

ESTRUCTURA GALÁCTICA Y DINÁMICA ESTELAR

Referencia: Capítulo 2 de Binney & Tremaine (*Galactic Dynamics*)

Potencial Gravitacional

Modelos de Potenciales Gravitacionales

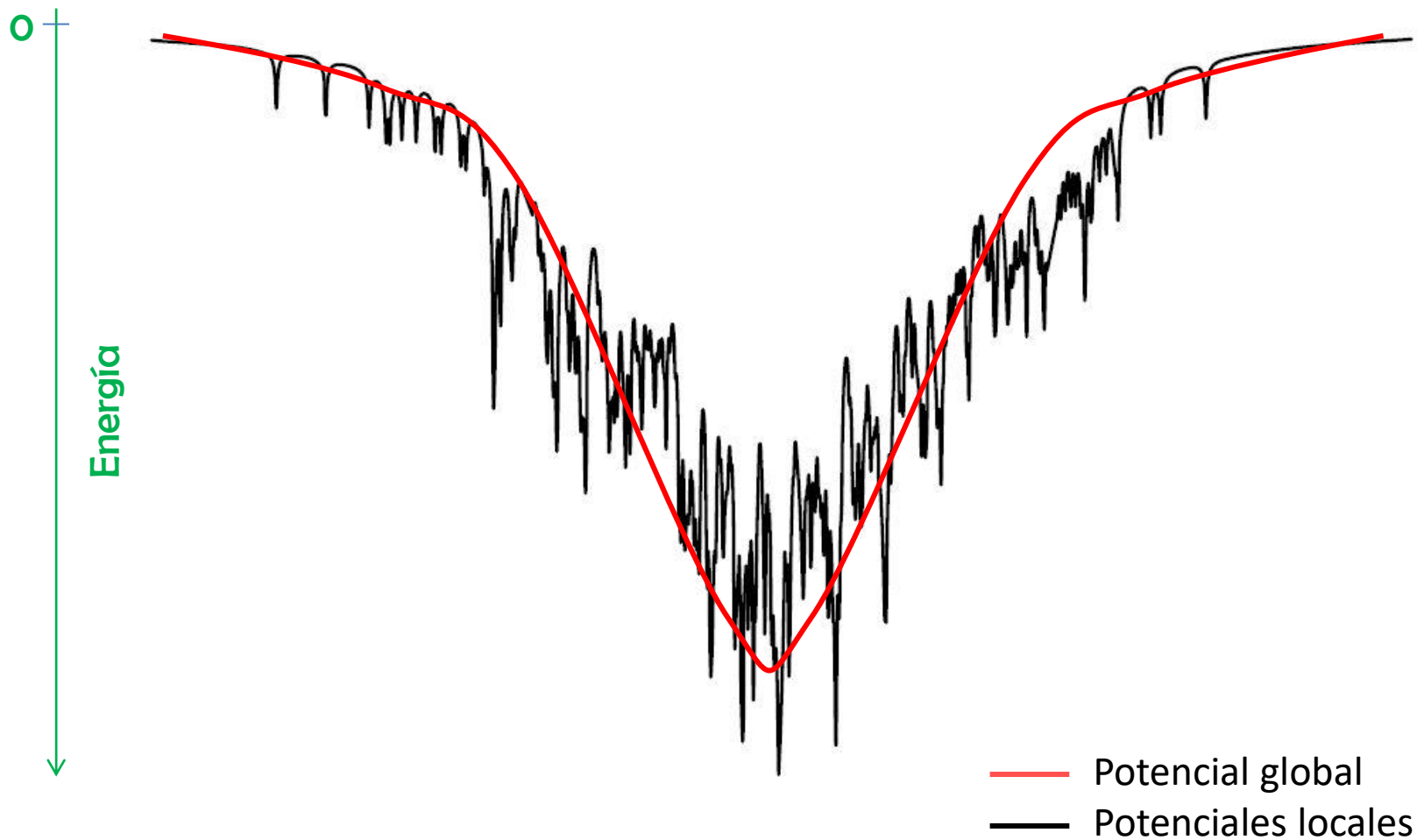
Estamos interesados en **sistemas estelares** (cúmulos de estrellas, componentes de la Vía-Láctea, galaxias, y hasta grupos y cúmulos de galaxias), donde las estrellas son tratadas como **masas puntuales** (sus tamaños son pequeños comparados a las separaciones entre ellas).

Para cuerpos mayores que los Planetas Enanos (o satélites grandes, como la Luna), las interacciones nucleares y eléctricas son normalmente despreciables. También los campos magnéticos normalmente actúan en situaciones muy específicas, afectando gases ionizados en especial. Luego, la interacción que conduce la **evolución dinámica** de los sistemas estelares es esencialmente la **gravitacional**.

Otro punto importante es que normalmente el **potencial** es más sencillo de determinarse que la fuerza, especialmente porque se trata de un **escalar**. Teniéndose el escalar, normalmente es directa la obtención de la fuerza (por ejemplo tomándose el gradiente del potencial en el caso gravitacional, que es obviamente un campo conservativo).

El potencial gravitacional de un sistema puede ser descompuesto en una componente suave (**global**) y los potenciales individuales de las estrellas, nubes, cúmulos, etc (**locales**).

Ilustración del “pozo de potencial” de un sistema estelar.



Aproximación de perfiles de masa a partir de perfiles de luminosidad

Lo primero que hay que conocer es la distribución de masa del sistema:

$$\rho(\vec{r}) = \frac{d\mathcal{M}}{d\mathcal{V}} = \frac{d\mathcal{M}(\vec{r})}{d^3\vec{r}} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} d\mathcal{M}(\vec{r}) &= \rho(\vec{r}) d^3\vec{r} \\ \mathcal{M}(R) &= \int_0^R \rho(r) 4\pi r^2 dr \end{aligned}$$

(considerando simetría esférica). El perfil de densidad de masa, en términos observacionales, está relacionado con la distribución proyectada de luminosidad:

