

Tarea 1

Teoría de Perturbaciones Cosmológicas - Dr. Alejandro Avilés

Enero - Junio 2025

Holman Daniel Quintero Salazar

hd.quinterosalazar@ugto.mx - github.com/hol1m4n

11/03/25

Ejercicio 1. Considera un fluido perfecto y verifica que las componentes espaciales de la ecuación de conservación $\nabla_\mu T^{\mu\nu} = 0$ en el límite Newtoniano llevan a

$$\partial_t \mathbf{v} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = -\nabla \phi_N - \frac{1}{\rho} \nabla \mathcal{P},$$

donde ϕ_N es el potencial Newtoniano. A esta ecuación se le conoce como ecuación de Euler. Analiza la componente '0' (i.e., $\nabla_\mu T^{\mu 0} = 0$) en este mismo límite.

Solución. Comenzaremos expresando el tensor de energía-momento de la forma,

$$T^{\mu\nu} = (\rho + \mathcal{P})U^\mu U^\nu + \mathcal{P}g^{\mu\nu}$$

en donde U^α es la 4-velocidad, ρ es la densidad de energía y \mathcal{P} es la presión del fluido. De esta manera obtendremos que,

$$\begin{aligned} \nabla_\alpha T^{\mu\nu} &= T^{\mu\nu}_{;\alpha} = 0 \\ T^{\mu\nu}_{;\alpha} &= [(\rho + \mathcal{P})U^\mu U^\nu]_{;\alpha} + [\mathcal{P}g^{\mu\nu}]_{;\alpha} \\ [(\rho + \mathcal{P})U^\mu U^\nu]_{;\alpha} &= (\rho + \mathcal{P})_{;\alpha} U^\mu U^\nu + (\rho + \mathcal{P})[U^\mu_{;\alpha} U^\nu + U^\mu U^\nu_{;\alpha}] \\ &= (\rho + \mathcal{P})_{;\alpha} U^\mu U^\nu + (\rho + \mathcal{P})U^\mu_{;\alpha} U^\nu + (\rho + \mathcal{P})U^\mu U^\nu_{;\alpha} \\ &= U^\mu [(\rho + \mathcal{P})_{;\alpha} U^\nu + (\rho + \mathcal{P})U^\nu_{;\alpha}] + (\rho + \mathcal{P})U^\mu_{;\alpha} U^\nu \\ &= U^\mu [\rho_{;\alpha} U^\nu + \mathcal{P}_{;\alpha} U^\nu + \rho U^\nu_{;\alpha} + \mathcal{P} U^\nu_{;\alpha}] + (\rho + \mathcal{P})U^\mu_{;\alpha} U^\nu \\ &= U^\mu [(\rho U^\nu)_{;\alpha} + (\mathcal{P} U^\nu)_{;\alpha}] + (\rho + \mathcal{P})U^\mu_{;\alpha} U^\nu \end{aligned}$$

Así, obtendremos que,

$$T_{;\alpha}^{\mu\nu} = U^\mu[(\rho U^\nu)_{;\alpha} + (\mathcal{P}U^\nu)_{;\alpha}] + (\rho + \mathcal{P})U_{;\alpha}^\mu U^\nu + \mathcal{P}_{;\alpha}g^{\mu\nu} + \mathcal{P}g_{;\alpha}^{\mu\nu}$$

Considerando que la métrica es covariantemente constante, es decir $g_{;\alpha}^{\mu\nu} = 0$, podemos concluir que,

$$T_{;\alpha}^{\mu\nu} = U^\mu[(\rho U^\nu)_{;\alpha} + (\mathcal{P}U^\nu)_{;\alpha}] + (\rho + \mathcal{P})U_{;\alpha}^\mu U^\nu + \mathcal{P}_{;\alpha}g^{\mu\nu}$$

Ahora bien, con esta expresión a la mano podemos argumentar que, según el principio de equivalencia de Einstein, la relación $(nU^\alpha)_{;\alpha} = 0$ se cumple. Adicionalmente, en el límite Newtoniano tendremos que $\rho \simeq nm = \rho_0$ de forma indistinta, donde se estipula igualmente que el término de la masa en reposo es aquel que domina, por tanto,

$$m(nU^\nu)_{;\alpha} = 0 \implies (\rho U^\nu)_{;\alpha} = 0$$

Igualmente, nos encontramos en el límite donde $v \ll 1$, v es la responsable por la energía cinética asociada con la presión de las partículas i.e., $p^\mu = mU^\mu = m\gamma(1, \vec{v})$, $\mathcal{P} \propto \vec{v}$, con $\vec{v} \rightarrow 0$, vamos a tener que $\mathcal{P} \ll \rho$, por consiguiente, de manera general se cumple que $\mathcal{P}U^\mu U_{;\alpha}^\nu \ll \rho U^\nu U_{;\alpha}^\mu$ y $\mathcal{P}U^\nu U_{;\alpha}^\mu \ll \rho U^\nu U_{;\alpha}^\mu$.

Bajo estas últimas consideraciones concluiremos que,

$$\begin{aligned} T_{;\alpha}^{\mu\nu} &= U^\mu[\cancel{(\rho U^\nu)_{;\alpha}} + (\mathcal{P}U^\nu)_{;\alpha}] + (\rho + \mathcal{P})U_{;\alpha}^\mu U^\nu + \mathcal{P}_{;\alpha}g^{\mu\nu} \\ T_{;\alpha}^{\mu\nu} &= \mathcal{P}_{;\alpha}U^\mu U^\nu + \cancel{\mathcal{P}U^\mu U_{;\alpha}^\nu} + \rho U^\nu U_{;\alpha}^\mu + \cancel{\mathcal{P}U^\nu U_{;\alpha}^\mu} + \mathcal{P}_{;\alpha}g^{\mu\nu} \\ T_{;\alpha}^{\mu\nu} &= \mathcal{P}_{;\alpha}U^\mu U^\nu + \rho U^\nu U_{;\alpha}^\mu + \mathcal{P}_{;\alpha}g^{\mu\nu} \end{aligned}$$

Dado que la presión es una cantidad escalar podemos observar que $\mathcal{P}_{;\alpha} = \mathcal{P}_{,\alpha}$, entonces,

$$T_{;\alpha}^{\mu\nu} = \mathcal{P}_{,\alpha}U^\mu U^\nu + \rho U^\nu U_{;\alpha}^\mu + \mathcal{P}_{,\alpha}g^{\mu\nu}$$

Computando la derivada covariante finalmente obtendremos,

$$T_{;\alpha}^{\mu\nu} = \mathcal{P}_{,\alpha}U^\mu U^\nu + \rho U^\nu (U_{;\alpha}^\mu + U^\beta \Gamma_{\beta\alpha}^\mu) + \mathcal{P}_{,\alpha}g^{\mu\nu}$$

$$T_{;\alpha}^{\mu\nu} = \mathcal{P}_{,\alpha}(U^\mu U^\nu + g^{\mu\nu}) + \rho U^\nu (U_{,\alpha}^\mu + U^\beta \Gamma_{\beta\alpha}^\mu)$$

$$T_{;\alpha}^{\mu\nu} = \mathcal{P}_{,\alpha}(U^\mu U^\nu + g^{\mu\nu}) + \rho U^\nu U_{,\alpha}^\mu + \rho U^\nu U^\beta \Gamma_{\beta\alpha}^\mu$$

