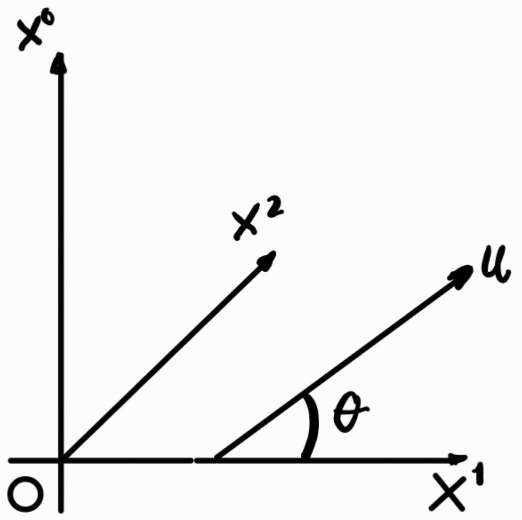
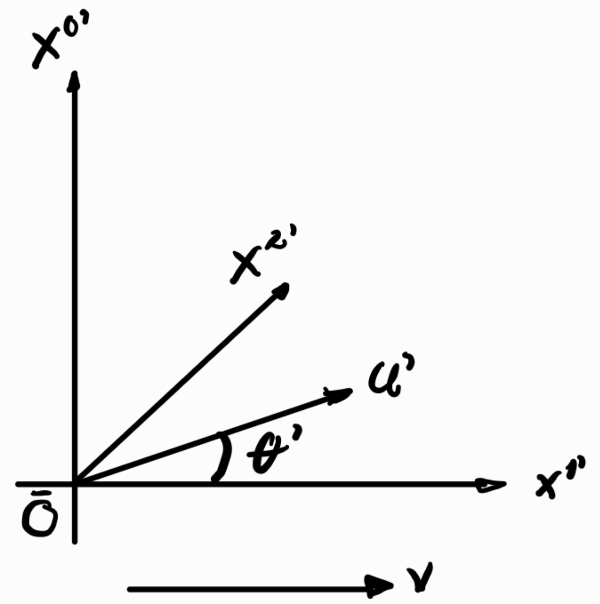
Ejercicio #2





El observador en O verá la partícula moverse con un ángulo θ, mientras que el observador en $\bar{O}$ la verá con un ángulo θ'. Además, por la ley de composición de velocidades sabemos que. Si O ve a $\bar{O}$ moverse a velocidad v, entonces la velocidad medida de $\bar{O}$ (u') será medida por O en el eje paralelo al movimiento tal que,

$$u_x = \frac{v + u_{x'}}{1 + v u_{x'}} \Rightarrow \frac{v + \cos\theta' u'}{1 + v\cos\theta' u'}$$

Para encontrar la componente perpendicular de u con respecto a O podemos emplear una transformación inversa de Lorentz de la siguiente manera, con $\gamma = 1/\sqrt{1-v^2}$,

$$t = \gamma(t' + v x') \longrightarrow dt = \gamma(dt' + v\,dx')$$

Podemos ver, además, que $u_{x'} = \dfrac{dx'}{dt'}$ en el marco $\bar{O}$, igualmente, $dx' = u_{x'}\,dt'$, entonces,

$$dt = \gamma(dt' + v u_x' dt') \longrightarrow dt = \gamma(1 + v u_x') dt$$

Dado que la velocidad v tan solo sucede en el eje $x^1(x)$, la transformación de Lorentz para $x^2(y)$ y $x^3(z)$ es equivalente a $dy = dy'$ y $dz = dz'$. Con estas consideraciones podemos ver que la componente perpendicular de u en O será,

$$u_y = \frac{dy}{dt} = \frac{dy'}{\gamma(1 + v u_x')dt'} = \frac{u_y'}{\gamma(1 + v u_x')}$$

lo que es equivalente a,

$$u_y = \frac{u' \operatorname{sen}\theta'}{\gamma(1 + v u' \cos\theta')} = \frac{u \operatorname{sen}\theta' \sqrt{1-\gamma^2}}{1 + v u' \cos\theta'}$$

