פונקציות מרוכבות

90917

פרק 2 – פונקציות מרוכבות, תיאור גיאומטרי של פונקציות מרוכבות, פונקציות אלמנטריות, פונקציות רב-ערכיות ופתרון משוואות מרוכבות

מכללת אפקה

אין לשכפל, להעתיק, לצלם, להקליט, לאחסן במאגר מידע, לשדר או להקליט בכל דרך או בכל אמצעי אלקטרוני, אופטי או מכני, או אחר - כל חלק שהוא מהחומר שקובץ זה, בין אם לשימוש פנימי או מסחרי, ללא אישור בכתב מאתר אלון באומן – לימוד קורסים אונליין

סטודנטים לקורס פונקציות מרוכבת 90917

קובץ זה עוסק בפרק 2 – פונקציות מרוכבות, פונקציות אלמנטריות, פונקציות רב-ערכיות ופתרון משוואות מרוכבות בקורס פונקציות מרוכבות ומכיל סיכום של החומר, הגדרות, משפטים, נוסחאות שימושיות ותרגילים המסודרים לפי סדר הנושאים ברמת קושי עולה: מהרמה הבסיסית ביותר ועד לרמת התרגילים המופיעים במבחנים.

לכל התרגילים פתרונות מלאים באתר אלון באומן – לימוד קורסים אונליין

הפתרונות של התרגילים מועברים בצורה ברורה, מסודרת ומלווים בהסבר קולי ברור, מפורט ומלא.

ניתן להצטרף לקבוצת ה- WhatsApp של הקורס עם אלון באומן, בה ניתן לשאול שאלות במהלך למידת הקורס. להצטרפות: לחץ כאן

בהצלחה,

אלון באומן

© כל הזכויות שמורות – אלון באומן – לימוד קורסים אונליין www.alonbaumann.co.il

תוכן עניינים

2.1. פונקציות מרוכבות 4
2.2. תיאור גיאומטרי של פונקציות מרוכבות 5
2.3. פונקציות מרוכבות אלמנטריות 7
2.3.1. פונקציה מעריכית 7
2.3.2. פונקציות טריגונומטריות 8
2.3.3. פונקציות היפרבוליות 9
2.4. פונקציות מרוכבות רב-ערכיות 10
2.4.1. פונקציית ארגומט 10
2.4.2. פונקציית לוגריתם מרוכב 11
2.4.3. פונקציית חזקה מרוכבת 12
2.5. פתרון משוואות מרוכבות 13

© כל הזכויות שמורות – אלון באומן – לימוד קורסים אונליין www.alonbaumann.co.il

2.1. פונקציות מרוכבות

פונקציה מרוכבת $f:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ היא פונקציה המתאימה לכל מספר מרוכב $z\in\mathbb{C}$ מספר מרוכב $w\in\mathbb{C}$ כך ש- $w=f(z)$.

פונקציה מרוכבת ניתן לתאר ע"י שתי פונקציות ממשיות של 2 משתנים בלתי תלויים כך שעבור $f(z)$ נתונה נוכל לרשום אותה ע"י אחת מהצורות הבאות:

עבור הצגה אלגברית בה $z=x+iy$ נקבל: $f(z)=f(x+iy)=u(x,y)+iv(x,y)$

עבור הצגה קוטבית בה $z=re^{i\theta}$ נקבל: $f(z)=f\left(re^{i\theta}\right)=u(r,\theta)+iv(r,\theta)$

תרגיל 1

נתונה הפונקציה $f(z)=z^2-3z+2$. חשב את $f(2)$, $f(i)$, $f(1-i)$ ורשום את התוצאה בצורה אלגברית

תרגיל 2

מצא את החלק הממשי והחלק המדומה בצורה אלגברית של הפונקציות המרוכבות הבאות:

א. $f(z)=z\cdot Im(z)$ ב. $f(z)=z+\bar{z}^2$ ג. $f(z)=|z|$ ד. $f(z)=z-\frac{1}{z}$ ה. $f(z)=\frac{\bar{z}}{z+1}$

