

ESTRUCTURA GALÁCTICA Y DINÁMICA ESTELAR

Referencia: Capítulo 7 de Keeton (*Principles of Astrophysics*) y
Capítulo 3 de Binney & Tremaine (*Galactic Dynamics*)

Órbitas

Órbitas bajo potenciales esféricamente simétricos y estáticos

Es también un problema clásico, donde consideramos un potencial que solo depende de r y no cambia con el t (el caso más sencillo):

$$\vec{r} = r \hat{r}$$

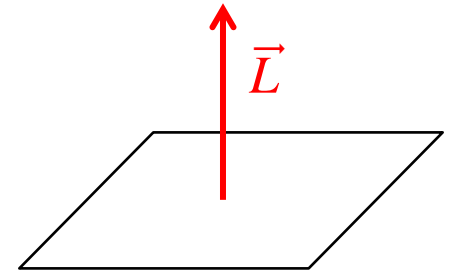
$$\frac{\Psi}{m} = \Phi(r)$$

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}$$

ecuación de movimiento

$$\frac{\vec{\mathcal{F}}}{m} = F(r) \hat{r} = \frac{d^2 r}{dt^2} \hat{r} \quad \leftarrow \text{campo de fuerza central}$$

$$\frac{\vec{\mathcal{L}}}{m} = \vec{L} = \vec{r} \times \vec{v}$$

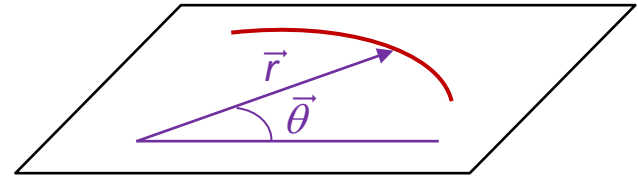


$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{d\vec{r}}{dt} \times \vec{v} + \vec{r} \times \frac{d\vec{v}}{dt} = \overbrace{\vec{v} \times \vec{v}}^0 + \overbrace{\vec{r} \times \vec{F}}^{\text{Torca}} = rF \overbrace{\hat{r} \times \hat{r}}^0 = 0$$

$$\vec{L} = cte = L \hat{n}$$

movimiento en un plano
(plano orbital)

Si el movimiento es en un plano, perpendicular a la dirección del momento angular, podemos utilizar **coordenadas polares**:



$$\left. \begin{aligned} x &= r \cos(\theta) \\ y &= r \sin(\theta) \\ r &= \sqrt{x^2 + y^2} \end{aligned} \right\} \quad \left. \begin{aligned} \hat{r} &= \cos(\theta) \hat{x} + \sin(\theta) \hat{y} \\ \hat{\theta} &= -\sin(\theta) \hat{x} + \cos(\theta) \hat{y} \end{aligned} \right\} \quad \begin{aligned} \dot{\hat{r}} &= \dot{\theta} \hat{\theta} \\ \dot{\hat{\theta}} &= -\dot{\theta} \hat{r} \end{aligned} \quad \text{TAREA}$$

Luego:

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{r}}{dt} &= \dot{r} \hat{r} + r \dot{\theta} \hat{\theta} \\ \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} &= \ddot{r} \hat{r} + \dot{r} \dot{\theta} \hat{\theta} + \dot{r} \dot{\theta} \hat{\theta} + r (\ddot{\theta} \hat{\theta} - \dot{\theta} \dot{\theta} \hat{r}) \\ &= \underbrace{(\ddot{r} - r \dot{\theta}^2)}_{F(r)} \hat{r} + \underbrace{(2 \dot{r} \dot{\theta} + r \ddot{\theta})}_{0} \hat{\theta} = F(r) \hat{r} \end{aligned}$$

Así:

$$F(r) = \ddot{r} - r \dot{\theta}^2$$

$$\begin{aligned} 2 \dot{r} \dot{\theta} + r \ddot{\theta} &= 0 \\ 2 r \dot{r} \dot{\theta} + r^2 \ddot{\theta} &= 0 \\ \frac{d(r^2 \dot{\theta})}{dt} &= 0 \quad \Rightarrow \end{aligned}$$

2ª. Ley de Kepler

$$r^2 \dot{\theta} = cte = L$$

Ahora veamos como queda la energía mecánica:

$$\mathbb{E} = \frac{1}{2} v^2 + \Phi = \frac{1}{2} [\dot{r}^2 + (r \dot{\theta})^2] + \Phi$$

$$2(\mathbb{E} - \Phi) = \dot{r}^2 + (r \dot{\theta})^2 = \dot{r}^2 + \frac{(r^2 \dot{\theta})^2}{r^2} = \dot{r}^2 + \frac{L^2}{r^2}$$

$$\dot{r}^2 = 2(\mathbb{E} - \Phi) - \frac{L^2}{r^2}$$

Órbita circular

$$r = cte \quad \Rightarrow \quad \dot{r} = 0$$

Entonces:

$$2(\mathbb{E} - \Phi) = \frac{L^2}{r^2} \quad \Rightarrow \quad r^2 = \frac{L^2}{2(\mathbb{E} - \Phi)} \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{pericentro} \\ r_1 = r_2 \\ \text{apocentro} \end{array} \right.$$

y, tomando en cuenta que:

$$\dot{r} = \frac{dr}{dt} = \sqrt{2(\mathbb{E} - \Phi) - \left(\frac{L}{r}\right)^2}$$

tenemos:

$$T = \int dt = \int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{\sqrt{2(\mathbb{E} - \Phi) - (L/r)^2}} \quad \leftarrow \text{ periodo}$$

Potencial Kepleriano

$$F(r) = -\frac{G\mathcal{M}}{r^2} = \ddot{r} - r \dot{\theta}^2$$

Considerando que:

$$L = r^2 \dot{\theta} \quad \Rightarrow \quad \dot{\theta} = \frac{L}{r^2}$$

y:

$$\ddot{r} = \frac{d^2 r}{dt^2} = \frac{d}{dt} \left(\frac{d}{dt} r \right) = \frac{d}{d\theta} \frac{d\theta}{dt} \left(\frac{d}{d\theta} \frac{d\theta}{dt} r \right) = \frac{d}{d\theta} \dot{\theta} \left(\frac{d}{d\theta} \dot{\theta} r \right)$$

$$\ddot{r} = \frac{L}{r^2} \frac{d}{d\theta} \left(\frac{L}{r^2} \frac{d}{d\theta} r \right) = \frac{L^2}{r^2} \frac{d}{d\theta} \left(\frac{1}{r^2} \frac{dr}{d\theta} \right)$$

tenemos:

$$\frac{L^2}{r^2} \frac{d}{d\theta} \left(\frac{1}{r^2} \frac{dr}{d\theta} \right) - r \frac{L^2}{r^4} = -\frac{G\mathcal{M}}{r^2}$$

Ahora, hacemos el siguiente
cambio de variables:

$$\left\{ \begin{array}{l} u = \frac{1}{r} \\ du = -\frac{dr}{r^2} \Rightarrow dr = -r^2 du \end{array} \right.$$

y quedamos con:

$$L^2 u^2 \frac{d}{d\theta} \left(-\frac{du}{d\theta} \right) - L^2 u^3 = -G\mathcal{M} u^2$$

es decir:

$$\frac{d^2 u}{d\theta^2} + u - \frac{G\mathcal{M}}{L^2} = 0$$

Que tiene como solución:

$$u(\theta) = C \cos(\theta - \theta_0) + \frac{GM}{L^2}$$

donde $C > 0$ y θ_0 son constantes.

