Tarea 1. Mecánica clásica - Holman Daniel Quintero Salazar

• EJERCICIO #1.

En un campo de fuerza conservativo, la energía mecánica total es constante. Es decir, $E = T+V$ = cte. Considerando que $\vec{F} = -\nabla V$, donde $\vec{F}$ es la función que nos permitirá deducir las ecuaciones de movimiento.

Ahora bien, si consideramos que el cambio de energía potencial está dado por,

$$\int_A^B \vec{F}\cdot d\vec{r} = -\int_A^B \nabla V \cdot d\vec{r}, \text{ donde } \nabla V \cdot d\vec{r} = \frac{\partial V}{\partial x}dx + \frac{\partial V}{\partial y}dy + \frac{\partial V}{\partial z}dz = dV$$

Tenemos,

$$-\int_A^B dV = V_A - V_B = -\Delta V.$$

Podemos observar que, si asumimos $V_A = 0$, la magnitud $-\Delta V$ tan solo dependerá del valor $|V_B|$, convirtiendo a V_A en un parámetro arbitrario de referencia.

Igualmente, podemos ver que si tomamos un potencial de tal forma que $V' = V + C$, donde C es una constante arbitraria, resolviendo se tiene que,

$$\vec{F} = -\nabla V \quad , \quad \vec{F}' = -\nabla V'$$

$$\vec{F}' = -\nabla(V+C)$$

$$\vec{F}' = -(\nabla V + \cancel{\nabla C}^{\,0})$$

$$\vec{F}' = -\nabla V$$

Así, $\vec{F} = \vec{F}'$

Adicionalmente, usando las ecuaciones de Euler-Lagrange podemos ver que, si tenemos a $V' = V + C$, $\mathcal{L} = T + V$ y $\mathcal{L}' = T + V'$, obtenemos,

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}'}{\partial \dot{q}}\right) - \frac{\partial \mathcal{L}'}{\partial q} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial \mathcal{L}'}{\partial \dot{q}} = \frac{\partial(T+V+C)}{\partial \dot{q}} = \frac{\partial(T+V)}{\partial \dot{q}} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}'}{\partial q} = \frac{\partial (T+V+C)}{\partial q} = \frac{\partial (T+V)}{\partial q} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q}$$

Por tanto,

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}'}{\partial \dot{q}}\right) - \frac{\partial \mathcal{L}'}{\partial q} = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}}\right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q}$$

•EJERCICIO #2.

Si se tiene que la primera velocidad cósmica es aquella asociada a la energía mínima necesaria para entrar en órbita circular alrededor de La Tierra, la magnitud de la fuerza radial que se asocia a dicha orbita deberá entonces ser proporcional a la fuerza de atracción gravitacional de La Tierra. Así pues,

$$\vec{F_g} = \frac{GM_T m}{r^2}\hat{r} \quad , \quad \vec{F_c} = m\vec{a}_r = \frac{mV^2}{r}\hat{r}$$

$$F_g = F_r$$

$$\frac{GM_T m}{r^2} = \frac{mV^2}{r}$$

$$\Rightarrow V_{c1} = \sqrt{\frac{GM_T}{r}}$$

La segunda velocidad cósmica es la velocidad de escape del campo gravitacional terrestre, así pues, según el teorema de conservación de energía tenemos,

$$(T+U)_{cte} \Rightarrow T_1 + U_1 = T_2 + U_2$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}mV_{c2}^2 - \frac{GM_T m}{r} = 0 + \cancel{\lim_{r\to\infty} \frac{GM_T m}{r}}$$

$$\frac{1}{2}mV_{c2}^2 - \frac{GM_T m}{r} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{2}mV_{c2}^2 = \frac{GM_T m}{r}$$

$$\Rightarrow V_{c2} = \sqrt{\frac{2GM_T}{r}}$$

• EJERCICIO #3

El teorema de conservación de momento angular para un sistema de partículas plantea que, "el momento angular total de un sistema de partículas se conserva si la torca externa total es cero".

Demostración:

El momento angular total de un sistema de partículas con respecto a un punto A, con vector posición $\vec{r}_A$ está dado por,

$$\vec{L}_A = \sum_i m_i (\vec{r}_i - \vec{r}_A) \times (\dot{\vec{r}}_i \times \dot{\vec{r}}_A)$$

en donde podemos expresar $\vec{r}_\alpha = \vec{r}_i - \vec{r}_A$ y $\dot{\vec{r}}_\alpha = \dot{\vec{r}}_i - \dot{\vec{r}}_A$ como los vectores posición y velocidad de la partícula i con respecto al punto A (relativos). Desarrollando el cómputo de la derivada de $\vec{L}_A$ con respecto al tiempo tenemos,

$$\frac{d\vec{L}_A}{dt} = \sum_i m_i \frac{d}{dt}(\vec{r}_\alpha \times \dot{\vec{r}}_\alpha)$$

$$\frac{d}{dt}(\vec{r}_\alpha \times \dot{\vec{r}}_\alpha) = \frac{d}{dt}(\vec{r}_\alpha) \times \dot{\vec{r}}_\alpha + \vec{r}_\alpha \times \frac{d}{dt}(\dot{\vec{r}}_\alpha) = \dot{\vec{r}}_\alpha \times \dot{\vec{r}}_\alpha + \vec{r}_\alpha \times \frac{d}{dt}(\dot{\vec{r}}_i - \dot{\vec{r}}_A)$$

$$= \dot{\vec{r}}_\alpha \times \dot{\vec{r}}_\alpha + \vec{r}_\alpha \times (\ddot{\vec{r}}_i - \ddot{\vec{r}}_A)$$

