1. 设四维随机变量 $\mathbf{X}=(X_1,X_2,X_3,X_4)\sim N(\mu,C)$, 其中 $\mu=(2,1,1,0)$,$C=\begin{bmatrix}4&3&2&1\\3&4&3&2\\2&3&4&3\\1&2&3&4\end{bmatrix}$,

   试求 $\mathbf{Y}=(2X_1,X_1+2X_2,2X_3+X_4)$ 的分布。

   参考答案:

   利用结论：设 n 维随机变量 $\mathbf{X}$ 服从 n 维高斯分布 $N(\mu,C)$，而 $\mathbf{B}$ 为任意一个 $n\times m$ 矩阵，则 $\mathbf{Y}=\mathbf{XB}$ 服从 m 维高斯分布 $N\left(\mu B,B^TCB\right)$。

   由于 $\mathbf{Y}=(2X_1,X_1+2X_2,2X_3+X_4)=(X_1,X_2,X_3,X_4)\begin{pmatrix}2&1&0\\0&2&0\\0&0&2\\0&0&1\end{pmatrix}=\mathbf{XB}$,

   所以 $\mu\mathbf{B}=(2,1,1,0)\begin{pmatrix}2&1&0\\0&2&0\\0&0&2\\0&0&1\end{pmatrix}=(4,4,2)$,

   以及 $\mathbf{B}^T\mathbf{CB}=\begin{pmatrix}2&0&0&0\\1&2&0&0\\0&0&2&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4&3&2&1\\3&4&3&2\\2&3&4&3\\1&2&3&4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&1&0\\0&2&0\\0&0&2\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}16&20&10\\20&32&21\\10&21&32\end{pmatrix}$,

   所以由上述结论可知 $\mathbf{Y}\sim N\left((4,4,2),\begin{pmatrix}16&20&10\\20&32&21\\10&21&32\end{pmatrix}\right)$。

2. 设 X 和 Y 是相互统计独立的 Gauss 随机变量，均服从 $N(0,\sigma^2)$, 设 $Z=|X-Y|$, 求 $E(Z)$ 和 $E(Z^2)$。

   参考答案:

$$E(Z)=E|X-Y|=2\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{x}(x-y)f(x)f(y)\,dxdy=$$

$$2\int_0^{\infty}\int_{-\frac{3\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\rho\,(cos\theta-sin\theta)\frac{1}{2\pi\sigma^2}e^{-\frac{\rho^2}{2\sigma^2}}\rho d\theta d\rho$$

$$=2\int_0^{\infty}\frac{1}{2\pi\sigma^2}e^{-\frac{\rho^2}{2\sigma^2}}\rho^2d\rho2\sqrt{2}=\frac{2\sigma}{\sqrt{\pi}}$$

$$E(Z^2)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}(x-y)^2f(x)f(y)dxdy=2\sigma^2$$

3. n 维正态分布随机矢量 $\xi^T=(\xi_1,\xi_2,...,\xi_n)$，分量的均值 $E(\xi_i)=i,i=1,2,3,...,n$。分量间的协方差为 $b_{m,i}=n-|m-i|,m,i=1,2,3,...,n$。设有随机变量 $\eta=\sum_{i=1}^{n}\xi_i$，求 η 的特征函数。

参考答案:

计算随机变量 $\eta = \sum_{i=1}^{n} \xi_i$ 的均值和方差：

$$E\{\eta\} = E\left\{\sum_{i=1}^{n} \xi_i\right\} = \sum_{i=1}^{n} E\{\xi_i\} = \frac{n(n+1)}{2} = \mu$$

$$Var\{\eta\} = E\left\{(\eta-\mu)^2\right\} = E\left\{\sum_{i=1}^{n}(\xi_i - \mu_{\xi_i})\sum_{j=1}^{n}(\xi_j - \mu_{\xi_j})\right\}$$

$$= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} E\left\{(\xi_i - \mu_{\xi_i})(\xi_j - \mu_{\xi_j})\right\} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(b - |m-i|)$$

$$= n^2 + 2\sum_{i=1}^{n-1} i^2 = n^2 + \frac{(n-1)n(2n-1)}{3} = \frac{2n^3+n}{3} = \sigma^2$$

可得 η 的特征函数为：

$$\phi_\eta(t) = exp\left\{jt^T\mu - \frac{1}{2}\sigma^2 t^2\right\}$$

4. 设 ξ_1, ξ_2 为相互独立、均值为 0、方差为 1 的正态分布随机变量。定义二维随机矢量 $\eta^T = (\eta_1, \eta_2) = \begin{cases} (\xi_1, |\xi_2|), & \xi_1 \geqslant 0 \\ (\xi_1, -|\xi_2|), & \xi_1 < 0 \end{cases}$，试证：

