Temas selectos de cosmología: Teoría de Perturbaciones. PCF/UG/Cinvestav. Semestre 2025-2
Tarea 3
fecha de entrega: 2 de junio de 2025

1. La expansión de trazadores en operadores de bias necesaria para el espectro de potencias a 1-loop en SPT es

$$\begin{aligned} 1+\delta_X(\boldsymbol{x},t) &= \sum_{\mathcal{O}} c_{\mathcal{O}}(t)\mathcal{O}(\boldsymbol{x},t) \\ &= c_0 + c_\delta \delta + \frac{c_{\delta^2}}{2}\delta^2 + \frac{c_{s^2}}{2}s^2 + \frac{c_{\delta^3}}{3!}\delta^3 + \frac{c_{\delta s^2}}{2}\delta\, s^2 + c_\psi \psi + c_{st} st + \frac{1}{3!}c_{s^3}s^3 \end{aligned}$$

donde δ_X es la sobredensidad de número trazadores X (por ejemplo, galaxias) y δ la sobredensidad de energía de materia. Es decir que tenemos los siguientes operadores $\mathcal{O}$

At least 1st order	$\delta,$
At least 2nd order	$\delta^2, s^2,$
At least 3rd order	$\delta^3, s^2\delta, \psi, st, s^3$

A primer orden el único operador es $\mathcal{O}^{(1)} = \delta^{(1)}$. A segundo orden tenemos,

$$O^{(2)}(k) = \left\{\delta^{(2)}, \delta^{2(2)}, s^{2(2)}\right\},$$

mientras a tercer orden

$$O^{(3)}(k) = \left\{\delta^{(3)}, \delta^{2(3)}, s^{2(3)}, \delta^{(3)}, (s^2\delta_m)^{(3)}, \psi^{(3)}, (st)^{(3)}, s^{3(3)}\right\}.$$

Cada operador se puede escribir en espacio de Fourier a segundo y tercer orden en teoría de perturbaciones como

$$O^{(2)}(k) = \int_{\boldsymbol{k}_{12}=\boldsymbol{k}} K_O^{(2)}(k_1,k_2)\delta^{(1)}(k_1)\delta^{(1)}(k_2),$$

y

$$O^{(3)}(k) = \int_{\boldsymbol{k}_{123}=\boldsymbol{k}} K_O^{(3)}(k_1,k_2,k_3)\delta^{(1)}(k_1)\delta^{(1)}(k_2)\delta^{(1)}(k_3).$$

Demuestra que los kernels a segundo orden son

$$K_\delta^{(2)}(k_1,k_2) = F_2(k_1,k_2), \quad K_{\delta^2}^{(2)}(k_1,k_2) = 1, \quad K_{s^2}^{(2)}(k_1,k_2) = S_2(k_1,k_2),$$

con

$$S_2(k_1,k_2) = \frac{(k_1\cdot k_2)^2}{k_1^2 k_2^2} - \frac{1}{3}.$$

Demuestra que los kernels a tercer orden son

$$
\begin{aligned}
K_\delta^{(3)}(\boldsymbol{k}_1,\boldsymbol{k}_2,\boldsymbol{k}_3) &= F_3(\boldsymbol{k}_1,\boldsymbol{k}_2,\boldsymbol{k}_3),\\
K_{\delta^2}^{(3)}(\boldsymbol{k}_1,\boldsymbol{k}_2,\boldsymbol{k}_3) &= 2F_2(\boldsymbol{k}_2,\boldsymbol{k}_3),\\
K_{\delta^3}^{(3)}(\boldsymbol{k}_1,\boldsymbol{k}_2,\boldsymbol{k}_3) &= 1,\\
K_{s^2}^{(3)}(\boldsymbol{k}_1,\boldsymbol{k}_2,\boldsymbol{k}_3) &= 2S_2(\boldsymbol{k}_1,\boldsymbol{k}_2+\boldsymbol{k}_3)F_2(\boldsymbol{k}_2,\boldsymbol{k}_3),\\
K_{\delta s^2}^{(3)}(\boldsymbol{k}_1,\boldsymbol{k}_2,\boldsymbol{k}_3) &= S_2(\boldsymbol{k}_1,\boldsymbol{k}_2),\\
K_{s^3}^{(3)}(\boldsymbol{k}_1,\boldsymbol{k}_2,\boldsymbol{k}_3) &= S_3(\boldsymbol{k}_1,\boldsymbol{k}_2,\boldsymbol{k}_3),\\
K_{st}^{(3)}(\boldsymbol{k}_1,\boldsymbol{k}_2,\boldsymbol{k}_3) &= S_2(\boldsymbol{k}_1,\boldsymbol{k}_2+\boldsymbol{k}_3)\left(G_2(\boldsymbol{k}_2,\boldsymbol{k}_3)-F_2(\boldsymbol{k}_2,\boldsymbol{k}_3)\right),\\
K_\psi^{(3)}(\boldsymbol{k}_1,\boldsymbol{k}_2,\boldsymbol{k}_3) &= G_3(\boldsymbol{k}_1,\boldsymbol{k}_2,\boldsymbol{k}_3)-F_3(\boldsymbol{k}_1,\boldsymbol{k}_2,\boldsymbol{k}_3)\\
&\quad -2F_2(\boldsymbol{k}_2,\boldsymbol{k}_3)\left(\frac{2}{7}S_2(\boldsymbol{k}_1,\boldsymbol{k}_2+\boldsymbol{k}_3)-\frac{4}{21}\right),
\end{aligned}
$$

