

ESTRUCTURA GALÁCTICA Y DINÁMICA ESTELAR

Referencia: Capítulo 4 de Binney & Tremaine (*Galactic Dynamics*)

E.B.A. Estacionaria, Teoremas de Jeans
(integrales de movimiento)

Integrales de movimiento

Llamamos “**constantes de movimiento**” a las funciones $C(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t)$ que se mantienen constantes a lo largo de una **órbita** bajo algún campo de fuerza:

$$C[\vec{x}(t_1), \vec{v}(t_1), t_1] = C[\vec{x}(t_2), \vec{v}(t_2), t_2] \quad \forall t_1, t_2$$

De la misma forma, llamamos “**integrales de movimiento**” a las funciones $I(\mathbf{x}, \mathbf{v})$ de un **espacio fase** (\mathbf{x}, \mathbf{v}) que se mantienen constantes a lo largo de una órbita:

$$I[\vec{x}(t_1), \vec{v}(t_1)] = I[\vec{x}(t_2), \vec{v}(t_2)] \quad \forall t_1, t_2$$

$$\frac{d}{dt} I[\vec{x}(t), \vec{v}(t)] = 0$$

Nota que toda integral de movimiento es también un constante de movimiento, pero no el contrario. Las integrales de movimiento **limitan** el movimiento en el espacio fase (es decir, **disminuyen los grados de libertad**).

Hay **6** integrales de movimiento independientes, aunque solamente **4** son más sencillas y, generalmente, conocidas:

$$\mathbb{E} = \frac{\mathcal{E}}{m} = \frac{1}{2} v^2 + \Phi(\vec{x})$$

$$\vec{L} = \frac{\vec{\mathcal{L}}}{m} = \vec{x} \times \vec{v}$$

Supongamos que I_1 [por ejemplo, $E = \frac{1}{2} (u^2 + v^2 + w^2) + \Phi(x, y, z)$] fuera la única integral de movimiento existente para un cierto sistema, es decir, la única cantidad que se conserva. Así, en el espacio fase **6D**, I_1 representa una **híper-superficie** con dimensión **5**.

Como I_1 es conservada, el movimiento de la partícula (estrella) debe estar **confinado** (restricto) a esa híper-superficie. Una integral como esa es llamada “**integral aislante**” porque restringe el espacio de fase accesible a la partícula.

Una vez que ningún punto del espacio fase puede corresponder a 2 valores diferentes $I_1 = E$, las híper-superficies de diferentes energías no pueden interceptarse. Luego, **cada híper-superficie de diferente energía** tiene su propio valor de la función distribución (densidad) f :

$$f(\vec{x}, \vec{v}) = F(I_1)$$

La E.B.A. estacionaria

El caso **estacionario** (independiente del tiempo) de la E.B.A. corresponde a:

$$\frac{Df}{Dt} = \cancel{\frac{\partial f}{\partial t}}^0 + \frac{\partial f}{\partial \vec{x}} \cdot \vec{v} - \frac{\partial f}{\partial \vec{v}} \cdot \vec{\nabla} \Phi = 0$$

es decir:

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{x}} \cdot \vec{v} - \frac{\partial f}{\partial \vec{v}} \cdot \vec{\nabla} \Phi = 0$$

y, además, f y Φ no son funciones explícitas de t .

Por otro lado, de lo que vimos de las integrales de movimiento:

$$\begin{aligned} \frac{dI}{dt} = 0 \quad \Rightarrow \quad & \frac{\partial I}{\partial \vec{x}} \cdot \frac{\partial \vec{x}}{\partial t} + \frac{\partial I}{\partial \vec{v}} \cdot \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = 0 \\ & \frac{\partial I}{\partial \vec{x}} \cdot \vec{v} - \frac{\partial I}{\partial \vec{v}} \cdot \vec{\nabla} \Phi = 0 \end{aligned}$$

Luego, sí, una **integral de movimiento** puede ser **solución de la E.B.A.** estacionaria. Además, como la E.B.A. es **lineal**, las funciones de sus soluciones también son soluciones!...