(1) η_1 和 η_2 都是正态分布的

(2) $\eta^T = (\eta_1, \eta_2)$ 不是二维正态分布

参考答案:

（1）首先有 $\eta_1 = \xi_1$，因此 η_1 是正态分布随机变量。

η_2 的分布是由 ξ_1 决定的：

$$\eta_2 = \begin{cases} \xi_2, & \xi_1\xi_2 \geqslant 0 \\ -\xi_2, & \xi_1\xi_2 < 0 \end{cases}$$

因此 η_2 的概率分布为：

$$f(y_2) = \frac{1}{2}f(y_2|y_1 \geqslant 0) + \frac{1}{2}f(y_2|y_1 < 0)$$

,

其中：

$$f(y_2|y_1 \geqslant 0) = \begin{cases} \sqrt{\frac{2}{\pi\sigma^2}}exp(-\frac{y_2^2}{2\sigma^2}), & y_2 \geqslant 0 \\ 0, & y_2 < 0 \end{cases}$$

$$f(y_2|y_1 < 0) = \begin{cases} \sqrt{\frac{2}{\pi\sigma^2}}exp(-\frac{y_2^2}{2\sigma^2}), & y_2 \leqslant 0 \\ 0, & y_2 > 0 \end{cases}$$

因此 η_2 也服从正态分布。

（2）首先计算 $E(\eta_1\eta_2)$

$$E(\eta_1\eta 2)=\frac{1}{2}\xi_1|\xi_2|+\frac{1}{2}\xi_1-|\xi_2|=0$$

因此有

$$Cov(\eta_1,\eta_2)=E(\eta_1\eta_2)-E(\eta_1)E(\eta_2)=0$$

因此 η_1 和 η_2 不相关，按照定义可知，η_1 和 η_2 不相互独立，因此 $\eta^T=(\eta_1,\eta_2)$ 不是二维正态分布。

5. 设 $\{X_k,k=1,\cdots,2n\}$ 为独立同分布的 Gauss 随机变量，均服从 $N(0,\sigma^2)$，若

$$Z=\frac{\sqrt{\pi}}{2n}\sum_{k=1}^{n}|X_{2k}-X_{2k-1}|$$

求 $E(Z)$ 和 $E(Z^2)$。

参考答案:

类似于第 2 题结论可得:$E\left(|X_{2k}-X_{2k-1}|\right)=\frac{2\sigma}{\sqrt{\pi}}$,则 $E\left(Z\right)=\frac{\sqrt{\pi}}{2n}\sum_{k=1}^{n}E\left(|X_{2k}-X_{2k-1}|\right)=\sigma$

$$\begin{aligned}E\left(Z^2\right)=&\frac{\pi}{4n^2}E\left(\left(\sum_{k=1}^{n}|X_{2k}-X_{2k-1}|\right)^2\right)\\=&\frac{\pi}{4n^2}\sum_{k=1}^{n}E\left(|X_{2k}-X_{2k-1}|^2\right)+\frac{\pi}{4n^2}\\&\cdot 2\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1,i\neq j}^{n}E\left(|X_{2i}-X_{2i-1}|\cdot|X_{2j}-X_{2j-1}|\right)\\=&\frac{\pi}{2n}\sigma^2+\frac{n-1}{n}\sigma^2\end{aligned}$$

6. X,Y 服从二元高斯分布，

$$(X,Y)\sim N\left(0,\begin{bmatrix}1&r\\r&1\end{bmatrix}\right)$$

若 $Z=X-rY$，证明 Y 和 Z 独立, 并写出 Y,Z 的联合分布 $f_{YZ}(y,z)$。

参考答案:

(Y,Z) 是 (X,Y) 的线性变换，故服从二元高斯分布，且

$$E[ZY]=E[(X-rY)Y]=E[XY]-rE[Y^2]=r-r\cdot 1=0$$

即 Y,Z 不相关，因此 (Y,Z) 独立。Z 的均值和方差为:

$$E[Z]=E[X-rY]=E[X]-rE[Y]=0$$

$$Var[X]=Var[Z+rY]=Var[Z]+r^2Var[Y]$$

$$Var[Z] = 1 - r^2$$

故

$$(Y,Z) \sim N\left(0, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1-r^2 \end{bmatrix}\right)$$

$$f_{YZ}(y,z) = \frac{1}{2\pi\sqrt{1-r^2}} \exp\left\{-\frac{1}{2}\left(y^2 + \frac{z^2}{1-r^2}\right)\right\}$$

