = -R_{\sigma\rho\mu\nu}$$
$$R_{\rho\sigma\mu\nu} = R_{\mu\nu\rho\sigma}$$

lo que da como resultado $R_{\theta\phi\theta\phi} = \sin^2\theta$.

*Se puede corroborar la consistencia de los resultados de este ejercicio ejecutando el *snippet* mencionado en la Nota 1 con la métrica 29.

Ejercicio 2. Una variedad 4-dimensional tiene coordenadas (u,v,w,p) bajo la cual la métrica tiene componentes $g_{vu} = g_{uv} = g_{ww} = g_{pp} = 1$, todos los demás componentes independientes desaparecen.

a. Demuestre que la variedad es plana y la signatura +2.

b. El resultado en *a.* implica que la variedad debe ser un espacio tiempo de Minkowski. Encuentre una transformación de coordenadas a las coordenadas habituales (t,x,y,z). (Puede que le resulte útil la sugerencia de calcular $\vec{e}_v \cdot \vec{e}_v$ y $\vec{e}_u \cdot \vec{e}_u$.)

Solución.

a. Con la información que proporciona el enunciado del ejercicio podemos expresar la métrica de la forma,

$$g_{\alpha\beta} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Al insertar dicha métrica en el *snippet* de la Nota 1 para calcular los símbolos de Christoffel y el tensor de Riemann vemos que $\Gamma^i_{jk} = 0$ y $R^{\alpha}_{\beta\mu\nu} = 0$.

Por otro lado, vemos que la signatura de una métrica se pude expresar como δ^{μ}_{μ}. Empleando el convenio de suma de Einstein para la métrica en cuestión vemos que efectivamente $\delta^{\mu}_{\mu} = +2$, de forma similar a la métrica de Minkowski.

b.

Ejercicio 3. Calcule 20 componentes independientes de $R_{\alpha\beta\mu\nu}$ para una variedad con elemento de línea $ds^2 = -e^{2\Phi}dt^2 + e^{2\Lambda}dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2)$, donde Φ y Λ son funciones arbitrarias de la coordenada r unicamente. (Primero, identifique las coordenadas y los componentes de $g_{\alpha\beta}$; luego calcule $g^{\alpha\beta}$ y los símbolos de Christoffel. Luego decida los índices de los 20 componentes de $R_{\alpha\beta\mu\nu}$ que desea calcular y calculelos. Recuerde que puede deducir los 236 componentes restantes de esos 20.)

Solución. Con un elemento de línea de la forma $ds^2 = -e^{2\Phi}dt^2 + e^{2\Lambda}dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2)$ el tensor métrico será

$$g_{\alpha\beta} = \begin{bmatrix} -e^{2\Phi(r)} & 0 & 0 & 0 \\ 1 & e^{2\Lambda(r)} & 0 & 0 \\ 1 & 0 & r^2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & r^2\sin^2\theta \end{bmatrix}$$

podremos ver que, de hecho, $g^{\alpha\beta}$ será g^{-1}. Por lo tanto,

$$g^{\alpha\beta} = \begin{bmatrix} -e^{-2\Phi(r)} & 0 & 0 & 0 \\ 1 & e^{-2\Lambda(r)} & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \frac{1}{r^2} & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \frac{1}{r^2\sin^2\theta} \end{bmatrix}.$$

Para calcular los símbolos de Christoffel usaremos la relación,

$$\Gamma^i_{kl} = \frac{1}{2}g^{im}\Big(\frac{\partial g_{mk}}{\partial x^l} + \frac{\partial g_{ml}}{\partial x^k} - \frac{\partial g_{kl}}{\partial x^m}\Big)$$

, usando el *snippet* mencionado en la Nota 1 podremos observar que los símbolos de Christoffel en forma de arreglo asumirán los valores,

$$\Gamma^0_{ij} = \begin{bmatrix} 0 & \Phi' & 0 & 0 \\ \Phi' & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\Gamma^1_{ij} = \begin{bmatrix} e^{2\Phi}e^{-2\Lambda}\Phi' & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \Lambda' & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -re^{-2\Lambda} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -re^{-2\Lambda}\sin^2\theta \end{bmatrix}$$

$$\Gamma^2_{ij} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{r} & 0 \\ 0 & \frac{1}{r} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\sin\theta\cos\theta \end{bmatrix}$$

$$\Gamma^3_{ij} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{r} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\cos\theta}{\sin\theta} \\ 0 & \frac{1}{r} & \frac{\cos\theta}{\sin\theta} & 0 \end{bmatrix}$$