Teorema de *Jeans* débil

“Cualquier solución para la E.B.A. estacionaria depende **solamente** de las **integrales de movimiento** del sistema, y, cualquier **función** de las **integrales de movimiento** del sistema, $f(I_1, I_2, I_3, \dots, I_n)$, provee una **solución** estacionaria para la E.B.A.”

$$\frac{Df}{Dt} = \sum_{j=1}^n \frac{\partial f}{\partial I_j} \cdot \frac{\partial I_j}{\partial t} = 0$$

Teorema de *Jeans* fuerte

“En sistemas donde la mayor parte de las **órbitas son regulares** (y no caóticas), la f para el caso estacionario dependerá **solamente de 3 integrales de movimiento aislantes**.”

$$f_{est} = f(I_1, I_2, I_3) \quad \text{o} \quad f(I_1, I_2) \quad \text{o} \quad f(I_1)$$

Normalmente:

$$f_{est} = f(\mathbb{E}, L_z, I_3)$$

Construcción de modelos para Sistemas Estelares* (a partir de f)

El proceso sigue los pasos:

- Escoger una **función distribución (DF)** que es función de las **integrales de movimiento**
- Integrar esa DF sobre \mathbf{v} para encontrar $\rho(\Phi)$

$$\rho(\vec{x}, t) = \int f \, d^3\vec{v} \quad d^3\vec{v} = 4\pi v^2 \, d\vec{v}$$
$$\therefore \rho(\vec{x}, t) = 4\pi \int f v^2 \, d\vec{v}$$

- Solucionar la **Ecuación de Poisson** para encontrar $\Phi(\mathbf{x})$

$$\nabla^2 \Phi(\vec{x}) = 4\pi G \rho(\vec{x})$$

- Combinar $\rho(\Phi)$ y $\Phi(\mathbf{x})$ para encontrar la **distribución de masa**: $\rho(\mathbf{x})$

$$\nabla^2 \Phi(\vec{x}) = 16\pi^2 G \int f v^2 \, dv$$

En la literatura se suele utilizar un “**potencial relativo**” ($\Psi = -\Phi + \Phi_0$), donde $\Phi_0 = \Phi(0)$, y una “**energía relativa**” ($E_{rel} = -E + \Phi_0 = \Psi - \frac{1}{2} v^2$), para trabajar con valores positivos de energía. La condición es $\Psi \rightarrow \Phi_0$ cuando $|\mathbf{x}| \rightarrow \infty$. Es decir, con esas definiciones, $f > 0$ para $E_{rel} > 0$ y $f = 0$ para $E_{rel} \leq 0$.

* Por simplicidad, se consideran sistemas con una sola población estelar –estrellas idénticas– luego una sola f .

Función distribución para sistemas esféricos* (acolicionales y estacionarios)

Sistemas **esféricos** poseen **4** integrales de movimiento aislantes: $\mathbb{E}, L_r, L_\theta, L_\varphi$.

Pero, por cuenta de la simetría esférica, f no puede depender de la dirección de \mathbf{L} , sino solamente de su magnitud, $|\mathbf{L}| = L$. Luego:

$$f = f(\mathbb{E}, L)$$

Recordemos que, para sistemas con esa simetría (véase la sección de órbitas):

$$v^2 = 2(\mathbb{E} - \Phi) - \frac{L^2}{r^2}$$

Si, además, el sistema es **isotrópico** (es decir, sin rotación), $\langle v_r^2 \rangle = \langle v_\theta^2 \rangle = \langle v_\varphi^2 \rangle$, la función distribución dependerá solamente de la energía total:

$$f = f(\mathbb{E})$$

Luego, la expresión para obtener la densidad, en coordenadas esféricas, queda:

$$\begin{aligned} \nabla^2 \Phi(r) &= 4\pi G \rho \\ \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{d\Phi}{dr} \right) &= 16 \pi^2 G \int f(\mathbb{E}) v^2 dv \end{aligned}$$

* Cúmulos globulares, galaxias elípticas y cúmulos de galaxias son aproximadamente esféricos.

Y, hacemos el siguiente cambio de variables:
(a partir de la energía cinética)

$$\begin{cases} v = [2(\mathbb{E} - \Phi)]^{1/2} \\ dv = \frac{1}{2} [2(\mathbb{E} - \Phi)]^{-1/2} d\mathbb{E} \end{cases}$$

Tenemos:

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{d\Phi}{dr} \right) = 8 \pi^2 G \int f(\mathbb{E}) \sqrt{2(\mathbb{E} - \Phi)} d\mathbb{E}$$