Con las componentes perpendicular y paralela de u podemos hallar θ tal que,

$$\tan\theta = \frac{u_y}{u_x} = \frac{u' \operatorname{sen}\theta' \sqrt{1-\gamma^2}}{1 + v u' \cos\theta'} \Big/ \frac{v + \cos\theta' u'}{1 + v \cos\theta' u'}$$

$$\tan\theta = \frac{u' \operatorname{sen}\theta' \sqrt{1-v^2}}{v + \cos\theta' u'} \frac{\cancel{(1 + v\cos\theta' u')}}{\cancel{(1 + v\cos\theta' u')}} = \frac{u' \operatorname{sen}\theta' \sqrt{1-v^2}}{v + \cos\theta' u'}$$

con $\gamma = 1/\sqrt{1-v^2}$ y $\tan\theta' = \operatorname{sen}\theta' / \cos\theta'$

$$\tan\theta = \frac{\tan\theta'}{\gamma} \cdot \frac{1}{\frac{v}{\cos\theta' u'} + 1} = \frac{\tan\theta'}{\gamma}\left(v/u_x' + 1\right)^{-1}$$

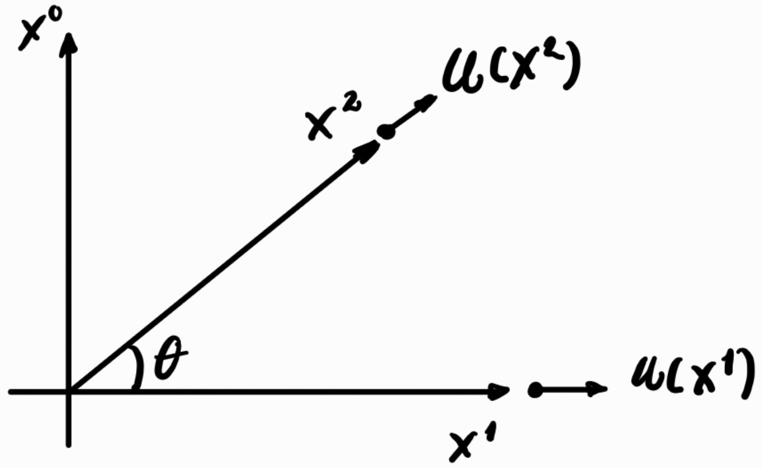
Ejercicio #3

Empleando las conclusiones del ejercicio anterior, vamos a tener que, si en vez de ser una partícula o un proyectil tenemos un fotón, el valor de u' será 1, entonces,

$$\tan\theta = \frac{\cancel{u'}^{1}\, \operatorname{sen}\theta' \sqrt{1-v^2}}{v+\cos\theta' \cancel{u'}^{1}} = \frac{\operatorname{sen}\theta' \sqrt{1-v^2}}{v+\cos\theta'}$$

$$\tan\theta = \frac{\operatorname{sen}\theta'}{\cos\theta'}\,\frac{1}{\gamma}\,\frac{1}{(v/\cos\theta+1)} = \frac{\tan\theta'}{\gamma}(v\sec\theta'+1)^{-1}$$

Ejercicio #4



Con la siguiente configuración tenemos que,

Partícula viajando en $x^1(x)$ $\quad u_x = u \quad u_y = 0$

Partícula viajando en $x^2(y)$ $\quad u_x = 0 \quad u_y = u$

Como se ve, la situación es simétrica, así que sin importar qué observador se escoja, los resultados serán equivalentes. Si ubicamos a un observador inercial en el origen, este verá a una u otra partícula moviéndose en una dirección determinada. Si tomamos que el observador inercial en el origen es O, y alguna de las dos partículas es $\bar{O}$, por la ley de composición de velocidades tendremos que la velocidad de una partícula, vista por su contraparte será,

$$u_x' = \frac{u_x - v}{1 - u_x v}$$

u_x será cero porque el movimiento sucede de forma perpendicular y $v = u$, entonces,

$$u_x' = \frac{u_x - v}{1 - u_x v} = -u$$

Para u_y' tendremos,

$$u_y' = \frac{u_y}{\gamma(1 - u_x v)} = \frac{u}{\gamma} = u\sqrt{1-u^2}$$

Así, la magnitud y la dirección de la velocidad de una partícula con respecto a la otra será,

