

2021年秋季学期数据与算法第五次作业

2021. 12. 19

1. 一元方程 $x^3 - x^2 - 1 = 0$ 在 $x = 1.5$ 附近有一个实数根, 若将该方程变换成为下列三种不同的等价形式:

(1) $x^2 = \frac{1}{x-1}$, 对应的迭代格式为 $x_{k+1} = \sqrt{\frac{1}{x_k-1}}$

(2) $x = 1 + \frac{1}{x^2}$, 对应的迭代格式为 $x_{k+1} = 1 + \frac{1}{x_k^2}$

(3) $x^3 = 1 + x^2$, 对应的迭代格式为 $x_{k+1} = \sqrt[3]{1 + x_k^2}$

试分析对应的三种迭代格式在 $x = 1.5$ 附近的收敛性, 并选择一种收敛的迭代格式计算出1.5附近的这个实数根, 要求绝对误差不超过 10^{-4} 。

2. 对非零实数 α , 利用牛顿迭代法设计一个不用除法运算的算法来计算 α 的倒数。用该算法计算 $\alpha = 0.324$, 要求绝对误差不超过 10^{-4} 。

3. 考虑一元方程 $f(x) = x^2 - 2 = 0$

(1) 取初值 $x_0 = 1$, 若用牛顿法求解, x_1 为多少?

(2) 取初值 $x_0 = 1, x_1 = 2$, 若用割线法求解, x_2 为多少?

4. 已知列向量 $v = \begin{bmatrix} \frac{3}{\sqrt{50}} & \frac{4}{\sqrt{50}} & \frac{5}{\sqrt{50}} \end{bmatrix}'$, 求与之对应的Household变换矩阵。

5. 确定Household变换以消去向量 $[1 \ 1 \ 1 \ 1]'$ 中除了第一个元素以外的其他元素, 写出消去的过程以及结果。

6. 确定一个Household变换矩阵 $H = I - 2 \frac{vv'}{v'v}$, 使得用 H 左乘列向量 $[1 \ 2 \ 3 \ 4 \ 5]'$ 后的结果为 $[1 \ 2 \ \delta \ 0 \ 0]'$, 求 v 和 δ 。

7. 给定四个数据点 $(1, 11), (2, 29), (3, 65), (4, 125)$ ，确定相应的插值多项式：
(1) 用单项式基底 (2) 用拉格朗日基底 (3) 用牛顿基底
8. 确定下列函数的临界点，说明它们是极小值，极大值还是鞍点？确定下列函数在 R 或者 R^2 上是否存在全局最小值或者全局最大值：
(1) $f(x) = x^3 + 6x^2 - 15x + 2$
(2) $f(x) = x^2 e^x$
(3) $f(x, y) = 2x^3 - 3x^2 - 6xy(x - y - 1)$
9. 确定下列约束优化问题的拉格朗日函数临界点，并确定它们是否是问题的约束最小值或者最大值：
(1) $f(x, y) = x^2 + y^2$ s.t. $g(x, y) = x + y - 1 = 0$
(2) $f(x, y) = x^2 + y^2$ s.t. $g(x, y) = xy^2 - 1 = 0$