con

$$
S_3(\boldsymbol{k}_1,\boldsymbol{k}_2,\boldsymbol{k}_3) = \left(\frac{k_1^i k_1^j}{k_1^2}-\frac{1}{3}\delta_{ij}\right)\left(\frac{k_2^j k_2^k}{k_2^2}-\frac{1}{3}\delta_{jk}\right)\left(\frac{k_3^k k_3^i}{k_3^2}-\frac{1}{3}\delta_{ki}\right).
$$

2. En un sondeo de galaxias la transformación entre coordenadas en espacio real y de redshift está dada por

$$
\boldsymbol{s} = \boldsymbol{x} + \frac{v(\boldsymbol{x})\cdot\hat{\boldsymbol{z}}}{aH}\hat{\boldsymbol{z}} \tag{1}
$$

donde $\boldsymbol{x}=(x,y,z)$ y hemos escogido a $\hat{\boldsymbol{z}}=\hat{\mathbf{n}}$ la dirección del observador al sondeo. $v(\boldsymbol{x})$ es la velocidad peculiar de la galaxia, a el factor de escala y H la tasa de expansión del universo.

i) Muestra que el determinante del Jacobiano de la transformación de coordenadas está dado por $|\partial\boldsymbol{s}/\partial\boldsymbol{x}| = 1+\partial_z v_z/(aH)$, donde ∇_z y $v_z(\boldsymbol{x})$ son la derivada y la componente de la velocidad peculiar a lo largo de la dirección $\hat{\boldsymbol{z}}$, respectivamente.

ii) Usando la conservación de número de galaxias: $(1+\delta_s(\boldsymbol{s}))d^3s = (1+\delta(\boldsymbol{x}))d^3x$, muestra que la relación entre sobredensidades de número de galaxias es

$$
\delta_s(\boldsymbol{s}) = (1+\delta(\boldsymbol{x}))\left|\frac{\partial\boldsymbol{s}}{\partial\boldsymbol{x}}\right|^{-1} - 1 \tag{2}
$$

y muestra que en espacio de Fourier está dada por

$$
\delta_s(\boldsymbol{k}) = \int d^3x\left\{\delta(\boldsymbol{s})-\frac{\partial_z v_z}{aH}\right\}e^{-i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}-ik\mu v_z/(aH)} \tag{3}
$$

donde la transformación de Fourier se debe tomar con respecto a las coordenadas de redshift, i.e., para una función $f(\boldsymbol{s})$, tenemos $f(\boldsymbol{k}) = \int d^3s\, e^{-i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{s}}f(\boldsymbol{s})$

iii) Finalmente muestra que el espectro de potencias en espacio de Fourier se puede escribir como

$$
P_s(\boldsymbol{k}) = \int d^3x\, e^{-i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}}\langle e^{ik\mu f\Delta u_z}\big(\delta(\boldsymbol{x}_1)+f\partial_z v_z(\boldsymbol{x}_1)\big)\big(\delta(\boldsymbol{x}_2)+f\partial_z v_z(\boldsymbol{x}_2)\big)\rangle \tag{4}
$$

donde $u_z(\boldsymbol{x}) = -v_z(\boldsymbol{x})/(aHf)$ y $\Delta u_z(\boldsymbol{x}) = u_z(\boldsymbol{x}_2)-u_z(\boldsymbol{x}_1)$ y $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}_2-\boldsymbol{x}_1$.
Ésta es la ecuación (4) del paper de TNS https://arxiv.org/abs/1006.0699

3. Para este ejercicio deberás usar `CAMB` o `CLASS`, junto con algún código que calcule la no linealidades del espectro de potencias en espacio de redshift, como `FOLPS` https://github.com/henoriega/FOLPS-nu.

   Encuentra el cambio del espectro de potencias con respecto a distintos parámetros cosmológicos. Es decir, calcula numéricamente

$$\frac{1}{P_A(k)}\frac{\partial P_A(k)}{\partial \Omega_i}, \tag{5}$$

   donde A hace referencia a tres casos distintos: $(A : \ell = 0)$ el monopolo del espectro de potencias del espectro de potencias a 1 loop en espacio de redshift, $(A : \ell = 2)$ el cuadrupolo y $(A = L)$ el espectro de potencias lineal en espacio real.

   Considera los parámetros cosmológicos:

$$\Omega_i = \{\omega_c, \omega_b, n_s, A_s, h, M_\nu, N_{\text{eff}}\}$$

   Los parámetros que no cambien mantenlos con una cosmología fija de Planck. Utiliza redshift $z = 0.5$.