Así,

$$\frac{d\vec{L}_A}{dt} = \sum_i m_i [\dot{\vec{r}}_\alpha \times \dot{\vec{r}}_\alpha + \vec{r}_\alpha \times \ddot{\vec{r}}_i - \vec{r}_\alpha \times \ddot{\vec{r}}_A]$$

$$\frac{d\vec{L}_A}{dt} = \sum_i m_i (\dot{\vec{r}}_\alpha \times \dot{\vec{r}}_\alpha) + \sum_i m_i (\vec{r}_\alpha \times \ddot{\vec{r}}_i) - \sum_i m_i (\vec{r}_\alpha \times \ddot{\vec{r}}_A)$$

$$\frac{d\vec{L}_A}{dt} = \sum_i m_i \cancel{(\dot{\vec{r}}_\alpha \times \dot{\vec{r}}_\alpha)}^{0} + \sum_i \vec{r}_\alpha \times m_i \ddot{\vec{r}}_i - \sum_i m_i \vec{r}_\alpha \times \ddot{\vec{r}}_A$$

$$\frac{d\vec{L}_A}{dt} = \sum_i \vec{r}_\alpha \times \dot{\vec{p}}_i - \sum_i m_i \vec{r}_\alpha \times \ddot{\vec{r}}_A$$

Teniendo en cuenta que,

$$\frac{d\vec{P}_i}{dt} = \sum_{\substack{i \\ j\neq i}} \vec{F}_{ij} + \vec{F}_i^{ext} \qquad , \vec{P}_i = m_i \vec{V}_i = m_i \frac{d\vec{r}_i}{dt}$$

$$\vec{R} = \frac{\sum_i m_i \vec{r}_i}{\sum_i m_i} = \frac{\sum_i m_i \vec{r}_i}{M}$$

Tenemos que,

$$\frac{d\vec{L}_A}{dt} = \sum_{\substack{i,j \\ j\neq i}} (\vec{r}_i - \vec{r}_A) \times \vec{F}_{ij} + \sum_i (\vec{r}_i - \vec{r}_A) \times \vec{F}_i^{ext} - M(\vec{R} - \vec{r}_A) \times \ddot{\vec{r}}_A$$

Ahora bien, si tenemos en cuenta que,

$$\sum_{\substack{i,j \\ j\neq i}} (\vec{r}_i - \vec{r}_A) \times \vec{F}_{ij} = \frac{1}{2} \sum [(\vec{r}_i - \vec{r}_A) \times \vec{F}_{ij} + (\vec{r}_j - \vec{r}_A) \times \vec{F}_{ji}]$$

$$= \frac{1}{2} \sum [(\vec{r}_i - \vec{r}_A) - (\vec{r}_j - \vec{r}_A)] \times \vec{F}_{ij} = \frac{1}{2} \sum (\vec{r}_i - \vec{r}_j) \times \vec{F}_{ij}$$

en donde $\vec{F}_{ij} = -F_{ji}$, la forma debil de la tercera ley de Newton.

Lo que resulta en,

$$\frac{d\vec{L}_A}{dt} = \frac{1}{2} \sum_{\substack{i,j \\ j\neq i}} (\vec{r}_i - \vec{r}_j) \times \vec{F}_{ij} + \sum_i (\vec{r}_i - \vec{r}_A) \times \vec{F}_i^{ext} - M(\vec{R} - \vec{r}_A) \times \ddot{\vec{r}}_A$$

Si contemplamos, ademas, que la forma fuerte de la tercera ley de Newton plantea que $\vec{F}_{ij}$ es colineal al vector $\vec{r}_{ij} = \vec{r}_i - \vec{r}_j$, por lo cual $\vec{r}_{ij} \times \vec{F}_{ij} = 0$, vemos que el primer término en la expresión anterior se hace 0. Así,

$$\frac{1}{2} \sum \vec{r}_{ij} \times \vec{F}_{ij} = 0$$

Igualmente, si A está en reposo, $\vec{r}_A$ es el centro de masa $\vec{R}$, o el punto A posee una aceleración paralela a $\vec{R}$, tenemos que,

$$-M(\vec{R} - \vec{r}_A) \times \ddot{\vec{r}}_A = 0$$

Así pues, el término resultante será,

$$\frac{d\vec{L}_A}{dt} = \sum_i (\vec{r}_i - \vec{r}_A) \times \vec{F}_i^{ext} = \vec{J}_A^{ext}$$

donde $\vec{J}_A^{ext}$ es la torca total externa. Así,

$$\frac{d\vec{L}_A}{dt} = \vec{J}_A^{ext}$$

QED.

• EJERCICIO #4

Inicialmente, se puede considerar que, si $\vec{F}_{ij}$ depende únicamente de las posiciones relativas $\vec{r}_{ij} = \vec{r}_i - \vec{r}_j$, y se puede asociar un potencial de tal forma que $V_{ij}(\vec{r}_{ij})$, asumiendo $V_{ij} = V_{ji}$, entonces $\vec{F}_{ij} = -\nabla_i V_{ij}$. Por lo tanto, podemos observar que,

$$\vec{F}_{ij} = -\nabla_i V_{ij} = \nabla_j V_{ij} = \nabla_j V_{ji} = -\vec{F}_{ij}$$

demostrando la validez de la forma débil de la tercera ley de Newton. Ahora bien, si V_{ij} depende únicamente del valor absoluto $R_{ij} = |\vec{r}_{ij}|$ entre las partículas i y j, podemos observar que,

$$\vec{F}_{ij} = -\nabla_i V_{ij}(R_{ij}) \rightarrow -\frac{\partial V_{ij}}{\partial R_{ij}} \cdot \frac{\partial R_{ij}}{\partial x^\alpha} \rightarrow -\frac{dV_{ij}}{dR_{ij}} \cdot \frac{\partial R_{ij}}{\partial x^\alpha} \rightarrow -\frac{dV_{ij}}{dR_{ij}} \nabla_i R_{ij}$$

$$\nabla_i V_{ij}(R_{ij}) = \frac{dV_{ij}}{dR_{ij}} \nabla_i R_{ij}$$ $\Rightarrow$ Reexpresando R_{ij} tenemos: $R_{ij} = |\vec{r}_{ij}| = \sqrt{\vec{r}_{ij} \cdot \vec{r}_{ij}}$