$$u'^2 = u_x'^2 + u_y'^2$$

$$u'^2 = (-u)^2 + (u\sqrt{1-u^2})^2$$

$$u'^2 = u^2 + u^2(1-u^2)$$

$$u'^2 = u^2 + u^2 - u^4$$

$$u'^2 = 2u^2 - u^4$$

$$\frac{u'^2}{u^2} = 2 - u^2$$

$$\frac{u'}{u} = \sqrt{2-u^2}$$

$$u' = u\sqrt{2-u^2}$$

$$\tan\theta' = \frac{u_y'}{u_x'}$$

$$\tan\theta' = -\frac{u\sqrt{1-u^2}}{u}$$

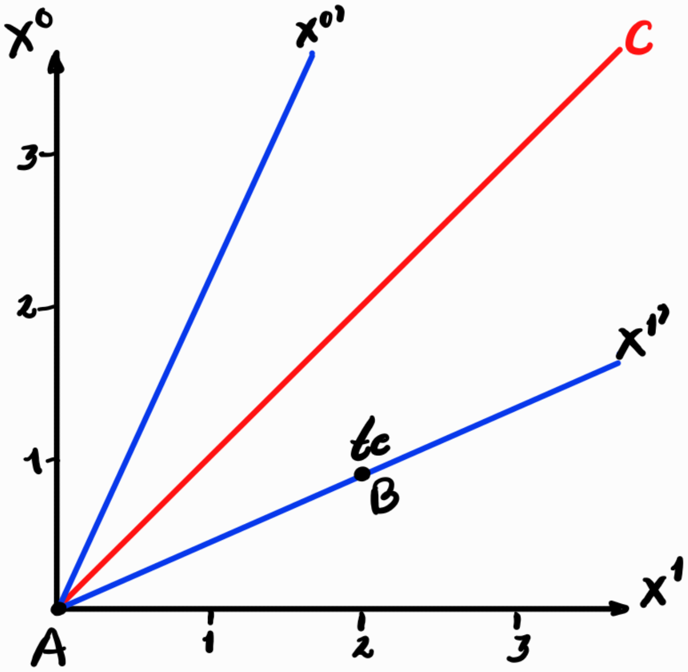
$$\tan\theta' = -\sqrt{1-u^2}$$

$$\tan\theta' = -\frac{1}{\gamma(u)}$$

$$V_{rel} = \frac{u'}{\sqrt{1 - u_x u_y}} = \frac{u'}{\sqrt{1-u^2}} = \frac{\sqrt{2-u^2}\,u}{\sqrt{1-u^2}} = \sqrt{2-u^2}\,u\,\gamma(u)$$

$u_x = v_x = u$

Ejercicio #5



$A(x_A^0, x_A^1, x_A^2, x_A^3) = (0, 0, 0, 0)$

$B(x_B^0, x_B^1, x_B^2, x_B^3) = (1, 2, 0, 0)$

Calculando el intervalo para los dos eventos tenemos que,

$$\Delta s^2 = -(\Delta x^0)^2 + (\Delta x^1)^2 + (\Delta x^2)^2 + (\Delta x^3)^2$$

$$\Delta s^2 = -1^2 + 2^2 + \cancel{0 + 0}$$

$$\Delta s^2 = 3 \longrightarrow \text{Espacialoide}$$

Si tenemos en cuenta que la simultaneidad implica que dos eventos en un marco de referencia inercial suceden al mismo tiempo, para $\bar{O}$ tendríamos que $x_A^{0'} = x_B^{0'} = te$, siendo te el momento cuando los dos eventos ocurren en ese marco en particular.

Usando una transformación de Lorentz podemos hallar la velocidad v del marco $\bar{O}$ con respecto a O para que ocurra la simultaneidad.

$$x_A^{0'} = te = \gamma(x_A^0 - v x_A^1)$$

$$x_B^{0'} = te = \gamma(x_B^0 - v x_B^1)$$

Imponiendo que $te = te$, tenemos,

$$\gamma(x_A^0 - v x_A^1) = \gamma(x_B^0 - v x_B^1)$$

$$\cancel{\gamma(0 - v(0))}^{0} = \gamma(1 - v(2))$$

$$0 = \gamma(1 - 2v)$$

Dividiendo por γ $\longrightarrow$ $0 = 1 - 2v$

$$v = \frac{1}{2}$$

Igualmente vemos que, con $\gamma = 1/\sqrt{1-v^2} = 2\sqrt{3}/3$,

$$te = \frac{2\sqrt{3}}{3}\left(0 - \frac{1}{2}(0)\right) = 0$$

$$te = \frac{2\sqrt{3}}{3}\left(1 - \frac{1}{2}(2)\right) = 0$$

Ejercicio #6

Del ejercicio anterior vimos que $\Delta s^2_{AB} = 3$, un intervalo espacialoide. Se puede responder la pregunta repitiendo la metodología del ejercicio anterior pero esta vez para la coordenada x^1; esto es,

