D - 风神与狗

何柱

2015 年 6 月 10 日

先计算出第 n 天带狗出去玩的概率。由题意可知，在第 n 天猫和狗的个数分别为 $c+(n-x)w$，$d+xw$，其中 $0 \le x \le n$，记为 $(c+(n-x)w, d+xw)$。由杨辉三角可知，从 (c,d) 到 $(c+(n-x)w, d+xw)$ 有 $\binom{n}{x}$ 种可能的转移方式，并通过计算可知每种情况的概率均是

$$\frac{(\prod_{i=0}^{n-x-1}(c+iw))(\prod_{i=0}^{x-1}(d+iw))}{\prod_{i=0}^{n-1}(c+d+iw)}$$

令 $P(n,x)$ 表示从 (c,d) 转移到 $(c+(n-x)w, d+xw)$ 并且带狗出去玩的概率，则

$$P(n,x) = \binom{n}{x}\frac{(\prod_{i=0}^{n-x-1}(c+iw))(\prod_{i=0}^{x}(d+iw))}{\prod_{i=0}^{n}(c+d+iw)}$$

令 $P(n)$ 表示第 n 天带狗出去玩的概率，则

$$P(n) = \sum_{x=0}^{n}\binom{n}{x}\frac{(\prod_{i=0}^{n-x-1}(c+iw))(\prod_{i=0}^{x}(d+iw))}{\prod_{i=0}^{n}(c+d+iw)}$$

结合帕斯卡法则

$$\binom{n}{x} = \binom{n-1}{x} + \binom{n-1}{x-1}$$

得

$$P(n) = \sum_{x=0}^{n}\binom{n-1}{x}\frac{(\prod_{i=0}^{n-x-1}(c+iw))(\prod_{i=0}^{x}(d+iw))}{\prod_{i=0}^{n}(c+d+iw)} + \binom{n-1}{x-1}\frac{(\prod_{i=0}^{n-x-1}(c+iw))(\prod_{i=0}^{x}(d+iw))}{\prod_{i=0}^{n}(c+d+iw)}$$

合并相同组合数项，得

$$P(n) = \sum_{x=0}^{n-1}\binom{n-1}{x}\frac{(\prod_{i=0}^{n-x-2}(c+iw))(\prod_{i=0}^{x}(d+iw))}{\prod_{i=0}^{n-1}(c+d+iw)} = P(n-1)$$

$$\Rightarrow P(n) = P(0) = \frac{d}{c+d}$$

因此，第 n 天带狗出去玩的概率是 $\frac{d}{c+d}$。下面计算第 a 天和第 b 天都带狗出去玩的概率。和上面的证明同理可以得到从 (c,d) 转移到 $(c+(a-x)w, d+xw)$ 并且带狗出去玩的概率

$$P(a,x) = \binom{a}{x}\frac{(\prod_{i=0}^{a-x-1}(c+iw))(\prod_{i=0}^{x}(d+iw))}{\prod_{i=0}^{a}(c+d+iw)}$$

结合上面的结论，可以得到在上式的前提下第 b 天带狗出去玩的概率为

$$P_2(a,x) = \binom{a}{x}\frac{(\prod_{i=0}^{a-x-1}(c+iw))(\prod_{i=0}^{x+1}(d+iw))}{\prod_{i=0}^{a+1}(c+d+iw)}$$

然后就可以得到第 a 天和第 b 天都带狗出去玩的概率为

$$P_2(a) = \sum_{x=0}^{a} \binom{a}{x} \frac{(\prod_{i=0}^{a-x-1}(c+iw))(\prod_{i=0}^{x+1}(d+iw))}{\prod_{i=0}^{a+1}(c+d+iw)}$$

和上面的证明方法类似，可以得到

$$P_2(a) = P_2(0) = \frac{d(d+w)}{(c+d)(c+d+w)}$$

于是程序就变得十分的简单,只需求 $g = gcd(d(d+w), (c+d)(c+d+w))$,再输出 $\frac{d(d+w)}{g} / \frac{(c+d)(c+d+w)}{g}$ 就可以了。