《高等微积分 2》第七八周作业

本次作业请在第九周星期五 (4 月 17 日)24 : 00 点之前在网络学堂提交.

1 设 $f, g \in C^1(\mathbf{R}^2, \mathbf{R})$, 令 $D = \{(x, y) | g(x, y) \geq 0\}$. 设 $g(x_0, y_0) = 0$ 且 $g_x(x_0, y_0), g_y(x_0, y_0)$ 不全为零, 且对任何 $(x, y) \in D$ 有 $f(x_0, y_0) \leq f(x, y)$. 证明: 存在非负实数 λ, 使得

$$\begin{cases} f_x(x_0, y_0) - \lambda g_x(x_0, y_0) = 0, \\ f_y(x_0, y_0) - \lambda g_y(x_0, y_0) = 0. \end{cases}$$

2 给定 $0 < a < b, 0 < c < d$, 设四条曲线 $xy = a$, $xy = b$, $y = cx$ 以及 $y = dx$ 在第一象限内围成的平面区域为 D. 计算 D 的面积.

3 设四条曲线 $x^2 - y^2 = 1, x^2 - y^2 = 4, \frac{x^2}{4} + y^2 = 1$ 以及 $\frac{x^2}{4} + y^2 = 4$ 在第一象限内围成的平面区域为 D. 计算积分

$$\iint_D \frac{xy}{x^2 - y^2} dxdy.$$

4 给定 $a, b, c > 0$, 令

$$V = \{(x, y, z) | \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leq 1, z \geq 0\}.$$

计算三重积分

$$\iiint_V z dxdydz.$$

5 考虑三维区域

$$V = \{(x, y, z) | x^2 + y^2 + z^2 + xy + yz + zx \leq 1\}.$$

计算 V 的体积.(提示: 把 V 的定义式配方, 然后适当换元)

6 设 f 在矩形区域 $[a,b]\times[c,d]$ 上连续, 且有连续的偏导函数 $\frac{\partial f}{\partial x}$.

(1) 证明: 对任何 $x_0\in[a,b]$, 有

$$\int_c^d f(x_0,y)dy=\int_c^d f(a,y)dy+\int_a^{x_0}dx\int_c^d\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}dy.$$

(2) 对每个 $x\in[a,b]$, 定义函数 $g(x)=\int_c^d f(x,y)dy$. 证明: $g'(x)=\int_c^d\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}dy$.