פונקציות מרוכבות

90917

פרק 9 – טורים מרוכבים - טור טיילור וטור לורן

מכללת אפקה

אין לשכפל, להעתיק, לצלם, להקליט, לאחסן במאגר מידע, לשדר או להקליט בכל דרך או בכל אמצעי אלקטרוני, אופטי או מכני, או אחר - כל חלק שהוא מהחומר שקובץ זה, בין אם לשימוש פנימי או מסחרי, ללא אישור בכתב מאתר אלון באומן – לימוד קורסים אונליין

סטודנטים לקורס פונקציות מרוכבת 90917

קובץ זה עוסק בפרק 9 – טורים מרוכבים - טור טיילור וטור לורן בקורס פונקציות מרוכבות ומכיל סיכום של החומר, הגדרות, משפטים, נוסחאות שימושיות ותרגילים המסודרים לפי סדר הנושאים ברמת קושי עולה: מהרמה הבסיסית ביותר ועד לרמת התרגילים המופיעים במבחנים.

לכל התרגילים פתרונות מלאים באתר אלון באומן – לימוד קורסים אונליין

הפתרונות של התרגילים מועברים בצורה ברורה, מסודרת ומלווים בהסבר קולי ברור, מפורט ומלא.

ניתן להצטרף לקבוצת ה- WhatsApp של הקורס עם אלון באומן, בה ניתן לשאול שאלות במהלך למידת הקורס. להצטרפות: לחץ כאן

בהצלחה,

אלון באומן

© כל הזכויות שמורות – אלון באומן – לימוד קורסים אונליין www.alonbaumann.co.il

תוכן עניינים

9.1. טור טיילור 4
9.2. גזירה איבר-איבר ואינטגרציה איבר-איבר של טור טיילור 7
9.3. טור לורן 8
9.4. גזירה איבר-איבר ואינטגרציה איבר-איבר של טור לורן 10
9.5. מיון וסיווג נקודות סינגולריות ע"י טורים וחישוב שארית, חישוב אינטגרלים ע"י משפט השארית של קושי ופיתוח פונקציה לטור 11

© כל הזכויות שמורות – אלון באומן – לימוד קורסים אונליין www.alonbaumann.co.il

9.1. טור טיילור

צורה כללית של טור טיילור לפונקציה $f(z)$ סביב נקודה $z = z_0$ שבה הפונקציה אנליטית מוגדר ע"י: $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n$

רדיוס ההתכנסות של טור טיילור – לכל טור טיילור קיים מספר $R \geq 0$ הנקרא רדיוס ההתכנסות כך שהטור מתכנס לכל z המקיים $|z - z_0| < R$ (תחום ההתכנסות) ומתבדר לכל z המקיים: $|z - z_0| \geq R$. חישוב רדיוס ההתכנסות:

$$R = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{c_n}{c_{n+1}}\right| \quad ; \quad R = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{|c_n|}}$$

אם $R = \infty$ אז נאמר כי הטור מתכנס לכל z

טורי טיילור ידועים סביב נקודה $z = 0$:

$$\frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n \qquad |z| < 1$$

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \qquad \text{לכל } z$$

$$Log(1+z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} z^n \qquad |z| < 1$$

$$cos(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} z^{2n} \qquad \text{לכל } z$$

$$sin(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} z^{2n+1} \qquad \text{לכל } z$$

משפט – אם פונקציה $f(z)$ זוגית ($f(z) = f(-z)$) אז טור טיילור של $f(z)$ סביב $z_0 = 0$ מכיל חזקות זוגיות בלבד: $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^{2n}$

משפט – אם פונקציה $f(z)$ אי-זוגית ($f(z) = -f(-z)$) אז טור טיילור של $f(z)$ סביב $z_0 = 0$ מכיל חזקות אי-זוגיות בלבד: $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^{2n+1}$

משפט – יהי $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n$ טור טיילור של הפונקציה $f(z)$ בתחום $|z - z_0| < R$ אז הטור מגדיר פונקציה אנליטית בתחום $|z - z_0| < R$, כלומר $f(z)$ אנליטית בתחום $|z - z_0| < R$

