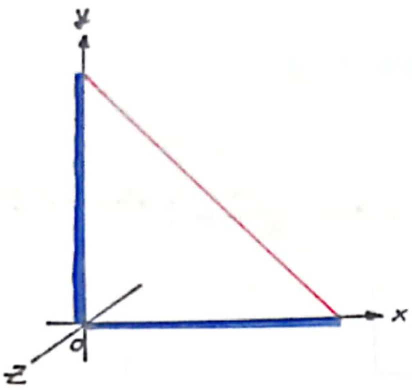
Tarea 4: Mecánica clásica

Holman David Quintero Salazar

• Ejercicio # 1:



El tramo rojo, correspondiente a la hipotenusa del triángulo isósceles rectángulo, puede ser definido como $y = a - x$. Además, si el cuerpo rígido es planar, esto quiere decir que la masa del objeto está distribuida sobre el plano x-y y su grosor en la dimensión z es cero. Así pues, podemos establecer que,

$$\rho = \frac{M}{V} = \frac{M}{A \cdot h} = \frac{M}{\frac{a \cdot a}{2} \cdot h} = \frac{2M}{a^2} \cdot \frac{1}{h}$$

dado que $h = 0$, podríamos imponer que $\rho = \frac{2M}{a^2}\delta(z)$, teniendo que,

$$h(0) = \int_{-\infty}^{\infty} h(z)\,\delta(z)\,dz$$

Ahora bien, si consideramos que el momento de inercia se puede definir en función de x, y y z, (x_1, x_2, x_3) tal que,

$$I_{ij} = \int dx \int dy \int dz\, \rho\, ((x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)\delta_{ij} - x_i x_j)$$

Computando tenemos que

$$I_{xx} = \int_0^a dx \int_0^{a-x} dy \int_{-\infty}^{\infty} dz\, \frac{2M}{a^2}\delta(z)\, ((\cancel{x^2} + y^2 + z^2)1 \cancel{- x^2})$$

$$I_{xx} = \int_0^a dx \int_0^{a-x} dy \int_{-\infty}^{\infty} dz\, \frac{2M}{a^2}\delta(z)\,(y^2 + z^2)$$

$$I_{xx} = \frac{2M}{a^2}\int_0^a dx \int_0^{a-x} dy \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} dz\, \delta(z)\,(y^2+z^2)} \longrightarrow \int_{-\infty}^{\infty} (y^2+z^2)\delta(z)\,dz = y^2$$

$$= \frac{2M}{a^2}\int_0^a dx \int_0^{a-x} dy\, y^2$$

$$= \frac{2M}{a^2}\int_0^a dx\, \frac{(a-x)^3}{3}$$

$$= \frac{2M}{a^2}\int_0^a dx\, \frac{a^3 - 3a^2x + 3ax^2 - x^3}{3} = \frac{2M}{a^2}\cdot\frac{a^4}{12} = \boxed{\frac{Ma^2}{6}}$$

$$I_{xy} = \int_0^a dx \int_0^{a-x} dy \int_{-\infty}^{\infty} dz \, \frac{2M}{a^2} \delta(z) \left(\cancel{(x^2+y^2+z^2)\, 0} - xy \right)$$

$$I_{xy} = \int_0^a dx \int_0^{a-x} dy \int_{-\infty}^{\infty} dz \, \frac{2M}{a^2} \delta(z) - xy$$

$$I_{xy} = -\frac{2M}{a^2} \int_0^a dx \int_0^{a-x} dy \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} xy \, \delta(z) dz} \longrightarrow \int_{-\infty}^{\infty} xy \, \delta(z) dz = xy$$

$$= -\frac{2M}{a^2} \int_0^a dx \int_0^{a-x} xy \, dy \Big\} \longrightarrow \int_0^{a-x} xy \, dy = x \int_0^{a-x} y \, dy = x \frac{(a-x)^2}{2} = \frac{xa^2 - 2ax^2 + x^3}{2}$$

$$= -\frac{2M}{a^2} \int_0^a dx \, \frac{xa^2 - 2ax^2 + x^3}{2} = -\frac{2M}{a^2} \cdot \frac{a^4}{24} = \boxed{-\frac{a^2 M}{12}}$$

$$I_{xz} = \int_0^a dx \int_0^{a-x} dy \int_{-\infty}^{\infty} dz \, \frac{2M}{a^2} \delta(z) \left(\cancel{(x^2+y^2+z^2)\, 0} - zy \right)$$

$$I_{xz} = \int_0^a dx \int_0^{a-x} dy \int_{-\infty}^{\infty} \frac{2M}{a^2} \delta(z) - zy \, dz$$

$$I_{xz} = -\frac{2M}{a^2} \int_0^a dx \int_0^{a-x} dy \cancel{\int_{-\infty}^{\infty} zy \, \delta(z) dz}^{\,0}$$

$$I_{xz} = \boxed{0}$$

Para los dos ~~ejes~~ restantes tendríamos que, ejes

$$I_{xx} = \frac{Ma^2}{6} \qquad I_{yx} = -\frac{Ma^2}{12} \qquad I_{zx} = 0$$

$$I_{xy} = -\frac{Ma^2}{12} \qquad I_{yy} = \frac{Ma^2}{6} \qquad I_{zy} = 0$$

$$I_{xz} = 0 \qquad I_{yz} = 0 \qquad I_{zz} = \frac{Ma^2}{3}$$

Finalmente tendríamos que,

$$I = \frac{Ma^2}{12} \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

Por último, tendríamos que los ejes principales de este sistema vienen designados por los eigen~~valores~~ y eigenvectores de la matriz momento de inercia. Con esto en mente tendremos que,