Ejemplos de sistemas esféricos, acolicionales, estacionarios e isotrópicos

1. Politropos (ley de potencia)

Los **politropos** fueron introducidos por *J. R. Emden* (1907), y han sido muy utilizados para describir la estructura radial de las estrellas (son soluciones de la **Ecuación de Lane-Emden**):

$$\rho = c_n \Phi^n \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{d\Phi}{dr} \right) = 4\pi G c_n \Phi^n$$

donde:

$$c_n = \frac{(2\pi)^{3/2} (n - 3/2)! \mathfrak{F}}{n!}$$

Esa solución corresponde al caso:

$$v^2 = 2 \Phi \cos^2(\theta)$$

y una función distribución del tipo:

$$f(\mathbb{E}_{rel}) = \begin{cases} \mathfrak{F} \mathbb{E}_{rel}^{n-3/2} & , \mathbb{E}_{rel} > 0 \\ 0 & , \mathbb{E}_{rel} \leq 0 \end{cases}$$

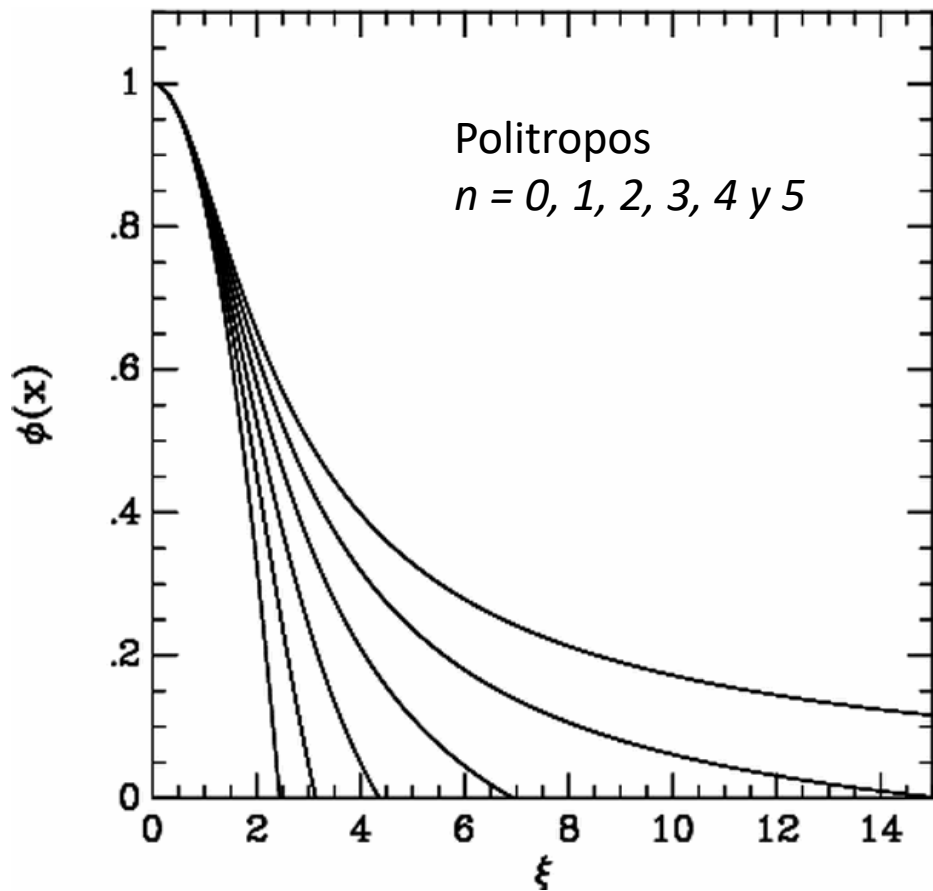
En el caso de una esfera auto-gravitatoria de un **gas politrópico** (colisional), esa solución equivale a la **ecuación de estado**:

$$P = \kappa \rho(r)^\gamma \quad \gamma = 1 + \frac{1}{n}$$

y γ es el índice adiabático (razón entre los calores específicos a presión y volumen ctes.).