$$x_A^{1'} = x_c = \gamma(x_A^1 - v x_A^0)$$

$$x_B^{1'} = x_e = \gamma(x_B^1 - v x_B^0)$$

Imponiendo nuevamente $x_c = x_e$,

$$\cancel{\gamma(0 - v(0))}^{\,0} = \gamma(2 - v(1))$$

$$0 = \gamma(2 - v)$$

$$v = 2 \longrightarrow \text{Imposible} //$$

Vemos que $v = 2$, $v > c$ lo cual viola el segundo postulado de la relatividad especial. Para intervalos espacialoides no hay un sistema de referencia inercial tal que dos eventos estén ubicados en la misma posición del espacio.

Ejercicio #7

Demostrar que $\Lambda^T \eta \Lambda = \eta$.

Teniendo la matriz de transformación con componentes,

$$\Lambda^{\bar{0}}_{0} = \gamma = 1/\sqrt{1-v^2}$$

$$\Lambda^{\bar{0}}_{j} = \Lambda^{\bar{j}}_{0} = -\gamma v^j$$

$$\Lambda^{\bar{j}}_{k} = \Lambda^{\bar{k}}_{j} = (\gamma - 1)\frac{v^j v^k}{v^2} + \delta^{jk}$$

De forma explícita tendremos que,

$$\Lambda^{\bar{0}}_{0} = \gamma \ , \ \Lambda^{\bar{0}}_{1} = -\gamma v^1 \ , \ \Lambda^{\bar{0}}_{2} = -\gamma v^2 \ , \ \Lambda^{\bar{0}}_{3} = -\gamma v^3$$

$$\Lambda^{\bar{1}}_{1} = (\gamma-1)\frac{v^1 v^1}{v^2} + 1 \ , \ \Lambda^{\bar{1}}_{2} = (\gamma-1)\frac{v^1 v^2}{v^2} \ , \ \Lambda^{\bar{1}}_{3} = (\gamma-1)\frac{v^1 v^3}{v^2}$$

$$\Lambda^{\bar{2}}_{1} = (\gamma-1)\frac{v^2 v^1}{v^2} \ , \ \Lambda^{\bar{2}}_{2} = (\gamma-1)\frac{v^2 v^2}{v^2} + 1 \ , \ \Lambda^{\bar{2}}_{3} = (\gamma-1)\frac{v^2 v^3}{v^2}$$

$$\Lambda^{\bar{3}}_{1} = (\gamma-1)\frac{v^3 v^1}{v^2} \ , \ \Lambda^{\bar{3}}_{2} = (\gamma-1)\frac{v^3 v^2}{v^2} \ , \ \Lambda^{\bar{3}}_{3} = (\gamma-1)\frac{v^3 v^3}{v^2} + 1$$

$$\Lambda^{\bar{\mu}}_{\nu} = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma v^1 & -\gamma v^2 & -\gamma v^3 \\ -\gamma v^1 & 1 + \frac{\varepsilon (v^1)^2}{v^2} & \frac{\varepsilon v^1 v^2}{v^2} & \frac{\varepsilon v^1 v^3}{v^2} \\ -\gamma v^2 & \frac{\varepsilon v^1 v^2}{v^2} & 1 + \frac{\varepsilon (v^2)^2}{v^2} & \frac{\varepsilon v^2 v^3}{v^2} \\ -\gamma v^3 & \frac{\varepsilon v^3 v^1}{v^2} & \frac{\varepsilon v^3 v^2}{v^2} & 1 + \frac{\varepsilon (v^3)^2}{v^2} \end{pmatrix} \qquad \text{con } (\gamma - 1) = \varepsilon$$

