《高等微积分 2》第十周作业

本次作业请在第十二周星期五 (5 月 8 日)$24:00$ 点之前在网络学堂提交.

1 令 S 为单位球面

$$S = \{(x,y,z) | x^2 + y^2 + z^2 = 1\}.$$

设 $p : [0,1] \to S$ 是 C^1 光滑映射

$$p(t) = (x(t), y(t), z(t)), \quad \forall t \in [0,1].$$

假设 $p(0) = (0,0,-1)$, $p(1) = (0,0,1)$, 且对任何 $0 < t < 1$ 有 $-1 < z(t) < 1$.

(1) 证明: 对任何 $t \in [0,1]$, 有 $x(t)x'(t) + y(t)y'(t) + z(t)z'(t) = 0$.

(2) 证明: 对任何 $-1 < t < 1$, 有

$$x'(t)^2 + y'(t)^2 \geq \frac{z(t)^2}{x(t)^2 + y(t)^2} z'(t)^2.$$

(3) 定义 p 的弧长为

$$L = \int_0^1 \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2 + z'(t)^2} dt.$$

证明: $L \geq \pi$.

(即使不能证明, 也可以直接使用前面小问的结论)

2 给定正数 $c < \sqrt{2}$. 设曲面 $S = \{(x,y,z) | x^2 + y^2 + z^2 = 1, x + y \geq c\}$.

(1) 计算第一型曲面积分 $\iint_S x dS$, 其中 dS 表示面积微元.

(2) 计算第一型曲线积分 $\int_{\partial S} x dl$, 其中 ∂S 表示 S 的边界, dl 表示弧长微元.

3 设 $C=\{(x,y)|x^2+y^2=1\}$ 是平面上的单位圆周, 取逆时针定向 (方向).

(1) 计算第二型曲线积分

$$B(u)=\oint_C \frac{-ydx+xdy}{(x^2+y^2+u^2)^{3/2}}.$$

(2) 计算极限

$$\lim_{A\to+\infty}\int_{-A}^{A} B(u)du.$$

4 计算

$$\oint_L xydx+yzdy+zxdz,$$

其中 L 为曲线

$$\begin{cases} x^2+y^2+z^2=1 \\ x+y+z=1 \end{cases}$$

积分方向从 $(1,0,0)$ 沿着劣弧指向 $(0,1,0)$.

5 设 a,b,c 为给定的正数, S 为椭球面

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1,$$

取指向外面的定向. 对于正整数 n, 计算第二型曲面积分

$$I_n=\iint_S (x^n dydz+y^n dzdx+z^n dxdy).$$