משפט – יהי $\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n$ טור טיילור של הפונקציה $f(z)$ בתחום $|z - z_0| < R$ אז $c_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}$

תרגיל 1

חשב את רדיוס ההתכנסות של הטורים הבאים ורשום את תחום ההתכנסות:

א. $\sum_{n=0}^{\infty} (n+i) z^n$ ב. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} (z-2)^n$ ג. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (z-i)^n$

תרגיל 2

פתח את הפונקציה $f(z) = zcos(z^2)$ לטור טיילור סביב $z = 0$ ומצא את תחום ההתכנסות

© כל הזכויות שמורות – אלון באומן – לימוד קורסים אונליין www.alonbaumann.co.il

תרגיל 3

פתח את הפונקציה $f(z)=e^{2z^3}$ לטור טיילור סביב נקודה $z=0$ ומצא את תחום ההתכנסות

תרגיל 4

פתח את הפונקציה $f(z)=Log(2+z)$ לטור טיילור סביב נקודה $z=0$ ומצא את תחום ההתכנסות

תרגיל 5

פתח את הפונקציה $f(z)=\frac{1}{4+z}$ לטור טיילור סביב נקודה $z=0$ ומצא את תחום ההתכנסות

תרגיל 6

פתח את הפונקציה $f(z)=sin(z)$ לטור טיילור סביב $z=\frac{\pi}{2}$ ומצא את תחום ההתכנסות

תרגיל 7

פתח את הפונקציה $f(z)=e^z$ לטור טיילור סביב $z=\frac{i\pi}{2}$ ומצא את תחום ההתכנסות

תרגיל 8

פתח את הפונקציה $f(z)=\frac{1}{2z-6}$ לטור טיילור סביב נקודה $z=1$ ומצא את תחום ההתכנסות

תרגיל 9

פתח את הפונקציה $f(z)=\frac{1}{1-z}$ לטור טיילור סביב נקודה $z=i$ ומצא את תחום ההתכנסות

תרגיל 10

פתח את הפונקציה $f(z)=z^2+2z+4$ לטור טיילור סביב נקודה $z=i$

תרגיל 11

הוכח כי הפונקציה $f(z)=\begin{cases}\frac{1}{2-z}, & z\neq 0\\ \frac{1}{2}, & z=0\end{cases}$ אנליטית לכל $|z|<2$

© כל הזכויות שמורות – אלון באומן – לימוד קורסים אונליין www.alonbaumann.co.il

תרגיל 12

הפרך את הטענה הבאה: אם טור טיילור של פונקציה $f(z)$ סביב נקודה $z=0$ הוא: $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ אז טור טיילור של הפונקציה $f(z)$ סביב $z_0 \neq 0$ הוא: $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-z_0)^n$

תרגיל 13

תהי פונקציה $f(z)$ אנליטית לכל $|z|<1$. נתונים שלושת האיברים הראשונים בטור טיילור של $f(z)$ סביב $z=0$:

$$f(z)=3+4z-6z^2+\cdots$$

מצא את שלושת האיברים הראשונים בטור טיילור של $g(z)=\frac{1}{f(z)}$ סביב $z=0$

© כל הזכויות שמורות – אלון באומן – לימוד קורסים אונליין www.alonbaumann.co.il

9.2. גזירה איבר-איבר ואינטגרציה איבר-איבר של טור טיילור

משפט גזירה איבר-איבר של טור טיילור

תהי $f(z)$ פונקציה אנליטית בנקודה z_0 בעלת טור טיילור מהצורה $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-z_0)^n$ המתכנס בתחום $|z-z_0|<R$.

טור טיילור של הנגזרת $f'(z)$ מתקבל ע"י הנגזרת של הטור איבר איבר: $f'(z)=\sum_{n=0}^{\infty} c_n n(z-z_0)^{n-1}$ המתכנס בתחום $|z-z_0|<R$

משפט אינטגרציה איבר-איבר של טור טיילור

תהי $f(z)$ פונקציה אנליטית בנקודה z_0 בעלת טור טיילור מהצורה $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-z_0)^n$ המתכנס בתחום $|z-z_0|<R$.