En la expresión inmediatamente anterior están involucrados símbolos de Christoffel. Veremos que, en el límite Newtoniano, usando la métrica para este régimen ($g_{\mu\nu} = \text{diag}[-(1+2\phi), (1-2\phi), (1-2\phi), (1-2\phi)]$ y $g^{\mu\nu} = \text{diag}[-(1+2\phi)^{-1}, (1-2\phi)^{-1}, (1-2\phi)^{-1}, (1-2\phi)^{-1}]$) tendremos,

$$\Gamma_{00}^0 = \phi_{,t} + O(\phi^2) \ , \ \Gamma_{00}^i = \phi_{,i} + O(\phi^2)$$

$$\Gamma_{0j}^i = -\phi_{,0}\delta_j^i + O(\phi^2) \ , \ \Gamma_{jk}^i = \delta_{jk}\delta^{il}\phi_{,l} - \delta_j^i\phi_{,k} - \delta_k^i\phi_{,j} + O(\phi^2)$$

Analizamos término a término la siguiente expresión para los componentes espaciales,

$$T_{;\alpha}^{\mu\nu} = \mathcal{P}_{,\alpha}(U^\mu U^\nu + g^{\mu\nu}) + \rho U^\nu U_{,\alpha}^\mu + \rho U^\nu U^\beta \Gamma_{\beta\alpha}^\mu$$

$$T_{;\alpha}^{i\nu} = \mathcal{P}_{,\alpha}(U^i U^\nu + g^{i\nu}) + \rho U^\nu U_{,\alpha}^i + \rho U^\nu U^\beta \Gamma_{\beta\alpha}^i$$

- $\mathcal{P}_{,\alpha}(U^i U^\nu + g^{i\nu}) : U^i \ll 1 \therefore U^i U^\nu \rightarrow 0$

$$\mathcal{P}_{,\alpha}g^{i\nu} = \mathcal{P}_{,i}g^{i\nu} \ , \ g^{i\beta} = (1-2\phi)^{-1}\delta^{i\beta}$$

$$= \mathcal{P}_{,i}(1-2\phi)^{-1} \ , \ (1-2\phi)^{-1} = 1+2\phi + \dots$$

$$= \mathcal{P}_{,i}(1+2\phi), \text{ y dado que } \phi \ll 1 \text{ obtendremos que,}$$

$$= \mathcal{P}_{,i}$$

- $\rho U^\nu U^\beta \Gamma_{\beta\alpha}^i$: Dado que $U^0 \gg U^i$ veremos que,

$$\rho U^0 U^0 \Gamma_{00}^i \Rightarrow \rho U^0 U^0 \phi_{,i}$$

$$= \rho \gamma^2 \phi_{,i} \approx \rho \phi_{,i}$$

- $\rho U^\nu U_{,\alpha}^i$:

$$\rho U^0 U_{,0}^i = \rho \gamma^2 v_{,0}^i \simeq \rho v_{,0}^i$$

$$\rho U^j U_{,j}^i = \rho \gamma^2 v^j v_{,j}^i \simeq \rho v^j v_{,j}^i$$

Agrupando todos los términos tendremos que,

$$\mathcal{P}_{,i} + \rho \phi_{,i} + \rho v_{,0}^i + \rho v^j v_{,j}^i = 0$$

Así, en notación vectorial tendremos,

$$\nabla \mathcal{P} + \rho \nabla \phi + \rho \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \rho (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v} = 0$$

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v} = -\nabla \phi - \frac{1}{\rho} \nabla \mathcal{P}$$

Recuperamos la ecuación de Euler.

Bajo el mismo concepto realizamos el análisis de $\nabla_\mu T^{\mu 0}$ sobre los resultados obtenidos previamente, así, vemos que,

$$T_{;\alpha}^{\mu\nu} = \mathcal{P}_{,\alpha}(U^\mu U^\nu + g^{\mu\nu}) + \rho U^\nu U_{,\alpha}^\mu + \rho U^\nu U^\beta \Gamma_{\beta\alpha}^\mu$$

$$T_{;\alpha}^{\mu 0} = \mathcal{P}_{,\alpha}(U^\mu U^0 + g^{\mu 0}) + \rho U^0 U_{,\alpha}^\mu + \rho U^0 U^\beta \Gamma_{\beta\alpha}^\mu$$

- $\mathcal{P}_{,\alpha}(U^i U^\nu + g^{i\nu}) :$

$$U^0 U^0 + g^{00} = \gamma^2 + (-(1 + 2\phi)^{-1}) \simeq \gamma^2 - 1 + 2\phi \simeq 0 \quad \text{considerando que } \phi \ll 1.$$

$$U^i U^0 + g^{i0} : U^i \ll 1 \therefore U^i U^\nu \rightarrow 0, \text{ y } g^{i0} = 0.$$

- $\rho U^0 U^\beta \Gamma_{\beta\alpha}^i : U^0 \gg U^i$

$$\rho U^0 U^0 \Gamma_{00}^0 = \phi_{,0} + O(\phi^2), \text{ en el régimen Newtoniano tendremos que } \phi_{,0} = 0.$$

- $\rho U^0 U_{,\alpha}^\mu :$ En $U_{,\alpha}^\mu$ los términos cruzados desaparecen, así pues, nos quedamos con $U_{,\mu}^\mu$.

$$\begin{aligned} \rho U^0 U_{,0}^0 + \rho U^0 U_{,i}^i &= \rho \gamma(\gamma)_{,0} + \rho \gamma(\gamma v^i)_{,i} \\ \rho U^0 U_{,0}^0 + \rho U^0 U_{,i}^i &= (\rho \gamma^2)_{,0} + (\rho \gamma^2 v^i)_{,i} \\ \rho U^0 U_{,0}^0 + \rho U^0 U_{,i}^i &= (\rho)_{,0} + (\rho v^i)_{,i}, \text{ o bien,} \\ &\quad \rho \partial_t + \rho v^i \partial_i \end{aligned}$$

Agrupando términos y expresando en notación vectorial tendremos que,

$$\begin{aligned} \rho \partial_t + \rho v^i \partial_i &= 0 \\ \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{v}) &= 0 \end{aligned}$$

Recuperamos la ecuación de continuidad.