תרגיל 3

מצא את החלק הממשי והחלק המדומה בצורה קוטבית של הפונקציות המרוכבות הבאות:

א. $f(z)=z^n$ כאשר n שלם ב. $f(z)=\frac{1}{z}$ ג. $f(z)=z^3$ ד. $f(z)=z-\frac{1}{\bar{z}}$

תרגיל 4

מצא את הפונקציה המרוכבת כתלות במשתנה z עבור הפונקציות הבאות ע"י שימוש בזהויות: $x=\frac{z+\bar{z}}{2}$, $y=\frac{z-\bar{z}}{2i}$

א. $f(x+iy)=x+y-i(x-y)$ ב. $f(x+iy)=x^2-y^2+2xyi$

© כל הזכויות שמורות – אלון באומן – לימוד קורסים אונליין www.alonbaumann.co.il

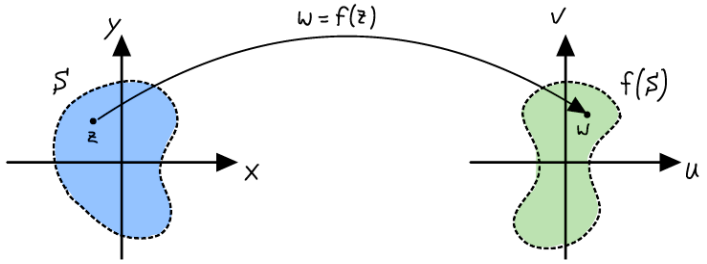
2.2. תיאור גיאומטרי של פונקציות מרוכבות

פונקציה מרוכבת $w = f(z)$ מוגדרת על קבוצה כלשהי, כלומר לכל נקודה $z = x + iy \in S$ במישור המרוכב (x, y) הפונקציה מתאימה נקודה $w = u + iv$ במישור המרוכב (u, v).

כדי לתאר פונקציה מרוכבת בצורה גיאומטרית נשרטט בנפרד את שני המישורים: מישור מרוכב (x, y) המכיל קבוצה S שבה כל ערכי z שאותם מציבים בפונקציה, ומישור מרוכב (u, v) המכיל קבוצה שבה כל הערכים שהפונקציה $f(z)$ תיתן עבור כל ערכי z בקבוצה S.

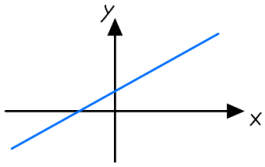
קבוצה זו נקראת התמונה של f עבור הקבוצה S ומסומנת ב- $f(S)$.

תיאור גרפי של פעולת הפונקציה:



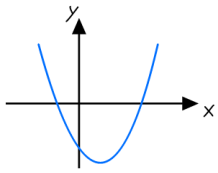
קווים בסיסיים:

קו ישר:



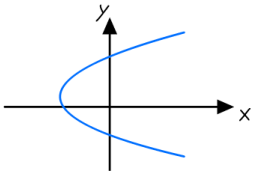
$y = ax + b$

פרבולה:



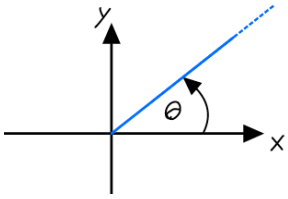
$y = ax^2 + bx + c$

פרבולה שוכבת:



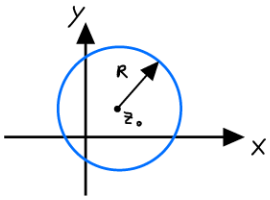
$x = ay^2 + by + c$

קרן:



$z = re^{i\theta}$

מעגל:



$z = z_0 + Re^{i\theta} \quad , \quad 0 \le \theta \le 2\pi$

תרגיל 1

נתונה הפונקציה $f(z) = z^2$. מצא את התמונה של הקבוצות הבאות:

