

ESTRUCTURA GALÁCTICA Y DINÁMICA ESTELAR

Referencia: Capítulo 4 de Binney & Tremaine (*Galactic Dynamics*)

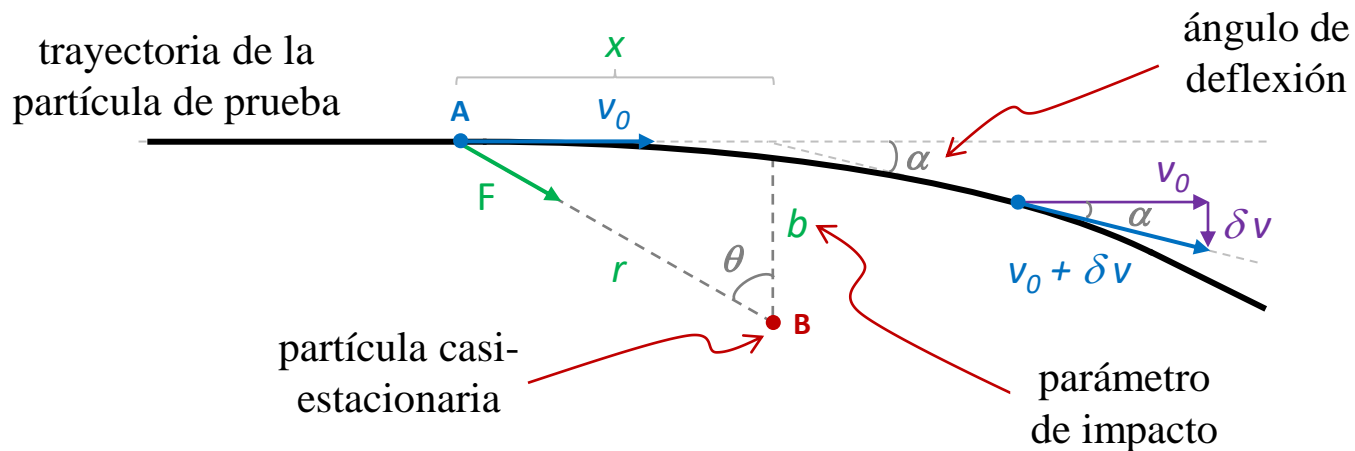
Colisiones , E.B.A.

La importancia de los encuentros

Vimos como ciertos potenciales sencillos y suaves generan la órbita de **una partícula** (estrella, por ejemplo). Sin embargo, queremos alcanzar una comprensión mas global del **movimiento de un gran número de partículas** y, para eso, necesitamos un abordaje que las considera como parte de un fluido.

Una cuestión importante aquí es la importancia de las **colisiones** (mas propiamente **deflexiones** o **encuentros**) para esas partículas. Diferentes partículas que componen un sistema estelar (estrellas, gas, materia oscura, etc) pueden **comportarse de forma distinta** respecto a sus propiedades colisionales.

Parametrización de un encuentro



Tipos de encuentros

a) Colisión directa (o captura de marea)

Si $b \sim \text{pocos } R_{\text{part}}$, efectos de marea fuertes **disipan la energía orbital**. Eso lleva a la “captura de marea” y, dependiendo de las circunstancias, a un evento de **fusión** entre las partículas (*merging*).

- Ese tipo de colisiones suele ser ¡extremadamente raro!

b) Deflexión extrema

Cuando $\delta v \sim v_0$ los **efectos en la órbita** de la partícula de prueba son extremados. Podemos definir un radio para el cual la influencia gravitacional será “fuerte” usando el Teorema del Virial:

$$2K = -W \Rightarrow m_A v_0^2 = \frac{G m_B m_A}{R} \Rightarrow R = \frac{G m_B}{v_0^2}$$

- Por ejemplo, tomando una velocidad de 20-30 km/s, tenemos para el Sol un radio crítico de ~ 1 UA
- Ese tipo de colisiones también es raro, pero puede ser relevante para regiones densas de estrellas (núcleos de Cúmulos Globulares, núcleos de galaxias, cúmulos de galaxias)

c) Deflexión ligera (impulso)

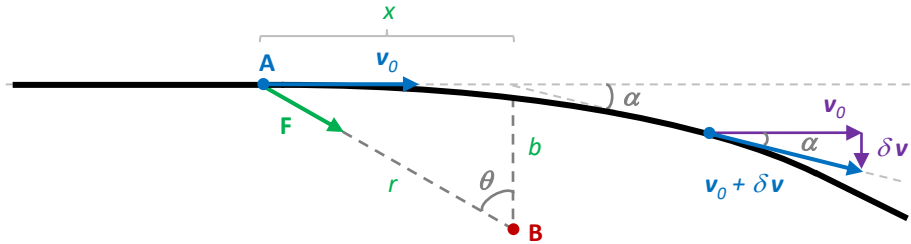
Ocurre cuando $\delta v \ll v_0$ (es el caso más común y, por lo tanto, más relevante). A seguir:

Aproximación de Impulso

$$m_A = m_B \equiv m$$

$$r^2 = b^2 + x^2$$

$$\vec{F} = \vec{F}_\perp + \vec{F}_\parallel$$



$$x = r \sin(\theta) \quad \Rightarrow \quad \sin(\theta) = \frac{x}{r} = \frac{x}{\sqrt{b^2 + x^2}}$$

$$b = r \cos(\theta) \quad \Rightarrow \quad \cos(\theta) = \frac{b}{r} = \frac{b}{\sqrt{b^2 + x^2}}$$

$$\tan(\theta) = \frac{\sin(\theta)}{\cos(\theta)} = \frac{x}{b}$$

$$\begin{aligned} |\vec{F}_\perp| &= \frac{G m^2}{r^2} \cos(\theta) = \frac{G m^2}{b^2 + x^2} \cos(\theta) = \frac{G m^2}{b^2 + x^2} \frac{b}{(b^2 + x^2)^{1/2}} = \frac{G m^2 b}{(b^2 + x^2)^{3/2}} \\ &= \frac{G m^2 b}{b^3 \left(\frac{b^2 + x^2}{b^2}\right)^{3/2}} = \frac{G m^2}{b^2} \frac{1}{\left(1 + \frac{x^2}{b^2}\right)^{3/2}} = \frac{G m^2}{b^2} \left[1 + \left(\frac{x}{b}\right)^2\right]^{-3/2} \end{aligned}$$

Pero: $\vec{F}_\perp = m \vec{a}_\perp = m \frac{d\vec{v}_\perp}{dt} \quad \Rightarrow \quad \left|\frac{d\vec{v}_\perp}{dt}\right| = \frac{G m}{b^2} \left[1 + \left(\frac{x}{b}\right)^2\right]^{-3/2}$

$$|d\vec{v}_\perp| = \frac{G m}{b^2} \left[1 + \left(\frac{x}{b} \right)^2 \right]^{-3/2} dt$$

Y haciendo ahora el cambio de variables:

$$\left\{ \begin{array}{l} s \equiv \frac{x}{b} = \frac{vt}{b} \\ ds = \frac{v}{b} dt \end{array} \right. \Rightarrow dt = \frac{b}{v} ds$$

$$|d\vec{v}_\perp| = \frac{G m}{b^2} [1 + (s)^2]^{-3/2} \frac{b}{v} ds$$

$$|\vec{v}_\perp| = \delta v = \frac{G m}{b v} \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} (1 + s^2)^{-3/2} ds}_2$$

$$\therefore \delta v = \frac{2 G m}{b v} = \overbrace{\left(\frac{G m}{b^2} \right)}^{a_\perp} \overbrace{\left(\frac{2b}{v} \right)}^{\Delta t}$$

$$\alpha = \frac{\delta v}{v} = \frac{2 G m}{b v^2}$$

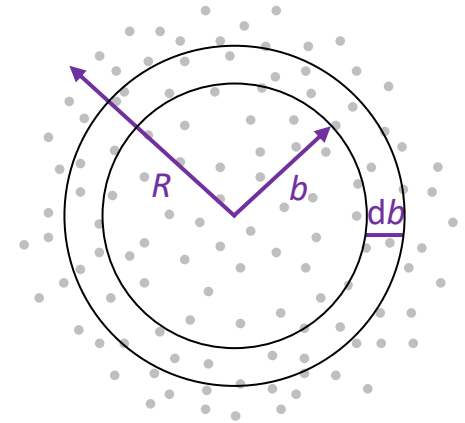
Para todo el sistema

- masa total:

$$\mathcal{M} = N m$$

- número de colisiones:

$$\delta n = \underbrace{\frac{N}{\pi R^2}}_{\text{densidad superficial}} \underbrace{2\pi b \, db}_{\text{área del anillo}}$$



