Tarea Unidad 3. Estructura y evolución estelar.

1. The atomic lines for a star are observed to be shifted relative to their normal position. This is due to a radial velocity of the star (i.e. the component of the star's velocity along the line of sight). If the shift of the Hβ line is $\Delta\lambda = +0.4 Å$, what is the value and the direction of the radial velocity of the star?

$$\Delta\lambda = +0.4\cancel{Å} \times \frac{0.1nm}{1\cancel{Å}} = 0.04nm$$

Como primera medida se puede inferir que, dado que el $\Delta\lambda$ es positivo, quiere decir que la longitud de onda crece, o bien, sufre el denominado efecto de redshift; es decir, la longitud entre cresta y cresta se extiende. A partir de lo anterior se puede concluir que el cuerpo se está alejando, entonces,

$$\frac{\Delta\lambda}{\lambda_0} = \frac{\lambda - \lambda_0}{\lambda_0} = \frac{V_r}{c} \Rightarrow V_r = \frac{c\Delta\lambda}{\lambda_0}$$

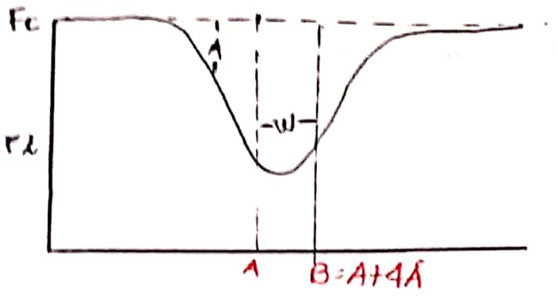
Como la línea que se está analizando es $H_\beta = 486nm$, entonces,

$$V_r = \frac{3\times10^8 m/s \cdot (0.04\cancel{nm})}{486\cancel{nm}} = \underline{24691.35 m/s} \times \frac{1Km}{1000m} = \boxed{24.96 Km/s}$$

La estrella se aleja a una velocidad de 24.96 Km/s.

Scanned with CamScanner

2. Calculate the equivalent width of a rectangular line with a 4Å width and with a flux in its interior that is 2/3 of that of its value in the continuum.



Si se considera que la profundidad de línea es equivalente a

$$A_\lambda = 1 - \frac{F_\lambda}{F_c} = 1 - \frac{2}{3} = \boxed{\frac{1}{3}}$$

por lo cual,

$$A_\lambda = \frac{1}{3}$$, según postula el ejercicio.

Ahora bien, la expresión para el ancho equivalente viene dictada por,

$$W_\lambda = \int A_\lambda d\lambda$$

es fácil notar que, dado que el ejercicio plantea que la línea rectangular tiene un ancho de 4Å, los límites de integración para el ancho equivalente vendrán dados por,

$$W_\lambda = \int_A^B A_\lambda d\lambda = \int_A^B \frac{d\lambda}{3} = \frac{\lambda}{3}\Big|_A^B$$

$$= \left|\frac{B}{3}\right| - \left|\frac{A}{3}\right| \Rightarrow \left|\frac{\cancel{A}+4Å}{3}\right| - \cancel{\left|\frac{A}{3}\right|}$$

Como A es el valor inicial desde donde se toma la integración para el ancho de la línea, este valor se puede asumir como 0, por consiguiente se tiene que,

$$= \frac{4}{3}Å \times \frac{0.1\,nm}{\cancel{1Å}} = \boxed{0.133\,nm}$$

$$\boxed{W_\lambda = \frac{4}{3}Å = 0.13\,nm}$$

Scanned with CamScanner

3. Consider a photosphere composed of pure neutral hydrogen. At what temperature will the density of atoms in the $n=2$ excited state and in the $n=1$ ground state are equal ($N_2/N_1=1$)? And for $n=3$?

En primera medida se debe saber que, al estar hablando de transiciones entre diferentes niveles de energía en el mismo estado de ionización, es conveniente usar la Ecuación de Boltzmann, la cual reza que,

$$\frac{N_2}{N_1} = \frac{g_2}{g_1} e^{-(E_2-E_1)/kT} \Rightarrow \frac{g_1 N_2}{g_2 N_1} = e^{-(E_2-E_1)/kT}$$

$$\Rightarrow \ln\left(\frac{g_2 N_1}{g_1 N_2}\right) = \frac{E_2-E_1}{kT} \Rightarrow \boxed{T = \frac{E_2-E_1}{k\ln\left(\frac{g_2 N_1}{g_1 N_2}\right)}}$$

Ahora bien, si se tiene en cuenta que para el caso del hidrógeno neutro se cumple que $g_n = n^2$ y además $E_{n1}=13.6eV$, $E_{n2}=3.4$, $E_{n3}=1.51$ y $\frac{N_2}{N_1}=1$ tal como plantea el enunciado del ejercicio se tiene que,

$$T_{N_2/N_1(2-1)} = \frac{E_1-E_2}{k\ln\left(\frac{g_2 N_1}{g_1 N_2}\right)} = \frac{13.6eV - 3.4eV}{k\ln\left(\frac{2(2)^2}{2(1)^2}/1\right)} = \frac{10.2eV}{k\ln(4)}$$

Realizando el análisis dimensional para k se tiene que,

$$k = 1.3806\times10^{-23}\,\cancel{J}/K \times \frac{1eV}{1.60217\times10^{-19}\cancel{J}} = 8.6173\times10^{-5}\,eV/K$$

