Cosmología. PCF Semestre 2024-1
Tarea Unidad 5
fecha de entrega: 6 de noviembre 2023

1. De la ecuación de Boltzmann

$$\mathcal{B} = \frac{df}{d\tau}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{p},\tau) = \frac{\partial f}{\partial \tau} + \frac{\boldsymbol{p}}{ma}\cdot\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{x}} - ma\nabla\Phi\cdot\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{p}} = 0 \tag{1}$$

toma el segundo momento $(ma^5)^{-1}\int d^3p\, p^i p^j \mathcal{B} = 0$, y usa los primeros momentos de la función de distribución

$$\rho(\boldsymbol{x},\tau) = \frac{m}{a^3}\int d^3p f(\boldsymbol{x},\boldsymbol{p},\tau), \tag{2}$$

$$\rho v^i(\boldsymbol{x},\tau) \equiv \rho\langle u^i\rangle_p = \frac{1}{am}\rho\langle p^i\rangle_p = \frac{1}{a^4}\int d^3p\, p^i f(\boldsymbol{x},\boldsymbol{p},\tau) \tag{3}$$

$$\rho\langle u^i u^j\rangle_p = \frac{\rho\langle p^i p^j\rangle_p}{m^2a^2} = \frac{1}{ma^5}\int d^3p\, p^i p^j f = \rho(v^i v^j + \sigma^{ij}) \tag{4}$$

$$\sigma^{ijk} \equiv \langle \Delta u^i \Delta u^j \Delta u^k\rangle_p = -\langle u^i u^j u^k\rangle_p + v^{\{i}\sigma^{jk\}} + v^i v^j v^k, \tag{5}$$

para obtener la ecuación de evolución del tensor de dispersión de velocidades:

$$\partial_\tau \sigma^{ij} + 2\mathcal{H}\sigma^{ij} + v^k\partial_k\sigma^{ij} + \sigma^{ik}\partial_k v^j + \sigma^{jk}\partial_k v^i = \frac{1}{\rho}\partial_k(\rho\sigma^{ijk}). \tag{6}$$

2. La “velocidad” θ y la sobredensidad δ a orden n en teoría estándar de perturbaciones son escritas como convoluciones de n sobredensidades lineales pesadas con kernels F_n y G_n de la siguiente manera

$$\delta^{(n)}(\boldsymbol{k}) = \int\limits_{\boldsymbol{k}_{1\cdots n}=\boldsymbol{k}} F_n(\boldsymbol{k}_1,\ldots,\boldsymbol{k}_n)\delta^{(1)}(\boldsymbol{k}_1)\cdots\delta^{(1)}(\boldsymbol{k}_n) \tag{7}$$

$$\theta^{(n)}(\boldsymbol{k}) = \int\limits_{\boldsymbol{k}_{1\cdots n}=\boldsymbol{k}} G_n(\boldsymbol{k}_1,\ldots,\boldsymbol{k}_n)\delta^{(1)}(\boldsymbol{k}_1)\cdots\delta^{(1)}(\boldsymbol{k}_n) \tag{8}$$

Recuerda que

$$\int\limits_{\boldsymbol{k}_{1\cdots n}=\boldsymbol{k}} = \int \frac{d^3k_1\cdots d^3k_n}{(2\pi)^{3n}}\delta_{\mathrm{D}}(\boldsymbol{k}-\boldsymbol{k}_{1\cdots n}), \qquad \boldsymbol{k}_{1\cdots n} = \boldsymbol{k}_1 + \boldsymbol{k}_2 + \cdots + \boldsymbol{k}_n. \tag{9}$$

Demuestra que

$$\begin{aligned}&\int\limits_{\boldsymbol{k}_{12}=\boldsymbol{k}} \alpha(\boldsymbol{k}_1,\boldsymbol{k}_2)\theta^{(m)}(\boldsymbol{k}_1)\delta^{(n-m)}(\boldsymbol{k}_2)\\ &\quad= \int\limits_{\boldsymbol{k}_{1\cdots n}=\boldsymbol{k}} \alpha(\boldsymbol{k}_{1\cdots m},\boldsymbol{k}_{m+1\cdots n})G_m(\boldsymbol{k}_1,\ldots,\boldsymbol{k}_m)F_{n-m}(\boldsymbol{k}_{m+1},\ldots\boldsymbol{k}_n)\delta^{(1)}(\boldsymbol{k}_1)\cdots\delta^{(1)}(\boldsymbol{k}_n).\end{aligned} \tag{10}$$

3. Definimos el desplazamiento Lagrangiano a primer orden como $\Psi_i^{(1)}(\boldsymbol{x}) = -\nabla^{-2}\partial_i\delta^{(1)}(\boldsymbol{x})$, donde δ es la dobredensidad de perturbaciones de materia. Muestra que en espacio de Fourier uno obtiene

$$\Psi_i^{(1)}(\boldsymbol{k}) = i\frac{k_i}{k^2}\delta^{(1)}(\boldsymbol{k}).$$

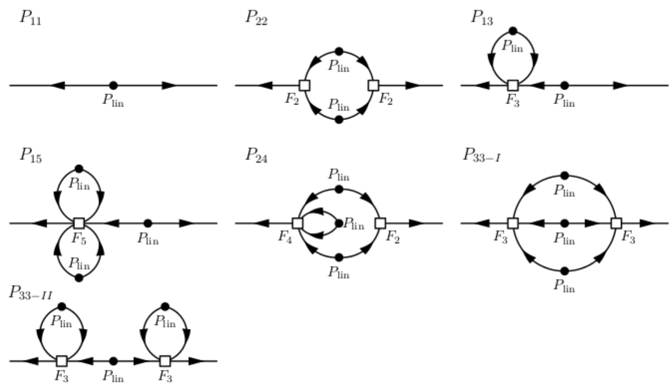

FIG. 1. Diagrams for the tree level, one- and two-loop expressions of the SPT power spectrum.