א. קו ישר $x = 5$ ב. קו ישר $y = 2$ ג. תחום $1 \le x \le 2$

© כל הזכויות שמורות – אלון באומן – לימוד קורסים אונליין www.alonbaumann.co.il

תרגיל 2

נתונה הפונקציה $f(z) = z^2$. מצא את התמונה של הקבוצות הבאות:

א. קרן $Arg(z) = \frac{\pi}{4}$ ב. חצי מעגל עליון ברדיוס 2 ג. חצי מעגל תחתון ברדיוס 2

תרגיל 3

נתונה הפונקציה $f(z) = (1+i)z$. מצא את התמונה של הקבוצות הבאות:

א. קו ישר $y = 3$ ב. קו ישר $y = x$ ג. משולש שקודקודיו הם $0,1,i$ ד. $|z| \leq 1$

תרגיל 4

נתונה הפונקציה $f(z) = e^z$. מצא את התמונה של הקבוצות הבאות:

א. ישר אנכי $x = k$ ב. ישר אופקי $y = k$

© כל הזכויות שמורות – אלון באומן – לימוד קורסים אונליין www.alonbaumann.co.il

2.3. פונקציות מרוכבות אלמנטריות

ישנן מספר פונקציות מרוכבות אלמנטריות עליהן נדבר בהרחבה:

1. פונקציה מעריכית: e^z
2. פונקציות טריגונומטריות: $cos(z)$, $sin(z)$, $tan(z)$, $cot(z)$
3. פונקציות היפבבליות: $cosh(z)$, $sinh(z)$, $tanh(z)$, $coth(z)$

נגדיר כל אחת מהפונקציות האלמנטיות במישור במרוכב, נרשום תכונות וזהויות חשובות שלהן.

2.3.1. פונקציה מעריכית

עבור $z = x + iy$ מתקיים: $f(z) = e^z = e^x cos(y) + ie^x sin(y)$

כאשר $u(x,y) = e^x cos(y)$ היא החלק הממשי של e^z ו- $v(x,y) = e^x sin(y)$ היא החלק המדומה של e^z.

תכונות:

א. $e^0 = 1$ ב. $e^{z+w} = e^z e^w$ ג. $\frac{e^z}{e^w} = e^{z-w}$ ד. $(e^z)^n = e^{nz}$

מחזוריות – הפונקציה e^z היא פונקציה מחזורית עם מחזור $2\pi i$, כלומר $e^{z+2\pi i} = e^z$

תרגיל 1

חשב את e^{2+3i} ורשום את התוצאה בצורה אלגברית

תרגיל 2

מצא את החלק הממשי והחלק המדומה בצורה אלגברית של הפונקציה $f(z) = e^z$

תרגיל 3

הוכח כי הפונקציה $f(z) = e^z$ היא מחזורית עם מחזור $2\pi i$

תרגיל 4

הוכח את האי-שיוויון הבא: $\left|e^{2z+i} + e^{iz^2}\right| \le e^{2x} + e^{-2xy}$

תרגיל 5

קבע נכון\לא נכון – הפונקציה $f(z) = e^z$ היא חד-חד-ערכית במלבן אינסופי $D = \{(x,y) \mid -\infty < x < \infty, -\pi \le y \le \pi\}$

© כל הזכויות שמורות – אלון באומן – לימוד קורסים אונליין www.alonbaumann.co.il

2.3.2. פונקציות טריגונומטריות

הקשר בין הפונקציות הטריגונומטריות לפונקציה מעריכית:

$$cot(z)=\frac{cos(z)}{sin(z)} \quad , \quad tan(z)=\frac{sin(z)}{cos(z)} \quad , \quad sin(z)=\frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i} \quad , \quad cos(z)=\frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}$$

זהויות:

$sin(z\pm w)=sin(z)\,cos(w)\pm cos(z)\,sin(w)$

$cos(z\pm w)=cos(z)\,cos(w)\mp sin(z)\,sin(w)$

$sin\left(\frac{\pi}{2}\pm z\right)=cos(z)$

$cos\left(\frac{\pi}{2}\pm z\right)=\mp sin(z)$

$sin(\pi\pm z)=\mp sin(z)$

$cos(\pi\pm z)=-cos(z)$

$sin(-z)=-sin(z) \quad , \quad cos(-z)=cos(z)$

$sin^2(z)+cos^2(z)=1$

$sin(2z)=2\,cos(z)\,sin(z)$

$cos(2z)=cos^2(z)-sin^2(z)$

מחזוריות:

הפונקציה $sin(z)$ היא פונקציה מחזורית עם מחזור 2π, כלומר $sin(z+2\pi)=sin(z)$

הפונקציה $cos(z)$ היא פונקציה מחזורית עם מחזור 2π, כלומר $cos(z+2\pi)=cos(z)$

הפונקציה $tan(z)$ היא פונקציה מחזורית עם מחזור π, כלומר $tan(z+\pi)=tan(z)$

הפונקציה $cot(z)$ היא פונקציה מחזורית עם מחזור π, כלומר $cot(z+\pi)=cot(z)$

חסימות - הפונקציות $sin(z)$ ו- $cos(z)$ אינן חסומות.

תרגיל 1

חשב את הערכים הבאים ורשום את התוצאה בצורה אלגברית:

א. $cos(4i)$ ב. $cos(2+i)$ ג. $sin(1-2i)$ ד. $sin\left(\frac{\pi}{2}+i\,ln\,3\right)$ ה. $tan(2i)$

תרגיל 2

הוכח את הזהות הטריגונומטרית: $sin(2z)=2\,cos(z)\,sin(z)$ לכל $z\in\mathbb{C}$

תרגיל 3

הוכח כי הפונקציה המרוכבת $f(z)=cos(z)$ היא מחזורית עם מחזור 2π

תרגיל 4

הוכח כי לכל $z=x+iy$ מתקיים: $|cos(z)|\le\frac{e^{y}+e^{-y}}{2}$

© כל הזכויות שמורות – אלון באומן – לימוד קורסים אונליין www.alonbaumann.co.il

2.3.3. פונקציות היפרבוליות

הקשר בין הפונקציות ההיפרבוליות לפונקציה מעריכית:

$$coth(z)=\frac{cosh(z)}{sinh(z)} \quad , \quad tanh(z)=\frac{sinh(z)}{cosh(z)} \quad , \quad sinh(z)=\frac{e^z-e^{-z}}{2} \quad , \quad cosh(z)=\frac{e^z+e^{-z}}{2}$$

זהויות:

$sinh(z\pm w)=sinh(z)\,cosh(w)\pm cosh(z)\,sinh(w)$

$cosh(z\pm w)=cosh(z)\,cosh(w)\pm sinh(z)\,sinh(w)$

$sinh(z)=-i\,sin(iz) \quad , \quad sin(z)=-i\,sinh(iz)$

$cosh(z)=cos(iz) \quad , \quad cos(z)=cosh(iz)$

$tanh(z)=-i\,tan(iz) \quad , \quad tan(z)=-i\,tanh(iz)$

$coth(z)=i\,cot(iz) \quad , \quad cot(z)=i\,coth(iz)$

$sinh(-z)=-sinh(z) \quad , \quad cosh(-z)=cosh(z)$

$cosh^2(z)-sinh^2(z)=1$

$sinh(2z)=2\,cosh(z)\,sinh(z)$

$cosh(2z)=cosh^2(z)+sinh^2(z)$

מחזוריות:

הפונקציה $sinh(z)$ היא פונקציה מחזורית עם מחזור $2\pi i$, כלומר $sinh(z+2\pi i)=sin(z)$

הפונקציה $cosh(z)$ היא פונקציה מחזורית עם מחזור $2\pi i$, כלומר $cosh(z+2\pi i)=cos(z)$

