

H - 之之的困惑

何柱

2015 年 6 月 10 日

考虑以下的排列分类方法：

A $p(n) = n$

B $p(n-1) = n, p(n) < n-1$

C $p(n-1) = n, p(n) = n-1$

D $p(n-1) \neq n, p(n) < n-1$

E $p(n-1) \neq n, p(n) = n-1$

令 $dp[n][k][type]$ 表示 1 到 n 的排列 p ，满足 $|p(i) - i| = 1$ 的个数为 k ，且 p 的类型为 $type$ 的个数。先逆向考虑每种类型的 1 到 $n-1$ 的排列可以转移到哪些类型的 1 到 n 的排列，把新加的数 n 放在每个 $n-1$ 的排列最后，再研究它和前面的每个数交换后的类型。

A (a) $dp[n-1][k][A] \rightarrow dp[n][k][A]$ ：不交换

(b) $dp[n-1][k-2][A] \rightarrow dp[n][k][C]$ ：与 $n-1$ 交换

(c) $dp[n-1][k+1][A] * (k+1) \rightarrow dp[n][k][D]$ ：与在 $p(n-1)$ 之前的所有 $|p(i) - i| = 1$ 的数交换

(d) $dp[n-1][k][A] * (n-k-2) \rightarrow dp[n][k][D]$ ：与在 $p(n-1)$ 之前的所有 $|p(i) - i| \neq 1$ 的数交换

B (a) $dp[n-1][k][B] \rightarrow dp[n][k][A]$ ：不交换

(b) $dp[n-1][k][B] \rightarrow dp[n][k][E]$ ：与 $n-1$ 交换

(c) $dp[n-1][k-1][B] \rightarrow dp[n][k][B]$ ：与 $p(n-1) < n-2$ 交换

(d) $dp[n-1][k+1][B] * k \rightarrow dp[n][k][D]$ ：与在 $p(n-2) = n-1$ 之前的所有 $|p(i) - i| = 1$ 的数交换

(e) $dp[n-1][k][B] * (n-k-2) \rightarrow dp[n][k][D]$ ：与在 $p(n-2) = n-1$ 之前的所有 $|p(i) - i| \neq 1$ 的数交换

C (a) $dp[n-1][k][C] \rightarrow dp[n][k][A]$ ：不交换

(b) $dp[n-1][k][C] \rightarrow dp[n][k][E]$ ：与 $n-1$ 交换

(c) $dp[n-1][k][C] \rightarrow dp[n][k][B]$ ：与 $p(n-1) = n-2$ 交换

(d) $dp[n-1][k+1][C] * (k-1) \rightarrow dp[n][k][D]$ ：与在 $p(n-2) = n-1$ 之前的所有 $|p(i) - i| = 1$ 的数交换

(e) $dp[n-1][k][C] * (n-k-1) \rightarrow dp[n][k][D]$: 与在 $p(n-2) = n-1$ 之前的所有 $|p(i)-i| \neq 1$ 的数交换

D (a) $dp[n-1][k][D] \rightarrow dp[n][k][A]$: 不交换

(b) $dp[n-1][k-1][D] \rightarrow dp[n][k][E]$: 与 $n-1$ 交换

(c) $dp[n-1][k-1][D] \rightarrow dp[n][k][B]$: 与 $p(n-1) < n-2$ 交换

(d) $dp[n-1][k+1][D] * (k+1) \rightarrow dp[n][k][D]$: 与在 $p(n-1) < n-2$ 之前的除了 $n-1$ 外所有 $|p(i)-i| = 1$ 的数交换

(e) $dp[n-1][k][D] * (n-k-3) \rightarrow dp[n][k][D]$: 与在 $p(n-1) < n-2$ 之前的除了 $n-1$ 外所有 $|p(i)-i| \neq 1$ 的数交换

E (a) $dp[n-1][k][E] \rightarrow dp[n][k][A]$: 不交换

(b) $dp[n-1][k-1][E] \rightarrow dp[n][k][E]$: 与 $n-1$ 交换

(c) $dp[n-1][k][E] \rightarrow dp[n][k][B]$: 与 $p(n-1) = n-2$ 交换

(d) $dp[n-1][k+1][E] * k \rightarrow dp[n][k][D]$: 与在 $p(n-1) = n-2$ 之前的除了 $n-1$ 外所有 $|p(i)-i| = 1$ 的数交换

(e) $dp[n-1][k][E] * (n-k-2) \rightarrow dp[n][k][D]$: 与在 $p(n-1) = n-2$ 之前的除了 $n-1$ 外所有 $|p(i)-i| \neq 1$ 的数交换

解出所有 $dp[n][k][X]$ 得

$$dp[n][k][A] = dp[n-1][k][A] + dp[n-1][k][B] + dp[n-1][k][C] + dp[n-1][k][D] + dp[n-1][k][E]$$

$$dp[n][k][B] = dp[n-1][k-1][B] + dp[n-1][k][C] + dp[n-1][k-1][D] + dp[n-1][k][E]$$

$$dp[n][k][C] = dp[n-1][k-2][A]$$

$$dp[n][k][D] = dp[n-1][k+1][A] * (k+1) + dp[n-1][k][A] * (n-k-2) + dp[n-1][k+1][B] * k + dp[n-1][k][B] * (n-k-2) + dp[n-1][k+1][C] * (k-1) + dp[n-1][k][C] * (n-k-1) + dp[n-1][k+1][D] * (k+1) + dp[n-1][k][D] * (n-k-3) + dp[n-1][k+1][E] * k + dp[n-1][k][E] * (n-k-2)$$

$$dp[n][k][E] = dp[n-1][k][B] + dp[n-1][k][C] + dp[n-1][k-1][D] + dp[n-1][k-1][E]$$

边界条件为: 当 $n < 0$ 或 $k < 0$ 或 $n < k$ 时, $dp[n][k][X]=0$; $dp[1][0][A]=1$ 。

问题给出 n 和 k , 相当于求 $dp[n][k][A] + dp[n][k][B] + dp[n][k][C] + dp[n][k][D] + dp[n][k][E]$, 也相当于求 $dp[n+1][k][A]$, 用记忆化搜索求出即可。