Ejercicio #1

Tema:

Fecha:

Materia:

a) Teniendo en cuenta que la vida media para los mesones π^+ se expresa como, $t_{1/2} = 18\times10^{-9}s$. Si no hay dilatación temporal la mitad de estas partículas alcanzará una distancia de 5.4 metros según

$$d = c \cdot t_{1/2} = 3\times10^{8} m/s \cdot 18\times10^{-9} s$$

$$d = 54\times10^{-1} m \rightarrow 5.4\, m$$

b. Ahora bien, considerando el caso donde la velocidad de los mesones π^+ es de $0.9978c$ con respecto a un marco en reposo se tiene que, el factor entre la distancia predicha sin dilatación temporal y considerando efectos relativistas es,

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \quad , \quad \beta = \frac{v}{c}$$

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{0.9978\cancel{c}}{\cancel{c}}\right)^2}} = 15.083$$

Así pues, desde el marco en reposo se tiene que,

$$\Delta t = \gamma \Delta t' \text{, por tanto,}$$

$$\Delta t = 15.083 \cdot t_{1/2} = 2.71\times10^{-7}s$$

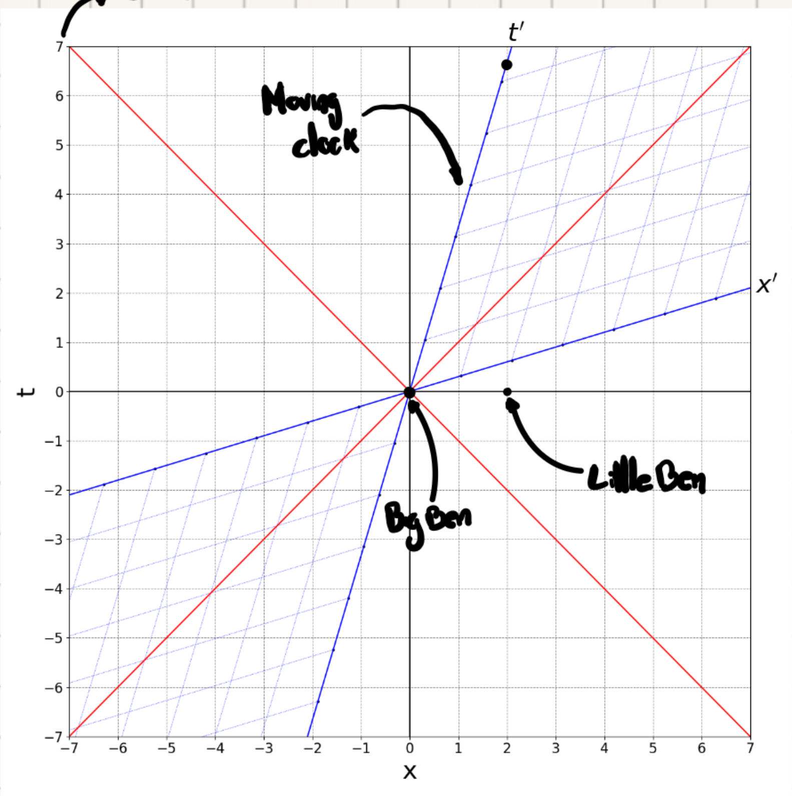
Tiempo de vida media en el marco en reposo $\Rightarrow 2.71\times10^{-7}s$

Título: Ejercicio #2
Tema:

Fecha:
Materia:

a.) No, la sincronización de relojes se debe realizar teniendo en cuenta los postulados de la relatividad y sus consecuencias físicas. Esto es, se debe tener en cuenta que, si se quiere usar relojes en movimiento para calibrar relojes estacionarios, la sincronización dependerá de la velocidad de movimiento del reloj, el camino recorrido y posibles escenarios no inerciales que afecten la medición del tiempo entre marcos de referencia.

b).



