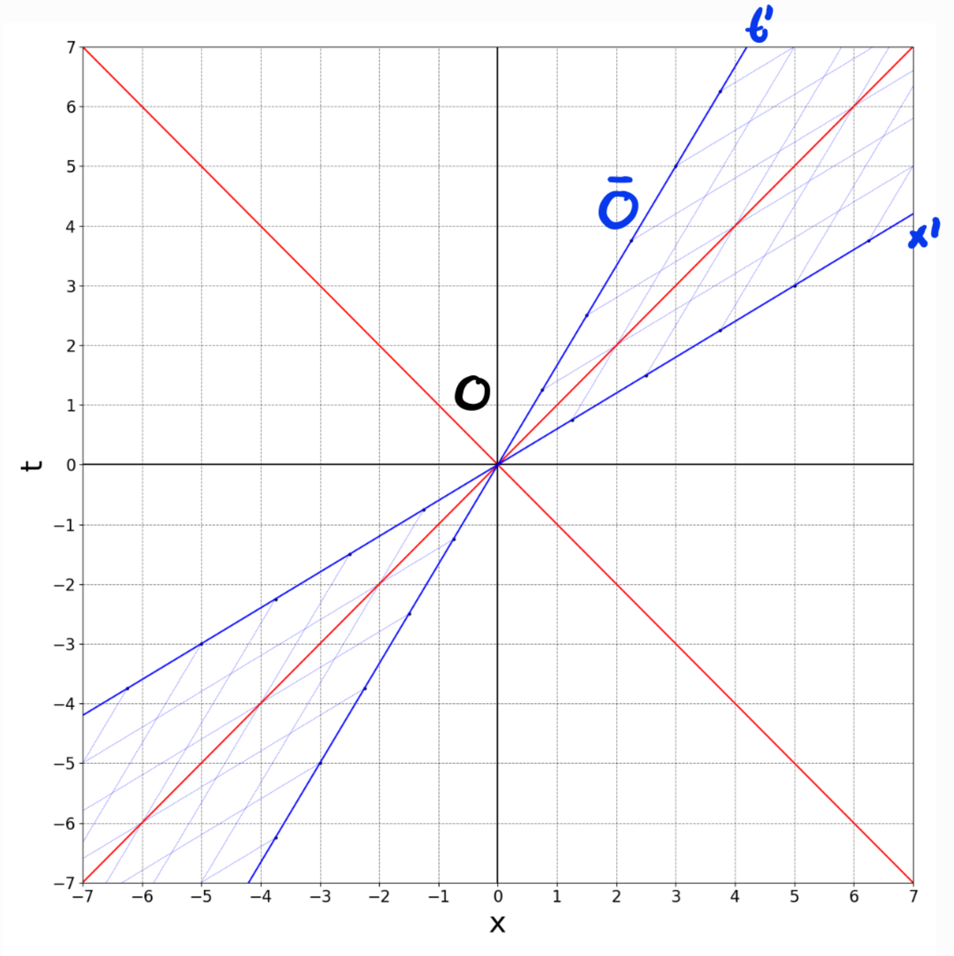
Ejercicio #1.



O:

$\vec{A} = 5, 1, -1, 0$

$\vec{B} = -2, 3, 1, 6$

$\vec{C} = 2, -2, 0, 0$

$\bar{O}$: $(v = 0.6)$

$\vec{A} = (?, ?, ?, ?)$

$\vec{B} = (?, ?, ?, ?)$

$\vec{C} = (?, ?, ?, ?)$

a) Con tal de hallar las componentes de los vectores $\vec{A}$, $\vec{B}$ y $\vec{C}$ en el marco de $\bar{O}$, podemos usar una transformación de Lorentz de la forma $\Lambda^{\bar{\alpha}}{}_{\beta}(v)$. Para un vector aleatorio R esto es,

$$R^{\bar{\alpha}} = \Lambda^{\bar{\alpha}}{}_{\beta} R^{\beta}$$

o en términos matriciales,

$$\begin{bmatrix} R^{\bar{0}} \\ R^{\bar{1}} \\ R^{\bar{2}} \\ R^{\bar{3}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \gamma & -\gamma v & 0 & 0 \\ -\gamma v & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R^{0} \\ R^{1} \\ R^{2} \\ R^{3} \end{bmatrix}$$