Definiendo:

$$\varepsilon \equiv \frac{CL^2}{GM}$$

← excentricidad

$$a = \frac{L^2}{GM(1 - \varepsilon^2)}$$

← semi-eje mayor

$$r(\theta) = \frac{1}{u} = \frac{L^2}{CL^2 \cos(\theta - \theta_0) + GM} = \frac{a(1 - \varepsilon^2)}{1 + \varepsilon \cos(\theta - \theta_0)}$$

$$r_1 = a(1 - \varepsilon)$$

pericentro

$$r_2 = a(1 + \varepsilon)$$

apocentro

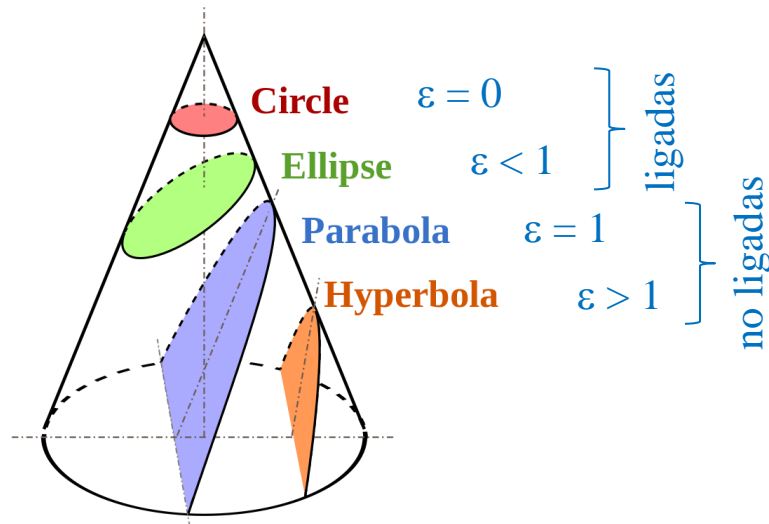
$$b = a\sqrt{1 - \varepsilon^2}$$

semi-eje menor

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{a^3}{GM}}$$

$$\Rightarrow T^2 = \frac{(2\pi)^2}{GM} a^3$$

3ª. Ley de Kepler



$$\mathbb{E} = -\frac{GM}{2a}$$

$\varepsilon < 1$ son casos especiales de órbitas que son **ligadas** y **cerradas**

Órbitas bajo potenciales axi-simétricos y estáticos

Motivado, principalmente, por la forma de nuestra Galaxia...

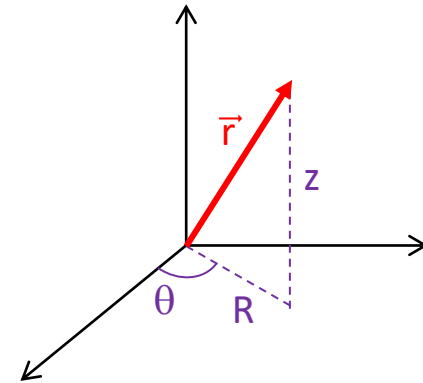
$$\vec{r} = R \hat{r} + z \hat{z}$$

$$\Phi = \Phi(R, z)$$

$$\vec{F} = \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = -\nabla \Phi = - \left(\underbrace{\frac{\partial \Phi}{\partial R}}_{F(R)} \hat{r} + \underbrace{\frac{\partial \Phi}{\partial z}}_{F(z)} \hat{z} \right)$$

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \dot{R} \hat{r} + R \dot{\theta} \hat{\theta} + \dot{z} \hat{z}$$

$$\frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = \underbrace{(\ddot{R} - R \dot{\theta}^2)}_{F(R)} \hat{r} + \underbrace{(2 \dot{R} \dot{\theta} + R \ddot{\theta})}_{F(\theta) = 0} \hat{\theta} + \ddot{z} \hat{z} \quad F(z)$$



$$x = R \cos(\theta)$$

$$y = R \sin(\theta)$$

$$z = z$$

$$r = \sqrt{R^2 + z^2}$$

2ª. Ley de Kepler

$$F(z) = -\frac{\partial \Phi}{\partial z} = \ddot{z}$$

$$F(\theta) = 0 = (2 \dot{R} \dot{\theta} + R \ddot{\theta}) \Rightarrow L_z = R^2 \dot{\theta} = cte$$

$$F(R) = -\frac{\partial \Phi}{\partial R} = \ddot{R} - R \dot{\theta}^2 = \ddot{R} - \frac{R^4 \dot{\theta}^2}{R^3} \Rightarrow -\frac{\partial \Phi}{\partial R} = \ddot{R} - \frac{L_z^2}{R^3}$$

Potencial Efectivo

$$\Phi_{eff} \equiv \Phi + \frac{L_z^2}{2R^2}$$

$$\frac{\partial \Phi_{eff}}{\partial R} = \frac{\partial \Phi}{\partial R} - \frac{L_z^2}{R^3} = -\ddot{R}$$

$$\frac{\partial \Phi_{eff}}{\partial z} = \frac{\partial \Phi}{\partial z} = -\ddot{z}$$

$$\mathbb{E} = \frac{1}{2} v^2 + \Phi = \frac{1}{2} [\dot{R}^2 + (R \dot{\theta})^2 + \dot{z}^2] + \Phi$$

$$\mathbb{E} = \frac{1}{2} (\dot{R}^2 + \dot{z}^2) + \frac{1}{2} R^2 \dot{\theta}^2 + \Phi$$

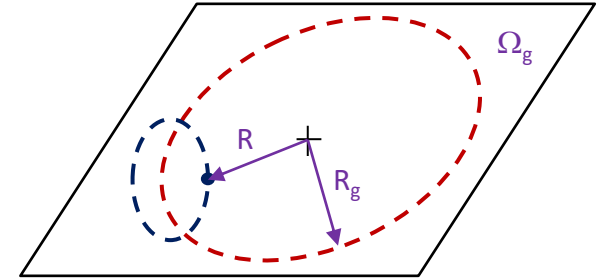
$$\mathbb{E} = \frac{1}{2} (\dot{R}^2 + \dot{z}^2) + \frac{R^4 \dot{\theta}^2}{2R^2} + \Phi$$

$$\mathbb{E} = \frac{1}{2} (\dot{R}^2 + \dot{z}^2) + \frac{L_z^2}{2R^2} + \Phi$$

$$\mathbb{E} = \frac{1}{2} (\dot{R}^2 + \dot{z}^2) + \Phi_{eff}$$

Movimiento radial y vertical

En principio podemos aproximar las órbitas de estrellas en discos por órbitas circulares con pequeñas desviaciones.