, por lo que concluimos que los símbolos de Christoffel distintos de cero serán

$$\begin{aligned}
\Gamma^t_{tr} = \Phi' = \Gamma^t_{rt}, \\
\Gamma^r_{tt} = e^{2\Phi}e^{-2\Lambda}\Phi', \\
\Gamma^r_{rr} = \Lambda', \\
\Gamma^r_{\theta\theta} = -re^{-2\Lambda}, \\
\Gamma^r_{\phi\phi} = -re^{-2\Lambda}\sin^2\theta, \\
\Gamma^\theta_{r\theta} = \frac{1}{r} = \Gamma^\theta_{\theta r}, \\
\Gamma^\theta_{\phi\phi} = -\sin\theta\cos\theta, \\
\Gamma^\phi_{r\phi} = \frac{1}{r} = \Gamma^\phi_{\phi r}, \\
\Gamma^\phi_{\theta\phi} = \frac{\cos\theta}{\sin\theta} = \Gamma^\phi_{\phi\theta}.
\end{aligned}$$

Una vez calculados los símbolos de Christoffel podemos calcular el tensor de Riemann de la forma,

$$R^\alpha_{\beta\mu\nu} = \partial_\mu\Gamma^\alpha_{\beta\nu} - \partial_\nu\Gamma^\alpha_{\beta\mu}\Gamma^\alpha_{\sigma\mu}\Gamma^\sigma_{\beta\nu} - \Gamma^\alpha_{\sigma\nu}\Gamma^\sigma_{\beta\mu}$$

lo que nos dará como resultado,

$$\begin{aligned}
R^t_{rtr} = -\Phi'^2 + \Phi'\Lambda' - \Phi'' \\
R^t_{rrt} = \Phi'^2 - \Phi'\Lambda' + \Phi'' \\
R^t_{\theta t\theta} = -re^{-2\Lambda}\Phi' \\
R^t_{\theta\theta t} = re^{-2\Lambda}\Phi' \\
R^t_{\phi t\phi} = -re^{-2\Lambda}\sin^2\theta\Phi' \\
R^t_{\phi\phi t} = re^{-2\Lambda}\sin^2\theta\Phi'
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
R^r_{ttr} = -e^{2\Phi}e^{-2\Lambda}\Phi'^2 + e^{2\Phi}e^{-2\Lambda}\Phi'\Lambda' - e^{2\Phi}e^{-2\Lambda}\Phi'' \\
R^r_{trt} = e^{2\Phi}e^{-2\Lambda}\Phi'^2 + e^{2\Phi}e^{-2\Lambda}\Phi'\Lambda' - e^{2\Phi}e^{-2\Lambda}\Phi'' \\
R^r_{\theta r\theta} = re^{-2\Lambda}\Lambda' \\
R^r_{\theta\theta r} = -re^{-2\Lambda}\Lambda' \\
R^r_{\phi r\phi} = re^{-2\Lambda}\sin^2\theta\Lambda' \\
R^r_{\phi\phi r} = -re^{-2\Lambda}\sin^2\theta\Lambda'
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
R^{\theta}_{tt\theta} &= -\frac{e^{2\Phi}e^{-2\Lambda}\Phi'}{r}\\
R^{\theta}_{t\theta t} &= \frac{e^{2\Phi}e^{-2\Lambda}\Phi'}{r}\\
R^{\theta}_{rr\theta} &= -\frac{\Lambda'}{r}\\
R^{\theta}_{r\theta r} &= \frac{\Lambda'}{r}\\
R^{\theta}_{\phi\theta\phi} &= \sin^2\theta - e^{-2\Lambda}\sin^2\theta\\
R^{\theta}_{\phi\phi\theta} &= -\sin^2\theta + e^{-2\Lambda}\sin^2\theta
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
R^{\phi}_{tt\phi} &= -\frac{e^{2\Phi}e^{-2\Lambda}\Phi'}{r}\\
R^{\phi}_{t\phi t} &= \frac{e^{2\Phi}e^{-2\Lambda}\Phi'}{r}\\
R^{\phi}_{rr\phi} &= -\frac{\Lambda'}{r}\\
R^{\phi}_{r\phi r} &= \frac{\Lambda'}{r}\\
R^{\phi}_{\theta\theta\phi} &= -1 + e^{-2\Lambda}\\
R^{\phi}_{\theta\phi\theta} &= 1 - e^{-2\Lambda}
\end{aligned}
$$

los demás componentes son iguales a 0.

