

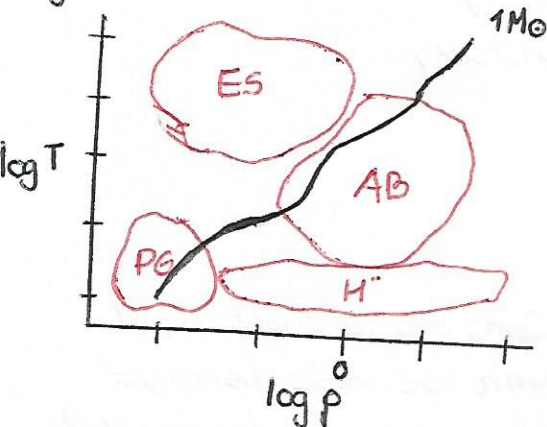
## Tarea Unidad 2. Estructura y evolución estelar.

### ① Del Pds. Ejercicio 5.2.

#### Opacity.

(a) Identify the various processes contributing to the opacity as shown in Fig 5.2 and the  $T$  and  $\rho$  ranges where they are important.

El diagrama 5.2 muestra las opacidades medias de Rosseland como una función de  $T$  y  $\rho$ . Según las características de cada uno de los procesos de absorción y dispersión se tiene que,



Para temperaturas muy altas del orden de  $10^6$  K el material está ionizado casi por completo así que en esta instancia la opacidad electrónica sobrepasa. No obstante, al reducirse la densidad del mismo modo aumenta la opacidad por scattering electrónico.

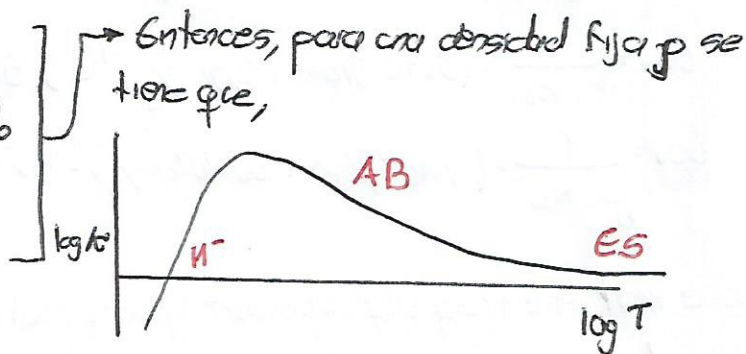
Se muestra la representación de la opacidad según su tipo a partir del diagrama 5.2.

ES  $\rightarrow$  Dispersión electrónica

AB  $\rightarrow$  A. Libre-libre, A. Ligado-libre, A. Ligado-ligado

H<sup>-</sup>  $\rightarrow$  Ión negativo del hidrógeno.

PG  $\rightarrow$  Moléculas de gas y polvo



b) Compare the opacity curve for  $\log \rho = -6$  in the left panel of Fig 5.2 to the approximations given in Sec 5.3.1 for (1), (2), (3) and (4). How well these approximations fit the realistic opacity curve?

Analizando el gráfico de la derecha en la curva para 1 Mo se tiene que,

$$\log \rho = -6, \log T = 5.4, \log \kappa = 0.5.$$

a lo cual

$$\rho = 1 \times 10^{-6} \text{ g/cm}^3, T = 250 \times 10^3 \text{ K}, \kappa = 3.16 \text{ cm}^2/\text{g}$$

Usando los valores indicados en la sección 5.3.1 se tiene,

$$x = 0.7, Z = 0.02$$

$$\kappa_{es} = 0.20(1+x) = 0.34 \text{ cm}^2/\text{g}$$

$$\kappa_{ff} = 3.6 \times 10^{22} (1+x) \rho T^{-7/2} = 8.26 \times 10^{-3} \text{ cm}^2/\text{g}$$

