ESTRUCTURA GALÁCTICA
Y
DINÁMICA ESTELAR

Referencia: Capítulos 5 y 6 de Binney & Tremaine (*Galactic Dynamics*)

Estabilidad de Sistemas Acolisionales

Dr. César A. Caretta – Departamento de Astronomía – Universidad de Guanajuato

Equilibrio y Estabilidad

Ya discutimos los sistemas estelares acolisionales en **equilibrio**, es decir, los sistemas para los cuales la **E.B.A. estacionaria** es válida:

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{x}} \cdot \vec{v} - \frac{\partial f}{\partial \vec{v}} \cdot \vec{\nabla}\Phi = 0$$

y vimos que los **Teoremas de Jeans** (débil y fuerte) nos indican un camino para construir modelos de sistemas estelares a partir de funciones distribución que dependen solamente de **integrales de movimiento**.

Hablamos también de su aplicación para sistemas con **simetría esférica**:

isotrópicos: $f = f(\mathbb{E})$

o anisotrópicos: $f = f(\mathbb{E}, L)$

o con **simetría axial**: $f = f(\mathbb{E}_{rel}, L_z)$

Pero no discutimos todavía si ese equilibrio es **ESTABLE**, es decir, como responde a perturbaciones internas o externas.

En sistemas mecánicos usuales, una perturbación puede producir una oscilación, puede ser disipada o puede generar un colapso. Eso también es el caso para los sistemas estelares …

En el caso de la respuesta a la perturbación ser la *disipación* de la misma, decimos que el sistema es **estable**, mientras que, cuando la respuesta a una pequeña perturbación *se hace grande*, decimos que el sistema es **inestable**.

Un ejemplo clásico de la importancia de la estabilidad para sistemas estelares es la cuestión estudiada por Laplace (1802): él demostró que los **anillos de Saturno no podrían ser cuerpos rígidos** (como creía la mayoría de los astrónomos de la época) porque el movimiento de dichos anillos sería **inestable**.

Para abordar ese tema, estudiaremos primero la **teoría de perturbaciones**.

Teoría de (respuesta lineal a) perturbaciones

Estudiaremos, en paralelo, la teoría clásica de perturbaciones para **fluidos homogéneos** y su aplicación equivalente para **sistemas estelares**:

Fluidos

Continuidad

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\rho \, \vec{v}) = 0$$

entalpía

Euler

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \left(\vec{v} \cdot \vec{\nabla}\right)\vec{v} = -\vec{\nabla} h - \vec{\nabla}\Phi$$

Poisson

$$\nabla^2 \Phi = 4\pi G \, \rho$$

Estado

$$P = P(\rho)$$

Sistemas Estelares

E. B. A.

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \vec{v} \cdot \frac{\partial f}{\partial \vec{x}} - \vec{\nabla}\Phi \cdot \frac{\partial f}{\partial \vec{v}} = 0$$

Poisson

$$\nabla^2 \Phi = 4\pi G \int f \, d^3\vec{v}$$

$$f = f(\vec{x}, \vec{v}, t)$$

$$\Phi = \Phi(\vec{x}, t)$$

Fluidos

$$\left.\frac{dP(\rho)}{d\rho}\right|_{\rho_0} \equiv v_s^2(\vec{x})$$

$$\vec{\nabla} h = \vec{\nabla}(\frac{P}{\rho}) = \frac{1}{d\vec{x}}\frac{\partial P}{\partial \rho}\frac{d\rho}{\rho} = \frac{1}{d\vec{x}}\frac{\partial P}{\partial \rho} dln\rho$$

$$h = \int_{\rho_0}^{\rho_1} \vec{\nabla} h \cdot d\vec{x} = \int_{\rho_0}^{\rho_1} \frac{\partial P}{\partial \rho} d\,ln\rho = v_s^2 \int_{\rho_0}^{\rho_1} d\,ln\rho$$