$$\nabla_i R_{ij} = \nabla_i \sqrt{\vec{r}_{ij} \cdot \vec{r}_{ij}} = \nabla(\vec{r} \cdot \vec{r})^{1/2} = \frac{1}{2}(\vec{r} \cdot \vec{r})^{-1/2} \cdot 2\vec{r} = \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{\vec{r}_{ij} \cdot \vec{r}_{ij}}} 2\vec{r}_{ij}$$

$$\nabla_i R_{ij} = \frac{\vec{r}_{ij}}{R_{ij}}$$, o bien, $$\vec{F}_{ij} = -\nabla_i V_{ij}(R_{ij}) = \frac{dV_{ij}}{dR_{ij}} \cdot \frac{\vec{r}_{ij}}{R_{ij}} = -\frac{\vec{r}_{ij}}{R_{ij}} \frac{dV_{ij}}{dR_{ij}}$$

Ahora bien, podemos observar que, para validar la forma fuerte de la tercera ley de Newton se debe cumplir que,

$$\vec{r}_{ij} \times \vec{F}_{ij} = 0.$$

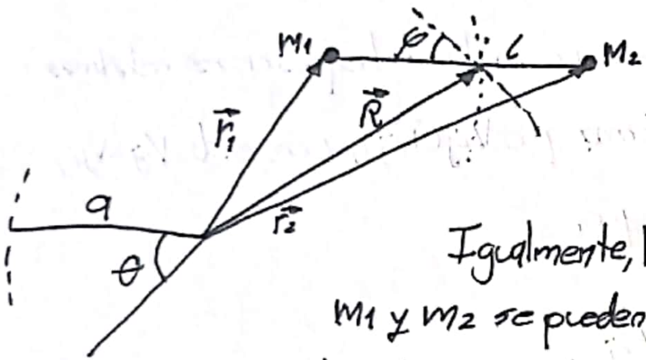
Entonces,

$$\vec{r}_{ij} \times \vec{F}_{ij} = \vec{r}_{ij} \times \left(-\frac{\vec{r}_{ij}}{R_{ij}} \frac{dV_{ij}}{dR_{ij}}\right)$$

donde vemos que el producto $\vec{r}_{ij} \times \vec{r}_{ij}$ es cero, obteniendo así la validación que queremos confirmar.

• EJERCICIO #5

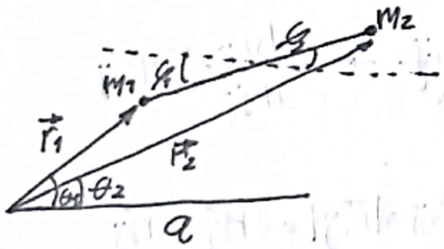
Con el esquema podemos visualizar que el sistema se puede describir por 3N grados de libertad.



En este caso $3N=6$. Las ligaduras que posee el sistema son la circunferencia que traza el centro de masa $\vec{R}$, cuya magnitud es el radio a, y la longitud de la varilla ℓ. Por consiguiente, el número de grados de libertad será $n = 3N - k = 4$.

Igualmente, las coordenadas cartesianas $\vec{r}_1$ y $\vec{r}_2$ de las partículas m_1 y m_2 se pueden expresar en términos de las coordenadas θ y φ, las cuales describen el movimiento del centro de la varilla en la circunferencia y la orientación de la varilla respectivamente.

Así,



$$\vec{r}_1 = \vec{r}_1(\theta_1, \varphi_1)$$
$$\vec{r}_2 = \vec{r}_2(\theta_2, \varphi_2).$$

$$\vec{r}_1 = x_1, y_1$$
$$\begin{cases} x_1 = a\cos\theta - \frac{\ell}{2}\cos\varphi \\ y_1 = a\,\text{sen}\,\theta - \frac{\ell}{2}\,\text{sen}\,\varphi \end{cases}$$

$$\vec{r}_2 = x_2, y_2$$
$$\begin{cases} x_2 = a\cos\theta + \frac{\ell}{2}\cos\varphi \\ y_2 = a\,\text{sen}\,\theta + \frac{\ell}{2}\,\text{sen}\,\varphi \end{cases}$$

Hallando $\dot{\vec{r}}_1$ y $\dot{\vec{r}}_2$, tenemos,

$$\frac{d}{dt}(\vec{r}_1) = \left(-a\,\text{sen}\,\theta\,\dot{\theta} + \frac{\ell}{2}\text{sen}\,\varphi\,\dot{\varphi},\; a\cos\theta\,\dot{\theta} - \frac{\ell}{2}\cos\varphi\,\dot{\varphi}\right) = \vec{V}_1$$

$$\frac{d}{dt}(\vec{r}_2) = \left(-a\,\text{sen}\,\theta\,\dot{\theta} - \frac{\ell}{2}\text{sen}\,\varphi\,\dot{\varphi},\; a\cos\theta\,\dot{\theta} + \frac{\ell}{2}\cos\varphi\,\dot{\varphi}\right) = \vec{V}_2$$

La energía cinética total del sistema será,

$$T = T_1 + T_2 = \frac{1}{2} m_1 \vec{V}_1 \cdot \vec{V}_1 + \frac{1}{2} m_2 \vec{V}_2 \cdot \vec{V}_2$$

