Temas selectos de cosmología: Teoría de Perturbaciones.
PCF, UG, Cinvestav, UMSNH, enero-junio 2025
Tarea 1
fecha de entrega: 11 de marzo de 2025

1. Considera un fluido perfecto y verifica que las componentes espaciales de la ecuación de conservación $\nabla_\mu T^{\mu\nu} = 0$ en el límite newtoniano llevan a

$$\partial_t \mathbf{v} + (\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{v} = -\nabla \phi_N - \frac{1}{\rho} \nabla \mathcal{P},$$

   donde ϕ_N es el potencial Newtoniano. A esta ecuación se le conoce como ecuación de Euler.

   Analiza la componente '0' (i.e., $\nabla_\mu T^{\mu 0} = 0$) en este mismo límite.

2. Considera un fluido perfecto con ecuación de estado $\mathcal{P} = w\rho$ medida por un observador con cuadrivelocidad $(1, \vec{0})$ en un espacion de Minkowski. Demuestra que para otro observador $v^\mu = (\gamma, \gamma v^i)$, con una velocidad relativa v y un factor de Lorentz $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-v^2}}$, la densidad y la presión transforman como

$$\begin{aligned} \rho|_v &= \gamma^2 \rho + \mathcal{P}(\gamma^2 - 1) = \rho[\gamma^2 + w(\gamma^2 - 1)] \\ 3\mathcal{P}|_v &= (\rho + \mathcal{P})(\gamma^2 - 1) + 3\mathcal{P} = \rho[(1 + w)(\gamma^2 - 1) + 3w] \end{aligned}$$

$$w|_v = \frac{\mathcal{P}|_v}{\rho|_v} = \frac{1}{3} \frac{(1 + w)(\gamma^2 - 1) + 3w}{\gamma^2 + w(\gamma^2 - 1)}$$

   ¿Para qué valores de w se obtiene $w|_v = w$? Es decir, encuentra los valores para los que el parámetro de la ecuación de estado es un invariante de Lorentz.

   Demuestra que cuando $w < -1$ siempre habrá observadores que midan una densidad de energía negativa.

3. *(Neutrinos masivos)* Realiza una gráfica log-log de la razón entre las densidades de neutrinos (puedes asumir que sólo una generación es masiva) y de fotones, $\rho_\nu(a)/\rho_\gamma(a)$, en función del factor de escala, para $M_\nu = 0.01\,\text{eV}$, $M_\nu = 0.1\,\text{eV}$ y $m_\nu = 1\,\text{eV}$. Esto muestra cuándo los neutrinos masivos dejan de ser relativistas. Tip: revisa la sección 2.2.4 del texto de Dodelson & Schmidt (2020) y en particular la figura 2.5.

   Muestra que la densidad de energía de cada especie de neutrinos es

$$\begin{aligned} \rho_\nu(z \gg z_{\rm nr}) &= \frac{7\pi^2}{120} T_{\nu,0}^4 (1 + z)^4, \\ \rho_\nu(z \ll z_{\rm nr}) &= \frac{m_\nu}{93.14\,h^2\,\text{eV}} \frac{3H_0^2}{8\pi G} (1 + z)^3. \end{aligned}$$

   Esto muestra que la abundancia de neutrinos masivos hoy en día está dado por

$$\Omega_\nu^0 = \frac{\sum m_\nu}{93.14\,h^2\,\text{eV}}$$

4. Encuentra el número de onda que iguala el inverso de la tasa de Hubble comóvil ($\mathcal{H} = aH$) en la época de la igualdad. Es decir, define $k_{\text{eq}} = a_{\text{eq}} H_{\text{eq}}$. Y muestra que

$$k_{\text{eq}} = \sqrt{\frac{2\Omega_m H_0^2}{a_{\text{eq}}}}.$$

Usando la temperatura del CMB $T_0 = 2.726\,\text{K}$, obten que

$$k_{\text{eq}} = 0.073\,\text{Mpc}^{-1}\,\Omega_m h^2.$$

Esta escala corresponde al máximo en el espectro de potencias.

5. Considera una cosmología dada por el mejor ajuste a Planck 2018 (ver última columna de la tabla 2 de https://arxiv.org/abs/1807.06209). **i)** Obtén el espectro de potencias para materia para los corrimientos al rojo $z = 50, 10, 5, 1$ y 0 usando un código Boltzmann-Einstein como CAMB o CLASS. **ii)** Calcula la función de crecimiento lineal $D_+(z)$ a esos mismos corrimientos al rojo con la convención de $D_+(z=0) = 1$. **iii)** Considera el espectro de potencias que encontraste en i) a $z = 0$, y reescalalo usando la función de crecimiento lineal para obtener los espectros de potencias a $z = 50, 10, 5$ y 1. i.e., encuentra $P_L(z) = D_+^2(z) P_L(z=0)$. **iv)** Compara los espectros obtenidos en i) y iii) graficando su diferencia relativa $\Delta P_L / P_L$ para cada uno de los redshifts $z = 50, 10, 5$ y 1.

6. Graficar el espectro de potencias de materia lineal en espacio real $P_L(k)$, para distintas abundancias de bariones $\omega_b = \Omega_b h^2 = 0.022, 0.019, 0.025$ a redshift $z = 0$ dejando fijo $h = 0.677$. Escribe un pequeño código en el lenguaje que prefieras, para encontrar la función de correlación $\xi_L(r)$ en cada caso, o usa el que se dio en clase. Grafica las funciones de correlación para cada uno de los casos considerados. Después de esto, encuentra el horizonte de sonidos en la época del drag r_s^{drag}, y verifica que el pico de BAO para cada una de las funciones de correlación se localiza a esta escala.