Definiendo: $R_g \rightarrow$ radio circular de referencia*

$R \rightarrow$ radio real (Galactocéntrico)

$$x = R - R_g$$

$\Omega_g = d\theta_g/dt = L_z/R_g^2 \rightarrow$ velocidad angular de referencia (2da. Kepler)

Donde R_g es la solución para una órbita circular (V_c), en el plano orbital ($z = 0$):

$$\frac{\partial \Phi_{eff}}{\partial R} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial \Phi}{\partial R} = \frac{L_z^2}{R^3}$$

satisfecha para $R = R_g$
(el valor promedio de R a lo largo de la órbita)

$$\frac{\partial \Phi_{eff}}{\partial z} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial \Phi}{\partial z} = 0$$

satisfecha para $z = 0$
(cualquier parte del plano ecuatorial)

* La “g” es usada en la literatura en inglés para “*guiding center*”

Y, ahora, expandiendo Φ en serie de Taylor alrededor de esos puntos:

$$\begin{aligned}\left. \frac{\partial \Phi_{eff}}{\partial R} \right|_{R=R_g} &= \left(\left. \frac{\partial \Phi}{\partial R} \right|_{R_g} - \frac{L_z^2}{R_g^3} \right) (R - R_g) + \frac{1}{2} \left(\left. \frac{\partial^2 \Phi}{\partial R^2} \right|_{R_g} + \frac{3L_z^2}{R_g^4} \right) (R - R_g)^2 + \dots \\ &= \left(\frac{L_z^2}{R_g^3} - \frac{L_z^2}{R_g^3} \right) x + \frac{1}{2} \left(\left. \frac{\partial^2 \Phi}{\partial R^2} \right|_{R_g} + \frac{3L_z^2}{R_g^4} \right) x^2 + \dots \\ &= \frac{1}{2} \kappa^2 x^2\end{aligned}$$

frecuencia epicíclica

$$\begin{aligned}\left. \frac{\partial \Phi_{eff}}{\partial z} \right|_{z=0} &= \left(\left. \frac{\partial \Phi}{\partial z} \right|_0 + 0 \right) (z - 0) + \frac{1}{2} \left(\left. \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} \right|_0 + 0 \right) (z - 0)^2 + \dots \\ &= (0 + 0) z + \frac{1}{2} \left(\left. \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} \right|_0 \right) z^2 + \dots \\ &= \frac{1}{2} \nu^2 z^2\end{aligned}$$

frecuencia vertical

Donde:

$$\begin{aligned}\kappa^2 &= \left. \frac{\partial^2 \Phi}{\partial R^2} \right|_{R_g,0} + \frac{3L_z^2}{R_g^4} \\ \nu^2 &= \left. \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} \right|_{R_g,0}\end{aligned}$$

osciladores armónicos

Luego:

$$\ddot{R} = \ddot{x} = -\frac{1}{2}\kappa^2 x^2$$
$$\ddot{z} = -\frac{1}{2}\nu^2 z^2$$

Cuyas soluciones son:

$$x(t) = X_0 \cos(\kappa t + \theta_0)$$
$$z(t) = Z_0 \cos(\nu t + \zeta_0)$$

Movimiento azimutal

$$\dot{\theta} = \frac{L_z}{R^2} = \frac{L_z}{(R_g + x)^2} = \frac{L_z}{R_g^2(1 + \frac{x}{R_g})^2} = \frac{L_z}{R_g^2} \left(1 + \frac{x}{R_g}\right)^{-2}$$
$$\dot{\theta} \approx \frac{L_z}{R_g^2} \left(1 - \frac{2x}{R_g} + \dots\right) = \Omega_g \left(1 - \frac{2x}{R_g}\right) = \Omega_g - 2\frac{\Omega_g}{R_g}x(t)$$

Integrando:

$$\theta(t) = \Omega_g t - \frac{2\Omega_g X_0}{R_g} \frac{1}{\kappa} \sin(\kappa t + \theta_0)$$

Luego:

$$y(t) = -\frac{2\Omega_g}{\kappa} X_0 \sin(\kappa t + \theta_0) = -Y_0 \sin(\kappa t + \theta_0)$$

misma frecuencia de
 $x(t)$, pero fuera de
fase por 90°

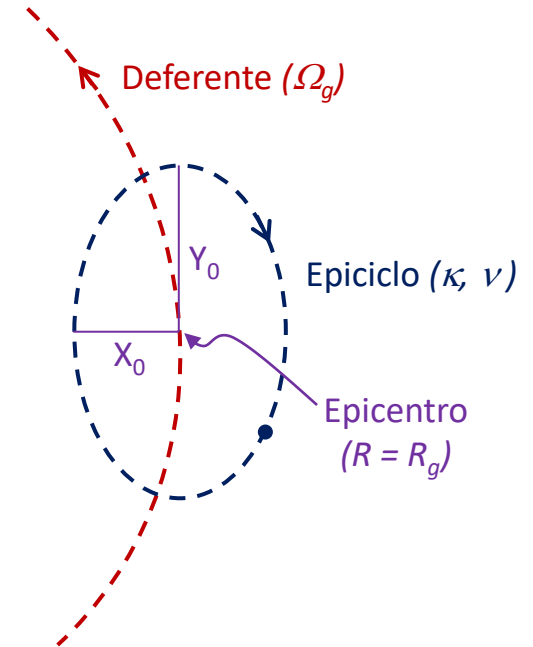
movimiento retrogrado

Epíclidos

- Epíclido **elíptico** y **retrógrado** en relación al deferente (los epíclidos de Tolomeo eran **prógrados**)

- **Razón axial:**
$$\frac{X_0}{Y_0} = \frac{\kappa}{2\Omega_g}$$

- En lo general, κ y Ω_g son diferentes, lo que implica que las órbitas **no se cierran!**
(sin embargo, si observadas del referencial en rotación en $\Omega_g - (1/2)\kappa$, las órbitas se convierten a elipses cerradas, centradas en el epicentro)