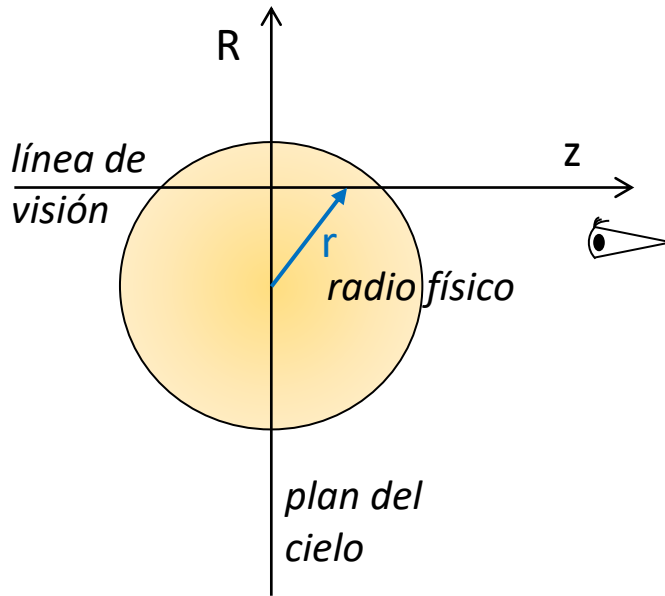
$$\rho(r) = \Upsilon(r) j(r)$$

donde: $\rho(r) \rightarrow$ perfil de densidad de masa

$\Upsilon(r) \rightarrow$ perfil de la razón masa-luminosidad

$j(r) \rightarrow$ perfil de densidad de luminosidad

Perfiles de brillo superficial



$$r^2 = R^2 + z^2 \quad \Rightarrow \quad z^2 = r^2 - R^2$$

$$z = \sqrt{r^2 - R^2}$$

$$dz = \frac{2r}{\sqrt{r^2 - R^2}} dr$$

$$\Sigma(R) \equiv \int_{-\infty}^{\infty} j(R, z) dz$$

$$\Sigma(R) = \int_0^R j(r) \frac{2r}{\sqrt{r^2 - R^2}} dr$$

$$\Sigma(R) = 2 \int_0^R \frac{\rho(r)}{\Upsilon(r)} \frac{r}{\sqrt{r^2 - R^2}} dr$$

Esa integral es conocida como “*Integral de Abel*”, y es invertible:

$$\frac{\rho(r)}{\Upsilon(r)} = -\frac{1}{\pi} \int_0^r \frac{d\Sigma(R)}{dR} \frac{dR}{\sqrt{R^2 - r^2}}$$

es decir, si observamos $\Sigma(R)$ y tenemos $\Upsilon(r)$ podemos obtener $\rho(r)$. Hay que checar que $\rho(r) > 0$ para $\forall r$.

Ejemplos de perfiles de brillo superficial

Sistemas esferoidales (cúmulos globulares, galaxias elípticas, bulbos de galaxias espirales y lenticulares, cúmulos de galaxias, etc):

- Perfil de *Hubble-Reynolds* (1930)

$$\Sigma(R) = \Sigma_0 \left[\frac{R}{R_c} + 1 \right]^{-2}$$

- Perfil de *King* (1962)

$$\Sigma(R) = \Sigma_0 \left[\left(\frac{R}{R_c} \right)^2 + 1 \right]^{-1}$$

- Perfil de *de Vaucouleurs* (1948)

$$\Sigma(R) = \Sigma_e \exp \left\{ -7.66925 \left[\left(\frac{R}{R_e} \right)^{1/4} - 1 \right] \right\}$$

Sistemas discoidales (galaxias espirales, galaxias lenticulares)

- Perfil exponencial (*Freeman*, 1970)

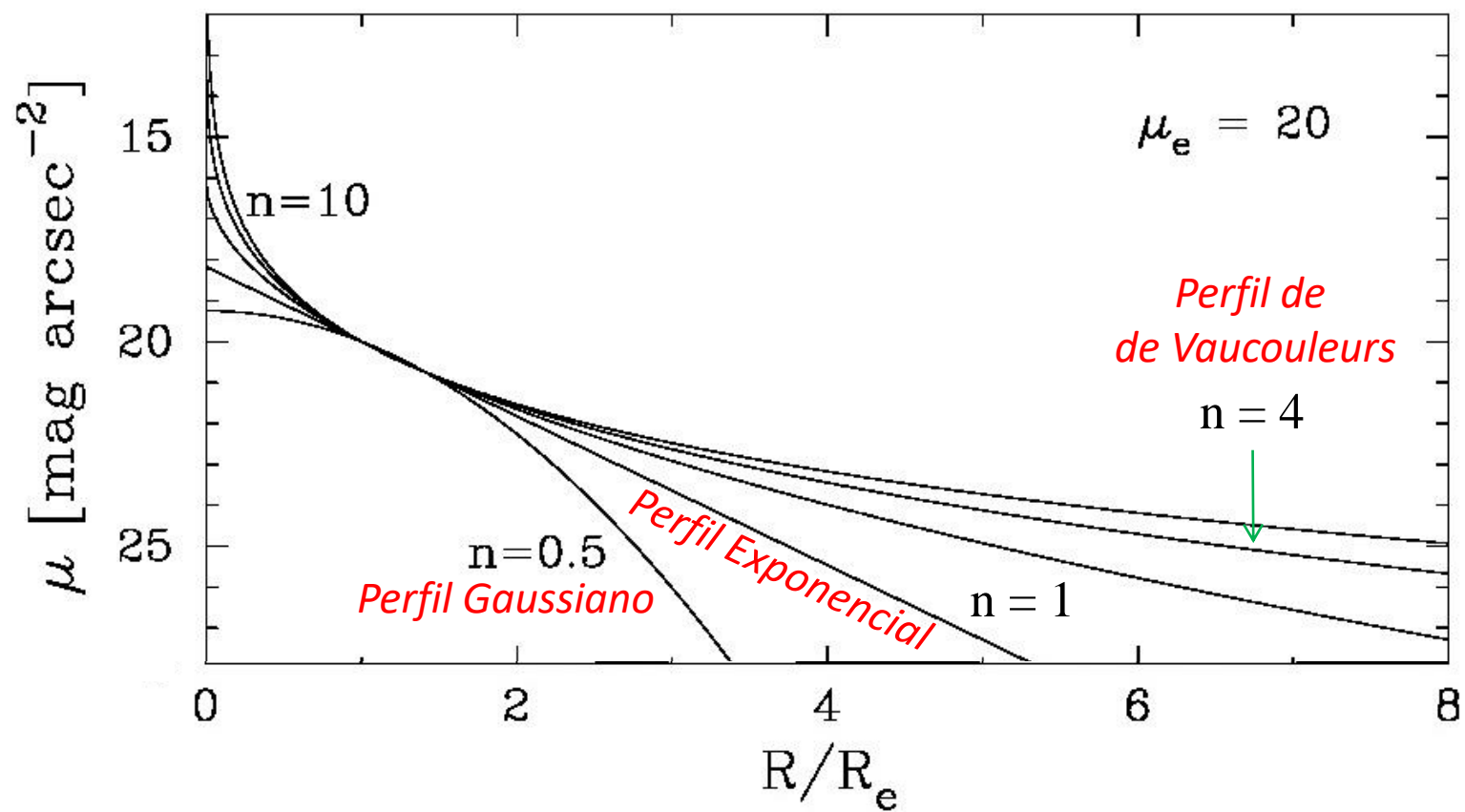
$$\Sigma(R) = \Sigma_0 \exp \left(-\frac{R}{h} \right)$$

Perfil generalizado de *Sérsic* (1968)

discos: $n=1$, $b_1=1.68$

esferoides: $n=4$, $b_4=7.67$

$$\Sigma(R) = \Sigma_e \exp \left\{ -b_n \left[\left(\frac{R}{R_e} \right)^{1/n} - 1 \right] \right\}$$