7. 设 X, Y 相互独立，均服从标准正态分布，求：
(1)$E[(X-3Y)^3|(2X+Y=3)]$
(2)$E[(X-3Y)^2(2X+Y)]$
参考答案:
(1) 令 $U = X - 3Y, V = 2X + Y$，则 $\begin{bmatrix} U \\ V \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix}$，所以我们有：

$$\begin{bmatrix} U \\ V \end{bmatrix} \sim N(\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 10 & -1 \\ -1 & 5 \end{bmatrix})$$

根据高斯分布的条件分布，可得：

$$E[U|V=v] = -v/5$$
$$Var[U|V=v] = 49/5$$

因此，$U|V = 3 \sim N(-\frac{3}{5}, \frac{49}{5})$，写出其特征函数 $\phi_{U|V=3}(\omega) = e^{-\frac{3}{5}j\omega - \frac{49}{10}\omega^2}$。

$$E[(X-3Y)^3|(2X+Y=3)] = \tfrac{1}{j^3}\tfrac{\partial^3\phi}{\partial\omega^3}|_{\omega=0} = -\tfrac{2232}{125}$$

(2) 令 $U = X - 3Y, V = 2X + Y, A = \begin{bmatrix} U \\ V \end{bmatrix}$，则 $\begin{bmatrix} U \\ V \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix}$，所以我们有：

$$A = \begin{bmatrix} U \\ V \end{bmatrix} \sim N(\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 10 & -1 \\ -1 & 5 \end{bmatrix})$$

因此，写出 A 的特征函数 $\phi_A(\omega) = e^{-5\omega_1^2 + \omega_1\omega_2 - \frac{5}{2}\omega_2^2}$。

$$E[(X-3Y)^2(2X+Y)] = \tfrac{1}{j^3}\tfrac{\partial^3\phi}{\partial\omega_1^2\partial\omega_2}|_{\omega_1,\omega_2=0} = 0$$

8. 设 X, Y 为独立高斯 $N(0, \sigma^2)$ 随机变量，对随机过程 $X(t)$ 求随机变量 X_1, X_2 的数学期望。其中，$X(t) = Xt + Y$，$X_1 = \max\limits_{0 \leqslant t \leqslant 1} X(t)$, $X_2 = \int_0^1 X^2(t)dt$。
参考答案:
对于 X_1：

当 $X>0$ 时，$X_1=X+Y$；当 $X<0$ 时，$X_1=Y$。

$$
\begin{aligned}
E[X_1|X<0] &= 0 \\
E[X_1|X>0] &= \int_0^\infty x\frac{2}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}dx \\
&= -\int_0^\infty \frac{\sigma^2}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}de^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} \\
&= -\frac{\sigma^2}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}|_0^\infty \\
&= \frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}}
\end{aligned}
$$

对于 X_2：

$$
\begin{aligned}
E[X_2] &= \int_0^1 E[X^2t^2+2XYt+Y^2]dt \\
&= \int_0^1 \sigma^2(t^2+1)dt \\
&= \frac{4\sigma^2}{3}
\end{aligned}
$$

9. 设 $X(t)$ 是均值为零的平稳高斯过程, 用 $Y(t)=X^2(t)$ 定义一个新的随机这程, 求证:

$$R_Y(\tau)=R_X^2(0)+2R_X^2(\tau)$$

(提示：利用特征函数来计算随机变量的矩，可证明若 $X=(X_1,X_2,X_3,X_4)^{\mathrm{T}}$ 服从联合 Gauss 分布, 且各分量的均值均为 0 , 则有 $E(X_1X_2X_3X_4)=E(X_1X_2)E(X_3X_4)+E(X_1X_3)E(X_2X_4)+E(X_1X_4)E(X_2X_3)$)

参考答案:
参照《随机过程及其应用》（第二版）Page 45，高阶矩-定理 3.2 的证明，可得：
若 $X=(X_1,X_2,X_3,X_4)^{\mathrm{T}}$ 服从联合 Gauss 分布, 且各分量的均值均为 0 , 则有

$$E(X_1X_2X_3X_4)=E(X_1X_2)E(X_3X_4)+E(X_1X_3)E(X_2X_4)+E(X_1X_4)E(X_2X_3)$$

因此：

$$
\begin{aligned}
&E(Y(t)Y(t+\tau))=E(X(t)X(t)X(t+\tau)X(t+\tau)) \\
&=E(X(t)X(t))E(X(t+\tau)X(t+\tau))+E(X(t)X(t+\tau))E(X(t)X(t+\tau)) \\
&+E(X(t)X(t+\tau))E(X(t)X(t+\tau)) \\
&=R_X^2(0)+2R_X^2(\tau)
\end{aligned}
$$