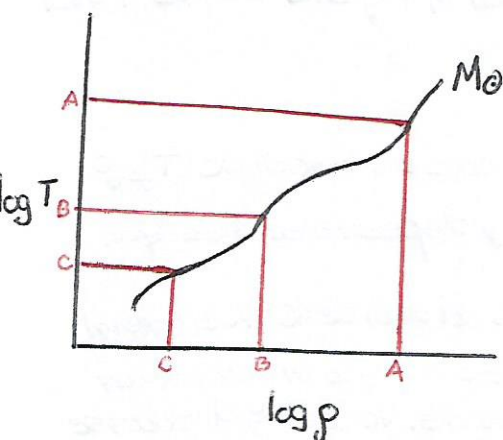
$$\kappa_{bf} = 4.3 \times 10^{23} (1+x) Z \rho T^{-7/2} = 0.187136 \text{ cm}^2/\text{g}$$

$$\kappa_{H^-} = 2.5 \times 10^{-31} \left( \frac{Z}{0.02} \right) \rho^{1/2} T^9 = 9.53 \times 10^{14} \text{ cm}^2/\text{g}$$

Se puede observar que los resultados para la opacidad difieren puesto que cada aproximación está considerada para condiciones específicas del entorno estelar. Por ejemplo, a temperaturas muy altas la opacidad por H<sup>-</sup> debería ser casi nula puesto que casi todo el H<sup>-</sup> habrá desaparecido.

(e) Calculate (up to an order of magnitude) the photon mean free path in a star of  $1M_{\odot}$  at radii where the temperature is  $10^7$  K,  $10^5$  K and  $10^4$  K, using the right panel of Fig 5.2.

Considerando que se trata en orden de magnitud se tiene que,



	T	$\rho$	$\kappa$
A	$10^7$ K	$\sim 30 \text{ g/cm}^3$	$\sim 3 \text{ cm}^2/\text{g}$
B	$10^5$ K	$\sim 3 \times 10^{-3} \text{ g/cm}^3$	$\sim 100 \text{ cm}^2/\text{g}$
C	$10^4$ K	$\sim 3 \times 10^{-7} \text{ g/cm}^3$	$\sim 30 \times 10^3 \text{ cm}^2/\text{g}$

Entonces, dado que  $l_v = \frac{1}{\rho \kappa}$  y  $\rho = \rho$  se tiene que,

$$l_{Av} = \frac{1}{\rho_A \kappa_{Av}} = (30 \text{ g/cm}^3 \cdot 3 \text{ cm}^2/\text{g})^{-1} = 0.011 \text{ cm}$$

$$l_{Bv} = \frac{1}{\rho_B \kappa_{Bv}} = (3 \times 10^{-3} \text{ g/cm}^3 \cdot 100 \text{ cm}^2/\text{g})^{-1} = 0.3 \text{ cm}$$

$$l_{Cv} = \frac{1}{\rho_C \kappa_{Cv}} = (3 \times 10^{-7} \text{ g/cm}^3 \cdot 30 \times 10^3 \text{ cm}^2/\text{g})^{-1} = 9 \times 10^{-3} \text{ cm}$$

Como era de esperarse, el camino libre medio disminuye conforme la opacidad y densidad aumentan.

(d) Suppose that the frequency dependant opacity coefficient has the form  $\kappa_v = \kappa_0 v^{-a}$ . Show that the Rosseland mean opacity depends on the temperature as  $\bar{\kappa} \propto T^{-a}$ .

Opacidad media de Rosseland

$$\frac{1}{\bar{\kappa}} = \frac{\pi}{4CT^3} \int_0^{\infty} \frac{1}{\kappa_v} \frac{dB_v}{dT} dv \quad \text{y teniendo que } \frac{dB_v}{dT} = \frac{2h^2 v^4}{c^2 k T^2} \cdot \frac{e^{hv/kT}}{(e^{hv/kT} - 1)^2}$$

Se resuelve que ( $x = hv/kT$ ),

$$\frac{1}{\bar{\kappa}} \propto \left(\frac{kT}{h}\right)^n \frac{\int_0^{\infty} x^{n+4} \frac{e^x}{(e^x - 1)^2} dx}{\int_0^{\infty} x^4 \frac{e^x}{(e^x - 1)^2} dx} \propto T^n$$

por lo que, si  $\kappa \propto v^{-a}$ , entonces  $\bar{\kappa} \propto T^{-a}$



## ② Del Lovers. Ejercicio 5.2

The average radial distance traveled by a photon in a random walk is  $r \sim \ell \sqrt{N}$ , where  $N$  is the number of random steps and  $\ell$  is the step length (i. e. the mean free path length).

a) Use  $\ell \approx 1 \text{ cm}$  and  $r = R_{\odot}$  to estimate the number of scatterings a photon will undergo before reaching the surface of the star.



