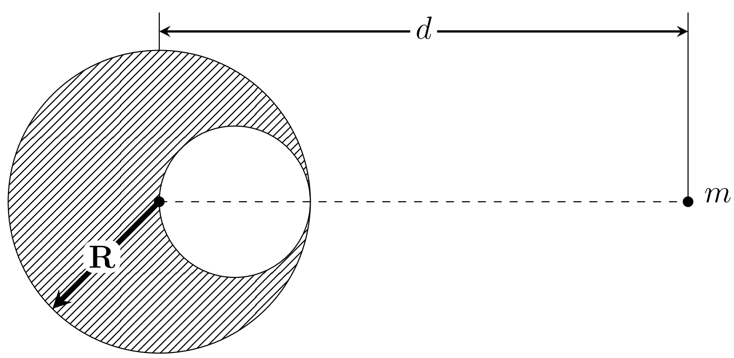
Tarea 1

Holman Daniel Quintero Salazar
hd.quinterosalazar@ugto.mx
Relatividad General - Dr. Luis Arturo Ureña López

10/08/24

Ejercicio 1. El siguiente problema proviene de un examen "Olímpic" de la Universidad estatal de Moscú en 1946: Se practica una oquedad esférica dentro de una esfera de plomo de radio R, de modo que su superficie toque la superficie exterior de la esfera de plomo y pase por su centro. La masa de la esfera antes de practicar la oquedad era M. ¿Con qué fuerza, de acuerdo con la ley de la gravitación universal, atraerá la esfera de plomo ahuecada a una esfera pequeña de masa m, que esté situada a una distancia d del centro de la esfera de plomo en la línea recta que une a los centros de las esferas y de la oquedad?



Solución. Con tal de resolver el ejercicio, es necesario encontrar la fuerza que hubiera producido el volumen de la oquedad y luego sustraer su contribución a la fuerza total de la esfera sin oquedad. Para ello, se debe emplear el teorema de Gauss contemplando que el campo gravitario es conservativo, esto es,

$$\vec{g} = -\nabla\phi \ , \ \nabla^2\phi = 4\pi G\rho(\vec{r})$$

Entonces, aplicando el teorema de la divergencia tenemos que,

$$\int_A \vec{g} \cdot d\vec{A} = \int_V \nabla \cdot \vec{g} dV$$

desarrollando obtenemos,

$$\int_V \nabla \cdot \vec{g} dV = \int \nabla \cdot (-\nabla\phi) dV = \int -\nabla^2 \phi dV = -\int 4\pi G \rho(\vec{r}) dV$$

donde $\vec{r}$ será el vector de posición dentro del volumen de integración, así pues,

$$= 4\pi G \int_V \rho(\vec{r}) dV = -4\pi G M_{\text{enc}}(r)\hat{r}$$

en donde M_{enc} es la masa encerrada acotada por un vector unitario $\hat{r}$ que apunta hacia afuera. Por otro lado,

$$\int_A \vec{g} \cdot d\vec{A} = \int_A \vec{g} \cdot \hat{n} dA = g(r) \int_A dA = g(r) 4\pi r^2$$

así pues,

$$g(r) 4\pi r^2 = -4\pi G M_{\text{enc}} \hat{r}$$
$$g(r) = -\frac{\cancel{4\pi} G M_{\text{enc}}(r)}{\cancel{4\pi} r^2}\hat{r} = -\frac{G M_{\text{enc}}(r)}{r^2}\hat{r}$$

Nuestro campo gravitatorio para una masa encerrada será:

$$\vec{g}(r) = -\frac{G M_{\text{enc}}(r)}{r^2}\hat{r}$$

Ahora bien, considerando que, según la segunda ley de Newton, la partícula de masa m sufrirá una fuerza proporcional a $\vec{F} = m\vec{a}$ tenemos que,

$$\vec{F} = m\vec{a} = m\vec{g} = m\ -\frac{G M_{\text{enc}}(r)}{r^2}\hat{r}$$
$$\vec{F} = -\frac{G M_{\text{enc}}(r) m}{r^2}\hat{r}$$

