1 张量的进一步练习

1. 我们回忆一下$(0,1)$张量是线性空间V里的一个向量，取了一组基$(e_1,\dots,e_n)$之后，一个$(1,0)$向量可以用这组基来展开$\sum_{i=1}^n V^i e_i$. 变换一组基之后，我们的向量是没有变的，通过这个不变性，我们 可以找到展开系数的变换公式。我们对V的换基操作是$e_i^{'} = \sum_{j=1}^n e_j P_{ji}$. 这里$P$是一个可逆矩阵。一般张量都是线性空间里面的向量，但是它们可以用V的基来展开，并且在V的换基操作中会有确定的变换性质。

   (a) 考虑$(1,0)$ 张量空间 (这就是V的对偶空间V^*), 给定V的一组基，我们可以构造V^*的一组基。 方法是通过下列定义$e_i^*(e_j) = \delta_{ij}$. 请写下换基之后一个$(1,0)$张量系数的变换公式。

   (b) 考虑$(0,2)$ 张量空间. 用给定V中的基，这个空间的一个张量可以表示为$V = V^{ij} e_i \otimes e_j$. 请写下换基之后一个$(0,2)$张量系数的变换公式。

   (c) 考虑$(2,0)$ 张量空间. 用给定V中的基，这个空间的一个张量可以表示为$V = V_{ij} e_i^* \otimes e_j^*$. 请写下换基之后一个$(2,0)$张量系数的变换公式。

   (d) 张量一个很重要的性质就是，我们可以构造出在换基操作下不变的量。

      i. 考虑一个$(0,1)$张量 V和$(1,0)$张量f，验证: $\sum_{i=1}^n v^i f_i$在换基下不变。

      ii. 请用$(2,0),(0,2),(1,0),(0,1)$张量来构造换基不变量。

2. 我们定义实线性空间上的一个内积:$g : V \times V \to R$. 选定V上的一组基$\{e_i\}$，我们可以得到这个内积的一个表示$g_{ij} = g(e_i, e_j)$. g_{ij}就是一个对称矩阵。

   (a) 写下$g(v,w)$的形式，这里v和w是两个向量。答案用g_{ij}和v和w在基上的展开系数来表示。

   (b) 写下换基操作下$e_i^{'} = \sum_{j=1}^n e_j P_{ji}$, g对应矩阵的变换性质，验证g其实是一个$(2,0)$张量。

3. 如果一个双线性对称函数$g : V \times V \to R$ 满足下列条件：$g(v,w) = 0$对于任何w都成立, 那么一定$v = 0$。 这样的双线性函数称之为非退化的。证明：这样的双线性函数 对应的矩阵的特征值不是0。

4. 证明：考虑线性空间V，矩阵A是$V \to V$的某个线性映射对应的矩阵。证明：对于A的不变子空间V_1，我们可以找到另一个子空间V_2, 使得线性空间$V = V_1 \oplus V_2$. 能不能找到一个V_2使得$V = V_1 \oplus V_2$并且V_2也是A的不变子空间? 如果能，请证明，如果不能，请给出反例。

5. 在广义相对论里面，我们的时空被一个所谓的四维时空来描述。这个时空并不是一个线性空间。 然而在时空的每一点有一个切空间，这个空间是一个四维线性空间V。一个 粒子的速度可以看成这个线性空间的一个向量。(上述只是背景介绍，接下来我们考虑的都是线性代数问题)。 在

这个线性空间上，我们也有一个内积 $g: V \times V \to R$，这个内积满足下面的三个性质: 1): 对称的，$g(v,w) = g(w,v)$，2): g是双线性的，3) 和之前定义的内积不一样：我们要求g有一个负的特征值和三个正的特征值，

(a) g是一个对称矩阵，所以可以对角化，证明：可以找到一组基，使得

$$g_{ij} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{1}$$

(b) 我们同样可以定义一个向量的长度为$|v|^2 = g(v,v)$. 有了这个概念以后，我们可以把我们的向量分为下面三种： 1): $g(v,v) = 0$,这种叫类光的；2): $g(v,v) < 0$, 类时的； 3): $g(v,v) > 0$, 类空的。

i. 请在上题的基下面，分别给出这三类向量的例子。

ii. 取V中的一个过原点的两维平面(比如向量后两个坐标分量为0的平面)，在这个平面中画出类时、类光和类空向量对应的区域，看看你画的图是不是一个锥形。

广义相对论和牛顿力学一个最大的区别就是： 在牛顿力学中，一个粒子的速度可以是任何值，所以，对应的速度空间都是可以取值的。但是，在广义相对论中，速度的上限是光速。粒子可以取的速度对应于类时区域的向量。

6. 若当标准形(续): 我们在上一次作业中研究了广义特征向量空间的性质: 对于一个$n \times n$ 方矩阵A的特征值λ_1, 我们找到了一个线性子空间$N_{k_1}(\lambda_1)$: 这个子空间是下列方程的解空间$(\lambda_1 I - A)^{k_1} x = 0$并且$N_{k_1-1}(\lambda_1)$是$N_{k_1}(\lambda_1)$的真子集，但是$N_{k_1}(\lambda_1) = N_{k_1+1}(\lambda_1) = \cdots$，并得到了它的一些性质. 类似的，对于每一个互不相同的特征值，我们都可以有一个这样的线性子空间。

