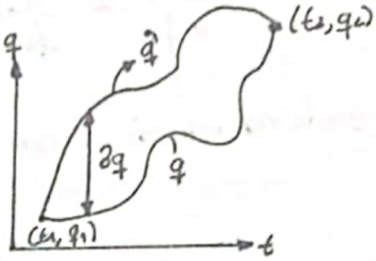
Tarea 2: Mecánica Clásica

Holman Daniel Quintero Salazar

• Ejercicio #1.

Teniendo la acción,

$$S = \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{L}(q_j, \dot{q}_j, t)\,dt$$



se deberán hallar curvas de la forma,

$$q(t)' = q(t) + \epsilon\eta(t)$$

donde $\eta(t_1)$ y $\eta(t_2)$ son 0. Así pues, sustituyendo se tiene,

$$\Phi(\epsilon) = S(q') = \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{L}(q(t)', \dot{q}(t)', t)\,dt$$

La función $q(t)'$ alcanzará un punto estacionario cuando la función $\Phi(\epsilon)$ alcance un extremo en $\epsilon = 0$, así, q' será igual a q. Se tiene entonces

$$\delta S = 0$$

$$\left(\frac{d\Phi}{d\epsilon}\right)_{\epsilon=0} = \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q'}\frac{\partial q'}{\partial \epsilon} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}'}\frac{\partial \dot{q}'}{\partial \epsilon}\right)_{\epsilon=0} dt$$

definiendo $\frac{\partial q'}{\partial \epsilon} = \eta = \delta q$, $\frac{\partial \dot{q}'}{\partial \epsilon} = \dot{\eta} = \delta \dot{q}$, obtenemos,

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q}\delta q + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}}\delta \dot{q}\right) dt$$

Dado que, $\delta \dot{q} = \frac{d}{dt}\delta q$, podemos reorganizar términos e integrar por partes el segundo término

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q}\delta q + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}}\frac{d}{dt}\delta q\right) dt$$

$$\int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}}\frac{d}{dt}\delta q\,dt = \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}}\delta q\right]_{t_1}^{t_2} - \int_{t_1}^{t_2} \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}}\right)\delta q\,dt$$

dado que $\eta_1 = \delta q(t_1) = \eta_2 = \delta q(t_2) = 0$, el primer término se hace 0, lo que nos queda en,

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} \right) \right) \delta q \, dt$$

Para que la variación δS sea cero para valores arbitrarios de δq, se tiene que cumplir que,

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} \right) = 0.$$

Para un sistema mecánico con $\sum_j$ coordenadas generalizadas se tiene que,

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} \sum_j \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_j} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} \right) \right) \delta q_j \, dt = 0$$

- Ejercicio #2

Dadas las ligaduras de la forma,

$$\sum_k a_{lk} \, dq_k + a_{lt} \, dt = 0 \qquad [f_l(q_1, \dots, q_n, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_n) = 0]$$

derivando por el tiempo podemos hallar las ligaduras en función de las velocidades de tal forma que,

$$\sum_k a_{lk} \dot{q}_k + a_{lt} = 0$$

Ahora bien, con esto en mente podemos extremizar la acción tal como en el ejercicio anterior (#1), pero esta vez usando un lagrangiano de la forma,

$$\mathcal{L}' = \mathcal{L}(q_j, \dot{q}_j, t) + \sum_l \lambda_l \left(\sum_k a_{lk} \dot{q}_k + a_{lt} \right)$$

en donde λ_l representa los multiplicadores de Lagrange para ligaduras no holónomas.

Al final obtenemos el término,

$$\delta S' = \int_{t_1}^{t_2} \left[\left(\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}'}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial \mathcal{L}'}{\partial q_j} \right) \delta q_j \right] dt = 0$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}'}{\partial \dot{q}_j} = \frac{\partial}{\partial \dot{q}_j}\left(\mathcal{L}(q_j, \dot{q}_j, t) + \sum_l \lambda_l \left(\sum_j a_{l_{jk}} \dot{q}_{jk} + a_{lt} \right)\right)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}'}{\partial \dot{q}_j} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} + \sum_l \lambda_l a_{lj}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}'}{\partial q_j} = \frac{\partial}{\partial q_j}\left(\mathcal{L}(q_j, \dot{q}_j, t) + \sum_l \lambda_l \left(\sum_j a_{l_{jk}} \dot{q}_{jk} + a_{lt} \right)\right)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}'}{\partial q_j} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_j} + \sum_l \lambda_l \left(\frac{\partial a_{lk}}{\partial q_j} \dot{q}_k + \frac{\partial a_{lt}}{\partial q_j} \right)$$

$$\to \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j}\right) + \sum_l \frac{d\lambda_l}{dt} a_{lj} + \sum_l \lambda_l \frac{da_{lj}}{dt} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_j} - \sum_l \lambda_l \left(\frac{\partial a_{lk}}{\partial q_j} \dot{q}_k + \frac{\partial a_{lt}}{\partial q_j} \right) = 0$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j}\right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_j} = \sum_l \lambda_l \left(- \frac{da_{lj}}{dt} + \frac{\partial a_{lk}}{\partial q_j} \dot{q}_k + \frac{\partial a_{lt}}{\partial q_j} \right)$$

Si tenemos que la fuerza de ligadura Q_j debida a la ligadura l se expresa de la forma

$$Q_j = \lambda_l a_{lj}$$

tenemos que,

$$Q_j = \sum_l \lambda_l a_{lj}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j}\right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_j} = \sum_l \lambda_l a_{lj} = Q_j$$

