אלון באומן
לימוד קורסים אונליין

לשים אותו את
ביאנס על עמוד
14. יבא לי
עזרה!

אנליזה הרמונית

90916

פרק 2 – טורי פורייה מרוכבים

מכללת אפקה

אין לשכפל, להעתיק, לצלם, להקליט, לאחסן במאגר מידע, לשדר או להקליט בכל דרך או בכל אמצעי אלקטרוני, אופטי או מכני, או אחר - כל חלק שהוא מהחומר שקובץ זה, בין אם לשימוש פנימי או מסחרי, ללא אישור בכתב מאתר אלון באומן – לימוד קורסים אונליין

סטודנטים לקורס אנליזה הרמונית 90916

קובץ זה עוסק בפרק 2 – טורי פורייה מרוכבים בקורס אנליזה הרמונית ומכיל סיכום של החומר, הגדרות, משפטים, נוסחאות שימושיות ותרגילים המסודרים לפי סדר הנושאים ברמת קושי עולה: מהרמה הבסיסית ביותר ועד לרמת התרגילים המופיעים במבחנים.

לכל התרגילים פתרונות מלאים באתר אלון באומן – לימוד קורסים אונליין

הפתרונות של התרגילים מועברים בצורה ברורה, מסודרת ומלווים בהסבר קולי ברור, מפורט ומלא.

ניתן להצטרף לקבוצת ה- WhatsApp של הקורס עם אלון באומן, בה ניתן לשאול שאלות במהלך למידת הקורס. להצטרפות: לחץ כאן

בהצלחה,

אלון באומן

© כל הזכויות שמורות – אלון באומן – לימוד קורסים אונליין www.alonbaumann.co.il

תוכן עניינים

2.1. פיתוח פונקציה לטור פורייה מרוכב, משפט דיריכלה ומשפט פרסוול 4
2.2. מקרים פרטיים של טור פורייה 8
2.3. משפט גזירה איבר איבר של טור פורייה 9
2.4. משפט אינטגרציה איבר איבר של טור פורייה 10
2.5. משפטי קצב דעיכת המקדמים 11
2.6. תכונות של מקדמי טורי פורייה מרוכבים 13
2.7. מעבר מטור פוריה מרוכב לטור פוריה ממשי 14
2.8. מעבר מטור פוריה ממשי לטור פוריה מרוכב 15

© כל הזכויות שמורות – אלון באומן – לימוד קורסים אונליין www.alonbaumann.co.il

2.1. פיתוח פונקציה לטור פורייה מרוכב, משפט דיריכלה ומשפט פרסוול

תהי פונקציה $f(x)$ רציפה למקוטעין ומחזורית עם מחזור $T = 2L$, כלומר $f(x) = f(x+2L)$, ובעלת נגזרת $f'(x)$ רציפה למקוטעין. טור פוריה מרוכב של f:

$$\frac{f(x^+) + f(x^-)}{2} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{i\frac{\pi n x}{L}}$$

L – חצי מחזור

מקדמי הטור c_n מחושבים ע"י:

$$c_n = \frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} f(x) e^{-i\frac{\pi n x}{L}} \quad n = 0,1,2,\dots$$

משפט דיריכלה:

נסמן ב- $S(x)$ את פונקציית הטור כלומר: $S(x) = \frac{f(x^+) + f(x^-)}{2}$

לפי משפט דיריכלה נוכל לדעת מהו הערך שאליו מתכנס הטור, כלומר מהו הערך של פונקציית הטור $S(x)$ בנקודה מסויימת x_0:

1. אם x_0 היא נקודה בה הפונקציה $f(x)$ רציפה אז פונקציית הטור $S(x)$ שווה לערך הפונקציה $f(x)$ כלומר: $S(x_0) = f(x_0)$
2. אם x_0 היא נקודה בה לפונקציה $f(x)$ יש קפיצה אז פונקציית הטור $S(x)$ שווה לממוצע הקפיצה: $S(x_0) = \frac{f(x_0{}^+) + f(x_0{}^-)}{2}$

שימושים:

1. מציאת הערך שאליו מתכנס הטור בנקודה מסויימת
2. חישוב סכומים של טורים

משפט פרסוול:

הקשר בין הפונקציה $f(x)$ לבין מקדמי טורי פוריה שלה c_n:

$$\frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} |f(x)|^2 dx = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n|^2 = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \cdot \overline{c_n}$$

שימושים – חישוב סכומים של טורים

© כל הזכויות שמורות – אלון באומן – לימוד קורסים אונליין www.alonbaumann.co.il

נוסחאות שימושיות לחישוב טורי פורייה:

1. נוסחאות רדוקציה:

$$\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\cos(\alpha) \qquad \sin\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=\cos(\alpha) \qquad \cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\sin(\alpha) \qquad \cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=-\sin(\alpha)$$

$$\sin(\pi-\alpha)=\sin(\alpha) \qquad \sin(\pi+\alpha)=-\sin(\alpha) \qquad \cos(\pi-\alpha)=-\cos(\alpha) \qquad \cos(\pi+\alpha)=-\cos(\alpha)$$

2. זהויות נוספות:

$$\cos(\pi n)=(-1)^n \qquad \sin(\pi n)=0 \qquad \cos\left(\frac{\pi n}{2}\right)=\begin{cases}0\ , & n=2k-1\\ (-1)^k\ , & n=2k\end{cases}$$

$$\cos(-\pi n)=(-1)^n \qquad \sin(-\pi n)=0 \qquad \sin\left(\frac{\pi n}{2}\right)=\begin{cases}(-1)^{k+1}\ , & n=2k-1\\ 0\ , & n=2k\end{cases}$$

$$\cos(2\pi n)=1 \qquad \sin(2\pi n)=0$$

3. נוסחאות אויילר:

נוסחת אויילר:

$$e^{\pm i\theta}=\cos(\theta)+i\sin(\theta) \qquad \sin(x)=\frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i} \qquad \cos(x)=\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}$$

4. זהויות טריגונומטריות:

$$\sin(\alpha\pm\beta)=\sin(\alpha)\cos(\beta)\pm\cos(\alpha)\sin(\beta) \qquad \sin(-x)=-\sin(x)$$

$$\cos(\alpha\pm\beta)=\cos(\alpha)\cos(\beta)\mp\sin(\alpha)\sin(\beta) \qquad \cos(-x)=\cos(x)$$

$$\cos(\alpha)\sin(\beta)=\frac{1}{2}[\sin(\alpha+\beta)-\sin(\alpha-\beta)] \qquad \sin^2(\alpha)=\frac{1-\cos(2\alpha)}{2}$$

$$\sin(\alpha)\cos(\beta)=\frac{1}{2}[\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)] \qquad \cos^2(\alpha)=\frac{1+\cos(2\alpha)}{2}$$

$$\sin(\alpha)\sin(\beta)=\frac{1}{2}[\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)] \qquad \sin^3(\alpha)=\frac{1}{4}(3\sin(\alpha)-\sin(3\alpha))$$

$$\cos(\alpha)\cos(\beta)=\frac{1}{2}[\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)] \qquad \cos^3(\alpha)=\frac{1}{4}(3\cos(\alpha)+\cos(3\alpha))$$

