▲ Calcule la masa de Jeans para una nube molecular promedio. Normalmente, las nubes moleculares tienen masas del orden de 1000 $M_\odot$ o más, temperaturas del orden de 10K y densidades numéricas de aproximadamente 1000 moléculas de H_2 por cm^3. Discuta los resultados

Considerando que la masa de Jeans está definida por:

$$M_J = \frac{9}{2\sqrt{\pi}} \cdot \left(\frac{K}{G\, m^{4/3}}\right)^{3/2} \cdot \frac{T^{3/2}}{\sqrt{n}}$$

Siendo n el número de moléculas por unidad de volumen y $m(\mu)$ el peso molecular de cada molécula, entonces:

$$m(\mu)_{H_2} = 2.01588\,\cancel{g}/\cancel{mol} \times \frac{1\,\cancel{mol}}{N_A\ \text{moléculas}} \times \frac{1\,Kg}{1000\,\cancel{g}} = 3.347\times10^{-27}\ Kg/\text{molécula}$$

Así,

$$M_J = \frac{9}{2\sqrt{\pi}} \cdot \left(\frac{K}{G \cdot (3.347\times10^{-27}\,Kg/\text{molécula})^{4/3}}\right)^{3/2} \cdot \frac{(10\,K)^{3/2}}{\sqrt{(1\times10^{9}\,m^{-3})}}$$

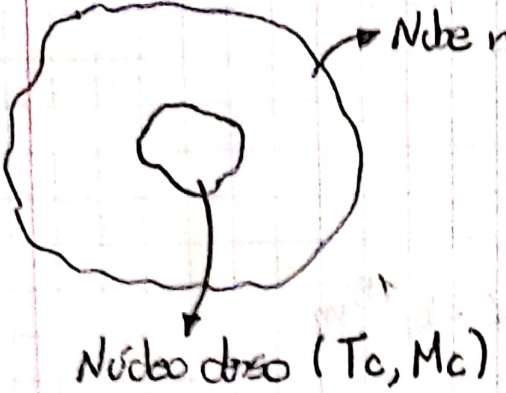
$$\boxed{M_J = 2.13\times10^{31}\,Kg = 10.72\,M_\odot}$$

$$M_N > M_J$$

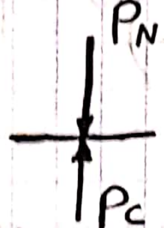
Si la masa de la nube molecular es mayor que la masa de Jeans como función de la temperatura y la densidad numérica entonces ocurrirá colapso.

Para el caso concreto $\tilde{M}_N > M_J$ por tanto se cumple la condición anterior.

▲ Considere una gran nube molecular de $10^4 M_\odot$ con una densidad H_2 de $n = 5\times10^9 m^{-3}$, a una temperatura de 300 K. Dentro de esta nube, hay un núcleo denso con una masa de $5 M_\odot$ a una temperatura de 10 K. Suponiendo que el núcleo tiene densidad uniforme, forma esférica y está en equilibrio de presión con la nube, encuentre la densidad en el núcleo (en m^{-3}) y el radio del núcleo (en pc).



Considerando que el núcleo denso está en equilibrio hidrostático con la nube molecular. Entonces:



$$\frac{\sum F = 0}{dA} \rightarrow \text{Condición de equilibrio}$$

$$P_N = P_c$$

Ahora bien teniendo en cuenta que la presión ejercida por la nube molecular estará dada por $P = \rho K T/\mu$ y considerando la ecuación de los gases ideales se tiene:

$$P_N = \rho K T/\mu \qquad PV = NKT$$

$$\frac{N}{V} = \frac{P_N}{KT}$$

Análisis dimensional

$$\frac{\text{moléculas}}{m^3} = \frac{P_N}{KT} = \frac{\frac{\rho K T}{\mu}}{KT} = \frac{\left[\frac{\frac{kg}{m^3}\cdot\frac{J}{K}\cdot K}{\frac{kg}{\text{molécula}}}\right]}{\frac{J}{K}\cdot K}$$

$$\frac{N}{V} = n_c = \frac{P_N}{KT} = \frac{\rho \cancel{K} T_N}{\cancel{K}\mu T_c}$$