Dado que $m_1 = m_2$ tenemos que,

$$T = \frac{1}{2} m (\vec{V}_1 \cdot \vec{V}_1 + \vec{V}_2 \cdot \vec{V}_2)$$

Calculando tenemos,

$$\vec{V}_1 \cdot \vec{V}_1 = (-a \operatorname{sen}\theta \dot{\theta} + \frac{l}{2} \operatorname{sen}\varphi \dot{\varphi})^2 + (a \cos\theta \dot{\theta} - \frac{l}{2} \cos\varphi \dot{\varphi})^2$$

$$= \frac{l^2}{4} \operatorname{sen}^2\varphi \dot{\varphi}^2 - 2a \operatorname{sen}\theta \dot{\theta} \frac{l}{2} \operatorname{sen}\varphi \dot{\varphi} + a^2 \operatorname{sen}^2\theta \dot{\theta}^2 + a^2 \cos^2\theta \dot{\theta}^2 - 2a \cos\theta \dot{\theta} \frac{l}{2} \cos\varphi \dot{\varphi} +$$

$$\frac{l^2}{4} \cos^2\varphi \dot{\varphi}^2 = \frac{l^2}{4} \dot{\varphi}^2 \cancelto{1}{(\operatorname{sen}^2\varphi + \cos^2\varphi)} + a^2 \dot{\theta}^2 \cancelto{1}{(\operatorname{sen}^2\theta + \cos^2\theta)} - al \operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\varphi \dot{\theta} \dot{\varphi} - al \cos\varphi \cos\theta \dot{\theta} \dot{\varphi}$$

$$\vec{V}_1 \cdot \vec{V}_1 = \frac{l^2}{4} \dot{\varphi}^2 + a^2 \dot{\theta}^2 - al \dot{\theta} \dot{\varphi} (\operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\varphi + \cos\theta \cos\varphi)$$

$$\vec{V}_2 \cdot \vec{V}_2 = (-a \operatorname{sen}\theta \dot{\theta} - \frac{l}{2} \operatorname{sen}\varphi \dot{\varphi})^2 + (a \cos\theta \dot{\theta} + \frac{l}{2} \cos\varphi \dot{\varphi})^2 = a^2 \operatorname{sen}^2\theta \dot{\theta}^2 + a \operatorname{sen}\theta \dot{\theta} l \operatorname{sen}\varphi \dot{\varphi} + \frac{l^2}{4} \operatorname{sen}^2\varphi \dot{\varphi}^2$$

$$+ a^2 \cos^2\theta \dot{\theta}^2 + a \cos\theta \dot{\theta} l \cos\varphi \dot{\varphi} + \frac{l^2}{4} \cos^2\varphi \dot{\varphi}^2$$

$$= a^2 \dot{\theta}^2 \cancelto{1}{(\operatorname{sen}^2\theta + \cos^2\theta)} + \frac{l^2}{4} \dot{\varphi}^2 \cancelto{1}{(\cos^2\varphi + \operatorname{sen}^2\varphi)} + a \operatorname{sen}\theta \dot{\theta} l \operatorname{sen}\varphi \dot{\varphi} + a \cos\theta \dot{\theta} l \cos\varphi \dot{\varphi}$$

$$\vec{V}_2 \cdot \vec{V}_2 = \frac{l^2}{4} \dot{\varphi}^2 + a^2 \dot{\theta}^2 + al \dot{\theta} \dot{\varphi} (\operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\varphi + \cos\theta \cos\varphi)$$

$$\vec{V}_1 \cdot \vec{V}_1 + \vec{V}_2 \cdot \vec{V}_2 = \frac{l^2}{2} \dot{\varphi}^2 + 2a^2 \dot{\theta}^2$$

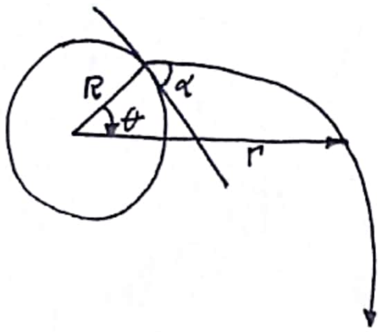
Así pues, tenemos que la energía cinética total del sistema es

$$T = \frac{1}{2} m \left(\frac{l^2}{2} \dot{\varphi}^2 + 2a^2 \dot{\theta}^2 \right)$$

$$T = \frac{m l^2 \dot{\varphi}^2}{4} + m a^2 \dot{\theta}^2$$

Como puede verse, la energía cinética tiene contribuciones de una componente rotacional (la varilla con respecto al centro de masa) y una componente traslacional (la circunferencia de radio a).

• EJERCICIO #6



Si se tienen las coordenadas generalizadas θ y r, además que $V_r = V_0 \operatorname{sen}\alpha$ y $V_\theta = V_0 \cos\alpha$, siendo α el ángulo de lanzamiento, podemos plantear que el lagrangiano del sistema será;

$$T = \frac{1}{2} m(t)(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2)$$

$$V = -\frac{G M_T m(t)}{r}$$

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} m(t)(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) + \frac{G M_T m(t)}{r}$$

Para r:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial r} = m(t) r\dot{\theta}^2 - \frac{G M m(t)}{r^2}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{r}} = m(t)\dot{r} \rightarrow \frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{r}} = \dot{r}\dot{m} + \ddot{r} m(t)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial r} - \frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{r}} = 0$$

$$m(t) r\dot{\theta}^2 - \frac{G M_T m(t)}{r^2} - \dot{r}\dot{m} - \ddot{r} m(t) = 0$$

$$\ddot{r} m(t) = m(t) r\dot{\theta}^2 - \frac{G M_T m(t)}{r^2} - \dot{r}\dot{m}$$

$$\ddot{r} m(t) = m(t) r\dot{\theta}^2 - \frac{G M_T m(t)}{r^2} - V_0 \operatorname{sen}\alpha\, \dot{m} //$$

Para θ:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta} = 0$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}} = r^2\dot{\theta} m(t) \rightarrow \frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}} = 2r\dot{r}\dot{\theta} m(t) + r^2\ddot{\theta} m(t) + \dot{\theta}\dot{m}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta} - \frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}} = 0$$

$\dot{\theta} = V_0 \cos\alpha$

$$-2r\dot{r}\dot{\theta} m(t) - r^2\ddot{\theta} m(t) - r^2\dot{\theta}\dot{m} = 0 \implies r^2\ddot{\theta} m(t) = r^2\dot{\theta}\dot{m} + 2r\dot{r}\dot{\theta} m(t) //$$

· EJERCICIO #7

El principio de Hamilton, o principio de mínima acción plantea que, dada la acción S, la curva que extremizará el valor del funcional está dado por,

$$\delta S = \delta \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{L}(q, \dot{q}, t)\, dt = 0$$

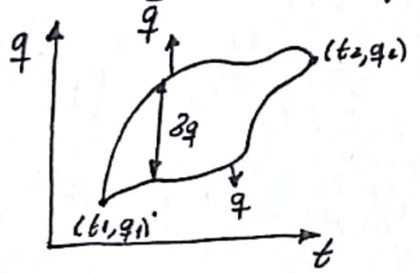
en donde $\delta q(t_1) = \delta q(t_2) = 0$.