•Ejercicio #3

Teniendo que el momento canónico se expresa como,

$$P_i = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i}$$

para un lagrangiano de la forma $\mathcal{L}(q_i, \dot{q}_i, t)$, una coordenada cíclica generalizada q_i si el lagrangiano no depende de esta, esto es,

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} = 0.$$

Usando las ecuaciones de Euler-Lagrange vemos que,

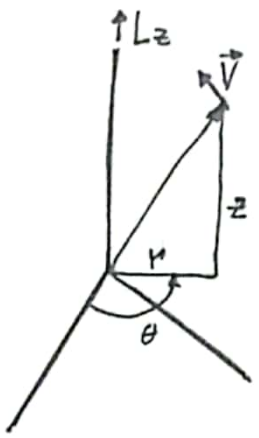
$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i}\right) - \cancel{\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i}} = 0$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i}\right) = 0 \iff \frac{d}{dt}(P_i) = 0$$

dado que la derivada del momento canónico con respecto al tiempo es cero, P_i es constante (se conserva).

•Ejercicio #4

Teniendo un sistema mecánico de tal forma que el vector de momento angular sea $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$, en donde $\vec{r} = r\hat{e}_r + z\vec{e}_z$ y $\vec{v} = \dot{r}\vec{e}_r + r\dot{\theta}\vec{e}_\theta + \dot{z}\vec{e}_z$, podemos hallar $\vec{L}$ en términos de las coordenadas cilíndricas computando el producto cruz.



$$\vec{L} = (r\vec{e}_r + z\vec{e}_z) \times m(\dot{r}\vec{e}_r + r\dot{\theta}\vec{e}_\theta + \dot{z}\vec{e}_z)$$

$$\vec{L} = r\vec{e}_r \times m(\dot{r}\vec{e}_r + r\dot{\theta}\vec{e}_\theta + \dot{z}\vec{e}_z) + z\vec{e}_z \times m(\dot{r}\vec{e}_r + r\dot{\theta}\vec{e}_\theta + \dot{z}\vec{e}_z)$$

$$\vec{L} = -mzr\dot{\theta}\,\hat{e}_r + m(z\dot{r} - r\dot{z})\vec{e}_\theta + mr^2\dot{\theta}\vec{e}_z$$

El momento angular en coordenadas cilíndricas será,

$$L_r = -mzr\dot{\theta} \;, \quad L_\theta = m(z\dot{r} - r\dot{z}) \quad , \quad L_z = mr^2\dot{\theta}$$

Ahora bien, si tenemos un lagrangiano de la forma $\mathcal{L}(r, \theta, z)$ para coordenadas cilíndricas, si hay simetría alrededor del eje z esto implica que θ será una coordenada cíclica, así tenemos que $\mathcal{L}(r, \dot{r}, \dot{\theta}, z, \dot{z})$. Para un potencial V que siga las condiciones nombradas tendremos que,

$$\mathcal{L} = \frac{m}{2}\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + \dot{z}^2\right) - V(r, z)$$

Calculando el momento canónico para θ vemos que,

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}}\right) - \cancel{\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta}} = 0$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}} = mr^2\dot{\theta} \quad \Rightarrow \quad \frac{d}{dt}\left(mr^2\dot{\theta}\right) = 0$$

Vemos que $\frac{d}{dt}(mr^2\dot{\theta}) \cdot L_z$, por lo que la componente z del momento angular no cambia en el tiempo (se conserva).

• Ejercicio #5

Conservación de la energía para un sistema de partículas.

La energía cinética del sistema está dada por,

$$T = \frac{1}{2}\sum_i m_i v_i^2$$

Si consideramos que $W_{AB} = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{r}$ es el trabajo que realiza una fuerza a lo largo de una trayectoria, para un sistema de partículas tendremos que,

$$\frac{d\vec{p}_i}{dt} = \sum_{j \neq i}^{N} \vec{F}_{ij} + \vec{F}_i^{\,e}$$, siendo $\vec{F}_i^{\,e}$ fuerzas externas y $\vec{F}_{ij}$ fuerzas internas del sistema.

Operando tenemos,

$$W_{AB} = \sum_i \int_A^B \left(\vec{F}_i^{\,e} + \sum_{j,j\neq i} F_{ij} \right) \cdot d\vec{r}_i = \sum_i \int_A^B \vec{F}_i^{\,e} \cdot d\vec{r}_i + \sum_{\substack{i,j \\ j\neq i}} \int_A^B \vec{F}_{ij} \cdot d\vec{r}_i$$

lo que se puede reexpresar como,

$$W_{AB} = \sum_i \int_A^B m_i \dot{\vec{v}}_i \cdot \vec{v}_i \, dt = \sum_i \int_A^B d\left(\frac{1}{2} m_i v_i^2\right) = \int_A^B dT$$