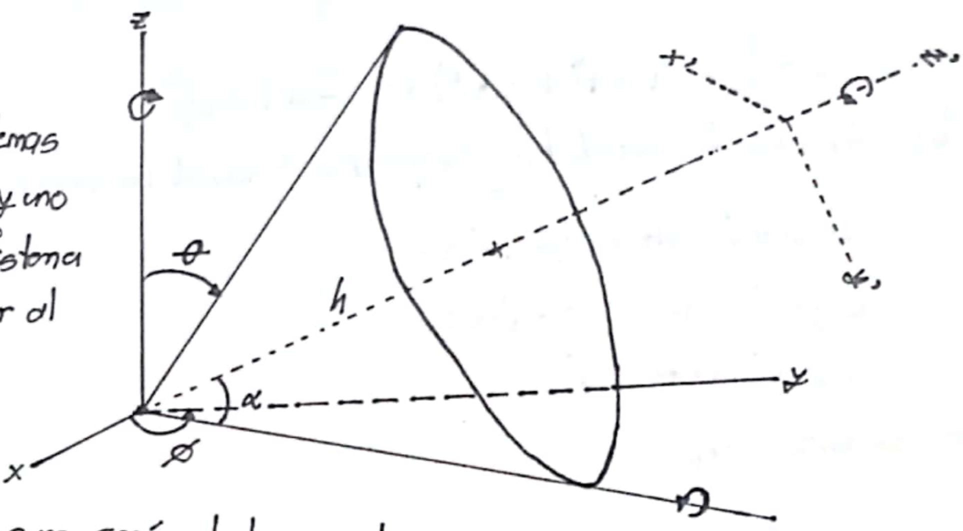
$$\lambda_1 = \frac{Ma^2}{3}, \quad V_1 = (0,0,1)$$

$$\lambda_2 = \frac{Ma^2}{4}, \quad V_2 = (-1,1,0)$$

$$\lambda_3 = \frac{Ma^2}{12}, \quad V_3 = (1,1,0)$$

• Ejercicio #2:

Podemos visualizar el problema fijando dos sistemas de coordenadas, uno ~~fijo~~ estático y uno primado. El eje z en el sistema estático será perpendicular al plano de movimiento $x-y$.



El eje de simetría del cono será a lo largo del eje primado z'. El ángulo θ entre z y z' es constante y obedece a $\theta = \frac{\pi}{2} - 2\alpha$. De igual manera vamos a tener que, dada la condición de rodadura para $\dot{\phi} = -\operatorname{sen}\alpha\,\dot{\psi}$. Ahora bien, para calcular los momentos de inercia principales consideraremos que $I_{x'} = I_{y'}$, por simetría, y $I_{x'}$ y $I_{z'}$, en coordenadas cilíndricas vendrán dados por;

$$I_{z'} = \rho \iiint (x'^2 + y'^2)\, dx'dy'dz'$$

$$I_{z'} = \rho \int_0^{2\pi}\int_0^h\int_0^{z'\tan\alpha} r'(r'^2\cos^2\theta' + r'^2\operatorname{sen}^2\theta')\, dr'dz'd\theta'$$

$$I_{z'} = \rho \int_0^{2\pi}\int_0^h \frac{1}{4} z^4 \tan^4(\alpha)\, dz\, d\theta'$$

$$I_{z'} = \rho \int_0^{2\pi} \frac{1}{20} h^5 \tan^4\alpha\, d\theta'$$

$$I_{z'} = \frac{\rho\pi h^5}{20}\tan^4\alpha$$

$$I_{x'} = \rho \iiint (y')^2 + (z')^2\, dx'dy'dz'$$

$$I_{x'} = \rho \int_0^{2\pi}\int_0^h\int_0^{z'\tan\alpha} r'(r'^2\operatorname{sen}^2\theta' + z'^2)\, dr'dz'd\theta'$$

$$I_{x'} = \rho \int_0^{2\pi}\int_0^h \frac{1}{4} z^4 \tan^2\alpha(\tan^2\alpha\operatorname{sen}^2\theta' + 2)\, dz'$$

$$I_{x'} = \rho \int_0^{2\pi} \frac{1}{20} h^5 \tan^2\alpha(\tan^2\alpha\operatorname{sen}^2\theta' + 2)\, d\theta' = \frac{1}{40}\rho\pi h^5(3\cos 2\alpha + 5)\tan^2\alpha\sec^2\alpha$$

