T E O R Í A   C L Á S I C A   DE   C A M P O S

Tarea 3 (miércoles 12 de marzo a las 23:59)

1. Calcular la energía E y el momento P asociados a un pulso

$$\psi(t,x) = g(x - vt) \tag{1}$$

que se propaga hacia la derecha a lo largo de una cuerda continua, en donde $g(x)$ es una función $\mathcal{C}^\infty$ real arbitraria y de soporte compacto.[1] Identifiquen si existe alguna relación entre E y P, e interpreten el resultado.

2. Utlizando la ecuación de onda, demostrar que $\partial_\mu T_\nu{}^\mu = 0$ para el tensor de energía-momento $T_\mu{}^\nu$ de una cuerda continua. Interpreten el resultado.

3. Determinar la solución $\psi(t,x)$ a la ecuación de onda para los siguientes datos iniciales:

i)

$$\psi(t=0,x) = \begin{cases} 0, \text{ si } x \leq -L, \\ x+L, \text{ si } -L < x \leq 0, \\ -(x-L), \text{ si } 0 < x \leq L, \\ 0, \text{ si } x \geq L, \end{cases} \quad \text{y} \quad \dot{\psi}(t=0,x) = 0. \tag{2}$$

ii)

$$\psi(t=0,x) = 0 \quad \text{y} \quad \dot{\psi}(t=0,x) = \begin{cases} 0, \text{ si } x \leq -L, \\ T^{-1}(x+L), \text{ si } -L < x \leq 0, \\ -T^{-1}(x-L), \text{ si } 0 < x \leq L, \\ 0, \text{ si } x \geq L, \end{cases} \tag{3}$$

en donde L y T son dos escalas características con dimensiones de longitud y tiempo, respectivamente. Representar gráficamente los resultados encontrados e interpretarlos.

4. Sea un sistema descrito en términos de la acción

$$S[\psi(t,\vec{x})] = \int_{t_1}^{t_2} dt \int_V dV \left[\left(\frac{\partial \psi}{\partial t} \right)^2 - v^2 \vec{\nabla}\psi \cdot \vec{\nabla}\psi \right]. \tag{4}$$

[1] Una función es de soporte compacto si es idénticamente cero fuera de un intervalo finito de la recta real.

Identificar las dimensiones de v y ψ. Utilizando las ecuaciones de Euler-Lagrange, encontrar las ecuaciones del movimiento de este sistema. ¿Son capaces de identificar cuál es esta ecuación? Quizás la hayan visto en cursos diferentes bajo nombres distintos. Calcular la expresión para el tensor de energía-momento ${T_\mu}^\nu$ y encontrar las expresiones para las cargas conservadas.