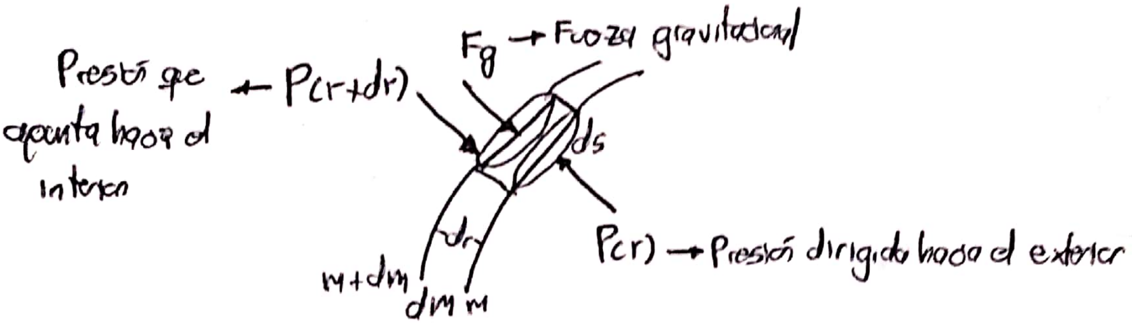
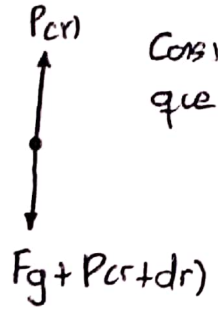
① Pols 2.2

a) Consider an infinitesimal mass element dm inside a star. Fig 2.1. what forces act on this mass element.



b) Newton's second law of mechanics, or the equation of motion, states that the net force acting on a body is equal to its acceleration times it mass. Write down the equation of motion for the gas element.



Considerando el diagrama de cuerpo libre para una sección dm se tiene que,

$$\Sigma F = ma$$

$$\Sigma F = m\ddot{x}$$

$$dm\,\ddot{x} = F_g - 4\pi r^2 P(r) + 4\pi r^2 P(r+dr)$$

$$dm\,\ddot{x} = \frac{G m(r)\, dm}{r^2} - 4\pi r^2 P(r) + 4\pi r^2 P(r+dr)$$

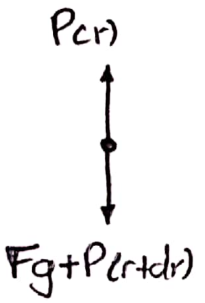
$$dm\,\ddot{x} = \frac{G m(r)\, dm}{r^2} + 4\pi r^2\, dP(r)$$

$$dm\,\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{G m(r)\, dm}{r^2} + 4\pi r^2\, dP(r)$$

c) In hydrostatic equilibrium the net force is zero and the gas element is not accelerated. Find an expression of the pressure gradient in hydrostatic equilibrium.

A partir de la relación anteriormente hallada y bajo la consideración que un estado de equilibrio indica,

$$\Sigma F = 0$$



entonces,

$$dm \cancel{\frac{d^2x}{dt^2}}^{\,0} = \frac{Gm(r)dm}{r^2} + 4\pi r^2 dP(r)$$

$$-\frac{Gm(r)dm}{r^2} = 4\pi r^2 d P(r)$$

Considerando continuidad de masa con

$$\frac{dm}{dr} = 4\pi r^2 \rho(r) \longrightarrow -\frac{G m(r)\, \cancel{4\pi r^2} \rho(r) dr}{r^2} = \cancel{4\pi r^2}\, dP(r)$$

$$dm = 4\pi r^2 \rho(r) dr$$

$$\boxed{\frac{dP(r)}{dr} = -\frac{Gm(r)\,\rho(r)}{r^2}}$$

d) Find an expression for the central pressure P_c by integrating the pressure gradient. Use this to derive the lower limit on the central pressure of a star in hydrostatic equilibrium.

Considerando que $\frac{\partial r}{\partial m} = \frac{1}{4\pi r^2 \rho}$ entonces, a partir de $\frac{dP}{dr} = -\frac{Gm}{r^2}\rho$

Se concibe que

$$\frac{\partial r}{\partial m} = \frac{1}{4\pi r^2 \rho(r)}$$

$$\partial r = \frac{\partial m}{4\pi r^2 \rho(r)} \longrightarrow \frac{dP}{dm} \cdot 4\pi r^2 \cancel{\rho(r)} = -\frac{Gm(r)\cancel{\rho(r)}}{r^2}$$

Usando criterio de una única función

$$\frac{dP}{dm} = -\frac{Gm(r)}{4\pi r^4}$$

Así pues, si

$$\frac{dP}{dm} = -\frac{Gm(r)}{4\pi r^4}$$, para una aproximación muy sencilla se tiene

$$\frac{dP}{dm} \sim \frac{P_{superficie} - P_{central}}{M} \sim -\frac{P_c}{M}$$ en el entendido que $P_{superficie} = 0$.