Ahora bien, para hallar la energía cinética tendremos que,

$$T=\frac{1}{2}I_{x'}(\omega_{x'}^2+\omega_{y'}^2)+\frac{1}{2}I_{z'}(\omega_{z'})^2$$

empleando las relaciones de velocidad angular ~~para~~ en función de los ángulos de Euler tendremos,

$$\omega_{x'}=\dot{\phi}\,\text{sen}\,\theta\,\text{sen}\,\psi+\dot{\theta}\cos\psi$$

$$\omega_{y'}=\dot{\phi}\,\text{sen}\,\theta\cos\psi-\dot{\theta}\,\text{sen}\,\psi$$

$$\omega_{z'}=\dot{\phi}\cos\theta+\dot{\psi}$$

las cuales se convierten en,

$$\omega_{x'}=\dot{\phi}\,\text{sen}\,\alpha\,\text{sen}\,\psi+\cancel{\dot{\theta}\cos\psi}$$

$$\omega_{y'}=\dot{\phi}\,\text{sen}\,\alpha\cos\psi-\cancel{\dot{\theta}\,\text{sen}\,\psi}$$

$$\omega_{z'}=\dot{\phi}\cos\alpha+\frac{\dot{\phi}}{\text{sen}\,\alpha}=\dot{\phi}(\cos\alpha-\csc\alpha)$$

Así,

$$T=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{40}\rho\pi h^5(3\cos 2\alpha+5)\tan^2\alpha\sec^2\alpha)\right]\left[(\dot{\phi}\,\text{sen}\,\alpha\,\text{sen}\,\psi)^2+(\dot{\phi}\,\text{sen}\,\alpha\cos\psi)^2\right]$$

$$+\frac{1}{2}\left[\frac{\rho\pi h^5}{20}\tan^4\alpha\right]\left[\dot{\phi}(\cos\alpha-\csc\alpha)\right]^2$$

$$T=\frac{1}{80}\pi h^5\rho(3\cos 2\alpha+5)\tan^4\alpha\,\dot{\phi}^2$$

$$-\frac{1}{20}\pi\dot{\phi}^2h^5\rho\tan^3\alpha+\frac{1}{40}\pi\dot{\phi}^2h^5\rho\,\text{sen}^2\alpha\tan^2\alpha+\frac{1}{40}\pi\dot{\phi}^2h^5\rho\tan^2\alpha\sec^2\alpha$$

$$T=\frac{1}{80}\pi h^5\rho\dot{\phi}^2\tan^4\alpha\,(2\cos^2\alpha+3\cos 2\alpha-4\cot\alpha+2\csc^2\alpha+5)$$

$$T=\frac{\pi h^5\rho}{80}\left(\frac{2\pi}{\tau}\right)^2\tan^4\alpha\,(2\cos^2\alpha+3\cos 2\alpha-4\cot\alpha+2\csc^2\alpha+5)$$

Para el momento angular vamos a tener que,

$$\vec{L} = I_{x'}\omega_{x'}\hat{x}' + I_{x'}\omega_{y'}\hat{y}' + I_{z'}\omega_{z'}\hat{z}'$$

$$\underline{L_{x'}} = \left[\frac{\rho\pi h^5}{40}(3\cos 2\alpha + 5)\tan^2\alpha\sec^2\alpha\right]\left[\dot{\phi}\,\mathrm{sen}\,\alpha\,\mathrm{sen}\,\psi\right]\hat{x}'$$

$$\underline{L_{y'}} = \left[\frac{\rho\pi h^5}{40}(3\cos 2\alpha + 5)\tan^2\alpha\sec^2\alpha\right]\left[\dot{\phi}\,\mathrm{sen}\,\alpha\cos\psi\right]\hat{y}'$$

$$\underline{L_{z'}} = \left[\frac{\rho h^5\pi}{20}\tan^4\alpha\right]\left[\dot{\phi}(\cos\alpha - \csc\alpha)\right]\hat{z}' \quad , \text{con } \dot{\phi} \text{ como } \frac{2\pi}{J}.$$

- Ejercicio #3:

Considerando la expresión

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_j} = Q_j$$

en donde $q_3 = \psi$ y la fuerza generalizada está definida por $Q_j = \vec{F}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j}$, se deben encontrar las ecuaciones de Euler a partir de las ecuaciones de Lagrange. Sabemos que las velocidades angulares de un cuerpo rígido en función de los ángulos de Euler vienen dados por,

$$\omega_1 = \dot{\phi}\,\mathrm{sen}\,\theta\,\mathrm{sen}\,\psi + \dot{\theta}\cos\psi$$
$$\omega_2 = \dot{\phi}\,\mathrm{sen}\,\theta\cos\psi - \dot{\theta}\,\mathrm{sen}\,\psi$$
$$\omega_3 = \dot{\phi}\cos\theta + \dot{\psi}$$

además, la energía cinética en el sistema de coordenadas del cuerpo tiene la forma $T = \frac{1}{2}I_i\omega_i^2$. Sabiendo que $\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial \psi} = \hat{z}' \times \vec{r}_i$, vamos a tener,

$$I_3\frac{d}{dt}\left(\omega_3\frac{\partial \omega_3}{\partial \dot{\psi}}\right) - I_1\omega_1\frac{\partial \omega_1}{\partial \psi} - I_2\omega_2\frac{\partial \omega_2}{\partial \psi} = \vec{F}_i\cdot(\hat{z}'\cdot\vec{r}_i)$$

$$\frac{\partial \omega_1}{\partial \psi} = \dot{\phi}\,\mathrm{sen}\,\theta\cos\psi - \dot{\theta}\,\mathrm{sen}\,\psi \qquad \frac{\partial \omega_1}{\partial \dot{\psi}} = \frac{\partial \omega_2}{\partial \dot{\psi}} = 0, \quad \frac{\partial \omega_3}{\partial \dot{\psi}} = 1$$