Sabiendo que $\rho = n\mu$,

$$n_c = \frac{n_N \cancel{\mu}}{\cancel{\mu}}\cdot\frac{T_N}{T_c} = n_N\cdot\frac{T_N}{T_c}$$

$$n_c = 5\times10^9 m^{-3}\cdot\frac{300\,\cancel{K}}{10\,\cancel{K}} \Rightarrow \boxed{n_c = 1\times10^{11} m^{-3}}$$

$$n_c > n_N$$

Ahora, sabiendo que,

$$\rho = n\mu \qquad M = 5M_\odot \qquad \rho = \frac{M}{V} \qquad V = \frac{4}{3}\pi R^3$$

$$\rho = \rho$$

$$\frac{3M}{4\pi R^3} = n\mu$$

$$R = \left(\frac{3M}{4\pi n\mu}\right)^{1/3}$$

$$R = \left(\frac{3 \cdot 5M_\odot}{4\pi \cdot 1\times10^{11} m^{-3} \cdot 3.347\times10^{-27} kg/mol}\right)^{1/3} = 1.92\times10^{15} m$$

$$R = 1.92\times10^{15} \cancel{m} \times \frac{1 \text{ parsec}}{3\times10^{16} \cancel{m}} = \boxed{0.064 pc}$$

- El nucleo colapsará si la energía gravitacional total es mayor que la energía térmica

$$\frac{GM^2}{R} > \frac{MkT}{\mu m_{H_2}}$$ donde la masa molecular media del H_2 es $\mu = 2$.

Colapsará este núcleo? Si

$$\frac{GM^2}{R} = \frac{G \cdot 5M_\odot}{0.064pc} = 3.44\times10^{36} J \quad E_g$$

$$\frac{MkT}{\mu m_{H_2}} = \frac{5M_\odot \cdot k \cdot 10k}{3.347\times10^{-27} kg/molecula} = 4.10\times10^{35} J \quad E_T$$

$$\boxed{E_g > E_T}$$

- Para nuestro núcleo de nube de 10K con la densidad determinada anteriormente, ¿cuál es esta masa mínima (en $M_\odot$) para el colapso?

Sabiendo que

$$M = \frac{9}{2\sqrt{\pi}} \cdot \left(\frac{k}{G\, m^{4/3}}\right)^{3/2} \cdot \frac{T^{3/2}}{\sqrt{n}}$$

Entonces:

$$M_J = \frac{9}{2\sqrt{\pi}} \cdot \left(\frac{1.38\times10^{-23}\ J/k}{6.67\times10^{-11}\frac{Nm^2}{kg^2}\cdot(3.347\times10^{-27}\ kg/molécula)^{4/3}}\right)^{3/2} \cdot \frac{(10\,K)^{3/2}}{\sqrt{1\times10^{11}\ m^{-3}}}$$

$M_J = 2.13\times10^{30}\ kg$, y sabiendo que $M_\odot = 1.989\times10^{30}\ kg$, entonces

$$\boxed{M_J = 1.10 M_\odot}$$

- Suponiendo que puede colapsar no más rápido que el tiempo de caída libre, ¿cuál es la cantidad mínima de años que tardará en colapsar (suponga que colapsa efectivamente hasta un punto para este cálculo?

Teniendo que,

$$\tau = \left(\frac{R_0^3}{GM}\right)^{1/2} \quad y, \quad R = 1.92\times10^{15}\ m, \quad M = 5M_\odot$$

Entonces,

$$\tau = \left(\frac{(1.92\times10^{15}\ m)^3}{G\cdot 5M_\odot}\right)^{1/2} = 3.27\times10^{12}\ s$$

$$\boxed{\tau = 103691\ \text{años}}$$

▲ Encuentre el peso molecular medio μ para plasma completamente ionizado que contiene metales con una fracción de masa de hidrógeno igual a X y una fracción de masa de helio igual a Y.