Ejercicio 2. Considera un fluido perfecto con ecuación de estado $\mathcal{P} = w\rho$ medida por un observador con cuadrivelocidad $(1, \vec{0})$ en un espacio de Minkowski. Demuestra que para otro observador $v^\mu = (\gamma, \gamma v^i)$, con una velocidad relativa v y un factor de Lorentz $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-v^2}}$, la densidad y la presión transforman como

$$\begin{aligned}\rho|_v &= \gamma^2 \rho + \mathcal{P}(\gamma^2 - 1) = \rho \left[\gamma^2 + w(\gamma^2 - 1) \right] \\ 3\mathcal{P}|_v &= (\rho + \mathcal{P})(\gamma^2 - 1) + 3\mathcal{P} = \rho \left[(1 + w)3\mathcal{P} + 3w \right] \\ w|_v &= \frac{1}{3} \frac{(1 + w)3\mathcal{P} + 3w}{\gamma^2 + w(\gamma^2 - 1)}\end{aligned}$$

¿Para qué valores de w se obtiene $w|_v = w$? Es decir, encuentra los valores para los que el parámetro de la ecuación de estado es un invariante de Lorentz.

Demuestra que cuando $w < -1$ siempre habrá observadores que midan una densidad de energía negativa.

Solución. Consideraremos un fluido perfecto con ecuación de estado $\mathcal{P} = w\rho$ medido en su sistema de reposo (observador con cuadrivelocidad $U^\mu = (1, \vec{0})$) en espacio Minkowski. En este marco, el tensor energía-momento es $T^{\mu\nu} = (\rho + \mathcal{P})U^\mu U^\nu + \mathcal{P}g^{\mu\nu}$, cuyas componentes en el sistema de reposo son $T^{00} = \rho$, $T^{ii} = \mathcal{P}$ y $T^{0i} = 0$.

Para otro observador con cuadrivelocidad $V^\mu = (\gamma, \gamma v^i)$, la densidad de energía medida $\rho|_v$ es el componente $T^{\mu\nu}V_\mu V_\nu$. Tomando la métrica $\eta_{\mu\nu} = \text{diag}(1, -1, -1, -1)$, tenemos que $V_\mu = \eta_{\mu\nu}V^\nu = (\gamma, -\gamma v^i)$. Entonces:

$$\begin{aligned}\rho|_v &= T^{\mu\nu}V_\mu V_\nu = T^{00}(V_0)^2 + 2T^{0i}V_0V_i + T^{ij}V_iV_j \\ \rho|_v &= T^{00}(V_0)^2 + T^{ij}V_iV_j = \rho(\gamma)^2 + \mathcal{P}\delta^{ij}V_iV_j \\ \rho|_v &= \gamma^2 \rho + \mathcal{P}\gamma^2 v^2 \\ \rho|_v &= \gamma^2 \rho + \mathcal{P}(\gamma^2 - 1) \\ \rho|_v &= \rho \left[\gamma^2 + w(\gamma^2 - 1) \right]\end{aligned}$$

Ahora bien, para el observador en el marco $|_v$, el fluido deja de ser isótropo, esto como producto de que las presiones medidas en las direcciones paralelas y perpendiculares difieren. Podemos obtener la presión efectiva isótropa ($\mathcal{P}|_v$) tomando que,

$$3\mathcal{P}|_v = T^{\bar{1}\bar{1}} + T^{\bar{2}\bar{2}} + T^{\bar{3}\bar{3}}$$

Aplicamos un *boost* de Lorentz para obtener las componentes $T^{\bar{i}\bar{j}}$

$$\begin{aligned} T^{\bar{2}\bar{2}} &= \gamma^2 v^2 \rho + \gamma^2 \mathcal{P} \\ T^{\bar{2}\bar{2}} &= T^{\bar{3}\bar{3}} = \mathcal{P} \end{aligned}$$

Computando y simplificando términos veremos que,

$$\begin{aligned} T^{\bar{1}\bar{1}} + T^{\bar{2}\bar{2}} + T^{\bar{3}\bar{3}} &= (\gamma^2 v^2 \rho + \gamma^2 \mathcal{P}) + \mathcal{P} + \mathcal{P} \\ T^{\bar{1}\bar{1}} + T^{\bar{2}\bar{2}} + T^{\bar{3}\bar{3}} &= (\gamma^2 - 1)\rho + \gamma^2 \mathcal{P} + 2\mathcal{P} \\ T^{\bar{1}\bar{1}} + T^{\bar{2}\bar{2}} + T^{\bar{3}\bar{3}} &= (\gamma^2 - 1)\rho + (\gamma^2 + 2)\mathcal{P} \\ T^{\bar{1}\bar{1}} + T^{\bar{2}\bar{2}} + T^{\bar{3}\bar{3}} &= (\gamma^2 - 1)\rho + \gamma^2 \mathcal{P} + 2\mathcal{P} \\ T^{\bar{1}\bar{1}} + T^{\bar{2}\bar{2}} + T^{\bar{3}\bar{3}} &= (\gamma^2 - 1)\rho + (\gamma^2 - 1 + 3)\mathcal{P} \\ T^{\bar{1}\bar{1}} + T^{\bar{2}\bar{2}} + T^{\bar{3}\bar{3}} &= (\gamma^2 - 1)(\rho + \mathcal{P}) + 3\mathcal{P} \end{aligned}$$

$$P|_v = \frac{1}{3} \left[(\gamma^2 - 1)(\rho + \mathcal{P}) + 3\mathcal{P} \right] = \frac{1}{3} \left[(\gamma^2 - 1)\rho(1 + w) + 3w\rho \right] = \rho \frac{(1 + w)(\gamma^2 - 1) + 3w}{3}$$

$$3P|_v = (\gamma^2 - 1)(\rho + \mathcal{P}) + 3\mathcal{P} = \rho \left[(1 + w)(\gamma^2 - 1) + 3w \right]$$

De forma recíproca tendremos que,

$$w|_v = \frac{\mathcal{P}|_v}{\rho|_v} = \frac{1}{3} \frac{(1 + w)(\gamma^2 - 1) + 3w}{\gamma^2 + w(\gamma^2 - 1)}$$

Entonces, si se quiere encontrar un valor para w en el cual $w|_v = w$ para cualquier velocidad v , se tiene que,

$$\begin{aligned} \frac{1}{3} \frac{(1 + w)(\gamma^2 - 1) + 3w}{\gamma^2 + w(\gamma^2 - 1)} &= w \\ (1 + w)(\gamma^2 - 1) + 3w &= 3w(\gamma^2 + w(\gamma^2 - 1)) \\ (1 + w)(\gamma^2 - 1) + 3w &= 3w\gamma^2 + 3w^2(\gamma^2 - 1) \\ \gamma^2(1 - 2w - 3w^2) + (-1 + 2w + 3w^2) &= 0 \end{aligned}$$

Para que esta condición se satisfaga se deberá cumplir que, para todo $\gamma(v)$, $(1 - 2w - 3w^2) = 0$ y $(-1 + 2w + 3w^2) = 0$. Resolviendo las ecuaciones cuadráticas veremos que,

$$w = \frac{-2 \pm \sqrt{4 - 4(3)(-1)}}{(2)(3)} = \frac{-2 \pm 4}{6}$$

Los valores $w = \frac{1}{3}$ y $w = -1$ son para los cuales el parámetro de ecuación de estado es invariante bajo transformaciones de Lorentz (respectivamente un gas de radiación relativista y energía de vacío).