La fuerza neta de atracción que experimentará la partícula será, $F_N = F_S - F_H$ donde F_N es la fuerza neta, F_S es la esfera sólida sin oquedad y F_H la contribución de volumen de la oquedad (masa encerrada). Con esto tenemos que,

$$F_S = \frac{GMm}{d^2} \quad \text{y} \quad F_H = \frac{G M_H m}{(d - R/2)^2}$$

esto teniendo en cuenta que, para simetrías esféricas, la fuerza gravitacional actúa como si toda la masa estuviera concentrada en un punto en el centro de la distribución de masa (teorema del cascarón). M_H será entonces, considerando $\rho = \rho_H$,

$$\frac{3M}{4\pi R^3} = \frac{3M_H}{4\pi (R/2)^3} \Rightarrow M_H = \frac{M}{8}$$

Desarrollando tenemos que,

$$F_N = F_S - F_H = \frac{GMm}{d^2} - \frac{GMm}{8(d-R/2)^2}$$

el segundo término lo podemos descomponer de tal forma que,

$$\begin{aligned} 8(d-\frac{R}{2})^2 &= 8(d^2 - dR + \frac{R^2}{4}) \\ &= 2d^2(4 - \frac{4R}{d} + \frac{R^2}{d^2}) \\ &= 2d^2(2-\frac{R}{d})^2 \end{aligned}$$

y, finalmente,

$$F_N = \frac{GMm}{d^2}\Big(1 - \frac{1}{2(2-\frac{R}{d})^2}\Big)$$

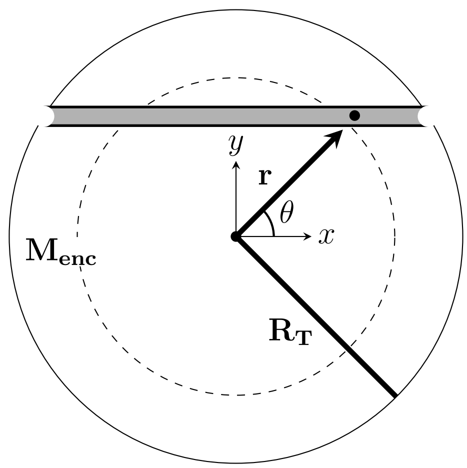
$\square$

Ejercicio 2. *(a)* Demuestre que en un ducto que atraviese la Tierra a lo largo de una cuerda en lugar de a lo largo de un diámetro, el movimiento de un objeto sería armónico simple; supóngase una densidad uniforme de la Tierra. *(b)* Halle el periodo. *(c)* ¿Adquirirá el objeto la misma velocidad máxima a o largo de una cuerda que como lo hace a lo largo de un diámetro?

Solución. La condición para que ocurra movimiento armónico simple implica que existe una fuerza de restitución proporcional al desplazamiento, esto es, $\vec{F} = -k\vec{x}$, o bien, para un sólo eje, digamos el eje x,

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{k}{m}x \Rightarrow a_x = -\omega^2 x$$

con $\omega = \sqrt{k/m}$, siendo ω la velocidad angular de oscilación y $T = 2\pi/\omega$ el periodo asociado. Teniendo en cuenta lo anterior, es pertinente fijar un sistema coordenado tal como el de la figura a continuación,



donde R_T es el radio de la Tierra y r es la posición de la masa m.

Por el teorema del cascarón esférico de Newton sabemos que la fuerza gravitacional será proporcional a la masa M_{enc} dentro de una región esférica de radio r, esto es, considerando densidad uniforme,

$$M_T = \rho_r \frac{4}{3}\pi R_T^3 \ , \ M_T = \rho_{enc}\frac{4}{3}\pi r_T^3$$
$$\text{con } \rho_r = \rho_{enc} \Rightarrow M_{\text{enc}} = \frac{M_T r^3}{R_T^3}$$

lo que nos conduce a,

$$\vec{F} = -\frac{GM_{\text{enc}}m}{r^2}\hat{r} = -\frac{M_T r^3}{R_T^3}\frac{Gm}{r^2} = -\frac{GM_T mr}{R_T^3}\hat{r}$$

