天04 2018012137 张鸿琳

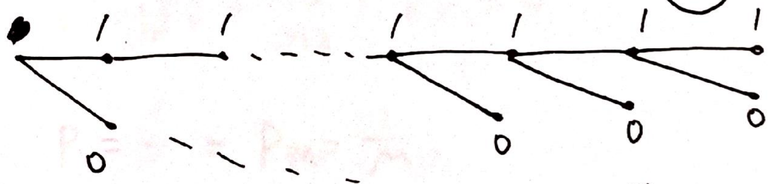
1. 解：

① ~~数~~易得 $\sum_{i=1}^{M} p_i = \sum_{i=1}^{M} 2^{-l_i} = 1$

故而存在码长分别为 l_i 的前缀码（认为 l_i 为整数）

且存在一个"长满"叶子的二叉树，每个叶子对应一个码字。

对该二叉树进行整理，使得从根结点出发较长的叶子节点靠上，较短的叶子节点靠下，如下，且靠上的结点优先设为"1"，



此时码长为（平均）$\bar{L} = \sum_{i=1}^{M} l_i \cdot 2^{-l_i} = \sum_{i=1}^{M} (-p_i \log(p_i))$

码长最短，且此时"1"被尽量分配给小概率事件。

② 利用数学归纳法，假设 M 时编码结果中"0"和"1"等概，

易得 $M=2$ 时，显然 $p_1 = p_2 = \frac{1}{2}$，则"0"与"1"等概。

考察 $M+1$ 的情况，为了保证二叉树"长满"叶子，则显然总码字数不可为奇数，故而应考察 $M+2$ 的情况，显然只需在 M 情况基础上任选出一个叶子，让该叶子再长出两个叶子即可，此时这两个叶子相当于又引入了一对"0"和"1"节点，易得总体上此时"0"和"1"的概率是相等的。

③ 此处证明和②中类似，因为实际上 $\bar{L}$ 最短的各种编码方式只是变更了①中二叉树的 0、1 分配方式，所以证明过程基本不变。

2.解：

① $H(X)=-\sum_{i=1}^{M} P_i \log_2(P_i)$

考虑到 $\sum_{i=1}^{M} P_i=1$

设 $f=-\sum_{i=1}^{M} P_i \log_2(P_i)+\lambda\sum_{i=1}^{M} P_i$

则 $\frac{\partial f}{\partial P_i}=-\left(\log_2 P_i+\frac{1}{\ln 2}\right)+\lambda=0$

可知 $P_1=\cdots=P_M=\frac{1}{M}$

此时 $H(X)_{min}=\log_2 M$.

故而 $H(X)\leq\log_2 M$，取等条件为 $P_1=\cdots=P_M=\frac{1}{M}$.

② 由于 $H(X,X_2,\cdots,X_k)=kH(X)$

故而利用①中结论可知，

$H(X_1,X_2,\cdots,X_k)\leq k\log_2 M$

取等条件为 $P_1=\cdots=P_M=\frac{1}{M}$

③

$$H(X_1,\cdots,X_k) = H(X_k|X_1,\cdots,X_{k-1}) + H(X_1,\cdots,X_{k-1})$$

(马尔可夫) $= H(X_k|X_{k-1}) + H(X_1,\cdots,X_{k-1})$

(迭代) $= H(X_k|X_{k-1}) + H(X_{k-1}|X_{k-2}) \cdots H(X_2|X_1) + H(X_1)$

$$= (k-1)\cdot\left(-\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m} P_{ij}\log(q_{ij})\right) - \sum_{i=1}^{m} P_i \log(P_i)$$

(其中 $P_{ij} = q_{ij}\cdot P_i$)

④ 若 X_i 独立同分布，则有 $H(X_1,\cdots,X_k) = kH(X)$

定义 $T_\varepsilon^n = \{x : |-\frac{\log(p(x))}{n} - H(X)| < \varepsilon\}$

由大数定律 $Pr\{x\in T_\varepsilon^n\} \geq 1 - \frac{\sigma^2}{n\varepsilon^2} \longrightarrow 1$

故而 T_ε^n 中的 x 一定满足 $2^{-n(H(x)+\varepsilon)} < p(x) < 2^{-n(H(x)-\varepsilon)}$

即 T_ε^n 中的 x 近似等概

由理想数据压缩

$$\underbrace{\{0,1\}^{nH(X)}}_{\text{遍历任意}\,nH(x)\,\text{个“0”“1”组合}} \longmapsto \underbrace{x\in T_\varepsilon^n}_{x\text{等概}}$$

可得选中“1”的概率为

$$\sum_{k=0}^{nH(X)} 2^{-nH(X)} \binom{nH(X)}{k} \frac{k}{nH(X)}$$

（接上）

$$= \sum_{k=1}^{nH(X)} 2^{-nH(X)} \cdot \frac{(nH(X))!}{k!\,(nH(X)-k)!} \, \frac{k}{nH(X)}$$

$$= 2^{-nH(X)} \cdot \sum_{k=1}^{nH(X)} \frac{(nH(X)-1)!}{(k-1)!\,((nH(X)-1)-(k-1))!}$$

$$= 2^{-nH(X)} \cdot 2^{nH(X)-1}$$

$$= \frac{1}{2}$$

故而此时"0"，"1"等概.