Demostración.

Si se tiene la acción de la forma,

$$S = \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{L}(q(t), \dot{q}(t), t)\, dt$$

con tal de hallar las funciones $q(t)$ que extremizan S, se deberán curvas o caminos aledaños de la forma,



$$\bar{q}(t) = q(t) + \epsilon \eta(t)$$

en donde ϵ es un parámetro real y $\eta(t)$ es una función continua diferenciable que se hace cero en $\eta(t_1) = \eta(t_2) = 0$. Ahora bien, sustituyendo $\bar{q}(t)$ por $q(t)$ y $\dot{\bar{q}}(t)$ por $\dot{q}(t)$ tenemos,

$$\Phi(\epsilon) = S(\bar{q}) = \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{L}(\bar{q}(t), \dot{\bar{q}}(t), t)\, dt$$

La función $\bar{q}(t)$ alcanzará un punto estacionario cuando la función $\Phi(\epsilon)$ alcance un extremo en $\epsilon = 0$, así pues, $\bar{q}$ será igual a q. Bajo esta condición tenemos,

$$\delta S = 0 = \left(\frac{d\Phi}{d\epsilon}\right)_{\epsilon=0} = \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \bar{q}} \frac{\partial \bar{q}}{\partial \epsilon} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\bar{q}}} \frac{\partial \dot{\bar{q}}}{\partial \epsilon}\right)_{\epsilon=0} dt$$

Si definimos,

$$\frac{\partial \bar{q}}{\partial \epsilon} = \eta = \delta q \quad , \quad \frac{\partial \dot{\bar{q}}}{\partial \epsilon} = \eta' = \delta \dot{q}$$

tenemos que, para $\epsilon = 0$, $\bar{q} = q$ y $\dot{\bar{q}} = \dot{q}$,

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q} \delta q + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} \delta \dot{q}\right) dt$$

Para sistemas conservativos y holónomos, las funciones que extremizan el funcional S vendrán dadas por $q_1(t)$ a $q_n(t)$, las cuales son las coordenadas generalizadas para el sistema con lagrangiano $\mathcal{L}(q, \dot{q}, t)$. Estas deberán ser mutuamente independientes con tal de que cada variación $\delta q_i(t_1) = \delta q_i(t_2) = 0$, $i = 1, \dots, n$, sea independiente de las otras. Igualmente,

$$\bar{q}_1 = q_1(t) + \delta q_1(t) \quad \dots \quad \bar{q}_n = q_n(t) + \delta q_n(t)$$

Tenemos entonces,

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} \sum_i \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} \delta q_i + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \delta \dot{q}_i \right) dt = 0$$

Resolviendo concluimos que,

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} \sum_i \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} \delta q_i + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} \frac{d \delta q_i}{dt} \right) dt = 0$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt}(f(t) g(t)) = g \frac{df}{dt} + f \frac{dg}{dt} \quad , \quad f \frac{dg}{dt} = \frac{d}{dt}(fg) - g \frac{df}{dt}$$

$$\rightarrow \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \frac{d}{dt} \delta q_i = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \delta q_i \right) - \delta q_i \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i}$$

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} \delta q_i + \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \delta q_i \right) - \delta q_i \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \right) dt = 0$$

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \delta q_i \right) dt + \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} \delta q_i - \delta q_i \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \right) dt$$

$$\int_{t_1}^{t_2} \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \delta q_i \right) dt = \int_{t_1}^{t_2} d\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \delta q_i \right)$$

$$= \left. \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \delta q_i \right|_{t_1}^{t_2} \rightarrow$$ Dado que en t_1 y en t_2 $\delta q_i(t_1) = 0$ y $\delta q_i(t_2) = 0$, este termino va a cero, por lo que nos queda,

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} - \frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \right) \delta q_i \, dt = 0$$

Considerando el lema fundamental del cálculo variacional, y dado que δq_i son mutuamente independientes, podemos tomar todos los valores iguales a cero.

Así pues, nos queda que,

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \right) = 0 \quad , \; i = 1, \ldots, n.$$

• EJERCICIO #8

Para sistemas no conservativos tenemos que,

$$\mathcal{L}(q, \dot{q}, t) = T(q, \dot{q}) - U(q, \dot{q})$$

Se debe entonces aplicar el principio de acción estacionaria incluyendo el trabajo de las fuerzas no conservativas δW_{nc} expresado de la forma,

$$\delta W_{nc} = \int_{t_1}^{t_2} Q \, \delta q \, dt$$

en donde Q es la fuerza generalizada asociada a las fuerzas no conservativas. Entonces, considerando que

$$\delta S + \delta W_{nc} = 0$$

Así,

$$\int_{t_1}^{t_2} \delta \mathcal{L}(q, \dot{q}, t) \, dt + \int_{t_1}^{t_2} Q \, \delta q \, dt = 0$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q} = \left(\frac{\partial T}{\partial q} - \frac{\partial U}{\partial q} \right) \delta q \quad , \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial U}{\partial \dot{q}} \right) \delta \dot{q}$$

$$\int_{t_1}^{t_2} \left[\left(\frac{\partial T}{\partial q} - \frac{\partial U}{\partial q} \right) \delta q + \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial U}{\partial \dot{q}} \right) \delta \dot{q} \right] dt + \int_{t_1}^{t_2} Q \, \delta q \, dt = 0$$

$$\int_{t_1}^{t_2} \left[\left(\frac{\partial T}{\partial q} - \frac{\partial U}{\partial q} \right) - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial U}{\partial \dot{q}} \right) \right] \delta q \, dt + \int_{t_1}^{t_2} Q \, \delta q \, dt = 0$$

$$\int_{t_1}^{t_2} \left(\left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q} - \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} \right] + Q \right) \delta q \, dt = 0$$