Calculo vectorial: recordatorio

$\vec{\nabla} \rightarrow$ operador nabra

$\vec{r} = r \hat{r} \rightarrow$ vector

	$\vec{\nabla} r = \hat{r}$	$\vec{\nabla} \left(\frac{1}{r} \right) = -\frac{\hat{r}}{r^2}$	
gradiente	$\vec{\nabla} \cdot \vec{r} = 1$		
divergente	$\vec{\nabla} \cdot \vec{r} = 3$	$\vec{\nabla}[\Phi(\vec{r})] = \frac{d}{d\vec{r}} \Phi(\vec{r})$	
rotacional	$\vec{\nabla} \times \vec{r} = 0$	$\vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} \Phi = \nabla^2 \Phi$	<i>Laplaciano</i>

Definiciones

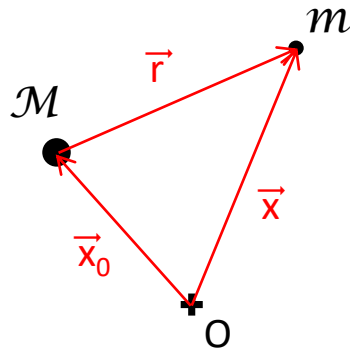
$\frac{\Psi}{m} \equiv \Phi \rightarrow$ potencial gravitacional

$\frac{\vec{\mathcal{F}}}{m} \equiv \vec{F} \rightarrow$ fuerza gravitacional

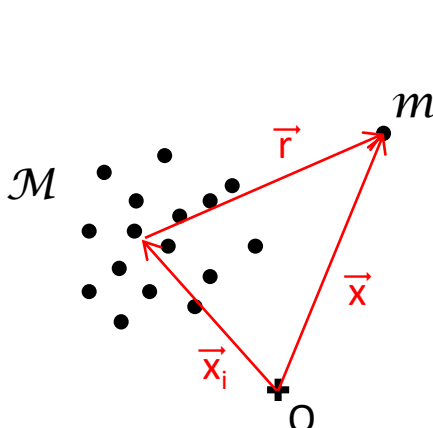
$\frac{\mathcal{E}}{m} \equiv \mathbb{E} \rightarrow$ energía mecánica

$\frac{\vec{\mathcal{L}}}{m} \equiv \vec{L} \rightarrow$ momento angular

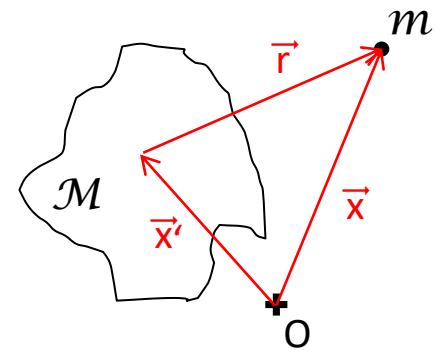
Pares Densidad - Potencial



$$\frac{\Psi(\vec{r})}{m} = -\frac{G M}{r} = -\frac{G M}{|\vec{x} - \vec{x}_0|}$$



$$\frac{\Psi(\vec{r})}{m} = -G \sum_{i=1}^n \frac{m_i}{|\vec{x} - \vec{x}_i|}$$



$$\frac{\Psi(\vec{r})}{m} = -G \int \frac{\rho(\vec{x}') d^3 x'}{|\vec{x} - \vec{x}'|}$$

campo conservativo

$$\frac{\vec{F}(\vec{r})}{m} = -\frac{\vec{\nabla} \Psi(\vec{r})}{m} = G M \vec{\nabla} \left(\frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}_0|} \right) = G M \frac{(\vec{x} - \vec{x}_0)}{|\vec{x} - \vec{x}_0|^3}$$

$$\vec{\nabla} \cdot \frac{\vec{F}(\vec{r})}{m} = -\nabla^2 \frac{\Psi(\vec{r})}{m} = G M \vec{\nabla} \cdot \left[\frac{(\vec{x} - \vec{x}_0)}{|\vec{x} - \vec{x}_0|^3} \right] = G M \left[-\frac{3}{|\vec{x} - \vec{x}_0|^3} + \dots \right]$$

$$= G \left[\frac{4\pi}{3} \rho(\vec{x} - \vec{x}_0) |\vec{x} - \vec{x}_0|^3 \right] \left[-\frac{3}{|\vec{x} - \vec{x}_0|^3} \right] = -4\pi G \rho(\vec{x} - \vec{x}_0)$$

$$\therefore \nabla^2 \left[\frac{\Psi(\vec{r})}{m} \right] = 4\pi G \rho(\vec{r})$$

→ Ecuación de Poisson

expansión alrededor
de \vec{x}_0

Ecuación de *Poisson*

$$\frac{\Psi}{m} \rightarrow \Phi$$

Coordenadas cartesianas:

$$\frac{\partial^2 \Phi(x, y, z)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi(x, y, z)}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Phi(x, y, z)}{\partial z^2} = 4 \pi G \rho(x, y, z)$$

Coordenadas esféricas:

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left[r^2 \frac{d\Phi(r)}{dr} \right] = 4 \pi G \rho(r)$$

Coordenadas cilíndricas:

$$\frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} \left[R \frac{\partial \Phi(R, z)}{\partial R} \right] + \frac{\partial^2 \Phi(R, z)}{\partial z^2} = 4 \pi G \rho(R, z)$$

Velocidad circular:

$$v_c^2 = r \frac{d\Phi}{dr} = r |\vec{F}|$$

Velocidad de escape:

$$v_{esc}^2 = 2 |\Phi|$$

Ecuación de *Poisson*

Teorema de *Gauss*:

$$\int_{\mathcal{V}} \nabla^2 \Phi(r) \, d\mathcal{V} = 4 \pi G \int_0^R \rho(r) \, d\mathcal{V}$$

$$\oint_S \vec{\nabla} \Phi(r) \cdot d\vec{A} = 4 \pi G \mathcal{M}$$

Integral de la
componente normal
de $\nabla \Phi$ sobre una
superficie cerrada

Masa interna a la
superficie cerrada

A) Potenciales para sistemas esféricos

1. Masa puntual

Simetría esférica:
$$\left\{ \begin{array}{l} \Phi(\vec{r}) = \Phi(r) \\ \vec{F}(\vec{r}) = F(r) = -\nabla\Phi(r) = -\frac{d\Phi}{dr} \end{array} \right.$$

Laplaciano:
$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left[r^2 \frac{d\Phi(r)}{dr} \right] = 4\pi G \rho(r)$$
$$d \left(r^2 \frac{d\Phi}{dr} \right) = 4\pi G \rho(r) r^2 dr$$

$$r^2 \frac{d\Phi}{dr} = 4\pi G \int_0^\infty r^2 \rho(r) dr = 4\pi G \rho_0 \int r^2 dr = 4\pi G \rho_0 \frac{r^3}{3}$$
$$\Rightarrow \frac{d\Phi}{dr} = \frac{4\pi G}{3} \rho_0 r$$