Considerando que

$$R_{\odot} = \ell \sqrt{N} \\ \left(\frac{R_{\odot}}{\ell}\right)^2 = N \Rightarrow N = \left(\frac{6.95 \times 10^8 \text{ m}}{0.01 \text{ m}}\right)^2 = 4.83 \times 10^{21} \text{ pasos.}$$

b) Calculate the total path length  $L$  and the time  $\tau_L = L/c$  it takes a photon created in the center to leave the Sun.

→ La distancia total recorrida será

$$L = N \cdot \ell \Rightarrow 4.83 \times 10^{21} \cdot 0.01 \text{ m} = \underline{4.83 \times 10^{19} \text{ m}}$$

$$\tau_L = \frac{L}{c} = \frac{4.83 \times 10^{19} \text{ m}}{3 \times 10^8 \text{ m/s}} = 1.60 \times 10^{11} \text{ s} \Rightarrow \underline{5071 \text{ años aproximadamente}}$$

c) It is, still the same photon? (same  $\lambda$ ,  $\nu$ ?)

→ No, no es el mismo fotón al menos en términos energéticos. Las cadenas p-p que ocurren en el Sol producen fotones de muy alta energía dentro del rango de los rayos gamma. Cuando el fotón sale de Sol es mucho menos energético porque ha perdido mucho de su energía debido a la opacidad del medio.

③ If a star possesses a specific intensity of the form  $I_\nu(z, u) = a_\nu(z) + b_\nu(z)u$ , where the functions  $a_\nu(z)$  and  $b_\nu(z)$  are independent of  $u$ , calculate  $F_\nu(z)$ .

→  
Teniendo que  $F_\nu(z) = \oint I_\nu(z, u) \hat{n} \cdot \hat{k} d\Omega = 2\pi \int_{-1}^1 I_\nu(z, u) u du$

Siendo  $F_\nu(z)$  el 2do momento de la intensidad, entonces, integrando se tiene que,

$$\begin{aligned} F_\nu(z) &= 2\pi \int_{-1}^1 (a_\nu(z) + b_\nu(z)u) u du \\ &= 2\pi \left[ \int_{-1}^1 (a_\nu(z)) u du + \int_{-1}^1 (b_\nu(z)) u^2 du \right] \\ &= 2\pi \left[ \frac{a_\nu(z) u^2}{2} \Big|_{-1}^1 + \frac{b_\nu(z) u^3}{3} \Big|_{-1}^1 \right] \\ &= 2\pi \left\{ \frac{a_\nu(z)}{2} (1^2 - (-1)^2) \right\} + \left\{ \frac{b_\nu(z)}{3} ((1)^3 - (-1)^3) \right\} \\ &= 2\pi \cdot \frac{2b_\nu(z)}{3} = \frac{4\pi b_\nu(z)}{3} \end{aligned}$$

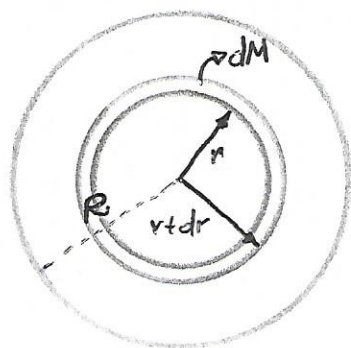
④ Find the pressure stratification  $P(r)$  inside a star with mass  $M_*$  and radius  $R_*$  in which the density decreases linearly with  $r$  via the expression. (Eq) where  $\rho_c$  is the central density.

→  
\*  $\rho(r) = \rho_c \left( 1 - \frac{r}{R_*} \right)$

A partir de la ecuación de equilibrio hidrostático se tiene que,

$$\frac{dP(r)}{dr} = - \frac{\rho(r) GM(r)}{r^2}$$

Además, asumiendo una distribución de masa uniforme tal que;



$$M(r) = \int_0^r 4\pi r^2 \rho(r) dr$$

Integrando,

$$M(r) = \int_0^R 4\pi r^2 \rho_c \left[ 1 - \frac{r}{R_*} \right] dr$$

$$M(r) = \frac{4\pi}{3} \rho_c r^3 \left( 1 - \frac{3r}{4R_*} \right)$$

Reemplazando se tiene,

$$\frac{dP(r)}{dr} = -\frac{4\pi G}{3} \frac{r^2}{r} \rho_c \left(1 - \frac{3r}{4R_*}\right)$$

$$\frac{dP(r)}{dr} = -\frac{4\pi G \rho_c r}{3} \left(1 - \frac{3r}{4R_*}\right)$$