Si consideramos el caso cuando $w < -1$ y, además, $\rho > 0$ veremos que

$$\begin{aligned}\rho|_v &= \rho \left[\gamma^2 + w(\gamma^2 - 1) \right] \\ f(\gamma) &= \gamma^2 + w(\gamma^2 - 1) = \gamma^2(1 + w) - w\end{aligned}$$

$f(\gamma)$ es el factor por el cual se multiplica la densidad original ρ . Para que $\rho|_v$ sea negativa, necesitamos $f(\gamma) < 0$. Si tomamos el caso cuando $f(\gamma)$ como función de γ (con w fijo < -1):

$$f(\gamma) = \gamma^2(1 + w) - w.$$

Para $\gamma = 1$ (observador en reposo con el fluido, $v = 0$):

$$f(1) = 1(1 + w) - w = 1 + w - w = 1.$$

De modo que $\rho|_{v=0} = \rho$ es positiva (como debe ser, pues es el marco de reposo original).

A medida que $\gamma \rightarrow \infty$, el término $\gamma^2(1 + w)$ será negativo si $w < -1$. En este régimen, este término negativo en magnitud supera al término constante $-w$.

Ahora bien, imponiendo $f(\gamma) = 0$:

$$\gamma^2(1 + w) = w \implies \gamma^2 = \frac{w}{1 + w}.$$

Dado que $w < -1$

$$\frac{w}{1 + w} > 1.$$

Esto implica $\gamma^2 > 1$, de modo que $\gamma > 1$. Es decir, existe una velocidad no nula para la cual $\rho|_v = 0$. Para γ mayor que ese valor, es decir, un observador con velocidad aún más cercana a c , se tiene

$$f(\gamma) = \gamma^2(1 + w) - w < 0 \implies \rho|_v < 0,$$

es decir, mediría energía negativa. En tal caso, $\rho|_v$ es negativa.

Si $w < -1$ siempre se podrá encontrar un observador para el cual la densidad de energía sea negativa ($\rho|_v < 0$). Esto indica que fluidos con $w < -1$ violan la condición de energía débil.

Ejercicio 3. (*Neutrinos masivos*) Realiza una gráfica log-log de la razón entre las densidades de neutrinos (puedes asumir que sólo una generación es masiva) y de fotones, $\rho_\nu(a)/\rho_\gamma(a)$, en función del factor de escala, para $m_\nu = 0.01$ eV, $m_\nu = 0.1$ eV y $m_\nu = 1$ eV. Esto muestra cuándo los neutrinos masivos dejan de ser relativistas. Tip: revisa la sección 2.4.4 del texto de Dodelson & Schmidt (2020) y en particular la figura 2.5

Muestra que la densidad de energía de cada especie de neutrino es,

$$\rho_\nu(z \gg z_{\text{nr}}) = \frac{7\pi^2}{120} T_{\nu,0}^4 (1+z)^4$$

$$\rho_\nu(z \ll z_{\text{nr}}) = \frac{m_\nu}{93.14 h^2 \text{eV}} \frac{3H_0^2}{8\pi G} (1+z)^3$$

Esto demuestra que la abundancia de neutrinos masivos hoy en día está dado por,

$$\Omega_\nu^0 = \frac{\sum m_\nu}{93.14 h^2 \text{eV}}$$

Solución. La densidad de fotones en función del factor de escala viene dado por,

$$\rho_\gamma(a) = \frac{\pi^2}{15} \left(\frac{T_{\gamma,0}}{a} \right)^4.$$

Por otro lado, la densidad de neutrinos en función del factor de escala corresponde a la siguiente expresión,

$$\rho_\nu(a) = \frac{T_{\nu,0}^4}{2\pi^2 a^4} \int_0^\infty q^2 \sqrt{q^2 + \left(\frac{m_\nu a}{T_{\nu,0}} \right)^2} \frac{1}{e^q + 1} dq$$

$$\text{siendo } T_{\nu,0} = \left(\frac{4}{11} \right)^{\frac{1}{3}} T_{\gamma,0} \text{ y } q = p/T_{\nu,0}.$$

Además de esto se cumple que,

$$\frac{m_\nu a}{T_{\nu,0}} \sim 1. \text{ La gráfica se presenta en la figura 1.}$$

