《高等微积分 2》第十三周作业

本次作业请在第十四周星期五 (5 月 22 日)$24:00$ 点之前在网络学堂提交.

1 设 $C \subset \mathbf{R}^2$ 是光滑的闭曲线, 取逆时针方向 (定向). 假设 $(0,0) \notin C$, 计算第二型曲线积分

$$\int_C \frac{-(x^2y+y^3)dx+(x^3+xy^2)dy}{(x^2+y^2)^2}.$$

2 定义曲面 S 为

$$S=\{(x,y,z)|x^2+y^2\le 1, x+y+z=1\},$$

取指向 z 轴正方向的定向 (或者用课本上的术语, 选定了曲面的上侧).

(1) 计算第二型曲面积分

$$\iint_S x^2dydz+y^2dzdx+z^2dxdy.$$

(2) 设 S 的边界为 ∂S, 赋予边界的正定向. 计算第二型曲线积分

$$\int_{\partial S} z^2dx+x^2dy+y^2dz.$$

3 设曲面 S 位于平面 $Ax+By+Cz+D=0$ 中, 赋予定向 $\mathbf{n}=(\frac{A}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}},\frac{B}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}},\frac{C}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}})$. 证明:

$$\int_{\partial S^+}(Bz-Cy)dx+(Cx-Az)dy+(Ay-Bx)dz=2\sqrt{A^2+B^2+C^2}\cdot \mathrm{area}(S).$$

第 4 题需要用到如下事实: 设 f 在矩形区域 $[a,b]\times[c,d]$ 上连续, 且有连续的偏导函数 $\frac{\partial f}{\partial x}$. 对每个 $x\in[a,b]$, 定义函数 $g(x)=\int_c^d f(x,y)dy$, 则有 $g'(x)=\int_c^d \frac{\partial f(x,y)}{\partial x}dy$.

4 给定 $(x_0, y_0) \in \mathbf{R}^2$. 对于正数 r, 令 $C(r) = \{(x,y)|(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 = r^2\}$. 设 f 在区域 $D(R) = \{(x,y)|(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 \leq R^2\}$ 上是光滑函数, 定义函数 $g(r)$ 为如下的第一型曲线积分

$$g(r) = \frac{1}{2\pi r}\int_{C(r)} f(x,y)ds, \quad \forall 0 < r \leq R,$$

其中 ds 表示弧长微元.

(1) 利用前述事实, 证明: 对任何 $0 < r \leq R$, 有

$$g'(r) = \frac{1}{2\pi r}\int_{C(r)} -f_y(x,y)dx + f_x(x,y)dy,$$

其中 $C(r)$ 取逆时针定向.

(2) 设 $x_0^2 + y_0^2 > R^2$. 计算 $\frac{1}{2\pi R}\int_{C(R)} \ln(x^2+y^2)ds$.

5 考虑 $\mathbf{R}^3\backslash\{(0,0,0)\}$ 上的向量场

$$\mathbf{F}(x,y,z) = (\frac{x}{M(x,y,z)^{3/2}}, \frac{y}{M(x,y,z)^{3/2}}, \frac{z}{M(x,y,z)^{3/2}}),$$

其中 $M(x,y,z) = (y+z)^2 + (z+x)^2 + (x+y)^2$.

(1) 求 $\mathbf{F}$ 的散度 $\nabla \cdot \mathbf{F}$, 其中对于向量场 $\mathbf{F} = (P,Q,R)$, 定义其散度为 $\nabla \cdot \mathbf{F} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}$.

(2) 设 S 是单位球面 $S = \{(x,y,z)|x^2+y^2+z^2 = 1\}$, 取指向外面的定向. 计算第二型曲面积分

$$\iint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \iint_S \frac{xdydz + ydzdx + zdxdy}{M(x,y,z)^{3/2}}.$$

6 设 S 是 $\mathbf{R}^3$ 中光滑的定向曲面, 其定向由各点处的单位法向量

$$\mathbf{n}(x,y,z) = (\mathbf{n}_1(x,y,z), \mathbf{n}_2(x,y,z), \mathbf{n}_3(x,y,z))$$

描述. 我们假设 $\mathbf{n}(x,y,z)$ 在 S 的某个邻域中处处有定义, 是单位长度的, 且关于 (x,y,z) 是光滑变化的. 证明:

$$\int_{\partial S}(y\mathbf{n}_2 + z\mathbf{n}_3)dx - y\mathbf{n}_1 dy - z\mathbf{n}_1 dz = -\iint_S (y\mathbf{n}_3 - z\mathbf{n}_2)(\mathrm{div}\ \mathbf{n})dS,$$

其中我们把 $\mathbf{n}$ 的分量函数简记为 $\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2, \mathbf{n}_3$, 用 $\mathrm{div}\ \mathbf{n}$ 表示 $\mathbf{n}$ 的散度, 用 dS 表示面积微元, 对 S 的边界 ∂S 赋予边界正定向.