F - 两句话题意

何柱

2015 年 6 月 11 日

先说一个比较重要的定理，设 $f(n)$ 和 $g(n)$ 为任意函数，下面两个命题等价：

(i)

$$g(n)=\sum_{m=1}^{\infty}f(mn),n=1,2,3,\ldots$$

且

$$\exists\varepsilon>0,\sum_{n=1}^{\infty}n^{\varepsilon}|f(n)|\text{收敛}$$

(ii)

$$f(n)=\sum_{m=1}^{\infty}\mu(m)g(mn),n=1,2,3,\ldots$$

且

$$\exists\varepsilon>0,\sum_{n=1}^{\infty}n^{\varepsilon}|g(n)|\text{收敛}$$

其中 μ 为默比乌斯函数

$$\mu(n)=\begin{cases}1 & \text{若}n=1\\(-1)^k & \text{若}n\text{无平方数因数且}n=p_1p_2\ldots p_k\\0 & \text{若}n\text{有大于1的平方数因数}\end{cases}$$

令 $f(n)$ 表示最大公约数为 n 的组数，$g(n)$ 表示有公约数 n 的组数，显然有

$$g(n)=\sum_{m=1}^{\infty}f(mn),n=1,2,3,\ldots,a_{max}$$

根据定理有

$$f(n)=\sum_{m=1}^{\infty}\mu(m)g(mn),n=1,2,3,\ldots,a_{max}$$

令 $c(n)$ 表示集合中含有因子 n 的数字个数，则

$$g(n)=2^{c(n)}-1,n=1,2,3,\ldots,a_{max}$$

当 mn 超过集合元素的最大值 a_{max} 时，对 $f(n)$ 的贡献永远为 0，不必计算，即

$$f(n)=\sum_{m=1}^{\lfloor\frac{a_{max}}{n}\rfloor}\mu(m)g(mn),n=1,2,3,\ldots,a_{max}$$

根据题意，期望为

$$E = \frac{\sum_{x=1}^{a_{max}} x^k f(x)}{2^n - 1}$$

要求的答案为

$$ans = (2^n - 1)E \bmod 10000007$$

整理得

$$ans = (\sum_{x=1}^{a_{max}} x^k \sum_{m=1}^{\lfloor \frac{a_{max}}{x} \rfloor} \mu(m) g(mx)) \bmod 10000007$$

其中

$$g(n) = 2^{c(n)} - 1, n = 1, 2, 3, \dots, a_{max}$$

预处理函数 $g(n)$ 的值，计算 x^k 时使用快速幂算法，时间复杂度为 $O(n + a_{max} log a_{max} + a_{max} log k)$。