

## 《高等微积分 1》第一周作业

本次作业在第二周星期三上课时间交, 希望大家使用订在一起的散页纸.

1 设  $X, Y, Z$  是集合.

(1) 证明: 映射  $f: X \rightarrow Y$  是双射的充分必要条件是存在映射  $f^{-1}: Y \rightarrow X$ , 使得

$$f^{-1} \circ f = id_X, \quad f \circ f^{-1} = id_Y.$$

称满足上述条件的映射  $f^{-1}: Y \rightarrow X$  为  $f: X \rightarrow Y$  的逆映射.

(2) 设  $f: X \rightarrow Y, g: Y \rightarrow Z$  都是双射, 它们的逆映射分别为  $f^{-1}: Y \rightarrow X, g^{-1}: Z \rightarrow Y$ . 证明:  $g \circ f: X \rightarrow Z$  也是双射, 且

$$(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}.$$

2 设  $A, B$  是  $\mathbf{R}$  的非空有界子集. 证明:

(1)  $\inf(A \cup B) = \min\{\inf A, \inf B\}, \sup(A \cup B) = \max\{\sup A, \sup B\}$ .

(2) 如果  $A \cap B \neq \emptyset$ , 则有

$$\inf(A \cap B) \geq \max\{\inf A, \inf B\}, \quad \sup(A \cap B) \leq \min\{\sup A, \sup B\}.$$

3 设映射  $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$  满足如下条件:

(1)  $f$  在  $\mathbf{R}$  上是有界函数, 即存在正数  $M$ , 使得对任何  $x$  都有  $|f(x)| \leq M$ .

(2) 对任何实数  $x$  都有  $f(2x) = 2f(x)$ .

求出所有这样的映射  $f$ .

4 设映射  $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$  满足:

$$f(x+y) = f(x) + f(y), \quad \forall x, y \in \mathbf{R}.$$

证明: 存在实数  $a$ , 使得对每个有理数  $x$  都有  $f(x) = ax$ .

5 设  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = A$ . 证明:

(1)  $\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n| = |A|$ .

(2) 如果  $A > 0$ , 则  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{a_n} = \sqrt{A}$ .