אנליזה הרמונית

90916

פרק 3 – התמרת פורייה

מכללת אפקה

אין לשכפל, להעתיק, לצלם, להקליט, לאחסן במאגר מידע, לשדר או להקליט בכל דרך או בכל אמצעי אלקטרוני, אופטי או מכני, או אחר - כל חלק שהוא מהחומר שקובץ זה, בין אם לשימוש פנימי או מסחרי, ללא אישור בכתב מאתר אלון באומן – לימוד קורסים אונליין

סטודנטים לקורס אנליזה הרמונית 90916

קובץ זה עוסק בפרק 3 – התמרת פורייה בקורס אנליזה הרמונית ומכיל סיכום של החומר, הגדרות, משפטים, נוסחאות שימושיות ותרגילים המסודרים לפי סדר הנושאים ברמת קושי עולה: מהרמה הבסיסית ביותר ועד לרמת התרגילים המופיעים במבחנים.

לכל התרגילים פתרונות מלאים באתר אלון באומן – לימוד קורסים אונליין

הפתרונות של התרגילים מועברים בצורה ברורה, מסודרת ומלווים בהסבר קולי ברור, מפורט ומלא.

ניתן להצטרף לקבוצת ה- WhatsApp של הקורס עם אלון באומן, בה ניתן לשאול שאלות במהלך למידת הקורס. להצטרפות: לחץ כאן

בהצלחה,

אלון באומן

© כל הזכויות שמורות – אלון באומן – לימוד קורסים אונליין www.alonbaumann.co.il

תוכן עניינים

3.1. התמרת פורייה של פונקציה ומשפט פלאנשרל 4
3.2. התמרת פורייה לפונקציה זוגית ופונקציה אי-זוגית 6
3.3. תכונות של התמרת פורייה 9
3.3.1. תכונת הלינאריות 9
3.3.3. תכונה גזירה בתדר 11
3.3.4. תכונת הסימטריה 13
3.3.5. תכונת הזזה ומתיחה\כיווץ 15
3.4. קונבולוציה ותכונת הקונבולוציה של התמרת פורייה 17
3.4. פתרון משוואות אינטגרליות 20

© כל הזכויות שמורות – אלון באומן – לימוד קורסים אונליין www.alonbaumann.co.il

3.1. התמרת פורייה של פונקציה ומשפט פלאנשרל

פונקציית L^1 – פונקציה $f(x)$ נקראת פונקציית L^1 אם $f(x)$ רציפה למקוטעין ובעלת נגזרת $f'(x)$ רציפה למקוטעין ומתקיים: $\int_{-\infty}^{\infty}|f(x)|dx < \infty$ (השטח בין $|f(x)|$ לבין ציר x הוא סופי).

פונקציית L^2 – פונקציה $f(x)$ נקראת פונקציית L^2 אם $f(x)$ רציפה למקוטעין ובעלת נגזרת $f'(x)$ רציפה למקוטעין ומתקיים: $\int_{-\infty}^{\infty}|f(x)|^2dx < \infty$ (השטח בין $|f(x)|^2$ לבין ציר x הוא סופי).

משפט – אם פונקציה $f(x) \in L^1$ אז $f(x) \in L^2$

כל פונקציה שייכת ל L^2 שייכת ל L^1

כל פונקציה שהיא רציפה למקוטעין ובעלת נגזרת רציפה למקוטעין ושהאינטגרל שלה אין סופי זה אומר שיש תחום שבו הגרף יהיה סופי.

התמרת פוריה של פונקציה $f(x) \in L^1$ מסומנת ב- $F(\omega)$ (או $\hat{f}(\omega)$) והיא מוגדרת ע"י: $F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-i\omega x}dx$

צורה כללית של התמרת פוריה: $F(\omega) = A(\omega) - iB(\omega)$

התמרת פוריה הפוכה (נוסחת ההיפוך\אינטגרל פוריה) – תהי פונקציית $f(x) \in L^1$ בעלת התמרת פוריה $F(\omega) \in L^1$.

התמרת פורייה הפוכה מוגדרת ע"י: $\frac{f(x^+) + f(x^-)}{2} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)e^{i\omega x}d\omega$

או בניסוח גבולי: $\frac{f(x^+) + f(x^-)}{2} = \lim_{M\to\infty}\frac{1}{2\pi}\int_{-M}^{M} F(\omega)e^{i\omega x}d\omega$

שימושים – חישוב אינטגרלים

משפט פלנשארל - נותן קשר בין $f(x)$ לבין ההתמרה $F(\omega)$

יהיו פונקציות $f(x) \in L^2$ והתמרת פוריה שלה $F(\omega) \in L^2$. הקשר בין $f(x)$ לבין התמרת פוריה שלה $F(\omega)$:

$$\int_{-\infty}^{\infty}|f(x)|^2dx = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)\cdot\overline{F(\omega)}d\omega$$

המקרה הכללי של משפט פלאנשרל- יהיו פונקציות $f(x) \in L^2$ והתמרת פוריה שלה $F(\omega) \in L^2$ ויהיו פונקציות $g(x) \in L^2$ והתמרת פוריה שלה $G(\omega) \in L^2$. הקשר בין הפונקציות $f(x), g(x)$ לבין התמרות פוריה שלהן $F(\omega), G(\omega)$:

$$\int_{-\infty}^{\infty}|f(x)g(x)|^2dx = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)\cdot\overline{G(\omega)}d\omega$$

© כל הזכויות שמורות – אלון באומן – לימוד קורסים אונליין www.alonbaumann.co.il

תרגיל 1

א. מצא התמרת פוריה של הפונקציה: $f(x)=\begin{cases} e^{-\frac{x}{2}} & , \quad x\geq 0 \\ 0 & , \quad x<0 \end{cases}$

ב. רשום את $f(x)$ כאינטגרל פוריה. לאיזה ערך מתכנס האינטגרל בנקודה $x=0$?