, Finalmente concluimos que,

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q} - \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} + Q = 0$$

· EJERCICIO #9

Tenendo el lagrangiano,

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} m \dot{\vec{x}} \cdot \dot{\vec{x}} - q\phi + \frac{q}{c} \vec{A} \cdot \dot{\vec{x}}$$

expresando $\mathcal{L}$ con notación de índices tenemos,

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} m \dot{x}_i^2 - q\phi + \frac{q}{c} A_i \dot{x}_i$$

Resolviendo,

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_i} - \frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}_i} = 0$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_i} = -q\partial_i\phi + \frac{q}{c}\partial_i (A_j \dot{x}_j) \Rightarrow q\partial_i\phi + \frac{q}{c}\partial_i A_j \dot{x}_j$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}_i} = m\dot{x}_i + \frac{q}{c} A_i \Rightarrow \frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}_i} = m\ddot{x}_i + \frac{q}{c} d_t A_i$$

Teniendo en cuenta que,

$$d_t A_i = \frac{dA_i}{dt} = \frac{\partial A_i}{\partial t} + \frac{\partial A_i}{\partial x_j}\dot{x}_j$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}_i} = m\ddot{x}_i + \frac{q}{c}\partial_t A_i + \partial_j A_i \dot{x}_j$$

$$\Rightarrow -q\partial_i\phi + \frac{q}{c}\partial_i A_j \dot{x}_j - m\ddot{x}_i - \frac{q}{c}\partial_t A_i - \partial_j A_i \dot{x}_j = 0$$

$$m\ddot{x}_i = -q\partial_i\phi + \frac{q}{c}\partial_i A_j \dot{x}_j - \frac{q}{c}\partial_t A_i - \partial_j A_i \dot{x}_j$$

$$m\ddot{x}_i = -q\partial_i\phi - \frac{q}{c}\partial_t A_i + \frac{q}{c}\partial_i A_j \dot{x}_j - \partial_j A_i \dot{x}_j$$

$$m\ddot{x}_i = -q\frac{\partial \phi}{\partial x_i} - \frac{q}{c}\frac{\partial A_i}{\partial t} + \frac{q}{c}\dot{x}_j\left(\frac{\partial A_j}{\partial x_i} - \frac{\partial A_i}{\partial x_j}\right)$$

Ahora bien, considerando que,

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$$

en donde $A_\mu = (\phi, \vec{A})$ y $\partial_\mu \in (\partial_t, \partial_i)$, con $E_i = -\partial_i \phi - \frac{1}{c}\partial_t A_i$ y $B_i = \epsilon_{ijk}\partial_j A_k$, tenemos,

$$F_{ij} = \partial_i A_j - \partial_j A_i \Rightarrow \epsilon_{ijk} B_k$$

Por consiguiente,

$$m\ddot{x}_i = -q\,\partial_i \phi - \frac{q}{c}\partial_t A_i + \frac{q}{c}\dot{x}_j(\partial_i A_j - \partial_j A_i)$$

$$m\ddot{x}_i = q\left(E_i + \frac{1}{c}\epsilon_{ijk}\dot{x}_j B_k\right)$$

En notación vectorial,

$$\vec{F} = m\vec{a} = q\left(\vec{E} + \frac{1}{c}\vec{v}\times\vec{B}\right) \quad \text{con} \quad \begin{array}{l} \vec{E} = -\nabla\phi - \frac{1}{c}\frac{\partial\vec{A}}{\partial t} \\ \vec{B} = \nabla\times\vec{A} \end{array}$$

El momento canónico será,

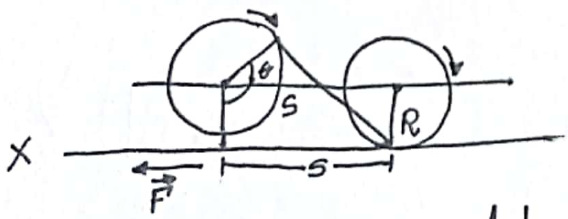
$$P_i = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}_i} = m\dot{x}_i + \frac{q}{c}A_i$$

El momento canónico se conservará en tanto que $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_i} = 0$, si $\vec{A}$ y ϕ no dependen de las coordenadas x_i (son cíclicas), la cantidad P_i se conservará.

• EJERCICIO # 10

Cuando hay rodadura pura la velocidad del centro de masa será proporcional a $\dot{x} = R\dot{\theta}$, o bien $V_{cm} = \frac{ds}{dt} = \frac{d(R\theta)}{dt} = R\frac{d\theta}{dt} \rightarrow \dot{x} = R\dot{\theta}$. La ecuación de ligadura tendrá la forma,

$$\frac{dx}{dt} - R\frac{d\theta}{dt} = 0 \Rightarrow dx - R\,d\theta = 0$$



El lagrangiano del sistema puede escribirse como la suma de la energía cinética traslacional más la energía cinética rotacional junto a la energía potencial debida a la fuerza conservativa $\vec{F} = f\hat{x}$. Esto es,

$$\mathcal{L} = T_{TRA} + T_{ROT} + V$$

$$T_{TRAS} = \frac{1}{2}M\dot{x}^2 \quad , \quad T_{ROT} = \frac{1}{2}I\dot{\theta}^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}MR^2\right)\dot{\theta}^2 = \frac{1}{4}MR^2\dot{\theta}^2$$

Con $\vec{F} = f\hat{x}$ y $\vec{F} = -\nabla V$, tenemos que, $-\frac{\partial V}{\partial x} = -f \Rightarrow V(x) = fx + C$. Tomando a C como 0 vemos que $V = fx$. Así,