$$\frac{\partial \omega_2}{\partial \psi} = -\dot{\phi}\,\mathrm{sen}\,\theta\,\mathrm{sen}\,\psi - \dot{\theta}\cos\psi$$

$$\frac{\partial \omega_3}{\partial \psi} = 0$$

Tendremos además que,

$$\hat{z}'\cdot(\vec{r}_i \times \vec{F}_i) = z'\cdot\vec{N} = N_3$$

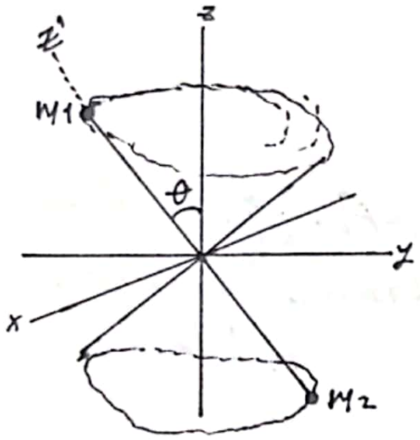
Así pues,

$$I_3\dot{\omega}_3 - \omega_1\omega_1(I_1-I_2) = N_3$$

Permutando obtendremos que,

$$I_2\dot{\omega}_2 - \omega_3\omega_1(I_3-I_1) = N_2$$
$$I_1\dot{\omega}_1 - \omega_2\omega_3(I_2-I_3) = N_1$$

• Ejercicio #4:



Se puede establecer que el eje z' está ubicado a lo largo de las dos masas puntuales. Dado que el momento principal I_3 es nulo porque la masa se distribuye a lo largo del eje z', las [illegible] de las masas en coordenadas del cuerpo son

$$r_1 = \frac{l}{2}\hat{z}' \quad , \quad r_2 = -\frac{l}{2}\hat{z}'$$

Por simetría, $I_1 = I_2$, y el momento principal I_1 será;

$$I_1 = m_1 z_1^2 + m_2 z_2^2 = \frac{1}{2} m l^2$$

Dado que θ es constante, $\dot{\phi}$ también será constante ya que la configuración está dispuesta para rotar uniformemente alrededor de z. Así, $\dot{\psi} = 0$.

Empleando las ecuaciones de Euler tendremos,

$$I_1\dot{\omega}_1 - \omega_2\omega_3 I_1 = N_1$$
$$I_1\dot{\omega}_2 - \omega_1\omega_3 I_1 = N_2$$
$$0 = N_3$$

Usando las expresiones de las velocidades angulares para los ángulos de Euler tendremos,

$$\omega_1 = 0$$
$$\omega_2 = \dot{\phi}\,\mathrm{sen}\,\theta$$
$$\omega_3 = \dot{\phi}\cos\theta$$

De esta manera, se determinan entonces todos los componentes del torque en el sistema de coordenadas del cuerpo.

$$\vec{N} = -\frac{1}{2} m l^2 \dot{\phi}^2 \,\text{sen}\theta \cos\theta \,\hat{x}$$

Ahora bien, si el vector de posición de una partícula es $\vec{r}_1$, entonces el vector de posición de la segunda partícula es $\vec{r}_2 = -\vec{r}_1$. El momento angular del sistema se expresará como,

$$\vec{L} = m\vec{r}_1 \times (\vec{\omega} \times \vec{r}_1) + m\vec{r}_2 \times (\vec{\omega} \times \vec{r}_2) = 2m\vec{r}_1 \times (\vec{\omega} \times \vec{r}_1)$$

donde $\vec{\omega} = \dot{\phi}\hat{z}$ y $r_1 = \frac{l}{2}(\cos\theta\,\hat{z} + \text{sen}\theta\,\text{sen}\phi\,\hat{x} - \text{sen}\theta\cos\phi\,\hat{y})$.

Reemplazando tendremos que

$$\vec{L} = \frac{1}{2} m l^2 \dot{\phi}\left(\hat{z} - \cos\theta(\text{sen}\theta\,\text{sen}\phi\,\hat{x} - \text{sen}\theta\cos\phi\,\hat{y})\right)$$

Entonces, sabiendo que $\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{N}$, vemos que,

$$\vec{N} = -\frac{1}{2} m l^2 \dot{\phi}^2 \,\text{sen}\theta\cos\theta(\cos\phi\,\hat{x} + \text{sen}\phi\,\hat{y})$$

Podemos observar además que, dado que $\psi = 0$, tendremos,

$$A = \begin{bmatrix} \cancelto{1}{\cos\psi}\cos\phi - \cancelto{0}{\cos\theta\,\text{sen}\phi\,\text{sen}\psi} & \cdots & \cdots \\ \cancelto{1}{\cos\psi}\,\text{sen}\phi + \cancelto{0}{\cos\theta\cos\phi\,\text{sen}\psi} & \cdots & \cdots \\ \cancelto{0}{\text{sen}\theta\,\text{sen}\psi} & \cdots & \cdots \end{bmatrix}$$

lo cual corresponde a,

$$\vec{N} = -\frac{1}{2} m l^2 \dot{\phi}^2 \,\text{sen}\theta\cos\theta\,\hat{x},$$

como se esperaba.