Ahora bien, teniendo que la densidad central puede ser evaluada tal que  $M(R_*) = M_*$ , entonces

$$\rho_c = \frac{3M_*}{\pi R_*^3}, \text{ se tiene que,}$$

$$\frac{dP(r)}{dr} = -\frac{4\pi G}{3} \rho_c^2 r \left(1 - \frac{3r}{4R_*}\right) \left(1 - \frac{r}{R_*}\right)$$

Evaluando la integral desde  $P_c$  hasta  $P(r)$  se obtiene que,

$$P(r) = P_c - \frac{4\pi G}{6} \rho_c^2 r^2 \left(1 - \frac{7r}{6R_*} + \frac{3r^2}{8R_*^2}\right)$$

Utilizando la consideración para la densidad central se tiene que,

$$P(r) = P_c - \frac{6GM_*^2}{\pi R_*^6} \left(1 - \frac{7r}{6R_*} + \frac{3r^2}{8R_*^2}\right) \cdot r^2$$

Ahora, asumiendo que la presión en el límite exterior es cero se tiene que,

$$0 = P_c - \frac{6GM_*^2}{\pi R_*^6} \left(1 - \frac{7R_*}{6R_*} + \frac{3R_*^2}{8R_*^2}\right) \cdot R_*^2$$

$$P_c = \frac{5GM_*^2}{4\pi R_*^4}$$

Teniendo la presión central y la función de la presión-radio se puede establecer la estratificación.

$$P(r) = \frac{5GM_*^2}{4\pi R_*^4} - \frac{6GM_*^2}{\pi R_*^6} \cdot r^2 \left(1 - \frac{7r}{6R_*} + \frac{3r^2}{8R_*^2}\right)$$



⑤ Estimate the gas pressure, the radiation pressure, and the total pressure in a typical main sequence star with O3 spectral type. Which term dominates the total pressure?

Presión del gas

Presión de radiación

$$P_g \approx 3 \times 10^{17} \frac{(M/M_\odot)^2}{(R/R_\odot)^4} \quad \text{Temperatura}$$

$$P_r = \frac{4\sigma}{3c} T^4$$

$$T = 1.6 \times 10^7 \frac{M/M_\odot}{R/R_\odot}$$

Densidad promedio

$$\bar{\rho} = \frac{3M}{4\pi R^3}$$

Propiedades para una estrella tipo O3

$$M/M_\odot = 120$$

$$R/R_\odot = 15$$

$$\rightarrow P_g = \frac{GM\bar{\rho}}{2R} = \frac{3GM^2}{8\pi R^4} \Rightarrow 3 \times 10^{17} \frac{(M/M_\odot)^2}{(R/R_\odot)^4}$$

$$\rightarrow T = \frac{\mu m_H P_g}{k \bar{\rho}} \Rightarrow 1.6 \times 10^7 \frac{M/M_\odot}{R/R_\odot}$$

Las expresiones surgen al aplicar la ley de los gases ideales teniendo en cuenta el peso molecular del hidrógeno y estandarizar el radio y la masa del sol para distintos tipos de estrellas.

Se tiene entonces que,

$$P_g = 3 \times 10^{17} \frac{(M/M_\odot)^2}{(R/R_\odot)^4} = 3 \times 10^{17} \frac{(120)^2}{(15)^4} = 8.53 \times 10^{16} \text{ dina/cm}^2$$

$$P_r = \frac{4\sigma}{3c} T^4 = \frac{4\sigma}{3c} \cdot (1.6 \times 10^7 \frac{M/M_\odot}{R/R_\odot})^4 = \frac{4\sigma}{3c} (1.6 \times 10^7 \frac{120}{15})^4 = 7.2 \times 10^{17} \text{ dina/cm}^2$$

$$P_T = P_g + P_r$$

$$P_T = (8.53 \times 10^{16} + 7.2 \times 10^{17} \text{ dina/cm}^2) \times \frac{1 \text{ N}}{1 \times 10^5 \text{ dina}} \times \left(\frac{100 \text{ cm}}{1 \text{ m}}\right)^2 = \boxed{8 \times 10^{16} P_g}$$

La presión de radiación domina frente a la presión ejercida por el gas. Es válido suponer que las reacciones nucleares aportan más energía al sistema que el movimiento cinético de las partículas.