- Limite *Kepleriano* ($\kappa = \Omega_g$):
$$V_c \propto R^{-1/2} \Rightarrow \Omega_g = \frac{V_c}{R_g} \propto R^{-3/2}$$

Limite de rotación plana ($\kappa = \sqrt{2} \Omega_g$):
$$V_c = cte \Rightarrow \Omega_g \propto R^{-1}$$

Limite de cuerpo rígido ($\kappa = 2\Omega_g$):
$$V_c \propto R \Rightarrow \Omega_g = cte$$

- En lo general, $\Omega_g < \kappa < 2\Omega_g$

Movimiento epicíclico en la vecindad solar

Es útil expresar las velocidades angulares del deferente y epiciclo en términos de las constantes de Oort:

$$\Omega_0 = A - B$$

$$\kappa_0^2 = -4B\Omega_0 = -4B(A - B)$$

$$\frac{\kappa_0}{\Omega_0} = 2\sqrt{\frac{-B}{(A - B)}} = 2\sqrt{\frac{B}{(B - A)}}$$

TAREA

Como vimos en el tema 2, las mejores estimaciones de *Hipparcos* para las constantes de Oort fueron:

$$A = 14.8 \pm 0.8 \text{ km s}^{-1} \text{ kpc}^{-1}$$

$$B = -12.4 \pm 0.6 \text{ km s}^{-1} \text{ kpc}^{-1}$$

Luego:

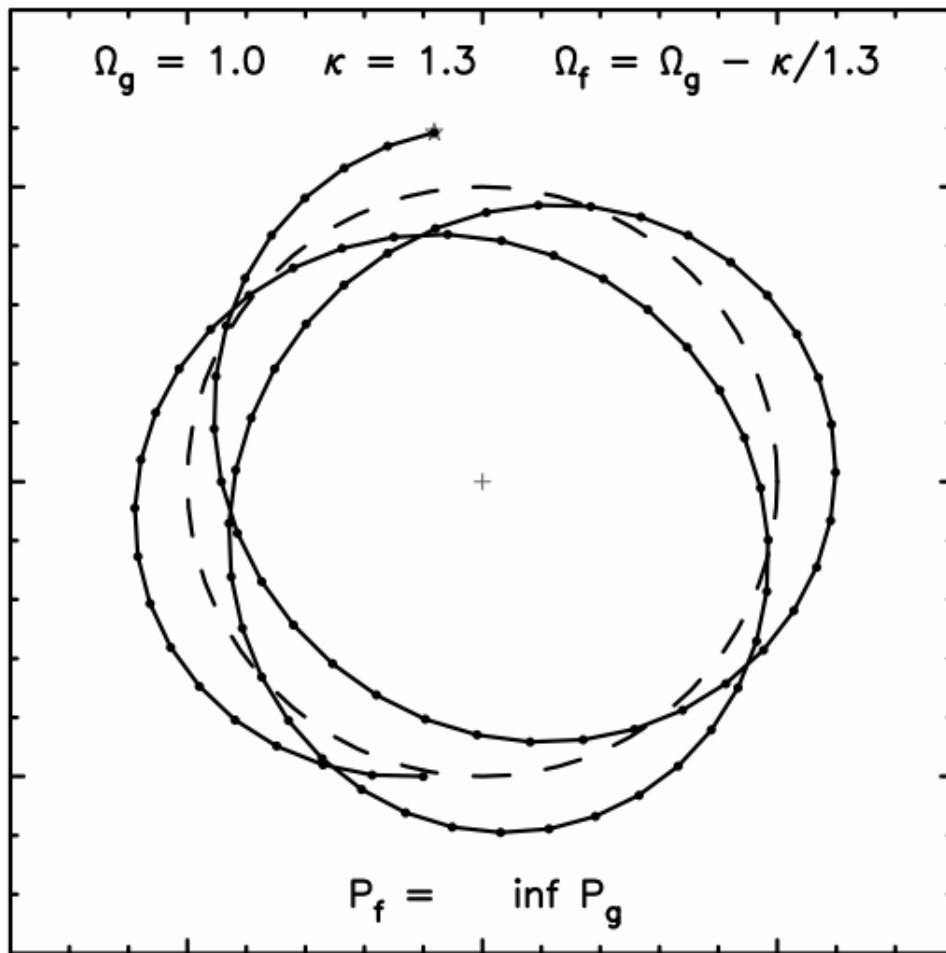
$$\Omega_0 = 27.2 \text{ km s}^{-1} \text{ kpc}^{-1}$$

$$\kappa_0 = 36.7 \text{ km s}^{-1} \text{ kpc}^{-1}$$

$$\kappa_0/\Omega_0 = 1.35 \quad (T_\kappa \sim 170\text{-}180 \text{ Myr})$$

Es decir, las estrellas de la vecindad solar cumplen 1.35 epiciclos en una órbita. La razón axial del epiciclo es $\kappa_0/2\Omega_0 = 0.65$.

Recuerda que $T_\kappa = 2\pi/\kappa$ y $T_\Omega \sim 240 \text{ Myr}$



El tamaño físico del epiciclo
(oscilación radial) es dado por:

$$S_R \approx \frac{\sigma_R}{\kappa_0} = \frac{34}{37} \text{ kpc} \sim 1 \text{ kpc}$$

disco delgado

Simulación de 2.5 “vueltas” del Sol alrededor del Centro Galáctico. La frecuencia epicíclica fue tomada como 1.3 veces la frecuencia circular, pero el epiciclo mismo fue hecho circular (y no elíptico, con razón axial 0.65, como debería haber sido).

Y, para la oscilación vertical, tenemos:

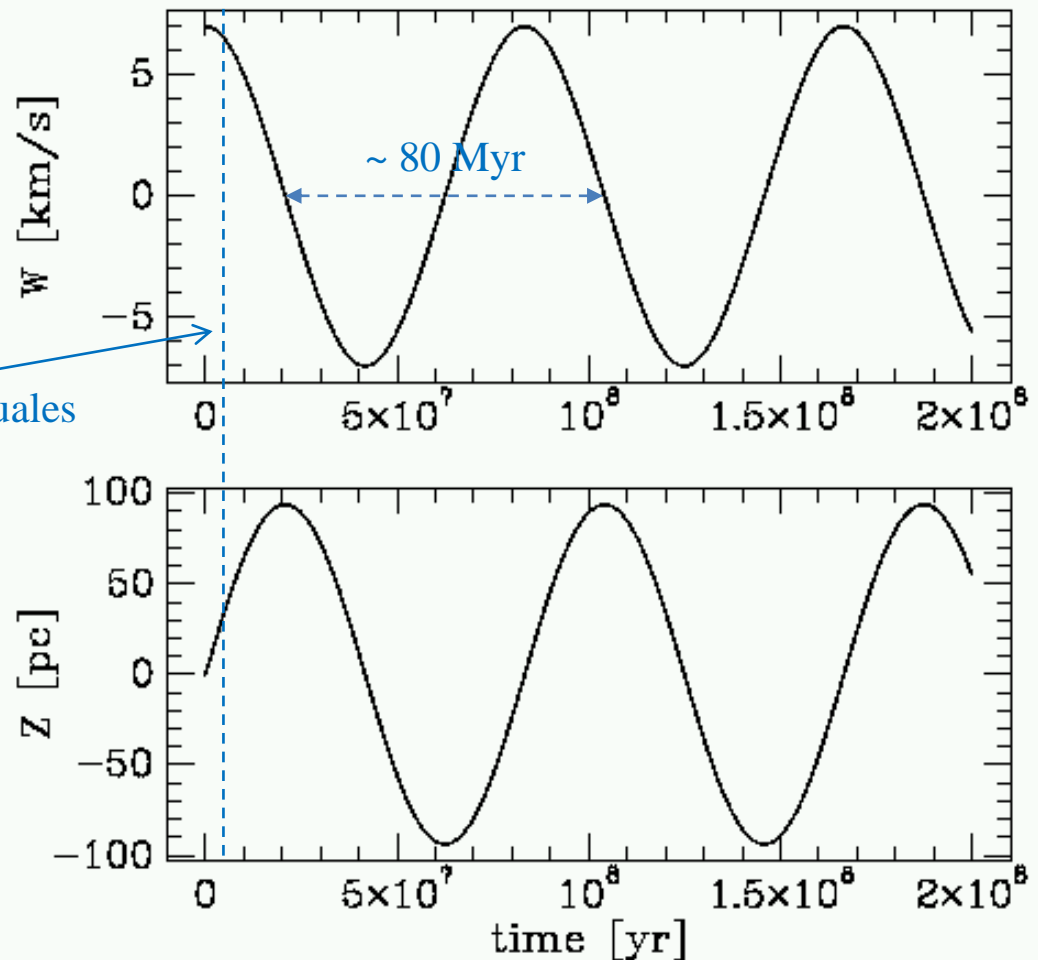
$$S_z \approx \frac{\sigma_z}{\nu_0} = \frac{18}{94} \text{ kpc} \sim 0.2 \text{ kpc}$$

Eso implica que el Sol “cruza” el disco a cada **~ 35-40 Myr**.

Interesantemente, ese periodo parece coincidir con los picos en la incidencia de **cráteres** y **extinciones en masa** en la Tierra!

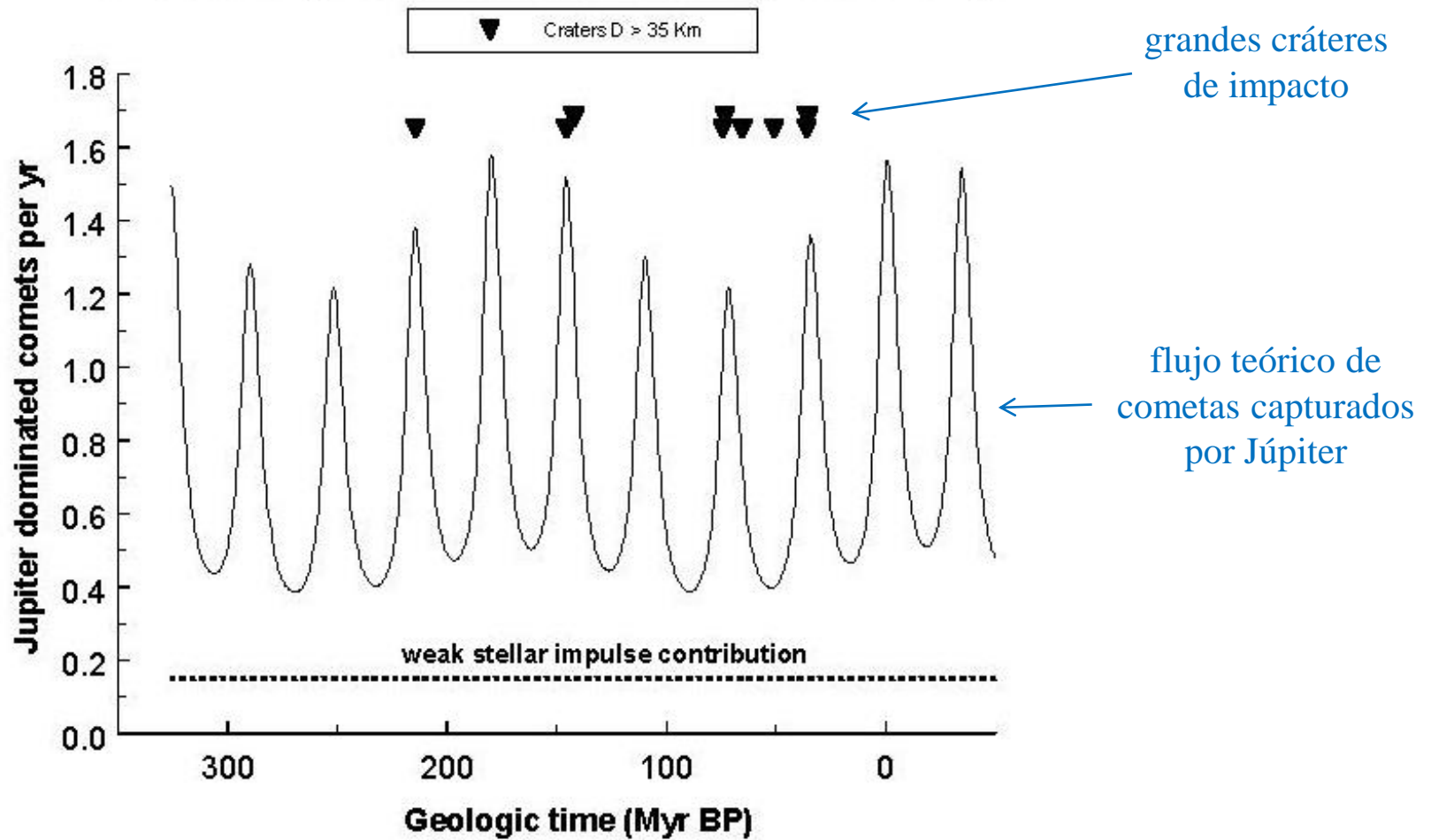
Parece ser que, al cruzar el disco, la Nube de Oort se ve afectada (perturbaciones de marea) y hay una **inyección acentuada de cometas** en el Sistema Solar interior.

valores actuales



Oscilación aproximada en la componente W de la velocidad del Sol (actualmente $\sim +7$ km/s) y en su posición en relación al plano (actualmente $\sim +40$ pc).