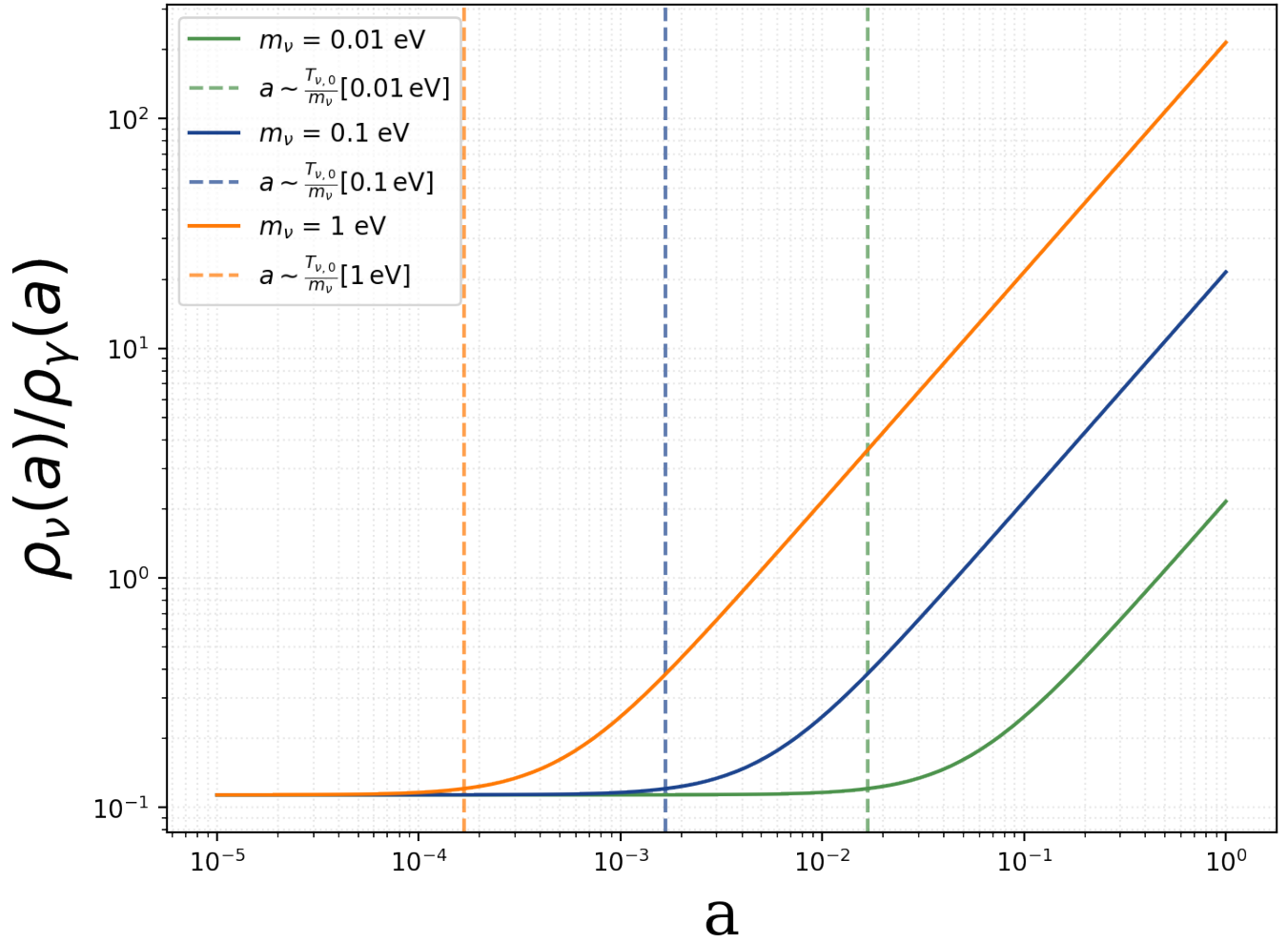


Figura 1: Cociente entre neutrinos y fotones en función del factor de escala.

Tras su desacoplamiento los neutrinos conservan una distribución de Fermi-Dirac, la cual viene dada por,

$$f(p) = \frac{1}{e^{E(p)/T_\nu} + 1}$$

- Régimen relativista

En este régimen $E \approx p$. Asumiendo un potencial químico nulo y dos grados de libertad internos tendremos que,

$$\begin{aligned} \rho_\nu &= g \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} E(p) f(p) \\ \rho_\nu &= g \frac{4\pi}{(2\pi)^3} \int_0^\infty p^3 \frac{dp}{e^{p/T_\nu} + 1} = \frac{g}{2\pi^2} \int_0^\infty \frac{p^3 dp}{e^{p/T_\nu} + 1} \end{aligned}$$

realizando el cambio de variable $x = \frac{p}{T_\nu}$ (de modo que $p^3 dp = T_\nu^4 x^3 dx$) obtenemos ,

$$\rho_\nu = \frac{gT_\nu^4}{2\pi^2} \int_0^\infty \frac{x^3 dx}{e^x + 1}, \quad \int_0^\infty \frac{x^3 dx}{e^x + 1} = \frac{7}{8} \int_0^\infty \frac{x^3 dx}{e^x - 1} = \frac{7}{8} \frac{\pi^4}{15}$$

$$\rho_\nu = \frac{gT_\nu^4}{2\pi^2} \cdot \frac{7}{8} \frac{\pi^4}{15}$$

La densidad de cada especie relativista resulta ser,

$$\rho_{\nu,\text{rel}} = \frac{7\pi^2}{120} T_\nu^4$$

Ahora bien, si se tiene en cuenta la expansión adiabática del Universo veremos que,

$$\rho_{\nu,\text{rel}}(z) = \frac{7\pi^2}{120} T_\nu^4(z) = \frac{7\pi^2}{120} [T_{\nu,0}(1+z)]^4$$

- Régimen no relativista

En este régimen la densidad másica será proporcional a la densidad numérica multiplicada por la masa, esto es $\rho_\nu \approx m_\nu n_\nu$. Igualmente, la densidad numérica decrece únicamente por la expansión: $n_\nu \propto a^{-3}$, esto significa $n_\nu(z) = n_{\nu,0}(1+z)^3$, donde $n_{\nu,0}$ es la densidad numérica actual de neutrinos.

Usando nuevamente la distribución Fermi-Dirac podremos encontrar que, cada especie de neutrino actualmente tiene una densidad de,

$$n_\nu = \frac{g}{2\pi^2} T_\nu^3 \int_0^\infty \frac{x^2}{e^x + 1} dx$$

$$n_\nu = \frac{3\zeta(3)}{2\pi^2} T_\nu^3$$

$$n_\nu(z) = n_{\nu,0}(1+z)^3, \text{ así, } \rho(z) \approx m_\nu n_{\nu,0}(1+z)^3$$

Por otro lado, también veremos que, con $n_\gamma = \frac{\zeta(3)}{\pi^2} g_\gamma T_\gamma^3$,

$$\frac{n_\nu}{n_\gamma} = \frac{3}{4} \frac{g_\nu}{g_\gamma} \left(\frac{T_\nu}{T_\gamma} \right)^3 = \frac{3}{11}$$

$$\begin{aligned}\rho_\nu &= m_\nu n_\nu = \frac{3}{11} m_\nu n_\gamma \\ \Omega_\nu h^2 &= \frac{\rho_\nu}{\rho_\gamma} \Omega_\gamma h^2 = \frac{3}{11} m_\nu \frac{n_\gamma}{\rho_\gamma} \Omega_\gamma h^2 = \frac{90\zeta(3)}{11\pi^4} \frac{m_\nu}{T} \Omega_\gamma h^2 \\ \Omega_\nu &\approx \frac{m_\nu}{93.14 h^2 \text{eV}}\end{aligned}$$

Haciendo uso de las definiciones $\rho_{\text{cri},0} = \frac{3H_0^2}{8\pi G}$, $\Omega_{\nu,0} = \frac{\rho_{\nu,0}}{\rho_{\text{cri},0}}$, concluimos que,

$$\rho_\nu(z) = \frac{m_\nu}{93.14 h^2 \text{eV}} \frac{3H_0^2}{8\pi G} (1+z)^3$$

Ejercicio 4. Encuentra el número de onda que iguala el inverso de la tasa de Hubble comóvil ($\mathcal{H} = aH$) en la época de la igualdad. Es decir, define $k_{\text{eq}} = a_{\text{eq}}H_{\text{eq}}$. Y muestra que

$$k_{\text{eq}} = \sqrt{\frac{2\Omega_m H_0^2}{a_{\text{eq}}}}$$

Usando la temperatura del CMB $T_0 = 2.726$ K, obten que,

$$k_{\text{eq}} = 0.073 \text{Mpc}^{-1} \Omega_m h^2$$

Esta escala corresponde al máximo en el espectro de potencias.