Pero:
$$\mathcal{M} = \rho_0 \mathcal{V} = \rho_0 \frac{4\pi}{3} r^3$$

$$\Rightarrow \frac{d\Phi}{dr} = \frac{G\mathcal{M}}{r^2} = -\frac{F(r)}{m}$$

Potencial *Kepleriano*

Por otra parte:

$$d\Phi = \frac{G\mathcal{M}}{r^2} dr \Rightarrow \frac{\Psi(r)}{m} = -\frac{G\mathcal{M}}{r}$$

Ahora:

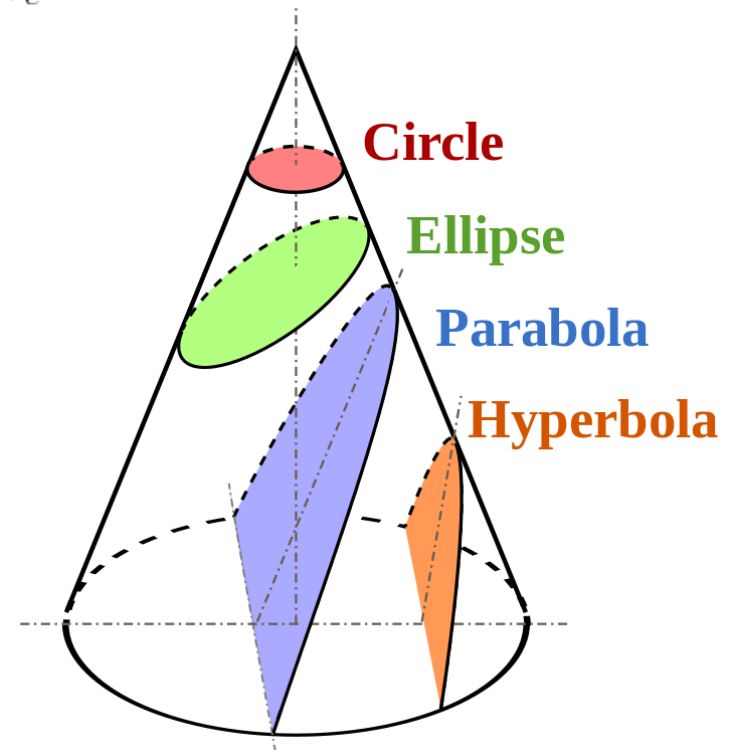
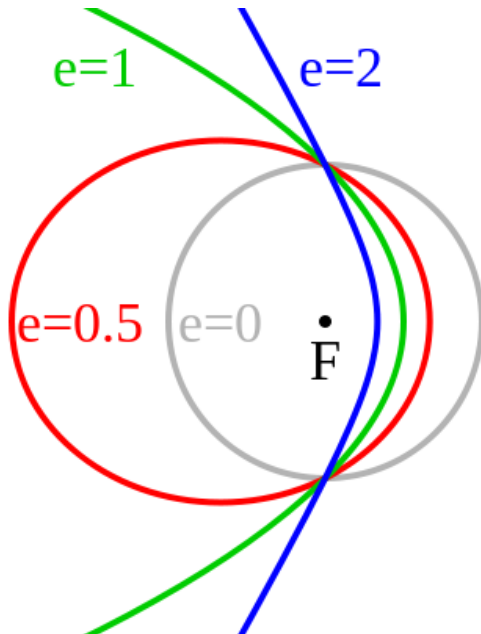
$$v_c^2 = r |\vec{F}| = r \frac{GM}{r^2} = \frac{GM}{r}$$

$$v_c = \sqrt{\frac{GM}{r}}$$

y:

$$v_{esc}^2 = 2 |\Phi| = 2 \frac{GM}{r}$$

$$v_{esc} = \sqrt{\frac{2GM}{r}} = \sqrt{2} v_c$$



2. Cascarón esférico uniforme

Simetría esférica:
$$\left\{ \begin{array}{l} \Phi(\vec{r}) = \Phi(r) \\ \vec{F}(\vec{r}) = F(r) = -\nabla\Phi(r) = -\frac{d\Phi}{dr} \end{array} \right.$$

Teoremas de *Newton*:

- Un cuerpo **dentro de un cascarón esférico** de materia no sufre ninguna fuerza gravitacional neta del cascarón

$$F_{int}(r) = 0 \quad \Rightarrow \quad \Phi_{int}(r) = cte$$

- La fuerza gravitacional en un cuerpo **fuera de un cascarón esférico** de materia es la misma que si toda la masa del cascarón estuviera concentrada en su centro (Potencial *Kepleriano*)

$$F_{ext}(r) = -\frac{GM}{r^2} \quad \Rightarrow \quad \Phi_{ext}(r) = -\frac{GM}{r}$$

TAREA: Demostrar los teoremas de Newton arriba

3. Esfera homogénea

Simetría esférica:

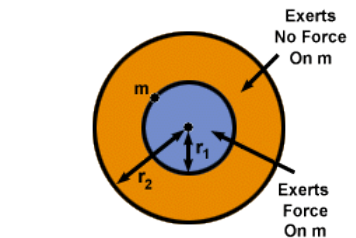
$$\left\{ \begin{array}{l} \Phi(\vec{r}) = \Phi(r) \\ \vec{F}(\vec{r}) = F(r) = -\nabla\Phi(r) = -\frac{d\Phi}{dr} \end{array} \right.$$

$\rho = \rho_0$, para $r \leq a$ ($a = cte$ es el radio de la esfera)

$$\mathcal{M}_{int}(r) = \frac{4\pi}{3} \rho_0 r^3 \quad \mathcal{M}_{ext} = \frac{4\pi}{3} \rho_0 a^3$$

y el potencial:

$$\Phi(r) = -2\pi G \rho_0 \left\{ \begin{array}{ll} a^2 - \frac{r^2}{3} & , \quad r \leq a \\ \frac{2a^3}{3r} & , \quad r > a \end{array} \right.$$



TAREA

$$\Phi(r > a) = -\frac{4\pi G}{3} \rho_0 \frac{a^3}{r} = -\frac{GM}{a^3} \frac{a^3}{r} = -\frac{GM}{r}$$

→ Potencial *Kepleriano*

Por otra parte:

$$F(r) = -\frac{d\Phi}{dr} = -\frac{2\pi G}{3} \rho_0 \left\{ \begin{array}{ll} 2r & , \quad r \leq a \\ \frac{2a^3}{r^2} & , \quad r > a \end{array} \right.$$

$$F(r \leq a) = -\frac{4\pi G}{3} \rho_0 r = -k r$$

→ Ecuación de un **oscilador armónico simple**

$k = cte$

En un OHS, el periodo es dado por:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}} = \sqrt{4\pi^2 \frac{3}{4\pi G \rho_0}} = \sqrt{\frac{3\pi}{G \rho_0}}$$

y, con eso, podemos calcular el tiempo de caída libre (*free-fall*) en una esfera homogénea en colapso:

$$T_{ff} = \frac{1}{4}T = \sqrt{\frac{3\pi}{8G\rho_0}} \approx \sqrt{\frac{1}{G\rho_0}}$$

(si la densidad permanece constante, lo que no es normalmente verdad...).

