电平信道（一）作业参考答案

总体：作业中有“查 Q 函数表至小数点后 2 位”表述，本意为计算 $Q(x)$ 时，先根据 x 的精确大小在 Q 函数表中找到对应区间，线性插值，再对插值结果取三位有效数字；但该表述容易引起误解，如果先对 x 取两位小数（精确到 0.05），再在 Q 函数表中查找，也可得分。

1.

(1) $P_b = P_s = Q\left(\frac{1}{\sigma}\right) = Q\left(\frac{1}{\sqrt{0.1}}\right)$

查 Q 函数表，用 $Q(3.15) = 8.1635 \times 10^{-4}$ 和 $Q(3.20) = 6.8714 \times 10^{-4}$ 插值得到误比特率

$P_b \approx 7.85 \times 10^{-4}$

(2) $P_{b,(3,1)} = P_s^3 + 3P_s^2(1-P_s) \approx 1.8 \times 10^{-6}$

$E_{b,(3,1)} = 3E_s = 3$

(3) $P_{out,(7,4)} = 1 - (1-P_s)^7 - 7P_s(1-P_s)^6 \approx 1.3 \times 10^{-5}$

$E_{b,(7,4)} = 7/4 = 1.75$

2.

(1) $P_s = \frac{3}{2}Q\left(\frac{1}{\sigma}\right) = \frac{3}{2}Q\left(\frac{1}{\sqrt{0.1}}\right) \approx 1.18 \times 10^{-3}$

(2) y 的概率密度函数 $\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\exp(-\frac{(y-x')^2}{2\sigma^2})$，其中 $x' \in \{\pm\arctan(3), \pm\frac{\pi}{4}\}$

故采用（相对 x' 的）最小距离准则，判决门限为 $-\frac{\pi}{8} - \frac{1}{2}\arctan(3), 0, \frac{\pi}{8} + \frac{1}{2}\arctan(3)$

（$\frac{\pi}{8} + \frac{1}{2}\arctan(3) = 1.0172$）

根据对称性，错误概率

$$P_e = \frac{1}{2}\left(Q\left(\frac{d_1}{\sigma}\right) + Q\left(\frac{d_2}{\sigma}\right)\right) + \frac{1}{2}Q\left(\frac{d_2}{\sigma}\right) = Q(d_2\sqrt{10}) + \frac{1}{2}Q(d_1\sqrt{10})$$

其中 $d_1 = \frac{\pi}{4}, d_2 = \arctan(3) - \frac{\pi}{8} - \frac{1}{2}\arctan(3) = \frac{1}{2}\arctan(3) - \frac{\pi}{8}$

查表 $Q(2.45) = 7.1428 \times 10^{-3}, Q(2.50) = 6.2097 \times 10^{-3}, Q(0.70) = 0.24196, Q(0.75) = 0.22663$

插值得到 $P_e \approx 0.235$

(3) 该小问容易引起误解，以下两种理解方式任何一种答对均给分

理解一：信道采用第二问所描述的非线性信道

可以优化符号集合以最小化 P_e。

给定符号集合（对应唯一的 x' 的取值集合），最优判决为相对 x' 的最小距离准则。设符号集合对应的 x' 的取值包括 $a<b<c<d$（也可设为 $\pm a,\pm b$，下面从更一般化的假设出发证明最优设计满足这种对称性）

保持 E_s 不变，则有能量约束 $\tan^2 a+\tan^2 b+\tan^2 c+\tan^2 d=20$

令 $d_1=(b-a)/2, d_2=(c-b)/2, d_3=(d-c)/2$，则

$$P_e=\frac{1}{2}Q\left(\frac{d_1}{\sigma}\right)+\frac{1}{2}Q\left(\frac{d_2}{\sigma}\right)+\frac{1}{2}Q\left(\frac{d_3}{\sigma}\right)$$

采用 Lagrange 乘子法

$$L(a,b,c,d,\lambda)=\frac{1}{2}Q\left(\frac{d_1}{\sigma}\right)+\frac{1}{2}Q\left(\frac{d_2}{\sigma}\right)+\frac{1}{2}Q\left(\frac{d_3}{\sigma}\right)+\lambda(\tan^2 a+\tan^2 b+\tan^2 c+\tan^2 d-20)$$