© כל הזכויות שמורות – אלון באומן – לימוד קורסים אונליין
www.alonbaumann.co.il

5. זהויות היפרבוליות

$$cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

$$sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

6. אינטגרלים שימושיים:

$$\int cos(mx)cos(nx)dx = \frac{sin[(m+n)x]}{2(m+n)} + \frac{sin[(m-n)x]}{2(m-n)}$$

$$\int sin(mx)cos(nx)dx = -\frac{cos[(m+n)x]}{2(m+n)} - \frac{cos[(m-n)x]}{2(m-n)}$$

$$\int sin(mx)sin(nx)dx = -\frac{sin[(m+n)x]}{2(m+n)} + \frac{sin[(m-n)x]}{2(m-n)}$$

$$\int xe^{ax}dx = \frac{e^{ax}}{a^2}(ax-1)$$

$$\int x^m e^{ax}dx = \frac{x^m e^{ax}}{a} - \frac{m}{a}\int x^{m-1}e^{ax}dx$$

$$\int xsin(ax)dx = \frac{1}{a^2}(sin(ax) - ax \cdot cos(ax))$$

$$\int xcos(ax)dx = \frac{1}{a^2}(cos(ax) + ax \cdot sin(ax))$$

$$\int x^2 sin(ax)dx = \frac{1}{a^3}(2ax \cdot sin(ax) + (2-(ax)^2)\,cos(ax))$$

$$\int x^2 cos(ax)dx = \frac{1}{a^3}(2ax \cdot cos(ax) + ((ax)^2 - 2)\,sin(ax))$$

$$\int e^{ax}sin(px)dx = \frac{e^{ax}\big(a \cdot sin(px) - p \cdot cos(px)\big)}{a^2+p^2}$$

$$\int e^{ax}cos(px)dx = \frac{e^{ax}\big(a \cdot cos(px) + p \cdot sin(Px)\big)}{a^2+p^2}$$

תרגיל 1

נתונה פונקציה $f(x) = x$ בקטע $[-\pi,\pi)$ עם מחזור 2π

א. חשבו טור פורייה מרוכב של $f(x)$

ב. מהו הערך שאליו מתכנס הטור בנקודות: $x = \pi$, $x = \frac{13\pi}{2}$

תרגיל 2

נתונה פונקציה $f(x) = x^2$ בקטע $[-1,1]$ בעלת מחזור $T = 2$

א. חשבו טור פורייה מרוכב של הפונקציה $f(x)$

ב. האם טור פוריה של הפונקציה f שמצאתם בסעיף א' מתכנס אל הפונקציה f בנורמה?

ג. חשבו $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}$

© כל הזכויות שמורות – אלון באומן – לימוד קורסים אונליין

תרגיל 3

תהי $f(x) = e^{\frac{1}{4}ix}$ המוגדרת בקטע $[-\pi, \pi]$

א. מצאו טור פוריה מרוכב של $f(x)$

ב. האם הטור שמצאתם בסעיף א' מתכנס במידה שווה לפונקציה?

ג. מהם ערכי הטור בנקודות $x = 4\pi$, $x = -6\pi$

תרגיל 4

נתונה פונקציה עם מחזור 2π כל ש- $f(x) = e^{-2x}$, $-\pi < x < \pi$

א. שרטט את f בקטע $-3\pi < x < 5\pi$

ב. תהי $g(x)$ פונקציה המתקבלת ע"י טור פוריה של f. חשבו $g(\pi) - 2g(3\pi) + g(7\pi) + g(0)$

ג. חשבו טור פוריה מרוכב של $f(x)$

ד. חשבו את סכום הטור: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + 4}$

תרגיל 5

א. פתחו את הפונקציה $f(x) = cosh(x)$ בקטע $[-\pi, \pi]$ לטור פורייה מרוכב

ב. חשבו את סכום הטור: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{1 + n^2}$

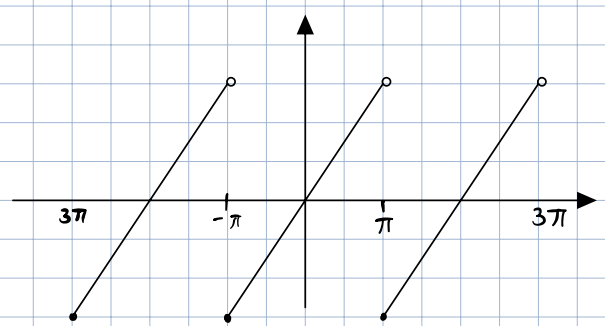
© כל הזכויות שמורות – אלון באומן – לימוד קורסים אונליין www.alonbaumann.co.il

תרגיל 1

נתונה פונקציה $f(x) = x$ בקטע $[-\pi, \pi)$ עם מחזור 2π

א. חשבו טור פורייה מרוכב של $f(x)$

ב. מהו הערך שאליו מתכנס הטור בנקודות: $x = \pi$, $x = \frac{13\pi}{2}$



$f(x) = x$ $\quad [-\pi, \pi)$

$T = 2\pi$

$L = \pi$

ניסוח כללי

$$\frac{f(x^+) + f(x^-)}{2} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n \cdot e^{i \cdot \frac{\pi n x}{L}}$$

$$C_0 = \frac{1}{2\pi} \cdot \int_{-\pi}^{\pi} x \, dx = \frac{1}{2\pi} \cdot \left[\frac{x^2}{2} \right]_{-\pi}^{\pi} = \frac{1}{2\pi} \cdot \left(\frac{\pi^2}{2} - \frac{\pi^2}{2} \right) = 0$$

$$C_n = \frac{1}{2L} \cdot \int_{-L}^{L} f(x) e^{-i \cdot \frac{n\pi x}{L}} \, dx$$

$$C_n = \frac{1}{2\pi} \cdot \int_{-\pi}^{\pi} x \cdot e^{-inx} \, dx$$

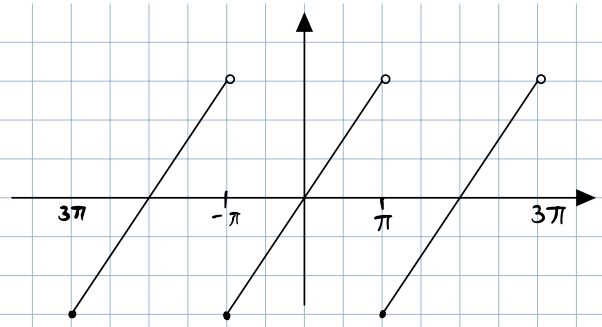
$$\int x e^{ax} dx = \frac{e^{ax}}{a^2}(ax - 1) + C$$