Una vez calculados los componentes distintos a cero del tensor de Riemann, procedemos a calcular los componentes en su forma totalmente covariante de la forma,

$$R_{\alpha\beta\mu\nu} = g_{\alpha\rho}R^{\rho}_{\beta\mu\nu}$$

así, vemos que[†],

$$
\begin{aligned}
R_{trtr} &= -(-\Phi'^2 + \Phi'\Lambda' - \Phi'')e^{2\Phi}\\
R_{trrt} &= -(\Phi'^2 - \Phi'\Lambda' + \Phi'')e^{2\Phi}\\
R_{t\theta t\theta} &= -re^{-2\Phi}e^{-2\Lambda}\Phi'\\
R_{t\theta\theta t} &= re^{-2\Phi}e^{-2\Lambda}\Phi'\\
R_{t\phi t\phi} &= -re^{-2\Phi}e^{-2\Lambda}\sin^2\theta\Phi'\\
R_{t\phi\phi t} &= re^{-2\Phi}e^{-2\Lambda}\sin^2\theta\Phi'
\end{aligned}
$$

[†]Se puede corroborar la consistencia de los resultados de este ejercicio ejecutando el *snippet* mencionado en la Nota 1 con la métrica 35.

$$
\begin{aligned}
R_{rttr} &= (-e^{2\Phi}e^{-2\Lambda}\Phi'^2 + e^{2\Phi}e^{-2\Lambda}\Phi'\Lambda' - e^{2\Phi}e^{-2\Lambda}\Phi'')e^{2\Lambda} \\
R_{rtrt} &= (e^{2\Phi}e^{-2\Lambda}\Phi'^2 - e^{2\Phi}e^{-2\Lambda}\Phi'\Lambda' + e^{2\Phi}e^{-2\Lambda}\Phi'')e^{2\Lambda} \\
R_{r\theta r\theta} &= r\Lambda' \\
R_{r\theta\theta r} &= -r\Lambda' \\
R_{r\phi r\phi} &= r\sin^2\theta\Lambda' \\
R_{r\phi\phi r} &= -r\sin^2\theta\Lambda'
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
R_{\theta tt\theta} &= -re^{2\Phi}e^{-2\Lambda}\Phi' \\
R_{\theta t\theta t} &= re^{2\Phi}e^{-2\Lambda}\Phi' \\
R_{\theta rr\theta} &= -r\Lambda' \\
R_{\theta r\theta r} &= r\Lambda' \\
R_{\theta\phi\theta\phi} &= r^2(\sin^2\theta - e^{-2\Lambda}\sin^2\theta) \\
R_{\theta\phi\phi\theta} &= r^2(-\sin^2\theta + e^{-2\Lambda}\sin^2\theta)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
R_{\phi tt\phi} &= -re^{2\Phi}e^{-2\Lambda}\sin^2\theta\Phi' \\
R_{\phi t\phi t} &= re^{2\Phi}e^{-2\Lambda}\sin^2\theta\Phi' \\
R_{\phi rr\phi} &= -r\sin^2\theta\Lambda' \\
R_{\phi r\phi r} &= r\sin^2\theta\Lambda' \\
R_{\phi\theta\theta\phi} &= r^2(-1 + e^{-2\Lambda})\sin^2\theta \\
R_{\phi\theta\phi\theta} &= r^2(1 - e^{-2\Lambda})\sin^2\theta
\end{aligned}
$$