Como $\langle \delta v \rangle = 0$, para calcular la perturbación total usaremos $\langle (\delta v)^2 \rangle$:

$$(\Delta v)^2 = \langle (\delta v)^2 \delta n \rangle = \left\langle \left(\frac{2 G m}{b v} \right)^2 \left(\frac{N}{\pi R^2} 2\pi b \, db \right) \right\rangle = \left\langle \frac{8 G^2 m^2 N}{b v^2 R^2} db \right\rangle$$

$$(\Delta v)^2 = \int_{b_{min}}^{b_{max}} \frac{8 N G^2 m^2}{v^2 R^2} \frac{db}{b} = 8 N \left(\frac{G m}{v R} \right)^2 \int_{b_{min}}^{b_{max}} \frac{db}{b} = 8 N \left(\frac{G m}{v R} \right)^2 \int_{b_{min}}^{b_{max}} d \ln(b)$$

$$(\Delta v)^2 = 8 N \left(\frac{G m}{v R} \right)^2 [\ln(b_{max}) - \ln(b_{min})] = 8 N \left(\frac{G m}{v R} \right)^2 \ln \left(\frac{b_{max}}{b_{min}} \right)$$

Ahora tomamos:

$$\left\{ \begin{array}{ll} b_{max} = R & \longrightarrow \text{radio del sistema} \\ b_{min} = R/N & \longrightarrow \text{separación promedia de las partículas} \end{array} \right.$$

$$\therefore (\Delta v)^2 = 8N \left(\frac{Gm}{vR} \right)^2 \ln \left(\frac{R}{R/N} \right) = 8 \left(\frac{Gm}{vR} \right)^2 N \ln(N)$$

Y, utilizando el Teorema del Virial:

$$2K = -W \Rightarrow mv^2 = \frac{GMm}{R} \Rightarrow v^2 = \frac{G(Nm)}{R} \Rightarrow \frac{Gm}{vR} = \frac{v}{N}$$

Tenemos:
$$(\Delta v)^2 = 8 \left(\frac{v^2}{N^2} \right) N \ln(N) \Rightarrow \frac{(\Delta v)^2}{v^2} = 8 \frac{\ln(N)}{N}$$

Es decir, si $(\Delta v)^2$ es el **cambio neto** en v^2 de todas las partículas del sistema sobre nuestra partícula de prueba, en **un encuentro**, $v^2/(\Delta v)^2$ es el **número de encuentros** necesarios para que el cambio sea del orden de v^2 , nombrado n_{relax} .

Así, definimos:

$$t_{relax} = n_{relax} t_{cross} = \frac{N}{8 \ln(N)} \frac{R}{v}$$

como el tiempo necesario para que la partícula (p.e. estrella) pierda la **memoria de su órbita inicial**.

- Si $t_{relax} \gg t_{sys}$ (es decir, n_{relax} es muy grande), donde t_{sys} es la “edad” del sistema, la relajación debido a encuentros es **despreciable**, y el sistema puede ser considerado ACOLISIONAL (es decir, las “colisiones” no son importantes). De lo contrario, el sistema es dicho COLISIONAL.
- Como n_{relax} sólo depende de N , arriba de un número relativamente pequeño de miembros del sistema (~ 30) ya tenemos $t_{relax} \gg t_{cross}$. Luego, con buena aproximación, podemos considerar usualmente que las estrellas se mueven bajo un **potencial global suave** (es decir, los potenciales locales generados por las otras estrellas son despreciables).
- Es importante notar que, como en **simulaciones de N-cuerpos** normalmente se utiliza un número de partículas **menor** que el número real de miembros del sistema, el potencial se torna mas “**grumoso**” que el real: $t_{relax}(\text{simul}) \ll t_{relax}(\text{real})$. Para amenizar ese problema lo que se suele hacer es “**suavizar**” los potenciales individuales de las partículas “aumentando” sus separaciones por un factor pequeño (*softening parameter*).
- Nota que el caso estelar es bien distinto del caso clásico de “moléculas en una caja”: en ese último (colisional) los encuentros llevan a la **termalización** (distribución isotrópica – *Maxwelliana* – de velocidades).

SISTEMA	N	n_{relax}	R	v (km/s)	t_{cross} (Ma)	t_{relax} (Ga)	t_{sys} (Ga)	
Cúmulo Abierto	10^2	3	2 pc	1	2	0.006	0.1	COLIS.
Cúmulo Globular (H)	10^5	1086	4 pc	6	0.7	0.76	12	±
Cúmulo Globular (C)	10^4	136	1 pc	10	0.1	0.014	12	COLIS.
Galaxia enana	10^9	5×10^7	2.5 kpc	50	49	2.45×10^6	10	ACOLIS.
Galaxia elíptica	10^{11}	5×10^9	30 kpc	250	117	5.85×10^8	12	ACOLIS.
Disco de una espiral	10^{11}	5×10^9	30 kpc	200	147	7.35×10^8	12	ACOLIS.
Núcleo de la V-L	10^6	8×10^4	1 pc	150	0.007	0.56	10	±
Par de galaxias	2	0.4	0.5 Mpc	300	1630	0.65	10	±
Grupo de galaxias	30	1	1 Mpc	300	3260	3.26	10	±
Cúmulo de galaxias	300	7	1.5 Mpc	800	1830	12.8	10	±

- Los tiempos de relajación pueden cambiar mucho **dentro de un mismo sistema** (p.e. CGlob: halo × centro; V-L: disco × núcleo).
- Aunque los **cúmulos de galaxias** sean más densos que los **grupos**, en los últimos las colisiones son más probables por las dispersiones de velocidad más bajas.