con $\gamma = 1/\sqrt{(1-v^2)}$

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-0.6^2}} = 1.25$$

Operando tenemos,

- $\vec{A} = \overbrace{(A^0, A^1, A^2, A^3) = (5, 1, -1, 0)}^{O}$

$$A^{\bar{0}} = \Lambda^{\bar{0}}{}_{\beta} A^{\beta} = \Lambda^{\bar{0}}{}_{0} A^0 + \Lambda^{\bar{0}}{}_{1} A^1 + \Lambda^{\bar{0}}{}_{2} A^2 + \Lambda^{\bar{0}}{}_{3} A^3$$

$$= \gamma A^0 + (-\gamma v) A^1 + 0 \cdot A^2 + 0 \cdot A^3$$

$$= \gamma 5 - \gamma 0.6$$

$$A^{\bar{0}} = 4.4\gamma = 5.5$$

$$A^{\bar{1}} = \Lambda^{\bar{1}}{}_{\beta} A^{\beta} = (-\gamma v) 5 + \gamma \cdot 1 + (0 \cdot -1) + (0 \cdot 0)$$

$$A^{\bar{1}} = -\gamma(0.6 \cdot 5) + \gamma = -2\gamma = -2.5$$

$$A^{\bar{2}} = \Lambda^{\bar{2}}{}_{\beta} A^{\beta} = 0 \cdot 5 + 1 \cdot 0 + -1 \cdot 1 + 0 \cdot 0$$

$$A^{\bar{2}} = -1$$

$$A^{\bar{3}} = \Lambda^{\bar{3}}{}_{\beta} A^{\beta} = 0 \cdot 5 + 1.0 + -1 \cdot 0 + 0 \cdot 0 \qquad A^{\bar{3}} = 0$$

- $\vec{B} = \overbrace{(B^0, B^1, B^2, B^3) = (-2, 3, 1, 6)}^{O}$

$$B^{\bar{0}} = \Lambda^{\bar{0}}{}_{\beta} B^{\beta} = \gamma(-2) + (-\gamma v) 3 + 0 \cdot 1 + 0 \cdot 6$$

$$B^{\bar{0}} = -2\gamma - 1.8\gamma = -3.8\gamma = -4.75$$

$$B^{\bar{1}} = \Lambda^{\bar{1}}{}_{\beta} B^{\beta} = (-\gamma v)(-2) + \gamma 3 + 0 \cdot 1 + 6 \cdot 0$$

$$B^{\bar{1}} = 1.2\gamma + 3\gamma = 4.2\gamma = 5.25$$

$$B^{\bar{2}} = \Lambda^{\bar{2}}{}_{\beta} B^{\beta} = 0 \cdot -2 + 0 \cdot 3 + 1 \cdot 1 + 6 \cdot 0 = 1$$

$$B^{\bar{3}} = \Lambda^{\bar{3}}{}_{\beta} B^{\beta} = 0 \cdot 2 + 0 \cdot 3 + 1.0 + 6 \cdot 1 = 6$$

$$\bullet\ \vec{C} = \overbrace{(C^0, C^1, C^2, C^3) = (2, -2, 0, 0)}^{O}$$

$$C^{\bar{0}} = \Lambda^{\bar{0}}{}_{\beta} C^{\beta} = \gamma 2 + (-\gamma v)(-2) + 0\cdot 0 + 0\cdot 0$$

$$C^{\bar{0}} = 2\gamma + 1.2\gamma = 3.2\gamma = 4$$

$$C^{\bar{1}} = \Lambda^{\bar{1}}{}_{\beta} C^{\beta} = (-\gamma v)2 + \gamma(-2) + 0.0 + 0\cdot 0)$$

$$C^{\bar{1}} = -1.2\gamma - 2\gamma = -3.2\gamma = -4$$

$$C^{\bar{2}} = \Lambda^{\bar{2}}{}_{\beta} C^{\beta} = 0\cdot 2 + 0\cdot(-2) + 0\cdot 0 + 0\cdot 0 = 0$$

$$C^{\bar{3}} = \Lambda^{\bar{3}}{}_{\beta} C^{\beta} = 0\cdot 2 + 0\cdot(-2) + 0\cdot 0 + 0\cdot 0 = 0$$