Finalmente, podemos aplicar las relaciones de antisimetría y pares a los componentes de la forma totalmente covariante del tensor de Riemann, esto es,

$$
\begin{aligned}
R_{\rho\sigma\mu\nu} = -R_{\rho\sigma\nu\mu}\ , \ R_{\rho\sigma\mu\nu} &= -R_{\sigma\rho\mu\nu} \\
R_{\rho\sigma\mu\nu} &= R_{\mu\nu\rho\sigma}
\end{aligned}
$$

lo que da como resultado

$$
\begin{aligned}
R_{trtr} &= -(-\Phi'^2 + \Phi'\Lambda' - \Phi'')e^{2\Phi} \\
R_{t\theta t\theta} &= -re^{-2\Phi}e^{-2\Lambda}\Phi' \\
R_{t\phi t\phi} &= -re^{-2\Phi}e^{-2\Lambda}\sin^2\theta\Phi' \\
R_{r\theta r\theta} &= r\Lambda' \\
R_{r\phi r\phi} &= r\sin^2\theta\Lambda' \\
R_{\theta\phi\theta\phi} &= r^2(\sin^2\theta - e^{-2\Lambda}\sin^2\theta)\,.
\end{aligned}
$$

Ejercicio 4. Calcule todos los símbolos de Christoffel para la métrica dada por $ds^2 = -(1+2\phi)dt^2 + (1-2\phi)(dx^2+dy^2+dz^2)$, a términos de primer orden en ϕ. Asuma que ϕ es una función general de t,x,y y z.

Solución. Con la métrica de la forma,

$$g_{\alpha\beta} = \begin{bmatrix} -(1+2\phi) & 0 & 0 & 0 \\ 1 & (1-2\phi) & 0 & 0 \\ 1 & 0 & (1-2\phi) & 0 \\ 1 & 0 & 0 & (1-2\phi) \end{bmatrix}$$

la métrica inversa será,

$$g^{\alpha\beta} = \begin{bmatrix} -(1+2\phi)^{-1} & 0 & 0 & 0 \\ 1 & (1-2\phi)^{-1} & 0 & 0 \\ 1 & 0 & (1-2\phi)^{-1} & 0 \\ 1 & 0 & 0 & (1-2\phi)^{-1} \end{bmatrix}$$

expandiendo el parámetro ϕ a términos de primer orden tendremos que,

$$(1-2\phi)^{-1} \approx 1 + 2\phi + O(\phi^2)$$

por consiguiente,

$$g^{\alpha\beta} = \begin{bmatrix} -(1-2\phi) & 0 & 0 & 0 \\ 1 & (1+2\phi) & 0 & 0 \\ 1 & 0 & (1+2\phi) & 0 \\ 1 & 0 & 0 & (1+2\phi) \end{bmatrix}$$

Para calcular los símbolos de Christoffel usaremos la relación,

$$\Gamma^i_{kl} = \frac{1}{2} g^{im} \Big(\frac{\partial g_{mk}}{\partial x^l} + \frac{\partial g_{ml}}{\partial x^k} - \frac{\partial g_{kl}}{\partial x^m} \Big)$$

, teniendo en cuenta que ϕ es una función general de t,x,y y z. Empleando la última sección del *snippet* mencionado en la Nota 1 se concluye que los símbolos de Christoffel tendrán la forma,

$$\begin{aligned} \Gamma^t_{t\alpha} &= \frac{\partial\phi}{\partial x^\alpha}\frac{1}{1+2\phi} \approx \frac{\partial\phi}{\partial x^\alpha}(1-2\phi) \\ \Gamma^\alpha_{t\alpha} &= -\frac{\partial\phi}{\partial t}\frac{1}{1-2\phi} \approx -\frac{\partial\phi}{\partial t}(1+2\phi) \\ \Gamma^i_{tt} &= \frac{\partial\phi}{\partial x^i}\frac{1}{1-2\phi} \approx \frac{\partial\phi}{\partial x^i}(1+2\phi) \\ \Gamma^t_{ii} &= -\frac{\partial\phi}{\partial t}\frac{1}{1+2\phi} \approx -\frac{\partial\phi}{\partial t}(1-2\phi) \\ \Gamma^i_{jj} = -\Gamma^j_{ij} = -\Gamma^i_{ii} &= \frac{\partial\phi}{\partial x^i}\frac{1}{1-2\phi} \approx \frac{\partial\phi}{\partial x^i}(1+2\phi) \end{aligned}$$

Igualmente, se tiene que $\Gamma^0_{00} = \phi_{,t}$, $\Gamma^0_{0i} = \phi_{,i}$, $\Gamma^0_{ij} = -\phi_{,t}\delta_{ij}$, $\Gamma^i_{00} = \phi_{,i}$, $\Gamma^i_{0j} = -\phi_{,t}\delta_{ij}$, $\Gamma^i_{jk} = \delta_{jk}\phi_{,i} - \delta_{ij}\phi_{,k} - \delta_{ik}\phi_{,j}$.