Ecuación de *Boltzmann–Vlasov* Acolisional (E.B.A.)

Trataremos primeramente de los **sistemas acolicionales** (p.e. galaxias).

Para eso, definimos una función, f , que representa el **número de partículas** (estrellas) **por unidad de volumen** del espacio fase $d^3\mathbf{x} d^3\mathbf{v}$:

$$N = \int \underbrace{f(\vec{x}, \vec{v}, t)}_{\substack{\text{función distribución} \\ \text{(densidad en el} \\ \text{espacio fase)}}} \underbrace{d^3\vec{x} d^3\vec{v}}_{\substack{\text{volumen en el} \\ \text{espacio fase}}}$$

- La **función distribución*** provee información completa sobre el sistema.
- Si el sistema contiene **distintas partículas** (p.e. materia bariónica + materia oscura; estrellas gigantes + enanas; etc), cada conjunto tendrá su propia f .
- En el espacio fase las estrellas se mueven de forma **restringida** porque deben obedecer las leyes de movimiento (que conectan las posiciones a las velocidades)

* Nota que la f es función de 7 variables: 3 espaciales, 3 de velocidades y el tiempo.

Derivada direccional (total o *Lagrangeana*)

$$\frac{D}{Dt} \equiv \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial \vec{x}} \cdot \frac{\partial \vec{x}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial \vec{v}} \cdot \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} \quad \Rightarrow \quad \frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial \vec{x}} \cdot \vec{v} + \frac{\partial}{\partial \vec{v}} \cdot (-\vec{\nabla} \Phi)$$

Aplicada a f :

$$\frac{Df}{Dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial \vec{x}} \cdot \vec{v} - \frac{\partial f}{\partial \vec{v}} \cdot \vec{\nabla} \Phi$$

Es decir:

$$\frac{Df}{Dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \sum_{i=1}^3 \left(v_i \frac{\partial f}{\partial x_i} - \frac{\partial \Phi}{\partial x_i} \frac{\partial f}{\partial v_i} \right)$$

Según el caso:

$$\left\{ \begin{array}{ll} \frac{Df}{Dt} = 0 & \rightarrow \text{Ec. Boltzmann Acolisional (Ec. Vlasov)} \\ & \text{(SISTEMAS ACOLISIONALES)} \\ \frac{Df}{Dt} = \Gamma(f) & \rightarrow \text{Ecuación Maestra} \\ & \text{(SISTEMAS COLISIONALES)} \end{array} \right.$$

- El caso acolisional equivale al **Teorema de Liouville**: mientras la partícula se desplaza en el espacio fase, la densidad alrededor de ella se mantiene constante (el flujo es **incompresible** $\Rightarrow f$ no cambia)*

* Nota que ¡eso no es verdad para el **flujo en el espacio 3D de posiciones**!

La E.B.A. describe como la función distribución cambia con el tiempo. Ella es una **consecuencia directa de:**

- la conservación del número de estrellas
- las estrellas siguen órbitas suaves
- el flujo de estrellas por \mathbf{r} define implícitamente la ubicación de \mathbf{v} ($= d\mathbf{r}/dt$)
- el flujo de estrellas por \mathbf{v} es dado explícitamente por $-\nabla\Phi$

Como $\partial f/\partial t$ es una **diferencial parcial (*Euleriana*)**, ella describe el cambio de la función distribución **en un punto del espacio fase**.

Por su turno, Df/Dt , que es la **derivada total (*Lagrangeana* o *convectiva*)**, describe el cambio de la función distribución **a lo largo de la órbita** dentro del **espacio fase**.

El paso siguiente consiste en **reescribir la E.B.A.** en términos de los **observables**: $\langle v \rangle$ (velocidad promedio), σ (dispersión de velocidades), n (densidad numérica) o ρ (densidad de masa) o j (densidad de luminosidad).

Momentos de la E.B.A. (proyecciones)

Una **solución completa** para la E.B.A. es extremadamente difícil (especialmente por ser función de 7 variables). Así es necesario hacer **restricciones** sobre la función distribución (p.e. considerar que $f > 0$, en cualquier lugar y siempre – no hay densidades negativas de estrellas) y/o hacer **proyecciones** de esa función para obtener soluciones parciales y informaciones sobre sus propiedades generales.

