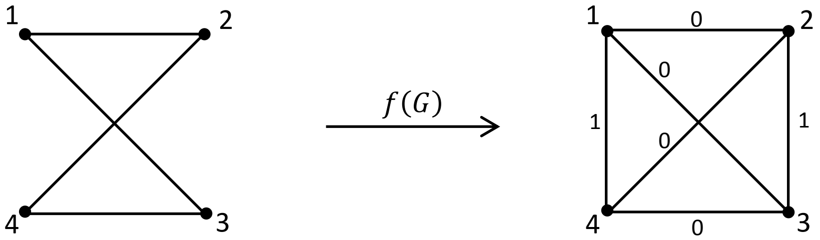
Juraj Holas

Domáca úloha č. 4

1. Polynomiálne redukcie

a) HAM → TSP-D

Vstupný graf G pre HAM sa na vstupný graf G' pre TSP-D zmení nasledovne:

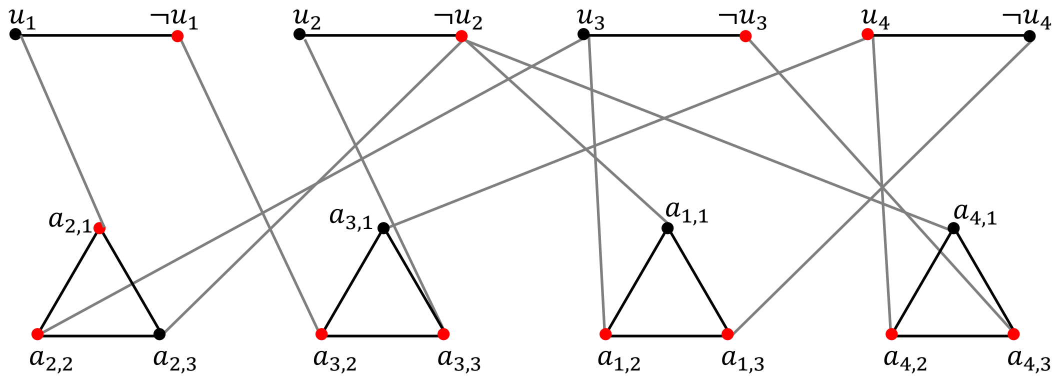


Vstup pre TSP-D je teda graf G' a maximálna suma rovná 0.

Algoritmus pre TSP-D vráti odpoveď „áno“, pričom príslušná obchôdzka obchodného cestujúceho je postupnosť vrcholov $(1,2,4,3,1)$ v G'. Príslušná Hamiltonovská kružnica v G je tiež postupnosť vrcholov $(1,2,4,3,1)$.

b) 3-SAT → VC

Vstupná formula $(\neg u_2 \vee u_3 \vee \neg u_4) \wedge (u_1 \vee u_3 \vee \neg u_2) \wedge (u_4 \vee \neg u_1 \vee u_2) \wedge (\neg u_2 \vee u_4 \vee \neg u_3)$ sa na vstupný graf G pre VC zmení nasledovne (zatiaľ nie je rozdiel medzi farebne odlíšenými vrcholmi) :



Zadaná formula je splniteľná práve vtedy, keď graf G má VC veľkosti nanajvýš $m + 2n$, kde m je počet logických premenných, a n počet klauzúl. V našom prípade teda potrebujeme nájsť VC, ktorý použije najviac 12 vrcholov. Takýto VC existuje, a príslušných 12 vrcholov je na obrázku vyznačených červenou farbou.

Ohodnotenie logických premenných, ktoré korešponduje nájdenému VC sú teda tie vrcholy, ktoré boli vybrané, v našom prípade je formula splnená ak platí: $\neg u_1, \neg u_2, \neg u_3, u_4$.

c) 3-SAT → SUBSET-SUM

Vstupná formula $(\neg u_2 \vee u_3 \vee \neg u_4) \wedge (u_1 \vee u_3 \vee \neg u_2) \wedge (u_4 \vee \neg u_1 \vee u_2) \wedge (\neg u_2 \vee u_4 \vee \neg u_3)$ sa zmení na nasledovné čísla v množine A:

	u_1	u_2	u_3	u_4	C_1	C_2	C_3	C_4
$v_1 =$	**1**	0	0	0	0	**1**	0	0
$v_1' =$	**1**	0	0	0	0	0	**1**	0
$v_2 =$	0	**1**	0	0	0	0	**1**	0
$v_2' =$	0	**1**	0	0	**1**	**1**	0	**1**
$v_3 =$	0	0	**1**	0	**1**	**1**	0	0
$v_3' =$	0	0	**1**	0	0	0	0	**1**
$v_4 =$	0	0	0	**1**	0	0	**1**	**1**
$v_4' =$	0	0	0	**1**	**1**	0	0	0
$c_1 =$	0	0	0	0	**1**	0	0	0
$c_1' =$	0	0	0	0	**2**	0	0	0
$c_2 =$	0	0	0	0	0	**1**	0	0
$c_2' =$	0	0	0	0	0	**2**	0	0
$c_3 =$	0	0	0	0	0	0	**1**	0
$c_3' =$	0	0	0	0	0	0	**2**	0
$c_4 =$	0	0	0	0	0	0	0	**1**
$c_4' =$	0	0	0	0	0	0	0	**2**

Cieľová suma $t = 11114444$.

Pre takúto množinu A vieme nájsť podmnožinu, ktorej súčet bude rovný t, napr. $\{v_1', v_2', v_3', v_4, c_1, c_1', c_2, c_2', c_3', c_4\}$ (zvýraznené riadky). Zodpovedajúce ohodnotenie logických premenných, pri ktorom bude formula splnená, je určené prvkami v_1', v_2', v_3', v_4 vo vybranej podmnožine. Pre splnenie formuly teda musí platiť $\neg u_1, \neg u_2, \neg u_3, u_4$.

d) SUBSET-SUM → COIN

Vstupná množina $A = \{1,4,5,6\}$ sa zmení na nasledovné hodnoty mincí:

	$value$	a_1	a_2	a_3	a_4
$c_1 =$	**1**	**1**	0	0	0
$c_1' =$	0	**1**	0	0	0
$c_2 =$	**4**	0	**1**	0	0
$c_2' =$	0	0	**1**	0	0
$c_3 =$	**5**	0	0	**1**	0
$c_3' =$	0	0	0	**1**	0
$c_4 =$	**6**	0	0	0	**1**
$c_4' =$	0	0	0	0	**1**

Pôvodná cieľová hodnota $t_{SSS} = 8$ sa zmení na cieľovú sumu $t_C = 81111$. Túto sumu však z uvedených mincí nevieme vyskladať, a teda ani v pôvodnom probléme SUBSET-SUM neexistuje taká podmnožina A, aby jej súčet bol rovný $t_{SSS} = 8$.

Predpokladajme, že sumu t_C vieme z mincí vyskladať. To znamená, že vieme nájsť koeficienty k také, aby:

$$81111 = k_1 c_1 + k_1' c_1' + k_2 c_2 + k_2' c_2' + k_3 c_3 + k_3' c_3' + k_4 c_4 + k_4' c_4'$$

Prvá cifra výslednej sumy sa rovná t_{SSS} (samozrejme, pri číselnej sústave s vhodným základom). Na prvej cifre sumy (ak chceme dostať iba 5-ciferné číslo) avšak nevieme dostať cifru 8 inak, než že aspoň jedno z k_1, k_2, k_3, k_4 bude väčšie ako 1. Tým by sa nám ale zvýšila hodnota aj v nejakej z ďalších cifier na 2 alebo viac, čiže výsledné číslo by sa nerovnalo 81111. Tým sme dospeli k sporu. To znamená, že nevieme nájsť také koeficienty k, aby prvá cifra výsledku bola rovná t_{SSS}, a teda nevieme nájsť takú podmnožinu A, aby súčet jej členov bol rovný t_{SSS}.

2. Znova animácie

Pózy si môžeme predstaviť ako vrcholy a animácie ako orientované, váhované hrany grafu, kde hrana (s_i, f_i) predstavuje vykonanie animácie v originálnom smere, a hrana (f_1, s_1) v vykonanie animácie odzadu. Začiatočná a konečná póza každej animácie je teda spojená dvojicou hrán – jednou v každom smere. V takto skonštruovanom grafe je teda Jankovou úlohou nájsť ťah dĺžky k začínajúci vo vrchole s a končiaci v f.

