作业 1. 设 a,b,c 是正整数, 满足 $a \mid bc$, 且 a 与 b 互素. 证明: $a \mid c$.

作业 2. 设 a,b 是不同的整数.

(1) 证明: 对任何整系数多项式 $f(x) = c_m x^m + c_{m-1}x^{m-1} + \cdots + c_0$, 有

$$a-b \mid f(a)-f(b).$$

(2) 证明: 对于正整数 n, 有

$$\left(a-b, \frac{a^n-b^n}{a-b}\right) = \left(a-b, nb^{n-1}\right).$$

(提示: 考虑分解式

$$a^k-b^k = (a-b)(a^{k-1}+a^{k-2}b+\cdots+ab^{k-2}+b^{k-1}).$$

(2) 计算 $\frac{a^n-b^n}{a-b}$ 除以 $a-b$ 的余数.)

作业 3. 设 $f(x) = a_n x^n + \cdots + a_0$ 是整系数多项式, 且 $a_n \neq 0$. 证明: 如果既约分数 $\frac{p}{q}$ 是 $f(x)=0$ 的根, 则有 $p \mid a_0$, $q \mid a_n$.

作业 4. 设 n 是正整数. 证明: 对素数 p, $n!$ 中 p 因子的个数为

$$v_p(n!) = \sum_{i=1}^{\infty}[\frac{n}{p^i}] = [\frac{n}{p}] + [\frac{n}{p^2}] + \cdots.$$

(提示: 把 $v_p(k)$ 表示成和式

$$v_p(k) = \max\{i \in \mathbf{Z}_{\geq 0} : p^i \mid k\} = \sum_{i \in \mathbf{Z}_+ \text{且} p^i \mid k} 1,$$

代入 $v_p(n!)$ 的计算式, 并交换求和顺序.)

作业 5. 给定正整数 n. 设所有不超过 n 的素数为 $p_1, p_2, \ldots, p_k$.

(1) 证明:

$$1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n} < \frac{p_1}{p_1-1}\cdot\frac{p_2}{p_2-1}\cdot\cdots\cdot\frac{p_k}{p_k-1}$$

(2) 证明:

$$\frac{1}{p_1-1}+\cdots+\frac{1}{p_k-1} > \ln(\ln(n+1)).$$

(3) 证明:

$$\frac{1}{p_1}+\cdots+\frac{1}{p_k} > \ln\ln n - 1.$$

(提示: (1) 利用算术基本定理先证明

$$1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}\leq(1+\frac{1}{p_1}+\cdots+\frac{1}{p_1^n})\cdot\cdots\cdot(1+\frac{1}{p_k}+\cdots+\frac{1}{p_k^n}).$$

(2), (3) 用到不等式 $\frac{1}{x}<\ln\frac{x}{x-1}<\frac{1}{x-1}$ 以及

$$\sum_{i=1}^{k}\frac{1}{p_i-1}-\sum_{i=1}^{k}\frac{1}{p_i}=\sum_{i=1}^{k}\frac{1}{(p_i-1)p_i}\leq\frac{1}{1\cdot 2}+\cdots+\frac{1}{k\cdot(k+1)}<1.$$

)