Ejercicio 5. *a.* Calcule en unidades geométricas:

1. el potencial newtoniano ϕ del Sol en la superficie solar, radio de 6.960×10^8m;
2. el potencial newtoniano ϕ del Sol en el radio de la órbita de la Tierra, $r = 1\text{UA} = 1.496 \times 10^{11}$m;
3. el potencial newtoniano ϕ de la Tierra en su superficie, radio de 6.371×10^6m;
4. la velocidad de la Tierra en su órbita alrededor del Sol.

b. Debería haber encontrado que la respuesta en 2. es mayor que en 3. Entonces, ¿por qué en la Tierra sentimos la atracción gravitacional de la Tierra mucho más que la del Sol?

c. Demuestre que una órbita circular alrededor de un cuerpo de masa M tiene una velocidad orbital, en teoría newtoniana, de $\mathbf{v}^2 = -\phi$, donde ϕ es el potencial newtoniano.

Solución.

Teniendo que,

$$1 = \frac{G}{c^2} = \frac{6.674 \times 10^{-11}\text{m}^3\text{kg}^{-1}\text{s}^{-2}}{2.998 \times 10^8\text{m}\,\text{s}^{-1}} = 7.425 \times 10^{-28}\text{m}\,\text{kg}^{-1}$$

a. 1.

$$\phi = \frac{GM_\odot}{r} = \frac{1 \cdot 1.476 \times 10^3\text{m}}{6.960 \times 10^8\text{m}} \approx 2.1206 \times 10^{-6}$$

2.

$$\phi = \frac{GM_\odot}{r} = \frac{1 \cdot 1.476 \times 10^3\text{m}}{1.496 \times 10^{11}\text{m}} \approx 9.8663 \times 10^{-9}$$

3.

$$\phi = \frac{GM_\oplus}{r} = \frac{1 \cdot 4.434 \times 10^{-3}\text{m}}{6.371 \times 10^6\text{m}} \approx 6.9596 \times 10^{-10}$$

4.

$$v = \sqrt{\phi} = \sqrt{\frac{GM_\odot}{r}} = \sqrt{\frac{1 \cdot 1.476 \times 10^3\text{m}}{1.496 \times 10^{11}\text{m}}} \approx 9.9329 \times 10^{-5}$$

b. Lo que los cuerpos experimentan no es el potencial, es la aceleración producida por este último. Si se considera que la aceleración es obtenida a partir de un potencial a través de $\vec{g} = -\nabla\phi$ se tendrá que,

$$\vec{a} = \vec{g} = -\nabla\phi = -\frac{\partial}{\partial r}(\frac{GM}{r}) = -\frac{GM}{r^2} = -\frac{\phi}{r}$$

Comparando los valores para la Tierra y el Sol tenemos que,

$$\vec{g}_\odot = -\frac{\phi_\odot}{r} = -\frac{9.8663 \times 10^{-9}}{1.496 \times 10^{11}\text{m}} = 6.5951 \times 10^{-20}\text{m}^{-1}$$
$$\vec{g}_\oplus = -\frac{\phi_\oplus}{r} = -\frac{6.9596 \times 10^{-10}}{6.371 \times 10^{6}\text{m}} = 1.0923 \times 10^{-16}\text{m}^{-1}$$

Así, se puede ver por qué, a pesar de que $\phi_\odot > \phi_\oplus$, tendremos $\vec{g}_\oplus >> \vec{g}_\odot$ para un objeto en la Tierra.

c. Con $\vec{F}_\text{g}$ la fuerza gravitacional y $\vec{F}_\text{c}$ la fuerza centrípeta en una órbita circular tendremos que,

$$\begin{aligned} \vec{F}_\text{g} &= \vec{F}_\text{c} \\ \frac{GMm}{r^2}\hat{r} &= m\frac{v^2}{r}\hat{r} \\ \frac{GM}{r} &= \mathbf{v}^2 \\ -\phi &= \mathbf{v}^2 \qquad \square \end{aligned}$$