T E O R Í A C L Á S I C A D E C A M P O S

Tarea 2 (lunes 10 de marzo a las 23:59)

1. Sea un sistema de osciladores armónicos acoplados como el que se muestra en la Figura 12.1 del libro de Marion. Demostrar que las ecuaciones del movimiento de este sistema pueden expresarse en la forma $\ddot{x}_i(t) + \Omega^2_{ij} x_j(t) = 0$, con $\vec{x}(t) = x_i(t)\vec{x}_i$ el vector de estado expresado en coordenadas cartesianas, y
$$\Omega^2_{ij} = \begin{pmatrix} \frac{k+k_{12}}{M} & \frac{-k_{12}}{M} \\ \frac{-k_{12}}{M} & \frac{k+k_{12}}{M} \end{pmatrix} \tag{1}$$
la matriz 2×2 para la frecuencia angular al cuadrado. Diagonalizar esta matriz y encontrar sus valores ω_S^2, ω_A^2 y vectores $\vec{v}_S$, $\vec{v}_A$ propios. Encontrar la matriz ortogonal $\mathcal{O}_{ij}$ que conecta la base de vectores nueva, $\{\vec{v}_S, \vec{v}_A\}$, y la original, $\{\vec{x}_1, \vec{x}_2\}$, i.e. $\vec{v}_i = \mathcal{O}_{ij}\vec{x}_j$. Demostrar que en la nueva base el sistema de ecuaciones dinámicas se desacopla, $\ddot{\bar{x}}_i(t) + \omega_i^2 \bar{x}_i(t) = 0$, con $i = S, A$, y resolverlo. Finalmente, utilizar la expresión $x_i(t) = \mathcal{O}^T_{ij}\bar{x}_j(t)$ que conecta las componentes del vector de estado $\vec{x}(t) = x_i(t)\vec{x}_i = \bar{x}_i(t)\vec{v}_i$ en ambas bases para encontrar la posición de cada partícula $x_i(t)$ como función del tiempo en términos de los datos iniciales $x_1(t_0)$, $x_2(t_0)$, $\dot{x}_1(t_0)$, $\dot{x}_2(t_0)$. Interpretar el resultado.

2. Identificar la matriz Ω^2_{ij} asociada a un sistema de osciladores armónicos acoplados como el que se muestra en la Figura 12.1 del libro de Marion, con valores $M_1 \neq M_2$ y $k_1 \neq k_{12} \neq k_2$. En general, ¿es esta matriz simétrica? En caso de no serlo identificar el origen de la asimetría. ¿Hasta qué punto puede ser esto un problema? Consideren ahora el caso en el que $k_1 = k_{12} = k_2 = k$. ¿Es la nueva matriz simétrica? ¿Posee este sistema modos normales de oscilación?

3. Para el caso de la cuerda cargada con N partículas idénticas y $N+1$ resortes iguales demostrar que es posible aproximar la energía potencial total del sistema por medio de
$$V \approx \sum_{j=1}^{N+1} \frac{1}{2} k \left[(x_j - x_{j-1})^2 + \zeta_{\rm eq}(y_j - y_{j-1})^2 \right], \tag{2}$$
en donde $\zeta_{\rm eq}$ es una parámetro adimensional. Identificar el valor de $\zeta_{\rm eq}$, así como la forma de los términos de orden superior que no hemos incluido en (2).

4. Identificar los modos normales de oscilación asociados a un sistema con tres partículas iguales y cuatro resortes, todos ellos idénticos (i.e. cuerda cargada con $N = 3$).