Tres casos especiales de politropos tienen importancia para la dinámica estelar:

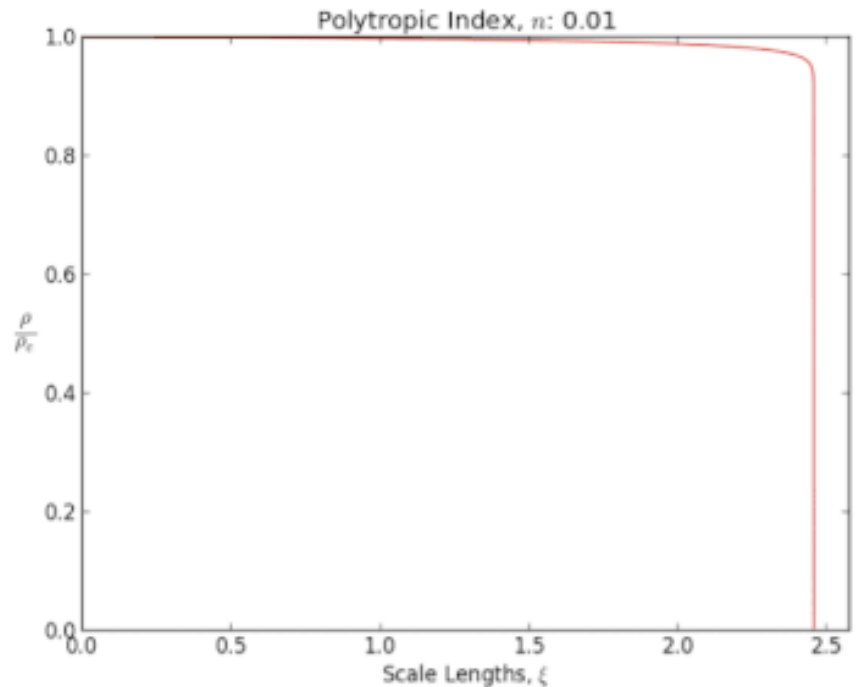
$n = 1$	\Rightarrow	$\gamma = 2$	\rightarrow Ecuación de <i>Helmholtz</i> lineal
$n = 5$	\Rightarrow	$\gamma = 6/5$	\rightarrow Esfera de Plummer (o Modelo de <i>Schuster</i> , 1883)
$n \rightarrow \infty$	\Rightarrow	$\gamma \rightarrow 1$	\rightarrow Esfera Isotérmica (Single Isothermal Sphere)



$n = 5$: modelo plausible más simple
 para un sistema estelar
 auto-consistente
 ($\gamma = 6/5$ y radio infinito)
 [Schuster, 1883]

$n = \infty$: cúmulos globulares

$n = 0.5 - 1$: estrellas de neutrones
 $n = 1.5$: núcleos estelares convectivos,
 enanas blancas de baja masa,
 planetas gigantes, etc
 ($\gamma = 5/3 \rightarrow$ gas monoatómico)
 $n = 3$: estrellas de SP (zona radiativa),
 enanas blancas de alta masa



2. Esfera de *Plummer*

El ejemplo más adecuado de politropo aplicado a sistemas estelares es, por lo tanto, la Esfera de *Plummer*.

Como visto en la sección de pares potencial-densidad,

$$\rho_P(r) \propto \left[1 + \left(\frac{r}{b} \right)^2 \right]^{-5/2}$$

- Esa esfera tiene masa finita y comportase bien en $r = 0$.
- Normalmente se ajusta bien a la distribución de densidad de los Cúmulos Globulares
- Lo mismo no pasa con galaxias Elípticas: esa distribución es demasiado empinada en grandes r .

TAREA: a partir de la f politrópica llegar a la ρ_p de *Plummer*.

3. Esfera Isotérmica

El caso $n \rightarrow \infty$ implica:

$$\gamma = 1 \quad \Rightarrow \quad P \propto \rho_I$$

y una función distribución del tipo **exponencial** (*Boltzmann*):

$$F_I(E) = (2\pi\sigma^2)^{-3/2} \rho(0) \exp\{[\Phi(0) - E]/\sigma^2\}$$

o, utilizando la notación de energías relativas:

$$f_I(\mathbb{E}_{rel}) = \frac{\rho_0}{(2\pi\sigma^2)^{3/2}} e^{\mathbb{E}_{rel}/\sigma^2}$$

de donde podemos obtener la densidad:

$$\rho(r) = \rho(0) \exp\{[\Phi(0) - \Phi(r)]/\sigma^2\}$$

o

$$\rho_I(\Psi) = \frac{1}{2} \rho_0 e^{\Psi/\sigma^2}$$

de donde sacamos que :

$$\Psi = \sigma^2 [\ln(\rho) - \ln(\rho_0/2)]$$

Demonstración:

$$\rho_I(r) = 4\pi \int f_I(\mathbb{E}_{rel}) v^2 \, dv$$

$$\rho_I(r) = 4\pi \frac{\rho_0}{(2\pi)^{3/2}} \int \frac{1}{(\sigma^2)^{3/2}} e^{\mathbb{E}_{rel}/\sigma^2} v^2 \, dv$$

$$\rho_I(r) = 4\pi \frac{\rho_0}{(2\pi)^{3/2}} \int \frac{1}{\sigma^3} e^{\Psi/\sigma^2} e^{-v^2/2\sigma^2} v^2 \, dv$$

$$\rho_I(r) = \left(\frac{2}{\pi}\right)^{1/2} \rho_0 e^{\Psi/\sigma^2} \int \frac{1}{\sigma} e^{-v^2/2\sigma^2} \, dv$$

Considerando la siguiente integral definida: $\int_0^\infty \alpha^2 e^{-\alpha x^2} \, dx = \frac{\sqrt{\pi}}{4} \alpha^{-3/2}$

$$\int_0^\infty \left(\frac{2}{\alpha^3}\right)^{1/2} \alpha^2 e^{-\alpha x^2} \, dx = \frac{\sqrt{\pi}}{4} \left(\frac{2}{\alpha^3}\right)^{1/2} \alpha^{-3/2}$$

$$\int_0^\infty (2\alpha)^{1/2} e^{-\alpha x^2} \, dx = \left(\frac{\pi}{2^3}\right)^{1/2}$$

Y siendo $\alpha = \frac{1}{2\sigma^2}$ tenemos: $\rho_I(\Psi) = \frac{1}{2} \rho_0 e^{\Psi/\sigma^2}$

Y, aplicando la **Ecuación de Poisson**:

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{d\Psi}{dr} \right) = 4\pi G \rho$$

$$\frac{\sigma^2}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{d \ln \rho}{dr} \right) = 4\pi G \rho$$

$$\frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{d \ln \rho}{dr} \right) = \frac{4\pi G}{\sigma^2} r^2 \rho$$

que equivale exactamente a la **ecuación para un gas isotérmico**:

$$P \propto \rho T \quad \Leftrightarrow \quad P = k_B T n = k_B T \frac{\rho}{m}$$

$$\frac{dP}{dr} = \frac{k_B T}{m} \frac{d\rho}{dr} = -\rho \frac{GM}{r^2}$$

$$r^2 \frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dr} = -\frac{GMm}{k_B T}$$

deriva

$$\frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{d \ln \rho}{dr} \right) = -\frac{Gm}{k_B T} \frac{dM}{dr}$$

reordena

$$dM = 4\pi \rho r^2 dr$$

$$\therefore \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{d \ln \rho}{dr} \right) = -\frac{4\pi G m}{k_B T} r^2 \rho$$

$$\Rightarrow \sigma^2 = \frac{k_B T}{m}$$

Es decir, un sistema esférico, acolisional, sin rotación y en equilibrio se comporta idénticamente a una **esfera isotérmica**.

Una **solución** posible (**la única analítica**) para la Ecuación de *Poisson* es:

$$\rho_{SIS}(r) = \frac{\sigma^2}{2\pi G} \frac{1}{r^2}$$
$$\langle v^2 \rangle = \frac{1}{\rho} \int f v^2 d^3v = 3 \sigma^2$$

que es conocida como esfera isotérmica sencilla (*Single Isothermal Sphere*).

El problema con la SIS es que $\rho \rightarrow \infty$ cuando $r \rightarrow 0$, y la **masa va al infinito** con $r \rightarrow \infty$. Se puede ver porque el sistema es infinito, al menos en extensión: la dispersión de velocidades no depende del radio (es igual incluso en los “límites” del sistema) lo que solamente es posible para un sistema infinito.

Otras soluciones, con **densidad central finita**, existen pero no son analíticas (deben ser calculadas numéricamente). Ese es el caso del Modelo de *King-Michie* que veremos a seguir.

