T E O R Í A   C L Á S I C A   D E   C A M P O S

Tarea 5 (lunes 12 de mayo a las 23:59)

1. Construir la tabla de multiplicar de todos los grupos discretos de 1, 2, 3 y 4 elementos. Demostrar que solo hay un grupo posible para los casos con 1, 2 y 3 elementos, mientras que existen dos grupos posibles de 4 elementos. Identificar cuáles son estos grupos.

2. Demostrar que el producto de dos matrices ortogonales con determinante unidad sigue siengo una matriz ortogonal con determinante unidad (i.e. propiedad de cerradura para el grupo de rotaciones).

3. Sean $R_{ij}(\vec{\theta})$ y $R_{ij}(\vec{\theta}')$ las matrices asociadas a dos rotaciones de "ángulos" $\vec{\theta}$ y $\vec{\theta}'$ en N-dimensiones, respectivamente. Demostrar que, a segundo orden en los ángulos se satisface la identidad:

$$R_{ij}(\vec{\theta}')R_{jk}(\vec{\theta})R^{-1}_{k\ell}(\vec{\theta}') = R_{i\ell}(\vec{\theta}) + A_{ij}(\vec{\theta}')A_{j\ell}(\vec{\theta}) - A_{ij}(\vec{\theta})A_{j\ell}(\vec{\theta}'). \tag{1}$$

   Identificar el conmutador de los generadores del grupo como una medidada de su no-conmutatividad. Demostrar que el conmutador $[J_i, J_j]$ puede expresarse en la forma

$$[J_i, J_j] = ic_{ijk}J_k, \tag{2}$$

   con c_{ijk} unos coeficientes reales y antisimétricos en ij.

4. Determinar el álgebra de Lie del grupo $SO(3)$.

5. Encontrar las condiciones sobre las componentes de la matriz $L^{\mu}{}_{\nu}(v_0)$ que se obtienen a partir de imponer $\eta^{\mu\nu}L^{\alpha}{}_{\mu}(v_0)L^{\beta}{}_{\nu}(v_0) = \eta^{\alpha\beta}$, en donde $x'^{\mu} = L^{\mu}{}_{\nu}(v_0)x^{\nu}$. Demostrar que éstas son las mismas condiciones que nos aseguran que la ecuación de onda se mantiene forma-invariante. Si imponemos $\eta_{\mu\nu}L^{\mu}{}_{\alpha}(v_0)L^{\nu}{}_{\beta}(v_0) = \eta_{\alpha\beta}$, ¿las condiciones son las mismas?

6. A partir de un boost infinitesimal en 1+1 dimensiones, construir las expresión para una transformación de Lorentz finita.

7. Demostrar que el conjunto de todas las transformaciones de Lorentz y el conjunto de todas las transformaciones de Poincaré tienen estructura de grupo.