Ahora bien, volviendo a la ecuación de equilibrio hidrostático expresada en función de la masa se tiene que, para el caso donde $m \sim \frac{1}{2}M$ y $r \sim \frac{1}{2}R$, entonces,

$$\frac{dP}{dm} \sim -\frac{P_c}{M} \sim -\frac{G(\frac{1}{2}M)}{4\pi(\frac{1}{2}R)^4}$$

$$P_c \approx M \cdot \frac{GM \cdot 16}{4\pi \cdot 2 \cdot R^4} \qquad P_c \approx \frac{2GM^2}{\pi R^4}$$

El límite inferior de la presión central puede derivarse a partir de,

$$\frac{dP}{dr} = -\frac{Gm(r)}{4\pi r^4}\frac{dm}{dr} \quad \leftarrow \rho = \frac{dm}{dr}$$

$$\frac{dP}{dr} = -\frac{d}{dr}\left(\frac{Gm^2}{8\pi r^4}\right) - \frac{Gm^2}{2\pi r^5}$$

Este término decrece en función de r, por lo tanto en el centro este término es P_c.

$$\frac{d}{dr}\left(P + \frac{Gm^2}{8\pi r^4}\right) = -\frac{Gm^2}{2\pi r^5} < 0$$

Así las cosas, si la presión externa es cero entonces,

$$P_c > \frac{1}{8\pi}\frac{GM^2}{R^4}$$

e) Verify the validity of this lower limit for the case of a star with the density profile of

$$\rho(r) = \rho_c\left[1 - \left(\frac{r}{R}\right)^2\right]$$

A partir de $m(r) = \frac{4}{3}\pi r^3 \rho_c\left(1 - \frac{3r^2}{5R^2}\right)$

$$M = \frac{8}{15}\pi R^3 \rho_c$$

Así pues, $m(r)\rho(r) = \frac{75M^2}{16\pi R^4}\left(\frac{r^3}{R^2} - \frac{8r^5}{5R^4} + \frac{3r^7}{5R^6}\right)$

Integrando con la condición de presión 0 en la superficie se obtiene,

$$P_c = \frac{150}{8\pi}\frac{GM^2}{R^4}$$

Por consiguiente,

$$\boxed{\frac{150}{8} > \frac{1}{8}}$$ ✓

2. Pcls 2.4

a) Use the virial theorem to explain why stars are hot i.e have a high internal temperature and therefore radiate energy.

Si se considera la ecuación de equilibrio hidrostático tal que

$$U = \int_0^R \left(-\frac{GM_r}{r}\right) 4\pi\rho r^2 dr \rightarrow \text{Potencial gravitacional}$$

y la energía interna del gas en términos de,

$$K_T = \int_0^R \frac{3}{2} nKT \cdot 4\pi r^2 dr$$

se obtiene que,

$$2K_T + U = 0 \quad \therefore \quad K_T = -\frac{1}{2}U$$

Una estrella se forma lentamente a través de colapso de material circundante conciente potencial gravitacional, en tanto la estrella se contrae, esta se torna más caliente y comienza a radiar energía, así; tal energía de la estrella se ha vuelto negativa (en términos del teorema del virial).

b) What are the consequences of energy loss for the star, especially for its temperature?

Si se considera una pérdida neta de energía en el sistema significa que la condición de viralización se empieza a perder, por lo tanto, para un sistema no virializado, la energía potencial dominará sobre la cinética (relacionada con la temperatura) y habrá un desequilibrio neto de energía. Dado que toda energía potencial está asociada a un campo de fuerza a través de $F = \nabla U$, si hay condición de que $K_T \neq -\frac{1}{2}U$ habrá factores dinámicos que incidan en la estrella, se hablo entonces de colapso.

c) Most stars are in thermal equilibrium. What is compensating for the energy loss?