• Ejercicio #5:

a) Los momentos de inercia vendrán dados por $I_1 = I_2 \neq I_3$. En el caso de ausencia de torque tendremos que las ecuaciones de Euler vendrán dadas por

$$I_1 \dot{\omega}_1 = \omega_2 \omega_3 (I_1 - I_3)$$
$$I_2 \dot{\omega}_2 = \omega_3 \omega_1 (I_3 - I_1)$$
$$I_3 \dot{\omega}_3 = 0$$

Dado que $\omega_3 = cte$, obtenemos que,

$$\ddot{\omega}_{1,2} + \Omega^2 \omega_{1,2} = 0 \quad , \quad \Omega = \omega_3 \left(\frac{I_3}{I_1} - 1 \right) \quad , I_3 > I_1$$

Por la conservación de la energía sabemos que $\omega_1^2 + \omega_2^2 = cte$, entonces el momento angular $\vec{L}$ rota a partir de un eje de simetría (z') en el sistema de coordenadas del cuerpo con frecuencia Ω. También, dado que θ es constante, debido a que $\vec{\omega} \cdot \vec{L} = cte$, tendremos que,

$$\vec{\omega} = \dot{\phi} \operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\psi \, \hat{x}' + \dot{\phi} \operatorname{sen}\theta \cos\psi \, \hat{y}' + (\dot{\phi}\cos\theta + \dot{\psi}) \hat{z}'$$

$$\vec{\omega} = \omega_0 \cos \Omega t \, \hat{x}' + \omega_0 \operatorname{sen} \Omega t \, \hat{y}' + \omega_3 \hat{z}'$$

$$\vec{L} = \overleftrightarrow{I} \vec{\omega} = \omega_0 I_1 \cos \Omega t \, \hat{x}' + \omega_0 I_1 \operatorname{sen} \Omega t \, \hat{y}' + \omega_3 I_3 \hat{z}'$$

$$\psi = \frac{\pi}{2} - \Omega t$$

Donde ω_0 es la condición inicial. De forma similar, se puede ver que el eje de simetría rota alrededor del momento angular en el sistema de coordenadas espaciales. Ahora bien, sabiendo que $\omega_3 = \dot{\phi}\cos\theta + \dot{\psi}$, obtendremos que,

$$\dot{\phi} = \frac{1}{\cos\theta} \left(\omega_3 - \omega_3 \left(1 - \frac{I_3}{I_1} \right) \right) = \frac{\omega_3 I_3}{\cos\theta \, I_1}$$

b) Teniendo que,

$$\omega_x = \dot{\psi}\,\text{sen}\theta\,\text{sen}\phi + \dot{\theta}\cos\phi = -\Omega\,\text{sen}\theta\,\text{sen}\phi$$
$$\omega_y = -\dot{\psi}\,\text{sen}\theta\cos\phi + \dot{\theta}\,\text{sen}\phi = \Omega\,\text{sen}\theta\cos\phi$$
$$\omega_z = \dot{\psi}\cos\theta + \dot{\phi} = -\Omega\cos\theta + \dot{\phi} = cte$$

Veremos que $\vec{\omega}$ rota sobre el momento angular $\hat{z}' = |\vec{L}|\hat{z}$ con frecuencia $\dot{\phi}$, tendremos pues que

$$\text{sen}\theta' = \frac{\sqrt{\omega_x^2 + \omega_y^2}}{|\vec{\omega}|} = \frac{\Omega\,\text{sen}\theta}{|\vec{\omega}|}$$

y

$$\text{sen}\,\theta'' = \frac{\omega_0}{|\vec{\omega}|} = \frac{\sqrt{\omega_{x'}^2 + \omega_{y'}^2}}{|\vec{\omega}|} = \frac{\dot{\phi}\,\text{sen}\theta}{|\vec{\omega}|}$$

O bien,

$$\text{sen}\theta' = \frac{\Omega}{\dot{\phi}}\,\text{sen}\theta''$$

La distancia d entre el eje de rotación y el eje de momento angular en la superficie de la Tierra estará dado por

$$d = R\,\text{sen}\theta' = R\cos\theta\left(1 - \frac{I_1}{I_3}\right)\text{sen}\theta''$$

Si empleamos que $R\,\text{sen}\theta'' \approx 5m$, $I_1/I_3 \approx 0.997$ y que $\cos\theta \approx 1$, obtendremos

$$d \approx 1.5cm$$

c) Supóngase que se coloca un cono con la punta en el origen y el eje de simetría a lo largo del eje z, luego se coloca el segundo a lo largo del eje z' y se deja que las dos puntas coincidan en el origen. De los incisos anteriores se observa que, a medida que el segundo cono rota alrededor del primero, el ángulo θ entre z y z' es constante, al igual que un cono simétrico de rotación libre.

El eje de la velocidad angular ω rota alrededor de z con la misma velocidad angular, $\dot{\phi}$, y dado que el eje de simetría z' rota alrededor del eje z con la misma velocidad angular, $\dot{\phi}$, el ángulo θ entre z y z' igualmente θ' es constante. Así pues, se puede ver que se conserva la analogía de los dos casos.

Igualmente, se sabe que el elipsoide de inercia es simétrico al eje z', por lo tanto, las curvas en el plano invariante y el elipsoide de inercia son círculos. Para un observador en el sistema de coordenadas del cuerpo, el vector ρ traza un cono en el elipsoide de inercia, de manera similar, para un observador en el sistema de coordenadas espaciales, ρ traza un cono en el plano invariante. Con esto, se puede concluir que tiene dos conos, uno rodando sobre el otro.