Así, los componentes de $\vec{A}$, $\vec{B}$ y $\vec{C}$ en $\bar{O}$ son,

$$\vec{A}(\bar{O}) = (5.5, -2.5, -1, 0)$$

$$\vec{B}(\bar{O}) = (-4.75, 5.25, 1, 6)$$

$$\vec{C}(\bar{O}) = (4, -4, 0, 0)$$

b) Si tenemos que la definición del producto punto para 4-vectores en el espacio de Minkowski está dada por,

$$\vec{A}\cdot\vec{B} = -A^0B^0 + A^1B^1 + A^2B^2 + A^3B^3$$

para $\vec{A}\cdot\vec{B}$, $\vec{B}\cdot\vec{C}$, $\vec{A}\cdot\vec{C}$ y $\vec{C}\cdot\vec{C}$ tendremos que, en el marco de $\bar{O}$:

$$\vec{A}\cdot\vec{B} = -(5.5\cdot(-4.75)) + (-2.5)5.25 + (-1)1 + 6\cdot 0 = 12$$

$$\vec{B}\cdot\vec{C} = 4.75\cdot 4 - 5.25\cdot 4 + 1\cdot 0 + 6\cdot 0 = -2$$

$\vec{A}\cdot\vec{C} = -5.5\cdot 4 + 2.5\cdot 4 + 0\cdot -1 + 0\cdot 0 = -12$

$\vec{C}\cdot\vec{C} = -4\cdot 4 + (-4\cdot -4) + 0\cdot 0 + 0\cdot 0 = 0$

Así,

$$\vec{A}\cdot\vec{B} = 12 \,,\ \vec{B}\cdot\vec{C} = -2 \,,\ \vec{A}\cdot\vec{C} = -12 \,,\ \vec{C}\cdot\vec{C} = 0$$

También vemos que, usando los componentes de O,

$\vec{A}\cdot\vec{B} = -(5\cdot -2) + 1\cdot 3 + (-1)\cdot 1 + 0\cdot 6 = 12$

$\vec{B}\cdot\vec{C} = -(2\cdot -2) + 3\cdot -2 + 1\cdot 0 + 6\cdot 0 = -2$

$\vec{A}\cdot\vec{C} = -(5\cdot 2) + -2\cdot 1 + -1\cdot 0 + 0\cdot 0 = -12$

$\vec{C}\cdot\vec{C} = -(2\cdot 2) + (-2\cdot -2) + 0\cdot 0 + 0\cdot 0 = 0$ //

$\vec{A} = 5, 1, -1, 0$

$\vec{B} = -2, 3, 1, 6$

$\vec{C} = 2, -2, 0, 0$

Como se puede observar, el producto punto de dos 4-vectores es idependiente del marco de referencia.

c) Para saber si los vectores $\vec{A}, \vec{B}$ y $\vec{C}$ son timelike, spacelike o lightlike debemos computar el producto punto de los vectores con ellos mismos, esto es,

$\vec{A}\cdot\vec{A} = -(5\cdot 5) + 1\cdot 1 + (-1)(-1) + 0\cdot 0 = -23 \longrightarrow$ timelike

$\vec{B}\cdot\vec{B} = -(-2\cdot -2) + 3\cdot 3 + 1\cdot 1 + 6\cdot 6 = 42 \longrightarrow$ spacelike

$\vec{C}\cdot\vec{C} = 0 \longrightarrow$ lightlike

//

$\Delta s < 0$, timelike $\quad \Delta s > 0$, spacelike $\quad \Delta s = 0$, lightlike

Ejercicio #2.

Si se tiene que la 4-velocidad del cohete es $\vec{U}(O) \to (2,1,1,1)$, y el 4-momento del rayo cósmico es $\vec{P}(O) \to (300, 299, 0, 0) \times 10^{-27} kg$, el problema solicita encontrar la energía del rayo cósmico medida por el cohete usando transformaciones de Lorentz y la relación

$$-\vec{p} \cdot \vec{U}_{obs} = \bar{E}.$$

Método 1

a) La matriz de Lorentz generalizada para una velocidad $\vec{V}$, $|V|^2 = V_x^2 + V_y^2 + V_z^2$ con $\gamma = 1/\sqrt{1-|V|^2}$ es,