Así,

$$W_{AB} = T_B - T_A = \Delta T$$

Ahora bien, si consideramos el caso donde $\vec{F}$ es una fuerza conservativa tal que $\vec{F} = -\nabla V$, donde V es un potencial, podemos ver que, por una parte,

$$\vec{F}_i^{\,e} = -\nabla_i V^e \longrightarrow \sum_i \int_A^B \vec{F}_i^{\,e} \cdot d\vec{r}_i = -\int_A^B \sum_i \nabla_i V^e \cdot d\vec{r}_i = -\int_A^B dV^e$$

$$= V_A^e - V_B^e = -\Delta V^e$$

por otro lado, sabiendo que,

$$\left[\vec{r}_{ij} = \vec{r}_i - \vec{r}_j\right] \vec{F}_{ij} = -\nabla_i V_{ij}$$

$$\vec{F}_{ij} = -\nabla_i V_{ij} = +\nabla_j V_{ij} = +\nabla_j V_{ij} = -\vec{F}_{ji}$$

$$\vec{F}_{ij} = -\nabla_i V_{ij}(R_{ij}) = -\frac{\vec{r}_{ij}}{R_{ij}} V'_{ij}(R_{ij})$$

$$\rightarrow \sum_{i,j} \int_A^B \vec{F}_{ij} \cdot d\vec{r}_i = \frac{1}{2} \sum_{i,j} \int_A^B (\vec{F}_{ij} \cdot d\vec{r}_i + \vec{F}_{ji} \cdot d\vec{r}_j)$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{i,j} \int_A^B \vec{F}_{ij} \cdot d(\vec{r}_i - \vec{r}_j)$$

$$= -\frac{1}{2} \sum_{i,j} \int_A^B \nabla_i V_{ij} \cdot d\vec{r}_{ij} = \frac{1}{2} \sum_{i,j} \int_A^B \nabla_{ij} V_{ij} \cdot d\vec{r}_{ij}$$

$$= -\frac{1}{2} \sum_{i,j} V_{ij} \Big|_A^B \Rightarrow -\frac{1}{2} \Delta V_{ij}$$

Definiendo

$$V_T = V^e + \frac{1}{2} \sum_{i,j} V_{ij}$$

Podemos apreciar que,

$$W_{AB} = W_{AB}$$

$$\Delta T = -\Delta V$$

$$(T + V)_A = (T + V)_B$$

si todas las fuerzas son conservativas la energía total del sistema de partículas se conserva.

Conservación del hamiltoniano para un sistema de partículas

Si tenemos un lagrangiano de la forma $\mathcal{L}(q_j, \dot{q}_j, t)$ para un sistema de partículas, la derivada total del mismo con respecto al tiempo será,

$$\frac{d\mathcal{L}}{dt} = \sum_j \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_j}\frac{dq_j}{dt} + \sum_j \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j}\frac{d\dot{q}_j}{dt} + \frac{\partial \mathcal{L}}{dt}$$

con

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_j} = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j}\right)$$, del principio de mínima acción vemos que,

$$\frac{d\mathcal{L}}{dt} = \sum_j \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j}\right)\dot{q}_j + \sum_j \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j}\frac{d\dot{q}_j}{dt} + \frac{\partial \mathcal{L}}{dt}$$

$$\frac{d\mathcal{L}}{dt} = \sum_j \frac{d}{dt}\left(\dot{q}_j \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j}\right) + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t}$$

Reordenando términos tenemos que,

$$\frac{d}{dt}\left(\sum_j \dot{q}_j \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} - \mathcal{L}\right) + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} = 0$$

en donde $\mathcal{H} = \sum_j \dot{q}_j \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} - \mathcal{L}$, es justamente el hamiltoniano del sistema. Así, vemos que

$$\frac{d\mathcal{H}}{dt} = -\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t}$$

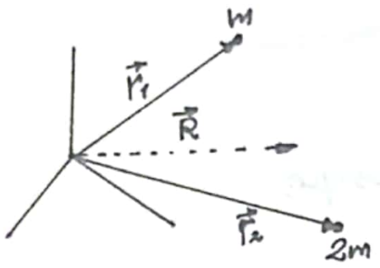
si el lagrangiano no es una función explícita del tiempo entonces se dice que el hamiltoniano se conserva.

Diferencias:

1. El enfoque newtoniano está basado en el teorema de trabajo energía, mientras que el método lagrangiano está basado en el principio de Hamilton de mínima acción.
2. El método newtoniano se trabaja con vectores de posición directamente mientras que el método lagrangiano emplea coordenadas generalizadas.

3. En general, con el método newtoniano, si la fuerza depende de un potencial conservativo, la energía siempre se conserva, por otro lado, en el caso del enfoque lagrangiano, el hamiltoniano puede conservarse pero la energía total no. Algunos casos donde el hamiltoniano no es igual a la energía total del sistema son un lagrangiano que depende del tiempo, sistemas no holónomos y sistemas con potenciales dependientes del tiempo.

• Ejercicio #6



Para 2 partículas m_1 (m) y m_2 (2m), tendremos que es centro de masa vendrá dado por.

$$\vec{R} = \frac{m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2}{m_1+m_2} = \frac{m\vec{r}_1 + 2m\vec{r}_2}{m+2m}$$

$$\vec{R} = \frac{m\vec{r}_1 + 2m\vec{r}_2}{3m} = \frac{1}{3}\vec{r}_1 + \frac{2}{3}\vec{r}_2$$

Teniendo el vector de posición $\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$, podemos reexpresar $\vec{r}_2$ y $\vec{r}_1$ en términos de $\vec{R}$ y $\vec{r}$ de tal forma que,

$$\vec{r}_2 = \vec{r}_1 + \vec{r} \qquad\qquad \vec{r}_2 = \vec{r}_1 + \vec{r}$$

$$\vec{R} = \frac{1}{3}\vec{r}_1 + \frac{2}{3}(\vec{r}_1 + \vec{r}) \qquad \rightarrow \qquad \vec{r}_2 = \left(\vec{R} - \frac{2}{3}\vec{r}\right) + \vec{r}$$

$$\vec{R} = \vec{r}_1 + \frac{2}{3}\vec{r} \qquad\qquad \vec{r}_2 = \left(\vec{r} + \frac{2}{3}\vec{r}\right) + \vec{R}$$

$$\vec{r}_1 = \vec{R} - \frac{2}{3}\vec{r} \qquad\qquad \vec{r}_2 = \vec{R} + \frac{1}{3}\vec{r}$$