Justamente, el factor que permite, de un modo u otro, que se pueda lograr equilibrio termodinámico está relacionado en como el potencial gravitacional actúa en la cantidad y calidad de las reacciones termonucleares que mantienen viva la estrella. Si bien la virialización se da para una cierta temperatura K_T, el origen de esta temperatura también viene dado por q en $\frac{dL}{dr} = 4\pi r^2 \rho q$, la tasa a la que se produce energía y que se corresponde con $K_T = -\frac{1}{2}U$.

d) What happens to a star in thermal equilibrium (and in hydrostatic equilibrium) if the energy production by nuclear reactions in a star drops (slowly to maintain hydrostatic equilibrium).

Si la tasa de producción de energía de la estrella cae lentamente la respuesta física deberá ser en términos de su volumen. Para mantener la condición de equilibrio hidrostático la presión del gas deberá contrarestar la fuerza gravitatoria hacia adentro. Dado que P es proporcional a T e inversamente proporcional a V, la estrella deberá aumentar su volumen con tal de contrarestar la fuerza de la gravedad dado un cambio de temperatura. De hecho, este es el proceso mediante el cual algunas estrellas como el Sol se convierten en gigantes rojas y cambian su posición en el diagrama HR.

e) Why does this have a stabilizing effect? On what time scale does the change take place?

Como se explicó anteriormente, para que $F_g = F_p$ debe haber un cambio de volumen proporcional a T y a P. Las escalas de tiempo en la que esto sucede dependen de las proporciones de la estrella. Hablando de estrellas de secuencia principal, se puede decir que, cuanto mayor es su masa su tiempo de vida media será mucho menor en tanto que sostener el colapso gravitacional y la condición de virialización es mucho más difícil. Contrariamente, las enanas rojas, estrellas de poca masa tienen tiempos de vida medios muy prolongados. También hay que notar que los periodos de vida de la estrella antes del colapso están supeditados por las distintas secuencias de reacciones nucleares, desde el hidrógeno al hierro, cambiando de esta manera la tasa neta de producción de energía dentro de la estrella.

f) What happens if hydrostatic equilibrium is violated e.g. by a sudden increase of pressure.

Si se rompe la condición de equilibrio quiere decir que habrá un flujo neto de materia tal que $\boxed{F_g - F_g = dm\frac{d^2x}{dt^2}}$, lo que quiere decir que la estrella expulsará parte de su material estelar.

g) On which timescale does the change take place? Can you give examples of processes in stars that take place en this timescales?

Para que se rompa la condición de equilibrio hidrostático este efecto se debe dar en escalas de tiempo relativamente cortas, de lo contrario la estrella perdería masa de forma considerable y ya no se cumpliría la condición inicial. Estos efectos pueden darse debido a velocidades angulares elevadas, campos magnéticos potentes e inestables o interacción gravitacional con otras estrellas.

Scanned with CamScanner

3. With the help of hydrostatic equilibrium and virial theorem, estimate the central pressure in a star and average temperature inside a star, respectively, with mass M_* and radius R_*.

Considerando que el teorema del virial plantea que,

$$K_T = -\frac{1}{2}U$$

donde K_T representa la energía cinética de las partículas del sistema asociada a la temperatura del mismo, y U el potencial gravitacional (en general cualquier potencial asociado), se tiene que,

$$U = -\int_0^{M_*} \frac{G M(r)}{r}\, dm$$

→ si se asume una densidad media dada por la expresión

$$\bar{\rho}(r) = \frac{3M(r)}{4\pi r^3}.$$

entonces

$$r = \sqrt[3]{\frac{3M(r)}{4\pi\bar{\rho}}}$$

$$U = -\int_0^{M_*} \frac{G\, M(r)}{(3M(r)/4\pi\bar{\rho})^{1/3}}\, dm$$

$$U = -\int_0^{M_*} G\left(\frac{4\pi\bar{\rho}}{3}\right)^{1/3} \frac{M(r)}{(M(r))^{1/3}}\, dm$$

$$U = -G\left(\frac{4\pi\bar{\rho}}{3}\right)^{1/3} \underbrace{\int_0^{M_*} M(r)^{2/3}\, dm} \Rightarrow \frac{3M(r)^{5/3}}{5} = \frac{3(M_*)^{5/3}}{5} - \cancel{0}$$

$$U = -G\left(\frac{4\pi\bar{\rho}}{3}\right)^{1/3} \cdot \frac{3M_*^{5/3}}{5}$$

Dado que $\bar{\rho}$ también se puede reescribir de modo que

$$\bar{\rho} = \frac{3M_*}{4\pi R_*^3} = \frac{M}{V}$$

$$U = -G\left(\frac{\cancel{4\pi}\cancel{3}M_*}{\cancel{4\pi}\cancel{3}R_*^3}\right)^{1/3} \cdot \frac{3}{5}M_*^{5/3}$$

$$U = -\frac{G M_*^{1/3}}{R_*} \cdot \frac{3}{5}M_*^{5/3}$$

$$\boxed{U = -\frac{3GM_*^2}{5R_*}}$$

Scanned with CamScanner

Una vez calculada la componente potencial del teorema del virial, se procede a estimar la componente cinética.

