Para hallar la fuerza, debemos encontrar la fuerza que hubiera producido el volumen de la oquedad y luego sustraer su contribución a la fuerza total de la esfera sin oquedad. Para ello, se debe emplear el teorema de Gauss contemplando que el campo gravitatorio es conservativo, esto es,

1

$$\vec{g} = -\nabla\phi \quad , \nabla^2\phi = 4\pi G\rho(\vec{r})$$

Entonces, aplicando el teorema de la divergencia tenemos que,

$$\int_A \vec{g}\cdot d\vec{A} = \int_V \nabla\cdot\vec{g}\, dV$$

desarrollando tenemos,

$$\int_V \nabla\cdot\vec{g}\, dV = \int_V \nabla\cdot(-\nabla\phi)\, dV = \int_V -\nabla^2\phi\, dV = -\int_V 4\pi G\rho(\vec{r})\, dV$$

donde $\vec{r}$ será el vector de posición dentro del volumen de integración, así pues,

$= -4\pi G\int_V \rho(\vec{r})\, dV = -4\pi G M_{enc}(r)\,\hat{r}$, donde Menc es la masa encerrada acotada por un vector unitario $\hat{r}$ que apunta hacia fuera.

Por otro lado,

$$\int_A \vec{g}\cdot d\vec{A} = \int_A \vec{g}\cdot\hat{n}\, dA = g(r)\int_A dA = g(r)\cdot 4\pi r^2$$

Así pues,

$$g(r)\, 4\pi r^2 = -4\pi G M_{enc}(r)\,\hat{r}$$

$$g(r) = -\frac{4\pi G M_{enc}(r)}{4\pi r^2}\,\hat{r} = -\frac{G M_{enc}(r)}{r^2}\,\hat{r}$$

Nuestro campo gravitatorio para una masa encerrada será

$$\vec{g} = -\frac{G M_{enc}(r)}{r^2}\,\hat{r}$$

Ahora bien, considerando que, según la segunda ley de Newton, la partícula de masa m sufrirá una fuerza proporcional a

$$\vec{F} = m\vec{a}$$

tenemos que,

$$\vec{F} = m\vec{a} = m\vec{g} = m \cdot -\frac{GM_{enc}(r)}{r^2}\hat{r}$$

$$\vec{F} = -\frac{GM_{enc}(r)m}{r^2}\hat{r}$$

La fuerza neta de atracción que experimentará la partícula será,

$$F_N = F_S - F_H$$

donde F_N es la fuerza neta, F_S es la esfera sólida sin oquedad y F_H la contribución del volumen de la oquedad (masa encerrada).

Tenemos que,

$$F_S = \frac{GMm}{d^2} \quad y \quad F_H = \frac{GM_H m}{(d-R/2)^2}$$

esto teniendo en cuenta que, para simetrías esféricas, la fuerza gravitacional actúa como si toda la masa estuviera concentrada en un punto en el centro de la distribución de masa (teorema del cascarón).

M_H será entonces (considerando $\rho = \rho_H$),

$$\frac{3M}{4\pi R^3} = \frac{3M_H}{4\pi(R/2)^3} \Rightarrow M_H = \frac{M}{8}$$

Desarrollando tenemos que,

$$F_N = F_S - F_H = \frac{GMm}{d^2} - \frac{GMm}{\underbrace{8(d-R/2)^2}}$$

$$8\left(d-\frac{R}{2}\right)^2 = 8\left(d^2 - dR + \frac{R^2}{4}\right)$$

$$= 2d^2\left(4 - \frac{4R}{d} + \frac{R^2}{d^2}\right)$$

$$= 2d^2\left(2 - \frac{R}{d}\right)^2$$

$$F_N = \frac{GMm}{d^2}\left(1 - \frac{1}{2\left(2-\frac{R}{d}\right)^2}\right)$$

La condición para que ocurra movimiento armónico simple implica que existe una fuerza de restitución proporcional al desplazamiento, esto es,

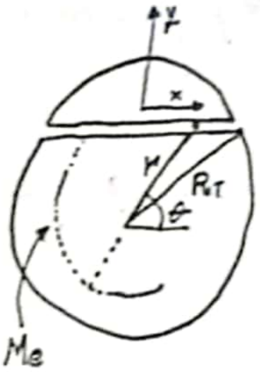
$$\vec{F} = -Kx$$

o bien,

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{K}{m}x \Rightarrow a_x = -\omega^2 x \quad \text{con } \omega = \sqrt{\frac{K}{m}},$$ siendo ω la velocidad angular de oscilación

a su vez que $T = \frac{2\pi}{\omega}$ es el periodo de oscilación.