Esas proyecciones (o momentos) son obtenidas con la multiplicación de la E.B.A. por v_j^n o X_k^n y posterior integración sobre todas las posibles velocidades o posiciones, respectivamente.

Momento de orden cero ($v_j^0 = 1$)

$$\underbrace{\int \frac{\partial f}{\partial t} d^3\vec{v}}_{\frac{\partial}{\partial t} \int f d^3\vec{v}} + \sum_{i=1}^3 \left[\underbrace{\int v_i \frac{\partial f}{\partial x_i} d^3\vec{v}}_{\frac{\partial}{\partial x_i} \int v_i f d^3\vec{v}} - \underbrace{\int \frac{\partial \Phi}{\partial x_i} \frac{\partial f}{\partial v_i} d^3\vec{v}}_{\frac{\partial \Phi}{\partial x_i} \int \frac{\partial f}{\partial v_i} d^3\vec{v}} \right] = 0$$

la integral es solamente sobre las velocidades

$\rho(\vec{x}, t)$ ← densidad en el espacio 3D de posiciones

Pero:
$$\langle v_i(\vec{x}, t) \rangle \equiv \frac{\int v_i f \, d^3\vec{v}}{\int f \, d^3\vec{v}} = \frac{1}{\rho} \int v_i f \, d^3\vec{v} \Rightarrow \int v_i f \, d^3\vec{v} = \rho \langle v_i(\vec{x}, t) \rangle$$

y:
$$\int \frac{\partial f}{\partial v_i} d^3\vec{v} = \int \vec{\nabla}_v f \cdot d^3\vec{v} \xrightarrow[\text{la Divergencia}]{\text{Teorema de}} \oint f \, d^2\vec{v} = \oint f \, dA_v$$

$$\oint f \, dA_v \rightarrow 0 \quad \text{cuando} \quad A_v \rightarrow \infty \quad \rightarrow \quad \text{no hay estrellas que se muevan infinitamente rápidas}$$

Por lo tanto:
$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \sum_{i=1}^3 \left[\frac{\partial}{\partial x_i} (\rho \langle v_i \rangle) - \frac{\partial \Phi}{\partial x_i}(0) \right] = 0$$

Así:
$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\rho \langle \vec{v} \rangle) = 0 \quad \rightarrow \quad \text{Ecuación de Continuidad de Masa}$$

Momento de orden uno ($v_j^1 = v_j$)

$$\underbrace{\int v_j \frac{\partial f}{\partial t} d^3 \vec{v}}_{\frac{\partial}{\partial t} \int v_j f d^3 \vec{v}} + \sum_{i=1}^3 \left[\underbrace{\int v_j v_i \frac{\partial f}{\partial x_i} d^3 \vec{v}}_{\frac{\partial}{\partial x_i} \int v_j v_i f d^3 \vec{v}} - \underbrace{\int v_j \frac{\partial \Phi}{\partial x_i} \frac{\partial f}{\partial v_i} d^3 \vec{v}}_{\frac{\partial \Phi}{\partial x_i} \int v_j \frac{\partial f}{\partial v_i} d^3 \vec{v}} \right] = 0$$

$\rho \langle v_j \rangle$
 $\rho \langle v_j v_i \rangle$
 $\frac{\partial \Phi}{\partial x_i} \int (-\delta_{ji}) f d^3 \vec{v}$

$\left. \vphantom{\int} \right\rbrace v_j \partial / \partial v_i = -\delta_{ji}$

Luego:

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho \langle v_j \rangle) + \sum_{i=1}^3 \left[\frac{\partial}{\partial x_i} (\rho \langle v_j v_i \rangle) + (\delta_{ji} \frac{\partial \Phi}{\partial x_i}) (\rho) \right] = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho \langle v_j \rangle) + \sum_{i=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_i} (\rho \langle v_j v_i \rangle) + \rho \frac{\partial \Phi}{\partial x_j} = 0$$