令

$$\frac{\partial L}{\partial a}=\frac{1}{4\sigma}f(\frac{d_1}{\sigma})+2\lambda\frac{\tan a}{\cos^2 a}=0$$
$$\frac{\partial L}{\partial b}=-\frac{1}{4\sigma}f(\frac{d_1}{\sigma})+\frac{1}{4\sigma}f(\frac{d_2}{\sigma})+2\lambda\frac{\tan b}{\cos^2 b}=0$$
$$\frac{\partial L}{\partial c}=-\frac{1}{4\sigma}f(\frac{d_2}{\sigma})+\frac{1}{4\sigma}f(\frac{d_3}{\sigma})+2\lambda\frac{\tan c}{\cos^2 c}=0$$
$$\frac{\partial L}{\partial d}=-\frac{1}{4\sigma}f(\frac{d_3}{\sigma})+2\lambda\frac{\tan d}{\cos^2 d}=0$$

其中 $f(t)=\exp(-t^2/2)/\sqrt{2\pi}$

联立能量约束，（利用计算机）解得 $d=-a=1.2496, c=-b=0.7775$

从而 $d_1=d_3=0.236, d_2=0.7775$

于是最优符号集合为 $\{\pm\tan c,\pm\tan d\}=\{\pm 0.9844,\pm 3.0052\}$

理解二：信道仍为加性高斯噪声电平信道

同样可以优化符号集合以最小化 P_e，且可以假设最优符号集合为 $\{\pm a,\pm b\}, 0<a<b$（最优集合满足这种对称性，证明类似理解一）

能量约束 $a^2+b^2=10$

最小化 $P_e=\frac{1}{2}Q(a\sqrt{10})+Q\left(\frac{\sqrt{10}}{2}(b-a)\right)$

类似地，可用计算机解得最优解 $a=0.9830, b=3.0056$

最优符号集合为 $\{\pm 0.9830,\pm 3.0056\}$

（不管哪种理解，将原符号经过一定映射，放大了 E_s 则不得分；

即使不是最优，只要方案比原方案有提升即可；

除了优化符号集合，其他方法，不违反题干要求、言之有理即可）

电平信道（二）作业参考答案

1.

(1) I 路判决门限 $\pm 2A, 0$，Q 路判决门限 0

$$E_s = A^2 + \tfrac{1}{2}(A^2 + 9A^2) = 6A^2$$

$$\begin{aligned}P_e &= 1 - (1 - Q(\frac{A}{\sigma}))(1 - \frac{3}{2}Q(\frac{A}{\sigma})) \\ &= 1 - (1 - Q(\sqrt{\frac{E_s}{6\sigma^2}}))(1 - \frac{3}{2}Q(\sqrt{\frac{E_s}{6\sigma^2}})) \\ &= \frac{5}{2}Q(\sqrt{\frac{E_s}{6\sigma^2}}) - \frac{3}{2}Q^2(\sqrt{\frac{E_s}{6\sigma^2}})\end{aligned}$$

Q 函数的平方项忽略也给分，下同

$$P_b \geq \frac{1}{3}P_e = \frac{5}{6}Q(\sqrt{\frac{E_s}{6\sigma^2}}) - \frac{1}{2}Q^2(\sqrt{\frac{E_s}{6\sigma^2}})$$

(2) I 路判决门限 $\pm A, 3A$，Q 路判决门限 0

$$E_s = A^2 + \tfrac{1}{4}(4A^2 + 4A^2 + 16A^2) = 7A^2$$

$$\begin{aligned}P_e &= 1 - (1 - Q(\frac{A}{\sigma}))(1 - \frac{3}{2}Q(\frac{A}{\sigma})) \\ &= \frac{5}{2}Q(\sqrt{\frac{E_s}{7\sigma^2}}) - \frac{3}{2}Q^2(\sqrt{\frac{E_s}{7\sigma^2}})\end{aligned}$$

$$P_b \geq \frac{1}{3}P_e = \frac{5}{6}Q(\sqrt{\frac{E_s}{7\sigma^2}}) - \frac{1}{2}Q^2(\sqrt{\frac{E_s}{7\sigma^2}})$$