Si se restringe el movimiento de la partícula al eje x, tenemos que,

$$F_x = -\frac{GM_T m}{R_T^3} r\cos\theta = -\frac{GM_T m}{R_T^3} x$$

o lo que es lo mismo,

$$F = -\frac{4}{3} G\rho m x$$

Como se pude observar en este último resultado, la expresión satisface la condición de movimiento armónico simple solicitada en *(a)*, así pues, desarrollando se tiene que,

$$F = -\frac{4\pi}{3} G\rho m x = m a_x \Rightarrow = -\frac{4\pi}{3} G\rho x$$

así, teniendo en cuenta que $a_x = -\omega^2 x$ para movimiento armónico simple, desarrollando se tiene que,

$$\begin{aligned} -\omega^2 x &= -\frac{4\pi}{3} G\rho x \\ \omega^2 &= \frac{4\pi}{3} G\rho \\ \omega = \sqrt{\frac{4\pi}{3} G\rho} &= 2\sqrt{\frac{\pi}{3} G\rho} \end{aligned}$$

Por consiguiente, para *(b)* tendremos que,

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{2\sqrt{\frac{\pi}{3} G\rho}} = \frac{\sqrt{3}\pi}{\sqrt{\pi G\rho}} = \frac{\sqrt{3\pi}}{\sqrt{G\rho}} = \sqrt{\frac{3\pi}{G\rho}}$$

Ahora bien, si tenemos en cuenta que en el moviemiento armónico simple la velocidad máxima es proporcional a $V_{\max} = \omega A$, donde A es la magnitud máxima con respecto al equilibrio (la amplitud) tenemos que, para una cuerda,

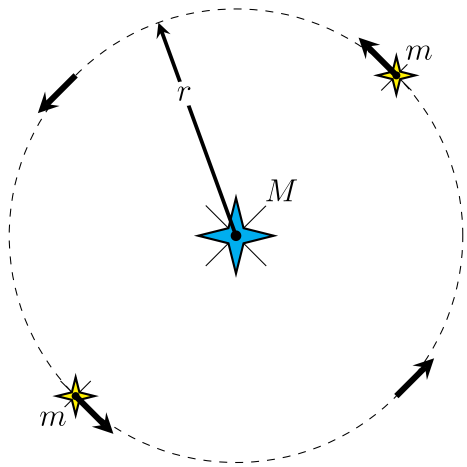
$$V_{\max} = 2\sqrt{\frac{\pi}{3} G\rho}\, r_b \cos\theta$$

donde r_b es la longitud máxima que alcanza la masa me en el eje x a lo largo del ducto y que está supeditado entre $0 < \theta < \pi$.

Por otro lado, vemos que cuando el ducto atraviesa un diámetro $|\cos(0)| = |\cos(\pi)| = 1$ y r_b se convierte efectivamente en R_T, por lo que la velocidad máxima es mayor. Igualmente, con ánimo de contestar *(c)*, cuando $r_b = R_T$, la masa encerrada es mayor y la fuerza decae en proporción a $\vec{F} \propto R_T^2$ y no en función a $\vec{F} \propto R_T^3$, como en el caso de la cuerda.

$\square$

Ejercicio 3. Cierto sistema de estrellas triples consta de dos estrellas, cada una de masa m, que giran en torno a una estrella central, de masa M, en la misma órbita circular. Las dos estrellas están situadas en los extremos opuestos de un diámetro de la órbita circular. Derive una expresión para el periodo de revolución de las estrellas; el radio de la órbita es r.



Solución. Si el sistema está en equilibrio y la órbita de una de las estrellas de masa m es circular, esto quiere decir que la fuerza neta gravitacional que sufre por la otra estrella de masa m, junto a la estrella de masa M, es equivalente a la fuerza centrípeta que experimenta. Así pues,

$$F_{g\text{NETA}} = \frac{GMm}{r^2} + \frac{Gmm}{(2r)^2} = \frac{GMm}{r^2} + \frac{Gm^2}{4r^2}$$

$$F_{g\text{NETA}} = F_{\text{CENTRÍPETA}} \Rightarrow \frac{GMm}{r^2} + \frac{Gm^2}{4r^2} = \frac{mv^2}{r}$$

La expresión para el periodo en movimiento circular uniforme es $T = 2\pi r/v$, así, despejando v, obtenemos

$$\frac{Gm}{r^2}\left(M + \frac{m}{4}\right) = \frac{mv^2}{r} \Rightarrow v = \sqrt{\frac{G(M+\frac{m}{4})}{r}}$$