Riešenie v NP čase:

Problém sa dá riešiť v NP čase nasledujúcim nedeterministickým algoritmom:

```
1  function animation(graph G, vertex start, vertex finish, number k){
2    G = convert_to_neighbour_table(G)
3    v = start
4    sum = 0
5    used = {};
6    while(true){
7      u = choose from v.neighbours
8      if(edge(v, u) in used){ reject }
9      else{ used.add(edge(v, u)) }
10
11     sum += edge(v, u).weight
12     if(sum > k){ reject }
13     if(u == finish && sum == k){ accept }
14
15     v = u
16   }
17   reject
18 }
```

Časová zložitosť algoritmu (n je počet vrcholov, m počet hrán):

- Konverzia grafu do tabuľky susedov (r. 2) potrebuje vytvoriť tabuľku $n \times n$ záznamov o veľkosti $\log n$ bitov, pričom túto tabuľku môže vytvoriť „priamočiaro" časová zložitosť je teda $O(n^2 . \log n)$, čo je každopádne polynomiálne.
- Riadok 3 potrebuje $O(\log n)$ času, riadky 4 a 5 $O(1)$ – polynomiálne.
- Všetky akcie vnútri cyklu (r. 7-15) potrebujú $O(\log n)$ času. Nakoľko medzi každými dvoma vrcholmi vedú nanajvýš dve hrany (tam a späť), tak $m \leq n(n-1) \leq n^2$. Preto riadky 8 a 9 trvajú $O(\log(m)) \subseteq O(\log(n^2)) = O(2. \log(n)) = O(\log n)$.
- Cyklus sa preruší, ak algoritmus vyberie hranu, ktorá už je v množine `used`. Môže sa teda vybrať maximálne toľko hrán, kým ich `used` nebude obsahovať všetky. Cyklus sa teda vykoná max. m krát. Jeho časová zložitosť je teda $O(m. \log n) \subseteq O(n^2 . \log n)$, čo je polynomiálne.

Všetky kroky algoritmu sú polynomiálne, problém teda patrí do triedy NP.

Problém je NP-ťažký:

V tejto časti dôkazu ukážeme redukciu iného NP-úplného problému na náš problém, konkrétne $SUBSETSUM \leq_P ANIMATION$.

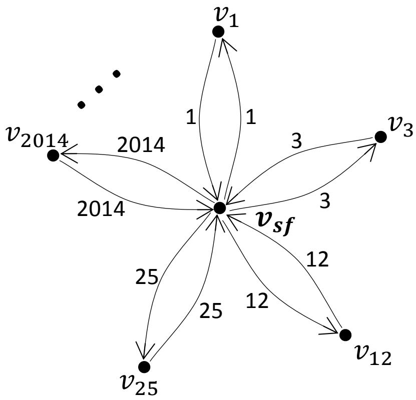
Množina A a cieľová suma t, ktoré sú na vstupe $SUBSETSUM$, sa budú transformovať na vstup pre $ANIMATION$ nasledovne:

- Vytvoríme vrchol grafu v_{sf}

- Pre každý prvok i z množiny A vytvoríme:
    - vrchol v_i (póza v_i)
    - hrany (v_{sf}, v_i) a (v_i, v_{sf}), obe s váhou i (animácia $v_{sf} \to v_i$ a jej opačný smer)
- Začiatok aj koniec hľadaného ťahu (resp. počiatočná aj konečná póza) bude v_{sf}
- Požadovaná cena ťahu (resp. dĺžka animácie) $k = 2t$

Týmto nám vznikne graf v tvare „hviezdičky“ (vzhľadom na obdobie roka môžeme túto hviezdu považovať za Vianočnú) :

$$A = \{1,3,12,25,2014,\dots\} \xrightarrow{f(A)}$$



Vrcholov v grafe bude $|A| + 1$, hrán bude $2|A|$, čiže transformácia je $O(|A|)$, a teda polynomiálna.

Dôkaz $\boldsymbol{SUBSETSUM(A,t)} = \top \Rightarrow \boldsymbol{ANIMATION(f(A,t))} = \top$:

Vieme, že existuje podmnožina A, ktorá sa nasčíta na hodnotu t:

$$SUBSETSUM(A,t) = \top \Rightarrow \exists\{i_1, i_2, \dots, i_p\} \subseteq A \left(\sum_{j=1}^{p} i_j = t\right)$$

Nakoľko váhy hrán $w(v_{sf}, v_i) = w(v_i, v_{sf}) = i$, tak v získanom grafe $f(A,t)$ platí:

$$\sum_{j=1}^{p} w\left(v_{sf}, v_{i_j}\right) = \sum_{j=1}^{p} w\left(v_{i_j}, v_{sf}\right) = t \Rightarrow \sum_{j=1}^{p}\left(w\left(v_{sf}, v_{i_j}\right) + w\left(v_{i_j}, v_{sf}\right)\right) = 2t = k$$