Adiabatic galactic tidal flux - mean period 36 Myr



Patrones de rotación

Corresponden a regiones con acentuada densidad estelar (ollas de densidad) en el **disco** de una galaxia. Normalmente tienen la forma de **brazos espirales** o de una **barra**.

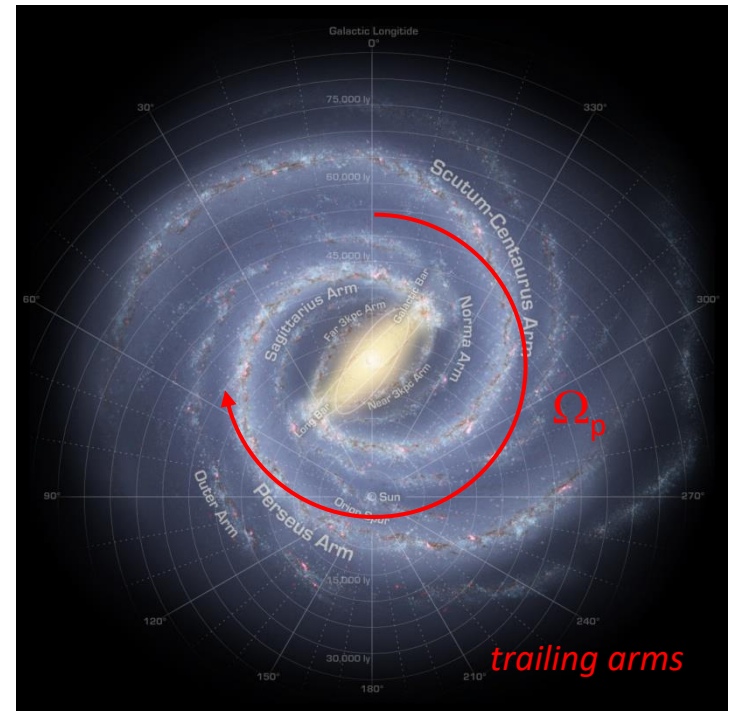
Eses patrones no son estacionarios ni se mueven junto con las estrellas del disco, pero se mueven con una velocidad angular intermediaria, Ω_p

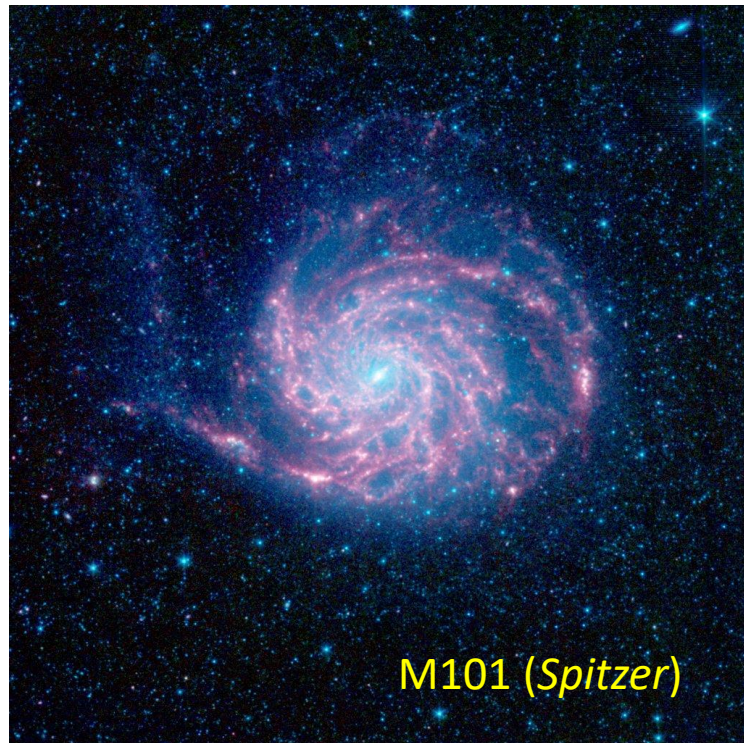
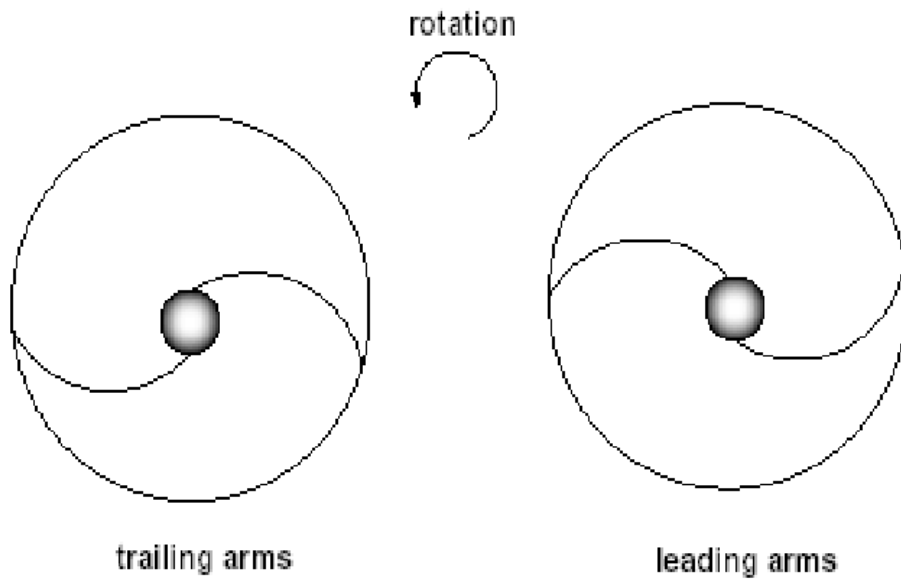
La interacción entre esos patrones y el movimiento epicíclico de las estrellas puede producir **resonancias***:

$$\Omega_{\star} = \Omega_p \pm \frac{\kappa}{m}$$

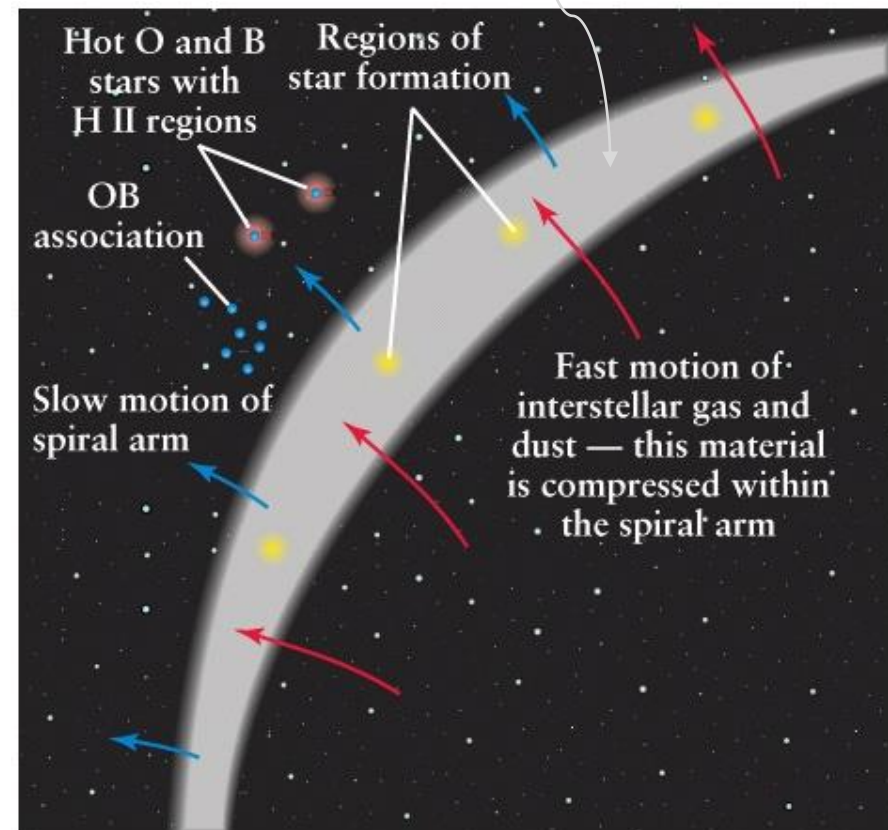
donde: Ω_{\star} es la velocidad angular de referencia de la estrella
 Ω_p velocidad angular del patrón (frecuencia de forzado)
 κ es su frecuencia epicíclica
 m es un entero

* Un comportamiento similar ocurre, por ejemplo, en los anillos de Saturno (perturbación por satélites del planeta) y en Cinturón Principal de Asteroides (Júpiter)...

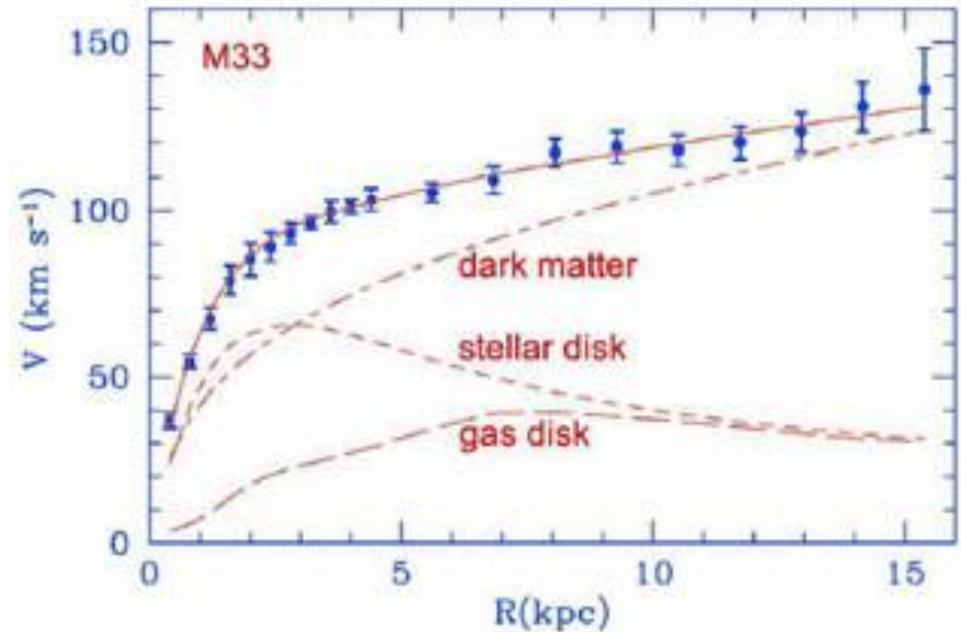
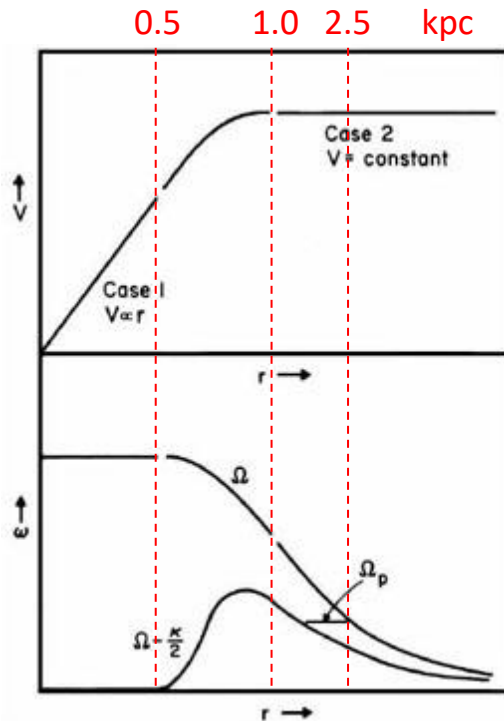




densidad: 2-10% superior



- El patrón de **barra** gira mas o menos como un cuerpo rígido, en una misma velocidad Ω_p , mientras que la velocidad angular Ω_\star del material del disco varia con el radio.



- A lo largo de la mayor parte del patrón espiral global, las estrellas y el gas tienen $\Omega_\star > \Omega_p$; es decir, ellos alcanzan un brazo espiral por detrás, se mueven a través de él (persistiendo en el brazo para darle su contraste de densidad) y entonces se mueven adelante, en la dirección de rotación, hacia el siguiente brazo.

Resonancia de co-rotación (CR)