Ahora:

$$v_c^2 = r |\vec{F}| = r k r = k r^2$$

$$v_c = \sqrt{k} r = \Omega r \quad , \quad \Omega = \sqrt{\frac{4\pi G}{3} \rho_0} = cte$$

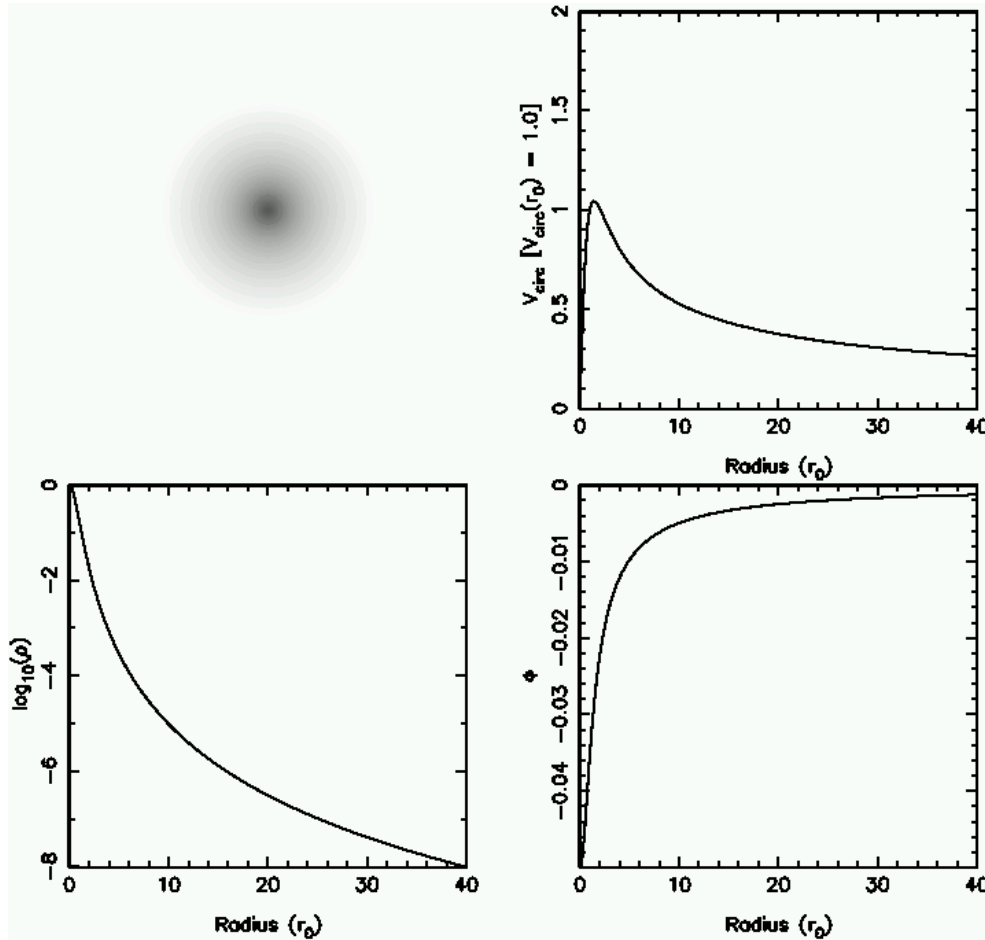
y:

$$v_{esc}^2 = 2 |\Phi| = 4\pi G \rho_0 \left(a^2 - \frac{r^2}{3} \right)$$

rotación de cuerpo rígido

4. Esfera de *Plummer*

Propuesta por *Plummer* (1911, MNRAS 71, 460) para un sistema estelar **politrópico de índice 5** (aplicado, por ejemplo, a cúmulos globulares):



- coordenadas esféricas

$$\Phi_P(r) = - \frac{GM}{\sqrt{r^2 + b^2}}$$

término de **suavización** del potencial

- coordenadas cilíndricas

$$\Phi_P(r) = - \frac{GM}{\sqrt{R^2 + z^2 + b^2}}$$

TAREA

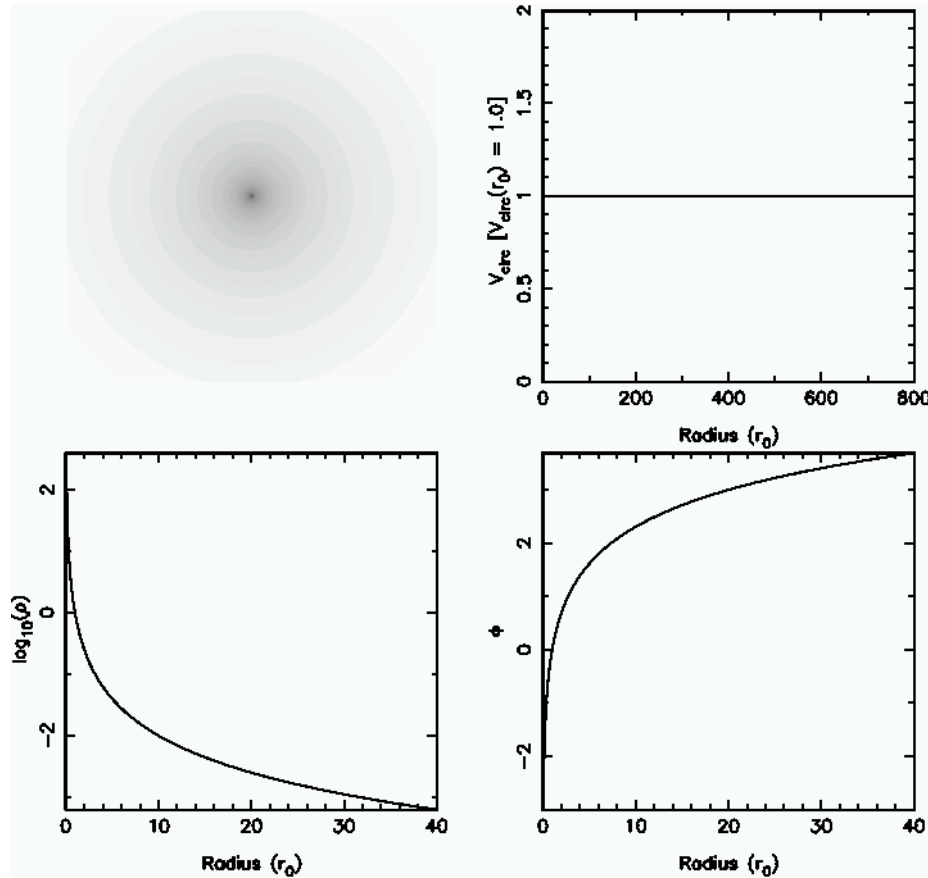
$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left[r^2 \frac{d\Phi(r)}{dr} \right] = 4\pi G \rho(r)$$

Encontrar:

$$\rho_P(r) = \frac{3\mathcal{M}}{4\pi b^3} \left[1 + \left(\frac{r}{b} \right)^2 \right]^{-5/2}$$