Si planteamos un lagrangiano de forma que $\mathcal{L}(\vec{r}, \vec{R})$,

$$\mathcal{L} = T - V = \frac{1}{2}m\dot{\vec{r}}_1^{\,2} + \frac{1}{2}(2m)\dot{\vec{r}}_2^{\,2} - V(\vec{r}_1, \vec{r}_2)$$

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}m\left(\dot{\vec{R}} - \frac{2}{3}\dot{\vec{r}}\right)^2 + m\left(\dot{\vec{R}} + \frac{1}{3}\dot{\vec{r}}\right)^2 - V(\vec{r}, \vec{R})$$

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}m\left(\dot{\vec{R}}^2 - \frac{4}{3}\dot{\vec{R}}\dot{\vec{r}} + \frac{4}{9}\dot{\vec{r}}^2\right) + m\left(\dot{\vec{R}}^2 + \frac{2}{3}\dot{\vec{R}}\dot{\vec{r}} + \frac{1}{9}\dot{\vec{r}}^2\right) - V(\vec{r}, \vec{R})$$

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}m\dot{\vec{R}}^2 - \frac{2}{3}m\dot{\vec{R}}\dot{\vec{r}} + \frac{2}{9}m\dot{\vec{r}}^2 + m\dot{\vec{R}}^2 + \frac{2}{3}m\dot{\vec{R}}\dot{\vec{r}} + \frac{1}{9}m\dot{\vec{r}}^2 - V(\vec{r}, \vec{R})$$

$$\mathcal{L} = \frac{3}{2} m \dot{\vec{R}}^2 + \frac{1}{3} m \dot{\vec{r}}^2 - V(\vec{r}, \vec{R})$$

Empleando las ecuaciones de Euler-Lagrange tenemos,

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \vec{r}} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\vec{r}}}\right) = 0 \qquad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \vec{R}} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\vec{R}}}\right) = 0$$

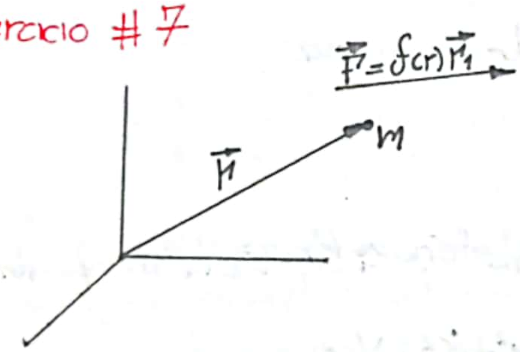
$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\vec{r}}} = \frac{2}{3} m \dot{\vec{r}} \Rightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\vec{r}}}\right) = \frac{2}{3} m \ddot{\vec{r}} \qquad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\vec{R}}} = 3m\dot{\vec{R}} \Rightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\vec{R}}}\right) = 3m\ddot{\vec{R}}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \vec{r}} = \frac{\partial}{\partial \vec{r}}\left(-V(\vec{r}, \vec{R})\right) = -\frac{\partial V}{\partial \vec{r}} \qquad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \vec{R}} = \frac{\partial}{\partial \vec{R}}\left(-V(\vec{r}, \vec{R})\right) = -\frac{\partial V}{\partial \vec{R}}$$

$$\frac{2}{3} m \ddot{\vec{r}} = -\frac{\partial V}{\partial \vec{r}} \qquad 3m\ddot{\vec{R}} = -\frac{\partial V}{\partial \vec{R}}$$

$$\ddot{\vec{r}} = -\frac{\partial V}{\partial \vec{r}} \cdot \frac{3}{2m} \qquad \ddot{\vec{R}} = -\frac{\partial V}{\partial \vec{R}} \cdot \frac{1}{3m}$$

• **Ejercicio # 7**



Si tenemos una fuerza tal que $\vec{F}$ siempre está dirigida desde m hacia un origen O, y la magnitud depende solo de la distancia r, entonces, una fuerza central podrá expresarse como,

$$\vec{F} = f(r)\hat{r} = f(r)\frac{\vec{r}}{r}$$

Si tenemos a $\vec{F}$ como campo de fuerza central entonces,

$$\vec{r} \times \vec{F} = f(r)\,\vec{r} \times \hat{r} = \frac{f(r)}{r}\,\vec{r} \times \vec{r} = 0$$

Si reescribimos $\vec{F}$ tal que $\vec{F} = m\frac{d\vec{v}}{dt}$, entonces,

$$m\,\vec{r} \times \frac{d\vec{v}}{dt} = 0 \Rightarrow \frac{d}{dt}(\vec{r} \times d\vec{v}) = 0$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt}(\vec{r} \times \vec{v}) = 0$$

Vemos que el vector $\vec{r} \times \vec{v}$ debe ser una constante perpendicular al plano de los dos vectores, así;

$$\vec{r} \times \vec{v} = \vec{h}$$

Continúa...

$$\vec{r} \times \vec{v} = \hat{n}$$

Tomando el producto punto a ambos lados encontramos

$$\vec{r} \cdot (\vec{r} \times \vec{v}) = \vec{r} \cdot \hat{n} = 0$$

Vemos que,

$$\vec{r} \cdot (\vec{r} \times \vec{v}) = (\vec{r} \times \vec{r}) \cdot \vec{v} = 0$$

$$\vec{r} \cdot \vec{n} = 0$$

Así, $\vec{r}$ es perpendicular al vector constante $\hat{n}$; por tanto el movimiento se realiza en el plano. Suponiendo que ese plano está orientado bajo algún sistema de coordenadas (ej: xy) cuyo origen está en el centro de la fuerza.

