פונקציות מרוכבות

90917

פרק 5 – אינטגרלים קוויים מרוכבים

מכללת אפקה

אין לשכפל, להעתיק, לצלם, להקליט, לאחסן במאגר מידע, לשדר או להקליט בכל דרך או בכל אמצעי אלקטרוני, אופטי או מכני, או אחר - כל חלק שהוא מהחומר שקובץ זה, בין אם לשימוש פנימי או מסחרי, ללא אישור בכתב מאתר אלון באומן – לימוד קורסים אונליין

סטודנטים לקורס פונקציות מרוכבת 90917

קובץ זה עוסק בפרק 5 – אינטגרלים קוויים מרוכבים בקורס פונקציות מרוכבות ומכיל סיכום של החומר, הגדרות, משפטים, נוסחאות שימושיות ותרגילים המסודרים לפי סדר הנושאים ברמת קושי עולה: מהרמה הבסיסית ביותר ועד לרמת התרגילים המופיעים במבחנים.

לכל התרגילים פתרונות מלאים באתר אלון באומן – לימוד קורסים אונליין

הפתרונות של התרגילים מועברים בצורה ברורה, מסודרת ומלווים בהסבר קולי ברור, מפורט ומלא.

ניתן להצטרף לקבוצת ה- WhatsApp של הקורס עם אלון באומן, בה ניתן לשאול שאלות במהלך למידת הקורס. להצטרפות: לחץ כאן

בהצלחה,

אלון באומן

© כל הזכויות שמורות – אלון באומן – לימוד קורסים אונליין www.alonbaumann.co.il

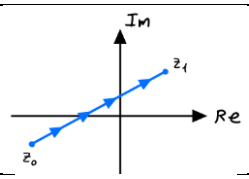
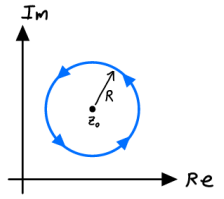
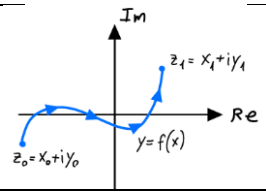
תוכן עניינים

5.1. אינטגרל קווי מרוכב..... 4
5.2. משפט הפונקציה הקדומה 6

© כל הזכויות שמורות – אלון באומן – לימוד קורסים אונליין www.alonbaumann.co.il

5.1. אינטגרל קווי מרוכב

פרמטריזציה – תיאור של קו במישור המרוכב ע"י ביטוי התלוי במשתנה t: $z = x(t) + iy(t)$ כאשר $a \le t \le b$.

סוג הפרמטריזציה	תיאור מילולי	תיאור מתמטי	שרטוט במישור המרוכב
פרמטריזציה קווית	קו ישר במישור המרוכב מהנקודה z_0 לנקודה z_1	$z = z_0 + t(z_1 - z_0)$ $0 \le t \le 1$	
פרמטריזציה מעריכית	מעגל במישור המרוכב עם מרכז z_0 ברדיוס R	$z = z_0 + Re^{it}$ $0 \le t \le 2\pi$	
פרמטריזציה כללית	מסלול המוגדר ע"י הפונקציה $y = f(x)$ מנקודה $z_0 = x_0 + iy_0$ לנקודה $z_1 = x_1 + iy_1$	$z = t + if(t)$ $x_0 \le t \le x_1$	

חישוב אינטגרל קווי מרוכב

אם $f(z)$ פונקציה רציפה על מסלול c הנתון ע"י הפרמטריזציה $z(t) = x(t) + iy(t)$ כאשר $a \le t \le b$ אז:

$$\int_c f(z)dz = \int_a^b f\big(z(t)\big) \cdot z'(t)dt$$

תרגיל 1

חשב את האינטגרל $\int_c z\,dz$ כאשר c קו ישר המחבר את הנקודות $z_0 = 2$ ו- $z_1 = 2i$

תרגיל 2

חשב את האינטגרל $\int_c z^2 Im(z)\,dz$ כאשר c קו ישר המחבר את הנקודות $z_0 = 0$ ו- $z_1 = 2 + i$

תרגיל 3

חשב את האינטגרל $\int_c Re(z)\,dz$ כאשר c מסלול המורכב משני קווים: קו ישר המחבר את הנקודות 0 ו- i וקו ישר המחבר את הנקודות i ו- $3 + i$

© כל הזכויות שמורות – אלון באומן – לימוד קורסים אונליין www.alonbaumann.co.il

תרגיל 4

חשב את האינטגרל $\oint\limits_{|z|=2} \frac{\bar{z}}{z} dz$

תרגיל 5

חשב את האינטגרל $\int\limits_{c} \bar{z}\, dz$ כאשר c חצי עליון של מעגל $|z| = 1$ מנקודה -1 לנקודה 1