5. Otros modelos esféricos

- Esfera isotérmica simple (SIS):



$$\Phi_{SIS}(r) = G\mathcal{M} \ln\left(\frac{r}{a}\right)$$

$$\mathcal{M}(r) = \frac{2}{G} \sigma^2 r$$

$$\Sigma(R) = \frac{\sigma^2}{2GR}$$

- Dos potencias:

$$\rho(r) = \rho_0 \left[\left(\frac{r}{a} \right)^\gamma \left(1 + \frac{r}{a} \right)^{\beta-\gamma} \right]^{-1}$$

Casos especiales
del modelo

- Gama (*Dehnen*, 1993, MNRAS 265, 250), $\beta = 4$:

$$\rho(r) = \frac{(3 - \gamma)M}{4\pi} \frac{a}{r^\gamma (r + a)^{4-\gamma}},$$

- Modelo de *Hernquist* (1990, ApJ 356, 359), $\beta = 4$, $\gamma = 1$:

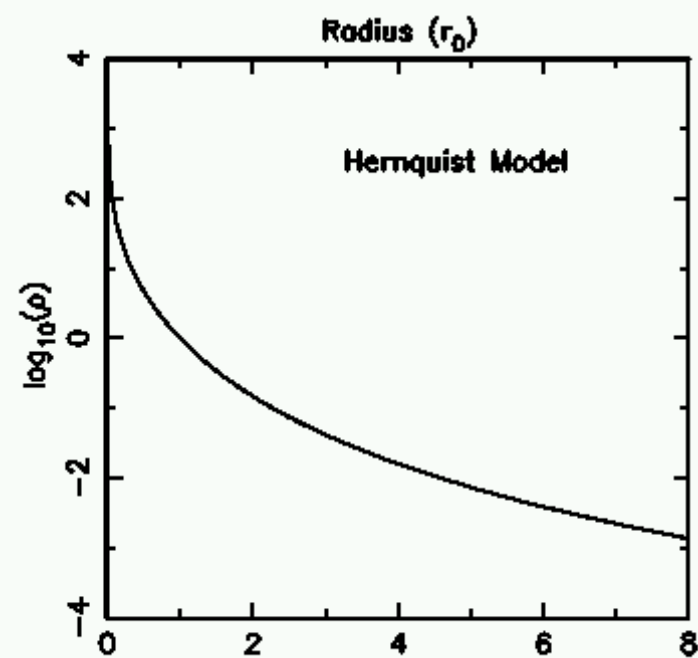
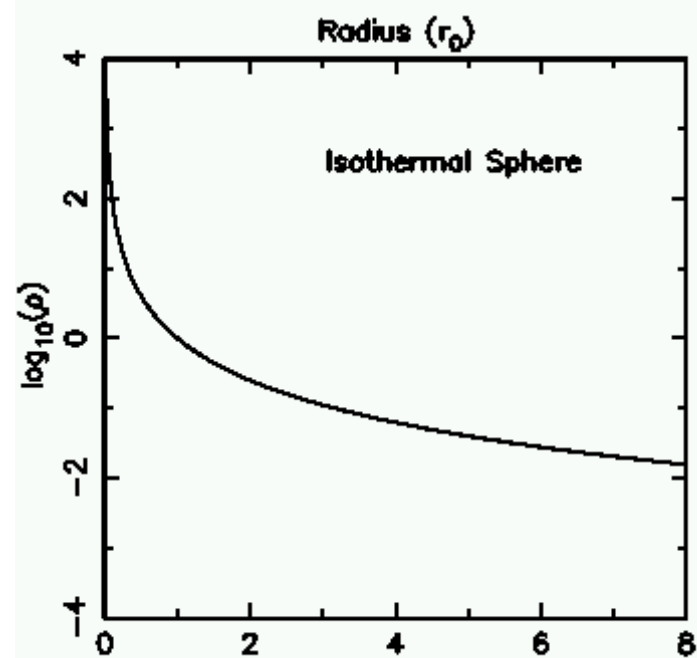
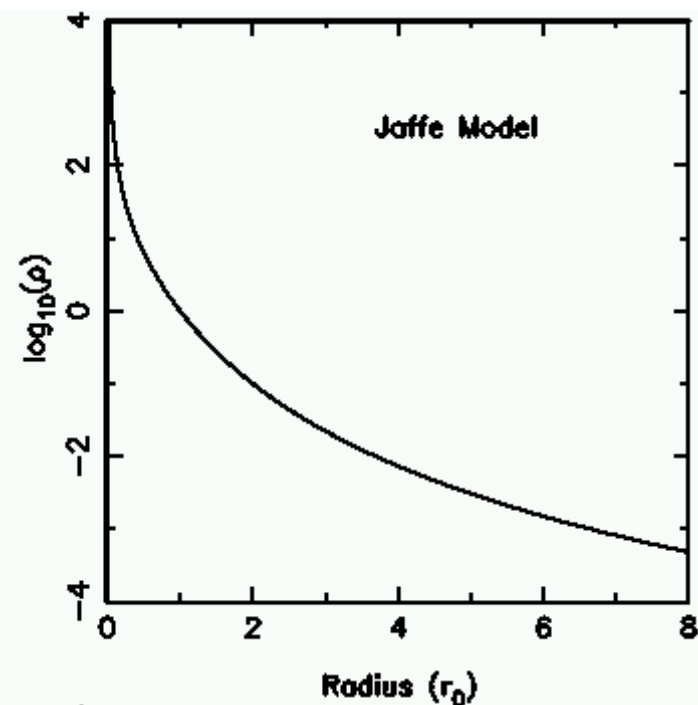
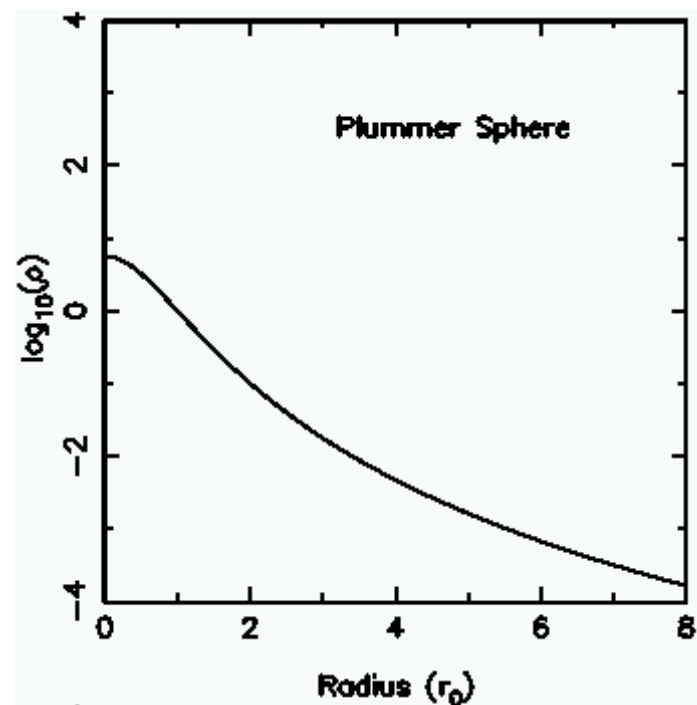
$$\Phi_H(r) = -\frac{GM}{(r + a)}$$