No. Como se observa en el diagrama, es posible sincronizar a Big Ben y al reloj en movimiento si se escoje el origen de coordenadas como $t = t' = 0$. Sin embargo, habrá un desfase entre la sincronización de Little Ben usando el método del reloj en movimiento y el método regular utilizando destellos de luz. También se puede observar que, el grado de desfase en la sincronización a su vez dependerá de la longitud recorrida por el reloj en movimiento.

Titulo: | Fecha:
Tema: | Materia:

c. El reloj en movimiento se mueve respecto a la cuadrícula de relojes calibrados adecuadamente con una velocidad de,
$V = 360000\, Km/h = 1\times10^{5}\, m/s$, o bien, $V/C \to 3.33\times10^{-4}$!
Así pues, el tiempo que le toma llegar al reloj de Big Ben a Little Ben, separados por una distancia de $10^{9}m$ es,

$$t = \frac{d}{v} \to \frac{10^{9}m}{3.33\times10^{-4}} \Rightarrow 3\times10^{12}m$$

es claro notar que, dado que el reloj en movimiento posee un movimiento relativo con respecto a la cuadrícula calibrada, habrá dilatación del tiempo de la forma,

$$\Delta t = \gamma \Delta t'$$

donde $\Delta t'$ representa la medición del tiempo realizada por el reloj en movimiento. En el caso de que la calibración fuera correcta y no hubieran efectos relativistas, de manera efectiva se tiene que $\Delta t' > \Delta t$.
Teniendo en cuenta lo anterior se tiene que, la medida de asincronía está dada por $\Delta t' - \Delta t$.
Resolviendo se tiene que,

$$\Delta t = \gamma \Delta t' \Rightarrow \Delta t' = \frac{\Delta t}{\gamma} \Rightarrow \Delta t' = \sqrt{1-(V/C)^2}\, \Delta t \Rightarrow$$

Titulo: | Fecha:
Tema: | Materia:

$$\Delta t' = \left(1-(3.33\times10^{-4})^2\right)^{1/2}\Delta t$$

$$\Delta t' = (1-1.11\times10^{-7})^{1/2}\ \Delta t$$

Expandiendo,

$$(1-x)^{1/2} = 1-\frac{1}{2}x-\frac{1}{8}x^2+\dots \simeq 1-\frac{1}{2}x$$

Así,

$$\Delta t' = \left(1-\frac{1}{2}\ 1.11\times10^{-7}\right)\Delta t$$

$$\Delta t' = (1-5.55\times10^{-8})\Delta t$$

$$\Delta t' = \Delta t - 5.5\times10^{-8}\cdot\Delta t$$

$$\Delta t'-\Delta t = -5.55\times10^{-8}\times 3\times10^{12}\,m$$ → Usando el valor para Δt previamente calculado

$$= -166500\,m \div 3\times10^{8}\,m/s \Rightarrow -5.55\times10^{-4}\,s$$

$$\Delta t'-\Delta t = 5.55\times10^{-4}\,s\times\frac{1000\,ms}{1s} = \boxed{-0.55\,ms}$$

d). Se debe repetir el procedimiento anterior para una velocidad 100 veces mayor, esto es, $v = 1\times10^{7}\,m/s$. $v/c \longrightarrow 1/30$

Así pues,

$$t = \frac{d}{v} = \frac{10^9 m}{1/30} = 3\times10^{10}\,m,\ \Delta t' = (1-\beta^2)\Delta t\ ,\ \beta=\frac{v}{c}$$

Titulo: | Fecha:

Tema: | Materia:

$$\Delta t' = (1 - (1/30)^2)^{1/2} \Delta t \Rightarrow (1 - 1/900)^{1/2} \Delta t$$

$$\Delta t' \approx (1 - \frac{1}{2} \cdot 1/900) \Delta t$$

$$\Delta t' \approx \Delta t - 1/1800 \, \Delta t$$

$$\Delta t' - \Delta t = - 1/1800 \times 3 \times 10^{10} m$$

$$\Delta t' - \Delta t = -1/1800 \times 3 \times 10^{10} m$$

$$\Delta t' - \Delta t = 16.66 \times 10^{6} m \div 3 \times 10^{8} m/s \rightarrow 0.055 s$$

Ejercicio #4

Considerando que tenemos un potencial de la forma

$$\phi(r) = -\frac{GMe^{-\alpha r}}{r} \quad \text{con } \alpha = m_g c/\hbar,$$

donde $\alpha \to 0$, $e^{-\alpha r} \to 1$ y $\phi(r) \to -\frac{GM}{r}$.

