# 《离散数学》第三次作业

1 (1) 假设一年共 366 天, 随机的取 $k$ 个人, 则其中存在两个人生日同月同日的概率 (记为 $P_k$) 是多少?

(2) 证明: 当 $2 \le k \le 366$ 时, 有

$$e^{-\frac{(k-1)k}{2(n-k+1)}} < 1 - P_k < e^{-\frac{(k-1)k}{2n}},$$

其中 $n = 366$.

(3) 已知 $P_k > \frac{1}{2}$, 求 $k$ 的最小值.

(提示: 参考教材 2.5 节; 可搜索网页计算二次方程的根)

2 设 $m$ 是正整数, $t$ 是整数且满足 $0 \le t \le m$. 证明: 对于正数 $C \ge 1$, 如下两个命题成立:

(1) 如果 $t \ge \sqrt{m \ln C} + \ln C$, 则有 $\frac{C_{2m}^{m}}{C_{2m}^{m-t}} \ge C$;

(2) 如果 $t \le \sqrt{m \ln C} - \ln C$, 则有 $\frac{C_{2m}^{m}}{C_{2m}^{m-t}} \le C$.

3 (1) 确定 Markov 不等式取等号的条件.

(2) 确定 Chebyshev 不等式取等号的条件.

4 设 $\Omega$ 是有限概率空间, $E_1, \ldots, E_n$ 是一族事件 (即它们都是 $\Omega$ 的子集). 设 $m$ 是给定的正整数, 定义

$$F = \{\omega \in \Omega | E_1, \ldots, E_n \text{中至少有} m \text{个} E_i \text{包含} \omega\},$$

称之为“事件 $E_1, \ldots, E_n$ 中至少 $m$ 个发生”的事件. 证明:

$$P(F) \le \frac{P(E_1) + \cdots + P(E_n)}{m}.$$

(提示: 对每个 $\omega \in \Omega$, 设 $E_1, \ldots, E_n$ 中恰有 $d(\omega)$ 个 $E_i$ 包含 $\omega$. 利用交换求和的方法证明

$$\sum_{i=1}^{n} P(E_i) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{\omega \in \Omega, \omega \in E_i} p_\omega = \sum_{\omega \in \Omega} d(\omega) p_\omega,$$

之后再模仿 Markov 不等式的证明方法即可.)

5 设 $X$ 是概率空间 $\Omega$ 上的非负随机变量, 记 $X$ 的期望为 $E[X] = \mu$. 定义随机变量 $Y$ 为

$$Y(\omega) = \begin{cases} X(\omega), & \text{如果} X(\omega) > \frac{\mu}{2}, \\ 0, & \text{如果} X(\omega) \le \frac{\mu}{2}. \end{cases}$$

(1) 证明: $E[Y] \ge \frac{1}{2} E[X]$.

(2) 设正数 $M$ 是 $X$ 的一个上界, 即满足对每个 $\omega \in \Omega$ 都有 $X(\omega) \le M$. 证明: $P(X > \frac{1}{2}\mu) \ge \frac{1}{2M} E[X]$.

(提示: 记 $A = \{\omega | X(\omega) > \frac{\mu}{2}\}$, $B = \Omega \backslash A$, 则有

$$E[X] = \sum_{\omega \in A} X(\omega) p_\omega + \sum_{\omega \in B} X(\omega) p_\omega \le E[Y] + \frac{\mu}{2} P(B) \le E[Y] + \frac{\mu}{2},$$

其中最后一步用到了 $\mu \ge 0$.)