Si se considera que $K_{TR} = \frac{3}{2} K \bar{T} N$ donde K_{TR} la energía traslacional media de las moléculas y $\bar{T}$ representa la temperatura media del sistema, se puede considerar que, dadas las condiciones internas de una estrella el peso molecular medio se puede reescribir como $\mu = 1/2$, por lo tanto,

$N = 2M_*/m_H$, así,

$$K_{TR} = \frac{3K\bar{T}}{\cancel{2}} \cdot \frac{\cancel{2}M_*}{m_H}$$

$$\boxed{K = \frac{3K\bar{T}M_*}{m_H}}$$

Entonces, empleando el teorema del virial se obtiene que

$$K = -\frac{1}{2} U$$

$$\frac{\cancel{3}K\bar{T}M_*}{m_H} = -\frac{1}{2}\left(-\frac{\cancel{3}}{5}\frac{GM_*^2}{R_*}\right)$$

$$\frac{K\bar{T}\cancel{M_*}}{m_H} = \frac{GM_*^{\cancel{2}}}{10R_*}$$

$$\boxed{\bar{T} = \frac{Gm_H M_*}{10KR_*}}$$

Para estimar la presión central se pueden consider las ecuaciones de equilibrio hidrostático y conservación de masa tal que,

$$\frac{dP}{dr} = -\frac{GM(r)\rho}{r^2}$$

$$\frac{dm}{dr} = 4\pi r^2\rho$$

→ Reexpresando

$$dP = -\frac{GM(r)\rho}{r^2}dr \qquad dm = 4\pi r^2\rho\, dr$$

$$\leftarrow \quad \frac{dm}{4\pi r^2\rho} = dr$$

$$dP = -\frac{GM(r)\cancel{\rho}}{r^2} \cdot \frac{dm}{4\pi r^2\cancel{\rho}}$$

$$\underline{dP = -\frac{GM(r)}{4\pi r^2}dm}$$

Teniendo la expresión

$$dP = -\frac{G M(r)}{4\pi r^4} dm$$

e integrando desde el interior de la estrella asumiendo que la presión total en el exterior es cero se tiene que,

$$\int_0^{P_c} dP = \frac{G}{4\pi r^4} \int_{M_*}^{0} M(r)\, dm$$

$$P_c = \frac{G M_*^2}{4\pi r^4}$$

dado que dm también es función de dr se puede observar que $r^4 = R_*^4$ por lo tanto,

$$\boxed{P_c = \frac{G M_*^2}{4\pi R_*^4}}$$

Scanned with CamScanner

4. A region in the interior of a star with $2.5 M_{\odot}$ has $T \sim 1.5\times10^{7}$ K and $P \sim 6.4\times10^{16}$ dyn/cm2. A numerical model for this star predicts a temperature gradient $dT/dP \sim 1\times10^{10}$ K/(dyn/cm2). Is this region convective or radiative?

Inicialmente se debe tomar en cuenta el criterio de Schwarzschild el cual plantea que

$$\left.\frac{dT}{dP}\right|_{rad} > \left.\frac{dT}{dP}\right|_{ad}$$

Si se considera entonces que el gradiente adiabático viene dado por:

$$\left.\frac{dT}{dP}\right|_{ad} \sim -\frac{2}{5}\frac{T}{P}$$

$$\left.\frac{dT}{dP}\right|_{ad} \sim -\frac{2}{5}\,\frac{1.5\times10^{7}\,K}{6.4\times10^{16}\,dyn/cm^2} = -9.375\times10^{11}\,\frac{K\cdot cm^2}{din}$$

Usando el criterio de Schwarzschild para la convección fácilmente se puede notar que,

$$\left.\frac{dT}{dP}\right|_{rad} > \left.\frac{dT}{dP}\right|_{ad}$$

Por consiguiente se habla de una región convectiva.

5. Suppose that a star of mass M and radius R has a density distribution $\rho(r) = \rho_c\left(1 - \frac{r}{R}\right)$, where ρ_c is the density at the center of the star.