תרגיל 6

חשב את האינטגרל $\int\limits_{c} \frac{Arg(z)}{z} dz$ כאשר c רבע מעגל עם מרכז $z_0 = 0$ ברדיוס 2 ברביע הראשון והפונקציה $Arg(z)$ היא הערך הראשי של הארגומנט המוגדר בתחום $-\pi < Arg(z) \leq \pi$

תרגיל 7

חשב את האינטגרל $\int\limits_{c} z^i\, dz$ כאשר c נתון ע"י הפרמטריזציה $z = e^{it}, 0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$ והפונקציה z^i היא הערך הראשי של פונקציית החזקה המרוכבת המוגדר בתחום $-\pi < Arg(z) \leq \pi$

תרגיל 8

חשב את האינטגרל $\int\limits_{c} Log(z)\, dz$ כאשר c רבע מעגל מנקודה 1 לנקודה i והפונקציה $Log(z)$ היא הערך הראשי של פונקציית הלוגריתם המרוכב

תרגיל 9

הוכח ע"י שימוש בפרמטריזציה מתאימה כי: $\oint\limits_{|z|=1} \frac{1}{\cosh\left(\frac{1}{z}\right)} dz = \oint\limits_{|z|=1} \frac{1}{z^2 \cosh(z)} dz$

תרגיל 10

חשב את האינטגרל $\int\limits_{c} 2z + 1\, dz$ כאשר c חלק של פרבולה $y = x^2$ מנקודה 0 לנקודה $1 + i$

תרגיל 11

חשב את האינטגרל $\int\limits_{c} \bar{z}\, dz$ כאשר c חלק מגרף הפונקציה $y = x^3$ מנקודה 0 לנקודה $2 + 8i$

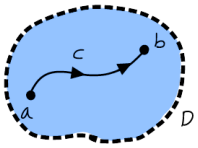
© כל הזכויות שמורות – אלון באומן – לימוד קורסים אונליין www.alonbaumann.co.il

5.2. משפט הפונקציה הקדומה

משפט הפונקציה הקדומה

אם פונקציה f אנליטית בתחום פשוט קשר D המכיל את המסלול c אז האינטגרל אינו תלוי במסלול, אלא רק בנקודת הסיום

ונקודת ההתחלה של המסלול, כלומר $\int_a^b f(z)dz = F(b) - F(a)$ כאשר F פונקציה קדומה של f



אינטגרלים מיידיים:

$$\int \frac{1}{z} dz = log(z) + C$$

$$\int z^n dz = \frac{z^{n+1}}{n+1} + C \quad , \quad n \neq -1$$

$$\int log(z)\, dz = z\, log(z) - z + C$$

$$\int e^z dz = e^z + C$$

$$\int sinh(z)\, dz = cosh(z) + C$$

$$\int sin(z)\, dz = -\, cos(z) + C$$

$$\int cosh(z)\, dz = sinh(z) + C$$

$$\int cos(z)\, dz = sin(z) + C$$

נוסחת אינטגרציה בחלקים:

$$\int u \cdot v'\, dz = u \cdot v - \int u' \cdot v\, dz$$

תרגיל 1

חשב את האינטגרלים הבאים:

א. $\int_1^{2i} z^2 - 1 dz$ ב. $\int_\gamma z^2 - z + 2dz$ כאשר $\gamma = \{z \in C \mid |z| = 1, Im(z) > 0, Re(z) > 0\}$

תרגיל 2

חשב את האינטגרלים הבאים:

א. $\int_0^{i\pi + \ln 2} e^{2z} - 2e^z dz$ ב. $\int_c ze^z dz$ כאשר c מוגדר ע"י $z = t^2 - 1 + i\pi t$, $-1 \leq t \leq 1$

© כל הזכויות שמורות – אלון באומן – לימוד קורסים אונליין www.alonbaumann.co.il

תרגיל 3

חשב את האינטגרלים הבאים:

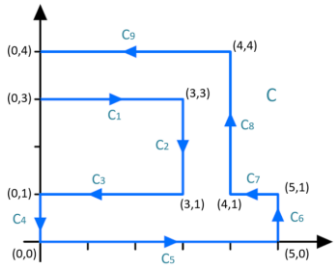
א. $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi+1} sin\, z\, dz$ ב. $\int_{0}^{\pi i} z\cos z\, dz$

תרגיל 4

קבע נכון\לא נכון: הפונקציה $f(z)=\frac{1}{z^2}$ אינה שלמה ולכן לא ניתן להשתמש בפונקציה הקדומה שלה על מנת לחשב את האינטגרל $\int_C \frac{1}{z^2}dz$ כאשר C חצי מעגל עליון מנקודה $z=1$ לנקודה $z=-1$

תרגיל 5

חשב את האינטגרל: $\int_C z^2+z+1dz$ עבור המסלול C המורכב מתת קטעים $C_1, C_2, \dots, C_9$ לפי השרטוט הבא:



© כל הזכויות שמורות – אלון באומן – לימוד קורסים אונליין www.alonbaumann.co.il