Muestra que la varianza de desplazamientos Lagrangianos en 1-dimensión es

$$\sigma_\Psi^2(t) \equiv \frac{1}{3}\langle \Psi^{(1)}(\boldsymbol{x},t)\Psi^{(1)}(\boldsymbol{x},t)\rangle = \frac{1}{6\pi^2}\int dp\, P_L(p,t).$$

σ_Ψ es aproximadamente la distancia promedio que las partículas de materia oscura son dispersadas desde un tiempo muy temprano hasta un tiempo t. Calcula $\sigma_\Psi(z)$ a distintos corrimientos al rojo: $z = 100, 5, 1$ y 0, y para dos cosmologías, una con $\Omega_m = 0.3$ y otra en la que no hay energía oscura $\Omega_m \simeq 1$. Los demás parámetros cosmológicos déjalos igual para ambas cosmologías.

4. En la figura 1 se muestran los diagramas para las contribuciones a 1-loop y 2-loops al espectro de potencias. Recuerda que $P_{15}^{\rm diagrama}$ corresponde a $P^{(15)}$ en la notación del curso (en el curso usamos $P_{15} = P_{15}^{\rm diagrama} + P_{51}^{\rm diagrama}$).

   Siguiendo los diagramas muestra que las correciones a 2-loops están dadas por las siguientes integrales

$$P^{(15)}(k) = 15\int \frac{d^3p}{(2\pi)^3}\frac{d^3q}{(2\pi)^3} F_5(\boldsymbol{k},\boldsymbol{p},-\boldsymbol{p},\boldsymbol{q},-\boldsymbol{q})P_L(k)P_L(q)P_L(p),$$
$$P^{(42)}(k) = 12\int \frac{d^3p}{(2\pi)^3}\frac{d^3q}{(2\pi)^3} F_4(\boldsymbol{q},-\boldsymbol{q},\boldsymbol{k}-\boldsymbol{p},\boldsymbol{p})F_2(\boldsymbol{k}-\boldsymbol{p},\boldsymbol{p})P_L(p)P_L(q)P_L(|\boldsymbol{k}-\boldsymbol{p}|),$$
$$P^{(33)I}(k) = 6\int \frac{d^3p\,d^3q}{(2\pi)^6}\big[F_3(\boldsymbol{k}-\boldsymbol{p}-\boldsymbol{q},\boldsymbol{q},\boldsymbol{p})\big]^2 P_L(p)P_L(q)P_L(|\boldsymbol{k}-\boldsymbol{p}-\boldsymbol{q}|),$$
$$P^{(33)II}(k) = 9\int \frac{d^3p\,d^3q}{(2\pi)^6} F_3(\boldsymbol{k},-\boldsymbol{p},\boldsymbol{p})F_3(\boldsymbol{k},-\boldsymbol{q},\boldsymbol{q})P_L(p)P_L(q)P_L(k).$$

5. El biespectro de potencias está dado por

$$(2\pi)^3\delta_{\rm D}(\boldsymbol{k}_1+\boldsymbol{k}_2+\boldsymbol{k}_3)B(\boldsymbol{k}_1,\boldsymbol{k}_2,\boldsymbol{k}_3) = \langle\delta(\boldsymbol{k}_1)\delta(\boldsymbol{k}_2)\delta(\boldsymbol{k}_3)\rangle$$

   I. Asumiendo gaussianidad primordial, muestra que a orden más bajo posible en teoría de perturbaciones uno obtiene

$$B(\boldsymbol{k}_1,\boldsymbol{k}_2,\boldsymbol{k}_3) = 2F_2(\boldsymbol{k}_1,\boldsymbol{k}_2)P_L(k_1)P_L(k_2) + 2F_2(\boldsymbol{k}_2,\boldsymbol{k}_3)P_L(k_2)P_L(k_3) + 2F_2(\boldsymbol{k}_3,\boldsymbol{k}_1)P_L(k_3)P_L(k_1).$$

   II. Demuestra que si asumes isotropía e inhomogeneidad, el biespectro sólo depende de tres números. Estos pueden ser los valores absolutos de los tres vectores de onda k_1, k_2 y k_3, por lo que $B(\boldsymbol{k}_1,\boldsymbol{k}_2,\boldsymbol{k}_3) = B(k_1,k_2,k_3)$. (Nota que los vectores de onda forman un triángulo debido a que homogneidad introduce la delta de Dirac en la definición de B.)

   III. Grafica el biespectro como función de un sólo número de onda, para una configuración equilatera, es decir cuando la longitud de los tres valores son iguales $B(k,k,k)$. también grafica la razón $B/P_L^2(k)$. Muestra de manera analítica que

$$\frac{B(k,k,k)}{\big[P_L(k)\big]^2} = \frac{12}{7}$$

   y con esto verifica los resultados numéricos que obtuviste.