Si se considera un marco de referencia inercial desplazándose respecto a otro con velocidad $\vec{v}$, tendremos que el boost de Lorentz deberá afectar la dirección de $\vec{x}$ a lo largo de $\vec{v}$, esto es,

$$\vec{x} = \vec{x}_{\parallel} + \vec{x}_{\perp}$$

teniendo que, $\vec{v}\cdot\vec{x} = \vec{v}\cdot\vec{x}_{\parallel} = |\vec{v}||\vec{x}_{\parallel}|$, así

$$\vec{x}_{\parallel} = \frac{\vec{x}\cdot\vec{v}}{|\vec{v}|^2}\vec{v} \quad , \quad \vec{x}_{\perp} = \vec{x} - \vec{x}_{\parallel} .$$

Entonces, el factor de Lorentz vendrá dado por,

$$\gamma(\vec{v}) = (1 - |\vec{v}|^2)^{-1/2}$$

Generalizando estas consideraciones para las cuatro componentes x^{μ} tenemos que,

$$x^{\bar{0}} = \gamma(x^0 - \vec{v}\cdot\vec{x})$$

$$\vec{x}' = \vec{x}_{\perp} + \gamma(\vec{x}_{\parallel} - \vec{v}x^0)$$

$$\vec{x}' = \vec{x} - \vec{x}_{\parallel} + \gamma\vec{x}_{\parallel} - \vec{v}\gamma x^0$$

$$\vec{x}' = \vec{x} - (1-\gamma)\frac{\vec{x}\cdot\vec{v}}{|\vec{v}|^2}\vec{v} - \vec{v}\gamma x^0$$

$$x' = \vec{x} - \left(\gamma x^0 + (1-\gamma)\frac{\vec{x}\cdot\vec{v}}{|\vec{v}|^2}\right)\vec{v}$$

$$\vec{x}' = \vec{x} + \left(-\gamma x^0 + \frac{\gamma - 1}{|\vec{v}|^2}\vec{x}\cdot\vec{v}\right)\vec{v}$$

lo cual es equivalente a decir $\Lambda^{\bar{\mu}}{}_{\nu}(\vec{v})$.

Sabiendo que el tensor métrico es una matriz diagonal de la forma $\eta = diag(-1,1,1,1)$, que el producto punto de cualquier 4-vector es invariante tal que $A \cdot A = \bar{A} \cdot \bar{A}$ y que, además, una transformación de Lorentz implica que,

$$A^{\bar{\mu}} = \Lambda^{\bar{\mu}}{}_{\nu} A^{\nu} \quad \text{con } A \text{ en } O \text{ y } \bar{A} \text{ en } \bar{O}(\vec{v})$$

vemos que,

$$A \cdot A = \eta_{\mu\nu} A^{\mu} A^{\nu}$$

o bien,

$$\bar{A} \cdot \bar{A} = \eta_{\bar{\mu}\bar{\nu}} A^{\bar{\mu}} A^{\bar{\nu}}$$

entonces, dadas las condiciones anteriores tenemos que,

$$\bar{A} \cdot \bar{A} = \eta_{\bar{\mu}\bar{\nu}} \Lambda^{\bar{\mu}}{}_{\beta} A^{\beta} \Lambda^{\bar{\nu}}{}_{\alpha} A^{\alpha}$$

$$\bar{A} \cdot \bar{A} = \eta_{\bar{\mu}\bar{\nu}} \Lambda^{\bar{\mu}}{}_{\alpha} \Lambda^{\bar{\nu}}{}_{\beta} A^{\alpha} A^{\beta}$$

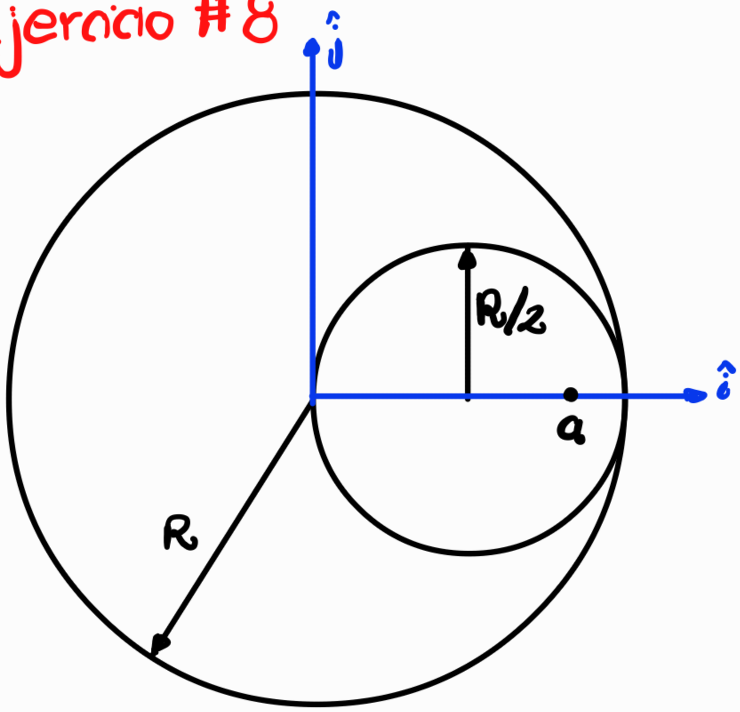
$$\bar{A} \cdot \bar{A} = \eta_{\alpha\beta} A^{\alpha} A^{\beta}$$