$$h = v_s^2(ln\,\rho_1 - ln\,\rho_0) = v_s^2\; ln(\rho_1/\rho_0)$$

Perturbación

$$\varepsilon \ll 1$$

$$\rho(\vec{x},t) = \rho_0(\vec{x}) + \varepsilon\,\rho_1(\vec{x},t)$$

$$\vec{v}(\vec{x},t) = \vec{v}_0(\vec{x}) + \varepsilon\,\vec{v}_1(\vec{x},t)$$

$$h(\vec{x},t) = h_0(\vec{x}) + \varepsilon\,h_1(\vec{x},t)$$

$$\Phi(\vec{x},t) = \Phi_0(\vec{x}) + \varepsilon\,\Phi_1(\vec{x},t)$$

Jeans (1902),
Phil. Trans. R. S. Lond. 199, 1

Sistemas Estelares

Estacionarios

$$f = f(\vec{x},\vec{v},t) \qquad \Phi = \Phi(\vec{x},t) \quad \Rightarrow \quad f_0 = f_0(\vec{x},\vec{v}) \qquad \Phi_0 = \Phi_0(\vec{x})$$

$$\vec{v}\cdot\frac{\partial f_0}{\partial \vec{x}} - \vec{\nabla}\Phi_0 \cdot \frac{\partial f_0}{\partial \vec{v}} = 0$$

$$\nabla^2\Phi_0 = 4\pi G \int f_0\, d^3\vec{v}$$

Perturbación

$$\varepsilon \ll 1$$

$$f(\vec{x},\vec{v},t) = f_0(\vec{x},\vec{v}) + \varepsilon\,f_1(\vec{x},\vec{v},t)$$

$$\Phi(\vec{x},t) = \Phi_0(\vec{x}) + \varepsilon\,\Phi_1(\vec{x},t)$$

Fluidos

Ecuaciones linealizadas

$$\frac{\partial \rho_1}{\partial t} + \vec{\nabla}\cdot(\rho_0\,\vec{v}_1) + \vec{\nabla}\cdot(\rho_1\,\cancelto{0}{\vec{v}_0}) = 0 \qquad [1]$$

$$\frac{\partial \vec{v}_1}{\partial t} + (\cancelto{0}{\vec{v}_0}\cdot\vec{\nabla})\vec{v}_1 + (\vec{v}_1\cdot\vec{\nabla})\cancelto{0}{\vec{v}_0} = -\vec{\nabla}h_1 - \vec{\nabla}\Phi_1 \qquad [2]$$

$$\nabla^2\Phi_1 = 4\pi G\,\rho_1 \qquad [3]$$

$$h_1 = v_s^2\, ln\left(\frac{\rho_1}{\rho_0}\right) \Rightarrow h_1 \simeq v_s^2\left(\frac{\rho_1}{\rho_0}\right) \qquad [4]$$

$$\vec{v}_0 = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial t}[1]: \qquad \frac{\partial^2 \rho_1}{\partial t^2} + \rho_0(\vec{\nabla}\cdot\frac{\partial \vec{v}_1}{\partial t}) = 0$$

$$\vec{\nabla}\cdot[2]: \qquad (\vec{\nabla}\cdot\frac{\partial \vec{v}_1}{\partial t}) = -\nabla^2 h_1 - \nabla^2\Phi_1$$

$$\frac{\partial^2 \rho_1}{\partial t^2} + \rho_0\left[-\nabla^2(v_s^2\frac{\rho_1}{\rho_0}) - (4\pi G\,\rho_1)\right] = 0$$

Sistemas Estelares

Ecuaciones linealizadas

$$\frac{\partial f_1}{\partial t} + \vec{v}\cdot\frac{\partial f_1}{\partial \vec{x}} - \cancelto{0}{\vec{\nabla}\Phi_0}\cdot\frac{\partial f_1}{\partial \vec{v}} - \vec{\nabla}\Phi_1\cdot\frac{\partial f_0}{\partial \vec{v}} = 0 \qquad [1]$$

$$\nabla^2\Phi_1 = 4\pi G\int f_1\, d^3\vec{v} \qquad [2]$$

Timo de Jeans

$$\Phi_0 = 0$$

$$\frac{\partial f_1}{\partial t} + \vec{v}\cdot\frac{\partial f_1}{\partial \vec{x}} - \vec{\nabla}\Phi_1\cdot\frac{\partial f_0}{\partial \vec{v}} = 0$$

$$\nabla^2\Phi_1 = 4\pi G\int f_1\, d^3\vec{v}$$

Fluidos

Ecuación de perturbación

$$\frac{\partial^2 \rho_1}{\partial t^2} - v_s^2 \nabla^2 \rho_1 - 4\pi G \rho_0 \, \rho_1 = 0$$