Asumiendo una composición cuasi solar se tiene que, en un plasma completamente ionizado y para una composición cuasi solar,

$$X + Y + Z = 1$$

Composición interna por masa

$X = 0.7$

$Y = 0.27$

$Z = 0.03$

Entonces, a partir de las condiciones de la estructura interna de la estrella se tiene,

$$\tilde{\mu} = \frac{1}{2X + 3/4\,Y + 1/2\,Z}$$

$$\tilde{\mu} = \frac{1}{2(0.7) + 3/4(0.27) + (0.03)\,1/2}$$

$$\boxed{\tilde{\mu} = 0.61}$$

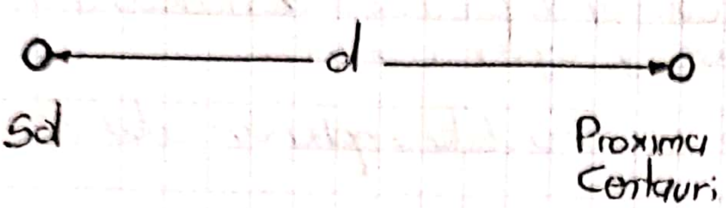
Del libro:

Stellar structure and Evolution - Onno Pols

Ejercicio 1.1.

A) -

$d = 4.3\ ly$



$1 ly = c \cdot 1 y$

$c = 3\times10^{8}\ m/s$

$1 y = 31536000 s$

$1 ly = 9.46\times10^{15} m$

$$d = 4.3\ ly \times \frac{9.46\times10^{15} m}{1\ ly}$$

$$d \approx 4.07\times10^{16} m$$

Teniendo que $R_\odot \approx 6.96\times10^{8} m \Rightarrow \boxed{d = 58.50\times10^{6} R_\odot}$

- Tanto la gravedad, como el flujo radiativo disminuyen en función de la distancia de la siguiente forma,

$$F_g = \frac{G M_1 m}{r^2} \qquad F = \frac{L}{4\pi r^2}$$

Su valor es inversamente proporcional al cuadrado de la distancia, lo cual sugiere que, a mayor distancia, menor será la influencia de la gravedad o la densidad de flujo radiativo. Por otra parte, si la distancia aumenta el doble la influencia gravitatoria y el flujo radiativo disminuirán en 1/4.

- Si las dos estrellas están lo suficientemente cerca, su influencia gravitacional mutua puede distorsionar las capas más externas de una de ellas. En algunas ocasiones estos sistemas incluso pueden llegar a intercambiar materia lo que da lugar a procesos que no suceden en estrellas individuales, como las supernovas del tipo IA.

B) El Sol está compuesto principalmente por hidrógeno y helio. Aproximadamente tres cuartos de la masa del Sol consisten en hidrógeno (73%), el resto es mayoritariamente helio (25%) y algunas cantidades más pequeñas de elementos más pesados como oxígeno (1%), carbón (0,3%), neón (0,2%) y hierro (0,2%).

Tanto el hidrógeno como el helio provienen del Big Bang; no hay otra fuente perceptible de hidrógeno en el Universo. No obstante, la diversidad amplia de elementos que existen provienen de procesos de nucleosíntesis al interior de las estrellas, supernovas y rayos cósmicos.

Cada uno de esos tres procesos son causantes de la amplia variedad de núcleos atómicos que existen.