$$\Lambda^{\bar{\alpha}}_{\beta} = \begin{bmatrix} \gamma & -\gamma V_x & -\gamma V_y & -\gamma V_z \\ -\gamma V_x & 1+(\gamma-1)\frac{V_x^2}{V^2} & (\gamma-1)\frac{V_x V_y}{V^2} & (\gamma-1)\frac{V_x V_z}{V^2} \\ -\gamma V_y & (\gamma-1)\frac{V_y V_x}{V^2} & 1+(\gamma-1)\frac{V_y^2}{V^2} & (\gamma-1)\frac{V_y V_z}{V^2} \\ -\gamma V_z & (\gamma-1)\frac{V_z V_x}{V^2} & (\gamma-1)\frac{V_z V_y}{V^2} & 1+(\gamma-1)\frac{V_z^2}{V^2} \end{bmatrix}$$

Dado que tenemos los componentes de nuestra 4-velocidad en el marco O, podemos conocer la magnitud de la velocidad $|V|$, esto es,

$$V^{\alpha} = \frac{U^{\alpha}}{U^0} = \frac{U^{\alpha}}{2} = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = (V_x, V_y, V_z)$$

entonces tendremos que,

$$v^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2$$

$$v^2 = \frac{3}{4} \rightarrow v = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Así pues γ tendrá una magnitud de,

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{4}}} = 2.$$

Nuestra matriz de Lorentz tomará los siguientes valores.

$$\Lambda^{\bar{\alpha}}{}_{\beta} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 4/3 & 1/3 & 1/3 \\ -1 & 1/3 & 4/3 & 1/3 \\ -1 & 1/3 & 1/3 & 4/3 \end{bmatrix}$$

Ahora bien, dado que conocemos las componentes del 4-momento en O, podemos emplear una transformación de Lorentz para hallar las componentes en $\bar{O}$, es decir, el marco de referencia del cohete. Operando tenemos,

$$p^{\bar{\alpha}} = \Lambda^{\bar{\alpha}}{}_{\beta} p^{\beta}$$

$$p^{\bar{\alpha}} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 4/3 & 1/3 & 1/3 \\ -1 & 1/3 & 4/3 & 1/3 \\ -1 & 1/3 & 1/3 & 4/3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 300 \\ 299 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \times 10^{-27} kg$$

Con lo cual obtenemos,

$$p^{\bar{0}} = 2 \cdot 300 + (-1)(299) + (-1) \cdot 0 + (-1) \cdot 0 = 301$$

$$p^{\bar{1}} = (-1) \cdot 300 + 4/3 (299) + 1/3 \cdot 0 + 1/3 \cdot 0 = 296/3$$

$$p^{\bar{2}} = (-1) \cdot 300 + 1/3 (299) + 4/3 \cdot 0 + 4/3 \cdot 0 = -601/3$$

$$p^{\bar{3}} = (-1) \cdot 300 + 1/3 (299) + 4/3 \cdot 0 + 4/3 \cdot 0 = -601/3$$

Podemos asegurarnos que el resultado es consistente teniendo en cuenta que la magnitud del 4-momento en ambos marcos de referencia es invariante, esto es $\vec{P} \cdot \vec{P}(O) = \vec{P} \cdot \vec{P}(\bar{O})$

$$p^{\alpha} p^{\alpha} = -(300)^2 + (299)^2 + 0 + 0 = -599$$

$$p^{\bar{\alpha}} p^{\bar{\alpha}} = -(301)^2 + (296/3)^2 + (-601/3)^2 + (-601/3)^2 = -599$$

tal como se esperaba.

Ahora bien, si tenemos en cuenta que la energía es el componente x^0 del 4-momento, obtenemos que, en el marco del cohete,

$$p^{\bar{\alpha}} \to (\bar{E}, \bar{p}_x, \bar{p}_y, \bar{p}_z)$$

por tanto,

$$\bar{E} = 301 \times 10^{-27} kg = 3.01 \times 10^{-25} kg$$

Método 2.