Solución

$$\rho_1(\vec{x}, t) = C e^{i(\vec{k}\cdot\vec{x} - \omega t)}$$

Relación de dispersión (modos)

$$\omega^2 = v_s^2 k^2 - 4\pi G \rho_0$$

Modos INESTABLES (crecen o decaen)

$$\omega^2 < 0$$

$$v_s^2 k^2 < 4\pi G \rho_0 \Rightarrow k^2 < \frac{4\pi G \rho_0}{v_s^2} = k_J^2$$

$$\lambda = \frac{2\pi}{k} \Rightarrow \boxed{\lambda^2 > \frac{\pi \, v_s^2}{G \rho_0} = \lambda_J^2}$$

Modos ESTABLES (oscilatorios)

$$\omega^2 > 0 \qquad \boxed{\lambda^2 < \lambda_J^2}$$

Sistemas Estelares

Soluciones

$$f_1(\vec{x}, \vec{v}, t) = f_a(\vec{v}) \; e^{i(\vec{k}\cdot\vec{x} - \omega t)}$$

$$\Phi_1(\vec{x}, t) = \Phi_a \; e^{i(\vec{k}\cdot\vec{x} - \omega t)}$$

Ejemplo de $f_a(v)$: Maxwelliana

$$f_a(\vec{v}) = \frac{\rho_0}{(2\pi\sigma^2)^{3/2}} \; e^{-v^2/(2\sigma^2)}$$

Modos INESTABLES (crecen o decaen)

$$\boxed{\lambda^2 > \frac{\pi \, \sigma^2}{G \rho_0} = \lambda_J^2}$$

Modos ESTABLES (oscilatorios)

$$\boxed{\lambda^2 < \lambda_J^2}$$

Estabilidad de Sistemas con Rotación Uniforme

Fluidos

termo de Coriolis

$$\frac{\partial \Sigma_1}{\partial t} + \Sigma_0(\vec{\nabla} \cdot \vec{v}_1) = 0$$

$$\frac{\partial \vec{v}_1}{\partial t} = -\frac{v_s^2}{\Sigma_0}\vec{\nabla}\Sigma_1 - \vec{\nabla}\Phi_1 - 2\Omega \times \vec{v}_1$$

$$\nabla^2\Phi_1 = 4\pi G\,\Sigma_1\,\delta(z)$$

Soluciones

$$\Sigma_1(x,y,t) = \Sigma_a\, e^{i(\vec{k}\cdot\vec{x}-\omega t)}$$

$$\vec{v}_1(x,y,t) = (v_{ax}\hat{e}_x + v_{ay}\hat{e}_y)\, e^{i(\vec{k}\cdot\vec{x}-\omega t)}$$

$$\Phi_1(x,y,z,t) = \Phi_a\, e^{i[(kx-\omega t)-k|z|]}$$

Relación de dispersión (modos)

$$\omega^2 = 4\Omega^2 - 2\pi G\Sigma_0|k| + v_s^2k^2$$

Sistemas Estelares

Fluidos

$$\omega^2 = 4\Omega^2 - 2\pi G\Sigma_0|k| + v_s^2 k^2$$

Modos INESTABLES (crecen o decaen)

$$\omega^2 < 0$$

$\Omega = 0$

$$v_s^2 k^2 < 2\pi G\Sigma_0|k|$$

$$|k| < \frac{2\pi G\Sigma_0}{v_s^2} = k_J$$

$$k_J \equiv \frac{2\pi G\Sigma_0}{v_s^2}$$

$$\lambda = \frac{2\pi}{k} \quad \Rightarrow \quad \lambda_J = \frac{v_s^2}{G\Sigma_0}$$

$v_s^2 = 0$

disco frío

$$2\pi G\Sigma_0|k| > 4\Omega^2$$

$$|k| > \frac{2\Omega^2}{\pi G\Sigma_0} = k_{crit}$$

$$k_{crit} = \frac{2\Omega^2}{\pi G\Sigma_0}$$

$$\lambda = \frac{2\pi}{k} \quad \Rightarrow \quad \lambda_{crit} = \frac{\pi^2 G\Sigma_0}{\Omega^2}$$

Sistemas Estelares

Fluidos

El disco frío es considerado **¡violentamente inestable!**
De hecho, ni la presión ni la rotación solas son capaces de estabilizar un disco infinito, pero **la combinación de las dos** sí.