Teniendo en cuenta lo anterior, es pertinente fijar un sistema coordenado tal que,



donde R_T es el radio de la Tierra y r es la posición de la masa m.

Por el teorema del cascarón esférico de Newton sabemos que la fuerza gravitacional será proporcional a la masa M_e dentro de una región esférica de radio r, esto es (considerando densidad uniforme),

$$\vec{F} = -\frac{M_e m G}{r^2}\hat{r}$$

$$\vec{F} = -\frac{M_T r^3}{R_T^3}\cdot\frac{Gm}{r^2}\hat{r} \quad \Leftarrow \quad \begin{array}{|l} M_T = \rho_T \frac{4}{3}\pi R_T^3, \\ M_e = \rho_e \frac{4}{3}\pi r^3, \\ \quad \text{con } \rho_T = \rho_e \\ M_e = \frac{M_T r^3}{R_T^3} \end{array}$$

$$\vec{F} = -\frac{GM_T m}{R_T^3} r\hat{r}$$

Si se restringe el movimiento de la partícula al eje x, tenemos que,

$$F_x = -\frac{GM_T m}{R_T^3} r\cos\theta = -\frac{GM_T m}{R_T^3}x$$

o lo que es lo mismo,

$$F = -\frac{4\pi}{3}G\rho m x$$

Como se puede observar en este último resultado, la fuerza calculada cumple con la condición para satisfacer movimiento armónico simple, así pues, desarrollando se tiene que,

$$F = -\frac{4\pi}{3}G\rho m x = m a_x \Rightarrow a_x = -\frac{4\pi}{3}G\rho x,$$

teniendo en cuenta que $a_x = -\omega^2 x$ para MAS, desarrollando se tiene que,

$$-\omega^2 x = -\frac{4\pi}{3} G\rho x$$

$$\omega^2 = \frac{4\pi}{3} G\rho$$

Entonces

$$\omega = \sqrt{\frac{4\pi}{3} G\rho} = 2\sqrt{\frac{\pi}{3} G\rho}$$

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{2\sqrt{\frac{\pi}{3} G\rho}} = \frac{\sqrt{3}\,\pi}{\sqrt{\pi G\rho}} = \frac{\sqrt{3\pi}}{\sqrt{G\rho}} = \sqrt{\frac{3\pi}{G\rho}}$$

Ahora bien, si tenemos en cuenta que en el MAS la velocidad máxima es proporcional a

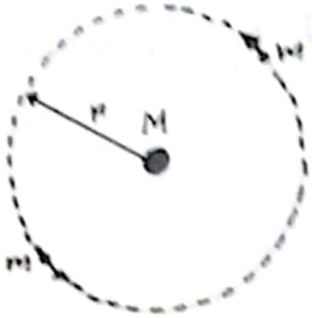
$$V_{max} = \omega A$$

donde A es la magnitud máxima con respecto al equilibrio (la amplitud) tenemos que, para una cuerda,

$$V_{max} = 2\sqrt{\frac{\pi}{3} G\rho}\; r_b \cos\theta$$

donde r_b es la longitud máxima que alcanza la masa m en el eje x a lo largo del ducto y que está supeditado entre $0 < \theta < \pi$.

Por otro lado, vemos que cuando el ducto atraviesa un diámetro) $|\cos(0)| = |\cos(\pi)| = 1$ y r_b se convierte efectivamente en R_T por lo que la velocidad máxima es mayor. Igualmente, vemos que, cuando $r_b = R_T$, la masa encerrada es mayor y la fuerza decae en proporción a $\vec{F} \propto R_T^2$ y no en función a $\vec{F} \propto R_T^3$, como en el caso de la cuerda.