- Modelo de *Jaffe* (1983, MNRAS 202, 995), $\beta = 4$, $\gamma = 2$:

$$\Phi_J(r) = \frac{GM}{a} \ln \left(\frac{r}{r + a} \right)$$

- *Navarro-Frenk-White* (1997, ApJ 490, 493), $\beta = 3$, $\gamma = 1$:

$$\frac{\rho(r)}{\rho_{\text{crit}}} = \frac{\delta_c}{(r/r_s)(1 + r/r_s)^2},$$



B) Potenciales para sistemas axi-simétricos

6. Disco delgado de *Kuzmin* (1956)

También conocido como Modelo 1 de *Toomre* (1963, ApJ 138, 385):

$$\Phi_K(R, z) = -\frac{GM}{\sqrt{R^2 + (a + |z|)^2}}$$

← *cte*

Simetría cilíndrica:

$$\frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} \left[R \frac{\partial \Phi(R, z)}{\partial R} \right] + \frac{\partial^2 \Phi(R, z)}{\partial z^2} = 4 \pi G \rho(R, z)$$

Densidad superficial:

$$\sigma_K(R) = \frac{a \mathcal{M}}{2\pi(R^2 + a^2)^{3/2}}$$

7. Modelo de Miyamoto y Nagai (1975)

Es un buen ejemplo de potencial que **combina** tanto una simetría esférica cuanto una de disco delgado (aplicable, por ejemplo, a galaxias espirales):

$$\Phi_{MN}(R, z) = - \frac{GM}{\sqrt{R^2 + (a + \sqrt{z^2 + b^2})^2}}$$

donde b/a es la razón axial.

$$\text{Si } a = 0 \Rightarrow \Phi_{MN} = \Phi_P$$

$$\text{Si } b = 0 \Rightarrow \Phi_{MN} = \Phi_K$$



es decir, puede generar tanto el Potencial de *Plummer* (esférico) cuanto el de *Kuzmin* (infinitamente delgado).

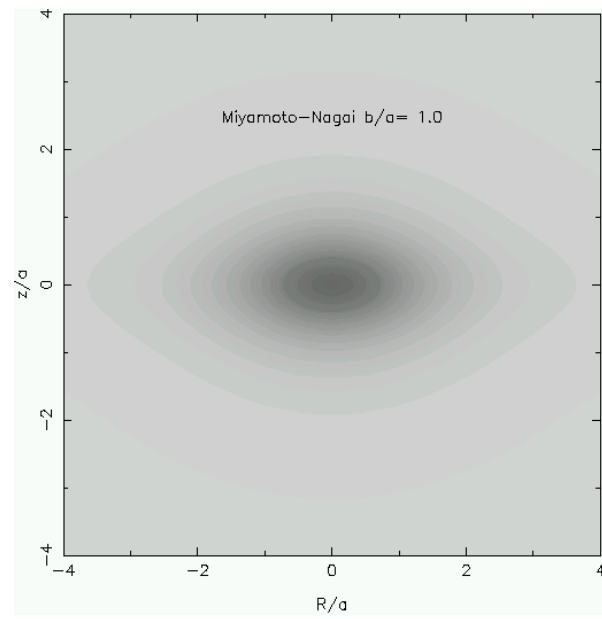
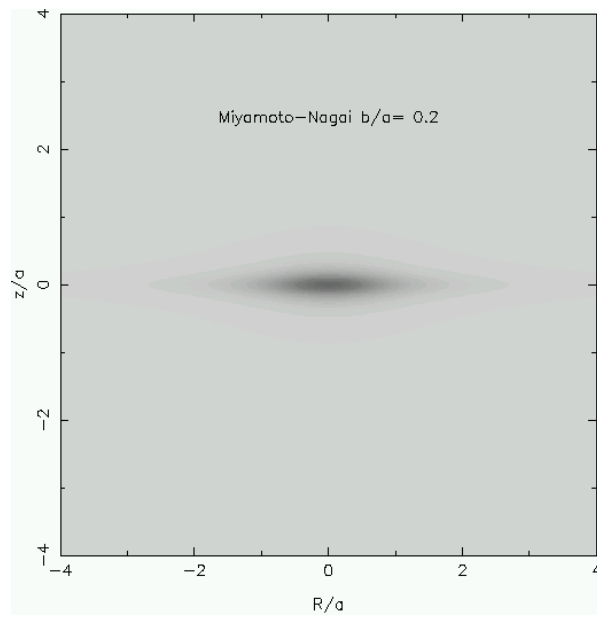
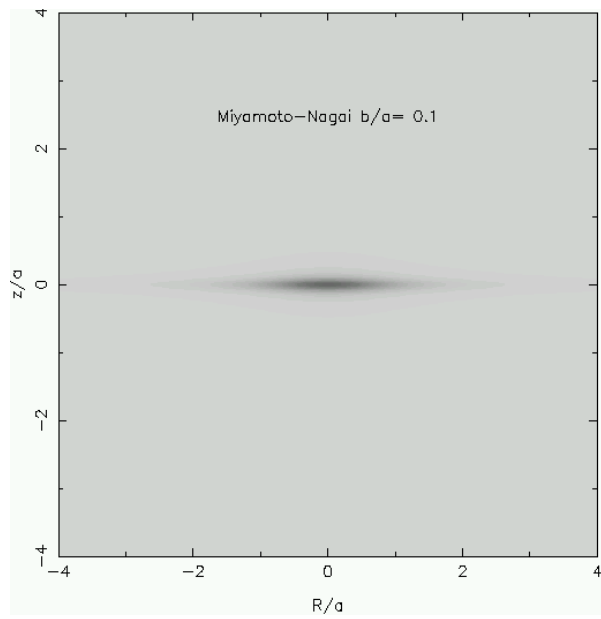
El perfil de densidad:

$$\rho_{MN}(R, z) = \frac{b^2 \mathcal{M}}{4\pi} \frac{aR^2 + (a + 3\sqrt{z^2 + b^2})(a + \sqrt{z^2 + b^2})^2}{[R^2 + (a + \sqrt{z^2 + b^2})^2]^{5/2} (z^2 + b^2)^{3/2}}$$

que puede ser simplificado, para $b \rightarrow 0$, a:

$$\rho_{MN}(z) = \rho_0 \operatorname{sech}^2(z/R_h)$$

$\rho(z=0)$  ρ_0  escala de altura



8. Otros modelos axi-simétricos

- *Mestel* (1963, MNRAS 126, 553):
- *Kalnajs* (1976, ApJ 205, 751): ver Sección 5.6.2 de la edición electrónica de *Binney & Tremaine*.
- Exponencial (*Freeman*, 1970, ApJ 160, 811):
- *Toomre* (1963, ApJ 138, 385):

$$V_n^2(r) = C_n^2 \left\{ -\frac{\partial}{\partial a^2} \right\}^{n-1} [(r^2/a) (a^2 + r^2)^{-3/2}]$$

$$\mu_n(r) = \frac{C_n^2}{2\pi G} \left\{ -\frac{\partial}{\partial a^2} \right\}^{n-1} [(a^2 + r^2)^{-3/2}],$$