Výsledný ťah v grafe bude teda postupnosť vrcholov: $x = \left(v_{sf}, v_{i_1}, v_{sf}, v_{i_2}, v_{sf}, \dots, v_{i_p}, v_{sf}\right)$. Nakoľko $\{i_1, i_2, \dots, i_p\}$ je množina, prvky sa v nej neopakujú, a teda aj hrany v x sa nebudú opakovať – x je teda naozaj ťah v grafe. Podľa posledného vzťahu tiež vidíme, že cena x je rovná k. Našli sme teda ťah v grafe, resp. postupnosť animácií x, ktorá trvá presne k krokov, a teda platí $ANIMATION(f(A,t)) = \top$. □

Dôkaz $\boldsymbol{ANIMATION(f(A,t))} = \top \Rightarrow \boldsymbol{SUBSETSUM(A,t)} = \top$:

Vieme, že existuje ťah x v grafe G získanom z $f(A,t)$, ktorého cena je k, pričom začína aj končí v v_{sf} . Nakoľko v G sú hrany iba medzi v_{sf} a $v_i \neq v_{sf}$, neexistuje tam hrana (v_i, v_j), $v_i, v_j \neq v_{sf}$. Tým pádom ani v x neexistuje podpostupnosť takéhoto tvaru, čiže po každom $v_i \neq v_{sf}$ musí nasledovať v_{sf} . Ďalej, graf neobsahuje slučku (v_{sf}, v_{sf}), teda v x po každom v_{sf} musí nasledovať $v_i \neq v_{sf}$. Z posledných dvoch tvrdení a faktu, že x zo zadania začína aj končí v v_{sf} nám vyplýva, že:

$$x = \left(v_{sf}, v_{i_1}, v_{sf}, v_{i_2}, v_{sf}, \dots, v_{i_p}, v_{sf}\right)$$

Nakoľko x je ťah, nesmie sa v ňom opakovať žiadna hrana (v_{sf}, v_i), a teda platí, že všetky v_{i_j} sú v x rôzne. Máme teda množinu vrcholov $\left\{v_{i_1}, v_{i_2}, \dots, v_{i_p}\right\}$ a množinu ich označení $\left\{i_1, i_2, \dots, i_p\right\}$. Podľa spôsobu konštrukcie grafu G pomocou $f(A,t)$ vieme, že $w\left(v_{sf}, v_{i_j}\right) = w\left(v_{i_j}, v_{sf}\right) = i_j$ pre všetky vrcholy v_{i_j}. Celková cena ťahu x je teda rovná:

$$k = \sum_{j=1}^{p} \left(w\left(v_{sf}, v_{i_j}\right) + w\left(v_{i_j}, v_{sf}\right)\right) = 2\sum_{j=1}^{p} w\left(v_{sf}, v_{i_j}\right) = 2\sum_{j=1}^{p} i_j$$

Nakoľko podľa $f(A,t)$ platí $k = 2t$, tak:

$$k = 2\sum_{j=1}^{p} i_j = 2t \;\Rightarrow\; \sum_{j=1}^{p} i_j = t$$

Z konštrukcie grafu pomocou $f(A,t)$ vieme, že všetky i_j sú prvkami A, a teda $\left\{i_1, i_2, \dots, i_p\right\} \subseteq A$. Z predchádzajúceho vzťahu vieme, že súčet tejto podmnožiny je rovný t.

Našli sme teda podmnožinu množiny A, ktorej súčet je rovný t, a teda $SUBSETSUM(A,t) = \top$. □

Zhrnutie:

Dokázali sme, že $SUBSETSUM(A,t) = \top \;\Rightarrow\; ANIMATION\big(f(A,t)\big) = \top$, tiež že $ANIMATION\big(f(A,t)\big) = \top \;\Rightarrow\; SUBSETSUM(A,t) = \top$, a teda $f(A,t)$ je korektná polynomiálna redukcia. Z toho vyplýva, že $SUBSETSUM \le_P ANIMATION$.

Tiež sme ukázali polynomiálny nedeterministický algoritmus pre $ANIMATION$, z čoho vyplýva, že $ANIMATION \in NP$.

Z týchto dvoch záverov vieme odvodiť, že problém $ANIMATION$ je NP-úplný problém.