4. Modelos de King

Una adaptación de la SIS para sistemas reales (masas no infinitas) requiere un “truncamiento” de la función distribución. Sean las siguientes definiciones:

$$\rho(0) = \rho_0$$

$$\rho(r) \sim \rho_0 \quad \text{dentro de} \quad r_c = \frac{3\sigma}{\sqrt{4\pi G \rho_0}} \quad \leftarrow \begin{array}{l} \text{radio del} \\ \text{core} \end{array}$$

que equivale a una función distribución del tipo:

$$f_K(\mathbb{E}_{rel}) = f_I(\mathbb{E}_{rel}) - f_I(\mathbb{E}_{rel,t}) = \begin{cases} \rho_0 (2\pi \sigma^2)^{-3/2} (e^{\mathbb{E}_{rel}/\sigma^2} - 1) & , \mathbb{E}_{rel} > 0 \\ 0 & , \mathbb{E}_{rel} \leq 0 \end{cases}$$

propuesta originalmente por *Michie* (1963) y popularizada por *I. King* (1966).

La densidad en función del potencial queda:

$$\rho_K(\Psi) = 4\pi \int f_K(\mathbb{E}_{rel}) v^2 dv = \frac{4\pi \rho_0}{(2\pi \sigma^2)^{3/2}} \int (e^{\mathbb{E}_{rel}/\sigma^2} - 1) v^2 dv$$

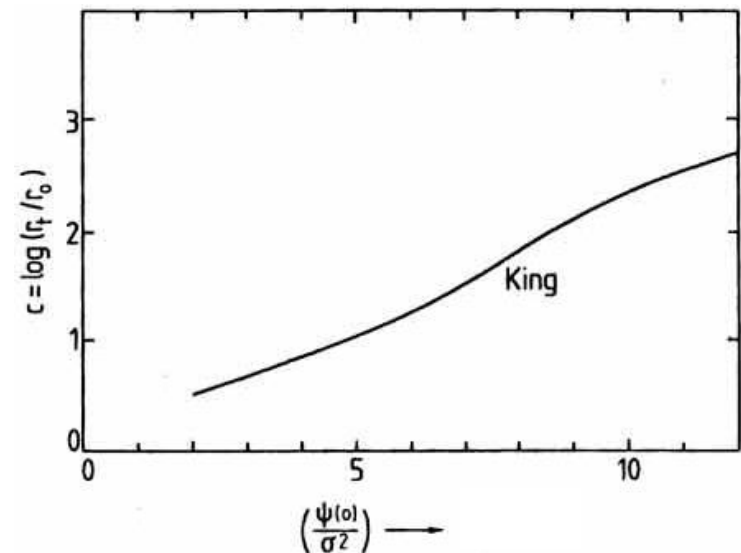
$$\rho_K(\Psi) = \rho_0 \left[e^{\varpi} \operatorname{erf}(\sqrt{\varpi}) - \sqrt{\frac{4}{\pi} \varpi} \left(1 + \frac{2}{3} \varpi \right) \right], \quad \varpi = \frac{\Psi}{\sigma^2}$$

$$\operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt = \gamma\left(\frac{1}{2}, x^2\right) / \sqrt{\pi}$$

- En la parte central (*core*) el modelo de *King* es **plano**. En términos de densidad proyectada, esa densidad baja a cerca de la mitad (0.5013) de la densidad central en r_c .
- En radios intermedios ($r_c < r < 3r_c$), el perfil de *King* se acerca al **perfil de Hubble**.
- Existe un radio, r_t , donde la densidad pasa a ser nula (es decir, donde la energía es $E_{rel,t}$), llamado **radio de marea** (por analogía al efecto que produce ese truncamiento en los Cúmulos Globulares). Tenemos que: $\Phi(0) = \Phi(r_t) - \Psi(0)$.
- Los modelos de *King* forman una secuencia que puede ser **parametrizada** de dos formas:
 - ✦ $q \equiv \Psi(0) / \sigma^2$
 - ✦ $c \equiv \log(r_t / r_c)$

Así:

c	q	se ajusta a:
0.75-1.75	3-7	cúmulos globulares
= 1.7	= 8	perfil de Hubble
> 2.2	> 10	galaxias elípticas
∞	∞	esfera isotérmica