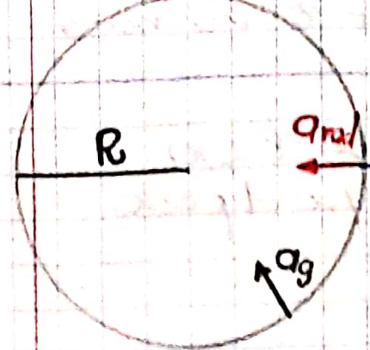
C) El campo gravitatorio apunta en todas direcciones de manera radial, por tal motivo asume una forma esférica respecto a un centro común para escalas de gran proporción (cuanta mayor masa, mayor esfericidad tendrá el cuerpo).

Así pues, asumir la esfericidad de un cuerpo astronómico con velocidad de rotación bajo es aceptable.

No obstante, si el cuerpo astronómico gira muy rápido, la inercia experimentada por la masa en las partes más ecuatoriales del mismo tenderá a deformarlo gracias a la aparición de fuerzas ficticias asociadas a la rotación. A estas fuerzas se le conocen como fuerzas centrífugas.

La fuerza centrífuga tiende a "ensanchar" el cuerpo en el ecuador y a "achatarlo" en los polos.

Del mismo modo, la rotación del disco protoestelar juega un rol muy importante en las condiciones de evolución de los objetos astronómicos (estelares y planetarios).



El análisis de fuerzas reales y virtuales indica que:

$$\underbrace{W_{\odot}}_{\text{Peso real/gravitatorio}} - \underbrace{W_I}_{\text{Peso aparente / fuerza centrífuga}} = m\underbrace{a_{\odot}}_{\text{aceleración radial.}}$$

- Peso gravitatorio

$$F_W = F_g$$

$$\cancel{m_{\odot}}\, g = \frac{G M_{\odot} \cancel{m_{\odot}}}{R_{\odot}^2}$$

$$g = \frac{G M_{\odot}}{R_{\odot}^2} = 274\, m/s^2$$

*Gravedad superficial

- Aceleración radial

$$a_{rad} = \frac{v^2}{R_{\odot}} = \omega^2 R_{\odot}$$

$$\omega = \frac{\theta}{T} = \frac{2\pi}{27d} = 2.70 \times 10^{-6}\, rev/s$$

>

$$\cancel{m_{\odot}}\, g - \cancel{m_{\odot}}\, a = \cancel{m_{\odot}} \frac{v^2}{R_{\odot}}$$

$m_{\odot}$ = Partícula girando en el ecuador del Sol.

$$\frac{G M_{\odot}}{R_{\odot}^2} - a = \left(\frac{2\pi}{27d}\right)^2 R_{\odot}$$

$$a = \frac{G M_{\odot}}{R_{\odot}^2} - \left(\frac{2\pi}{27d\,(s)}\right)^2 R_{\odot}$$

$$a = 273.995\, m/s^2$$

Donde a es múltiplo de g tal que $W_I = m_{\odot} K g = m_{\odot} a$

Entonces: $K = \frac{a}{g} = 0.999 \sim (1.82 \times 10^{-3}\%)$

El efecto de la fuerza centrífuga es prácticamente imperceptible.

▲ Calcule el tiempo de caída libre para una nube molecular de una masa solar.

Teniendo en cuenta que la densidad promedio de partículas de una nube molecular es del orden de 1×10^{9} partículas/m^3, y que el peso molecular del H_2 es 3.347×10^{-27} Kg/molécula.

Entonces,

$$\rho = n\mu$$

$$\rho = 1\times10^{9}\,\text{moléculas}/m^3 \times 3.347\times10^{-27}\,\text{Kg/molécula}$$

$$\rho = 3.347\times10^{-18}\,\text{Kg}/m^3$$

Así,

$$R_0 = \left(\frac{3M}{4\pi\rho}\right)^{1/3} = 5.21\times10^{15}\,m$$

$$\tau = \left(\frac{R_0^{3}}{GM}\right)^{1/2} = \left(\frac{(5.21\times10^{15}m)^3}{G\cdot M_\odot}\right)^{1/2} = \boxed{3.27\times10^{13}s}$$

$$\boxed{\tau = 1036.62\times10^{3}\,\text{años}}$$