טור טיילור של הקדומה $F(z)$ מתקבל ע"י אינטגרציה של הטור איבר איבר: $F(z)=\sum_{n=0}^{\infty} c_n\frac{(z-z_0)^{n+1}}{n+1}$ כאשר $F'(z)=f(z)$

הטור של $F(z)$ מתכנס בתחום $|z-z_0|<R$

תרגיל 1

פתח את הפונקציה $f(z)=\frac{1}{(1-z)^2}$ לטור טיילור סביב נקודה $z=0$ ומצא את תחום ההתכנסות

תרגיל 2

פתח את הפונקציה $f(z)=\frac{1}{(z+2)^2}$ לטור טיילור סביב נקודה $z=1$ ומצא את תחום ההתכנסות

תרגיל 3

פתח את הפונקציה $f(z)=\frac{z^2}{(z+i)^3}$ לטור טיילור סביב נקודה $z=0$ ומצא את תחום ההתכנסות

תרגיל 4

פתח את הפונקציה $f(z)=\int_0^z sin(z^2)\,dz$ לטור טיילור סביב נקודה $z=0$ ומצא את תחום ההתכנסות

תרגיל 5

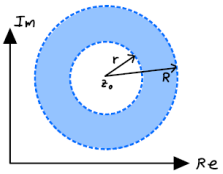
פתח את הפונקציה $f(z)=\int_0^z Log(1+z^4)dz$ לטור טיילור סביב נקודה $z=0$ ומצא את תחום ההתכנסות

© כל הזכויות שמורות – אלון באומן – לימוד קורסים אונליין www.alonbaumann.co.il

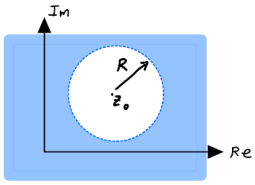
9.3. טור לורן

צורה כללית של טור לורן לפונקציה $f(z)$ סביב נקודה סינגולרית $z = z_0$ של הפונקציה: $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z - z_0)^n$

תחום ההתכנסות של טור לורן הוא תחום טבעתי $r < |z - z_0| < R$:



או תחום טבעתי אינסופי $|z - z_0| > R$:



תרגיל 1

פתח את הפונקציה $f(z) = cos\left(\frac{1}{z-1}\right)$ לטור לורן סביב $z = 1$

תרגיל 2

פתח את הפונקציה $f(z) = z^2 \, sin\left(\frac{1}{z^2}\right)$ לטור לורן סביב $z = 0$

תרגיל 3

פתח את הפונקציה $f(z) = e^{\frac{1}{z-i}}$ לטור לורן סביב $z = i$

תרגיל 4

פתח את הפונקציה $f(z) = \frac{e^z}{(z - \pi i)}$ לטור לורן סביב $z = \pi i$

תרגיל 5

פתח את הפונקציה $f(z) = \frac{1}{(z-1)(z+1)}$ לטור סביב $z = 1$ בכל תחום אפשרי

תרגיל 6

פתח את הפונקציה $f(z) = \frac{z-5}{(z-1)(z-3)}$ לטור סביב $z = 3$ בכל תחום אפשרי

תרגיל 7

פתח את הפונקציה $f(z) = \frac{1}{(z+2)(z-1)}$ לטור סביב $z = 0$ בכל תחום אפשרי

© כל הזכויות שמורות – אלון באומן – לימוד קורסים אונליין www.alonbaumann.co.il

תרגיל 8

הוכח כי אם $\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n z^n$ טור לורן של פונקציה זוגית $f(z)$ סביב נקודה סינגולרית $z=0$ המתכנס בתחום $0<|z|<R$ אז $c_k=0$ לכל k שלם ואי-זוגי

תרגיל 9

הוכח כי אם $f(z)$ פונקציה שלמה המקיימת $f(i)=0$, ומתקיים $f(z)=f\left(\frac{1}{z}\right)$ לכל $z\neq 0$ אז $f(z)=0$

תרגיל 10

יהי $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{2^{n+2}}z^n+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{3}z^{-n-1}$ טור לורן של הפונקציה $\frac{1}{(z+2)(z-1)}$ בתחום טבעתי $D=\{z\mid 1<|z|<2\}$.