Solución. Para un valor de $k_{\text{eq}} = a_{\text{eq}}H_{\text{eq}}$ existe a su vez un valor $L_{\text{eq}} \propto 1/k_{\text{eq}}$ el cual representa el horizonte comovil donde ocurre la época de la igualdad. Ahora bien, para encontrar tal valor debemos apreciar que,

$$L_{\text{eq}} = r_{H,\text{com}}(z_{\text{eq}}) = \int_0^{a_{\text{eq}}} \frac{da}{a^2 H(a)}$$

Hemos de recordar que,

$$r_{H,\text{com}}(z) = \int_0^t \frac{dt}{a(t)}, \text{ conociendo que } \dot{a} = da/dt \rightarrow dt = da/\dot{a} = da/(aH)$$

$$\text{Obtendremos que } r_{H,\text{com}}(z) = \int_0^{(1+z)^{-1}} \frac{da}{a^2 H(a)}$$

Con este resultado a la mano veremos que, dado que a tiempos tempranos los efectos de Ω_Λ y Ω_k son despreciables y, además, $a_{\text{eq}} = \Omega_r/\Omega_m$, podemos obtener,

$$\begin{aligned} H^2 &= H_0^2 \Omega_m (a + a_{\text{eq}}) a^{-4} \\ L_{\text{eq}} &= \frac{1}{H_0 \sqrt{\Omega_m}} \int_0^{a_{\text{eq}}} \frac{da}{\sqrt{a + a_{\text{eq}}}} \approx \frac{1}{2} \frac{1}{H_0} \left(\frac{a_{\text{eq}}}{\Omega_m} \right)^{1/2} \\ k_{\text{eq}}^2 &\propto \frac{1}{L_{\text{eq}}} = \frac{1}{\frac{1}{2} \frac{1}{H_0} \left(\frac{a_{\text{eq}}}{\Omega_m} \right)^{1/2}} \\ k_{\text{eq}} &\approx \sqrt{\frac{2\Omega_m H_0^2}{a_{\text{eq}}}} \end{aligned}$$

Ahora bien, sabiendo que,

$$\rho_\gamma = \frac{\pi^2}{15} \frac{(k_B T)^4}{(\hbar c)^3}.$$

$$\Omega_\gamma = \frac{\rho_\gamma}{\rho_{c,0}} = \frac{8\pi G}{3 H_0^2} \rho_\gamma.$$

Con $T_0 \approx 2.7255$ K, el valor numérico resulta

$$\Omega_\gamma \approx 2.47 \times 10^{-5} \frac{1}{h^2}.$$

$$\rho_\nu \approx \frac{7}{8} \left(\frac{4}{11} \right)^{4/3} \rho_\gamma,$$

$$\Omega_\nu = \frac{\rho_\nu}{\rho_{c,0}} \approx 1.68 \Omega_\gamma.$$

$$\Omega_r = \Omega_\gamma + \Omega_\nu = \Omega_\gamma (1 + 1.68) \approx 2.68 \Omega_\gamma.$$

Con $\Omega_\gamma \approx 2.47 \times 10^{-5}/h^2$, se obtiene

$$\Omega_r \approx 2.68 \times 2.47 \times 10^{-5} \frac{1}{h^2} \approx 4.15 \times 10^{-5} \frac{1}{h^2}.$$

Partiendo de la sustitución

$$a_{\text{eq}} = \frac{\Omega_r}{\Omega_m},$$

se obtiene la relación

$$k_{\text{eq}} = 2 H_0 \Omega_m^{\frac{3}{2}} \frac{1}{\Omega_r}.$$

Para los valores,

$$\Omega_r \approx 4.15 \times 10^{-5} h^{-2} \quad (\text{a } T_0 \approx 2.726 \text{ K})$$

y

$$H_0 = 100 h \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}.$$

Al introducir los factores numéricos y unidades (conversión de km/s a Mpc^{-1}), se llega aproximadamente a

$$k_{\text{eq}} \approx 0.073 (\Omega_m h^2) \text{ Mpc}^{-1}.$$

Espectros de Potencia de Materia (CLASS)

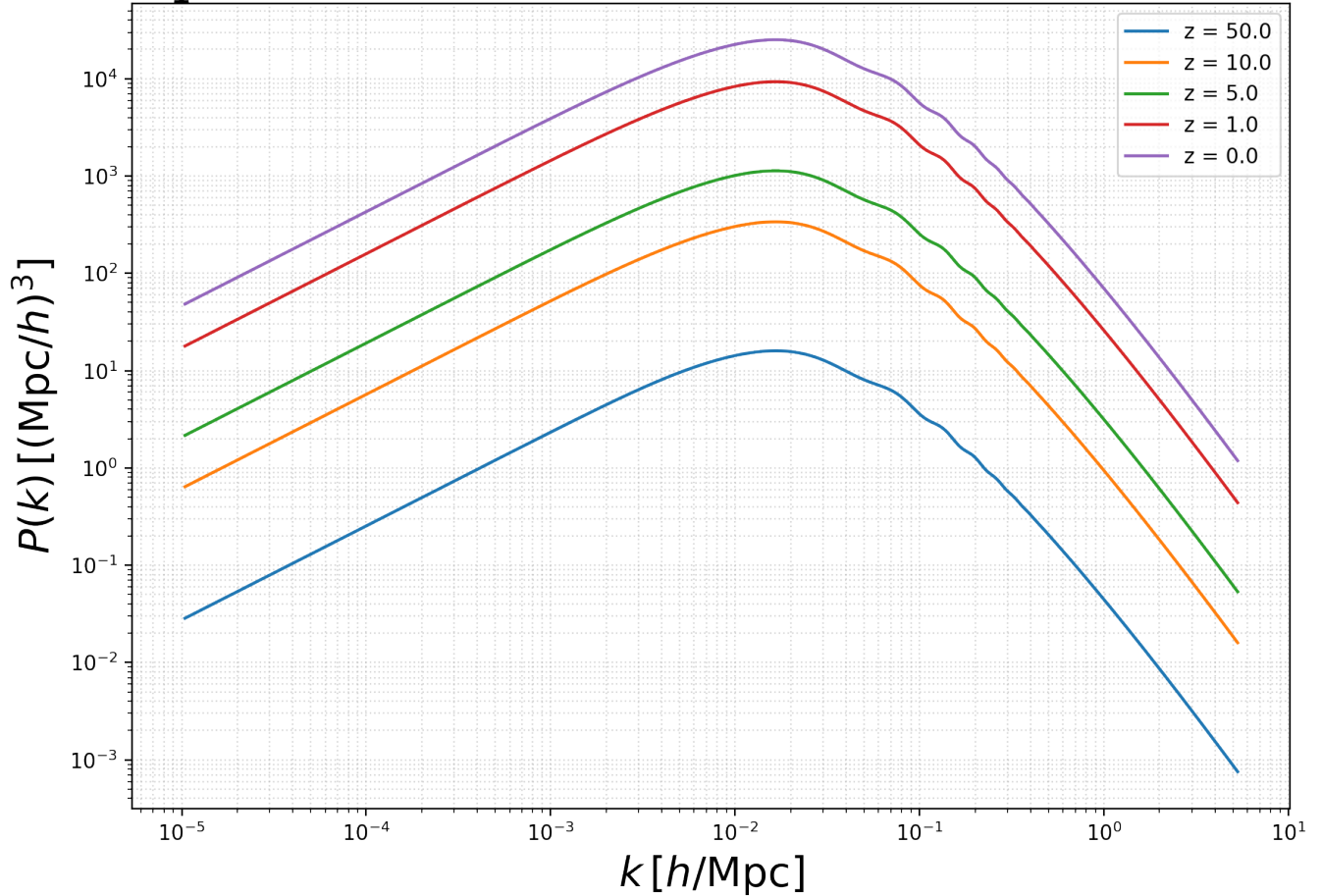


Figura 2: Espectros de potencia de materia a distintos corrimientos al rojo a partir de CLASS.