Más aún, vemos que,

$$\vec{r} \times \vec{v} = \hat{n}$$

$$m(\vec{r} \times \vec{v}) = m\hat{n}\text{, el momento angular se conserva.}$$

• Ejercicio #8

Si escribimos un lagrangiano para una fuerza central equivalente para el problema 1D tendremos,

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} m\dot{r}^2 + \frac{1}{2} mr^2\dot{\theta}^2 - V(r)$$

Aplicando las ecuaciones de Lagrange tendremos

$$m\ddot{r} - mr\dot{\theta}^2 + \frac{dV}{dr} = 0$$

$$\frac{d}{dt}(mr^2\dot{\theta}) = 0, \quad mr^2\dot{\theta} = \ell = \text{constante}$$

Por conservación de la energía tendremos que,

$$T + V = \frac{m}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) + V(r) = E = \text{constante}$$

o bien,

$$E = \frac{m}{2}\dot{r}^2 + \frac{\ell^2}{2mr^2} + V(r) = \frac{m}{2}\dot{r}^2 + V'(r)$$

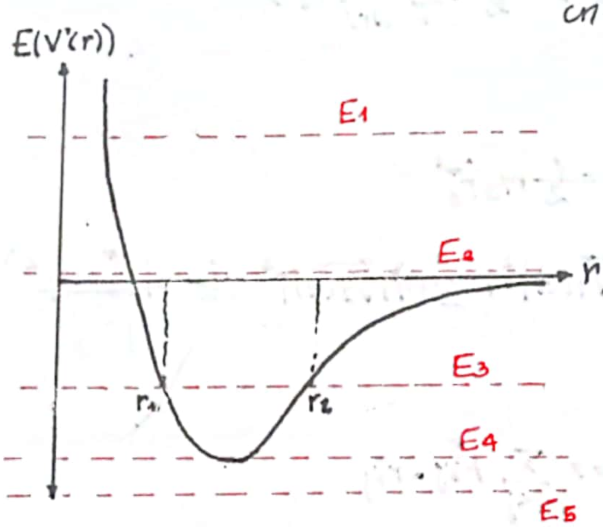
Con $V'(r) = \frac{l^2}{2mr^2} + V(r)$

Para el caso gravitacional tendremos que, $V(r) = -\frac{k}{r}$, por tanto,

$$V'(r) = -\frac{k}{r} + \frac{l^2}{2mr^2}$$

$$E = T + V = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{l^2}{2mr^2} - \frac{k}{r}$$

→ "A partir de estas expresiones se puede concluir lo siguiente. El término $\frac{l^2}{2mr^2}$ actúa como una barrera centrífuga la cual impone un coste de energía infinita para llegar a $r=0$ si el cuerpo tiene un momento angular no nulo. Por otra parte, vemos que cuando $r \to 0$, $V' \to \infty$, igualmente, cuando $r \to \infty$ $V' \to 0^-$.



"Así pues, para energías E_1 la órbita es libre o abierta, la partícula llega desde el infinito, interactúa con la barrera centrífuga y luego se refleja de vuelta hacia el infinito. E_2 es similar a E_1 tan solo que $E=0$.

"Una órbita para E_3 es cerrada y tiene dos puntos de retorno (r_1, r_2) con una distancia mínima y una distancia máxima, la partícula está atrapada en estos dos valores.

"En el caso E_4 la órbita corresponde al mínimo de $V'(r)$, no hay suficiente energía para variar el valor de r; esto corresponde a órbitas circulares.

"El caso de E_5 no es posible."

Ahora bien, teniendo que

$$E = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{l^2}{2mr^2} - \frac{k}{r} \quad y \quad u = \frac{1}{r}, \ \frac{dr}{dt} = \frac{dr}{d\theta}\cdot\frac{d\theta}{dt}$$

$$\frac{d^2u}{d\theta^2} + u = \frac{k}{l^2} \longrightarrow u(\theta) = \frac{k}{l^2}(1 + e\cos\theta)$$

$$r(\theta) = \frac{l^2}{k(1+e\cos\theta)}$$

$$\downarrow$$

$$e = \sqrt{1 + \frac{2El^2}{mk^2}}$$

Siendo e la excentricidad

→ Tenemos que,

- $E < 0$, $0 \leq e < 1$ Elipses
- $e = 0$ Círculo
- $E = 0$, $e = 1$ Parábola
- $E > 0$, $e > 1$ Hipérbolas

• Ejercicio #9

Teniendo que, para el caso gravitacional,

$$V_{ij} = -\frac{K}{|\vec{r_i} - \vec{r_j}|}$$

y teniendo que el teorema del Virial plantea que,

$$\langle T \rangle = -\frac{1}{2} \langle \sum_{i<j} \vec{F_{ij}} \cdot \vec{r_{ij}} \rangle = \frac{1}{2} \langle \sum_i \frac{\partial V_i}{\partial r_i} r_i \rangle$$

