

声色散

2019012137 物理92 张鸿琳

2020 年 5 月 10 日

摘要

本实验主要探究了波在波导管中的传播形式，以及色散现象的发生于影响。首先通过分析不同角度入射入波导管内的音波的形式，得出了不同模式下的音波沿着波导管波速与振动频率产生了关系，从而导致不同频率的音波的分离，也就是（结构）色散，以及由此得出了截止频率的概念；之后分析了某些模式下，（结构）色散引起的群速度与相速度的不同变化，以及调制的实现；最后分析了一些实例中的色散现象的发生。通过这一系列实验，深刻全面地分析了结构色散发生的原因，以及可能造成的影响，从而认识到如何避免这类不利色散的发生。

Keywords:波导管，色散，截止频率，群速度，相速度，调制

目录

1	实验原理	3
2	数据处理	3
2.1	在波导管中传播的声波形式及其模式、截止频率	3
2.2	相速度与群速度、色散关系	3
2.3	色散对信号传输的影响	5
3	讨论	6

1 实验原理

- 声波速度（声速）是振动状态在弹性媒质中的传播速度。体积无限大的理想气体中的声速为： $v = \sqrt{\frac{\gamma RT}{M}}$ ，其中 γ 为气体比热容比， R 为摩尔气体常量， T 为温度， M 为气体的摩尔质量，可见声波速度与声波频率无关，因此在体积无限大的理想气体中声速是无色散的。
- 由于声波在波导管壁的反射，声波在沿波导管长度方向的传播速度与声波频率有关，在半无限长， y 轴长 D ， z 轴长 W 的波导管中传播，由于角度原因，如果在 y - z 平面将形成驻波，即满足 $k_y = m\frac{\pi}{D}, k_z = n\frac{\pi}{W}$ ，因为 $\frac{\omega}{k} = v$ ，故而有 $k_x = \sqrt{(\frac{\omega}{v})^2 - (\frac{m\pi}{D})^2 - (\frac{n\pi}{W})^2}$ ，从而沿波导管速度与频率有关，可以产生色散现象。
- 当多个不同频率的波叠加，如果存在色散现象，则会导致整体合成的波包的传播速度与单个波的传播速度不同，也就是群速度与相速度。