Caso General

$$\omega^2 < 0 \quad \Rightarrow$$

$$v_s^2 \; k^2 - 2\pi G\Sigma_0 \; |k| + 4\Omega^2 < 0$$

Es decir, una ecuación cuadrática en *k*, con mínimo en:

$$|k| = \frac{\pi G\Sigma_0}{v_s^2} = \frac{1}{2}k_J$$

Así, el disco delgado (2D) será **estable** en cualquier longitud si ese mínimo es positivo, lo que requiere que:

$$\frac{v_s\Omega}{G\Sigma_0} \geq \frac{\pi}{2} = 1.5708$$

Sistemas Estelares

Fluidos

Rotación uniforme

Mientras que un **disco isotérmico con rotación uniforme** será estable si:

$$\frac{v_s \Omega}{G\Sigma_0} \geq 1.06$$

Goldreich & Lynden-Bell (1965), MNRAS 130, 97

Otros modos ESTABLES (oscilatorios)

$$\omega^2 = 4\Omega^2 - 2\pi G\Sigma_0|k| + v_s^2 k^2$$

$$\omega^2 \geq 0$$

Sistemas Estelares

$$\frac{\sigma \Omega}{G\Sigma_0} \geq 1.68$$

Toomre (1964), ApJ 139, 1217

Interpretación de Toomre

Sistemas Estelares

Consideremos un **disco estelar** (el gas y el polvo del ISM pueden ser despreciados por corresponder a una fracción pequeña de la masa del disco). Consideremos, ahora, una **sobredensidad** local (perturbación), de radio R.

Sin rotación:

$$t_{coll} = t_{ff} \sim \frac{1}{\sqrt{G\rho}} \sim \left[\frac{1}{G(\frac{M}{R^3})}\right]^{1/2} \sim \left(\frac{R^3}{GM}\right)^{1/2} \sim \left(\frac{R}{G\Sigma}\right)^{1/2}$$

$$t_{esc} \sim \frac{R}{\sigma}$$

Colapso: $t_{ff} < t_{esc}$

$$\left(\frac{R}{G\Sigma}\right)^{1/2} < \frac{R}{\sigma} \quad \Rightarrow \quad R_J > \frac{\sigma^2}{G\Sigma}$$

Con rotación:

$$F_{centrif} \sim RM\Omega^2 \sim RB^2$$

$$F_{grav} \sim \frac{GM}{R^2} \sim G\Sigma$$

Colapso: $F_{centrif} < F_{grav}$

$$RB^2 < G\Sigma \quad \Rightarrow \quad R_{rot} < \frac{G\Sigma}{B^2}$$

Luego, el rango **de inestabilidad** es: $R_J < R < R_{rot} \iff \frac{\sigma^2}{G\Sigma} < R < \frac{G\Sigma}{B^2}$

O, sustituyendo B: $B = \frac{\kappa^2}{4\Omega} \sim \frac{\kappa}{3}$

$$\boxed{\frac{\sigma^2}{G\Sigma} < R < \frac{9G\Sigma}{\kappa^2}}$$

[Toomre (1964), ApJ 139, 1217]

Fluidos (gas)

Considerando ahora la relación entre Ω (velocidad de rotación) y κ (frecuencia epicíclica):