El flujo gravitacional vendrá dado por la expresión,

$$\Phi_g = \int \vec{g} \cdot d\vec{A} \, .$$

Así pues, debemos hallar el campo gravitatorio $\vec{g}$, esto a su vez considerando que, $\vec{g} = -\nabla\phi$, donde el potencial ϕ debe satisfacer la condición de irrotacionalidad tal que $\nabla \times (\nabla\phi) = 0$

Usando el operador gradiente en coordenadas esféricas tenemos,

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial r}\hat{r} + \frac{1}{r\,\mathrm{sen}\theta}\frac{\partial}{\partial\varphi}\hat{\varphi} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}\hat{\theta}$$

$$\nabla\phi = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial r} \\ \frac{1}{r\,\mathrm{sen}\theta}\frac{\partial}{\partial\varphi} \\ \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta} \end{bmatrix} -\frac{GMe^{-\alpha r}}{r} = \begin{matrix} \frac{\partial}{\partial r}\left(-\frac{GMe^{-\alpha r}}{r}\right) \\ \frac{\partial}{\partial\varphi}\left(\cancel{-\frac{GMe^{-\alpha r}}{r}}\right)^{0} \\ \frac{\partial}{\partial\theta}\left(\cancel{-\frac{GMe^{-\alpha r}}{r}}\right)^{0} \end{matrix}$$

Titulo: | Fecha:
Tema: | Materia:

$$\nabla \phi = \frac{\partial}{\partial r}\left(-\frac{GMe^{-\alpha r}}{r}\right)\hat{r} = -GM\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{e^{-\alpha r}}{r}\right)\hat{r}$$

$$\frac{\partial}{\partial r}\frac{e^{-\alpha r}}{r} \Rightarrow \frac{-\alpha e^{-\alpha r} r - e^{-\alpha r}\cdot(1)}{r^2} = \frac{-e^{-\alpha r}(\alpha r+1)}{r^2}$$

$$-\nabla\phi = -\frac{GMe^{-\alpha r}(1+\alpha r)}{r^2}\hat{r} = \vec{g}$$

También, vemos fácilmente que, $\nabla \times (\nabla \phi) = 0$

$$\begin{vmatrix} \hat{r} & \hat{\phi} & \hat{\theta} \\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{1}{r\,\text{sen}\theta}\frac{\partial}{\partial \varphi} & \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \theta} \\ \phi(r) & 0 & 0 \end{vmatrix} \Rightarrow (0)\hat{r} + \frac{1}{r}\cancel{\frac{\partial}{\partial\theta}\phi(r)}^{0}\,\hat{\phi} + \frac{1}{r\,\text{sen}\theta}\cancel{\frac{\partial}{\partial\varphi}\phi(r)}^{0}\,\hat{\theta} = 0$$

Entonces, considerando un área de integración esférica para una masa M de radio R tenemos

$$\Phi_g = \int \vec{g}\cdot d\vec{A} \qquad \vec{g} = -\nabla\phi = -\frac{GMe^{-\alpha r}(1+\alpha r)}{r^2}\hat{r}$$

$$\Phi_g = \int_A -\frac{GMe^{-\alpha r}}{r^2}(1+\alpha r)\hat{r}\cdot\left(r^2\,\text{sen}\theta\, d\theta\, d\varphi\, \hat{r}\right)$$

$$\Rightarrow -\frac{GMe^{-\alpha r}}{\cancel{r^2}}(1+\alpha r)\cancel{r^2}\int_A \text{sen}\theta\, d\theta\, d\varphi\, \cancel{(\hat{r}\cdot\hat{r})}^{1}$$

$$\Rightarrow -GMe^{-\alpha r}\cdot(1+\alpha r)\int_0^{\pi}\text{sen}\theta\, d\theta \cdot \int_0^{2\pi} d\varphi$$

$$\Rightarrow -\cos\theta\Big|_0^{\pi} = -\cancel{\cos(\pi)}^{-1} + \cancel{\cos(0)}^{1} = 2$$

$$\Rightarrow \varphi\Big|_0^{2\pi} = 2\pi - 0 = 2\pi$$

Titulo:

Tema:

Fecha:

Materia:

$$\Phi_g = -GMe^{-\alpha r}(1+\alpha r) \cdot 2 \cdot 2\pi$$

$$\Phi_g = -4\pi GMe^{-\alpha r}(1+\alpha r)$$

Con R como r tenemos,

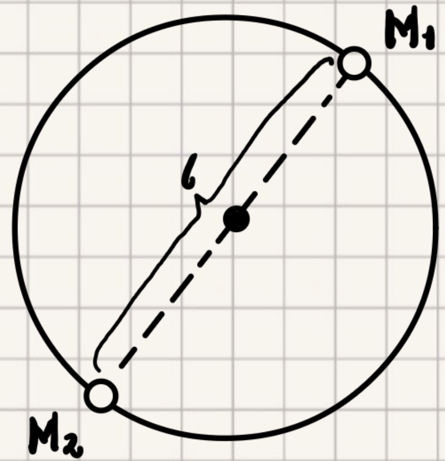
$$\Phi_g = -4\pi GMe^{-\alpha R}(1+\alpha R)$$

Ejercicio #5

Tema:

Fecha:

Materia:



Si consideramos que $M_1 = M_2 = M_\odot$

donde $M_\odot = 1.99 \times 10^{30}$ Kg

y $l = 1AU = 1.496 \times 10^{11}$ m

Con tal de calcular el periodo orbital del sistema, es necesario conocer la velocidad de una estrella en dicho sistema, para ello, se ha de reconocer que la fuerza centrípeta es proporcional a la fuerza gravitatoria. Esta última tiene por dirección el centro de masas del sistema, el cual está ubicado (tomando en cuenta un elemento del sistema),

$$r_{cm} = l \, \frac{\cancel{M_\odot}}{2\cancel{M_\odot}} = \frac{l}{2}$$

Así pues, tenemos que,

$$F_g = \frac{G M_\odot M_\odot}{l^2} \qquad F_c = M_\odot a_{rad} = M_\odot \frac{4\pi^2 l}{T^2 \, 2}$$

$$F_g = F_c$$

$$\frac{G M_\odot^{\cancel{2}}}{l^2} = \frac{\cancel{M_\odot} 2\pi^2 l}{T^2}$$

$$T^2 = \frac{2\pi^2 l^3}{G M_\odot}$$

Titulo:

Tema:

Fecha:

Materia:

Vemos que esta última expresión es consistente con la tercera ley de Kepler.

$$\frac{T^2}{a^3} = Const.$$

Así pues, teniendo en cuenta que $T = \sqrt{\frac{2\pi^2 b^3}{G M_\odot}}$ y $G = 6.674 \times 10^{-11} m^3 Kg^{-1} s^{-2}$, y reemplazando valores obtenemos.

$$T \simeq 22.30 \times 10^6 s$$

o bien,

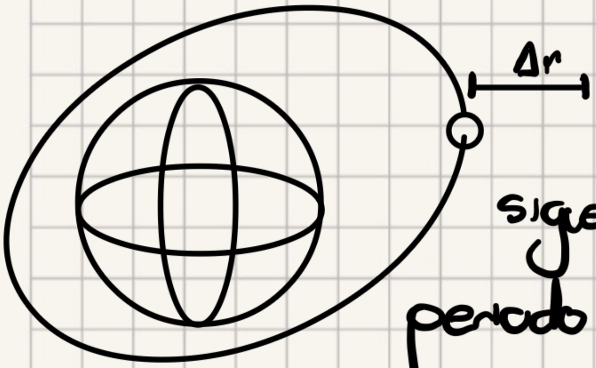
$$T \simeq 0.70 \text{ años}$$

Ejercicio #6

Tema:

Fecha:

Materia:



Una órbita geosíncrona se caracteriza por que el satélite que sigue tal trayectoria, tiene el mismo periodo y por tanto la misma velocidad angular que el planeta que orbita.

