作业 1. (1) 设 G 是连通的 n 阶图, 且边数为 $n-1$. 证明: G 是树.

(2) 设 T 是 n 阶树, 且恰好有两个度为 1 的顶点. 证明: T 是一个长为 $n-1$ 的简单路.

(3) 设 T 是第 (2) 小问中的图 (称之为 *path graph*). 证明: 存在映射 $f: V(T) \to \{1, 2, \ldots, n\}$, 使得当 $\{x, y\}$ 取遍 T 的所有 $n-1$ 条边时, 所得到 $|f(x) - f(y)|$ 的值两两不同.(人们猜测: 对于所有树 T, 都有这样的 f 存在.)

作业 2. (1) 设 G 是 n 阶简单图, 其顶点分别为 $v_1, \ldots, v_n$. 定义 G 的邻接矩阵 $A = (a_{ij})$ 为:

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{如果} v_i \text{ 与} v_j \text{ 相邻}, \\ 0, & \text{如果} v_i = v_j \text{ 或} v_i \text{ 与} v_j \text{ 不相邻}. \end{cases}$$

证明: A^2 的矩阵元 $(A^2)_{ij}$ 等于顶点 v_i 与顶点 v_j 的公共邻点的数目. 更一般的, 证明 A^k 的矩阵元 $(A^k)_{ij}$ 等于从顶点 v_i 到顶点 v_j 的长为 k 的 (不一定简单的) 道路的数目.

作业 3. 《离散数学》146 页练习 8.2.3.

作业 4. 《离散数学》155 页练习 8.5.4.

作业 5. 《离散数学》156 页练习 8.5.10.

作业 6. 设 T 是顶点编号为 $1, 2, \ldots, n$ 的树. 令 $T_1 = T$, 归纳的定义 T_i 如下: 设已经定义好 T_i, 令 x_i 为 T_i 的 leaf 的编号的最小值, 设 x_i 在 T_i 中的唯一的邻点为 y_i, 定义 T_{i+1} 为由 T_i 删去 x_i 所得的图. 称 $P(T) = (y_1, y_2, \ldots, y_{n-2})$ 为 T 的普吕弗序列.

(1) 证明: $y_{n-1} = n$, 且 $\{x_1, \ldots, x_{n-1}, y_{n-1}\} = \{1, 2, \ldots, n\}$.

(2) 证明: x_k 等于不在 $\{x_1, \ldots, x_{k-1}\} \cup \{y_k, \ldots, y_{n-2}\}$ 中出现的最小正整数.

(3) 请画出一个至少 10 阶的顶点编号的树 T. 给出它的普吕弗序列, 并从 $P(T)$ 重构出 T.