- *Satoh* (1980, PASJ 32, 41)

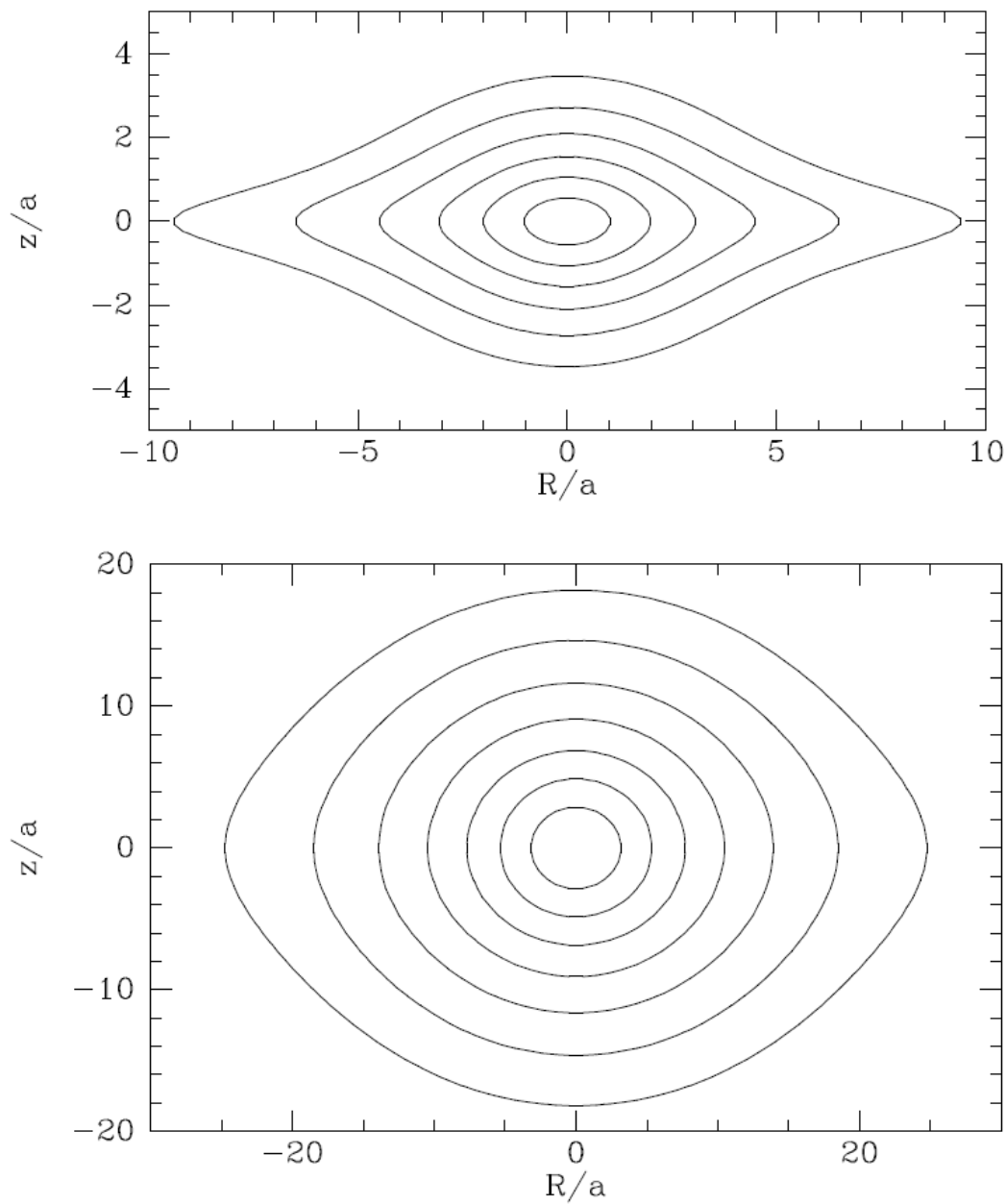
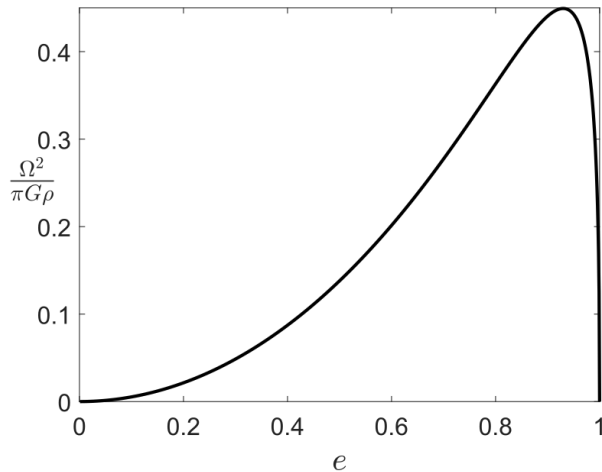


Figure 2.8 Contours of equal density in the (R, z) plane for Satoh's density distribution (2.70c) when: $b/a = 1$ (top); $b/a = 10$ (bottom). There are two contours per decade, and the highest contour levels are $0.1M/a^3$ (top), and $0.001M/a^3$ (bottom).

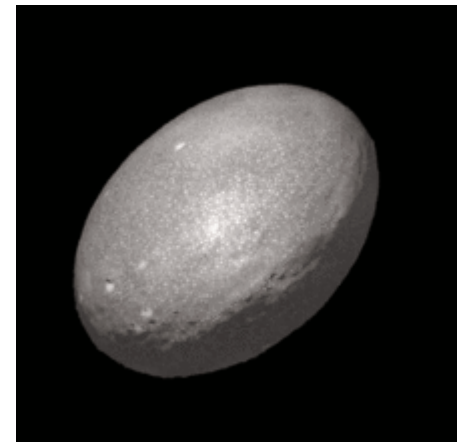
9. Modelos más complejos



- ***Esferoides de Maclaurin*** (1742, *A Treatise of Fluxions*: In Two Books, Ruddimans): esferoides oblatos (achatados), que pueden ser parametrizados por su momento angular, o su velocidad angular, o la razón de sus ejes polar y ecuatorial, entre otros (es decir, un parámetro solamente).

ver Sección 5.6.3 de la edición electrónica de Binney & Tremaine.

- ***Elipsoides de Jacobi*** [1834, *Annalen der Physik* (en alemán), 109 (8–16): 229–233]: elipsoides triaxiales.



10. El potencial de nuestra Galaxia

Como ya vimos, la Vía Láctea está compuesta de varias componentes:

- *Corona de materia oscura*
- *Bulbo*
- *Barra*
- *Disco estelar*
- *Disco gaseoso (ISM)*

que son usualmente modeladas de forma independiente.

ver Sección 2.7 de la edición electrónica de Binney & Tremaine.