Así,

$$T_{(2-1)} = \frac{10.2eV}{8.6173\times10^{-5}eV/K\cdot\ln(4)} = \boxed{85382.65\,K}$$

Para $n=3$ se tiene que,

$$T_{(3-1)} = \frac{E_2-E_1}{k\ln\left(\frac{g_2 N_1}{g_1 N_2}\right)} = \frac{13.6eV - 1.51eV}{k\ln\left(\frac{2(3)^2}{2(1)^2}/1\right)} = \frac{12.09eV}{k\ln(9)} = \boxed{63852.90\,K}$$

Scanned with CamScanner

4. Calculate the electronic density (n_e) in a gas at $T = 14000\,K$ composed of pure hydrogen where 70% of the atoms are ionized (assume $U_I = 2$).

Como primera medida se plantea que, según la ecuación de Saha se tiene,

$$\frac{n_{II}\, n_e}{n_I} = \left(\frac{2\pi m_e k T}{h^2}\right)^{3/2} \cdot \frac{2 U_{II}}{U_I}\, e^{-\frac{E_{ion}}{kT}}$$

Entonces, si se dice que el 70% de los átomos están ionizados entonces se tiene que

$$\frac{n_{II}}{n_I + n_{II}} = 0.7 \Rightarrow n_{II} = 0.7(n_I + n_{II})$$

$$\Rightarrow n_{II} - 0.7\, n_{II} = 0.7\, n_I$$

$$n_{II}(1 - 0.7) = 0.7\, n_I$$

$$\frac{n_{II}}{n_I} = \frac{0.7}{1-0.7} = 2.33 \approx \boxed{\frac{7}{3}}$$

Además, asumiendo que $U_I = 2$ se tiene que,

Análisis dimensional

$$\frac{kg \cdot J/\cancel{K} \cdot \cancel{K}}{(J \cdot s)^2} \Rightarrow \frac{kg}{\cancel{J^2}} \cdot \frac{\cancel{J}}{s^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{kg}{N \cdot m \cdot s^2} \Rightarrow \frac{\cancel{kg}}{\frac{\cancel{kg} \cdot m}{\cancel{s^2}} \cdot m \cdot \cancel{s^2}}$$

$$\Rightarrow (m^{-2})^{3/2} \Rightarrow m^{-3}$$

$$\frac{n_{II}\, n_e}{n_I} = \left(\frac{2\pi m_e k T}{h^2}\right)^{3/2} \cdot \frac{2 U_{II}}{U_I} \cdot e^{-E_{ion}/kT}$$

$$\frac{7}{3} n_e = \left(\frac{2\pi \cdot (9.1093\times10^{-31}\, kg) \cdot (1.3806\times10^{-23}\, \cancel{J/K}) \cdot (14000\, \cancel{K})}{(6.2660\times10^{-34}\, \cancel{J \cdot s})^2}\right)^{3/2} \cdot \frac{2(1)}{2} \cdot e^{-E_{ion}/kT}$$

$$\frac{7}{3} n_e = (\sim 4\times10^{27}) \cdot e^{-13.6\,\cancel{eV} / (14000\,\cancel{K})(8.6173\times10^{-5}\, \cancel{eV/K})} \cdot \frac{2(1)}{2}$$

$$\frac{7}{3} n_e = (\sim 4\times10^{27}\, m^{-3}) \cdot (1.2711\times10^{-5}) \cdot \frac{2(1)}{\cancel{2}}$$

$$\frac{7}{3} n_e = 5.0844\times10^{22}\, m^{-3}$$

$$n_e = \frac{3}{7}(5.0844\times10^{22}\, m^{-3}) \Rightarrow 2.1790\times10^{22}\, m^{-3} \times \left(\frac{1\,m}{100\,cm}\right)^3 =$$

$$\boxed{n_e = 2.1790\times10^{16}/cm^3}$$

Scanned with CamScanner

5. Assume our photosphere has a constant electron pressure of $P_e = 2P_a$ ($2\ N/m^2$). Use the Saha equation to find the temperature at which the ionized and neutral fractions are equal ($N_2/N_1 = 1$).

Para los estados de ionización se puede usar la ecuación de Saha tal que,

$$\frac{N_2}{N_1} = \frac{0.0333 P_a}{P_e} T^{5/2} e^{-\chi/kT}$$

donde el potencial de ionización de 1 a 2 es 13.6eV para H, entonces,

$$e^{-\chi/k\,T} \rightarrow \chi/k = \frac{13.6\cancel{eV}}{8.6173\times10^{-5}\cancel{eV}/K} = 157622.05$$

Así,

$$1 = (0.0333/2)\, T^{5/2}\, e^{-\frac{157622.05}{T}}$$

$$\frac{1}{(0.0333/2)\, T^{5/2}} = e^{-\frac{157622.05}{T}}$$

$$\ln\left[(0.0333/2)\cdot T^{5/2}\right] = \cancel{\ln}\, \cancel{e}^{-\frac{157622.05}{T}}$$

$$\ln(2/0.0333) + 2.5\ln(T) = -157622.05/T$$

$$2.5\ln(T) - (157622.05/T) = 4.095$$

↳ En este punto usé una calculadora puesto que no se puede resolver de forma algebráica.

Así pues se tiene que, $\boxed{T \approx 8517.30\ K}$

Scanned with CamScanner