ג. חשב $\int_0^\infty \frac{d\omega}{1+4\omega^2}$

תרגיל 2

א. חשבו התמרת פורייה של הפונקציה: $f(x)=\begin{cases} 0 & , \quad x<0 \\ xe^{-2x} & , \quad x\geq 0 \end{cases}$

ב. חשבו $\int_{-\infty}^\infty \frac{4-\omega^2}{(4+\omega^2)^2}d\omega$

תרגיל 3

ידוע כי $\int_{-\infty}^\infty e^{-\frac{x^2}{2}}dx=\sqrt{2\pi}$. חשבו התמרת פורייה של הפונקציות הבאות:

א. $f(x)=e^{-\frac{x^2}{2}}$ ב. $g(x)=e^{-\frac{x^2}{2}+4x-6}$

ידוע כי לכל α ממשי, מתקיים כי $\widehat{e^{\frac{-\alpha x^2}{2}}}(\omega)=\sqrt{\frac{2\pi}{\alpha}}e^{\frac{-\omega^2}{2\alpha}}$

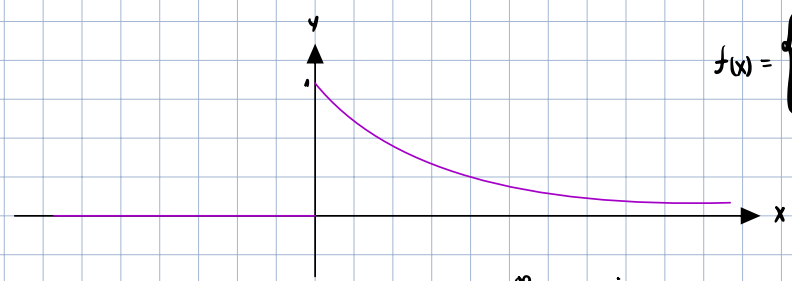
© כל הזכויות שמורות – אלון באומן – לימוד קורסים אונליין www.alonbaumann.co.il

תרגיל 1

א. מצא התמרת פוריה של הפונקציה: $f(x)=\begin{cases} e^{-\frac{x}{2}} & , \quad x\geq 0 \\ 0 & , \quad x<0 \end{cases}$

ב. רשום את $f(x)$ כאינטגרל פוריה. לאיזה ערך מתכנס האינטגרל בנקודה $x=0$?

ג. חשב $\int_0^\infty \frac{d\omega}{1+4\omega^2}$



$$f(x)=\begin{cases} e^{-\frac{x}{2}} & x\geq 0 \\ 0 & x<0 \end{cases}$$

הגדרת פורייה:

$$F(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\cdot e^{-i\omega x}\,dx$$

$$F(\omega)=\int_0^{\infty} e^{-\frac{x}{2}}\cdot e^{-i\omega x}\,dx=\int_0^{\infty} e^{-x(\frac{1}{2}+i\omega)}\,dx=\left.\frac{e^{-x(\frac{1}{2}+i\omega)}}{-\frac{1}{2}-i\omega}\right|_0^{\infty}=0-\frac{1}{-(\frac{1}{2}+i\omega)}$$

$$e^{-x(\frac{1}{2}+i\omega)}\,dx$$

$$F(\omega)=\frac{2}{1+2i\omega}\cdot\frac{1-i\omega 2}{1-i\omega 2}=\frac{2(1-i\omega)}{1+4\omega^2}=\frac{2-4i\omega}{1+4\omega^2}$$

תרגיל 2

א. חשבו התמרת פורייה של הפונקציה: $f(x)=\begin{cases}0 & , \quad x<0\\ xe^{-2x} & , \quad x\geq 0\end{cases}$

ב. חשבו $\int_{-\infty}^{\infty}\frac{4-\omega^2}{(4+\omega^2)^2}d\omega$

$$f(x)=\begin{cases}0 & , \quad x<0\\ xe^{-2x} & x\geq 0\end{cases}$$

$$F(\omega)=\int_0^{\infty} x\cdot \underbrace{e^{-2x}\cdot e^{-i\omega x}}_{-x(2+i\omega)}\,dx = \frac{e^{-x(2+i\omega)}}{(-2-i\omega)^2}\cdot\left(-(2+i\omega)x-1\right)\Big|_0^{\infty}+\frac{1}{(-2-i\omega)^2}$$