b) Usando la expresión $-\vec{p} \cdot \vec{u}_{obs} = \bar{E}$, obtenemos,

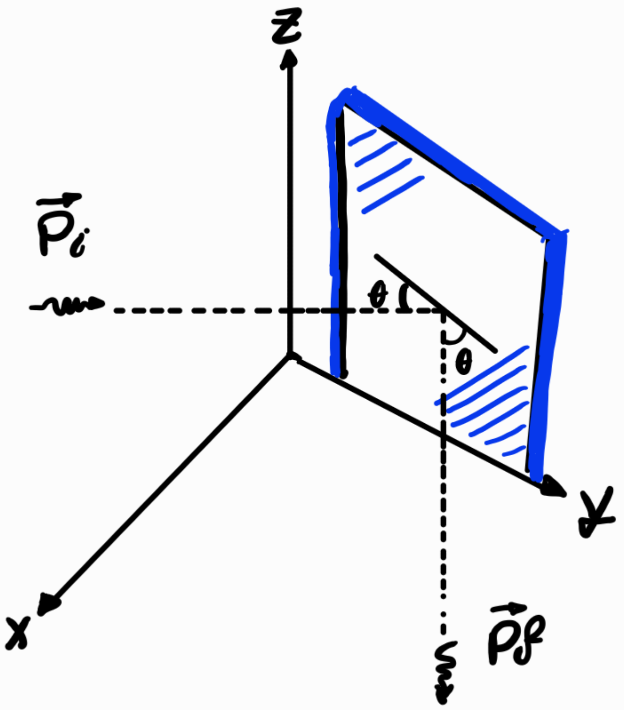
$$\bar{E} = -[-(300 \cdot 2) + (299 \cdot 1) + (1 \cdot 0) + (1 \cdot 0)] \times 10^{-27} kg$$

$$\bar{E} = 301 \times 10^{-27} kg = 3.01 \times 10^{-25} kg$$

c) El método 2 es mucho más rapido pues permite omitir encontrar la transformación de Lorentz para el 4-momento. Por otra parte, el método 2 contempla que $\vec{p} \cdot \vec{e}_{\bar{0}} = \vec{p} \cdot \vec{u}_{obs}$, lo cual es una expresión general independiente del marco de referencia.

Ejercicio #3.

Visualizando el ejercicio de la siguiente manera tenemos que, para un fotón con frecuencia ν viajando en el plano x-y y un espejo en el plano z-y,



Si consideramos que la energía del fotón está dada por $E = h\nu$, podemos expresar el 4-momento del fotón como,

$$\vec{P_i} = (h\nu, \cos\theta\, h\nu, \operatorname{sen}\theta\, h\nu, 0)$$

Por conservación del 4-momento sabemos que,

$$\vec{P_i} = \vec{Pf}$$

dado que no hay cambio en la frecuencia del fotón P_i^0 será igual a Pf^0, así,

$$P_i^0 = Pf^0 = h\nu,$$

ahora bien, considerando que el fotón solo viaja en el plano x-y tenemos que,

$$P_i^3 = Pf^3 = 0.$$

Mas aún, si se considera que el momento transferido sólo ocurre en el eje x, vamos a tener que,

$$P_i^2 = Pf^2 = \text{sen}\,\theta h\nu.$$

$$P_i^1 = Pf^1 = \pm \cos\theta h\nu$$

Así pues, $-\cos\theta h\nu$ representa el cambio de dirección del fotón, con esto tenemos que,

$$\vec{P}_i = (h\nu, \cos\theta h\nu, \text{sen} h\nu, 0)$$
$$\vec{P}f = (h\nu, -\cos\theta h\nu, \text{sen} h\nu, 0)$$

El fotón y la(s) partículas del espejo interactúan de manera elástica, la energía del fotón, y su frecuencia, son las mismas antes y después de la colisión. El cambio en la dirección del fotón, se traduce en que el espejo adquiere momento en la dirección $+x$.

Con esto en consideración, tenemos que,

$$(P_i^0 - Pf^0, P_i^1 - Pf^1, P_i^2 - Pf^2, P_i^3 - Pf^3) = (Pe^0, Pe^1, Pe^2, Pe^3)$$

donde Pe^α representa la(s) partículas del espejo.

