# 《高等微积分 2》第十二周作业

本次作业请在第十三周星期五 (5 月 15 日)24 : 00 点之前在网络学堂提交.

1 设 $C \subset \mathbf{R}^2$ 是光滑的闭曲线, 取逆时针方向 (定向). 假设 $(0,0) \notin C$, 计算第二型曲线积分

$$\oint_C \frac{-(x^2y+y^3)dx+(x^3+xy^2)dy}{(x^2+y^2)^2}.$$

2 设 $S=\{(x,y,z)\in \mathbf{R}^3 | x^2+y^2+z^2=1\}$ 是单位球面, 取指向外面的定向. 对给定的非负整数 $k$, 计算第二型曲面积分

$$\iint_S z^k(xdydz+ydzdx+zdxdy) \text{ 或等价的 } \iint_S z^k(xdy\wedge dz+ydz\wedge dx+zdx\wedge dy)$$

3 设 $S$ 为曲面

$$(x-1)^2+y^2+z^2=2,$$

取指向外面的定向. 计算第二型曲面积分

$$\iint_S \frac{xdydz+ydzdx+zdxdy}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}.$$

4 设 $S\subseteq \mathbf{R}^3$ 是 $C^1$ 光滑的闭曲面, 取指向外面的定向 (或用课本上的术语, $S$ 是它所围成区域的外侧面), $(0,0,0)\notin S$. 计算第二型曲面积分

$$\iint_S \frac{xdydz+ydzdx+zdxdy}{(a^2x^2+b^2y^2+c^2z^2)^{3/2}},$$

其中 $a,b,c$ 是给定的正数.

5 设 $S\subset \mathbf{R}^3$ 是封闭的光滑曲面, $V$ 是由 $S$ 围成的三维有界闭区域 (称之为 $S$ 的内部). 设 $f(x,y,z),P(x,y,z),Q(x,y,z),R(x,y,z)$ 都是 $V$ 上的 $C^1$ 光滑函数, 且 $P,Q,R$ 在 $S$ 上恒等于 0. 证明:

$$\iiint_V \left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)e^{f(x,y,z)}dxdydz=-\iiint_V \left(P\frac{\partial f}{\partial x}+Q\frac{\partial f}{\partial y}+R\frac{\partial f}{\partial z}\right)e^{f(x,y,z)}dxdydz.$$

6 对于函数 $f:\mathbf{R}^3\to\mathbf{R}$, 如果极限

$$\lim_{M\to\infty}\iiint_{x^2+y^2+z^2\le M^2} f(x,y,z)dxdydz$$

存在, 则把上述极限记作 $\iiint_{\mathbf{R}^3} f(x,y,z)dxdydz$, 称为 $f$ 在 $\mathbf{R}^3$ 上的无穷积分.

(1) 设 $P,Q:\mathbf{R}^3\to\mathbf{R}$ 是 $C^1$ 光滑函数. 证明: 对正数 $M$, 有

$$\iint_{\partial B} P(x,y,z)e^{Q(x,y,z)}dy\wedge dz=\iiint_B\left(\frac{\partial P}{\partial x}+P\frac{\partial Q}{\partial x}\right)e^{Q(x,y,z)}dV,$$

其中 $B=\{(x,y,z)|x^2+y^2+z^2\le M^2\}$, $\partial B$ 是 $B$ 的边界, 取指向外面的定向.

(2) 证明: 对于三元多项式 $P(x,y,z)$, 有

$$\iiint_{\mathbf{R}^3}\frac{\partial P}{\partial x}e^{-x^2-y^2-z^2}dxdydz=2\iiint_{\mathbf{R}^3} xP(x,y,z)e^{-x^2-y^2-z^2}dxdydz.$$