$a=2+i\omega$

$$\int xe^{ax}dx=\frac{e^{ax}}{a^2}(ax-1)+C$$

$$F(\omega)=\frac{1}{(2+i\omega)^2}\cdot\frac{(2-i\omega)^2}{(2-i\omega)^2}=\frac{4-4i\omega-\omega^2}{(4+\omega^2)^2}$$

$$f(\omega)=\frac{4-\omega^2}{(4+\omega^2)^2}-i\cdot\frac{4\omega}{(4+\omega^2)^2}$$

ב. חשבו $\int_{-\infty}^{\infty}\frac{4-\omega^2}{(4+\omega^2)^2}d\omega$

$$\frac{f(x^+)+f(x^-)}{2}=\frac{1}{2\pi}\cdot\int_{-\infty}^{\infty}F(\omega)\cdot e^{i\omega x}dx$$

$$\frac{f(x^+)+f(x^-)}{2}=\frac{1}{2\pi}\cdot\int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{4-\omega^2}{(4+\omega^2)^2}-i\cdot\frac{4\omega}{(4+\omega^2)^2}\right)e^{i\omega x}dx$$

$$0=\frac{1}{2\pi}\left[\int_{-\infty}^{\infty}\frac{4-\omega^2}{(4+\omega^2)^2}d\omega-\int_{-\infty}^{\infty}i\cdot\frac{4\omega}{(4+\omega^2)^2}d\omega\right]$$ עבור $x=0$

$$0=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{4-\omega^2}{(4+\omega^2)^2}d\omega$$

תוצאת האינטגרל היא 0.

3.2. התמרת פורייה לפונקציה זוגית ופונקציה אי-זוגית

תהי פונקצייה $f(x) \in L^1$ והתמרת פוריה שלה $F(\omega) \in L^1$.

התמרת פוריה של $f(x)$ מוגדרת ע"י: $F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-i\omega x}dx$ כאשר $F(\omega) = A(\omega) - iB(\omega)$

התמרת פוריה הפוכה (נוסחת ההיפוך\אינטגרל פוריה) מוגדרת ע"י: $\frac{f(x^+) + f(x^-)}{2} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)e^{i\omega x}d\omega$

נפריד ל- 2 מקרים:

1. פונקציה $f(x)$ זוגית: $f(x) = f(-x)$ - התמרת פוריה $F(\omega)$ היא ממשית: $F(\omega) = A(\omega)$

כאשר: $A(\omega) = 2\int_0^{\infty} f(x)\, cos(\omega x)\, dx$

התמרת פורייה הפוכה: $\frac{f(x^+) + f(x^-)}{2} = \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty} A(\omega)\, cos(\omega x)\, d\omega$

פונקציות זוגיות אלמנטיות: $f(x) = C$, $f(x) = x^n$ כאשר n זוגי, $f(x) = cos(x)$

מבחינה גרפית – פונקציה $f(x)$ זוגית אם יש שיקוף בציר y

2. פונקציה $f(x)$ אי-זוגית: $f(x) = -f(-x)$ - התמרת פוריה $F(\omega)$ היא מדומה: $F(\omega) = -iB(\omega)$:

כאשר: $B(\omega) = 2\int_0^{\infty} f(x)\, sin(\omega x)\, dx$

התמרת פורייה הפוכה: $\frac{f(x^+) + f(x^-)}{2} = \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty} A(\omega)\, sin(\omega x)\, d\omega$

פונקציות אי-זוגיות אלמנטיות: $f(x) = x^n$ כאשר n אי-זוגי, $f(x) = sin(x)$

מבחינה גרפית – פונקציה $f(x)$ אי-זוגית אם יש שיקוף בציר y ובציר x

קשר בין פונקציה זוגית ופונקציה אי-זוגית:

1. זוגית = זוגית · זוגית
2. איזוגית = איזוגית · זוגית
3. זוגית = איזוגית · איזוגית

תכונות של פונקציה זוגית ואי-זוגית:

1. אם $f(x)$ זוגית אז $f^2(x)$ זוגית
2. אם $f(x)$ אי-זוגית אז $f^2(x)$ זוגית

© כל הזכויות שמורות – אלון באומן – לימוד קורסים אונליין www.alonbaumann.co.il

תרגיל 1

א. חשבו התמרת פורייה של הפונקציה: $f(x)=\begin{cases}1 & , \quad |x|\le 1\\ 0 & , \quad else\end{cases}$

ב. חשבו $\int_0^\infty \frac{\sin(\omega)\cos(\omega)}{\omega}d\omega$

ג. חשבו $\int_0^\infty \frac{\sin^2(\omega)}{\omega^2}d\omega$

תרגיל 2

א. חשבו התמרת פורייה של הפונקציה: $f(x)=\begin{cases}1 & , \quad |x|\le a\\ 0 & , \quad else\end{cases}$ כאשר $a\in\mathbb{R}$

ב. מצאו את ערך האינטגרל כתלות במשתנה x: $\int_0^\infty \frac{\sin(\omega)\cos(\omega x)}{\omega}d\omega$

תרגיל 3

א. חשבו התמרת פורייה של הפונקציה: $f(x)=\begin{cases}1 & , \quad |x|\le 1\\ 2 & , \quad 1<|x|\le 2\\ 0 & , \quad |x|>2\end{cases}$

ב. קבעו נכון\לא נכון: $\int_{-\infty}^\infty \frac{(2\,sin(2\omega)-sin(\omega))^2}{\omega^2}d\omega=5\pi$