הראה כי לא קיימת נקודה z_0 ב- D כך ש- $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{2^{n+2}}z_0^n=-\frac{3}{4}$ ו- $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{3}z_0^{-n-1}=1$

© כל הזכויות שמורות – אלון באומן – לימוד קורסים אונליין www.alonbaumann.co.il

9.4. גזירה איבר-איבר ואינטגרציה איבר-איבר של טור לורן

משפט גזירה איבר-איבר של טור לורן

תהי z_0 נקודה סינגולרית של הפונקציה $f(z)$ בעלת טור לורן מהצורה $f(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(z-z_0)^n$ המתכנס בתחום $r<|z-z_0|<R$

או $|z-z_0|>R$. טור לורן של הנגזרת $f'(z)$ מתקבל ע"י הנגזרת של הטור איבר איבר: $f'(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n n(z-z_0)^{n-1}$ המתכנס

בתחום $r<|z-z_0|<R$ או $|z-z_0|>R$

משפט אינטגרציה איבר-איבר של טור לורן

תהי z_0 נקודה סינגולרית של הפונקציה $f(z)$ בעלת טור לורן מהצורה $f(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(z-z_0)^n$ המתכנס בתחום $r<|z-z_0|<R$

או $|z-z_0|>R$. טור לורן של הקדומה $F(z)$ מתקבל ע"י אינטגרציה של הטור איבר איבר: $F(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n\frac{(z-z_0)^{n+1}}{n+1}$

כאשר $F'(z)=f(z)$. הטור של $F(z)$ מתכנס בתחום $r<|z-z_0|<R$ או $|z-z_0|>R$

תרגיל 1

פתח את הפונקציה $f(z)=\frac{2z}{(1-z^2)^2}$ לטור לורן סביב נקודה $z=1$ בתחום $0<|z-1|<2$

תרגיל 2

פתח את הפונקציה $f(z)=\frac{z}{(z^2+1)^2}$ לטור לורן סביב נקודה $z=i$ בכל תחום אפשרי

תרגיל 3

נתונה הפונקציה $f(z)=\frac{1}{z^3}+z^2$

א. מהם התחומים האפשריים בהם ניתן למצוא פיתוח לטור עבור הפונקציה $f(z)$?

ב. פתח את הפונקציה $f(z)$ לטור לורן סביב נקודה $z=2i$ בתחום המכיל את הנקודה $5i$

תרגיל 4

פתח את הפונקציה $f(z)=\frac{z}{(z-2i)^2}\cdot\frac{1}{(z^2+4)^2}$ לטור לורן סביב נקודה $z=2i$ בתחום $0<|z-2i|<4$

תרגיל 5

מצאו טור לורן המתכנס לאינטגרל: $\int_1^2 sin\left(\frac{1}{z^2}\right)dz$

© כל הזכויות שמורות – אלון באומן – לימוד קורסים אונליין www.alonbaumann.co.il

9.5. מיון וסיווג נקודות סינגולריות ע"י טורים וחישוב שארית, חישוב אינטגרלים ע"י משפט השארית של קושי ופיתוח פונקציה לטור

טור לורן של פונקציה $f(z)$ סביב נקודה סינגולרית $z = z_0$ מוגדר ע"י:

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n (z-z_0)^n = \underbrace{\sum_{n=-\infty}^{-1} C_n (z-z_0)^n}_{\text{חלק עיקרי}} + \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} C_n (z-z_0)^n}_{\text{טור טיילור}}$$

סוג הנקודה הסינגולרית $z = z_0$ נקבע לפי החלק העיקרי של טור לורן. נפריד ל- 3 מקרים:

א. כאשר טור לורן אינו מכיל את החלק העיקרי – מתקבל טור טיילור. במקרה זה הנקודה $z = z_0$ נקודה סינגולרית סליקה.

ב. כאשר החלק העיקרי מכיל מספר סופי של איברים – הנקודה $z = z_0$ היא קוטב מסדר החזקה השלילית הגדולה ביותר.

ג. כאשר החלק העיקרי מכיל מספר אינסופי של איברים – הנקודה $z = z_0$ נקראת נקודה סינגולרית עיקרית.