$$\eta_{\alpha\beta} = \eta_{\bar{\mu}\bar{\nu}} \Lambda^{\bar{\mu}}{}_{\alpha} \Lambda^{\bar{\nu}}{}_{\beta}$$

Tenemos que $\eta_{\bar{\mu}\bar{\nu}} = \eta_{\bar{\nu}\bar{\mu}}$, así, considerando que $(\Lambda^{T})_{\bar{\mu}}{}^{\alpha} = \Lambda^{\bar{\mu}}{}_{\alpha}$, obtenemos,

$$\Lambda^{\bar{\mu}}{}_{\alpha} \eta_{\bar{\mu}\bar{\nu}} \Lambda^{\bar{\nu}}{}_{\beta} = \eta_{\alpha\beta} \longrightarrow (\Lambda^{T})^{\bar{\mu}}{}_{\alpha} \eta_{\bar{\mu}\bar{\nu}} \Lambda^{\bar{\nu}}{}_{\beta} = \eta_{\alpha\beta} \longrightarrow \Lambda^{T} \eta \Lambda = \eta$$

Ejercicio #8



El campo gravitatorio total será la resta entre el campo de la esfera maciza y el campo que proporcional a la masa de la oquedad.

Hay que hallar el campo gravitatorio cuando la partícula se encuentra en $r < R$, esto es,

$$\int \vec{g} \cdot d\vec{A} = \int \nabla \cdot \vec{g} \, dV \qquad \text{con} \quad \vec{g} = -\nabla \phi \quad y \quad \nabla^2 \phi = 4\pi G \rho(\vec{r})$$

tenemos entonces,

$$\int \vec{g} \cdot d\vec{A} = \int \nabla \cdot \vec{g} \, dV$$

$$g(r) \int d\vec{A} = -4\pi G \int \rho(\vec{r}) dV$$

$$g(r) 4\pi r^2 = -4\pi G \, M_{enc}(r) \hat{r}$$

La masa encerrada dependerá de r, así, asumiendo densidad uniforme tenemos que,

$$\rho = \frac{3M_{enc}(r)}{4\pi r^3} \longrightarrow \rho_{enc} = \rho_T$$

$$\frac{3M_{enc}(r)}{4\pi r^3} = \frac{3M}{4\pi R^3}$$

$$M_{enc}(r) = M\frac{r^3}{R^3}$$

Entonces,

$$g(r)\, 4\pi r^2 = -4\pi G M \frac{r^3}{R^3}$$

$$g(r) = -\frac{GMr}{R^3}\hat{r} \longrightarrow \text{Cuando } r<R.$$

Ahora bien, si se quiere hallar el campo gravitatorio en un punto dentro de la cavidad como en a, solo considerando el eje $\hat{i}$ se tiene que,

Esfera maciza $\vec{g}_E = -\frac{GM_E a}{R^3}\hat{i}$

Volumen esférico de la cavidad, $\vec{g}_0 = -\frac{GM_0}{(R/2)^3}\left(a-\frac{R}{2}\right)\hat{i}$

teniendo en cuenta que

$$\rho_0 = \rho_E$$

$$\frac{3M_0}{4\pi(R/2)^3} = \frac{3M_E}{4\pi R_E^3}$$

$$\frac{8M_0}{R_E^3} = \frac{M_E}{R_E^3}$$

$$M_0 = M_E/8$$

$$\vec{g}_0 = -\frac{\cancel{8}GM}{\cancel{8}R^3}\left(a-\frac{R}{2}\right)\hat{i}$$