Ejercicio 6:

Para la peonza simétrica el tensor de inercia en el marco de coordenadas del cuerpo es diagonal, esto es,

$$I = diag(I_1, I_1, I_3)$$

donde $I_1 = I_2$ por simetría, y I_3 corresponde al eje principal (alineado con $\hat{z}'$)

El momento angular en el sistema de coordenadas del cuerpo es

$$\vec{L} = I\vec{\omega} = I_1(\omega_1 \hat{x}' + \omega_2 \hat{y}') + I_3 \omega_3 \hat{z}'$$

En la ausencia de fuerzas externas tendremos que,

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = 0 \implies \vec{L} = cte.$$

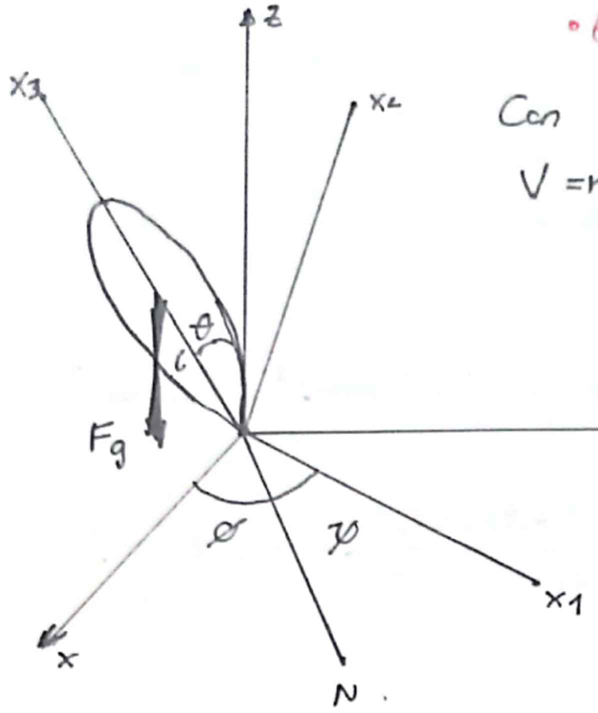
Así, vemos que,

$$\vec{\omega}_\perp = \frac{\vec{L}\cdot\vec{\omega}}{|\vec{L}|^2}\vec{L} \quad y \quad \vec{\omega}_3 = (\vec{\omega}\cdot\hat{z}')\hat{z}'$$

Por lo que,

$$\vec{\omega} = \vec{\omega}_\perp + \vec{\omega}_3$$

Si $\vec{L}$ y $\hat{z}'$ no son colineales, $\vec{\omega}_\perp$ y $\vec{\omega}_3$ son ortogonales. $\vec{\omega}_\perp$ representa la precesión de la peonza asociada a la conservación del momento angular y $\vec{\omega}_3$ corresponde al giro alrededor del eje de simetría.



• Ejercicio #7:

Con $M=\mu$, $I_1=I_2$, rotación en z, veremos que
$V=mgx=\mu g l\cos\theta$, así, igualmente

$$T_{ROT}=\sum_{\mu}\frac{I_\mu \omega_\mu^2}{2}$$

$$=\frac{1}{2}I_1(\dot{\phi}^2\sin^2\theta+\dot{\theta}^2)+\frac{1}{2}I_3(\dot{\phi}\cos\theta+\dot{\psi})^2$$

$$T=\frac{1}{2}mv^2=\frac{1}{2}\mu(l\dot{\theta})^2+\frac{1}{2}\mu(l\sin\theta\,\dot{\phi})^2$$

A partir de lo anterior obtenemos que,

$$\mathcal{L}=T_{Rot}+T-V$$

$$\mathcal{L}=\frac{1}{2}\left[(I_1+\mu l^2)(\dot{\theta}^2+\dot{\phi}^2\sin^2\theta)+I_3(\dot{\psi}+\dot{\phi}\cos\theta)^2-mgl\cos\theta\right]$$

Con esto tendremos que

- $P_\psi=\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\psi}}=2I_3(\dot{\psi}+\dot{\phi}\cos\theta)=cte \Rightarrow M_3=I_3(\dot{\psi}+\dot{\phi}\cos\theta)$

- $P_\phi=\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\phi}}=(I_1+\mu l^2)\sin^2\theta\,\dot{\phi}+I_3(\dot{\psi}+\dot{\phi}\cos\theta)\cos\theta \Rightarrow M_z=cte$

Obtenemos entonces,

$$P_\psi=I_3(\dot{\psi}+\dot{\phi}\cos\theta)=I_3\left(\dot{\psi}+\left(\frac{M_z-M_3\cos\theta}{(I_1+\mu l^2)\sin^2\theta}\right)\cos\theta\right)=M_3$$

$$\dot{\psi}=\frac{M_3}{I_3}-\cos\theta\,\frac{M_z-M_3\cos\theta}{(I_1+\mu l^2)\sin^2\theta}$$

$$P_\phi = (I_1 + \mu l^2)\,\text{sen}^2\theta\,\dot\phi + M_3\cos\theta = M_2$$

$$\dot\phi = \frac{M_2 - M_3\cos\theta}{(I_1+\mu l^2)\,\text{sen}^2\theta}$$

Para encontrar la expresión integral veremos que,

$$E = \frac{1}{2}\left[(I_1+\mu l^2)(\dot\theta^2 + \dot\phi^2\,\text{sen}^2\theta) + I_3(\dot\psi + \dot\phi\cos\theta)^2 + mgl\cos\theta\right]$$