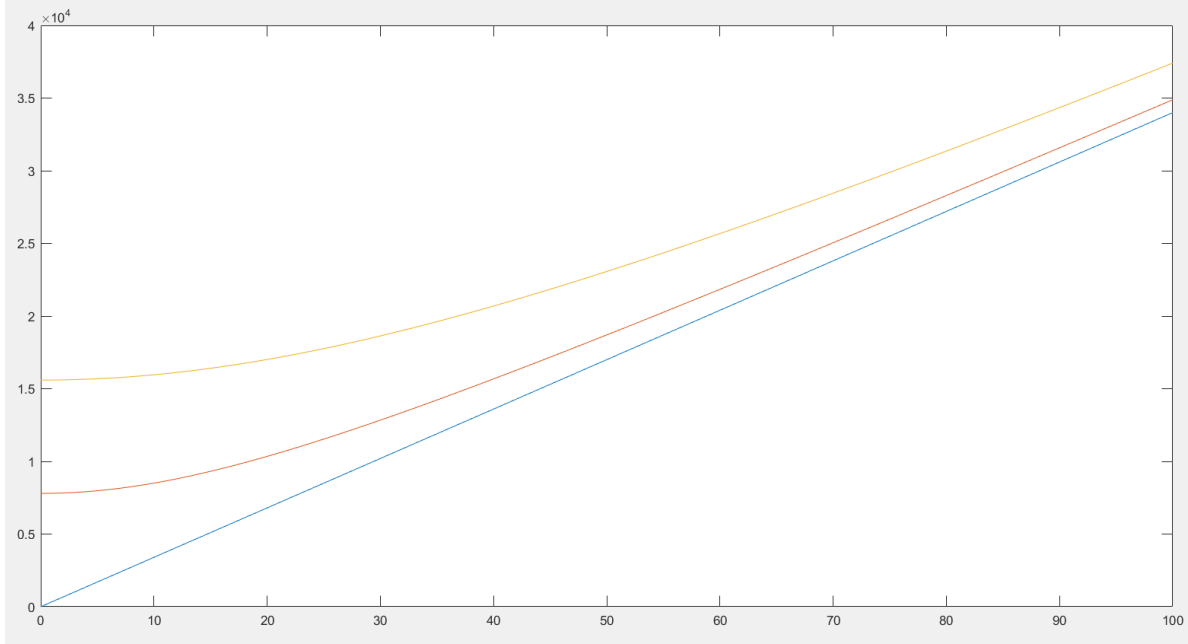
2 数据处理

2.1 在波导管中传播的声波形式及其模式、截止频率

已知体积无限大理想气体中的声速为 $v=340\text{m/s}$ ，矩形波导管的参数为 $D=0.137\text{m}$ ， $W=0.05\text{m}$ 。由公式 $k_x = \sqrt{(\frac{\omega}{v})^2 - (\frac{m\pi}{D})^2 - (\frac{n\pi}{W})^2}$ ，对于特定的 m 、 n ，使 k_x 为零，即虚数与实数的临界条件，所对应的 $\omega_{(m,n)}$ 为该条件下的截止角频率，易得 $\omega_{(m,n)} = \pi v \sqrt{(\frac{m}{D})^2 + (\frac{n}{W})^2}$ ，则在 (m, n) 为 $(0,0)$ 时，截止角频率为 $\omega_{(0,0)} = 0$ ，为 $(1,0)$ 时，截止角频率为 $\omega_{(1,0)} = 7796.653301\text{rad/s}$ ，为 $(2,0)$ 时，截止角频率为 $\omega_{(2,0)} = 15593.3066\text{rad/s}$