Si el sistema está en equilibrio y la orbita de una de las estrellas de masa m es circular, esto quiere decir que la fuerza neta gravitacional que sufre por la otra estrella de masa m y la estrella de masa M, es equivalente a la fuerza centrípeta que experimenta. Así pues,

3

$$F_{g\,NETA} = \frac{GMm}{r^2} + \frac{Gmm}{(2r)^2}$$

$$= \frac{GMm}{r^2} + \frac{Gm^2}{4r^2}$$

$$F_{g\,NETA} = F_{centrípeta}$$

$$\frac{GMm}{r^2} + \frac{Gm^2}{4r^2} = m\frac{v^2}{r}$$

La expresión para el periodo en movimiento circular uniforme es,

$$T = \frac{2\pi r}{v}$$

Así, despejando v, obtenemos

$$\frac{Gm}{r^2}\left(M + \frac{m}{4}\right) = m\frac{v^2}{r} \Rightarrow \sqrt{\frac{G(M+m/4)}{r}} = v$$

Reemplazando,

$$T = 2\pi r \cdot (G(M+m/4)/r)^{-1/2}$$

$$T = 2\pi r \cdot \frac{1}{\sqrt{\frac{G(M+m/4)}{r}}}$$

$$T = 2\pi r \cdot \frac{1}{\sqrt{\frac{G(4M+m)}{4r}}}$$

$$T = 2\pi r \cdot \frac{1}{\frac{\sqrt{G(4M+m)}}{\sqrt{4r}}} \Rightarrow T = 2\pi r \cdot \frac{\sqrt{4r}}{\sqrt{G(4M+m)}}$$

$$T = \frac{4\pi r\sqrt{r}}{\sqrt{G(4M+m)}}$$

$$T = \frac{4\pi r\, r^{1/2}}{\sqrt{G(4M+m)}} \Rightarrow T = \frac{4\pi r^{3/2}}{\sqrt{G(4M+m)}}$$

$$T = 4\pi\sqrt{\frac{r^3}{G(4M+m)}}$$

Para hallar la fuerza en los tres puntos dada la distribución de masa, debemos emplear el teorema de Gauss para la gravedad. Así pues, considerando que $\vec{g}$ es el campo gravitacional, tenemos,

$$\vec{g} = -\nabla\phi \quad , \quad \nabla^2\phi = 4\pi G\rho(\vec{r})$$

4

aplicando el teorema de la divergencia obtenemos,

$$\underbrace{\int_A \vec{g}\cdot d\vec{A}} = \underbrace{\int_V \nabla\cdot\vec{g}\, dV}$$

$$\int_A \vec{g}\cdot d\vec{A} = \int_A \vec{g}\cdot\hat{n}\, dA = g(r)\int_A dA$$

$$= g(r)\cdot 4\pi r^2$$

*Para una superficie esférica

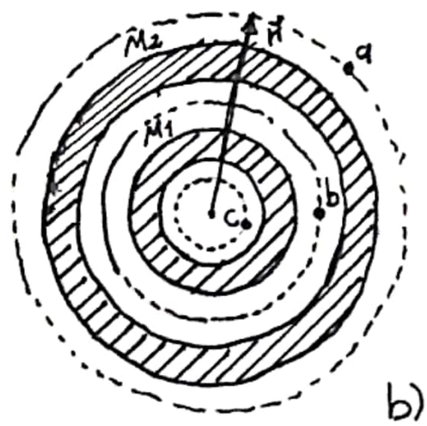
$$\int_V \nabla\cdot\vec{g}\, dV = \int \nabla\cdot(-\nabla\phi)\, dV = \int -\nabla^2\phi\, dV = -\int 4\pi G\rho(\vec{r})\, dV$$

$$= -4\pi G\int_V \rho(\vec{r})\, dV = -4\pi G M_{enc}(r)\hat{r}$$

*Menc será la masa encerrada acotada por el vector unitario $\hat{r}$, que apunta hacia afuera.

Así,

$$g(r)4\pi r^2 = -4\pi G M_{enc},$$



Lo que corresponde ahora será hallar el campo gravitatorio $\vec{g}$ según la masa encerrada para cada uno de los puntos y su superficie de acotación.

a)

$$g(r)\cdot 4\pi a^2 = -4\pi G(M_1+M_2)$$

$$g(r) = -\frac{G(M_1+M_2)}{a^2} \Rightarrow \vec{F} = m\vec{a} = m\vec{g}$$

$$\vec{F_a} = -\frac{G(M_1+M_2)m}{a^2}$$

b)

$$g(r)\cdot 4\pi b^2 = -4\pi G M_1$$

$$g(r) = -\frac{GM_1}{b^2} \Rightarrow \vec{F} = m\vec{a} = m\vec{g}$$

$$F_b = -\frac{GM_1 m}{b^2}$$

c)

$$g(r)\cdot 4\pi c^2 = -\cancel{4\pi G}(0)$$

$g(r)=0 \rightarrow$ No hay masa encerrada, por tanto el campo gravitacional es cero, Por consiguiente, $\vec{F_c}=0$.