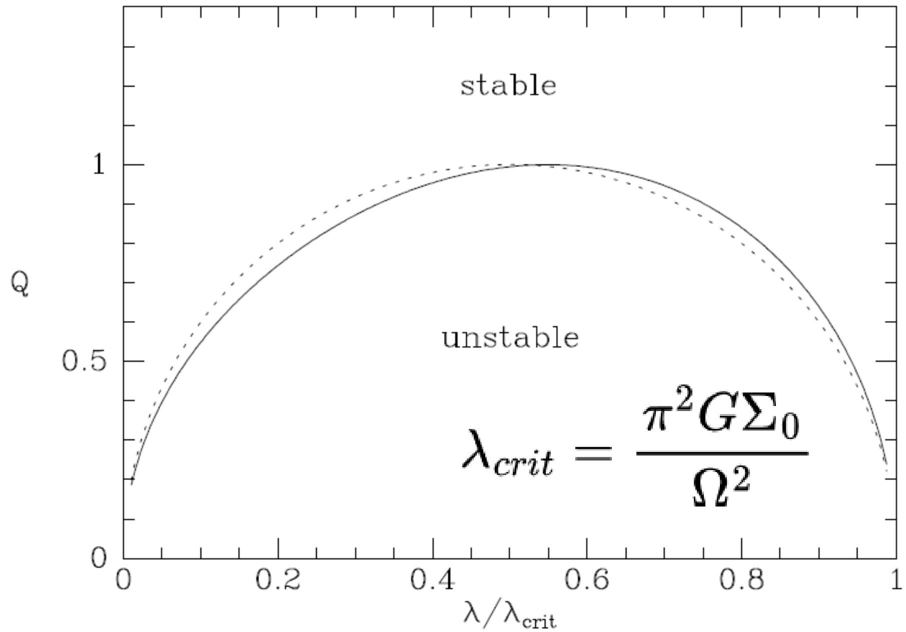
$$\Omega \sim \frac{\kappa}{2} \quad \Rightarrow \quad 4\Omega^2 \sim \kappa^2$$

$$\omega^2 = \kappa^2 - 2\pi G\Sigma|k| + v_s^2 k^2$$

y retomando la ecuación general para el **equilibrio estable**:

$$\frac{v_s \Omega}{G\Sigma} \geq \frac{\pi}{2} \quad \Rightarrow \quad \frac{v_s \kappa}{2G\Sigma} \geq \frac{\pi}{2} \quad \Rightarrow$$

$$Q \equiv \frac{v_s \kappa}{\pi G\Sigma} \geq 1$$



$$\lambda_{crit} = \frac{\pi^2 G\Sigma_0}{\Omega^2}$$

Figure 6.13 Neutral stability curves for tightly wound axisymmetric perturbations in a fluid disk (dashed line, from eq. 6.67) and a stellar disk (solid line, from eq. 6.70).

Sistemas Estelares

$$Q \equiv \frac{\sigma\ \kappa}{3.36\, G\Sigma} \geq 1$$

Sistemas Estelares

- Se puede notar que los casos de fluido y sistemas estelares **¡casi coinciden!**, con v_s siendo equivalente a σ.

- Las desigualdades arriba son conocidas como **Criterios de Estabilidad de Toomre**.

- Pueden ser consideradas como una **escala de temperatura** para discos galácticos: discos "calientes" tienen grande dispersión y, por lo tanto, valores grandes de Q (estabilidad), mientras que discos "fríos" son inestables (pequeños valores de Q).

- **Vecindad solar**:

  $\Sigma_\star \sim (36 \pm 5)\ M_\odot/\mathrm{pc}$; $\kappa_0 \sim (37 \pm 3)$ km/s/kpc ; $\sigma \sim (32 \pm 2)$ km/s , lo que implica:

  $Q_\star \sim 2.7 \pm 0.4$, es decir, **estable**.

  $\Sigma_g \sim 13\ M_\odot/\mathrm{pc}$; $\kappa_0 \sim (37 \pm 3)$ km/s/kpc ; $v_s \sim 7$ km/s , lo que implica:

  $Q_g \sim 1.5$, es decir, **estable**.

  En verdad, las dos componentes son acopladas por gravedad, y el valor final debe ser algo intermedio.

- En resumen, los factores que promueven la instabilidad gravitacional son: **baja dispersión** de velocidades estelares, **alta densidad** de masa superficial y **bajas frecuencias** epicíclicas.

How I need a drink, alcoholic of course,

3, 1 4 1 5 9 2 6

after the heavy chapters involving quantum mechanics

5 3 5 8 9 7 9

$$\pi = 3.141\,592\,653\,589\,79\ldots$$

James H. Jeans