$$C_n = \frac{1}{2\pi} \cdot \left[\frac{e^{-inx}}{(-in)^2} (-inx - 1) \right]_{-\pi}^{\pi} = \frac{1}{2\pi n^2} \cdot \left(e^{-in\pi} \cdot (in\pi - 1) - e^{in\pi} (in\pi - 1) \right)$$

$$= -\frac{1}{2\pi n^2} \cdot \left(-in\pi(-1)^n - \cancel{(-1)^n} - (-1)^n \cdot in\pi + \cancel{(-1)^n} \right)$$

$$= -\frac{1}{2\pi n^2} \cdot \left(-2in\pi(-1)^n \right) = -\frac{1}{n} \cdot \left(-i(-1)^n \right) = \frac{i(-1)^n}{n}$$

$$\frac{f(x^+) + f(x^-)}{2} = \sum_{\substack{n=-\infty \\ n \neq 0}}^{\infty} \frac{i(-1)^n}{n} \cdot e^{i\pi x}$$



ב. $x = \pi$

$$\frac{f(\pi^+) + f(\pi^-)}{2} = \frac{\pi - \pi}{2} = 0$$

$$x = \left(\frac{13\pi}{2} - 3 \cdot 2\pi\right) = (0.5\pi)$$

בנקודה $\frac{\pi}{2}$ הטנגדיה רציפה לכן הערך מתקבל לפי שלם הטנגדיה

$$S(x) = f(x) = \frac{\pi}{2}$$

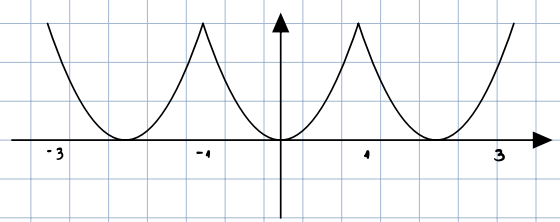
תרגיל 2

נתונה פונקציה $f(x) = x^2$ בקטע $[-1,1]$ בעלת מחזור $T = 2$

א. חשבו טור פורייה מרוכב של הפונקציה $f(x)$

ב. האם טור פוריה של הפונקציה f שמצאתם בסעיף א' מתכנס אל הפונקציה f בנורמה?

ג. חשבו $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}$



$f(x) = x^2$

$T = 2 \quad , L = 1$

$$C_0 = \frac{1}{2} \cdot \int_{-1}^{1} x^2 dx = \frac{1}{3}$$

$$C_n = \frac{1}{2L} \cdot \int_{-L}^{L} f(x) \cdot e^{-\frac{in\pi x}{L}} dx$$

$$C_n = \frac{1}{2} \cdot \int_{-1}^{1} x^2 e^{-in\pi x} dx$$

$$\frac{1}{2} \cdot \left[\frac{x^2 e^{-in\pi x \pi}}{-in\pi} - \frac{2}{-in\pi} \cdot \int_{-1}^{1} x e^{-in\pi x} dx \right] = \frac{1}{2} \cdot \left[\frac{x^2 e^{-in\pi x \pi}}{-in\pi} - \frac{2}{-in\pi} \cdot \left(\frac{e^{-in\pi x}}{(-in\pi)^2} (-in\pi x - 1) \right) \right]_{-1}^{1}$$

$$\frac{x^2 e^{-in\pi x}}{-in\pi} + \frac{2}{in\pi} \cdot \left(\frac{e^{-in\pi x}}{(-in\pi)^2} (-in\pi x - 1) \right)$$

$$\frac{1}{2} \left(\frac{x^2 e^{-in\pi x}}{-in\pi} + \frac{2 e^{in\pi x}}{-i(n\pi)^3} \cdot (-in\pi x - 1) \Big|_{-1}^{1} \right)$$

$$\frac{1}{2} \left(\cancel{\frac{(-1)^n}{-in\pi}} + \frac{2(-1)^n}{i(n\pi)^3} \cdot (in\pi + 1) - \left(\cancel{\frac{(-1)^n}{-in\pi}} + \frac{2(-1)^n}{i(n\pi)^3} \cdot (-in\pi + 1) \right) \right)$$

$$\frac{2(-1)^n}{in^3\pi^3} \cdot (in\pi + 1) - \frac{2(-1)^n}{in^3\pi^3} (-in\pi + 1)$$

$$\frac{2(-1)^n}{in^3\pi^3} + \frac{2(-1)^n}{in^3\pi^3} = \frac{4(-1)^n}{in^3\pi^3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{2(-1)^n}{in^3\pi^3}$$

$$C_n = \frac{2(-1)^n}{n^2\pi^2}$$

$$\frac{f(x^+)+f(x^-)}{2} = \frac{1}{3} + \sum_{\substack{n=-\infty \\ n\neq 0}}^{\infty} \frac{2(-1)^n}{n^2\pi^2} \cdot e^{in\pi x}$$

ב) שהטור יתכנס בנורמה סופי - $\int_{-L}^{L} |f(x)|^2 dx \Leftarrow \int_{-1}^{1} x^4 d = \frac{2}{5}$

עתה לבאות האינטגרל לפי הטור שמתכנס בנורמה.

ג) נבחר את $x=0$

$$\frac{f(0^+)+f(0^-)}{2} = \frac{1}{3} + \frac{2}{\pi^2} \cdot \sum_{\substack{n=-\infty \\ n\neq 0}}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \cdot e^{in x}$$

$$0 = \frac{1}{3} + \frac{2}{\pi^2} \cdot \sum_{\substack{n=-\infty \\ n\neq 0}}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}$$

$$\frac{-\frac{1}{3}}{\frac{2}{\pi^2}} = \sum_{\substack{n=-\infty \\ n\neq 0}}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}$$

$$-\frac{\pi^2}{6}$$

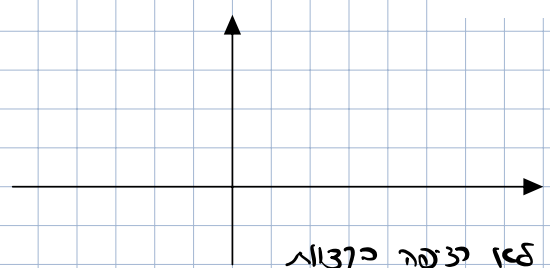
תרגיל 3

תהי $f(x) = e^{\frac{1}{4}ix}$ המוגדרת בקטע $[-\pi, \pi]$

א. מצאו טור פוריה מרוכב של $f(x)$

ב. האם הטור שמצאתם בסעיף א' מתכנס במידה שווה לפונקציה?