Reemplazando valores obtenemos que,

$$(h\nu - h\nu, \cos\theta h\nu - (-\cos\theta h\nu), \text{sen}\theta h\nu - \text{sen}\theta h\nu, 0) =$$
$$(Pe^0, Pe^1, Pe^2, Pe^3)$$

$$P_e^2 = 2h\nu\cos\theta$$

Cuando el fotón es absorbido, en vez de ser deflectado, todo el momento se transfiere al espejo, lo que aumenta su energía, esto es,

$$(P_i^0 - \cancelto{0}{P_f^0}, P_i^1 - \cancelto{0}{P_f^1}, P_i^2 - \cancelto{0}{P_f^2}, P_i^3 - \cancelto{0}{P_f^3}) = (P_e^0, P_e^1, P_e^2, P_e^3)$$

$$= (P_e^0, P_e^1, P_e^2, P_e^3) = (h\nu, \cos\theta h\nu, \operatorname{sen}\theta h\nu, 0)$$

Ejercicio #4.

Medidas en el marco inercial del Sol, la energía del fotón del CMB y del protón son respectivamente,

$$E_\gamma = h\nu = 2\times10^{-4}eV$$
$$E_p = 10^9 m_p = 10^{18}eV$$

Ahora bien, si queremos calcular la energía final del fotón después del scattering en el marco de reposo del Sol, tenemos que hallar su frecuencia en el marco del protón y luego convertirla al marco de interés (el Sol).

Primero es conveniente enmarcar todo en términos de unidades naturales en donde $c = 1$. Así,

$$E_\gamma = h\nu = 2\times10^{-4}eV = 3.2044\times10^{-23}J$$
$$= \frac{3.2044\times10^{-23}\ Kg\,m^2 s^{-2}}{(3\times10^8 m\,s^{-1})^2} = \underline{\underline{3.56\times10^{-40}Kg}}$$

$$E_p = 10^9 m_p = 10^{18}eV \sim 1.6726\times10^{-18}Kg$$

$$h = 6.6260\times10^{-34}J\cdot s = \frac{6.6260\times10^{-34}\ Kg\,m^2 s^{-1}}{3\times10^8\ m\,s^{-1}} = \underline{\underline{2.20\times10^{-42}Kg\cdot m}}$$

$$E_\gamma = 3.56\times10^{-40}Kg \quad , E_p = 1.6726\times10^{-18}Kg$$
$$h = 2.20\times10^{-42}Kg\cdot m$$

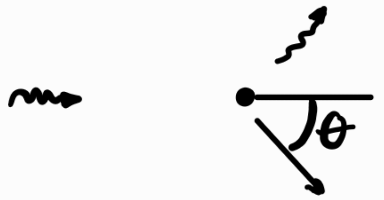
Tenemos entonces que, en el marco del protón,

$$\frac{1}{\nu_f'} = \frac{1}{\nu_i'} + h\left(\frac{1-\cos\theta}{m_p}\right)$$

donde ν_i será,

$$\nu_i = \frac{E_\gamma}{h} = \frac{3.56\times10^{-40}\,kg}{2.20\times10^{-42}\,kg\cdot m} = 161.82\,m^{-1}$$

Si consideramos que el fotón viaja en la dirección $+x$ de tal manera que,



la mayor transferencia de energía sucederá cuando $\theta=\pi$, lo que convierte la expresión anterior en,

$$\frac{1}{\nu_f'} = \frac{1}{\nu_i'} + \frac{h(1-(-1))}{m_p} = \frac{1}{\nu_i} + \frac{2h}{m_p}$$

Ahora bien, si se considera que el efecto Doppler está dado por

$\frac{\nu'}{\nu} = \gamma(v)(1-v\cos\theta)$, si asumimos que $v\approx1$ y $\theta=\pi$, tenemos que,

$$h\nu_i' = h\nu_i\,\gamma(v)(1+v)$$
$$= h\nu_i\,\gamma(v)\cdot 2$$

siendo $\gamma = \frac{E_P}{m_p}$, a partir de $E_P = \gamma m_P$, así

$$h\nu_i' = h\nu_i \, 2 \cdot 1\times10^9$$
$$\nu_i' = \nu_i \cdot 2 \cdot 1\times10^9$$
$$\nu_i' = 3.23\times10^{11}\,m^{-1}$$

Desarrollando obtenemos que,

$$\frac{1}{\nu f'} = \frac{1}{3.23\times10^{12}\,m^{-1}} + \frac{2\cdot 2.20\times10^{-42}\,Kg\cdot m}{1.6726\times10^{-27}\,Kg}$$

$$\frac{1}{\nu f'} = 3.089\times10^{-12}\,m + 2.6306\times10^{-15}\,m$$

Podemos observar que $\frac{1}{\nu_i} \gg \frac{2h}{m_P}$, por lo que establecemos que $\frac{1}{\nu f'} \approx \frac{1}{\nu_i'}$.