תרגיל 4

א. חשבו התמרת פורייה של הפונקציה: $f(x)=\begin{cases}1-|x| & , \quad |x|\le 1\\ 0 & , \quad else\end{cases}$

ב. חשבו $\int_0^\infty \frac{1-\cos(\omega)}{\omega^2}d\omega$

ג. חשבו $\int_0^\infty \frac{(1-\cos(\omega))^2}{\omega^4}d\omega$

תרגיל 5

א. מצא התמרת פוריה של הפונקציה: $f(x)=\begin{cases}cos(x) & , \quad |x|<\pi\\ 0 & , \quad else\end{cases}$

ב. חשבו $\int_0^\infty \frac{\omega\sin(\pi\omega)}{1-\omega^2}d\omega$

© כל הזכויות שמורות – אלון באומן – לימוד קורסים אונליין www.alonbaumann.co.il

תרגיל 6

א. חשבו התמרת פורייה של הפונקציה: $f(x) = e^{-|x|}$

ב. חשבו $\int_0^\infty \frac{\cos(\pi\omega)}{\omega^2+1} d\omega$

תרגיל 7

יהיו a, b ממשיים. ידוע כי התמרת פורייה של הפונקציה $f(x) = e^{-a|x|}$ היא $F(\omega) = \frac{2a}{\omega^2+a^2}$ והתמרת פורייה של הפונקציה $g(x) = \begin{cases} 1 & , \quad |x| \le b \\ 0 & , \quad else \end{cases}$ היא $G(\omega) = \frac{2\sin(\omega b)}{\omega}$. חשבו את האינטגרל: $\int_0^\infty \frac{sin(\omega b)}{\omega(\omega^2+a^2)} d\omega$ כתלות ב- a, b

תרגיל 8

א. חשבו התמרת פורייה של הפונקציה: $f(x) = \begin{cases} 1 & , \quad 0 < x \le 2 \\ -1 & , \quad -2 \le x < 0 \\ 0 & , \quad else \end{cases}$

ב. חשבו $\int_0^\infty \frac{\sin^3(\omega)}{\omega} d\omega$

תרגיל 9

יהי $a > 0$ ממשי.

א. חשבו התמרת פורייה של הפונקציה: $f(x) = \begin{cases} e^{-ax} & , \quad x \ge 0 \\ -e^{ax} & , \quad x < 0 \end{cases}$

ב. חשב $\int_0^\infty \frac{\omega\, sin(\omega)}{a^2+\omega^2} d\omega$

ג. חשב $\int_0^\infty \frac{\omega^2}{(a^2+\omega^2)^2} d\omega$

© כל הזכויות שמורות – אלון באומן – לימוד קורסים אונליין www.alonbaumann.co.il

3.3. תכונות של התמרת פורייה

סימון: תהי $f(x)$ והתמרת פוריה שלה $F(\omega)$. נסמן: $\mathcal{F}\{f(x)\} = F(\omega)$

חישוב התמרת פורייה לפי ההגדרה מתאפשר במקרים בהם הפונקציות "פשוטות". על מנת לחשב התמרות פוריה לפונקציות "מסובכות" יותר נשתמש בתכונות של התמרת פוריה.

נדבר על 5 תכונות יסודיות של התמרת פורייה:

1. תכונת הלינאריות
2. תכונה גזירה במרחב (בזמן)
3. תכונה גזירה בתדר
4. תכונת הסימטריה
5. תכונת הזזה ומתיחה\כיווץ

3.3.1. תכונת הלינאריות

נתונות פונקציות $f(x), g(x) \in L^1$ בעלות התמרת פוריה $F(\omega), G(\omega)$ בהתאמה.

כלומר: $\mathcal{F}\{f(x)\} = F(\omega)$, $\mathcal{F}\{g(x)\} = G(\omega)$ ויהיו a, b סקלרים ממשיים

תכונת הלינאריות: $\mathcal{F}\{af(x) + bg(x)\} = aF(\omega) + bG(\omega)$

תרגיל 1

יהיו פונקציות $f(x), g(x) \in L^1$ בעלות התמרת פוריה $F(\omega), G(\omega)$ בהתאמה, ויהיו a, b סקלרים ממשיים. הוכיחו את תכונת הלינאריות: $\mathcal{F}\{af(x) + bg(x)\} = aF(\omega) + bG(\omega)$

© כל הזכויות שמורות – אלון באומן – לימוד קורסים אונליין www.alonbaumann.co.il

3.3.2. תכונה גזירה במרחב (בזמן)

נתונה פונקציה $f(x)$ בעלת התמרת פוריה $F(\omega)$: $\mathcal{F}\{f(x)\} = F(\omega)$

תכונה גזירה במרחב:

$$\mathcal{F}\{f'(x)\} = i\omega F(\omega) \quad ; \quad \mathcal{F}\{f^{(n)}(x)\} = (i\omega)^n F(\omega)$$

הוכחה:

$$\mathcal{F}\{f'(x)\} = \int_{-\infty}^{\infty} f'(x)e^{-i\omega x}dx = \begin{bmatrix} v' = f'(x) & v = f(x) \\ u = e^{-i\omega x} & u' = -i\omega e^{-i\omega x} \end{bmatrix} = f(x)e^{-i\omega x}\Big|_{-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} f(x)(-i\omega)e^{-i\omega x}dx =$$

$$= \lim_{x\to\infty} f(x)e^{-i\omega x} - \lim_{x\to-\infty} f(x)e^{-i\omega x} + i\omega \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-i\omega x}dx = i\omega F(\omega)$$