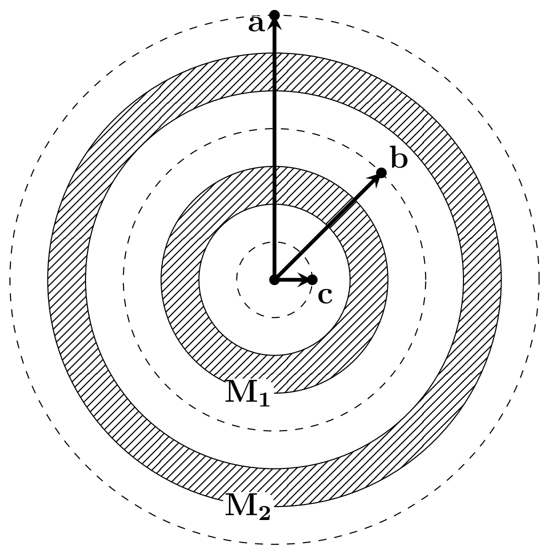
Reemplazando concluimos que,

$$T = 2\pi r(G(M+m/4)/r)^{-1/2} = \frac{2\pi r}{\sqrt{\frac{G(M+m/4)}{r}}} = \frac{2\pi r}{\sqrt{\frac{G(4M+m)}{4r}}} = \frac{2\pi r}{\frac{\sqrt{G(4M+m)}}{\sqrt{4r}}} = \frac{2\pi r\sqrt{4r}}{\sqrt{G(4M+m)}}$$

$$T = \frac{4\pi r\sqrt{r}}{\sqrt{G(4M+m)}} = \frac{4\pi r r^{1/2}}{\sqrt{G(4M+m)}} = \frac{4\pi r^{3/2}}{\sqrt{G(4M+m)}} = 4\pi\sqrt{\frac{r^3}{G(4M+m)}}$$

□

Ejercicio 4. Dos cascarones esféricos concéntricos de densidad uniforme con masas M_1 y M_2 están situados como se muestra en la figura. Halle la fuerza sobre una partícula de masa m cuando la partícula esté ubicada en *(a)* $r = a$, *(b)* $r = b$ y *(c)* $r = c$. La distancia r se mide desde el centro de los cascarones.



Solución. Para hallar la fuerza en los tres puntos dada la distribución de masa, debemos emplear el teorema de Gauss para la gravedad. Así pues, considerando que $\vec{g}$ es el campo gravitacional tenemos,

$$\vec{g} = -\nabla\phi \ , \ \nabla^2\phi = 4\pi G\rho(\vec{r})$$

aplicando el teorema de la divergencia obtenemos,

$$\int_A \vec{g} \cdot d\vec{A} = \int_V \nabla \cdot \vec{g} dV$$

por una parte, para una superficie esférica,

$$\int_A \vec{g} \cdot d\vec{A} = \int_A \vec{g} \cdot \hat{n} dA = g(r) \int_A dA = g(r) 4\pi r^2$$

y, por otra parte,

$$\int_V \nabla \cdot \vec{g} dV = \int \nabla \cdot (-\nabla\phi) dV = \int -\nabla^2\phi dV = -\int 4\pi G\rho(\vec{r}) dV$$
$$= 4\pi G \int_V \rho(\vec{r}) dV = -4\pi G M_{\text{enc}}(r)\hat{r}$$

donde M_{enc} será la masa encerrada acotada por el vector unitario $\hat{r}$, que apunta hacia afuera.

Así,

$$g(r)4\pi r^2 = -4\pi G M_{\text{enc}}$$

Ahora lo que corresponde será hallar el campo gravitariorio $\vec{g}$ según la masa encerrada para cada uno de los puntos y su superficie de acotación.

(a)

$$\begin{aligned} g(r)4\pi a^2 &= -4\pi G(M_1 + M_2) \\ g(r) = -\frac{G(M_1+M_2)}{a^2} &\Rightarrow \vec{F} = m\vec{a} = m\vec{g} \\ \vec{F}_a &= -\frac{G(M_1+M_2)m}{a^2} \end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned} g(r)4\pi b^2 &= -4\pi G M_1 \\ g(r) = -\frac{GM_1}{b^2} &\Rightarrow \vec{F} = m\vec{a} = m\vec{g} \\ \vec{F}_b &= -\frac{GM_1 m}{b^2} \end{aligned}$$

(c)

$$\begin{aligned} g(r)4\pi c^2 &= \cancelto{0}{-4\pi G(0)} \\ g(r) &= 0 \end{aligned}$$

No hay masa encerrada, por tanto, el campo gravitacional es cero. Así pues, se concluye que, $\vec{F}_c = 0$.

$\square$