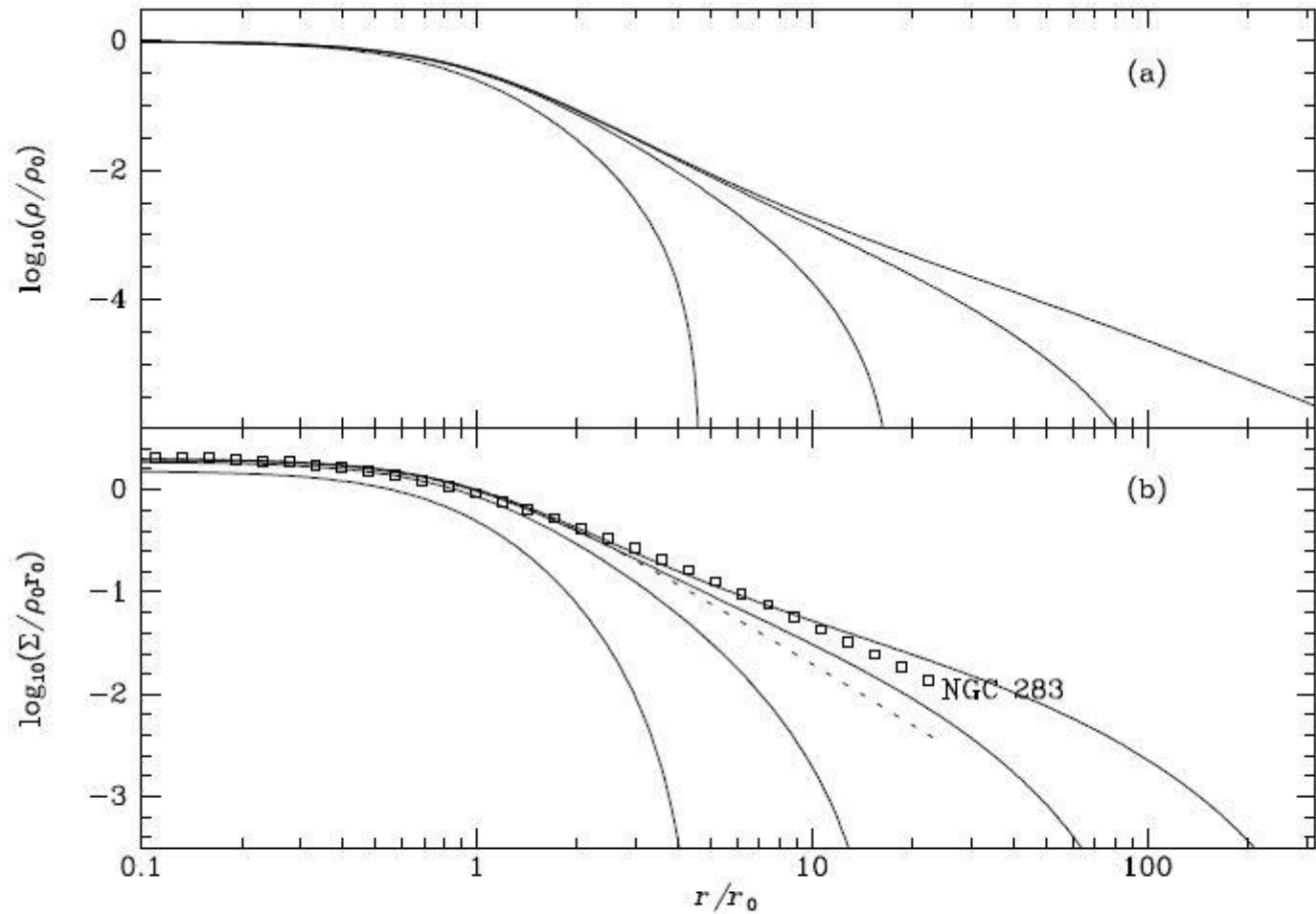


Figure 4.8 (a) Density profiles of four King models: from top to bottom the central potentials of these models satisfy $\Psi(0)/\sigma^2 = 12, 9, 6, 3$. (b) The projected mass densities of these models (full curves), and the projected modified Hubble model of equation (4.109b) (dashed curve). The squares show the surface brightness of the elliptical galaxy NGC 283 (Lauer et al. 1995).

Ejemplos de sistemas esféricos, acolicionales, estacionarios y anisotrópicos

5. Modelo de *Eddington*

El caso mas general para sistemas esféricos considera sistemas que **no son isotrópicos**, para los cuales la función distribución es de la forma:

$$f = f(\mathbb{E}, L)$$

Eddington (1914) considero dichos modelos, proponiendo la siguiente función distribución:

$$f_E(\mathbb{E}_{rel}, L) = f_I(\mathbb{E}_{rel}) e^{-L^2/(2r_a^2 \sigma^2)} = \frac{\rho_0}{(2\pi\sigma^2)^{3/2}} e^{\mathbb{E}_{rel}/\sigma^2} e^{-L^2/(2r_a^2 \sigma^2)}$$