תרגיל 1

א. חשב התמרת פוריה של הפונקציה: $f(x) = \begin{cases} sin(3x) & , \quad |x| < \pi \\ 0 & , \quad else \end{cases}$

ב. חשב התמרת פוריה של הפונקציה: $f(x) = \begin{cases} cos(3x) & , \quad |x| < \pi \\ 0 & , \quad else \end{cases}$

תרגיל 2

א. חשבו התמרת פוריה של הפונקציה $f(x) = \begin{cases} 1 - x^2 & , \quad |x| < 1 \\ 0 & , \quad else \end{cases}$

ב. חשבו התמרה של הפונקציה $g(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x & , \quad |x| < 1 \\ 0 & , \quad else \end{cases}$ בעזרת ההתמרה שחישבתם בסעיף א'

© כל הזכויות שמורות – אלון באומן – לימוד קורסים אונליין

3.3.3. תכונה גזירה בתדר

נתונה פונקציה $f(x)$ בעלת התמרת פוריה $F(\omega)$: $\mathcal{F}\{f(x)\} = F(\omega)$

תכונה גזירה בתדר:

$$\mathcal{F}\{xf(x)\} = iF'(\omega) \quad ; \quad \mathcal{F}\{x^n f(x)\} = i^n F^{(n)}(\omega)$$

הוכחה:

$$F'(\omega) = \left(\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-i\omega x}dx\right)' = \int_{-\infty}^{\infty} \left(f(x)e^{-i\omega x}\right)' dx = \int_{-\infty}^{\infty} -ixf(x)e^{-i\omega x}dx = -i\int_{-\infty}^{\infty} xf(x)e^{-i\omega x}dx = -i\mathcal{F}\{xf(x)\}$$

$$F'(\omega) = -i\mathcal{F}\{xf(x)\} \quad \Rightarrow \quad iF'(\omega) = \mathcal{F}\{xf(x)\}$$

תרגיל 1

נתון כי התמרת פוריה של $f(x) = e^{-|x|}$ היא $F(\omega) = \dfrac{2}{1+\omega^2}$

א. חשב התמרת פוריה של $g(x) = xe^{-|x|}$

ב. חשב $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{(1+x^2)^4}dx$

תרגיל 2

א. חשבו התמרת פורייה של הפונקציה: $f(x) = \begin{cases} 1 & , \quad |x| \le 1 \\ 2 & , \quad 1 < |x| \le 2 \\ 0 & , \quad |x| > 2 \end{cases}$

ב. חשבו התמרת פורייה של הפונקציה $g(x) = \begin{cases} x & , \quad |x| \le 1 \\ 2x & , \quad 1 < |x| \le 2 \\ 0 & , \quad |x| > 2 \end{cases}$ ע"י שימוש בהתמרת פורייה שחישבתם בסעיף א'

תרגיל 3

ידוע כי המתרת פורייה של הפונקציה $f(x) = e^{-2x^2}$ היא $F(\omega) = \sqrt{\frac{\pi}{2}}e^{-\frac{\omega^2}{8}}$. חשבו התמרת פורייה של הפונקציות הבאות:

א. $g(x) = xe^{-2x^2}$ ב. $h(x) = (2-3x)e^{-2x^2}$

© כל הזכויות שמורות – אלון באומן – לימוד קורסים אונליין www.alonbaumann.co.il

תרגיל 4

ידוע כי התמרת פורייה של הפונקציה: $f(x)=\begin{cases}1 & , \quad |x|\le a\\ 0 & , \quad else\end{cases}$ היא: $F(\omega)=\frac{2\sin(\omega a)}{\omega}$

חשבו התמרת פוריה של הפונקציה: $g(x)=\begin{cases}1-ax^2 & , \quad |x|\le a\\ 0 & , \quad else\end{cases}$

תרגיל 5

נתון כי התמרת פוריה של $f(x)=e^{-|x|}$ היא $F(\omega)=\frac{2}{1+\omega^2}$ חשבו $\int_0^\infty x^2e^{-|x|}dx$

© כל הזכויות שמורות – אלון באומן – לימוד קורסים אונליין www.alonbaumann.co.il

3.3.4. תכונת הסימטריה

נתונה פונקציה $f(x) \in L^1$ בעלת התמרת פוריה $F(\omega) \in L^1$, כלומר: $\mathcal{F}\{f(x)\} = F(\omega)$.