Si tenemos que

$$E' = E - \frac{M_3^2}{2I_3} - \mu g l \quad y \quad U_{ef} = \frac{(M_2 - M_3\cos\theta)^2}{2(I_1+\mu l^2)\,\text{sen}^2\theta} - \mu g l(1-\cos\theta)$$

Tendremos que,

$$E' = \frac{1}{2}(I_1+\mu l^2)\dot\theta^2 + U_{ef}(\theta)$$

$$\dot\theta = \sqrt{\frac{E' - U_{ef}(\theta)}{\frac{1}{2}(I_1+\mu l^2)}}$$

$$dt = \int \frac{d\theta}{\sqrt{\frac{E' - U_{ef}(\theta)}{\frac{1}{2}(I_1+\mu l^2)}}}$$

• Ejercicio #9.

a) Para un cuerpo rígido, existirá la condición de equilibrio cuando tanto la fuerza neta como el torque resultante de las fuerzas externas aplicadas sobre él son nulos. Esto es,

$$\vec F = \sum \vec f = 0, \quad \vec N = \sum \vec r \times \vec f = 0.$$

$\vec f$ será entonces las fuerzas externas incidiendo sobre el cuerpo y $\vec r$ el vector de posición de aplicación de las fuerzas.

b)

Considerando las ligaduras de la forma $\sum_i C_{\alpha i}\dot{q}_i = 0$. Tendremos que,

$$\delta t \cdot \sum_i C_{\alpha i}\dot{q}_i = 0$$

$$\sum_i C_{\alpha i}\,\delta q_i = 0$$

$$\sum_i C_{\alpha i}\lambda_\alpha\,\delta q_j = 0$$

Así,

$$\delta S = \int \sum_i \delta q_i \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i}\right) + C_{\alpha i}\lambda_\alpha\right]$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j}\right) + C_{\alpha i}\lambda_\alpha = 0 \Rightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j}\right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_j} = C_{\alpha i}\lambda_\alpha$$

• Ejercicio #10

a)

Teniendo dos marcos, uno fijo O, y uno que posee traslación y rotación, tendremos que,

$$\vec{r}_{fijo} = \vec{R}_{fijo} + \vec{r}'_{mov} \Rightarrow \vec{r}_0 = \vec{R}_0 + \vec{r}'_M$$

$$\left(\frac{d\vec{r}}{dt}\right)_{fijo} = \left(\frac{d\vec{R}}{dt}\right)_{fijo} + \left(\frac{d r'_{mov}}{dt}\right)$$

$$\left(\frac{d\vec{r}}{dt}\right)_{fijo} = \left(\frac{d\vec{R}}{dt}\right)_{fijo} + \left(\frac{d\vec{r}''}{dt}\right)_{rot} + \vec{\omega} \times \vec{r}'_{mov}$$

$$\vec{V}_{fijo} = \vec{V}_{fijo} + \vec{V}''_{rot} + \vec{\omega} \times \vec{r}'_{mov}$$

$\vec{V}_{fijo}$ es la velocidad medida con respecto a la base del marco inercial

$\vec{V}_{fijo}$ es la velocidad del origen del marco no inercial trasladándose con respecto al origen del marco inercial

$\vec{V}''_{rot}$ es la velocidad de una partícula con respecto al marco no inercial giratorio, el cual se traslada y gira

$\vec{\omega} \times \vec{r}_{rot}$ es el movimiento del marco giratorio con respecto al sistema primado que se traslada.

Cambiando nomenclatura tendremos que

$$\vec{V}_0 = \vec{V}_0 + \vec{V}_R'' + \vec{\omega} \times \vec{r}_M''$$

Con el lagrangiano de la forma

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} m \vec{v} \cdot \vec{v} - U(r)$$

tendremos que,

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} m \vec{V}_0 \cdot \vec{V}_0 - U(r)$$

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} m [\vec{V}_0 + \vec{V}_R'' + \vec{\omega} \times \vec{r}_M''] \cdot [\vec{V}_0 + \vec{V}_R'' + \vec{\omega} \times \vec{r}_M''] - U(r)$$

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} m [\vec{V}_0 \cdot \vec{V}_0 + \vec{V}_R'' \cdot \vec{V}_R'' + 2\vec{V}_0 \cdot \vec{V}_R'' + 2\vec{V}_0 \cdot (\vec{\omega} \times \vec{r}_M'') + 2\vec{V}_R'' \cdot (\vec{\omega} \times \vec{r}_M'') + (\vec{\omega} \times \vec{r}_M'')^2]$$

$$- U(r).$$

De lo cual se puede derivar,

- Momento canónico.

$$\vec{P}_R'' = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \vec{V}_R''} = m[\vec{V}_0 + \vec{V}_R'' + \vec{\omega} \times \vec{r}_M'']$$