Tenemos entonces,

$$T_1 = \frac{1}{2} m_1 \dot{\vec{r_1}}^2, \quad T_2 = \frac{1}{2} m_2 \dot{\vec{r_2}}^2, \quad T_3 = \frac{1}{2} m_3 \dot{\vec{r_3}}^2$$

$$\langle T \rangle = \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{1}{2} m |\vec{V_1}(t)|^2 + \frac{1}{2} m |\vec{V_2}(t)|^2 + \frac{1}{2} m |\vec{V_3}(t)|^2 \right) dt$$

Ahora bien, si tenemos que,

$$\vec{F_{ij}} = -\frac{\vec{r_{ij}}}{|r_{ij}|^{\circ}} V_{ij}'(|r_{ij}|^{\circ}) \Rightarrow \sum_{i<j} \vec{F_{ij}} \cdot \vec{r_{ij}}$$

$$\Rightarrow \sum_{i<j} -\frac{\vec{r_{ij}}}{|r_{ij}|^{\circ}} V_{ij}'(|r_{ij}|^{\circ}) \cdot \vec{r_{ij}}$$

$$\frac{1}{2} \langle \sum_{ij} \frac{\partial V_i}{\partial r_i} r_i \rangle \longleftarrow \Rightarrow -\sum_{ij} \frac{d V_{ij}(|r_{ij}|)}{d(|r_{ij}|)} \cdot \frac{|r_{ij}|^2}{|r_{ij}|^{\circ}}$$

Si establecemos que, $r_1 = |\vec{r_1} - \vec{r_2}|$, $r_2 = |\vec{r_2} - \vec{r_3}|$
$r_3 = |\vec{r_3} - \vec{r_1}|$.

$$\sum_i \frac{\partial V_i}{\partial r_i} r_i = 2\left(\frac{K}{r_1} + \frac{K}{r_2} + \frac{K}{r_3} \right) = 2G\left(\frac{m_1 m_2}{r_1} + \frac{m_2 m_3}{r_2} + \frac{m_3 m_1}{r_3} \right)$$

Tomando el promedio tenemos,

$$\langle \sum_i \frac{\partial V_i}{\partial r_i} r_i \rangle = \frac{2G}{3} \left(\frac{m_1 m_2}{r_1} + \frac{m_2 m_3}{r_2} + \frac{m_3 m_1}{r_3} \right)$$

$$\langle T \rangle = \frac{G}{3} \left(\frac{m_1 m_2}{r_1} + \frac{m_2 m_3}{r_2} + \frac{m_3 m_1}{r_3} \right)$$

• Ejercicio # 10

Teniendo la ecuación de órbita

$$\frac{l^2 u^2}{m}\left(\frac{d^2u}{d\theta}+u\right)=f(u)$$

en donde, $u(\theta)=\frac{1}{r(\theta)}$, la órbita será simétrica para un punto de retorno si $u(\theta)$ y $u(-\theta)$ son soluciones de la ecuación.

Bajo la transformación $\theta \to -\theta$, vemos que,

$$\frac{du(-\theta)}{d\theta}=-\frac{du(\theta)}{d\theta} \quad y \quad \frac{d^2u(-\theta)}{d\theta^2}=\frac{d^2u(\theta)}{d\theta^2}$$

Así, tenemos que,

$$\frac{l^2u^2}{m}\left(\frac{d^2u(-\theta)}{d\theta^2}+u(-\theta)\right)=f(u(-\theta))$$

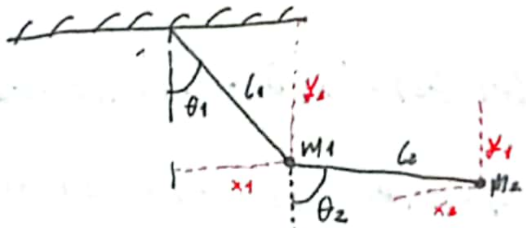
Tomando en cuenta las consideraciones previas y que $u(\theta)=u(-\theta)$, obtenemos,

$$\frac{l^2u^2(\theta)}{m}\left(\frac{d^2u(\theta)}{d\theta^2}+u(\theta)\right)=f(u(\theta))$$

El sistema es simétrico con respecto a θ. En el punto de retorno $\frac{du}{d\theta}=0$, la partícula comienza a reiniciar la órbita de manera simétrica.

• Ejercicio # 11

El péndulo doble,



Escogiendo como coordenadas generalizadas a $q_1=\theta_1$, $q_2=\theta_2$, resolviendo obtenemos que,

$$x_1=l_1\operatorname{sen}\theta_1 \quad\to\quad \dot{x}_1=l_1\dot{\theta}_1\cos\theta_1$$
$$y_1=-l_1\cos\theta_1 \quad\to\quad \dot{y}_1=l_1\dot{\theta}_1\operatorname{sen}\theta_1$$

$$x_2=l_1\operatorname{sen}\theta_1+l_2\operatorname{sen}\theta_2 \quad\to\quad \dot{x}_2=l_1\dot{\theta}_1\cos\theta_1+l_2\dot{\theta}_2\cos\theta_2$$
$$y_2=-l_1\cos\theta-l_2\cos\theta_2 \quad\to\quad \dot{y}_2=l_1\dot{\theta}_1\operatorname{sen}\theta_1+l_2\dot{\theta}_2\operatorname{sen}\theta_2$$