Ahora definimos:

$$\sigma_{ij}^2 \equiv \langle (v_i - \langle v_i \rangle)(v_j - \langle v_j \rangle) \rangle = \langle v_i v_j \rangle - \langle v_i \rangle \langle v_j \rangle$$

$$\Rightarrow \langle v_i v_j \rangle = \sigma_{ij}^2 + \langle v_i \rangle \langle v_j \rangle$$


tensor dispersión de velocidades

Así:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho \langle v_j \rangle) + \sum_{i=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_i} [\rho (\sigma_{ij}^2 + \langle v_i \rangle \langle v_j \rangle)] + \rho \frac{\partial \Phi}{\partial x_j} = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho \langle v_j \rangle) + \sum_{i=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_i}(\rho \sigma_{ij}^2) + \sum_{i=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_i}(\rho \langle v_i \rangle \langle v_j \rangle) + \rho \frac{\partial \Phi}{\partial x_j} = 0$$

$$\underbrace{\frac{\partial}{\partial t} \langle v_j \rangle + \langle v_j \rangle \sum_{i=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_i} \langle v_i \rangle}_{\text{Ecuación de Euler}} + \underbrace{\frac{\partial \Phi}{\partial x_j} - \frac{1}{\rho} \sum_{i=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_i}(\rho \sigma_{ij}^2)}_{\text{tensor de stress}} = 0 \quad \left. \vphantom{\frac{\partial}{\partial t} \langle v_j \rangle} \right\} \text{Ecuaciones de Jeans}$$

- Las **Ecuaciones de Jeans** (Sir J. Jeans, 1915, 1919, 1922) describen el **equilibrio hidrodinámico** del sistema.
- El **tensor de stress** (o **presión anisotrópica**) no es producido por colisiones – como es el caso análogo para moléculas de un gas. En otras palabras, para un sistema acolisional **no existe** una **ecuación de estado** relacionando la presión y la densidad.
- Para un sistema en equilibrio estacionario, donde no hay movimientos sistemáticos:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho} \sum_{i=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_i}(\rho \sigma_{ij}^2) \quad \Rightarrow \quad \vec{\nabla} \Phi = -\frac{\vec{\nabla} P}{\rho}$$

que es la ecuación usual para el **equilibrio hidrostático**.

Revisar *Binney & Tremaine* 198-211

Momento en $(x_k^1 = x_k)$ de las Ecuaciones de Jeans

$$\underbrace{\int x_k \frac{\partial}{\partial t} (\rho \langle v_j \rangle) d^3 \vec{x}}_{\frac{\partial}{\partial t} \int \rho x_k \langle v_j \rangle d^3 \vec{x}} + \sum_{i=1}^3 \left[\underbrace{\int x_k \frac{\partial}{\partial x_i} (\rho \langle v_j \rangle \langle v_i \rangle) d^3 \vec{x}}_{\int (-\delta_{ki}) \rho \langle v_j \rangle \langle v_i \rangle d^3 \vec{x}} + \underbrace{\int x_k \frac{\partial}{\partial x_i} (\rho \sigma_{ij}^2) d^3 \vec{x}}_{\int (-\delta_{ki}) \rho \sigma_{ij}^2 d^3 \vec{x}} \right] + \underbrace{\int x_k \rho \frac{\partial \Phi}{\partial x_j} d^3 \vec{x}}_{\int \rho x_k \frac{\partial \Phi}{\partial x_j} d^3 \vec{x}} = 0$$

Y sean las siguientes definiciones:

$$\mathbb{I}_{jk} \equiv \int \rho(\vec{x}) x_j x_k d^3 \vec{x}$$

→ **tensor momento de inercia**

$$\mathbb{K}_{jk} \equiv \int \rho(\vec{x}) \langle v_j v_k \rangle d^3 \vec{x} = \mathbb{T}_{jk} + \frac{1}{2} \Pi_{jk}$$

→ **tensor energía cinética**

$$\mathbb{T}_{jk} \equiv \frac{1}{2} \int \rho(\vec{x}) \langle v_j \rangle \langle v_k \rangle d^3 \vec{x}$$

→ **movimiento ordenado**

$$\Pi_{jk} \equiv \int \rho(\vec{x}) \sigma_{jk}^2 d^3 \vec{x}$$

→ **movimiento al azar**

$$\mathbb{W}_{jk} \equiv - \int \rho(\vec{x}) x_j \frac{\partial \Phi}{\partial x_k} d^3 \vec{x}$$

→ **tensor energía potencial**

De donde tomamos que:

$$\frac{d \mathbb{I}_{jk}}{dt} = \int \frac{\partial \rho(\vec{x})}{\partial t} x_j x_k d^3 \vec{x} + \int \rho(\vec{x}) \frac{\partial}{\partial t} (x_j x_k) d^3 \vec{x}$$

y, utilizando la Ec. de Continuidad de Masa: $\frac{\partial \rho}{\partial t} = - \sum_{i=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_i} (\rho \langle v_i \rangle)$

$$\begin{aligned} \frac{d \mathbb{I}_{jk}}{dt} &= \int \left(- \sum_{i=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_i} \rho \langle v_i \rangle \right) x_j x_k d^3 \vec{x} \\ &= - \int \rho \sum_{i=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_i} x_j x_k \langle v_i \rangle d^3 \vec{x} \\ &= - \int \rho \sum_{i=1}^3 (-x_k \delta_{ji} - x_j \delta_{ki}) \langle v_i \rangle d^3 \vec{x} \\ &= \int \rho (x_k \langle v_j \rangle + x_j \langle v_k \rangle) d^3 \vec{x} \end{aligned}$$