Ejercicio 5. Considera una cosmología dada por el mejor ajuste a Planck 2018 (ver la última columna de la tabla 2 de [1807.06209](#)). **i)** Obtén el espectro de potencias para materia para los corrimientos al rojo $z = 50, 10, 5, 1$ y 0 usando un código de Boltzmann-Einstein como **CAMB** o **CLASS**. **ii)** Calcula la función de crecimiento lineal $D_+(z)$ a esos mismos corrimientos al rojo con la convención de $D_+(z = 0) = 1$. **iii)** Considera el espectro de potencias que encontraste en i) a $z = 0$, y reescalalo usando la función de crecimiento lineal para obtener los espectros de potencias a $z = 50, 10, 5$ y 1 . i.e., encuentra $P_L(z) = D_+^2 P_L(z = 0)$. **iv)** Compara los espectros obtenidos en i) y iii) graficando su diferencia relativa $\Delta P_L / P_L$ para cada uno de los redshifts $z = 50, 10, 5$ y 1 .

Solución.

1. Espectros de potencia de materia (CLASS) (Figura 2)
2. Para el cálculo de la función de crecimiento lineal, usé dos aproximaciones distintas (ver figura 3). Una aproximación numérica de la forma,

Espectros de Potencia de Materia ($P_L = D_+^2 P_{L_{CLASS}}(z = 0)$)

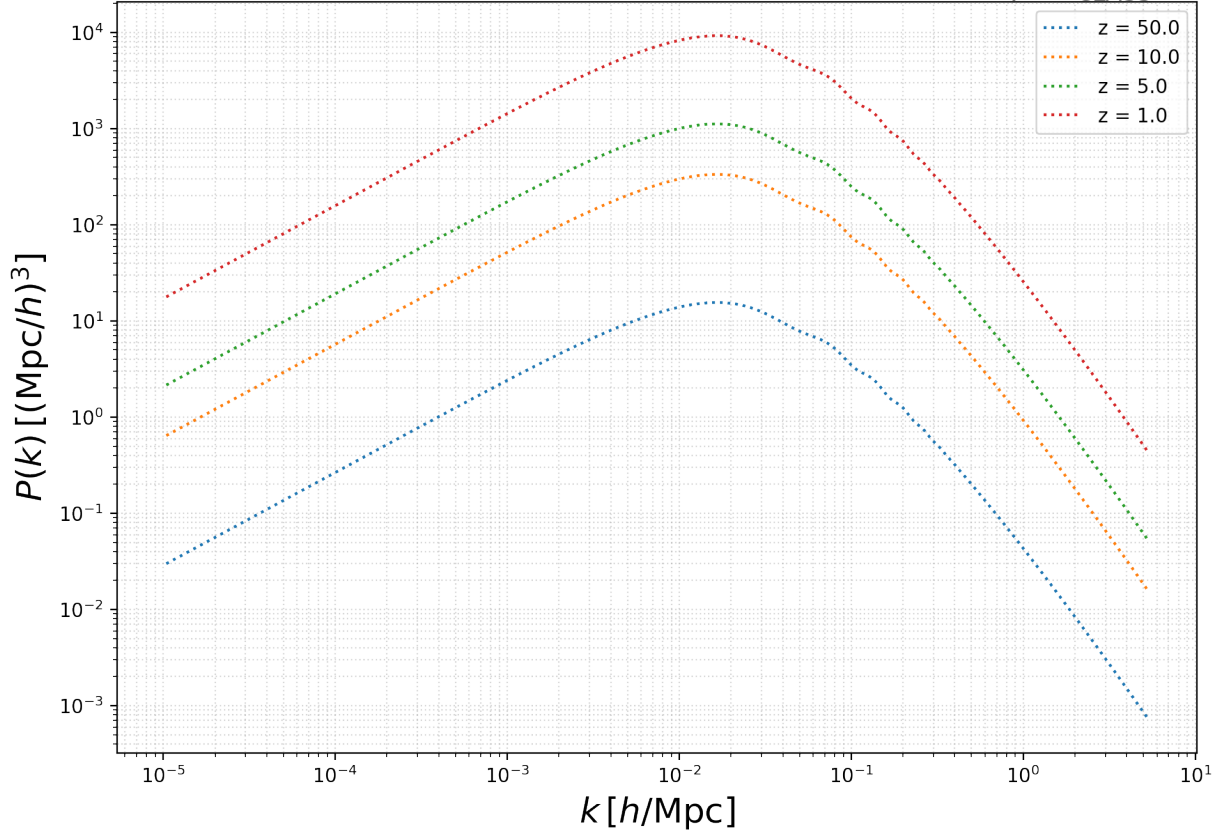


Figura 3: Espectros de potencia de materia a distintos corrimientos al rojo a partir de $P_L = D_+^2 P_{L_{CLASS}}(z = 0)$.

$$D_+(z) = \frac{H(z)}{H(0)} \frac{\int_z^\infty \frac{1+z'}{[H(z')]^3} dz'}{\int_0^\infty \frac{1+z'}{[H(z')]^3} dz'}.$$

Y una aproximación de ajuste reportada en [1208.5931](#),

$$D_+(z) = \frac{1}{1+z} \frac{g(z)}{g(0)}, \quad \text{donde} \quad g(z) = \frac{\Omega_m(z)}{\Omega_m(z)^{4/7} - \Omega_\Lambda(z) + \left(1 + \frac{\Omega_m(z)}{2}\right) \left(1 + \frac{\Omega_\Lambda(z)}{70}\right)}.$$