$$T_1 = \frac{1}{2} m_1 V_1^2 = \frac{1}{2} m_1 (\dot{x}_1^2 + \dot{y}_1^2) = \frac{1}{2} m_1 l_1^2 \dot{\theta}_1^2$$

$$T_2 = \frac{1}{2} m_2 V_2^2 = \frac{1}{2} m_2 (\dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2) = \frac{1}{2} m_2 [l_1^2 \dot{\theta}^2 + l_2^2 \dot{\theta}^2 + 2 l_1 l_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 (\cos\theta_1 \cos\theta_2 + \operatorname{sen}\theta_1 \operatorname{sen}\theta_2)]$$

$$= \frac{1}{2} m_2 (l_1^2 \dot{\theta}_1^2 + l_2^2 \dot{\theta}_2^2 + 2 l_1 l_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \cos(\theta_1 - \theta_2))$$

$$V_1 = m_1 g y_1 = - m_1 g l_1 \cos\theta_1$$

$$V_2 = m_2 g y_2 = - m_2 g (l_1 \cos\theta_1 + l_2 \cos\theta_2)$$

Entonces, el Lagrangiano del sistema será, $\mathcal{L} = T - V \Rightarrow$

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(m_1 + m_2) l_1^2 \dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 l_2^2 \dot{\theta}_2^2 + m_2 l_1 l_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \cos(\theta_1 - \theta_2)$$

$$+ (m_1 + m_2) g l_1 \cos\theta_1 + m_2 g l_2 \cos\theta_2$$

Aplicando Euler-Lagrange para θ_1 y θ_2 tenemos que,

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}_1}\right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta_1} = 0$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta_1} = - m_1 l_1 l_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \operatorname{sen}(\theta_1 - \theta_2) - (m_1 + m_2) g l_1 \operatorname{sen}\theta_1$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}_1} = (m_1 + m_2) l_1^2 \dot{\theta}_1 + m_2 l_1 l_2 \dot{\theta}_2 \cos(\theta_1 - \theta_2)$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}_1}\right) = (m_1 + m_2) l_1^2 \ddot{\theta}_1 + m_2 l_1 l_2 [\ddot{\theta}_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) - \dot{\theta}_2 (\dot{\theta}_1 - \dot{\theta}_2) \operatorname{sen}(\theta_1 - \theta_2)]$$

$$\therefore (m_1 + m_2) l_1^2 \ddot{\theta} + m_2 l_1 l_2 [\ddot{\theta}_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) - \dot{\theta}_2 (\dot{\theta}_1 - \dot{\theta}_2) \operatorname{sen}(\theta_1 - \theta_2)] + m_1 l_1 l_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \operatorname{sen}(\theta_1 - \theta_2)$$

$$+ (m_1 + m_2) g l_1 \operatorname{sen}\theta_1 = 0$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot\theta_2}\right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta_2} = 0$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta_2} = m_2 l_1 l_2 \dot\theta_1 \dot\theta_2 \operatorname{sen}(\theta_1-\theta_2) - m_2 g\, l_2 \operatorname{sen}\theta_2$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot\theta_2} = m_2 l_2^2 \dot\theta_2 + m_2 l_1 l_2 \dot\theta_1 \cos(\theta_1-\theta_2)$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot\theta_2}\right) = m_2 l_2^2 \ddot\theta_2 + m_2 l_1 l_2 [\ddot\theta_1 \cos(\theta_1-\theta_2) - \dot\theta_1(\dot\theta_1-\dot\theta_2)\operatorname{sen}(\theta_1-\theta_2)]$$

$$\therefore\ m_2 l_2^2 \ddot\theta_2 + m_2 l_1 l_2 [\ddot\theta_1 \cos(\theta_1-\theta_2) - \dot\theta_1(\dot\theta_1-\dot\theta_2)\operatorname{sen}(\theta_1-\theta_2)] - m_2 l_1 l_2 \dot\theta_1\dot\theta_2 \operatorname{sen}(\theta_1-\theta_2)$$
$$+ m_2 g l_2 \operatorname{sen}\theta_2 = 0$$

Reexpresando $\Delta\theta = \theta_1 - \theta_2$ y $\mu = 1 + m_1/m_2$, se tiene que,

$$\ddot\theta_1 = \frac{g(\operatorname{sen}\theta_2 \cos\Delta\theta - \mu \operatorname{sen}\theta_1) - (l_2\dot\theta_2^2 + l_1\dot\theta_1^2\cos\Delta\theta)\operatorname{sen}\Delta\theta}{l_1(\mu - \cos^2\Delta\theta)}$$

$$\ddot\theta_2 = \frac{g\mu(\operatorname{sen}\theta_1 \cos\Delta\theta - \operatorname{sen}\theta_2) - (\mu l_1\dot\theta_1^2 + l_2\dot\theta_2^2\cos\Delta\theta)\operatorname{sen}\Delta\theta}{l_2(\mu - \cos^2\Delta\theta)}$$

- Ejercicio # 12

Teniendo la función de disipación $R = \frac{k\dot y^2}{2}$ y estableciendo que $-\frac{\partial V}{\partial y} = -mg$ con $V(y) = mgy$, tenemos que,

$$\mathcal{L} = T - V = \frac{1}{2} m\dot y^2 - mgy$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot y}\right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y} = -\frac{\partial R}{\partial \dot y}$$