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}M\left(\dot{x}^2 + \frac{1}{2}R^2\dot{\theta}^2\right) + fx$$

Tomando a x y a θ como coordenadas generalizadas, y utilizando el método de los multiplicadores de Lagrange tenemos que,

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}M\left(\dot{x}^2 + \frac{1}{2}R^2\dot{\theta}^2\right) + fx + \left[\lambda(\dot{x} - R\dot{\theta})\right]$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} = f \quad , \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}} = M\dot{x} \qquad \Rightarrow \frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}} = M\ddot{x}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta} = 0 \quad , \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}} = \frac{1}{2}MR^2\dot{\theta} \qquad \Rightarrow \frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}} = \frac{1}{2}MR^2\ddot{\theta}$$

$> M\ddot{x} - f = 0$

$> \frac{1}{2}MR^2\ddot{\theta} = 0$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} = 0$$

Según el método de multiplicadores de Lagrange tendremos que,

$$-\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} + \frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} = Q_i = -\sum_{k} \lambda a_i \rightarrow$$

$x = R\theta \quad , \quad x - R\theta = 0$

$\delta x - R\delta\theta = 0 \iff \dot{x} = R\dot{\theta}$

$dx - Rd\theta = 0$

$a_1 = 1,$

$a_2 = -R$

$> M\ddot{x} - f = -\lambda \quad (1)$

$> \frac{1}{2}MR^2\ddot{\theta} = \lambda R \quad (2)$

$> \dot{x} = R\dot{\theta} \quad (3)$

$$M\ddot{x} - f = -\lambda \quad (1)$$

$$\frac{1}{2}MR^2\ddot{\theta} = \lambda R \quad (2)$$

$$\ddot{x} = R\ddot{\theta} \quad (3)$$

Empleando (1), (2) y (3) encontramos que

$$M\ddot{x} + \lambda = f \;,\; \lambda = \frac{1}{2}MR\ddot{\theta}$$

$$M\ddot{x} + \frac{1}{2}MR^2\ddot{\theta} = f$$

$$MR\ddot{\theta} + \frac{1}{2}MR^2\ddot{\theta} = f$$

$$\frac{3}{2}MR\ddot{\theta} = f$$

Así,

$$\ddot{\theta} = \frac{2}{3}\frac{f}{MR}$$

$$\ddot{x} = \frac{2}{3}\frac{f}{M}$$

Igualmente,

$$\frac{1}{2}MR^2\ddot{\theta} = \lambda R \;,\; \frac{1}{\cancel{2}}\cancel{M}\cancel{R^2}\frac{\cancel{2}}{3}\frac{f}{\cancel{MR}} = \lambda \cancel{R}$$

$$\lambda = \frac{f}{3}$$

La fricción estática es la que asegura la rodadura pura, así pues, esta fuerza debería ser igual al multiplicador de Lagrange. Si empleamos la segunda ley de Newton vemos que,

$$M\ddot{x} = F - f_s$$

$$\cancel{M}\frac{2}{3}\frac{f}{\cancel{M}} = f - f_s$$

$$f_s = f - \frac{2f}{3}$$

$$f_s = \frac{f}{3} = \lambda$$

• EJERCICIO # 11

Teniendo en cuenta que,

$$x_1 = A\cosh\left(\frac{y_1 - B}{A}\right) \quad , \quad x_2 = A\cosh\left(\frac{y_2 - B}{A}\right)$$

Para A se tiene que,

$$\cosh^{-1}\left(\frac{x_1}{A}\right) = \frac{y_1 - B}{A} \quad , \quad \cosh^{-1}\left(\frac{x_2}{A}\right) = \frac{y_2 - B}{A}$$

$$\cosh^{-1}\left(\frac{x_1}{A}\right) - \cosh^{-1}\left(\frac{x_2}{A}\right) = \frac{y_1 - y_2}{A}$$

$$A = \frac{y_1 - y_2}{\cosh^{-1}(x_1/A) - \cosh^{-1}(x_2/A)}$$

A puede encontrarse de forma numérica, una vez obtenido este valor, para B tenemos que

$$\cosh^{-1}\left(\frac{x_1}{A}\right) = \frac{y_1 - B}{A}$$

$$B = y_1 - A\cosh^{-1}\left(\frac{x_1}{A}\right)$$

Para conocer los puntos de inflexión es necesario buscar los valores de la función donde la curvatura cambia de signo. Así pues,

$$x(y) = A\cosh(y - B/A)$$

$$x' = \operatorname{senh}(y - B/A)$$

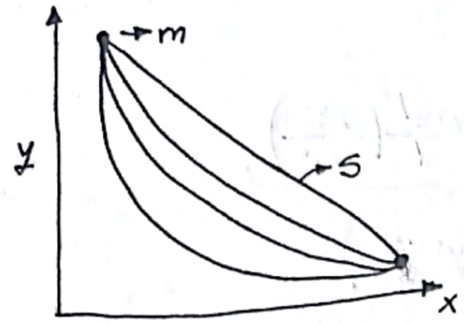
$$x'' = A^{-1}\cosh(y - B/A)$$

Sabiendo que los puntos de inflexión ocurren en $x''(y) = 0$, se requeriría que $\cosh(y - B/A) = 0$, sin embargo, esto no ocurre dado que $\cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} > 0 \ \forall x \in \mathbb{R}$, por lo tanto, no hay puntos de inflexión.

Dado que $x''(y)$ es siempre positiva, las curvas siempre serán concavas hacia arriba (siempre se conserva la misma concavidad). Igualmente, la longitud de las curvas estarán definidas por el valor de la constante A, mientras que la constante B definirá su posición.

• EJERCICIO #12

La braquistócrona



Hallar la trayectoria bajo la cual la masa m llega al final de la trayectoria en el tiempo mínimo.