שארית של נקודה סינגולרית $z = z_0$ כאשר נתון טור לורן של הפונקציה: $Res(f(z), z_0) = c_{-1}$ כלומר המקדם של החזקה $(z-z_0)^{-1}$ בטור לורן של הפונקציה

תרגיל 1

נתונה הפונקציה $f(z) = z^4 \sin\left(\frac{2}{z}\right)$ מצא את הנקודה הסינגולרית של הפונקציה, קבע את סוגה וחשב את השארית שלה

תרגיל 2

נתונה הפונקציה $f(z) = (z-4)^3 \cosh\left(\frac{1}{z-4}\right)$ מצא את הנקודה הסינגולרית של הפונקציה, קבע את סוגה וחשב את השארית שלה

תרגיל 3

קבע את סוג הנקודה הסינגולרית $z = 0$ של הפונקציה $f(z) = \frac{-1}{z^8(z-3)}$ וחשב את השארית שלה

תרגיל 4

חשב את האינטגרל $\oint\limits_{|z|=2} \frac{e^{\frac{1}{z}}}{z^3} dz$

תרגיל 5

חשב את האינטגרל $\oint\limits_{|z|=1} z^5 \sin\left(\frac{1}{z^2}\right) dz$

© כל הזכויות שמורות – אלון באומן – לימוד קורסים אונליין www.alonbaumann.co.il

תרגיל 6

חשב את האינטגרל $\oint\limits_{|z|=\frac{1}{2}} \frac{1}{z^{15}(z+2)}dz$

תרגיל 7

קבע נכון\לא נכון – לפונקציה $f(z)=\frac{z^2+1}{e^z-1}$ יש פיתוח לטור טיילור סביב נקודה $z_0=2\pi i$ המתכנס לכל z

תרגיל 8

קבע נכון\לא נכון – טור לורן של הפונקציה $f(z)=\frac{(e^z-e)^2}{z(1-z)^2}$ סביב $z_0=1$ אינו כולל את החלק העיקרי

תרגיל 9

יהי $\sum\limits_{n=-\infty}^{-1} C_n(z-z_0)^n+\sum\limits_{n=0}^{\infty} C_n(z-z_0)^n$ טור לורן של הפונקציה $f(z)=z^3+1+sin(z)$ בתחום $r<|z-z_0|<R$.

קבע נכון\לא נכון – לכל z_0 מתקיים $\sum\limits_{n=-\infty}^{-1} C_n(z-z_0)^n=0$

תרגיל 10

נתונות פונקציות $f(z)$ ו- $g(z)$ אנליטיות לכל z. פיתוחי טיילור של הפונקציות סביב $z=0$ נתונים ע"י:

$$f(z)=\sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n \quad ; \quad g(z)=\sum_{n=4}^{\infty} b_n z^n$$

כאשר $a_2\neq 0$, $b_4\neq 0$.

א. הראה כי $z=0$ היא נקודה סינגולרית של הפונקציה $h(z)=\frac{f(z)}{g(z)}$ וחשב $Res(h,0)$

ב. מצא ביטוי לאינטגרל $\int_{|z|=1} h(z)dz$ כתלות במקדמי הטורים הנתונים

תרגיל 11

נתונות פונקציות $f(z)$ ו- $g(z)$ אנליטיות לכל $|z|<1$. פיתוחי טיילור של הפונקציה סביב $z=0$ נתונים ע"י:

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \quad ; \quad g(z)=\sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n$$

מצא ביטוי לאינטגרל $\int_{|z|=1} \frac{f(z)g(z)}{z^3}dz$ כתלות במקדמי הטורים הנתונים

© כל הזכויות שמורות – אלון באומן – לימוד קורסים אונליין www.alonbaumann.co.il

תרגיל 12

הוכח כי אם $f(z) = g(\alpha z)$ ו- a נקודה סינגולרית של f ו- g אז $Res\left(f, \frac{a}{\alpha}\right) = \frac{1}{\alpha} Res(g, a)$

תרגיל 13

תהי $f(z)$ פונקציה אי-זוגית ו- a, $-a$ נקודות סינגולריות של f. הוכח כי $Res(f, a) = Res(f, -a)$

© כל הזכויות שמורות – אלון באומן – לימוד קורסים אונליין www.alonbaumann.co.il