T E O R Í A C L Á S I C A DE C A M P O S

Tarea 1 (lunes 10 de febrero a las 23:59)

1. El vector posición de una partícula puntual expresado en coordenadas esféricas toma la forma general $\vec{r} = (r\sin\theta\cos\varphi)\hat{e}_x + (r\sin\theta\sin\varphi)\hat{e}_y + (r\cos\theta)\hat{e}_z$. Demostrar que para el caso con ligaduras $f_1(r,\theta,\varphi,t) = r - R = 0$ y $f_2(r,\theta,\varphi,t) = \varphi - \varphi(t) = 0$ la energía cinética puede expresarse como

$$T = \frac{1}{2}mR^2\left(\dot{\theta}^2 + \dot{\varphi}^2\sin^2\theta\right). \tag{1}$$

2. La solución general a la ecuación del oscilador armónico $\ddot{x}(t) + \omega_0^2 x(t) = 0$ puede escribirse como $x(t) = C_+e^{+i\omega_0 t} + C_-e^{-i\omega_0 t}$, con C_+ y C_- dos constantes de integración complejas arbitrarias.

   i) Demostrar que esta expresión es solución a la ecuación del movimiento.

   ii) Demostrar que para quedarnos únicamente con las soluciones reales hemos de imponer $C_+ = C_-^*$.

   iii) Utilizando la propiedad $z = z_R + iz_I$ (i.e. cualquier número complejo puede separse en su parte real e imaginaria de este modo), demostrar que la solución general real a la ecuación del oscilador armónico puede escribirse en la forma $x(t) = A\cos(\omega_0 t) + B\sin(\omega_0 t)$, con A y B dos constantes reales arbitrarias.

   iv) Si por el contrario utilizamos la propiedad $z = |z|e^{i\theta}$ (i.e. cualquier número complejo puede separarse en su magnitud y su fase de esta forma), demostrar que la solución general a la ecuación del oscilador armónico puede expresarse en la forma $x(t) = C\cos(\omega_0 t + \delta)$, o $x(t) = C\sin(\omega_0 t + \delta)$, con C y δ dos constantes reales arbitrarias.

   v) Por ultimo, demostrar que la solución general a la ecuación del oscilador armónico puede expresarse en términos de los datos iniciales $x(t_0)$ y $v(t_0)$ por medio de:

$$x(t) = x(t_0)\cos\left[\omega_0(t - t_0)\right] + \frac{v(t_0)}{\omega}\sin\left[\omega_0(t - t_0)\right]. \tag{2}$$

3. Sea un sistema mecánico descrito por medio del Lagrangiano $L[q_i, \dot{q}_i, t]$. Demostrar que el nuevo Lagrangiano $L'[q_i, \dot{q}_i, t] = L[q_i, \dot{q}_i, t] + f[q_i, \dot{q}_i, t]$, en donde $f[q_i, \dot{q}_i, t]$ es una

función aribitraria de sus argumentos, no describe, en general, al mismo sistema. Sin embargo, si elegimos a la función $f[q_i, \dot{q}_i, t]$ como

$$f[q_i, \dot{q}_i, t] = \frac{dF[q_i, t]}{dt}, \tag{3}$$

con $F[q_i, t]$ una función arbitraria de q_i y t, entonces $L[q_i, \dot{q}_i, t]$ y $L'[q_i, \dot{q}_i, t]$ sí describen el mismo sistema. Demostrar este resultado utilizando directamente las ecuaciones de Euler-Lagrange, e interpretarlo. ¿Qué sucedería si en vez de $F[q_i, t]$ asumimos $F[q_i, \dot{q}_i, t]$?

4. La facilidad o dificultad para resolver un problema en mecánica clásica puede depender significativamente de la elección de las coordenadas generalizadas que utilicemos. Supongamos que un sistema está descrito por un Lagrangiano $L[q_i, \dot{q}_i, t]$, de tal modo que las ecuaciones del movimiento estarán dadas en términos de:

$$\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) = 0, \quad i = 1, 2, \ldots, s. \tag{4}$$

   Ahora, imaginen que realizamos una transformación de coordinadas generalizadas dada por $q'_i = q'_i(q_j, t)$. En términos de las nuevas coordenadas el Lagrangiano tomará la forma $L'(q'_i, \dot{q}'_i, t)$, en donde para obtener esta última expresión tan solo hemos aplicado la transformación inversa $q_i = q_i(q'_j, t)$.

   ¿Podremos seguir utilizando las ecuaciones de Euler-Lagrange, ahora expresadas en la forma

$$\frac{\partial L'}{\partial q'_i} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L'}{\partial \dot{q}'_i}\right) = 0, \quad i = 1, 2, \ldots, s, \tag{5}$$

   para obtener las ecuaciones del movimiento de este sistema?

   Pista: Ver “Derivation 10” página 31 del libro de Goldstein (*point transformation*).

5. Encontrar las ecuaciones del movimiento para un sistema descrito en términos de la acción:

$$S[q_i(t)] = \int_{t_1}^{t_2} L[q_i(t), \dot{q}_i(t), \ddot{q}_i(t), t]dt. \tag{6}$$

   Explicar detalladamente todos los pasos y suposiciones que hayan tomado. ¿De qué orden serán, en general, las ecuaciones del movimiento? ¿Qué forma ha de tener el dato inicial para fijar de manera unívoca la evolución del sistema?

6. Explicar brevemente bajo que condiciones la cantidad

$$h \equiv \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\dot{q}_i - L \tag{7}$$

es conservada, $h = \text{const}$, y bajo que condiciones coincide con la energía, $h = E$. Presentar un caso en el que ambas cosas sucedan simultáneamente, i.e. $h = E = \text{const}$.

7. Utilizando el teorema de Noether, identificar qué cantidades son conservadas para un sistema compuesto por dos partículas que interactúan únicamente por medio de un potencial que depende de la distancia entre las partículas, i.e. $V = V(|\vec{r}_i - \vec{r}_j|)$.

8. Sea S_{ij} una matriz simétrica, y A_{ij} una matriz antisimétrica. Demostrar que $S_{ij}A_{ij} = 0$. ¿Cuál es la interpretación de esta contracción?

9. ¿Cuántos parámetros libres tiene una matriz ortogonal en N dimensiones? Construir explícitamete los casos $N = 1$, 2 y 3.