הפונקציה $tanh(z)$ היא פונקציה מחזורית עם מחזור πi, כלומר $tanh(z+\pi i)=tan(z)$

הפונקציה $coth(z)$ היא פונקציה מחזורית עם מחזור πi, כלומר $coth(z+\pi i)=cot(z)$

תרגיל 1

חשב את הערכים הבאים ורשום את התוצאה בצורה אלגברית:

א. $sinh\left(\frac{\pi}{2}i\right)$ ב. $cosh(\pi i)$ ג. $cosh\left(1+\frac{\pi}{6}i\right)$ ד. $tanh(3i)$

תרגיל 2

הוכח כי הפונקציה $f(z)=sinh(z)$ היא מחזורית עם מחזור $2\pi i$

תרגיל 3

מצא את החלק הממשי והחלק המדומה בצורה אלגברית של הפונקציות הבאות:

א. $f(z)=cos(z)$ ב. $f(z)=sin(e^z)$

© כל הזכויות שמורות – אלון באומן – לימוד קורסים אונליין www.alonbaumann.co.il

2.4. פונקציות מרוכבות רב-ערכיות

פונקציה מרוכבת רב-ערכית היא פונקציה $f(z)$ כך שעבור ערך כלשהו של z נקבל מספר ערכים ולא ערך אחד.

ישנן מספר פונקציות מרוכבות רב-ערכיות עליהן נדבר בהרחבה:

1. פונקציית ארגומנט: $arg(z)$
2. פונקציית לוגריתם מרוכב: $log(z)$
3. פונקציית חזקה מרוכבת: z^a כאשר a מספר מרוכב

נגדיר כל אחת מהפונקציות הרב-ערכיות ונרשום תכונות וזהויות חשובות שלהן.

2.4.1. פונקציית ארגומט

לזווית של מספר מרוכב z יש אינסוף אפשרויות שכן אם θ מתאימה למספר המרוכב z אז גם הזווית $\theta + 2\pi k$ מתאימה לכל $k \in \mathbb{Z}$.

למספר מרוכב z נגדיר:

א. הערך הראשי (העיקרי) של הארגומנט - $Arg(z)$ – הזווית θ המתאימה למספר המרוכב z כאשר $-\pi < \theta \leq \pi$

$$Arg(z) = \begin{cases} arctan\left(\frac{y}{x}\right) & , \ x > 0 \\ \pi + arctan\left(\frac{y}{x}\right) & , \ x < 0, y \geq 0 \\ -\pi + arctan\left(\frac{y}{x}\right) & , \ x < 0, y < 0 \\ \frac{\pi}{2} & , \ x = 0, y > 0 \\ -\frac{\pi}{2} & , \ x = 0, y < 0 \end{cases}$$

ב. פונקציית $arg(z)$ - קבוצת כל הזוויות המתאימות למספר המרוכב z:

$arg(z) = Arg(z) + 2\pi k$ כאשר k שלם

תרגיל 1

חשב את הערך של arg ו- Arg עבור המספרים המרוכבים הבאים:

א. $3 + 3i$	ב. i	ג. $1 - i\sqrt{3}$	ד. $-\sqrt{3} - i$	ה. 4
ו. $-2i$	ז. $-1 + i\sqrt{3}$	ח. -3		

© כל הזכויות שמורות – אלון באומן – לימוד קורסים אונליין www.alonbaumann.co.il

2.4.2. פונקציית לוגריתם מרוכב

הפונקציה $log(z)$ היא פונקציה רב ערכית שכן עבור ערך של $z \neq 0$ נקבל אינסוף ערכים שונים לפי הנוסחא הבאה:

$$log(z) = ln(|z|) + i(Arg(z) + 2\pi k)$$ כאשר k שלם

הערך הראשי (העיקרי) של הלוגריתם מתקבל עבור $k = 0$ ומסומן ב- $Log(z)$:

$$Log(z) = ln(|z|) + iArg(z)$$

זהויות לוגריתמיות:

$$log(z_1 \cdot z_2) = log(z_1) + log(z_2)$$

$$log\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = log(z_1) - log(z_2)$$

$$log(z^n) = n\,log(z)$$

תרגיל 1

חשב את הערך של log ו- Log עבור המספרים המרוכבים הבאים ורשום את התוצאה בצורה אלגברית:

א. $3 + 3i$ ב. i ג. $1 - i\sqrt{3}$ ד. $-\sqrt{3} - i$ ה. 4

ו. $-2i$ ז. $-1 + i\sqrt{3}$ ח. -3

תרגיל 2

חשב את כל הערכים האפשריים של $log(\sqrt[3]{1})$

© כל הזכויות שמורות – אלון באומן – לימוד קורסים אונליין www.alonbaumann.co.il

2.4.3. פונקציית חזקה מרוכבת

אם a מספר מרוכב כאשר $z \neq 0$ אז נגדיר: $z^a = e^{a\cdot\log(z)}$

נפריד ל- 2 מקרים:

1. אם ה- log היא פונקציה רב ערכית אז נקבל את כל הערכים האפשריים של z^a.

2. אם ה- log היא הערך הראשי (Log), אז נקבל את הערך הראשי של z^a וכך נקבל תשובה אחת ויחידה עבור z^a.

תכונות – עבור z, a, b מרוכבים מתקיים:

א. $z^{a+b} = z^a \cdot z^b$ ב. $(z^a)^b = z^{ab}$ ג. $z^{-a} = \frac{1}{z^a}$

תרגיל 1

חשב את המספרים הבאים ע"י שימוש בערך הראשי של פונקציית הלוגריתם המרוכב ורשום את התוצאה בצורה אלגברית:

א. i^i ב. $\left(-1 - i\sqrt{3}\right)^{3\pi i}$

תרגיל 2

חשב את כל הערכים האפשריים של המספרים הבאים ורשום את התוצאה בצורה אלגברית:

א. 2^i ב. 3^{2-i}

תרגיל 3

הוכח כי לכל $z \neq 0$ לביטוי z^i יש אינסוף ערכים

© כל הזכויות שמורות – אלון באומן – לימוד קורסים אונליין www.alonbaumann.co.il

2.5. פתרון משוואות מרוכבות

משוואות מרוכבות הן משוואות שהנעלם שלהן הוא משתנה מרוכב z. נפריד את המשוואות המרוכבות ל- 3 סוגים:

1. משוואות מעריכיות – משוואות בהן הנעלם z מופיע בחזקה של הפונקציה המעריכית
2. משוואות טריגונומטריות והיפרבוליות – משוואות בהן הנעלם z מופיע בפונקציות הטריגונומטריות וההיפרבוליות
3. משוואות לוגריתמיות - משוואות בהן הנעלם z מופיע בפונקציית הלוגריתם המרוכב

ניעזר בפונקציות אלמנטריות ובתכונות שלהן כדי לפתור משוואת מרוכבות ולמצוא את המשתנה z

תרגיל 1

פתור את המשוואות המעריכיות הבאות:

א. $e^z = 4i$ ב. $e^z = 1$ ג. $e^{-z} + 1 + i = 0$

תרגיל 2

פתור את המשוואות המעריכיות הבאות:

א. $e^{2z} + 10e^z + 25 = 0$ ב. $e^{2z} + e^z + 1 = 0$ ג. $e^{2z} + 2e^z - 3 = 0$

תרגיל 3

פתור את המשוואות הטריגונומטריות הבאות:

א. $cos\, 2z = \frac{3i}{4}$ ב. $sin\, z - 3i = 0$ ג. $tan\, z = 2i$

תרגיל 4

פתור את המשוואות ההיפרבוליות הבאות:

א. $sinh(iz) = -1$ ב. $cosh\, z = i$

תרגיל 5

פתור את המשוואה הלוגריתמית הבאה: $Log(z + i) = 1$

תרגיל 6

פתור את המשוואה $ie^{iz} = sin(z)$

© כל הזכויות שמורות – אלון באומן – לימוד קורסים אונליין www.alonbaumann.co.il