ג. מהם ערכי הטור בנקודות $x = 4\pi$, $x = -6\pi$



$$f(x) = e^{\frac{1}{4}ix}$$

$T = 4\pi$

$L = 2\pi$ $\quad [-2\pi, 2\pi]$

הקבועים הן $\pm i$ יניח שכאלה שהיא לא יכולה בדקות

$$C_n = \frac{1}{2L} \cdot \int_{-L}^{L} f(x) \cdot e^{-\frac{in\pi x}{L}} \, dx$$

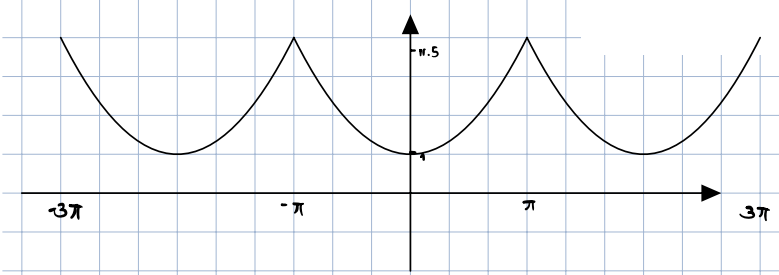
$$C_n = \frac{1}{4\pi} \cdot \int_{-2\pi}^{2\pi} e^{\frac{1}{4}ix} \cdot e^{-\frac{inx}{2}} \, dx$$

$$C_n = \frac{1}{4\pi} \cdot \int_{-2\pi}^{2\pi} e^{-\frac{1}{8}nx} \, dx = \frac{1}{4\pi} \cdot \left| \frac{e^{-\frac{1}{8}nx}}{-\frac{1}{8}n} \right|_{-2\pi}^{2\pi} = \frac{-2}{\pi n} \cdot \left(e^{-\frac{1}{8}n \cdot 2\pi} - \underbrace{e^{-\frac{1}{8} \cdot n \cdot (-2\pi)}}_{\sin(\frac{1}{4}\pi n)} \right)$$

תרגיל 5

א. פתחו את הפונקציה $f(x) = cosh(x)$ בקטע $[-\pi, \pi]$ לטור פורייה מרוכב

ב. חשבו את סכום הטור: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{1+n^2}$



$f(x) = \cosh(x)$

2.2. מקרים פרטיים של טור פורייה

תהי פונקציה $f(x)$ רציפה למקוטעין ומחזורית עם מחזור $T = 2L$, כלומר $f(x) = f(x+2L)$, ובעלת נגזרת $f'(x)$ רציפה למקוטעין. טור פוריה מרוכב של f:

$$\frac{f(x^+)+f(x^-)}{2} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{i\frac{\pi n x}{L}} = c_0 + \sum_{\substack{n=-\infty \\ n\neq 0}}^{\infty} c_n e^{i\frac{\pi n x}{L}}$$

פונקציות בסיסיות המרכיבות את טור פוריה: $e^{i\frac{\pi n x}{L}}$, c_0

תרגיל 1

מצאו טור פורייה מרוכב של הפונקציה $f(x) = 2\,sin^2(x)$ בקטע $-\pi \le x \le \pi$ כאשר $f(x) = f(x+2\pi)$ ורשמו במפורש את מקדמי הטור c_n

תרגיל 2

א. מצאו טור פורייה מרוכב של הפונקציה $f(x) = 2 + \frac{1}{3}sin(2\pi x) + \frac{1}{5}cos(3\pi x)$ בקטע $-1 < x < 1$ ורשמו במפורש את מקדמי הטור c_n

ב. חשבו $\int_{-1}^{1} |f(x)|^2 dx$

תרגיל 3

נתונה פונקציה $f(x) = x$ בקטע $[-\pi, \pi]$ עם מחזור 2π

א. חשבו טור פורייה מרוכב של $f(x)$

ב. פתחו את הפונקציה $g(x) = x + 2isin(6x)$ לטור פורייה מרוכב בקטע $[-\pi, \pi]$

© כל הזכויות שמורות – אלון באומן – לימוד קורסים אונליין www.alonbaumann.co.il

תרגיל 1

מצאו טור פורייה מרוכב של הפונקציה $f(x) = 2\,sin^2(x)$ בקטע $-\pi \le x \le \pi$ כאשר $f(x) = f(x+2\pi)$ ורשמו

במפורש את מקדמי הטור c_n

$$f(x) = 2\sin^2(x)$$
$$T = 2\pi$$
$$L = \pi$$

כדי לחשב טור פורייה מרוכב נמצא את $\sin(x) = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$

$$f(x) = 2\cdot\left(\frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}\right)^2 = \frac{2}{-4}\cdot\left(e^{2ix} - 2e^{ix}\cdot e^{-ix} + e^{-2ix}\right)$$

$$-\frac{1}{2}e^{2ix} + 1 - \frac{1}{2}e^{-2ix}$$

$$\boxed{f(x) = 1 - \frac{1}{2}e^{-2ix} - \frac{1}{2}e^{2ix}}$$

תרגיל 2

א. מצאו טור פורייה מרוכב של הפונקציה $f(x) = 2 + \frac{1}{3}sin(2\pi x) + \frac{1}{5}cos(3\pi x)$ בקטע $-1 < x < 1$ ורשמו

במפורש את מקדמי הטור c_n

ב. חשבו $\int_{-1}^{1}|f(x)|^2dx$

$$f(x) = 2 + \frac{1}{3}\sin(2\pi x) + \frac{1}{5}\cos(3\pi x)$$
$$T = 2$$
$$L = 1$$

$$f(x) = 2 + \frac{1}{3}\cdot\left(\frac{e^{2\pi ix} - e^{-2\pi ix}}{2i}\right) + \frac{1}{5}\cdot\left(\frac{e^{3\pi ix} + e^{-3\pi ix}}{2}\right)$$

$$2 + \frac{1}{6i}\cdot\left(e^{i2\pi x} - e^{-i2\pi x}\right) + \frac{1}{10}\cdot\left(e^{3\pi ix} + e^{-3\pi ix}\right)$$

$$2 + \frac{1}{6i}\cdot e^{2\pi ix} - \frac{1}{6i}\cdot e^{-2\pi ix} + \frac{1}{10}\cdot e^{3\pi ix} + \frac{1}{10}\cdot e^{-3\pi ix}$$

$$C_0 = 2,\ C_2 = \frac{1}{6i},\ C_{-2} = -\frac{1}{6i},\ C_3 = \frac{1}{10},\ C_{-3} = \frac{1}{10}$$

שאר המקדמים שווים ל-0.