donde r_a es el **radio de anisotropía**; y cuya densidad tiene la forma:

$$\rho(r) = \frac{\rho_0}{1 + (r/r_a)^2} e^{\Psi/\sigma^2}$$

y causa que cada componente tangencial de la velocidad de dispersión disminuya por un factor (**parámetro de anisotropía**) :

$$\beta = 1 - \frac{\sigma_\theta^2}{\sigma_r^2} = \frac{1}{(r_a/r)^2 + 1}$$

6. Modelos de *Michie*

Un modelo análogo al de *Eddington*, pero relacionado al modelo truncado de *King*, fue también propuesto por *Michie* (1963):

$$f_M(\mathbb{E}_{rel}, L) = f_K(\mathbb{E}_{rel}) e^{-L^2/(2 r_a^2 \sigma^2)} = \frac{\rho_0}{(2\pi\sigma^2)^{3/2}} e^{-L^2/(2 r_a^2 \sigma^2)} (e^{\mathbb{E}_{rel}/\sigma^2} - 1)$$

- También análogamente al caso anterior, para **radios de anisotropía suficientemente grandes** (β pequeños, mayormente isotrópico), un modelo de *Michie* se comporta como un modelo de *King*, con la densidad cayendo a cero en el **radio de marea**.
- Por otro lado, con **radios de anisotropía pequeños** (β grandes, mayormente anisotrópico), el modelo de *Michie* se asemeja al modelo de *Eddington*.
- En ambos casos la distribución de velocidades es **isotrópica en el centro**, con la transición ocurriendo alrededor del radio de anisotropía.

Función distribución para sistemas axi-simétricos* (acolicionales y estacionarios)

Los modelos más sencillos para **sistemas no esféricos** son los que presentan una función distribución que depende solamente[#] de:

$$f = f(\mathbb{E}_{rel}, L_z)$$

Eses modelos son especiales en que, en todo el sistema, la **dispersión de velocidades en la dirección radial** se iguala a la que es **paralela al eje de simetría**:

$$\langle v_R^2 \rangle = \langle v_z^2 \rangle$$

* Sistemas dominados por rotación, como galaxias espirales, son aproximadamente cilíndricos.

[#] $I_3 = 0$ cuando el sistema es “delgado como navaja” (*razor-thin*), como el disco delgado de la Vía Láctea

Ejemplos de sistemas axi-simétricos, acolicionales y estacionarios

7. Modelo de *Prendergast & Toomer*

$$\begin{aligned} f(E, J_z) &= f_I(E) \exp(\Omega J_z / \sigma^2) & E < E_t \\ &= 0 & E \geq E_t, \end{aligned}$$

8. Discos de *Mestel*

$$f_{Me}(\mathbb{E}_{rel}, L_z) = \begin{cases} \mathfrak{F} (L_z / R_0 v_c)^q e^{\mathbb{E}_{rel} / \sigma^2} & , L_z > 0 \\ 0 & , L_z \leq 0 \end{cases}$$

$$q = \frac{v_c^2}{\sigma^2} - 1 \quad \text{and} \quad F = \frac{\Sigma_0 v_c^q}{2^{q/2} \sqrt{\pi} (\frac{1}{2}q - \frac{1}{2})! \sigma^{q+2}}.$$

$$\Sigma(R) = \Sigma_0 \frac{R_0}{R} \qquad v_c^2 = -R \frac{\partial \Psi}{\partial R} = 2\pi G \Sigma_0 R_0.$$

$$\Psi(R) = -v_c^2 \ln(R/R_0)$$

9. Discos de *Kalnajs*

$$f(\mathcal{E}, L_z) = \begin{cases} F [(\Omega_0^2 - \Omega^2)a^2 + 2(\mathcal{E} + \Omega L_z)]^{-1/2} & \text{for } [\dots] > 0, \\ 0 & \text{for } [\dots] \leq 0. \end{cases}$$

$$\Sigma(R) = \Sigma_c \sqrt{1 - \frac{R^2}{a^2}}.$$

$$\Omega_0 \equiv \sqrt{\frac{1}{2}\pi^2 G \Sigma_c / a}$$

$$F = \frac{\Sigma_c}{2\pi a \sqrt{\Omega_0^2 - \Omega^2}},$$

$$L_z = R v_\phi$$

$$\Psi(R) = -\Phi(R) + \text{constant} = -\frac{1}{2}\Omega_0^2 R^2.$$