Así pues, el radio para una órbita síncrona circular con con periodo $T \approx 24$ horas $= 86400 s$, será

$$F_{gravitatoria} = F_{centrípeta}$$

$$\frac{G M_T m_s}{r_{og}^2} = m_s a_{rad} = m_s \frac{v^2}{r_{og}} = m_s \frac{4\pi^2 r_{og}}{T^2}$$

M_T = masa de la tierra $= 5.972 \times 10^{24} kg$

m_s = masa satélite

r_{og} = radio órbita geosíncrona

$$\frac{G M_T}{r_{og}^2} = \frac{4\pi^2 r_{og}}{T^2}$$

$$r_{og} = \sqrt[3]{\frac{G M_T T^2}{4\pi^2}} \approx 42240 \times 10^3 m$$

Para la nueva órbita tendremos que,

$$r_i = r_{og} + \Delta r$$

$$r_i = 4224 \times 10^3 m + 1 \times 10^3 m$$

$$r_i = 42241 \times 10^3 m.$$

Título:

Tema:

Fecha:

Materia:

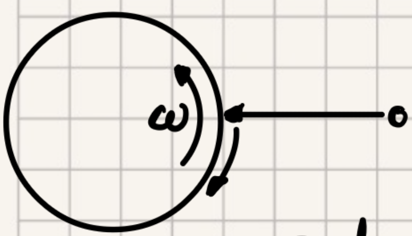
Para calcular la posición del punto que anteriormente estaba estacionaria en la Tierra, se tiene que calcular la diferencia entre las velocidades angulares de las dos órbitas, (la órbita deja de ser estacionaria), esto es,

$$\frac{GM_T}{r^2} = \omega^2 r$$

$$\Delta\omega = \omega_i - \omega_{og}$$

$$\omega^2 = \frac{GM_T}{r^3} \Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{GM_T}{r^3}}$$

$$\Delta\omega = \sqrt{\frac{GM_T}{r_i^3}} - \sqrt{\frac{GM_T}{r_{og}^3}} = \quad \Delta\omega = -2.58\times10^{-9}\ 1/s$$



Si se contempla que la Tierra gira de oeste a este, es pertinente afirmar que la "sombra" o la proyección del satélite en la superficie de la Tierra irá hacia el oeste debido al desfase negativo de velocidades angulares. Así pues, considerando que la Tierra posee un radio de $R_T = 6371\times10^3 m$, la velocidad de movimiento de la proyección del satélite en la superficie de la Tierra será (tomando a la Tierra como sistema de referencia),

$$V = \Delta\omega \cdot R_T \Rightarrow -2.58\times10^{-9}\ 1/s \cdot 6371\times10^3 m$$

$$\boxed{V = -0.0164\ m/s}$$

Ejercicio #7

Título:
Tema:

Fecha:
Materia:

Si tenemos en cuenta que la velocidad de un satélite en una órbita geosíncrona está dada por,

$$\frac{GM}{r_{og}^2} = \frac{V^2}{r_{og}} \Rightarrow V = \sqrt{\frac{GM}{r_{og}}},$$

igualmente tenemos que, para una órbita circular,

$$\frac{GM}{r_{og}^2} = \frac{4\pi^2 r_{og}}{T_o^2}$$, siendo To el periodo de la Tierra.