ב. חשבו $\int_{-1}^{1}|f(x)|^2dx$

לפי משפט פרסבל:

$$\frac{1}{2L}\int_{-L}^{L}|f(x)|^2\,dx = \sum_{n=-\infty}^{\infty}|C_n|^2 = \sum_{n=-\infty}^{\infty}C_n\cdot\overline{C_n}$$

מהשאפשרים $= \frac{1}{2}\cdot\int_{-1}^{1}|f(x)^2dx$

$$\int_{-1}^{1} |f(x)|^2 dx = \frac{917}{225} \Big/ \cdot \frac{1}{2}$$

$$\int_{-1}^{1} |f(x)|^2 dx = 8.1511$$

תרגיל 3

נתונה פונקציה $f(x) = x$ בקטע $[-\pi, \pi]$ עם מחזור 2π

א. חשבו טור פורייה מרוכב של $f(x)$

ב. פתחו את הפונקציה $g(x) = x + 2isin(6x)$ לטור פורייה מרוכב בקטע $[-\pi, \pi]$

$f(x) = x \qquad [-\pi, \pi)$

$T = 2\pi$

$L = \pi$

אם הטור של x תמצאו פעמיים.

$$2i \cdot \left(\frac{e^{i6x} - e^{-i6x}}{2i} \right)$$

$$x + e^{i6x} - e^{i6x}$$

2.3. משפט גזירה איבר איבר של טור פורייה

תהי פונקציה $f(x)$ רציפה למקוטעין ומחזורית עם מחזור $T = 2\pi$, כלומר $f(x) = f(x + 2\pi)$, ובעלת נגזרת $f'(x)$ רציפה למקוטעין. טור פוריה מרוכב של f:

$$\frac{f(x^+) + f(x^-)}{2} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}$$

אם הפונקציה $f(x)$ מקיימת את התנאים הבאים:

1. $f(x)$ רציפה בקטע $[-\pi, \pi]$
2. $f(x)$ בעלת המשכה מחזורית רציפה כלומר $f(-\pi) = f(\pi)$
3. $f'(x)$ רציפה למקוטעין בקטע $[-\pi, \pi]$

אז ניתן לגזור את הטור פוריה של $f(x)$ איבר-איבר ולקבל את הטור פורייה של הנגזרת $f'(x)$:

$$\frac{f'(x^+) + f'(x^-)}{2} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} inc_n e^{inx}$$

תרגיל 1

נתונה פונקציה $f(x) = x^2$ בקטע $[-1,1]$ בעלת מחזור $T = 2$

א. חשבו טור פורייה מרוכב של הפונקציה $f(x)$

ב. חשבו טור פוריה מרוכב של $g(x) = 2x$ ע"י שימוש בטור פורייה שמצאתם בסעיף א'

ג. חשבו $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ בעזרת הטור שמצאתם בסעיף ב'

© כל הזכויות שמורות – אלון באומן – לימוד קורסים אונליין www.alonbaumann.co.il

תרגיל 1

נתונה פונקציה $f(x) = x^2$ בקטע $[-1,1]$ בעלת מחזור $T = 2$

א. חשבו טור פורייה מרוכב של הפונקציה $f(x)$

ב. חשבו טור פוריה מרוכב של $g(x) = 2x$ ע"י שימוש בטור פורייה שמצאתם בסעיף א'

ג. חשבו $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ בעזרת הטור שמצאתם בסעיף ב'

$f(x) = x^2 \quad [-1,1]$

$T = 2 \quad L = 1$

$$c_0 = \frac{1}{2} \cdot \int_{-1}^{1} x^2 dx = \frac{1}{3}$$

$$c_n = \frac{1}{2} \cdot \int_{-1}^{1} x^2 e^{-in\pi x} dx$$

$$\frac{1}{2}\left(\frac{x^2 e^{-in\pi x}}{-in\pi} - \frac{2}{-in\pi} \cdot \int x e^{-in\pi x} dx\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{x^2 e^{-in\pi x}}{-in\pi} + \frac{2}{in\pi} \cdot \left(\frac{e^{-in\pi x}}{(-in\pi)^2} \cdot (-in\pi x - 1)\right)\right)\Bigg|_{-1}^{1}$$

$$\frac{1}{2}\left(\frac{x^2 e^{-in\pi x}}{-in\pi} + \frac{2e^{-in\pi x}}{-in^3\pi^3} \cdot (-in\pi x - 1)\right)$$

$$\frac{1}{2}\left(\frac{x^2 e^{-in\pi x}}{-in\pi} + \frac{2e^{-in\pi x}}{in^3\pi^3}(in\pi x + 1)\right)$$

$$\left(\frac{e^{-in\pi}}{-in\pi} + \frac{2e^{-in\pi}}{in^3\pi^3}(in\pi + 1)\right) - \left(\frac{e^{in\pi}}{-in\pi} + \frac{2e^{in\pi}}{in^3\pi^3} \cdot (-in\pi + 1)\right)$$

$$c_n = \frac{2(-1)^n}{\pi^2 n^2}$$

$$\frac{f(x^+) + f(x^-)}{2} = \frac{1}{3} + \sum_{\substack{n=-\infty \\ n \neq 0}}^{\infty} \frac{2(-1)^n}{\pi^2 n^2} \cdot e^{-in\pi x}$$

ב. חשבו טור פוריה מרוכב של $g(x) = 2x$ ע"י שימוש בטור פורייה שמצאתם בסעיף א'

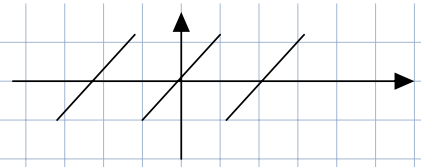
1) מתקיים $f'(x) = g(x)$

לפי זה נגזור את האגפים לגזירה של הטור $f(x)$

1) הטור נקבע רציפה בכל

2) הטור נקבע בכל המשפחה מתכנס רציפה $f(1) = f(-1) = 1$

3) $g(x)$ הינו טור נקבע רציפה לא רציפה



שאותם התנאים מתקיימים ולכן ניתן לגזור את הטור פורייה של f
ולקבל את הטור של $g(x)$

$$\frac{f(x^+)+f(x^-)}{2} = \frac{1}{3} + \sum_{\substack{n=-\infty \\ n\neq 0}}^{\infty} \frac{2(-1)^n}{\pi^2 n^2} \cdot e^{-in\pi x}$$

$$\frac{g(x^+)+g(x^-)}{2} = \sum_{\substack{n=-\infty \\ n\neq 0}}^{\infty} \frac{2(-1)^n}{\pi^2 n^2} \cdot (-in\pi) e^{-in\pi x}$$

$$\frac{g(x^+)+g(x^-)}{2} = \sum_{\substack{n=-\infty \\ n\neq 0}}^{\infty} \frac{-2i(-1)^n}{\pi n} \cdot e^{-in\pi x}$$

2.4. משפט אינטגרציה איבר איבר של טור פורייה

תהי פונקציה $f(x)$ רציפה למקוטעין ומחזורית עם מחזור $T = 2\pi$, כלומר $f(x) = f(x + 2\pi)$, ובעלת נגזרת $f'(x)$ רציפה למקוטעין. טור פוריה מרוכב של f:

$$\frac{f(x^+) + f(x^-)}{2} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx} = c_0 + \sum_{\substack{n=-\infty \\ n\neq 0}}^{\infty} c_n e^{inx}$$

אם הפונקציה $f(x)$ מקיימת את התנאים הבאים:

1. $f(x)$ רציפה למקוטעין בקטע $[-\pi, \pi]$
2. מתקיים: $\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = 0$

אז ניתן לבצע אינטגרציה איבר-איבר לטור פוריה של $f(x)$ ולקבל את הטור פורייה של הקדומה $F(x)$:

$$\frac{F(x^+) + F(x^-)}{2} = c_0 x + \sum_{\substack{n=-\infty \\ n\neq 0}}^{\infty} \frac{c_n}{in} e^{inx}$$

הערה – אם תנאי 2 לא מתקיים אז ניתן לסדר את הפונקציה $f(x)$ כך שהוא יתקיים, ולכן ישנם מקרים בהם אין צורך לבדוק תנאי זה.