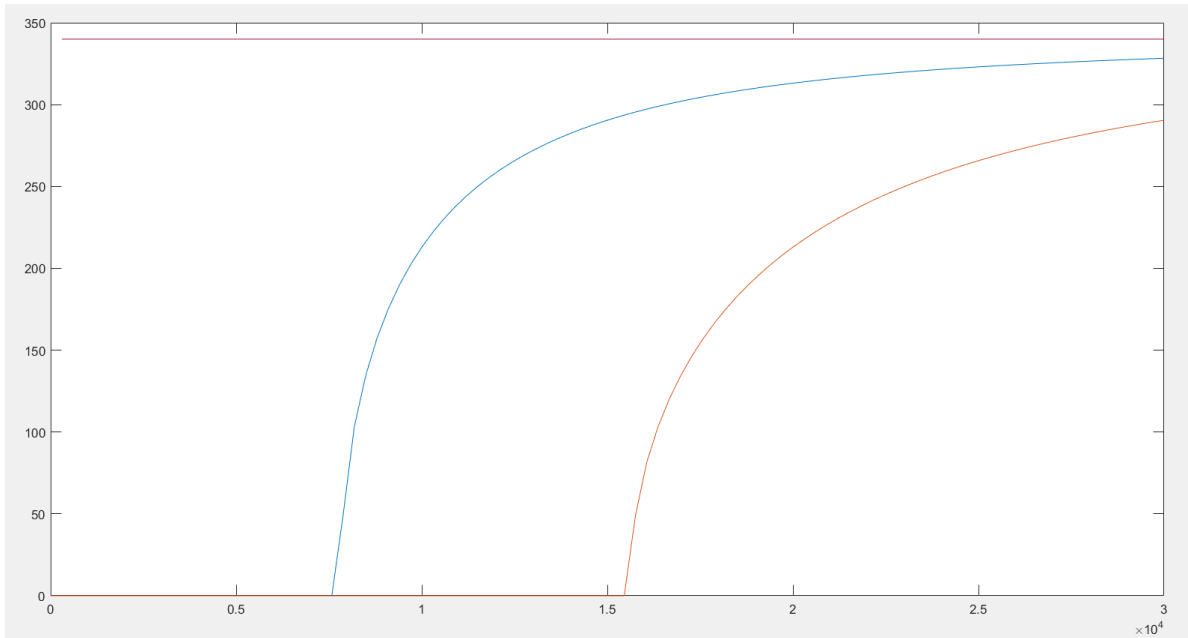
2.2 相速度与群速度、色散关系

（实验基本数据沿用上个实验）在本实验中，只考虑 $(0,0)$ ， $(1,0)$ ， $(2,0)$ 三个模式，并设 $p_0 = 10\text{Pa}$ ， $\phi_0 = 0$ ，则声压可表示为 $p = 10\cos(k_y y)\cos(\omega t - k_x x)$ ，由公式 $k_x = \sqrt{(\frac{\omega}{v})^2 - (\frac{m\pi}{D})^2 - (\frac{n\pi}{W})^2}$ ，可得色散关系表达式为 $\omega = v\sqrt{k_x^2 + (\frac{m\pi}{D})^2}$ 。则 $(0, 0)$ ， $(1, 0)$ ， $(2, 0)$ 三个模式分别对应的色散关系分别为 $\omega = vk_x$ ， $\omega = v\sqrt{k_x^2 + (\frac{\pi}{D})^2}$ ， $\omega = v\sqrt{k_x^2 + (\frac{2\pi}{D})^2}$ ，将三个函数图像比较，如下图：

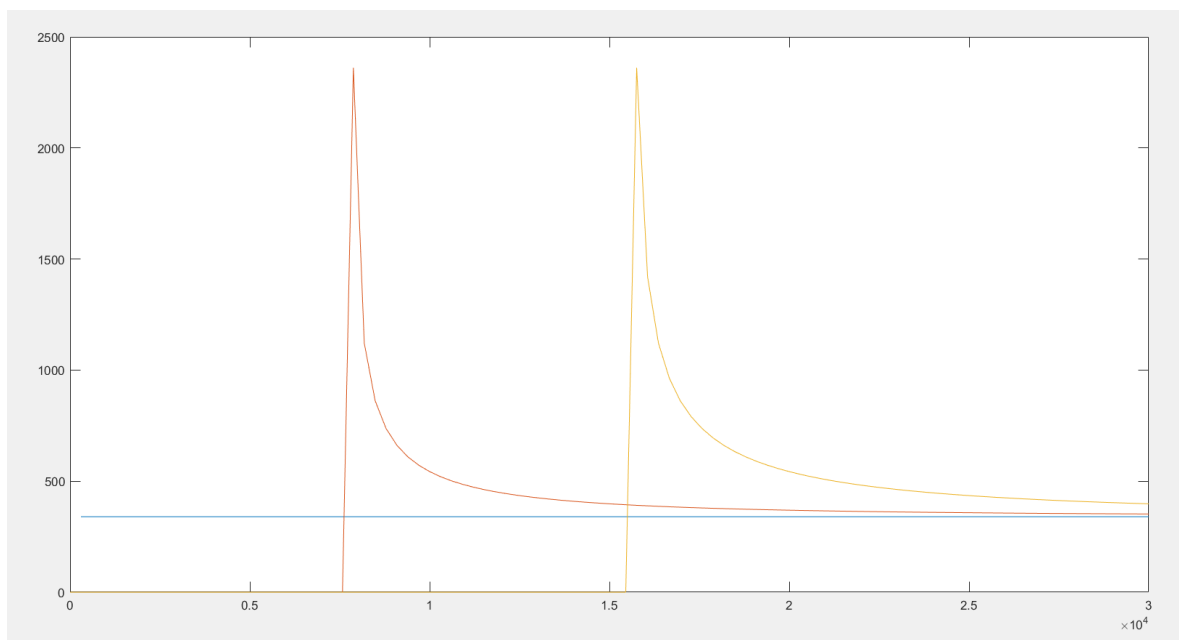


可见在 (0,0) 条件下, 波速为常数, 而在 (1,0) 和 (2,0) 条件下, 波速与频率有关, 故而后两种情况会发生色散。

在同一模式下, 当两个波叠加频率较为接近时, 由群速度 $v_g = \frac{\omega_2 - \omega_1}{k_2 - k_1} = \frac{\partial \omega}{\partial k}$, 进而可得在以上三个模式下, 其对应的 $v_g(\omega)$ 表达式分别为: $v_g(\omega) = v, v_g(\omega) = v \frac{\sqrt{\omega^2 - (\frac{m\pi v}{D})^2}}{\omega}, v_g(\omega) = v \frac{\sqrt{\omega^2 - (\frac{2m\pi v}{D})^2}}{\omega}$, 将三个函数 (颜色分别为红, 黄, 橙) 放在同一坐标系下比较, 如下图:

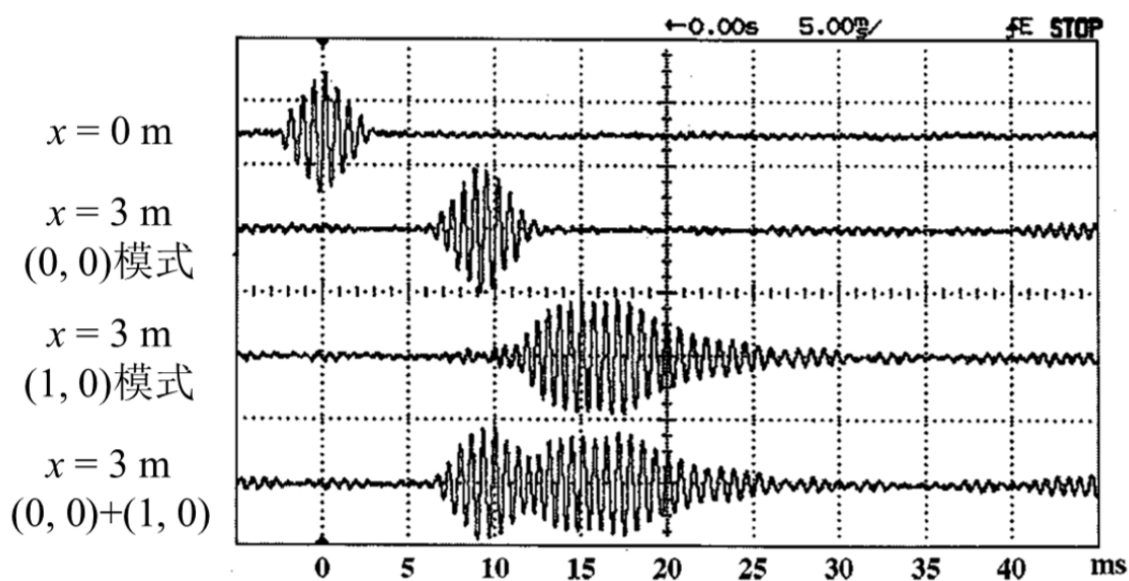


可见, 第一种模式下, 群速度不变, 而后两种模式群速度随 ω 增大而稳步增大, 直到趋近于音速。而三种情况下的相速度分别为, $v_p = v, v_p = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{v^2} - (\frac{\pi}{D\omega})^2}}, v_p = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{v^2} - (\frac{2\pi}{D\omega})^2}}$, 将三个函数 (颜色分别为蓝, 红, 黄, 其中竖直线表示在此处趋近于无穷) 放在同一坐标系下对照, 如下图:



可见在第一种模式下，相速度不变，而在后两种模式下，相速度从无穷开始，随 ω 增大而减小。

2.3 色散对信号传输的影响



上图为在 $D=0.142\text{m}$ ， $W=0.05\text{m}$ 的波导管中，几种不同模式的波传播的情况，载波频率为 1500Hz ，使用频率为 100Hz 的三角波对其进行幅度调制，波包长度为 5ms 。

可据图计算得到以 $(0, 0)$ 模式、 $(1, 0)$ 模式传播时，其群速度分别为 $v_g \doteq \frac{3}{9 \times 10^{-3}} = 333.33\text{m/s}$ ， $v_g \doteq \frac{3}{17 \times 10^{-3}} = 176.47\text{m/s}$ ，一些判定与分析见下表：

传播模式	是否有色散	原因
(0,0)	否	
(1, 0)	是	不同频率的波的传播速度不同导致的
(0,0) + (1,0)	是	不同模式的波的传播速度不同以及不同频率的波的传播速度不同导致的

3 讨论

本实验从理论推导到事实验证，比较全面地揭示了波导管中（结构）色散的发生，从而揭示了信号传输中的一些现象，比如在最后一个实验中由于频率不同或模式不同引起的色散的发生会导致比较严重的信息失真甚至消散，这说明在实际信号传输设备铺设时要尽量避免不同模式的波的产生，也就是避免（结构）色散的发生，同时也要尽可能地减少电磁波折射率不同带来的色散现象，为了保证信息的完整性，或许可以通过架设更多基站，对失真的信息及时进行修复，这可能是比较现实的解决方案。

参考文献

- [1] Wikipedia: dispersion relation, dispersion (optics).
- [2] K. Meykens, B. Van Rompaey, H. Janssen. Dispersion in acoustic waveguides—A teaching laboratory experiment. Am. J. Phys., 67(5), pp. 400-406, May 1999.