תכונת הסימטריה: $\mathcal{F}\{F(x)\} = 2\pi f(-\omega)$

תרגיל 1

הוכיחו את תכונת הסימטריה של התמרת פוריה: אם $\mathcal{F}\{f(x)\} = F(\omega)$ אז $\mathcal{F}\{F(x)\} = 2\pi f(-\omega)$

תרגיל 2

ידוע כי התמרת פוריה של $f(x) = e^{-a|x|}$ היא $F(\omega) = \dfrac{2a}{\omega^2 + a^2}$

מצאו התמרת פוריה של $g(x) = \dfrac{1}{x^2 + a^2}$

ב. עבור $a > 0$, $b > 0$ חשבו את האינטגרל: $\displaystyle\int_0^\infty \frac{1}{x^2 + a^2} \cdot \frac{1}{x^2 + b^2} dx$ כתלות ב- a, b

תרגיל 3

נתונה פונקציה: $f(x) = \begin{cases} 1 - x^2 & , \quad |x| < 1 \\ 0 & , \quad else \end{cases}$

א. חשב התמרת פוריה של $f(x)$

ב. מצא פונקציה $g(x)$ כך ש- $\mathcal{F}\{g(x)\} = f(\omega)$

תרגיל 4

נתון כי התמרת פוריה של $f(x) = e^{-|x|}$ היא $F(\omega) = \dfrac{2}{1 + \omega^2}$

א. ידוע כי התמרת פורייה של הפונקציה $g(x)$ היא: $G(\omega) = e^{-|\omega|}$. מצאו את $g(x)$

ב. חשבו $\displaystyle\int_0^\infty g^2(x) dx$

© כל הזכויות שמורות – אלון באומן – לימוד קורסים אונליין www.alonbaumann.co.il

תרגיל 5

ידוע כי התמרת פוריה של $f(x) = e^{-3|x|}$ היא $F(\omega) = \frac{6}{\omega^2 + 9}$

א. חשבו התמרת פורייה של הפונקציה $g(x) = \frac{1}{x^2 + 9}$

ב. חשבו התמרת פורייה של הפונקציה $h(x) = \frac{x}{(x^2 + 9)^2}$ ע"י שימוש בהתמרת פורייה של $g(x)$ מסעיף א'

תרגיל 6

ידוע כי התמרת פורייה של הפונקציה: $f(x) = \begin{cases} 1 & , \quad |x| \leq 1 \\ 0 & , \quad else \end{cases}$ היא: $F(\omega) = \frac{2\,sin(\omega)}{\omega}$

חשבו התמרת פורייה של הפונקציה: $g(x) = \left(\frac{\sin(x)}{x}\right)'$

© כל הזכויות שמורות – אלון באומן – לימוד קורסים אונליין www.alonbaumann.co.il

3.3.5. תכונת הזזה ומתיחה\כיווץ

נתונה פונקציה $f(x) \in L^1$ בעלת התמרת פוריה $F(\omega) \in L^1$, כלומר: $\mathcal{F}\{f(x)\} = F(\omega)$.

תכונת הזזה ומתיחה\כיווץ: $\mathcal{F}\{f(ax+b)\} = \frac{1}{|a|} e^{\frac{i\omega b}{a}} F\left(\frac{\omega}{a}\right)$ לכל $a \neq 0$

תרגיל 1

הוכיחו כי אם $\mathcal{F}\{f(x)\} = F(\omega)$ אז $\mathcal{F}\{f(x+b)\} = e^{i\omega b} F(\omega)$

תרגיל 2

א. חשבו התמרת פורייה של הפונקציה: $f(x) = \begin{cases} 1 & , \quad |x| \leq 1 \\ 0 & , \quad else \end{cases}$

ב. חשבו התמרת פורייה של הפונקציה: $g(x) = \begin{cases} 1 & , \quad 0 \leq x \leq 6 \\ 0 & , \quad else \end{cases}$

תרגיל 3

ידוע כי התמרת פורייה של הפונקציה: $f(x) = \begin{cases} 1 & , \quad |x| \leq 1 \\ 0 & , \quad else \end{cases}$ היא: $F(\omega) = \frac{2\,sin(\omega)}{\omega}$

א. חשבו התמרת פורייה של הפונקציה: $g(x) = \frac{sin(x)}{x-\pi}$

ב. חשבו $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{sin(x)}{x-\pi} dx$

תרגיל 4

נתונה פונקציה: $f(x) = \begin{cases} x & , \quad 0 \leq x \leq \frac{1}{2} \\ 1-x & , \quad \frac{1}{2} < x < 1 \\ 0 & , \quad else \end{cases}$ חשב התמרת פוריה של $f(x)$

תרגיל 5

ידוע כי $\mathcal{F}\left\{e^{-\frac{ax^2}{2}}\right\} = \sqrt{\frac{2\pi}{a}} e^{-\frac{\omega^2}{2a}}$. חשבו התמרת פורייה של הפונקציה: $g(x) = e^{-x^2+2x-1}$

© כל הזכויות שמורות – אלון באומן – לימוד קורסים אונליין
www.alonbaumann.co.il

תרגיל 6

הוכיחו כי אם $\mathcal{F}\{f(x)\} = F(\omega)$ אז $\mathcal{F}\{f(ax)\} = \frac{1}{|a|}F\left(\frac{\omega}{a}\right)$ לכל $a \neq 0$

תרגיל 7

הוכיחו את תכונת ההזזה ומתיחה\כיווץ: אם $\mathcal{F}\{f(x)\} = F(\omega)$ אז $\mathcal{F}\{f(ax+b)\} = \frac{1}{|a|}e^{\frac{i\omega b}{a}}F\left(\frac{\omega}{a}\right)$