(a) Calculate ρ_c in terms of M and R. For all the remaining parts of the problem, express your answer in terms of M and R rather than ρ_c

Usando la ecuación de distribución de masa tenemos que

$$\frac{dm}{dr} = 4\pi r^2 \rho(r)$$

Desarrollando,

$$dm = 4\pi r^2 \rho(r) dr$$

$$dm = 4\pi r^2 \rho_c\left(1 - \frac{r}{R}\right) dr$$

$$\int dm = \int_0^R 4\pi r^2 \rho_c\left(1 - \frac{r}{R}\right) dr$$

$$M = 4\pi \rho_c \int_0^R r^2\left(1 - \frac{r}{R}\right) = 4\pi\rho_c \underbrace{\int_0^R r^2 - \frac{r^3}{R}}$$

$$\rightarrow \frac{r^3}{3} - \frac{r^4}{4R}$$

$$\Big|_0^R \frac{r^3}{3} - \frac{r^4}{4R} = \frac{R^3}{3} - \frac{R^{\cancel{4}}}{4\cancel{R}} - \cancel{0}$$

$$\frac{R^3}{3} - \frac{R^3}{4} = \frac{R^3}{12}$$

$$M = \frac{4\pi\rho_c R^3}{12}$$

$$M = \frac{\pi \rho_c R^3}{3}$$

$$\boxed{\rho_c = \frac{3M}{\pi R^3}}$$

b) Calculate the mass $m(r)$ interior of radius r

Teniendo que $M = 4\pi\rho_c \int_0^R r^2\left(1 - \frac{r}{R}\right)$

se puede observar que $\boxed{M(r) = 4\pi\rho_c\left(\frac{r^3}{3} - \frac{r^4}{4R}\right)}$

c) Calculate the total gravitational binding energy of the star

Si se considera que el potencial gravitacional viene dado por,

$$U=-\int_0^M \frac{GM(r)}{r}\,dm \quad y \quad dm = 4\pi\rho(r)r^2dr$$

entonces,

$$U=-\int_0^M \frac{G\,4\pi\rho_c\left(\frac{r^3}{3}-\frac{r^4}{4R}\right)}{\cancel{r}}\cdot 4\pi\rho(r)\,r^{\cancel{2}}dr$$

$$U=-\int_0^M G\,4\pi\rho_c\left(\frac{r^3}{3}-\frac{r^4}{4R}\right)\cdot 4\pi\rho_c\left(1-\frac{r}{R}\right)r\,dr$$

$$U=-G(4\pi\rho_c)^2\int_0^R\left(\frac{r^3}{3}-\frac{r^4}{4R}\right)\cdot\left(r-\frac{r^2}{R}\right)dr$$

$$\left(\frac{r^3}{3}-\frac{r^4}{4R}\right)\cdot\left(r-\frac{r^2}{R}\right)=\frac{r^4}{3}-\frac{r^5}{3R}-\frac{r^5}{4R}+\frac{r^6}{4R^2}=\frac{r^4}{3}-\frac{7r^5}{12R}+\frac{r^6}{4R^2}$$

$$U=-G(4\pi\rho_c)^2\int_0^R \frac{r^4}{3}-\frac{7r^5}{12R}+\frac{r^6}{4R^2}\,dr$$

$$\rightarrow \frac{R^5}{15}-\frac{7R^{\cancel{6}}}{72\cancel{R}}+\frac{R^{\cancel{7}}}{28R^2}=\frac{R^5}{15}-\frac{R^5}{72}+\frac{R^5}{28}$$

$$\hookrightarrow \frac{13R^5}{2520}$$

$$U=-G(4\pi\rho_c)^2\cdot\frac{13R^5}{2520}$$

$$U=-G\left(4^2\cancel{\pi^2}\cdot\frac{3^2M^2}{\cancel{\pi^2}R^6}\right)\cdot\frac{13R^5}{2520}$$

$$U=-\frac{GM^2}{R}\cdot\frac{\cancel{1872}}{\cancel{2520}}$$

$$\boxed{U=-\frac{GM^2}{R}\frac{26}{35}}$$

d) Using hydrostatic equilibrium, calculate the pressure $P(r)$ at radius r. You may assume that the $P(R)=0$.