10. 设 $X(t)$ 为平稳高斯过程, 其均值为零, 自相关函数 $R(\tau)=e^{-|\tau|}$, 求随机变量 Y

$$Y=\int_0^1 X(t)dt$$

的概率密度函数 $p_Y(y)$ 。

参考答案:

因为 $X(t)$ 为高斯过程, 所以 Y 为高斯随机变量, 欲求 $p_Y(y)$, 只需求前二阶矩。

现在先计算随机变量 Y 的前二阶矩。

$$E(Y)=E\left\{\int_0^1 X(t)dt\right\}=\int_0^1 E\{X(t)\}dt=0$$

$$\begin{aligned}E\left(Y^2\right)&=E\left\{\int_0^1 X(t)dt\int_0^1 X(\tau)d\tau\right\}\\&=\int_0^1\int_0^1 E\{X(t)X(\tau)\}dtd\tau\\&=\int_0^1\int_0^1 e^{-1t-\tau 1}dtd\tau\\&=\int_0^1\left[\int_0^t e^{-(t-\tau)}d\tau+\int_t^1 e^{t-\tau}d\tau\right]dt\\&=2e^{-1}\end{aligned}$$

于是可得

$$p_Y(y)=\frac{1}{\sqrt{4\pi e^{-1}}}\exp\left\{-\frac{y^2}{4e^{-1}}\right\}$$

11. 设 $X(t)$ 为一平稳高斯过程, $X(t)\sim N(0,1)$, 试求一无记忆系统 $g(x)$, 使它的输出 $Y(t)=g(X(t))$ 服从 (a,b) 上的均匀分布.

参考答案:

$X(t)$ 和 $Y(t)$ 的概率密度函数为:

$$f_X(x,t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$$

$$f_Y(y,t)=\frac{1}{b-a}$$

令 $\int_{-\infty}^x f_X(x,t)dx=\int_a^y f_Y(y,t)dy$. 则

$$y=a+(b-a)\Phi(x)$$

其中 $\Phi(x)=\int_{-\infty}^x\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{t^2}{2}}dt$. 为正态分布函数。因此 $g(x)=a+(b-a)\Phi(x)$.

12. 设 $X(t)=A\cos\omega_0 t+B\sin\omega_0 t(-\infty<t<+\infty)$. 其中 A 和 B 是相互独立都服从 $N\left(0,\sigma^2\right)$ 的随机变量.
(1) 证明 $\{X(t),-\infty<t<+\infty\}$ 为高斯过程
(2) 写出 $X(t)$ 的概率密度函数和特征函数

参考答案:

(1) 设 $\left(X\left(t_1\right), X\left(t_2\right), \cdots, X\left(t_n\right)\right)$ 为随机过程 $\{X(t),-\infty<t<+\infty\}$ 的一个 n 维分布. 其非零线性组合

$$\begin{aligned}\lambda_1 X\left(t_1\right)+\lambda_2 X\left(t_2\right)+\cdots+\lambda_n X\left(t_n\right)= & \left(\lambda_1 \cos \omega_0 t_1+\lambda_2 \cos \omega_0 t_2+\cdots+\lambda_n \cos \omega_0 t_n\right) A \\ & +\left(\lambda_1 \sin \omega_0 t_1+\lambda_2 \sin \omega_0 t_2+\cdots+\lambda_n \sin \omega_0 t_n\right) B\end{aligned}$$

为高斯分布 A 和 B 的线性组合, 故为高斯分布. 所以 $\left(X\left(t_1\right), X\left(t_2\right), \cdots, X\left(t_n\right)\right)$ 为 n 维高斯分布, $\{X(t),-\infty<t<+\infty\}$ 为高斯过程.

(2) 易证 $E(X(t))=0, D(X(t))=\sigma^2$, 所以

$$X(t) \sim N\left(0, \sigma^2\right)$$

概率密度函数和特征函数分别为

$$\begin{aligned}& f(t, x)=\frac{1}{\sqrt{2 \pi} \sigma} \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2 \sigma^2}}, \quad x \in \mathbb{R} \\ & \varphi(t, u)=\mathrm{e}^{-\frac{1}{2} u^2 \sigma^2}\end{aligned}$$