$\frac{\partial}{\partial x_i} (x_j x_k) = - (x_k \delta_{ji} + x_j \delta_{ki})$

Además:

$$\frac{d^2 \mathbb{I}_{jk}}{dt^2} = \frac{d}{dt} \int \rho (x_k \langle v_j \rangle + x_j \langle v_k \rangle) d^3 \vec{x}$$

los tensores son simétricos, es decir,
podemos cambiar los índices

Retomando la ecuación del momento:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int \rho x_k \langle v_j \rangle d^3 \vec{x} - \int \rho \langle v_j \rangle \langle v_k \rangle d^3 \vec{x} - \int \rho \sigma_{kj}^2 d^3 \vec{x} + \int \rho x_k \frac{\partial \Phi}{\partial x_j} d^3 \vec{x} = 0$$

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int \rho (x_k \langle v_j \rangle + x_j \langle v_k \rangle) d^3 \vec{x}$$

$\frac{d^2 \mathbb{I}_{jk}}{dt^2}$
 $2 \mathbb{T}_{jk}$
 Π_{jk}
 $-\mathbb{W}_{jk}$

$$\therefore \frac{d^2 \mathbb{I}_{jk}}{dt^2} = 2 \mathbb{T}_{jk} + \Pi_{jk} + \mathbb{W}_{jk}$$

→ **Teorema del Virial Tensorial** (*Clausius*, 1870)

- En el caso **estacionario** (independiente del tiempo), $d^2 \mathbb{I}_{jk} / dt^2 = 0$, y obtenemos el **Teorema del Virial Escalar**:

$$2 K_{jk} + W_{jk} = 0 \quad \Rightarrow \quad 2 K = -W$$

tomando los escalares (traza de la matriz) y promedios temporales

Revisar *Binney & Tremaine* 214-219

- Recuerda que, para que sea aplicable el **Teorema del Virial Escalar**, es necesario que:
 - el sistema esté ligado gravitacionalmente
 - el sistema esté en estado estacionario (equilibrio, órbitas periódicas)
 - el sistema esté aislado (sin entrada o salida de masa)
- Si, además, también podemos considerar que hay simetría esférica y isotropía en la distribución de velocidades:

$$\frac{K}{m} = \frac{1}{2} \langle v^2 \rangle$$

$$\frac{U}{m} = -\frac{GM_V}{R_V} = -\frac{4}{10} \frac{GM_V}{R_m}$$

$R_m \rightarrow$ radio medio (contiene mitad de la masa)

$$\mathcal{M}_V = \frac{2.5}{G} \langle v^2 \rangle R_m$$

o:

$$\frac{K}{m} = \frac{1}{2} \sigma^2 = \frac{3}{2} \sigma_{los}^2$$

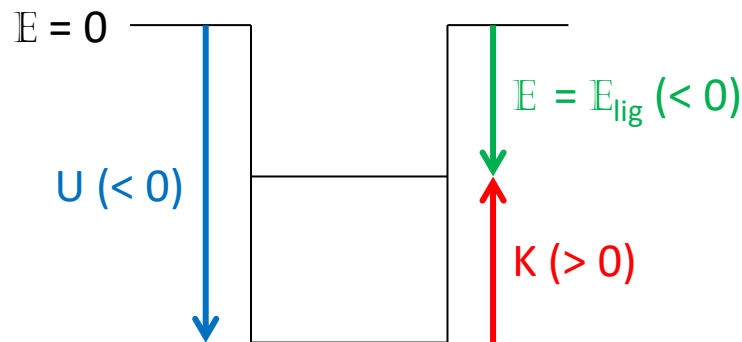
$$\frac{U}{m} = -\frac{GM_V}{R_V} = -\frac{2}{\pi} \frac{GM_V}{R_{V_{proy}}}$$

$$\mathcal{M}_V = \frac{3\pi}{2G} \sigma_{los}^2 R_{V_{proy}}$$

$\sigma_{los}^2 \rightarrow$ dispersión de velocidades en la línea de visión
 $R_{V_{proy}} \rightarrow$ radio Virial proyectado

