

1 线性映射的进一步练习

1. 给定一个 R^n 到自己的线性映射 f , 这个线性映射满足条件 $f^2 = I$, 这里 I 是单位映射。
 - (a) 求 f 可能的特征值。
 - (b) 定义 $W_+ = \{v \in R^n | f v = v\}$, $W_- = \{v \in R^n | f v = -v\}$. 证明: 任何向量都可以写成下面的形式 $v = v_+ + v_-$, 这里 $v_+ \in W_+$, $v_- \in W_-$.
2. 给定一个 R^n 到自己的线性映射 f , 这个线性映射满足条件 $f^2 = f$. 如果 f 对应的矩阵 A 的秩为 r . 那么 A 的对角线元素之和为多少?
3. 给定一个 R^n 到自己的线性映射 f , $Im(f) \cap ker(f) = \{0\}$ 的条件是什么?
4. 给定一个线性映射 $f: R^n \rightarrow R^m$. 我们之前定义了一个矩阵的 norm: $|A|_{norm} = \max_{x \neq 0} \frac{|Ax|}{|x|}$. 我们可以用矩阵的 norm 来定义一个线性映射的 norm. 在不同基的选取下线性映射有不同的矩阵, 求在什么样的基变换下这个 norm 是不变的。
5. 我们之前定义了一个矩阵的 norm: $|A|_{norm} = \max_{x \neq 0} \frac{|Ax|}{|x|}$, 这个 norm 等于 A 的最大的奇异值。假设 $|\lambda_1|$ 是 A 的绝对值最大的特征值, 证明: $\sigma_1 \geq |\lambda_1|$.
6. 一个 R^n 到 R^n 的线性映射 T 称之为幂零 (nilpotent) 的, 如果存在一个正整数 k 使得 $T^k = 0$, 这里 0 是指零映射。
 - (a) 证明一个线性映射 T 是幂零的当且仅当它所对应的特征多项式 $det(\lambda I - A) = \lambda^n$. 这里 A 是线性映射的表示矩阵。
 - (b) 证明: 如果 T 是幂零的, 那么 $T^n = 0$. 利用这个结果, 写下所有二乘二的幂零矩阵。
 - (c) 一个线性映射 T 叫做幂幺 (unipotent), 如果 $T - I$ 是幂零的。决定一个幂幺矩阵的特征多项式。并决定它的可能的特征值。
 - (d) 一个线性映射 T 叫做拟幂幺 (quasi-unipotent), 如果 $T^k - I$ 是幂零的, 这里 k 是一个正整数。决定它的可能的特征值的形式。
7. 我们之前证明了: 如果一个 $n \times n$ 的矩阵 A 有 n 个线性独立的特征向量, 那么我们可以用相似变换把 A 变成一个对角矩阵, 且对角元为矩阵 A 的特征值。对于一个一般的矩阵, 我们可以把它变成一个所谓的若当标准型。这周, 我们先研究一下广义特征向量。
 - (a) 我们有所谓的广义特征值方程 $(\lambda I - A)^n x = 0$, 这里 n 是任意一个正整数, x 是一个非 0 向量。
 - i. 上述广义特征值方程有解, 当且仅当 λ 是 A 的特征值。
 - ii. 取 A 的一个特征值 λ_1 . 固定一个 n , 那么 $(\lambda_1 I - A)^n x = 0$ 的解空间 (加上零向量) 构成一个线性子空间, 记这个子空间为 $N_n(\lambda_1)$. 证明: 1): $N_1(\lambda_1) \subset N_2(\lambda_1) \subset N_3(\lambda_1) \subset \dots$; 2): 存在一个 k , 使得 $N_{k-1}(\lambda_1) \subsetneq N_k(\lambda_1)$, 但是 $N_k(\lambda_1) = N_{k+1}(\lambda_1) = N_{k+2}(\lambda_1) = \dots$

- iii. 证明: $N_k(\lambda_1)$ 是 A 的不变子空间。(A 的不变子空间 V 指: 对任意的 $v \in V$, 我们有 Av 还是属于 V .)
- iv. 证明: $Im(\lambda_1 I - A)^k \cap Ker(\lambda_1 I - A)^k = 0$.
- v. 证明: $N_k(\lambda_1)$ 的维数等于 λ_1 的代数重数。

2 张量

1. 考虑一个三维的线性空间 $V = R^3$. 我们在 V 中取一组基 (e_1, e_2, e_3) . 考虑它的对偶空间 V^* , 这个对偶空间的基定义为 $e_i^*(e_j) = \delta_{ij}$.
 - (a) 写下 e_1^*, e_2^*, e_3^* 对应的矩阵。我们取 R 中的基为 1.
 - (b) 任何一个线性映射 $f: R^3 \rightarrow R$ 都可以写成 e_1^*, e_2^*, e_3^* 的线性组合 $f = f_1 e_1^* + f_2 e_2^* + f_3 e_3^*$. 写下 f 在 (e_1, e_2, e_3) 这组基下面的矩阵。
 - (c) R^3 中的一个向量可以写成 $\vec{x} = x^1 e_1 + x^2 e_2 + x^3 e_3$, 写下 $f(\vec{x})$ 的表达式。(用 f 在上面构造出的基的坐标。)
2. 考虑一个三维空间 R^3 . 选定一组标准的正交归一基 (e_1, e_2, e_3) , 那么 R^3 中一个向量的坐标为 (x^1, x^2, x^3) . 转动惯量定义为