משפט – הפונקציה $F(x)$ המתקבלת לאחר אינטגרציה היא בהכרח פונקציה רציפה ובעלת המשכה מחזורית רציפה כלומר $F(x)$ רציפה בקטע $[-\pi, \pi]$ ומתקיים: $F(-\pi) = F(\pi)$

תרגיל 1

נתונה פונקציה $f(x) = cos\left(\frac{x}{2}\right)$ בקטע $[-\pi, \pi]$ עם מחזור 2π

א. פתחו את הפונקציה f לטור פורייה מרוכב בקטע $[-\pi, \pi]$

ב. מצאו את הטור פורייה של $f(x) = sin\left(\frac{x}{2}\right)$ ע"י שימוש בטור שמצאתם בסעיף א'

© כל הזכויות שמורות – אלון באומן – לימוד קורסים אונליין www.alonbaumann.co.il

2.5. משפטי קצב דעיכת המקדמים

הגדרה – תהי פונקציה $f(x)$ ממשית. נאמר כי $f \in C^k$ אם f בעלת הרחבה מחזורית גזירה ברציפות k פעמים. (במילים אחרות k מייצג את מספר הנגזרות רציפות שיש לפונקציה שהן בעלות המשכה מחזורית רציפה).

מקרים פרטיים:

$f \in C^0$ – הפונקציה f בעלת הרחבה מחזורית רציפה

$f \in C^1$ – הפונקציה f בעלת הרחבה מחזורית רציפה וגזירה, הנגזרת f' בעלת הרחבה מחזורית רציפה

$f \in C^2$ – הפונקציה f בעלת הרחבה מחזורית רציפה וגזירה, f' בעלת הרחבה מחזורית רציפה וגזירה, f'' בעלת הרחבה מחזורית רציפה

$\vdots$

$f \in C^\infty$ – הפונקציה f בעלת אינסוף נגזרות בעלות הרחבה מחזורית רציפה וגזירה

הגדרה - חלקות הפונקציה – ככל שיש לפונקציה f יותר נגזרות בעלת בעלות הרחבה מחזורית רציפה כך הפונקציה נקראת חלקה יותר. דוגמא: אם $f \in C^2$ ו- $g \in C^3$ אז הפונקציה g חלקה יותר מאשר הפונקציה f.

הקשר בין חלקות הפונקציה וקצב דעיכת מקדמי טור פוריה של הפונקציה – ככל שפונקציה חלקה יותר כך קצב דעיכת מקדמי טור פוריה של הפונקציה גדול יותר, כלומר המקדמים שואפים "מהר" יותר לאפס, ולהיפך.

דוגמא: תהי f בעלת טור פוריה עם מקדמים $c_n = \frac{1}{n^3}$ ותהי g בעלת טור פוריה עם מקדמים $c_n = \frac{1}{n^4}$. מקדמי הטור של הפונקציה g שואפים "מהר" יותר לאפס ולכן ניתן להסיק כי g פונקציה חלקה יותר מאשר הפונקציה f.

משפטי קצב דעיכת המקדמים:

משפט 1 - תהי f בעלת המשכה מחזורית גזירה ברציפות $k-1$ פעמים ובעלת נגזרת k רציפה למקוטעין. אז מקדמי פוריה מקיימים: $\lim_{n\to\infty} |n|^k c_n = 0$

נפרט את המשפט בשני הכיוונים:

כיוון 1 - אם נתונה פונקציה f אז ניתן לדעת כמה נגזרות רציפות בעלות המשכה מחזורית רציפה יש לפונקציה ולכן נוכל לדעת מהו ערכו של k (המייצג את הנגזרת הרציפה למקוטעין). ואם יודעים את k אז אנחנו יודעים שהגבול $\lim_{n\to\infty} |n|^k c_n = 0$ מתקיים.

כיוון 2 – אם נתון טור פוריה של פונקציה f אז ניתן לדעת מהם מקדמי הטור c_n. עבור מקדמי הטור ניתן לקבוע מהו ה- k המקסימלי עבורו הגבול $\lim_{n\to\infty} |n|^k c_n = 0$ מתקיים. במקרה זה יש לפונקציה f <u>מקסימום</u> $k-1$ נגזרות הרציפות בעלות המשכה מחזורית רציפה שיש לפונקציה.

© כל הזכויות שמורות – אלון באומן – לימוד קורסים אונליין www.alonbaumann.co.il

משפט 2 – יהיו c_n מקדמי טור פוריה של פונקציה $f(x)$ רציפה למקוטעין. אם: $|c_n| \le \frac{C}{|n|^k |n|^\alpha}$ כאשר C קבוע ו- $1 < \alpha < 2$, אז ההמשכה המחזורית של f גזירה k פעמים ברציפות, כלומר $f \in C^k$

הערות:

1. אם נתון טור פוריה של פונקציה f אז ניתן לדעת מהם מקדמי הטור c_n. עבור מקדמי הטור ניתן לקבוע מהו ה- k המקסימלי עבורו האי-שיוויון $|c_n| \le \frac{C}{|n|^k |n|^\alpha}$ מתקיים. במקרה זה יש לפונקציה f <u>מינימום</u> k נגזרות הרציפות בעלות המשכה מחזורית רציפה שיש לפונקציה.

2. אם אי-השיוויון $|c_n| \le \frac{C}{|n|^k |n|^\alpha}$ מתקיים עבור כל k אז יש לפונקציה f אינסוף נגזרות רציפות, כלומר $f \in C^\infty$

תרגיל 1

תהי פונקציה $f(x)$ בעלת טור פוריה מרוכב: $\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{n^{3.8}} e^{inx}$ קבעו את מספר הנגזרות הרציפות בעלות המשכה מחזורית רציפה שיש לפונקציה f.