$$\vec{g}_0 = -\frac{GM}{R^3}\left(a-\frac{R}{2}\right)\hat{i}$$

Así,

$$\vec{g}_T = \vec{g}_E - \vec{g}_O$$

$$\vec{g}_T = -\frac{GM}{R^3}a\hat{i} - \left(-\frac{GM}{R^3}\left(a - \frac{R}{2}\right)\hat{i}\right)$$

$$g_T = -\frac{GM}{R^3}a\hat{i} - \left(-\frac{GM}{R^3}a\hat{i} + \frac{GM}{R^3}\frac{R}{2}\hat{i}\right)$$

$$g_T = \cancel{-\frac{GM}{R^3}a\hat{i}} + \cancel{\frac{GM}{R^3}a\hat{i}} - \frac{GM}{2R^2}\hat{i}$$

$$g_T = -\frac{GM}{2R^2}\hat{i}$$

Usando Newton tenemos que,

$$\vec{F} = m\vec{a} = m\vec{g} = m \cdot -\frac{GM}{2R^2}\hat{i}$$

$$\vec{F} = -\frac{GMm}{2R^2}\hat{i} \quad //$$

Dentro de la oquedad el campo es constante.

Ejercicio #9

Con la ecuación diferencial parcial

$$\nabla^2 \phi - \alpha^2 \phi = 4\pi G \rho$$

se debe resolver ϕ para el caso de un cuerpo con simetría esférica con radio R, densidad uniforme ρ_0 cuando $r<R$ y $\rho=0$ cuando $r>R$.

Dado que ρ depende de r, y el problema tiene simetría esférica, podemos expresar el laplaciano tal que,

$$\nabla^2\phi = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \frac{\partial \phi}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2 \operatorname{sen}\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\operatorname{sen}\theta \frac{\partial \phi}{\partial \theta}\right) + \frac{1}{r^2 \operatorname{sen}^2\theta}\frac{\partial^2 \phi}{\partial \varphi^2}$$

en donde podemos observar que $\phi(r)$, entonces,

$$\nabla^2\phi(r) - \alpha^2\phi(r) = 4\pi G\rho(r)$$

$$\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{d\phi}{dr}\right) - \alpha^2\phi = 4\pi G\rho(r)$$

$$\frac{1}{dr}\left(r^2\frac{d\phi}{dr}\right) - \alpha^2 r^2 \phi = 4\pi G\rho(r) r^2$$

Resolviendo la derivada para r tenemos que,

$$\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{d\phi}{dr}\right) = 2r\frac{d\phi}{dr} + r^2\frac{d^2\phi}{dr^2}$$

Lo que resulta en $r^2\frac{d^2\phi}{dr^2}+2r\frac{d\phi}{dr}-\alpha^2r^2\phi=4\pi G\rho(r)r^2$

Nos disponemos a resolver la ecuación diferencial,

$$r^2\frac{d^2\phi}{dr^2}+2r\frac{d\phi}{dr}-\alpha^2r^2\phi=4\pi G\rho(r)r^2$$

$$\frac{d^2\phi}{dr^2}+\frac{2}{r}\frac{d\phi}{dr}-\alpha^2\phi=4\pi G\rho$$

$$\downarrow$$

$$\frac{d^2\phi(r)}{dr^2}+\frac{d\phi(r)}{dr}f(r)+\phi(r)g(r)=F(x)$$

$$\phi(r)=e^{\left(-\int f(r)/2\,dr\right)}v(x)\quad\Rightarrow\quad\phi(r)=\mu(r)v(r)$$

$$\mu(r)=e^{-\int\frac{2}{r}\frac{1}{2}dr}=e^{-\int\frac{1}{r}dr}=e^{-\ln(r)}=\frac{1}{r}$$

$$\phi(r)=\mu(r)v(r)$$

$$\phi'(r)=\mu(r)\frac{dv(r)}{dr}+\frac{d\mu(r)}{dr}v(r)$$

$$\phi'(r)=\frac{1}{r}v'(r)-\frac{1}{r^2}v(r)$$

$$\phi''(r)=\mu(r)\frac{d^2v(r)}{dr}+\frac{d\mu(r)}{dr}\frac{dv(r)}{dr}+\frac{d^2\mu(r)}{dr}v(r)+\frac{d\mu(r)}{dr}\frac{dv(r)}{dr}$$

$$\phi(r) = \mu(r)\, v(r) = \frac{1}{r} v$$

$$\phi'(r) = \frac{1}{r} v' - \frac{1}{r^2} v$$

$$\phi''(r) = \frac{1}{r} v'' - \frac{1}{r^2} v' - \left(\frac{1}{r^2} v' - \frac{2}{r^3} v\right)$$