3.解:

① 用4个重建电平做均匀量化,易得

$$x_1=-2,\ x_2=-1,\ x_3=0,\ x_4=1,\ x_5=2$$

$$y_1=-1.5,\ y_2=-0.5,\ y_3=0.5,\ y_4=1.5$$

$$\Delta=1$$

② $$\sigma_q^2=\frac{\Delta^2}{12}\int_{-2}^{2}p(x)dx=\frac{1}{12}$$

$$SNR_q=3\times2^{2\times2}\times\frac{\int_{-2}^{2}x^2p(x)dx}{4}=8$$

③ $$\sigma_q^2=\frac{\Delta^2}{12}\int_{-1}^{1}p(x)dx=\frac{1}{48}\times\frac{3}{4}=\frac{1}{64}$$

$$\sigma_o^2=\int_{-\infty}^{-1}(x+0.75)^2p(x)dx+\int_{1}^{\infty}(x-0.75)^2p(x)dx$$

$$=\frac{18}{192}$$

$$\sigma_x^2=\int_{-1}^{1}x^2p(x)dx=\frac{5}{24}$$

$$SNR=\frac{\sigma_x^2}{\sigma_q^2+\sigma_o^2}=\frac{\frac{5}{24}}{\frac{18}{192}+\frac{1}{64}}=\frac{20}{11}$$

④ 设定初始值 $y_1^{(0)}=-1.5$，$y_2^{(0)}=-0.5$，$y_3^{(0)}=0.5$，$y_4^{(0)}=1.5$

计算 $x_1^{(1)}=-1$，$x_2^{(1)}=0$，$x_3^{(1)}=1$

计算重心 $$y_i^{(k+1)}=\frac{\int_{x_i^{(k)}}^{x_{i+1}^{(k)}} x\,p(x)\,dx}{\int_{x_i^{(k)}}^{x_{i+1}^{(k)}} p(x)\,dx}$$ （如上迭代，直到σ^2达到要求）

由于计算量较大，此处仅迭代一次，得到：

$y_1^*=-\frac{4}{3}$，$y_2^*=-\frac{4}{9}$，$y_3^*=\frac{4}{9}$，$y_4^*=\frac{4}{3}$

$x_0^*=-2$，$x_1^*=-\frac{8}{9}$，$x_2^*=0$，$x_3^*=\frac{8}{9}$，$x_4^*=2$

$\Delta_1^*=\frac{10}{9}$，$\Delta_2^*=\frac{8}{9}$，$\Delta_3^*=\frac{8}{9}$，$\cancel{\Delta_4^*=\frac{10}{9}}$.

⑤ $$\sigma_q^2=\frac{4}{3\times 2^{16}}\frac{\ln^2(1+255)}{255^2}\times\left(1+\frac{2\times255}{2}\times\frac{1}{3}+\frac{255^2}{4}\times\frac{2}{3}\right)$$

$$\approx 1.051\times10^{-4}$$

$$SNR_q=\frac{\sigma_x^2}{\sigma_q^2}\approx\frac{\frac{2}{3}}{1.051\times10^{-4}}\approx 6343.6$$

⑥

① 中电平最小平均bit数为

$$\hat{R} = -\sum p_i \log_2 p_i = -\left(2\times\frac{1}{8}\times\log_2\left(\frac{1}{8}\right)+2\times\frac{3}{8}\times\log_2\left(\frac{3}{8}\right)\right)$$

$$= 1.81$$

③ 中电平最小平均bit数为

$$\hat{R} = -\sum p_i \log_2 p_i = -\left(2\times\frac{7}{32}\times\log_2\left(\frac{7}{32}\right)+2\times\frac{9}{32}\times\log_2\left(\frac{9}{32}\right)\right)$$

$$= 1.99$$

④ 中电平最小平均bit数为

$$\hat{R} = -\sum p_i \log_2 p_i = -\left(2\times\frac{25}{162}\times\log_2\left(\frac{25}{162}\right)+2\times\frac{56}{162}\times\log_2\left(\frac{56}{162}\right)\right)$$

$$= 1.89$$

⑤ 中电平最小平均bit数为 .

$$\hat{R} = h(X) - \frac{1}{2}\log(\sigma^2) - 1.8 \approx 6.52$$

4. 解：设 $p(t) = Sa(\frac{t}{T}\pi)$

则 $\phi_k(t) = p(t-kT)$

而 $\hat{p}(f) = \mathcal{F}[p(t)] = \begin{cases} T, & -\frac{1}{2T} < f < \frac{1}{2T} \\ 0, & \text{else} \end{cases}$

故而可知 $\sum_{k=-\infty}^{\infty} \hat{p}(f - k\frac{1}{T}) = T$

即满足 Nyquist 准则，

所以 $\phi_k(t)$ 是标准正交基，同时由于 $\phi_k(t) = p(t-kT)$

所以 $\phi_k(t)$ 也是平移正交基。