Ahora bien, si tomamos el cambio de la velocidad de órbita con respecto al radio tenemos que,

$$\frac{dv}{dr} = \frac{d}{dr}\left(\sqrt{\frac{GM}{r}}\right) = -\frac{\sqrt{GM}}{2}(r)^{-3/2} = -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{GM}{r^3}}$$

Si consideramos que,

$$\frac{\Delta v}{\Delta r} \approx -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{GM}{r^3}} \Rightarrow \Delta v \approx -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{GM}{r^3}}\,\Delta r$$

considerando que,

$$\frac{GM}{r^3} = \frac{4\pi^2}{T_o^2},$$ nos lleva a deducir que,

$$\Delta v \approx -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{4\pi^2}{T_o^2}}\,\Delta r.$$

$$\Delta v \approx -\frac{\pi \Delta r}{T_o}$$

Titulo:

Tema:

Fecha:

Materia:

Podemos hacer la comprobación numérica de esta expresión sustituyendo los valores calculados y empleados en el ejercicio anterior, así vemos que.

$$V_{\Delta r = 1km} - V_{og} = -36.36 \times 10^{-3} m/s$$

Usando la nueva expresión,

$$\Delta v \approx -\frac{\pi \Delta r}{T_0} = -\frac{\pi (1 \times 10^{3} m)}{86400} = -36.36 \times 10^{-3} m/s$$

Título: Ejercicio #8
Tema:

Fecha:
Materia:

Teniendo en cuenta que $v = \tanh A$ y $u = \tanh B$, se debe probar que $w' = \tanh(A+B)$

Considerando la ley de composición de velocidades relativista tenemos que,

$$w' = \frac{u + v}{1 + uv} \text{, o sea,}$$

$$w' = \frac{\tanh B + \tanh A}{1 + \tanh B \tanh A}$$

si se considera que $\tanh \alpha = \frac{\operatorname{senh} \alpha}{\cosh \alpha}$, simplificando,

$$\tanh B + \tanh A = \frac{\operatorname{senh} B}{\cosh B} + \frac{\operatorname{senh} A}{\cosh A} = \frac{\operatorname{senh} B \cosh A + \operatorname{senh} A \cosh B}{\cosh B \cosh A}$$

$$1 + \tanh B \tanh A = 1 + \frac{\operatorname{senh} B}{\cosh B} \frac{\operatorname{senh} A}{\cosh A} = \frac{\cosh B \cosh A + \operatorname{senh} B \operatorname{senh} A}{\cosh B \cosh A}$$

$$\frac{\operatorname{senh} B \cosh A + \operatorname{senh} A \cosh B}{\cancel{\cosh B \cosh A}} \div \frac{\cosh B \cosh A + \operatorname{senh} B \operatorname{senh} A}{\cancel{\cosh B \cosh A}}$$

$$\Rightarrow \frac{\operatorname{senh} B \cosh A + \operatorname{senh} A \cosh B}{\cosh B \cosh A + \operatorname{senh} B \operatorname{senh} A}$$

Considerando las siguientes expresiones trigonométricas hiperbólicas,

Titulo: | Fecha:
Tema: | Materia:

$\operatorname{senh}\alpha = \dfrac{e^{\alpha}-e^{-\alpha}}{2}$, $\cosh\alpha = \dfrac{e^{x}+e^{-x}}{2}$, desarrollamos acorde a.

$$\Rightarrow \frac{\operatorname{senh}B\cosh A + \operatorname{senh}A\cosh B}{\cosh B\cosh A + \operatorname{senh}B\operatorname{senh}A} = \frac{\gamma+\beta}{\varepsilon+\nu} = \frac{N}{D}$$

$\gamma = \operatorname{senh}B\cdot\cosh A$ $\qquad$ $\beta = \operatorname{senh}A\cosh B$

$\dfrac{e^{B}-e^{-B}}{2}\cdot\dfrac{e^{A}+e^{-A}}{2}$ $\qquad$ $\dfrac{e^{A}-e^{-A}}{2}\cdot\dfrac{e^{B}+e^{-B}}{2}$

$\dfrac{e^{A+B}+e^{B-A}-e^{A-B}-e^{-A-B}}{4}$ $\qquad$ $\dfrac{e^{A+B}+e^{A-B}-e^{B-A}-e^{-A-B}}{4}$