- Ecuaciones de movimiento

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \vec{V}_R''} = m[\vec{A}_0 + \vec{a}_R'' + (\vec{\omega} \times \vec{V}_R'') + (\dot{\vec{\omega}} \times \vec{r}_M'')]_R$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \vec{r}'} = -m[(\vec{\omega} \times \vec{V}_0) - (\vec{\omega} \times \vec{V}_R'') - \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}_M'')]_R - \nabla U$$

Tenemos entonces,

$$m\vec{a}_R'' = -\nabla U - m[\vec{A}_0 + (\vec{\omega} \times \vec{V}_0) + 2(\vec{\omega} \times \vec{V}_R'') + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}_M'') + (\dot{\vec{\omega}} \times \vec{r}_M'')]_R$$

la fuerza externa será $\vec{F}_0 = -\nabla U$. Por otro lado, se puede decir que $\vec{A}_0 = [\vec{A}_0 + (\vec{\omega} \times \vec{V}_0)]_R$, entonces, la fuerza efectiva final será

$$\vec{F}^{eff}_R = m\vec{a}''_R = \vec{F}' - m[\vec{A}_0 + 2\vec{\omega}\times\vec{v}''_R + \vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{r}'_M) + (\dot{\omega}\times\vec{r}'_M)]$$

en donde tendremos que,

$\vec{F}^{eff}_M = -m\vec{A}_0$ => aceleración traslacional: Fuerza inercial experimentada en un sistema que se acelera linealmente y donde $\vec{A}_0$ es con respecto al sistema fijo.

$\vec{F}^{eff}_{cor} = -2m\vec{\omega}\times\vec{v}''_R$ => Fuerza de Coriolis: Fuerza que está presente sólo cuando la partícula se mueve en el marco giratorio.

$\vec{F}^{eff}_{cf} = -m\vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{r}'_M)$ => Fuerza centrífuga: Fuerza debido a la aceleración centrípeta de la partícula debido a la rotación del eje movil alrededor del eje de rotación

$\vec{F}^{eff}_{az} = -m\dot{\vec{\omega}}\times\vec{r}'_M$ => Fuerza transversal (Azimutal): Término debido a la aceleración de la partícula producto a la aceleración angular de los ejes giratorios.

b)

Ahora bien, si se toma $\omega = cte$ y $\vec{A}_0 = 0$, tendremos

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}mv^2 + m\vec{v}\cdot\vec{\omega}\times\vec{r}' + \frac{1}{2}m(\vec{\omega}\times\vec{r}')^2 - U$$

$$F = m\frac{d\vec{v}}{dt} = -\frac{\partial U}{\partial r} + 2m\vec{v}\times\vec{\omega} + m\vec{\omega}\times(\vec{r}'\times\vec{\omega})$$

donde tendremos,

$$\vec{p} = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\vec{v}} = m\vec{v} + m\vec{\omega}\times\vec{r}'$$

Si tenemos que $E = \vec{p}\cdot\vec{v} - \mathcal{L}$, vemos que

$$E = mv^2 + m\vec{v}\cdot\vec{\omega}\times\vec{r}' - \frac{1}{2}mv^2 - mv\cdot\vec{\omega}\times\vec{r}' - \frac{1}{2}m(\vec{\omega}\times\vec{r}')^2 + U$$

$$E = \frac{1}{2}mv^2 \underbrace{- \frac{1}{2}m(\vec{\omega}\times\vec{r}')^2}_{\text{Energía potencial centrífuga}} + U$$

c) Ahora bien, teniendo nuevamente un sistema de la forma

$$\vec{V_0'} = \vec{V_0} + \vec{\omega} \times \vec{r'}$$

Sustituyendo obtenemos,

$$E = \frac{1}{2} m \vec{V_0'}^2 - m\vec{V_0'} - \vec{\omega} \times \vec{r'} + U = \frac{1}{2} m v_0^2 + U - m r' \times \vec{v_0} \cdot \vec{\omega}$$

haciendo que $\vec{L} = \vec{r'} \times \vec{p}$ y $E_0 = \frac{1}{2} m v_0^2 + U$, veremos que

$$E = E_0 - \vec{L} \cdot \vec{\omega}$$

d)

- Dado que la Tierra gira alrededor de su eje, genera un sistema de referencia no inercial para un observador terrestre $\Rightarrow$ Centrífuga $\Rightarrow$ La forma achatada de la Tierra dado que esta aceleración tiene dirección radial hacia afuera
  Coriolis $\Rightarrow$ Desviación de vientos en la atmosfera según el hemisferio.

- Carrusel con velocidad angular constante $\Rightarrow$ Centrífuga: Se experimenta como una fuerza hacia afuera en el plano del carrusel
  Coriolis: Afecta a un objeto en movimiento relativo dentro del carrusel.

- Cintas transportadoras o sistemas de flujo en rotación $\Rightarrow$ Centrífuga: Se genera un gradiente de presión que empuja el fluido hacia las regiones externas.
  Coriolis: Influye en las trayectorias dentro del fluido.

- Satélites y objetos en órbita. $\Rightarrow$ Centrífuga: Es lo que balancea la gravedad en órbitas estables. La fuerza centrífuga efectiva es igual a la fuerza gravitacional.
  Coriolis: Si un satélite se mueve hacia el norte o sur en una órbita inclinada, la aceleración de Coriolis afecta su trayectoria.