3. Ver Figura 3

4. Ver Figura 4

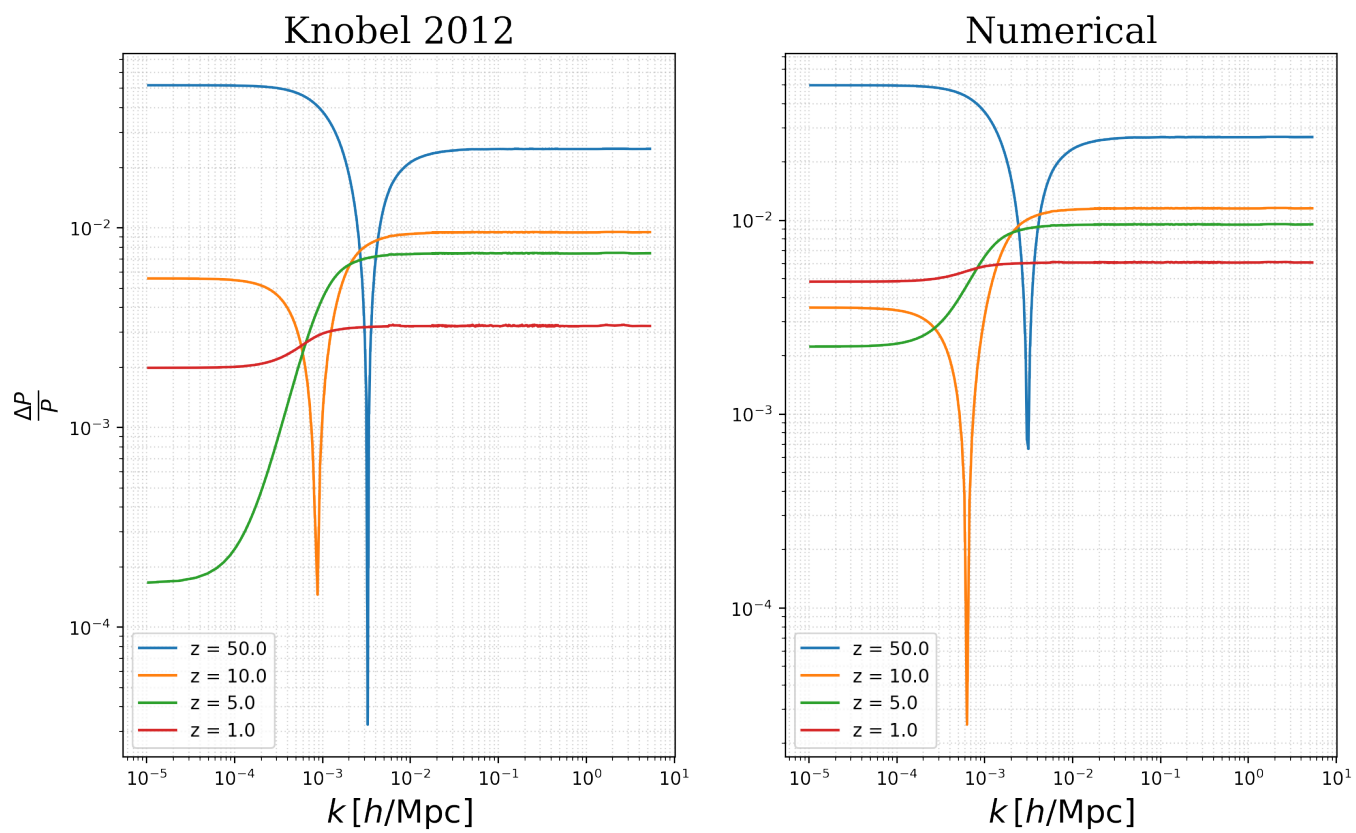


Figura 4: $\Delta P/P$

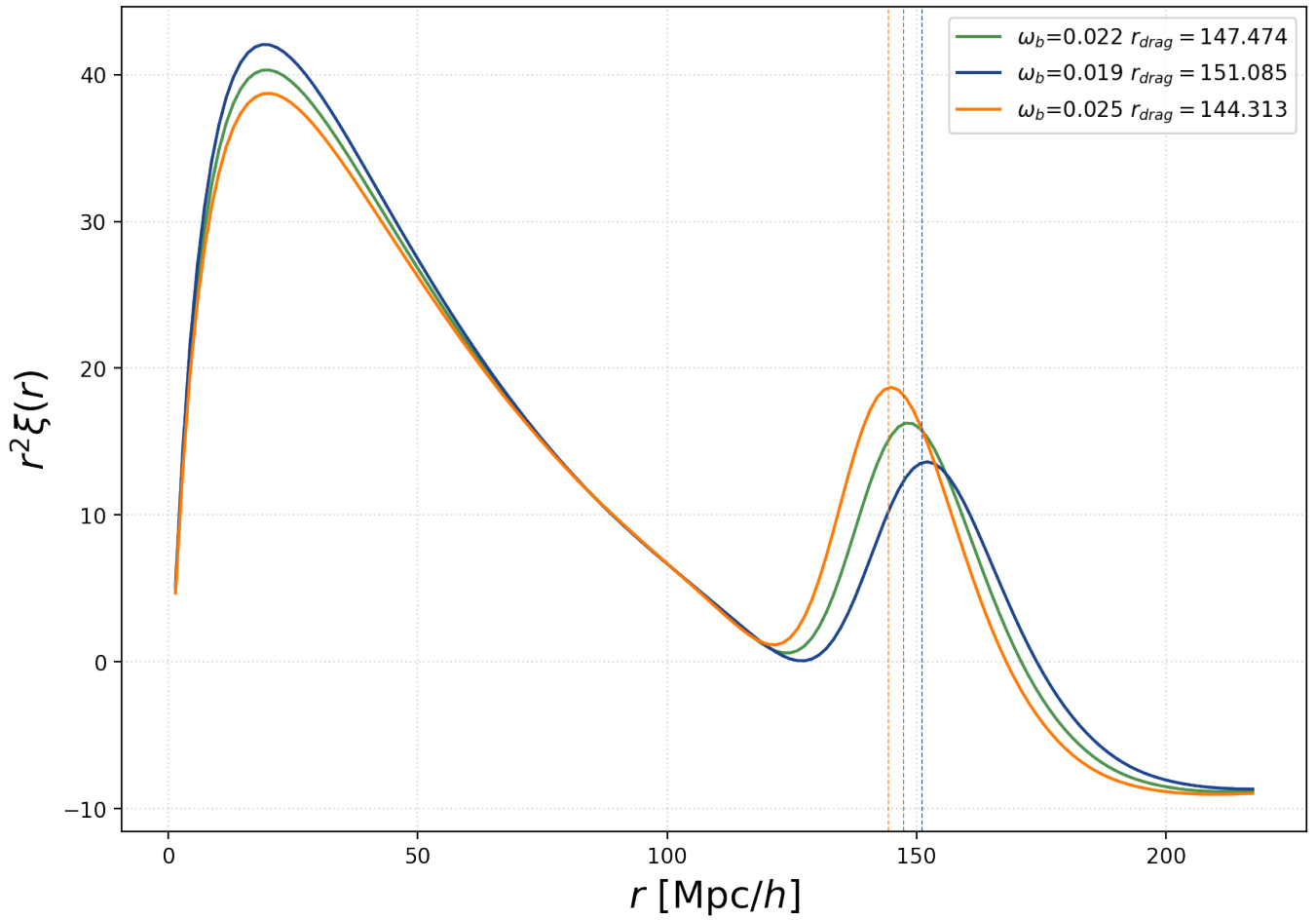


Figura 5: Funciones de correlación para distintos valores de ω_b con $h = 0.677$ fijo a $z = 0$.

Ejercicio 6. Graficar el espectro de potencias lineal en espacio real $P_L(k)$, para distintas abundancias de bariones $\omega_b = \Omega_b h^2 = 0.022, 0.019, 0.025$ a redshift $z = 0$ dejando fijo $h = 0.677$. Escribe un pequeño código en el lenguaje que prefieras, para encontrar la función de correlación $\xi_L(r)$ en cada caso, o usa el que se dio en clase. Grafica las funciones de correlación para cada uno de los casos considerados. Después de esto, encuentra el horizonte de sonidos en la época del drag r_s^{drag} , y verifica que el pico de BAO para cada una de las funciones de correlación se localiza a esta escala.

Solución.

El valor para r_{drag} se estimo a partir de la formula propuesta por [1411.1074](#).