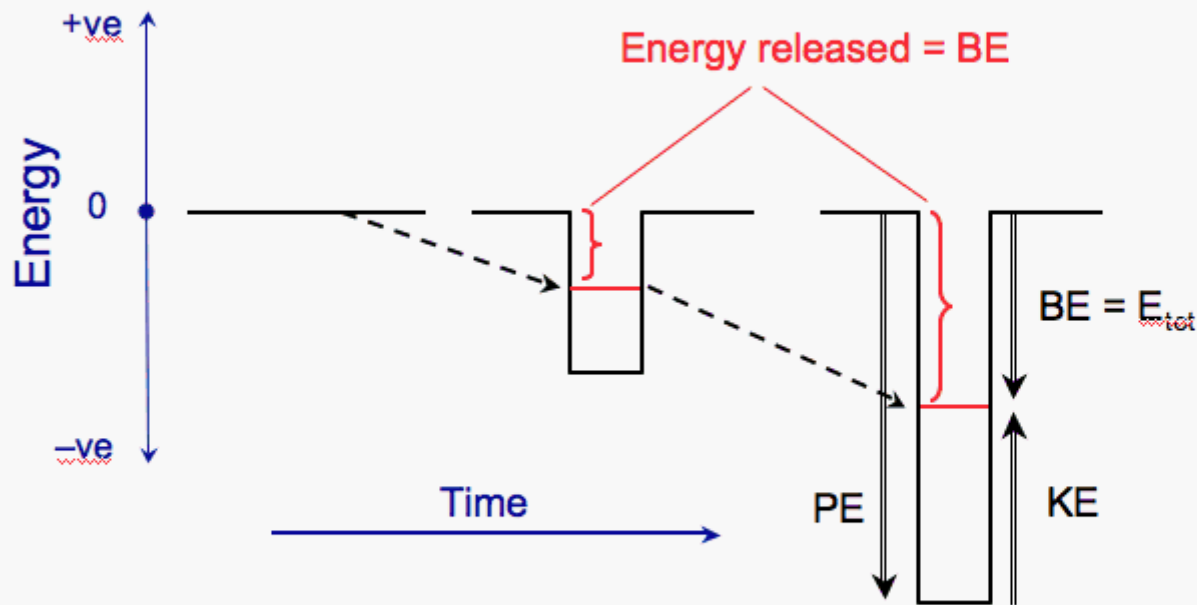
$$\mathbb{E} = K + W = \begin{cases} -\frac{U}{2} + U & \Rightarrow \mathbb{E} = \frac{U}{2} \\ K - 2K & \Rightarrow \mathbb{E} = -K \end{cases}$$

¡la energía total
es **negativa**!
(para un sistema
ligado)



- Cuando un sistema **colapsa gravitacionalmente**, debe **perder energía** para quedar con su energía total negativa. Mitad de esa energía (potencial) es **guardada como energía cinética**, y la otra mitad es **liberada**. En sistemas **disipativos** (p.e. gas), la energía es liberada normalmente por radiación (fotones), mientras en sistemas **no disipativos** (p.e. estrellas, DM) la energía es liberada por eyección de algunas partículas.

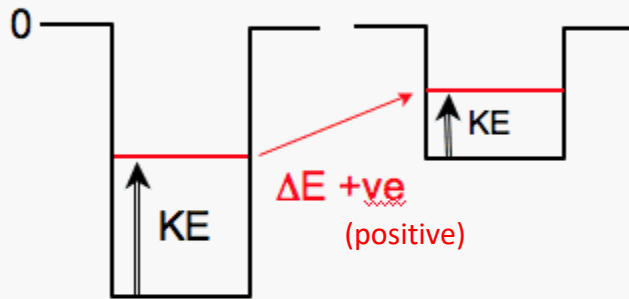
Energy release from collapsing system



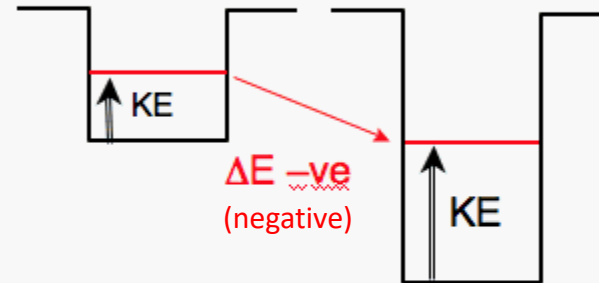
Dissipational system (e.g. gas): energy released via photons

Dissipationless system (e.g. stars; DM): energy released by ejection of a few particles

Negative Specific Heat



Add energy: system
expands (PE more positive)
and cools (KE decreases)



Remove energy: system
contracts (PE more negative)
and heats (KE increases)