פונקציות מרוכבות

90917

פרק 8 – חישוב אינטגרלים ממשיים

מכללת אפקה

אין לשכפל, להעתיק, לצלם, להקליט, לאחסן במאגר מידע, לשדר או להקליט בכל דרך או בכל אמצעי אלקטרוני, אופטי או מכני, או אחר - כל חלק שהוא מהחומר שקובץ זה, בין אם לשימוש פנימי או מסחרי, ללא אישור בכתב מאתר אלון באומן – לימוד קורסים אונליין

סטודנטים לקורס פונקציות מרוכבת 90917

קובץ זה עוסק בפרק 8 – חישוב אינטגרלים ממשיים בקורס פונקציות מרוכבות ומכיל סיכום של החומר, הגדרות, משפטים, נוסחאות שימושיות ותרגילים המסודרים לפי סדר הנושאים ברמת קושי עולה: מהרמה הבסיסית ביותר ועד לרמת התרגילים המופיעים במבחנים.

לכל התרגילים פתרונות מלאים באתר אלון באומן – לימוד קורסים אונליין

הפתרונות של התרגילים מועברים בצורה ברורה, מסודרת ומלווים בהסבר קולי ברור, מפורט ומלא.

ניתן להצטרף לקבוצת ה- WhatsApp של הקורס עם אלון באומן, בה ניתן לשאול שאלות במהלך למידת הקורס. להצטרפות: לחץ כאן

בהצלחה,

אלון באומן

© כל הזכויות שמורות – אלון באומן – לימוד קורסים אונליין www.alonbaumann.co.il

תוכן עניינים

8.1. חישוב אינטגרלים ממשיים ע"י החלפת משתנים מעריכית 4
8.2. חישוב אינטגרלים ממשיים אינסופיים ע"י משפט ג'ורדן - מקרה 1 5
8.3. חישוב אינטגרלים ממשיים אינסופיים ע"י משפט ג'ורדן - מקרה 2 6
8.4. חישוב אינטגרלים ממשיים אינסופיים ע"י משפט ג'ורדן - מקרה 3,4 7

© כל הזכויות שמורות – אלון באומן – לימוד קורסים אונליין www.alonbaumann.co.il

8.1. חישוב אינטגרלים ממשיים ע"י החלפת משתנים מעריכית

החלפת משתנים מעריכית: $z = e^{i\theta}$ כאשר $0 \le \theta \le 2\pi$ או $-\pi \le \theta \le \pi$. מתקיים: $cos\,\theta = \frac{z+z^{-1}}{2}$, $sin\,\theta = \frac{z-z^{-1}}{2i}$

$$\int_0^{2\pi} R(\cos\theta\,, sin\,\theta)d\theta = \oint_{|z|=1} R\left(\frac{z+z^{-1}}{2}, \frac{z-z^{-1}}{2i}\right)\frac{dz}{iz}$$

תרגיל 1

חשב את האינטגרל $\int_0^{2\pi} \frac{1}{2+\cos\theta}d\theta$

תרגיל 2

חשב את האינטגרל $\int_0^{2\pi} \frac{1}{1+a\cos\theta}d\theta$ כאשר $-1 < a < 1$

תרגיל 3

חשב את האינטגרל $\int_0^{\pi} \frac{1}{(5+4\cos\theta)^2}d\theta$

© כל הזכויות שמורות – אלון באומן – לימוד קורסים אונליין www.alonbaumann.co.il

8.2. חישוב אינטגרלים ממשיים אינסופיים ע"י משפט ג'ורדן - מקרה 1

מקרה 1 – חישוב אינטגרל מהצורה $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{P_n(x)}{Q_m(x)} dx$ כאשר $m - n \geq 2$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{P_n(z)}{Q_m(z)} dz = 2\pi i \sum_{Im(z_k)>0} Res\left(\frac{P_n(z)}{Q_m(z)}, z_k\right)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{P_n(z)}{Q_m(z)} dz = -2\pi i \sum_{Im(z_k)<0} Res\left(\frac{P_n(z)}{Q_m(z)}, z_k\right)$$

תרגיל 1

חשב את האינטגרל $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^2 + 2x + 10} dx$

תרגיל 2

חשב את האינטגרל $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(x^2 + 1)(x^2 + 9)} dx$

תרגיל 3

חשב את האינטגרל $\int_{0}^{\infty} \frac{x^2}{(x^2 + 4)^2} dx$

© כל הזכויות שמורות – אלון באומן – לימוד קורסים אונליין www.alonbaumann.co.il

8.3. חישוב אינטגרלים ממשיים אינסופיים ע"י משפט ג'ורדן - מקרה 2

מקרה 2 – חישוב אינטגרל מהצורה $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{P_n(x)}{Q_m(x)} e^{itx} dx$ כאשר $m - n \geq 1$

עבור $t > 0$: $$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{P_n(z)}{Q_m(z)} e^{itz} dz = 2\pi i \sum_{Im(z_k)>0} Res\left(\frac{P_n(z)}{Q_m(z)} e^{itz}, z_k\right)$$

עבור $t < 0$: $$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{P_n(z)}{Q_m(z)} e^{itz} dz = -2\pi i \sum_{Im(z_k)<0} Res\left(\frac{P_n(z)}{Q_m(z)} e^{itz}, z_k\right)$$

תרגיל 1

חשב את האינטגרל $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{(x+3)e^{i3x}}{x^2+9} dx$

תרגיל 2

חשב את האינטגרל $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-2ix}}{(x-2i)^2(x^2+1)} dx$

© כל הזכויות שמורות – אלון באומן – לימוד קורסים אונליין www.alonbaumann.co.il

8.4. חישוב אינטגרלים ממשיים אינסופיים ע"י משפט ג'ורדן - מקרה 3,4

מקרה 3 – חישוב אינטגרל מהצורה $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{P_n(x)}{Q_m(x)} cos(tx)\, dx$ כאשר $m - n \geq 1$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{P_n(x)}{Q_m(x)} cos(tx)\, dx = Re\left(\int_{-\infty}^{\infty} \frac{P_n(x)}{Q_m(x)} e^{itx} dx \right)$$

מקרה 4 – חישוב אינטגרל מהצורה $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{P_n(x)}{Q_m(x)} sin(tx)\, dx$ כאשר $m - n \geq 1$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{P_n(x)}{Q_m(x)} sin(tx)\, dx = Im\left(\int_{-\infty}^{\infty} \frac{P_n(x)}{Q_m(x)} e^{itx} dx \right)$$

תרגיל 1

חשב את האינטגרל $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos \pi x}{x^2 + 2x + 2} dx$

תרגיל 2

חשב את האינטגרל $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^3 \sin(x)}{(x^2 + 4)(x^2 + 9)} dx$

© כל הזכויות שמורות – אלון באומן – לימוד קורסים אונליין www.alonbaumann.co.il