$\gamma + \beta$

$$e^{A+B}+\cancel{e^{B-A}}^{0}-\cancel{e^{A-B}}^{0}-e^{-A-B}+e^{A+B}+\cancel{e^{A-B}}^{0}-\cancel{e^{B-A}}^{0}-e^{-A-B}$$

$$\frac{2e^{A+B}-2e^{-A-B}}{4} = \frac{2(e^{A+B}-e^{-(A+B)})}{4} \Rightarrow \frac{e^{A+B}-e^{-(A+B)}}{2}$$

$N = \gamma + \beta = \operatorname{senh}(A+B)$

$\nu = \operatorname{senh}B\operatorname{senh}A$ $\qquad$ $\varepsilon = \cosh B\cosh A$

$\dfrac{e^{B}-e^{-B}}{2}\cdot\dfrac{e^{A}-e^{-A}}{2}$ $\qquad$ $\dfrac{e^{B}+e^{-B}}{2}\cdot\dfrac{e^{A}+e^{-A}}{2}$

$\dfrac{e^{A+B}-e^{B-A}-e^{A-B}+e^{-A-B}}{4}$ $\qquad$ $\dfrac{e^{A+B}+e^{B-A}+e^{A-B}+e^{-A-B}}{4}$

$\nu + \varepsilon$

$$e^{A+B}-\cancel{e^{B-A}}^{0}-\cancel{e^{A-B}}^{0}+e^{-A-B}+e^{A+B}+\cancel{e^{B-A}}^{0}+\cancel{e^{A-B}}^{0}+e^{-A-B}$$

$$\frac{2e^{A+B}+2e^{-(A+B)}}{4} \Rightarrow \frac{e^{A+B}+e^{-(A+B)}}{2}$$

$D = \nu + \varepsilon = \cosh(A+B)$

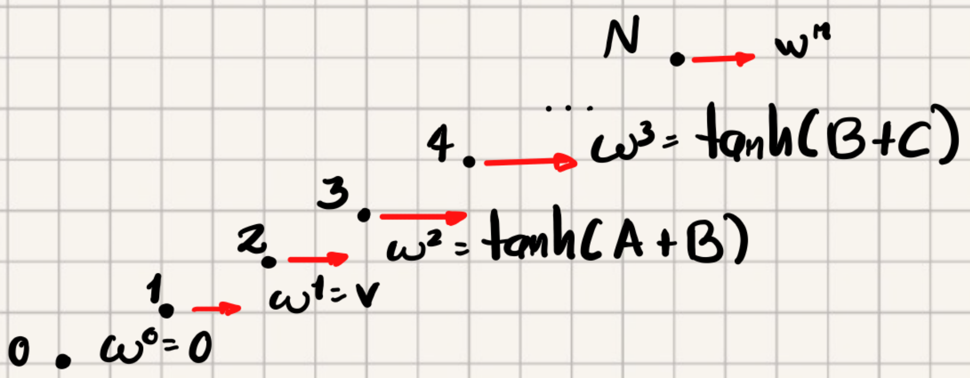
Título:
Tema:

Fecha:
Materia:

$$\frac{\gamma+\beta}{\nu+\varepsilon}=\frac{N}{D}=\frac{\operatorname{senh}(A+B)}{\cosh(A+B)}=\boxed{\tanh(A+B)}$$

$$W'=\tanh(A+B)$$

Ahora bien, si se plantea un escenario de la forma,



se tiene que, la velocidad de la estrella N con respecto a la estrella en reposo está dada por,

$$\omega^0=0$$

$$\omega^1 \Rightarrow v=\tanh V$$

$$\omega^2 \Rightarrow u=\tanh W$$

$$\omega^3 \Rightarrow \omega'=\tanh(V+W)=\tanh(\tanh^{-1}v+\tanh^{-1}\omega)$$

dado que la segunda estrella tiene una velocidad relativa a la primera de 0.9, y la N estrella tiene una velocidad relativa a (N-1) de 0.9, podemos concluir que, $\omega=v=0.9$, por lo tanto,

$$\omega^3 \Rightarrow \omega'=\tanh(V+W)=\tanh(\tanh^{-1}v+\tanh^{-1}\omega)$$

$$=\tanh(2\tanh^{-1}v)$$

Titulo: | Fecha:

Tema: | Materia:

si expandimos esta aseveración para N estrellas tendremos que,

$$\omega^N = \tanh(N \tanh^{-1} v)$$

lo que se puede reescribir como,

$$\omega^N = \tanh(N \tanh^{-1} 0.9),$$

para expresar este resultado para un N muy grande tenemos que,

$$\omega^N = \tanh(N\nu) = \frac{e^{N\nu}-e^{-N\nu}}{e^{N\nu}+e^{-N\nu}}$$

$$= \frac{e^{N\nu}-e^{-N\nu}}{e^{N\nu}+e^{-N\nu}} = \frac{\cancel{e^{N\nu}}(1-e^{-2N\nu})}{\cancel{e^{N\nu}}(1+e^{-2N\nu})} = \frac{1-e^{-2N\nu}}{1+e^{-2N\nu}}$$

$$\omega^N = \frac{1-e^{-2N\nu}}{1+e^{-3N\nu}}$$

Podemos observar que cuando $N \to \infty$, $e^{-2N\nu} \to 0$, si expandimos el denominador de esta expresión de modo que,

$$(1+x)^{\alpha} = \sum_{k=0}^{\infty}\binom{\alpha}{k}x^k = 1+\alpha x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2+\frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)x^3}{3!}+\dots$$

$$(1+e^{-2N\nu})^{-1} \approx 1+(-1)e^{-2N\nu}+\frac{-1((-1)-1)e^{-4N\nu}}{2!}$$

$$+\frac{-1((-1)-1)((-1)-2)}{3!}e^{-6N\nu}+\frac{-1((-1)-1)((-1)-2)((-1)-3)}{4!}e^{-8N\nu}+\dots$$

Titulo:

Tema:

Fecha:

Materia:

$$(1+e^{-2N\nu})^{-1} \approx 1+(-1)e^{-2N\nu}+\frac{-1((-1)-1)e^{-4N\nu}}{2!}$$

$$+\frac{-1((-1)-1)((-1)-2)}{3!}e^{-6N\nu}+\frac{-1((-1)-1)((-1)-2)((-1)-3)}{4!}e^{-8N\nu}+\cdots$$

$$(1+e^{-2N\nu})^{-1} \approx 1-e^{-2N\nu}+e^{-4N\nu}-e^{-6N\nu}+e^{-8N\nu}+\cdots$$

Ahora bien,

$$\frac{1-e^{-2N\nu}}{1+e^{-2N\nu}}=(1-e^{-2N\nu})\cdot(1-e^{-2N\nu}+e^{-4N\nu}-e^{-6N\nu}+\cdots)$$

$$\Rightarrow (1-e^{-2N\nu})+(-e^{-2N\nu}-e^{-4N\nu})+(e^{-4N\nu}-e^{-6N\nu})+\cdots$$

$$\Rightarrow 1-e^{-2N\nu}-e^{-2N\nu}+e^{-4N\nu}+e^{-4N\nu}-e^{-6N\nu}+\cdots$$

$$\Rightarrow 1-2e^{-2N\nu}+2e^{-4N\nu}-e^{-6N\nu}+\cdots$$

Así pues, se tiene que, para valores grandes de N,

$$\frac{1-e^{-2N\nu}}{1+e^{-2N\nu}} \approx 1-2e^{-2N\nu}, \text{ más aún,}$$

$$=e^{-2\cdot N\cdot \tanh^{-1}(0.9)} \rightarrow \left\{\tanh^{-1}(0.9)=\frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+0.9}{1-0.9}\right)\Rightarrow\right.$$

$$\left.\Rightarrow \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1.9}{0.1}\right)=\frac{1}{2}\ln(19)\right\} \rightarrow e^{-2N\cdot\frac{1}{2}\ln(19)}$$

$$=e^{-N\ln(19)}=\left(e^{\ln(19)}\right)^{-N}=19^{-N}$$

$$\boxed{\frac{1-e^{-2N\nu}}{1+e^{-2N\nu}} \approx 1-2(19)^{-N}}$$