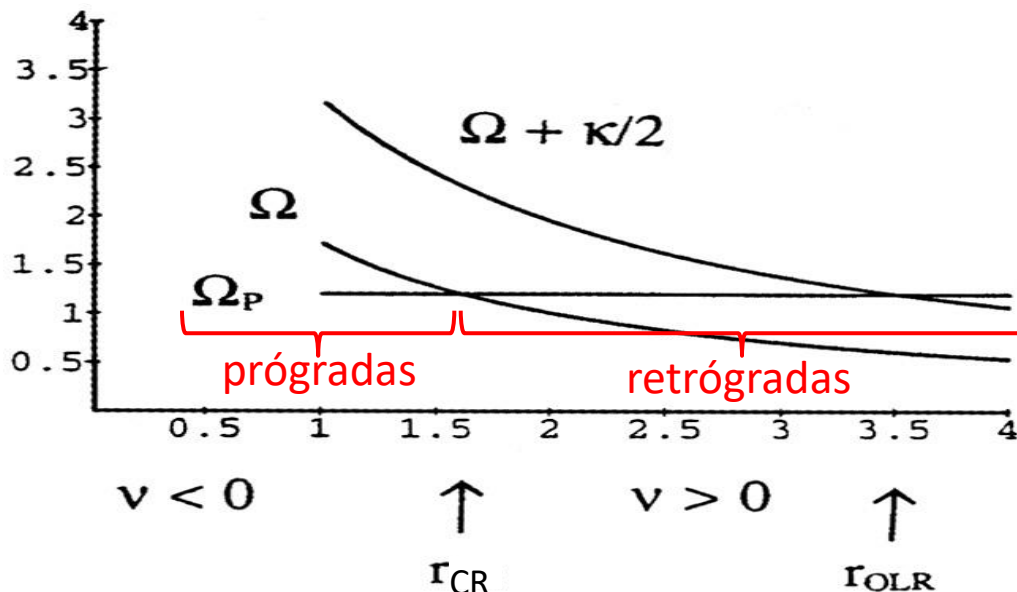
Ocurre cuando:

$$\Omega_{\star} = \Omega_p$$

Las estrellas en esas órbitas sienten el potencial gravitacional acentuado a lo largo de toda su órbita (una perturbación no axi-simétrica y persistente). Como el potencial es siempre atractivo, eso representa una **barrera en el potencial efectivo**.

Estrellas en órbitas **internas** a esta resonancia parecerán **progresar** en relación al patrón, mientras estrellas en órbitas **externas** serán **retrógradas** en relación a él.

- Las **barras** rotan con $\Omega_p = \Omega$ ($R = CR$), y nunca se extienden más allá de CR.



G. Bertin & C.C. Lin 1996, in "*Spiral Structure in Galaxies: A Density Wave Theory*", MIT Press, Cambridge, USA, p. 79

Resonancias de *Lindblad* (LR)

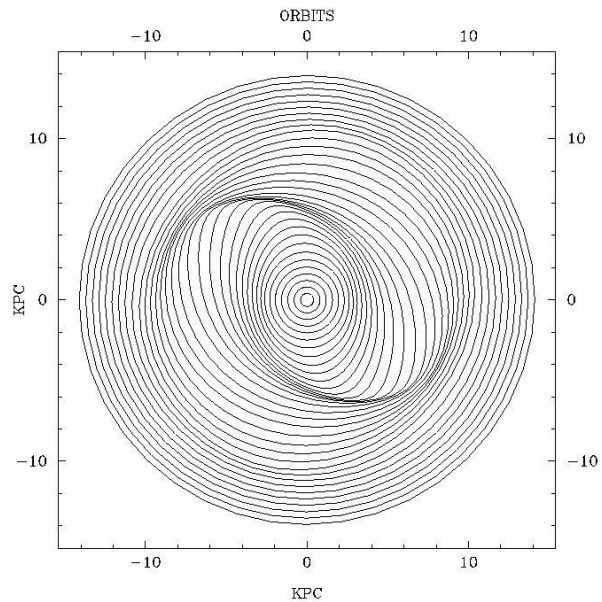
B. *Lindblad* (1927) encontró dos otras regiones de resonancia*, una interna y otra externa a la CR. Son nombradas **ILR** (*Inner Lindblad Resonance*) y **OLR** (*Outer Lindblad Resonance*), correspondiendo, respectivamente, a:

$$\Omega_{\star} = \Omega_p - \frac{\kappa}{m}$$
$$\Omega_{\star} = \Omega_p + \frac{\kappa}{m}$$

- El **gas es conducido en dirección al ILR**, tanto externo cuanto interno; luego, se espera la formación de un anillo/disco de gas (y formación estelar) en ILR
- Se esperan la formación de **anillos estelares** también en CR y OLR
- La ubicación, y la misma existencia, de esas resonancias depende de la **curva de rotación** (por ejemplo la existencia de una transición entre una rotación de cuerpo rígido y una rotación plana) de la galaxia y de su Ω_p . Por ejemplo, pueden existir **0, 1 o 2 ILR**.

* Equivalen a las resonancias de *Kirkwood* (perturbación por Júpiter) en el Cinturón Principal de Asteroides

- Las **ondas de densidad** solamente pueden **sobrevivir entre ILR y OLR** (en la ILR las ondas de densidad son absorbidas como ondas en una playa)
- Al mismo tiempo que las ondas de densidad pueden generar un patrón de resonancia, el patrón de resonancia puede generar **ondas de densidad estacionarias** (llamadas ondas de densidad cinemáticas).
- El patrón de **dos brazos espirales** es favorecido ($m = 2$)



Lindblad, P.O. 1999, A&AR 9, 221

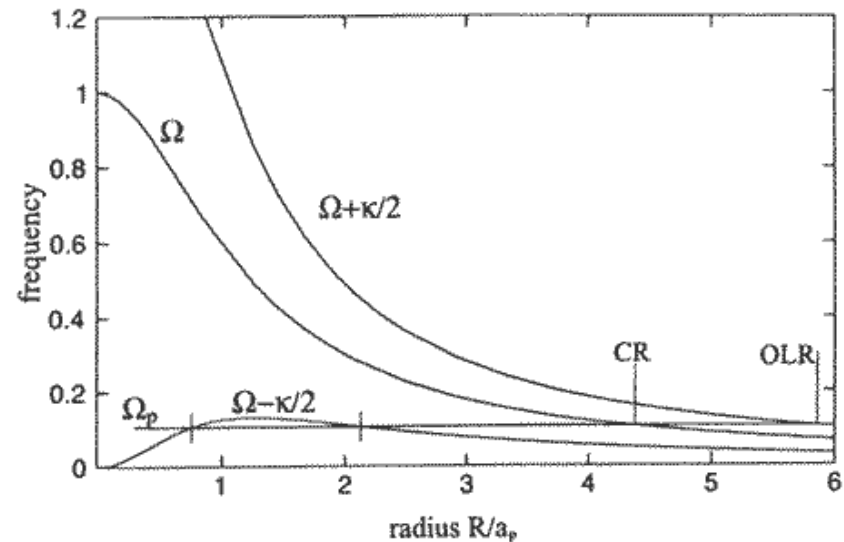
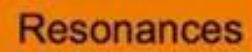


Figure 5.29 Frequencies $\Omega(R)$ and $\Omega \pm \kappa/2$ in the Plummer potential of Equation 3.11. For pattern speed Ω_p , the $m = 2$ inner Lindblad resonances are marked by vertical ticks, the corotation radius is labelled 'CR', and the outer Lindblad resonance 'OLR'. If the pattern speed had been twice as large, the inner Lindblad resonances would be absent.



Kormendy, J. 2013, arXiv1311.2609