Reemplazando,

$$\frac{d^2\phi}{dr^2} + \frac{2}{r}\frac{d\phi}{dr} - \alpha^2\phi = 4\pi G\rho$$

$$\frac{1}{r}v'' - \frac{1}{r^2}v' - \frac{1}{r^2}v' + \frac{2v}{r^3} + \frac{2}{r}\left(\frac{1}{r}v' - \frac{1}{r^2}v\right) - \frac{\alpha^2 v}{r} = 4\pi G\rho$$

$$\frac{v''}{r} - \frac{v'}{r^2} - \frac{v'}{r^2} + \frac{2v}{r^3} + \frac{2v'}{r^2} - \frac{2v}{r^3} - \frac{\alpha^2 v}{r} = 4\pi G\rho$$

$$\frac{v''}{r} \cancelto{0}{- \frac{v'}{r^2} - \frac{v'}{r^2} + \frac{2v'}{r^2}} + \cancelto{0}{\frac{2v}{r^3} - \frac{2v}{r^3}} - \frac{\alpha^2 v}{r} = 4\pi G\rho$$

$$\frac{v''}{r} - \frac{\alpha^2 v}{r} = 4\pi G\rho$$

$$v'' - \alpha^2 v = 4\pi G\rho r$$

La solución será,

$$v(r) = v_g(r) + v_p(r)$$

$$v_g(r) \Rightarrow v'' - \alpha^2 v = 0$$

Considerando un ansatz exponencial:

$$\lambda^2 e^{\lambda r} - \alpha^2 e^{\lambda x} = 0$$

$$\lambda^2 - \alpha^2 = 0 \longrightarrow -(\alpha - \lambda)(\alpha + \lambda) = 0 \quad \lambda = \alpha,\ \lambda = -\alpha$$

Entonces,

$$V_g(r) = C_1 e^{-\alpha r} + C_2 e^{\alpha r}$$

$V_p(r)$ será,

$$V_p(r) = A_1 + A_2 r$$

$$V_p'' = 0 \qquad V_p' = A_2$$

$$V_p'' - \alpha^2 V_p = 4\pi G \rho r$$

$$-\alpha^2 (A_1 + A_2 r) = 4\pi G \rho r$$

$$-\alpha^2 A_1 - \alpha^2 A_2 r = 4\pi G \rho r$$

$$-\alpha^2 A_1 = 0$$

$$-\alpha^2 A_2 r = 4\pi G \rho r \quad \Rightarrow A_2 = -\frac{4\pi G \rho}{\alpha^2}$$

$$V_p(r) = -\frac{4\pi G \rho}{\alpha^2}$$

Así,

$$V(r) = C_1 e^{-\alpha r} + C_2 e^{\alpha r} - \frac{4\pi G \rho}{\alpha^2}$$

Sustituyendo en ϕ tenemos,

$$\phi(r) = \mu(r) V(r)$$

$$\phi(r) = \frac{1}{r} \cdot \left(C_1 e^{-\alpha r} + C_2 e^{\alpha r} - \frac{4\pi G \rho}{\alpha^2} \right)$$

Finalmente,

$$\phi(r) = C_1 \frac{e^{-\alpha r}}{r} + C_2 \frac{e^{\alpha r}}{r} - \frac{4\pi G\rho}{r\alpha^2}$$

- Cuando $r > R$, $\rho = 0$, entonces,

$$\phi(r) = C_1 \frac{e^{-\alpha r}}{r} + C_2 \frac{e^{\alpha r}}{r} - \cancel{\frac{4\pi G\rho}{r\alpha^2}}^{\,0}$$

se debe anotar también que, cuando $r \to \infty$, el término $e^{\alpha r}/r$ crece de manera exponencial. Así, en este caso particular para el potencial gravitacional, este resultado es físicamente inaceptable, por tal motivo C_2 debería ser cero. Con esto, el resultado final es,

$$\phi(r) = C_1 \frac{e^{-\alpha r}}{r}$$