

E - 王老板和仓鼠

何柱

2015 年 6 月 10 日

在操作 3 中，可以证明，最后一定会把 b 变成 $b \bmod a$ ，整个操作与求 \gcd 十分相似。假设操作者遇到状态 (a, b) ，不妨设 $a \leq b$ ，如果 $(a, b \bmod a)$ 是必输状态，那么他可以毫不犹豫地把 b 换成 $b \bmod a$ ，即 (a, b) 为必赢状态；但是如果 $(a, b \bmod a)$ 是必赢状态，是否存在一个必输状态 $(a, b - a^k)$ 呢？在这个过程中，状态只与两个值 $b - b \bmod a$ 和 a 有关。如果我们能求出状态和这两个值的关系，设为 $f(x, y)$ ，就可以知道 (a, b) 的状态。通过打表可以归纳出

$$f(x, y) = \lfloor \frac{x-1}{y+1} \rfloor \bmod (y+1) \bmod 2$$

所以当 $(a, b \bmod a)$ 是必输状态或者 $f(b - b \bmod a, a) = 0$ 且 $(a, b \bmod a)$ 是必赢状态时， (a, b) 为必赢状态；否则 (a, b) 为必输状态。终止状态 $(0, x)$ 为必输状态。

$\begin{matrix} x \\ y \end{matrix}$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1
2	0	0	1	1	1	1	0	0	1	1	1	1	0	0	1	1	1	1	0	0
3	0	0	0	1	1	1	0	0	0	1	1	1	0	0	0	1	1	1	0	0
4	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1
5	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1
6	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	1	1

图 1: $f(x, y)$