(a) 证明：如果$\lambda_1 \neq \lambda_2$, $N_{k_1}(\lambda_1) \cap N_{k_2}(\lambda_2) = \{0\}$ （提示：先考虑一下矩阵$\lambda_1 I - A$和$\lambda_2 I - A$的差）。

(b) 用上题的结论证明线性空间可以写成下面的直和的形式：$V = N_{k_1}(\lambda_1) \oplus N_{k_2}(\lambda_2) \oplus \ldots \oplus N_{k_s}(\lambda_s)$, 这里$\lambda_i$是矩阵$A$的互不相等的特征值（提示：回忆一下之前作业的结论，$N_{k_i}(\lambda_i)$的维数的多少）。

(c) 根据我们上一次作业的结论，每一个子空间$N_{k_i}(\lambda_i)$都是A的不变子空间。 证明： 在$N_{k_i}(\lambda_i)$ 上分别取基，然后用这些基构成整个线性空间的一组基，那么A在这组基上是个分块矩阵。

(d) 剩下的问题就是找到每一个子空间的一组特别基来使得我们的矩阵有比较好的形式。 这个基可以这么找:

i. 定义矩阵$B = A - \lambda_1 I$. 我们有下列的线性子空间的包含关系

$$N_1(\lambda_1) \subset N_2(\lambda_1) \subset \ldots \subset N_{k_1}(\lambda_1) \tag{2}$$

我们考虑一个在$N_{k_1}(\lambda_1)$里面的向量e_1，但是不在$N_{k_1-1}(\lambda_1)$里面的向量。这个向量称之为$N_{k_1}(\lambda_1)$相对于$N_{k_1-1}(\lambda_1)$的向量。

A. 证明：e_1不在$N_i(\lambda_1)$里面, 这里$i \le k_1 - 1$.

B. 证明: $B^i(e_i) \in N_{k_1-i}(\lambda_1)$.

C. 证明: $(e_1, Be_1, \ldots, B^{k_1-1}e_1)$是线性无关的。(提示：期中考试)

D. 证明：$(e_1, Be_1, \ldots, B^{k_1-1}e_1)$ 这个空间是A的不变子空间。(提示：利用定义)

E. 证明： $A[B^{k_1-1}e_1, B^{k_1-2}e_1, \ldots, e_1] = [B^{k_1-1}e_1, B^{k_1-2}e_1, \ldots, e_1]J$. 这里$J$是一个大小为$k_1$的若当块:

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 1 & & & \\ & \lambda_1 & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \lambda_1 & 1 \\ & & & & \lambda_1 \end{pmatrix}, \tag{3}$$

换句话说，矩阵的对角元是k_1个λ_1，每个对角元λ_1上面的元素是1，剩下的元素全是0。

ii. (思考题). 我们已经基本证明了若当标准型的存在。剩下的细节由有兴趣的同学自己补充。(提示：考虑所有的$N_{k_1}(\lambda_1)$相对于$N_{k_1-1}(\lambda_1)$的向量，每一个这样的向量，我们得到一个 大小为k_1的若当块。接下来考虑所有的$N_{k_1-1}(\lambda_1)$相对于$N_{k_1-2}(\lambda_1)$的向量， 每一个这样的向量，我们得到一个 大小为$k_1 - 1$的若当块, 等等).

2 复线性空间的初步练习

1. 我们考虑一个实线性空间R^{2n}, 接下来我们研究一下实线性空间和复线性空间的关系(感觉题目有点多了，这次就做下面这一部分吧)

   (a) R^{2n}上的一个线性映射T称之为复结构，如果$T^2 = -I$，这里I是单位映射。

      i. 写下一个满足题中要求的2×2矩阵T(T是线性映射的表示矩阵).

      ii. 求T的行列式。

      iii. 证明: 存在一组基，使得在这一组基下面

$$T = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & \cdot & \cdot & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \cdot & \cdot & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{bmatrix} \tag{4}$$

      (提示：考虑一系列关于T的不变线性子空间$(v_i, Tv_i), i = 1, \ldots, n$)

      iv. 求T的特征值。

2. 在实矩阵的时候，我们之前考虑过四个子空间$C(A), N(A), C(A^T), N(A^T)$.
回忆一些这四个子空间的关系。

   (a) 证明：在复数矩阵的时候，正确的推广是$C(A), N(A), C(A^H), N(A^H)$.

   (b) 我们还是可以考虑一个复线性空间的投影问题：给定一个复向量b，我们可以把它投影到一个复矩阵A的列向量子空间。

      i. 在实数的情况，我们有投影方程。请写下一个类似的方程。

      ii. 在实数的时候，如果A的列向量都是线性无关的，那么我们可以写下投影向量。请证明这个结论在复数的情况也是成立的，并写下投影向量。