(3) 判决门限 $y_I + y_Q = -A, y_I + y_Q = A, y_I + y_Q = 3A, y_I - y_Q = -A$

$$E_s = \tfrac{1}{8}(2A^2 \cdot 3 + 4A^2 \cdot 2 + 8A^2 + 10A^2) = 4A^2$$

$$\begin{aligned}P_e &= 1 - (1 - Q(\frac{A}{\sigma\sqrt{2}}))(1 - \frac{3}{2}Q(\frac{A}{\sigma\sqrt{2}})) \\ &= \frac{5}{2}Q(\sqrt{\frac{E_s}{8\sigma^2}}) - \frac{3}{2}Q^2(\sqrt{\frac{E_s}{8\sigma^2}})\end{aligned}$$

$$P_b \geq \frac{1}{3}P_e = \frac{5}{6}Q(\sqrt{\frac{E_s}{8\sigma^2}}) - \frac{1}{2}Q^2(\sqrt{\frac{E_s}{8\sigma^2}})$$

2.

(1) 误符号率

$$(2 - \frac{2}{8})Q(\sqrt{\sin^2\frac{\pi}{8}\frac{1}{0.1}}) < P_s < 2Q(\sqrt{\sin^2\frac{\pi}{8}\frac{1}{0.1}})$$

即 $0.198 < P_s < 0.226$

（给出上界即可得分）

对误比特率，考虑格雷映射的情况，则有

$P_b \approx \frac{1}{3}P_s \in (0.066, 0.0754)$

(2) 仿照课件中推导

$P_e = \Pr(y \in D_1) + \Pr(y \in D_2) - \Pr(y \in D_1 \cap D_2)$

其中

$\Pr(y \in D_1) = Q(\sqrt{\sin^2(\frac{\pi}{8} + \delta)\frac{1}{\sigma^2}})$

$\Pr(y \in D_2) = Q(\sqrt{\sin^2(\frac{\pi}{8} - \delta)\frac{1}{\sigma^2}})$

$\Pr(y \in D_1 \cap D_2) < \frac{1}{4}\min\{\Pr(y \in D_1), \Pr(y \in D_2)\} = \frac{1}{4}Q(\sqrt{\sin^2(\frac{\pi}{8} + \delta)\frac{1}{\sigma^2}})$

因此，误符号率上界

$P_e < Q(\sqrt{\sin^2(\frac{\pi}{8} + \frac{\pi}{100})\frac{1}{0.1}}) + Q(\sqrt{\sin^2(\frac{\pi}{8} - \frac{\pi}{100})\frac{1}{0.1}}) \approx 0.228$

下界

$P_e > \frac{3}{4}Q(\sqrt{\sin^2(\frac{\pi}{8} + \frac{\pi}{100})\frac{1}{0.1}}) + Q(\sqrt{\sin^2(\frac{\pi}{8} - \frac{\pi}{100})\frac{1}{0.1}}) \approx 0.204$

(另两种更松的下界也给分:

$\Pr(y \in D_1 \cap D_2) < \frac{1}{7}P_e < \frac{1}{7}(\Pr(y \in D_1) + \Pr(y \in D_2))$

因此

$P_e > \frac{6}{7}(Q(\sqrt{\sin^2(\frac{\pi}{8} + \frac{\pi}{100})\frac{1}{0.1}}) + Q(\sqrt{\sin^2(\frac{\pi}{8} - \frac{\pi}{100})\frac{1}{0.1}})) \approx 0.196$

或

$\Pr(y \in D_1 \cap D_2) < \frac{1}{8}(\Pr(y \in D_1) + \Pr(y \in D_2))$ 因此

$P_e > \frac{7}{8}(Q(\sqrt{\sin^2(\frac{\pi}{8} + \frac{\pi}{100})\frac{1}{0.1}}) + Q(\sqrt{\sin^2(\frac{\pi}{8} - \frac{\pi}{100})\frac{1}{0.1}})) \approx 0.200$)