Por el teorema de conservación de la energía sabemos que,

$$\frac{1}{2}mv^2 = mgy \implies v = \sqrt{2gy}$$

El tiempo que le toma a la masa deslizarse a lo largo de la curva S es,

$$v = \sqrt{2gy} = \frac{ds}{dt} \rightarrow dt = \frac{ds}{\sqrt{2gy}} = \sqrt{\frac{dx^2 + dy^2}{2gy}}$$

$$dt = \sqrt{\frac{1 + y'^2}{2gy}}\,dx$$

La cantidad a ser minimizada en este problema será,

$$J = \int_i^f \sqrt{\frac{1+y'^2}{2gy}}\,dx \quad , \text{teniendo como funcional } \Phi(y, y') = \sqrt{\frac{1+y'^2}{2gy}}$$

Considerando que $y(0)=0$ y $y(x_0)=y_0$. Escribiendo las ecuaciones de Euler-Lagrange tenemos,

$$\frac{\partial \Phi}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial \Phi}{\partial \dot{y}}\right) = 0 \quad (1)$$

Podemos usar una forma alternativa de esta ecuación para cuando el funcional no depende de x. Dada la condición anterior se tiene que la derivada parcial del funcional con respecto a x será 0 y su derivada total será,

$$\frac{d\Phi}{dx} = \frac{\partial \Phi}{\partial y}\frac{dy}{dx} + \frac{\partial \Phi}{\partial y'}\frac{dy'}{dx}$$

Así,

$$\frac{d\Phi}{dx} = \frac{\partial \Phi}{\partial y}\frac{dy}{dx} + y''\frac{\partial \Phi}{\partial y'} = y'\frac{\partial \Phi}{\partial y} + y''\frac{\partial \Phi}{\partial y'}$$

Multiplicando (1) por y' obtenemos, $y'\frac{\partial \Phi}{\partial y} - y'\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial \Phi}{\partial y'}\right) = 0$

Añadiendo $y'' \frac{\partial \Phi}{\partial y'}$,

$$y' \frac{\partial \Phi}{\partial y} - y' \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial \Phi}{\partial y'}\right) + y'' \frac{\partial \Phi}{\partial y'} = y'' \frac{\partial \Phi}{\partial y'}$$

$$\underbrace{y' \frac{\partial \Phi}{\partial y} + y'' \frac{\partial \Phi}{\partial y'}}_{\frac{d\Phi}{dx}} = \underbrace{y'' \frac{\partial \Phi}{\partial y''} + y' \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial \Phi}{\partial y'}\right)}_{\frac{d}{dx}\left(y' \frac{\partial \Phi}{\partial y'}\right)}$$

$$\frac{d\Phi}{dx} = \frac{d}{dx}\left(y' \frac{\partial \Phi}{\partial y'}\right) \longrightarrow \frac{d}{dx}\left(\Phi - y' \frac{\partial \Phi}{\partial y'}\right) = 0$$

Podemos notar que el término en paréntesis es una constante, así;

$$\Phi - y' \frac{\partial \Phi}{\partial y'} = C$$

Aplicando esta formulación a nuestro funcional tenemos que,

$$\sqrt{\frac{1+y'^2}{2gy}} - y' \frac{\partial}{\partial y'}\left(\sqrt{\frac{1+y'^2}{2gy}}\right) = C$$

$$\frac{1}{\sqrt{2g}} \sqrt{\frac{1+y'^2}{y}} - \frac{y'}{\sqrt{2gy}} \cdot \frac{y'}{(1+y'^2)^{1/2}} = C$$

$$\sqrt{\frac{1+y'^2}{y}} - \frac{y'^2}{\sqrt{y}\,(1+y'^2)^{1/2}} = C \cdot \sqrt{2g}$$

$$\frac{1}{\sqrt{y}}\left(\sqrt{1+y'^2} - \frac{y'^2}{\sqrt{1+y'^2}}\right) = C \cdot \sqrt{2g}$$

$$\frac{1}{\sqrt{y}}\left(\frac{(1+y'^2) - y'^2}{(1+y'^2)^{1/2}}\right) = C \cdot \sqrt{2g}$$

$$\frac{1}{\sqrt{y}}\left(\frac{1}{(1+y'^2)^{1/2}}\right) = C \cdot \sqrt{2g}$$

$$(y(1+y')^2)^{-1/2} = C\sqrt{2g} \longrightarrow y(1+y'^2) = \frac{C}{2g}$$

Ahora bien, si decimos que $y' = \cot\theta$, la ecuación diferencial resultante puede ser escrita como,

$$y(1+\cot^2\theta) = y/\operatorname{sen}^2\theta = \frac{c}{2g}$$

$$y = \frac{C\operatorname{sen}^2\theta}{2g}$$

Si consideramos que,

$$\frac{dx}{d\theta} = \frac{dx}{dy}\frac{dy}{d\theta} = \frac{1}{y'}\frac{dy}{d\theta} = \tan\theta\frac{dy}{d\theta}$$

$$\tan\theta\frac{dy}{d\theta} = \tan\theta\cdot\frac{2C}{2g}\operatorname{sen}\theta = \frac{C}{2g}\tan\theta\operatorname{sen}2\theta = \frac{C}{2g}(1-\cos 2\theta)$$

Integrando obtenemos,

$$x = \int\frac{C}{2g}(1-\cos 2\theta)\,d\theta = \frac{C}{2g}\left[\theta - \frac{\operatorname{sen}2\theta}{2}\right]$$

Si establecemos que $C/2g = 2A$ y $2\theta = \varnothing$, podemos reescribir nuestros resultados en términos de las ecuaciones paramétricas de un cicloide para x y y, esto es,

$$x = A(\varnothing - \operatorname{sen}\varnothing) \longrightarrow x = \frac{C}{4g}(\varnothing - \operatorname{sen}\varnothing)$$

$$y = A(1-\cos\varnothing) \longrightarrow y = \frac{C}{4g}(1-\cos\varnothing)$$