Usando la ecuación de equilibrio hidrostatico se tiene que,

$$\frac{dP}{dr} = -\frac{GM(r)\rho(r)}{r^2}$$

$$dP = -\frac{GM(r)\rho(r)}{r^2}dr$$

$$dP = -\frac{G\,4\pi\rho_c\left(\frac{r^3}{3}-\frac{r^4}{4R}\right)}{r^2}\cdot\rho_c\left(1-\frac{r}{R}\right)dr$$

$$dP = -G4\pi\rho_c^2\,\frac{\left(\frac{r^3}{3}-\frac{r^4}{4R}\right)\cdot\left(1-\frac{r}{R}\right)}{r^2}dr$$

$$\left(\frac{r^3}{3}-\frac{r^4}{4R}\right)\cdot\left(1-\frac{r}{R}\right)/r^2 = \left(\frac{r^3}{3}-\frac{r^4}{3R}-\frac{r^4}{4R}+\frac{r^5}{4R^2}\right)\cdot r^{-2} = \frac{r}{3}-\frac{r^2}{3R}-\frac{r^2}{4R}+\frac{r^3}{4R^2}$$

$$=\frac{r}{3}-\frac{7r^2}{12R}+\frac{r^3}{4R^2}$$

$$P(r) = -G4\pi\rho_c^2\cdot\left(\frac{r}{3}-\frac{7r^2}{12R}+\frac{r^3}{4R^2}\right)$$

$$P(r) = -G4\cancel{\pi}\cdot\frac{9M^2}{\pi^{\cancel{2}}R^6}\cdot\left(\frac{r}{3}-\frac{7r^2}{12R}+\frac{r^3}{4R^2}\right)$$

$$\boxed{P(r) = -\frac{G36M^2}{\pi R^6}\left(\frac{r}{3}-\frac{7r^2}{12R}+\frac{r^3}{4R^2}\right)}$$

Dado que la condición de frontera se evalua desde r a R en el contorno de la estrella se tiene que,

$$\int_{P(r)}^{P(R)} dP = -\left(\frac{3}{\pi}\right)\frac{GM^2}{R^5}\int_r^R\left(1-\frac{r'}{R}\right)\left(\frac{r'}{R}\right)\left(4-\frac{3r'}{R}\right)dr'$$

$$P(R)-P(r) = -\left(\frac{3}{\pi}\right)\frac{GM^2}{R^4}\int_x^1 x(4-3x)(1-x)dx \qquad \text{con } x=\frac{r'}{R}$$

$$P(r) = -\left(\frac{3}{\pi}\right)\frac{GM^2}{R^4}\left(\frac{4x^2}{2}-\frac{7}{3}x^3+\frac{3x^4}{4}\right)\Big|_x^1$$

$$P(r) = -\left(\frac{3}{\pi}\right)\frac{GM^2}{R^4}\left(2-\frac{7}{3}+\frac{3}{4}-\frac{4x^2}{2}+\frac{7x^3}{3}-3\frac{x^4}{4}\right)$$

Dado que $P(R)=0$ es importante tener en cuenta que, los extremos de la integral deben ser evaluados para luego realizar la resta, entonces,

$$P(r) = \left(\frac{3}{\pi}\right)\frac{GM^2}{R^4}\left(\frac{5}{12}-2x^2+\frac{7x^3}{3}-\frac{3x^4}{4}\right)$$

$$\boxed{P(r) = \left(\frac{1}{4\pi}\right)\frac{GM^2}{R^4}\left(5-24x^2+28x^3-9x^4\right)}$$

e) Assume that the material in the star is a monoatomic ideal gas. Calculate the total internal energy of the star from $P(r)$, and show that the viral theorem is satisfied.

La energía cinética interna por unidad de masa puede ser expresada como

$$U=\frac{3}{2}\frac{P}{\rho}$$

Entonces, teniendo en cuenta la ecuación de distribución de masa y la función de presión respecto a r se obtiene,

$$K=\int_0^R 4\pi r^2\rho(r)\,dr\cdot\frac{P(r)}{\rho(r)}$$

$$=\frac{3}{2}\cdot\frac{GM^2}{R}\int_0^1 x^2(5-24x^2+28x^3-9x^4)dx$$

$$=\frac{3}{2}\cdot\frac{GM^2}{R}\left(\frac{5}{3}-\frac{24}{5}+\frac{28}{6}-\frac{9}{7}\right)$$

$$=\frac{3}{2}\frac{GM^2}{R}\left(\frac{52}{210}\right)$$

$$\boxed{K=\frac{13}{35}\frac{GM^2}{R}}$$

$$K=-\frac{1}{2}U$$

$$\frac{13}{35}\cdot\frac{GM^2}{R}=-\frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{26}{35}\frac{GM^2}{R}\right)$$