$$M^{ij} = m(|x|^2 \delta^{ij} - x^i x^j) \quad (1)$$

这里 $|x|^2 = (x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2$. 如果我们换一组基之后

$$e'_i = \sum_{j=1}^3 e_j P_{ji} \quad (2)$$

- (a) 写下一个向量在新的基下面的坐标 (x'^1, x'^2, x'^3) 。
- (b) 如果我们需要保持一个向量的长度, 那么对矩阵 P 的限制是?
- (c) 证明在保长变换下, M'^{ij} 和原来的 M^{ij} 的变换关系是

$$M'^{ij} = \sum_{k=1}^3 \sum_{l=1}^3 (P^{-1})^i_k (P^{-1})^j_l M^{kl} \quad (3)$$

这里 $(P^{-1})^i_k = (P^{-1})_{ik}$. 也就是说转动惯量是一个二阶逆变张量。

- (d) 从转动惯量的形式可以看出, 它是一个对称矩阵。证明: 在保长变换下, M 的变换方式就是一个相似变换。(提示: 证明: $M' = P^{-1} M P$). 因为对称矩阵在相似变换下是可以对角化的, 而坐标变换是个相似变换, 所以转动惯量总是可以在某个坐标系下对角化。
3. 这一道题是关于线性空间在狭义相对论的应用。狭义相对论中的时空是一个所谓的四维闵可夫斯基空间。这个空间可以看成是一个四维的线性空间, 并且我们有一个下面的不定二次型

$$x^T S x = -t^2 + x^2 + y^2 + z^2. \quad (4)$$

这里 (t, x, y, z) 是选定一组基 (e_1, \dots, e_4) 之后的任意一个向量的坐标。(物理上, 这个可以理解为选定一个参照系)

- (a) 写下矩阵 S 。
 (b) 如果我们改变一组基 (e'_1, \dots, e'_4) 之后

$$e'_i = \sum_1^4 e_j P_{ji} \quad (5)$$

物理上, 这个换基的操作可以理解为换一个参照系. 物理上对参照系的要求是上面的变换需要保持二次型的形式 $(x^T S x = x'^T S x')$, 求对可逆矩阵 P 的限制。

- (c) 求矩阵 P 的行列式的可能值。对于每种可能的特征值, 写成一个矩阵。
4. (附加题) 量子纠缠是一个流行的概念。现在我们用线性代数中的张量来理解一下这个概念。我们有两个粒子。这两个粒子分别有两个对应的态空间: 分别是两个两维的线性空间 H_A 和 H_B 。分别在这两个线性空间取正交归一基 (e_A^1, e_A^2) , (e_B^1, e_B^2) 。这两组基通常有一些物理意义, 比如 e_A^1, e_A^2 这个状态是自旋的本征态(对应自旋为上, 下)。那么两个粒子在一起的态空间就是张量空间 $H_{AB} = H_A \otimes H_B$, 它的基为

$$\alpha_1 = e_A^1 \otimes e_B^1, \quad \alpha_2 = e_A^1 \otimes e_B^2, \quad \alpha_3 = e_A^2 \otimes e_B^1, \quad \alpha_4 = e_A^2 \otimes e_B^2 \quad (6)$$

- (a) 找到 H_A 的一个线性映射 σ_A , 使得 e_A^1, e_A^2 为它的特征向量, 特征值分别为 $+1, -1$ 。并找出这个线性映射在这组基下的矩阵。类似的, 找到一个线性映射 σ_B , 使得 e_B^1, e_B^2 为它的特征向量, 特征值分别为 $+1, -1$ 。并找出这个线性映射在这组基下的矩阵。
- (b) 求 $\sigma_A \otimes I_B$ 在 α_i 这组基上的矩阵 S 。这里 I_B 是作用在 H_B 的单位线性函数。
- (c) 张量空间 H_{AB} 的一个向量称之为非纠缠态, 如果它可以写成下面的形式

$$v \otimes w \quad (7)$$

这里 $v \in H_A$, $w \in H_B$ 。假设 $v = a_1 e_A^1 + a_2 e_A^2$, $w = b_1 e_B^1 + b_2 e_B^2$ 。写下一个非纠缠态在 α_i 这组基下的坐标。检查一个非纠缠态长度是归一的, 如果 v 和 w 是归一的。

- (d) 如果一个 H_{AB} 中的一个向量不能写成上题出的形式则称之为纠缠态, 请找出一个纠缠态。
- (e) 写下 $\sigma_A \otimes I_B$ 这个映射在一个非纠缠态的期望值。(这里我们假设非纠缠态的长度是归一的, 期望值是 $x^T S x$, 这里 x 是一个非纠缠态在 α_i 这组基下的坐标)。观察一下结果对系数的依赖 (看一下(c)中的系数)。从中理解对于一个非纠缠态, 对粒子 B 的状态的了解得不到任何关于粒子 A 的状态的信息。
- (f) 考虑一个纠缠态

$$\Psi = \frac{1}{\sqrt{2}} e_A^1 \otimes e_B^1 + \frac{1}{\sqrt{2}} e_A^2 \otimes e_B^2 \quad (8)$$

验证它是一个纠缠态, 思考一下粒子 A 的状态怎么和粒子 B 的状态纠缠在一起?