Si ahora realizamos el mismo procedimiento pero en el marco del Sol tenemos que,

$$h\nu f = h\nu f'\,\gamma(v)\cdot 2$$
$$\nu f = 1\times10^9 \cdot 3.23\times10^{11}\,m^{-1}\cdot 2$$

$$\nu f = 6.46\times10^{20}\,m^{-1}$$

$$E = h\nu = 2.20\times10^{-42}\,kg\cdot m \times 6.46\times10^{20}\,m^{-1}$$

$$E = 1.4212\times10^{-21} \times \frac{1}{mp} = 8.50\times10^{5}\,mp$$

Ejercicio # 5

Si se tiene que,

$$e^- + p^+ \longrightarrow e^- + p^- + 2p^+$$

podemos usar el argumento de la conservación de la energía en un marco bajo el cual el momento total es cero, esto es, el marco del centro de momento.

$$\sum_i \vec{p}_{(i)} \xrightarrow[CM]{} (E_{TOTAL}, 0, 0, 0)$$

Así, tenemos que,

$$\gamma m_e + m_p = m_e + m_{\bar{p}} + 2m_p$$

Considerando que $m_{\bar{p}} = m_p$, entonces,

$$\gamma m_e + m_p = m_e + 3m_p$$

$$\gamma m_e = m_e + 2m_p$$

$$\gamma = 1 + \frac{2m_p}{m_e}$$

Teniendo además que, $K = (\gamma - 1)m_e$, igualando obtenemos que,

$$\gamma = \frac{K}{m_p} + 1 \qquad \gamma = \gamma$$

$$1 + \frac{2m_p}{m_e} = 1 + \frac{K}{m_e}$$

donde K es la energía cinética umbral para el electrón.

$$K = 2m_p$$

Ejercicio #6

La expresión general del efecto Doppler relativista viene dado por

$$f = f'\gamma\left(1+\frac{v}{u'}\cos\theta'\right)$$

donde u' es la velocidad de la onda y v es la velocidad del marco S'. En unidades naturales tenemos que $u'=1$ para la velocidad de la luz, del mismo modo, tenemos que $\theta' = \pi = \theta$ $\Rightarrow \cos(\pi) = -1$, por lo que la expresión resultante es,

$$f = f'\gamma(1+v\cos\theta)$$

o de forma equivalente,

$$f' = f\gamma(1-v\cos\theta')$$

Tomando como marco en reposo al semáforo tenemos que,

$$\frac{f'}{f} = \gamma(1+v)$$

Si definimos a f'/f como ρ, podemos reescribir la expresión de tal modo que,

$$\rho = \gamma(1+v)$$

Resolviendo para v se tiene que,

$$\rho = \gamma(1+v) \longrightarrow \rho = (1+v^2)^{-1/2}(1+v)^2 \rightarrow$$

$$\rho^2 = (1+v^2)^{-1}(1+v)^2 \rightarrow \rho^2 = \frac{1}{(1+v^2)}(1+v)^2$$

$$\rho^2 = \frac{(1+v)^2}{(1+v)(1-v)} \rightarrow \rho^2 = \frac{1+v}{1-v}$$

$$\rho^2 - \rho^2 v = 1+v \rightarrow v = \frac{\rho^2-1}{\rho^2+1}$$

Teniendo en cuenta que, $f = \dfrac{1}{\lambda}$

$$f = \frac{1}{650\times10^{-9}m} = 1.54\times10^6 m^{-1}, \quad f' = \frac{1}{530\times10^{-9}m} = 1.88\times10^6 m^{-1}$$

$v = \dfrac{\rho^2-1}{\rho^2+1} \approx 0.20$, en unidades del SI esto es,

$$v = 0.20 \times 3\times10^8 m/s \times 1\times10^{-3} km/m \times 3600\, s/h = \underline{2.16\times10^8\, km/h}$$

Podemos ver que la velocidad $v \gg v_{límite}$, donde $v_{límite} = 30\, km/h$, así, si por cada km/h excedido se tiene que pagar un dolar, la multa será proporcional a 2.16×10^8 //