תרגיל 8

נתון כי התמרת פוריה של $f(x) = e^{-|x|}$ היא $F(\omega) = \frac{2}{1+\omega^2}$

חשבו התמרת פורייה של הפונקציה $g(x) = \frac{1}{a^2+(x+b)^2}$ כאשר $a > 0$, $b \geq 0$

© כל הזכויות שמורות – אלון באומן – לימוד קורסים אונליין www.alonbaumann.co.il

3.4. קונבולוציה ותכונת הקונבולוציה של התמרת פורייה

קונבולוציה – פעולה בין 2 פונקציות $f(x)$ ו- $g(x)$ המוגדרת ע"י:

$$f(x) * g(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x-y)g(y)dy \quad \text{או} \quad f(x) * g(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(y)g(x-y)dy$$

נתונה פונקציה $f(x)$ בעלת התמרת פוריה $F(\omega)$: $\mathcal{F}\{f(x)\} = F(\omega)$

תכונת הקונבולוציה:

$$\mathcal{F}\{f(x) * g(x)\} = F(\omega) \cdot G(\omega)$$

תרגיל 1

נתונה פונקציה: $f(x) = \begin{cases} 1 & , \ -1 \le x \le 1 \\ 0 & , \ else \end{cases}$ חשב $g(x) = f(x) * f(x)$

תרגיל 2

נתונה פונקציה: $f(x) = \begin{cases} e^{-x} & , \ x \ge 0 \\ 0 & , \ x < 0 \end{cases}$

א. חשבו $g(x) = f(x) * f(x)$ בצורה ישירה

ב. ידוע כי התמרת פוריה של $f(x)$ היא $F(\omega) = \dfrac{1 - i\omega}{1 + \omega^2}$ הוכיחו כי $\mathcal{F}\{g(x)\} = \mathcal{F}\{xf(x)\}$

תרגיל 3

נתון כי התמרת פוריה של $f(x) = \begin{cases} 1 & , \ -1 \le x \le 1 \\ 0 & , \ else \end{cases}$ היא $F(\omega) = \dfrac{2\,sin(\omega)}{\omega}$

א. נתון: $g(x) = f(x) * f(x) = \begin{cases} 2 + x & , \ -2 \le x \le 0 \\ 2 - x & , \ 0 < x \le 2 \\ 0 & , \ else \end{cases}$ חשב התמרת פוריה של $g(x)$

ב. חשב $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{sin^2(\omega)}{\omega^2} d\omega$

ג. חשב $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{sin^4(\omega)}{\omega^4} d\omega$

© כל הזכויות שמורות – אלון באומן – לימוד קורסים אונליין www.alonbaumann.co.il

תרגיל 4

נתונה פונקציה: $f(x)=\begin{cases} sin(x) & , \quad 0\le x\le \pi \\ 0 & , \quad else \end{cases}$

ונתונה פונקציה: $g(x)=\begin{cases} e^{-x} & , \quad x\ge 0 \\ 0 & , \quad x<0 \end{cases}$

חשבו $h(x)=f(x)*g(x)$

תרגיל 5

נסמן ב- $F(\omega)$ את התמרת פורייה של הפונקציה: $f(x)=\begin{cases} x & , \quad 0\le x\le 1 \\ 0 & , \quad else \end{cases}$

מצאו את הפונקציה $g(x)$ עבורה $\mathcal{F}\{g(x)\}=F^2(\omega)$

תרגיל 6

ידוע כי התמרת פורייה של הפונקציה $f_a(x)=\dfrac{1}{x^2+a^2}$ היא: $F_a(\omega)=\dfrac{\pi}{a}e^{-a|\omega|}$

א. חשבו $f_1(x)*f_2(x)$

ב. מצאו ביטוי ל- $f_a(x)*f_b(x)$ כתלות ב- a,b

תרגיל 7

א. חשבו התמרת פורייה של הפונקציה: $f(x)=\begin{cases} 1-|x| & , \quad |x|\le 1 \\ 0 & , \quad else \end{cases}$

ב. חשבו התמרת פוריה לפונקציה $g(x)=\dfrac{(1-cos(x))}{x^2}$

ג. מצאו התמרת פוריה של $h(x)=f(x)*g(x)$

תרגיל 8

ידוע כי התמרת פורייה של הפונקציה: $f(x)=\begin{cases} 1 & , \quad |x|\le a \\ 0 & , \quad else \end{cases}$ היא: $F(\omega)=\dfrac{2\,sin(\omega a)}{\omega}$

חשבו: $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\frac{sin\big(2(x-y)\big)\cdot sin(3y)}{(x-y)y}dy$

תרגיל 9

נתון: $\mathcal{F}\{f(x)\}=F(\omega)$, $\mathcal{F}\{g(x)\}=G(\omega)$. הוכיחו כי $\mathcal{F}\{F(x)\cdot G(x)\}=2\pi\cdot(f*g)(-\omega)$

© כל הזכויות שמורות – אלון באומן – לימוד קורסים אונליין www.alonbaumann.co.il

תרגיל 10

נתון כי התמרת פוריה של $f(x)=\begin{cases} 1 & , \quad -1\le x\le 1 \\ 0 & , \quad else \end{cases}$ היא $F(\omega)=\dfrac{2\,sin(\omega)}{\omega}$