תרגיל 2

תהי פונקציה $f(x) = x^4 - 2x^2$ עם מחזור 2 המוגדרת בקטע $[-1,1]$ חשבו $\lim_{n\to\infty} n^2 \cdot \int_{-1}^{1} f(x) e^{-inx} dx$

תרגיל 3

קבעו נכון\לא נכון – תהי פונקציה $f(x)$ בעלת טור פוריה: $\sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-n} e^{inx}$
הפונקציה f בעלת אינסוף נגזרות רציפות בעלות המשכה מחזורית רציפה

תרגיל 4

תהי פונקציה $f(x)$ בעלת טור פוריה מרוכב: $\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{2^n} e^{inx}$

א. קבעו את מספר הפעמים שניתן להפעיל על הטור של הפונקציה f את משפט גזירה איבר איבר

ב. קבעו את מספר הפעמים שניתן להפעיל על הטור של הפונקציה f את משפט אינטגרציה איבר איבר

© כל הזכויות שמורות – אלון באומן – לימוד קורסים אונליין www.alonbaumann.co.il

2.6. תכונות של מקדמי טורי פורייה מרוכבים

תהי פונקציה $f(x)$ רציפה למקוטעין ובעלת נגזרת $f'(x)$ רציפה למקוטעין ומחזורית עם מחזור $T = 2L$,

כלומר $f(x) = f(X + 2L)$. טור פוריה מרוכב של f:

$$\frac{f(x^+) + f(x^-)}{2} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{i\frac{\pi n x}{L}}$$

תהי פונקציה $g(x)$ המתקבלת מהפונקציה f ע"י פעולה כלשהי (הזזה, כיווץ, מתיחה וכו') ונרצה לחשב את מקדמי הטור פורייה של הפונקציה $g(x)$ על סמך מקדמי טור פוריה של f: c_n

תרגיל 1

תהי $f(x)$ פונקציה רציפה למקוטעין מחזורית עם מחזור 2π ויהי טור פורייה מרוכב של f:

$$\frac{f(x^+) + f(x^-)}{2} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}$$

נגדיר פונקציה $g(x) = f(x - \pi)$ בקטע $[-\pi, \pi]$. מצאו ביטוי למקדמי הטור של הפונקציה g כתלות ב- c_n

תרגיל 2

תהי $f(x)$ פונקציה רציפה למקוטעין מחזורית עם מחזור 2π ויהי טור פורייה מרוכב של f:

$$\frac{f(x^+) + f(x^-)}{2} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}$$

נגדיר פונקציה $g(x) = f(x) \cdot e^{ix}$ בקטע $[-\pi, \pi]$. מצאו ביטוי למקדמי הטור של הפונקציה g כתלות ב- c_n

© כל הזכויות שמורות – אלון באומן – לימוד קורסים אונליין www.alonbaumann.co.il

2.7. מעבר מטור פוריה מרוכב לטור פוריה ממשי

תהי פונקציה $f(x)$ רציפה למקוטעין ומחזורית עם מחזור $T = 2L$, כלומר $f(x) = f(x+2L)$, ובעלת נגזרת $f'(x)$ רציפה

למקוטעין. טור פוריה מרוכב של f: $\frac{f(x^+)+f(x^-)}{2} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{i\frac{\pi n x}{L}}$

טור פוריה ממשי של f: $\frac{f(x^+)+f(x^-)}{2} = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{\pi n x}{L}\right) + b_n \sin\left(\frac{\pi n x}{L}\right)$

הקשר בין מקדמי טור פורייה מרוכב c_n לבין מקדמי טור פוריה ממשי a_n, b_n:

$$a_n = c_n + c_{-n} \quad , \quad n = 0,1,2,3,\dots$$
$$b_n = i(c_n - c_{-n}) \quad , \quad n = 1,2,3,\dots$$

אי קורה כ $b_n=0$

תרגיל 1

נתונה פונקציה: $f(x) = \begin{cases} \cos(x) & , \quad 0 \le x \le \pi \\ 0 & , \quad \pi < x < 2\pi \end{cases}$

א. פתחו את $f(x)$ לטור פוריה מרוכב

ב. רשמו טור פוריה ממשי של f

תרגיל 2

נתונה פונקציה $f(x) = x^2$ בקטע $[-1,1]$ בעלת מחזור $T = 2$

א. חשבו טור פורייה מרוכב של הפונקציה $f(x)$

ב. בעזרת הטור שמצאתם בסעיף א', רשמו את הטור פורייה הממשי של f

תרגיל 3

תהי פונקציה $f(x)$ רציפה למקוטעין ומחזורית עם מחזור $T = 2\pi$, כלומר $f(x) = f(x+2\pi)$, ובעלת נגזרת $f'(x)$ רציפה

למקוטעין. טור פוריה מרוכב של f: $\frac{f(x^+)+f(x^-)}{2} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}$

טור פוריה ממשי של f: $\frac{f(x^+)+f(x^-)}{2} = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)$

הוכיחו כי:

$$a_n = c_n + c_{-n} \quad , \quad n = 0,1,2,3,\dots$$
$$b_n = i(c_n - c_{-n}) \quad , \quad n = 1,2,3,\dots$$

תרגיל 4

תהי פונקציה $f(x)$ רציפה למקוטעין ומחזורית עם מחזור $T = 2\pi$, כלומר $f(x) = f(x+2\pi)$, ובעלת נגזרת $f'(x)$ רציפה

למקוטעין. הוכיחו: $\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx} = c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (c_n + c_{-n})\cos(nx) + i(c_n - c_{-n})\sin(nx)$

© כל הזכויות שמורות – אלון באומן – לימוד קורסים אונליין www.alonbaumann.co.il

תרגיל 1

נתונה פונקציה: $f(x)=\begin{cases} cos(x) & , \quad 0\le x\le \pi \\ 0 & , \quad \pi < x < 2\pi \end{cases}$

א. פתחו את $f(x)$ לטור פוריה מרוכב

ב. רשמו טור פוריה ממשי של f

$T = 2\pi$

$L = \pi$

$f(x) = \cos(x)$

$$c_n = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\cdot e^{-inx}\,dx = \frac{1}{2\pi}\cdot\int_0^{\pi}\cos(x)\cdot e^{-inx}\,dx$$

$a=-in$

$b=1$

$$\frac{e^{-inx}(-in\cos x+\sin x)}{(-in)^2+1^2}\Bigg|_0^{\pi} = \frac{(-1)^n(in+0)-1(-in+0)}{-n^2+1}$$

$$c_n = \frac{(-1)^n\cdot in + in}{2\pi(-n^2+1)}$$

$$c_1 = \frac{1}{2\pi}\cdot\int_0^{\pi}\cos(x)\cdot e^{-ix}\,dx = \frac{1}{2\pi}\cdot\int_0^{\pi}\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}\cdot e^{-ix}\,dx$$

$$c_1 = \frac{1}{4\pi}\cdot\int_0^{\pi}1+e^{-2ix}\,dx = \frac{1}{4\pi}\cdot\left(x-\frac{e^{-2ix}}{2i}\right)\Bigg|_0^{\pi} = \frac{1}{4\pi}\cdot\left(\pi-\frac{\overbrace{e^{-2i\pi}}^{1}}{2i}-0+\frac{1}{2i}\right) = \frac{1}{4}$$