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y} = -mg \\ &\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot y} = m\dot y \Rightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot y}\right) = m\ddot y \\ &\frac{\partial R}{\partial \dot y} = k\dot y \end{aligned}\right\}\quad \begin{aligned} &m\ddot y + mg = -k\dot y \\ &m\ddot y + k\dot y = mg \end{aligned}$$

O bien, $m\dot v + kv = mg$

$$m\dot{v} + Kv = -mg$$

$$\dot{v} + \frac{K}{m}v = -g$$

$$\downarrow$$

$$\mu(t) = e^{\int \frac{K}{m} dt} = e^{\frac{K}{m}t}$$

$$\underbrace{e^{\frac{K}{m}t}\dot{v} + \frac{K}{m}e^{\frac{K}{m}t}v}_{\frac{d}{dt}\left(ve^{\frac{K}{m}t}\right)} = -ge^{\frac{K}{m}t}$$

$$\frac{d}{dt}\left(ve^{\frac{K}{m}t}\right) = -ge^{\frac{K}{m}t}$$

$$\downarrow$$

$$ve^{\frac{K}{m}t} = \int -ge^{\frac{K}{m}t}dt \} \rightarrow -g\frac{m}{K}e^{\frac{K}{m}t} + C$$

$$ve^{\frac{K}{m}t} = -g\frac{m}{K}e^{\frac{K}{m}t} + C$$

$$v(t) = -g\frac{m}{K} + Ce^{-\frac{K}{m}t}$$

Si tenemos que $v=0$ cuando $t=0$, entonces,

$$0 = -g\frac{m}{K} + Ce^{0} \longrightarrow C = \frac{gm}{K}$$

$$v(t) = \frac{gm}{K}\left(1 - e^{-\frac{K}{m}t}\right)$$

Vemos que al aplicar el límite cuando $t \to \infty$ tenemos,

$$\lim_{t\to\infty} \frac{gm}{K}\left(1 - e^{-\frac{K}{m}t}\right) = \frac{gm}{K}\left(1 - \cancel{e^{-\frac{K}{m}t}}\right)$$

Podemos concluir entonces que la velocidad máxima será,

$$v(t) \approx \frac{gm}{K}$$

· Ejercicio # 13 (Problema 5)

Teniendo que $V(x) = -Fx$ y $x(t) = A + Bt + Ct^2$, con $x=0$ a $x=a$ en t_0. Planteando el lagrangiano tenemos que,

$$\dot{x}(t) = B + 2Ct \quad , \quad x(t) = A + Bt + Ct^2$$

$$T = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 \quad , \quad V = -Fx$$

$$T = \frac{1}{2} m (B + 2Ct)^2 \quad , V = -F(A + Bt + Ct^2)$$

$$\mathcal{L} = T - V = \frac{1}{2} m (B^2 + 4BCt + 4C^2t^2) + F(A + Bt + Ct^2)$$

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} mB^2 + 2mBCt + 2mC^2t^2 + FA + FBt + FCt^2$$

Ahora bien, teniendo que,

$$t = 0, x(0) = A = 0 ,$$

$$t = t_0, x(t_0) = \cancel{A} + Bt_0 + Ct_0^2 = a$$

vemos que $A = 0$ y $Bt_0 + Ct_0^2 = a$

Aplicando Euler Lagrange obtenemos que,

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}}\right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} = 0$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}} = m(B + 2Ct) = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}}\right) = 2mC$$

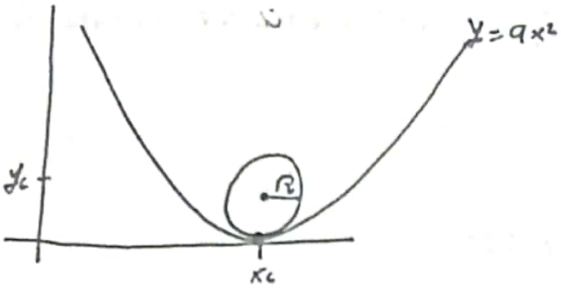
$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} = F$$

$$F = 2mC$$

Así, tenemos que,

$$A = 0 \qquad B = \frac{a}{t_0} - \frac{Ft_0}{2m} \qquad C = \frac{F}{2m}$$

• Ejercicio # 13 (Problema 25)



Si el disco rueda sin resbalar, el punto de contacto entre el disco y la parábola se mueve a lo largo de la parábola conforme el disco rueda. Así, la condición de rodadura implica que la longitud de arco trazado por el disco es igual a la distancia recorrida a lo largo de la parábola.

Para el centro del disco tendríamos,

$$(x_c, y_c) = (x, ax^2+R)$$

Ahora bien, se tiene que satisfacer que $s=R\theta$, y la longitud de arco para la parábola será,

$$s = \sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx = \sqrt{1+(2ax)^2}\,dx = \sqrt{1+4a^2x^2}\,dx$$

donde podemos ver que,

$$R\,d\theta = \sqrt{1+4a^2x^2}\,dx$$

$$R\,d\theta - \sqrt{1+4a^2x^2}\,dx = 0$$

La condición para que el disco toque la parábola únicamente en un punto es que la curvatura de la parábola y del disco en un punto sean las mismas, esto es,

$$\kappa_{disco} = \frac{1}{R} \quad , \quad \kappa_{parábola} = \frac{y''}{(1+(y')^2)^{3/2}} \quad \text{con } y'=2ax \text{ y } y''=2a$$

$$\kappa = \frac{2a}{(1+4a^2x^2)^{3/2}}$$

$$\frac{1}{R} = \frac{2a}{(1+4a^2x^2)^{3/2}}$$