חשבו התמרת פורייה של הפונקציה $g(x)=\dfrac{sin^2(x)}{x^2}$

תרגיל 11

נתון כי התמרת פוריה של $f(x)=\begin{cases} 1 & , \quad -1\le x\le 1 \\ 0 & , \quad else \end{cases}$ היא $F(\omega)=\dfrac{2\,sin(\omega)}{\omega}$

נתון כי התמרת פוריה של $g(x)=\begin{cases} x & , \quad -1\le x\le 1 \\ 0 & , \quad else \end{cases}$ היא $G(\omega)=\dfrac{2i\omega\,cos(\omega)-2i\,sin(\omega)}{\omega^2}$

חשבו את $\mathcal{F}\{f(x)*g(x)\}(\omega=0)$

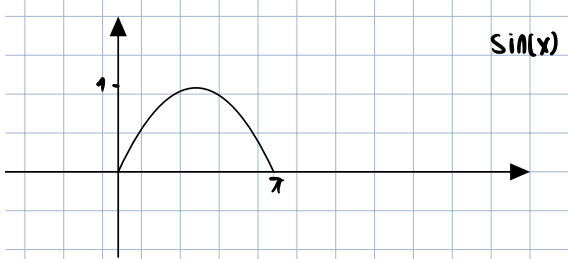
© כל הזכויות שמורות – אלון באומן – לימוד קורסים אונליין

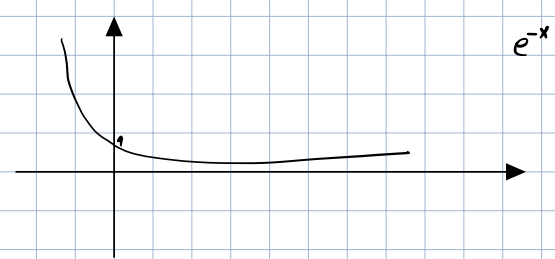
תרגיל 4

נתונה פונקציה: $f(x) = \begin{cases} sin(x) & , \quad 0 \le x \le \pi \\ 0 & , \quad else \end{cases}$

ונתונה פונקציה: $g(x) = \begin{cases} e^{-x} & , \quad x \ge 0 \\ 0 & , \quad x < 0 \end{cases}$

חשבו $h(x) = f(x) * g(x)$





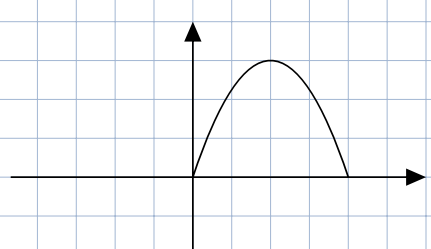
$$f(x) = \begin{cases} \sin x & 0 < x < \pi \\ 0 & else \end{cases}$$

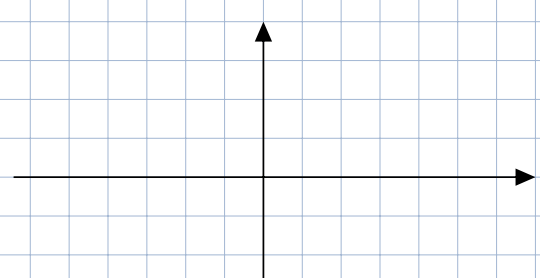
$$g(x) = \begin{cases} e^{-x} & x \ge 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$$

$$h(x) = f(x) * g(x)$$

$$f(y) = \begin{cases} \sin(y) & 0 < y < \pi \\ 0 & else \end{cases}$$

$$g(x-y) = \begin{cases} e^{-(x-y)} & x-y \ge 0 \quad x \ge y \\ 0 & x < y \end{cases}$$





3.4. פתרון משוואות אינטגרליות

משוואה אינטגרלית – משוואה שבה פונקציה כלשהי $f(x)$ לא ידועה מופיעה בתוך אינטגרל. בקורס זה נתמקד במשוואות אינטגרליות בהן הפונקציה הלא ידועה $f(x)$ נמצאת בתוך אינטגרל הקונבולוציה של התמרת פורייה.

על מנת לפתור את המשוואה האינטגרלית נצטרך לחלץ את הפונקציה $f(x)$ מתוך אינטגרל הקונבולוציה, ולצורך כך נשתמש בתכונת הקונבולוציה של התמרת פוריה.

תכונת הקונבולוציה:

אם $\mathcal{F}\{f(x)\}=F(\omega)$, $\mathcal{F}\{g(x)\}=G(\omega)$ אז $\mathcal{F}\{f(x)*g(x)\}=F(\omega)\cdot G(\omega)$

תרגיל 1

ידוע כי התמרת פוריה של $f(x)=e^{-\frac{x^2}{2}}$ היא $F(\omega)=\sqrt{2\pi}e^{-\frac{\omega^2}{2}}$

א. עבור $a>0$ מצא התמרת פוריה של $g(x)=e^{-\frac{x^2}{2a^2}}$

ב. יהי $b>0$. מצא פונקציה $h(x)$ כאשר: $\int_{-\infty}^{\infty}h(x-t)e^{-\frac{t^2}{2b^2}}dt=e^{-\frac{x^2}{2a^2}}$

© כל הזכויות שמורות – אלון באומן – לימוד קורסים אונליין www.alonbaumann.co.il