$c_1 = \frac{1}{4}$

$e^{-2i\pi} = \cos 2\pi - i\sin 2\pi = 1$

$$c_{-1} = \frac{1}{4\pi}\cdot\int_0^{\pi} e^{2ix}+1\,dx = \frac{1}{4\pi}\cdot\left(\frac{e^{2ix}}{2i}+x\right)\Bigg|_0^{\pi} = \frac{e^{2i\pi}}{2i}+\pi-\left(\frac{1}{2i}\right) = \frac{1}{4}$$

תרגיל 4

תהי פונקציה $f(x)$ רציפה למקוטעין ומחזורית עם מחזור $T = 2\pi$, כלומר $f(x) = f(x + 2\pi)$, ובעלת נגזרת $f'(x)$ רציפה למקוטעין. הוכיחו:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx} = c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (c_n + c_{-n})\, cos(nx) + i(c_n - c_{-n})\, sin(nx)$$

2.8. מעבר מטור פוריה ממשי לטור פוריה מרוכב

תהי פונקציה $f(x)$ רציפה למקוטעין ומחזורית עם מחזור $T = 2L$, כלומר $f(x) = f(x+2L)$, ובעלת נגזרת $f'(x)$ רציפה

למקוטעין. טור פוריה ממשי של f: $$\frac{f(x^+)+f(x^-)}{2} = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n\, cos(nx) + b_n\, sin(nx)$$

טור פוריה מרוכב של f: $$\frac{f(x^+)+f(x^-)}{2} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}$$

הקשר בין מקדמי טור פורייה ממשי a_n, b_n לבין מקדמי טור פוריה מרוכב c_n:

$$c_0 = \frac{1}{2}a_0 \quad , \quad n = 0$$
$$c_n = \frac{1}{2}(a_n - ib_n) \quad , \quad n = 1,2,3,\dots$$
$$c_{-n} = \frac{1}{2}(a_n + ib_n) \quad , \quad n = 1,2,3,\dots$$

תרגיל 1

א. פתחו את הפונקציה $f(x) = e^x$ לטור פורייה ממשי בקטע $[-\pi, \pi)$

ב. בעזרת הטור שמצאתם בסעיף א', רשמו את הטור פורייה המרוכב של f

תרגיל 2

תהי פונקציה $f(x)$ רציפה למקוטעין ומחזורית עם מחזור $T = 2\pi$, כלומר $f(x) = f(x+2\pi)$, ובעלת נגזרת $f'(x)$ רציפה

למקוטעין. ידוע כי $$\frac{f(x^+)+f(x^-)}{2} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n\, cos(nx) + a_n\, sin(nx)$$

הוכיחו כי: $$\frac{f(x^+)+f(x^-)}{2} = \sum_{n=-1}^{-\infty} \frac{1+i}{2} a_{-n} e^{inx} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1-i}{2} a_n e^{inx}$$

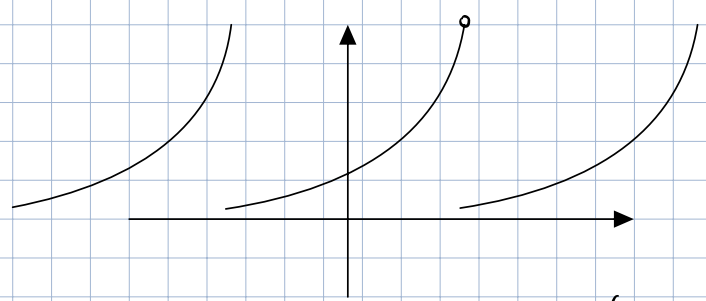
,

© כל הזכויות שמורות – אלון באומן – לימוד קורסים אונליין www.alonbaumann.co.il

תרגיל 1

א. פתחו את הפונקציה $f(x) = e^x$ לטור פורייה ממשי בקטע $[-\pi, \pi)$

ב. בעזרת הטור שמצאתם בסעיף א', רשמו את הטור פורייה המרוכב של f



.א

$f(x) = e^x \qquad [-\pi, \pi)$

$T = 2\pi \qquad L = \pi$

$$\frac{f(x^+) + f(x^-)}{2} = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\frac{n\pi x}{L} + b_n \sin\frac{n\pi x}{L}$$

$$a_n = \frac{1}{L}\cdot\int_{-L}^{L} f(x)\cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right)dx$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\cdot\int_{-\pi}^{\pi} e^x \cos nx\, dx = \frac{e^x(\cos nx + n\sin nx)}{1+n^2}\Bigg|_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{\pi}(-1)^n - e^{-\pi}(-1)^n}{1+n^2} = \frac{(-1)^n\overbrace{(e^{\pi} - e^{-\pi})}^{2\sinh\pi}}{\pi(1+n^2)} = \frac{2(-1)^n \sinh\pi}{\pi(1+n^2)}$$

$a = 1 \quad p = n$

$$a_n = \frac{2(-1)^n \sinh\pi}{\pi(1+n^2)}$$

$$a_0 = \frac{2\sinh\pi}{\pi}$$

$$b_n = \frac{1}{L}\cdot\int_{-L}^{L} f(x)\sin\frac{n\pi x}{L}\,dx$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\cdot\int_{-\pi}^{\pi} e^x \sin nx\, dx = \frac{1}{\pi}\cdot\left|\frac{e^x\cdot(\sin nx - n\cos nx)}{1+n^2}\right|_{-\pi}^{\pi} = \frac{1}{\pi(1+n^2)}\cdot\left(e^{\pi}(0 - n(-1)^n) - e^{-\pi}(0 - n(-1)^n)\right) = \frac{-n(-1)^n}{1+n^2}\cdot\overbrace{(e^{\pi} - e^{-\pi})}^{2\sinh\pi}$$

$$-n(-1)^n e^{\pi} + n(-1)^n e^{-\pi}$$

$$-n(-1)^n(e^{\pi} - e^{-\pi})$$

$a = 1 \quad p = n$

$$\int e^{ax}\sin px\,dx = \frac{e^{ax}(a\sin px - p\cos px)}{a^2 + p^2}$$

$$b_n = \frac{-2n(-1)^n \sinh\pi}{1+n^2}$$

$$\frac{f(x^+) + f(x^-)}{2} = \frac{4\sinh\pi}{\pi} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(-1)^n\sinh\pi}{\pi(1+n^2)}\cdot\cos nx \; \frac{-2n(-1)^n\sinh\pi}{\pi(1+n^2)}\sin nx$$