1. 随机过程定义为

$$X(t) = f(t+\epsilon)$$

其中 $f(t)$ 是具有周期 T 的周期波形，ϵ 在区间 $(0, T)$ 内为均匀分布的随机变量。证明：$X(t)$ 是宽平稳随机过程。

参考答案：

由题设可知

$$p_\epsilon(\epsilon) = \begin{cases} 1/T & 0 < \epsilon < T \\ 0 & else \end{cases}$$

于是可以求得

$$\begin{aligned} E[X(t)] &= \int_{-\infty}^{\infty} x(t) p_\epsilon(\epsilon) d\epsilon = \int_0^T f(t+\epsilon)\frac{1}{T} d\epsilon \\ &= \frac{1}{T}\int_t^{t+T} f(s)ds = \frac{1}{T}\int_0^T f(s)ds \\ &= m_X \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} R_X(t_1, t_2) &= E[X(t_1)X(t_2)] \\ &= \int_0^T f(t_1+\epsilon)f(t_2+\epsilon)\frac{1}{T}d\epsilon \\ &= \frac{1}{T}\int_0^T f(t_1+\epsilon)f(t_2+\epsilon)d\epsilon \\ &= \frac{1}{T}\int_{t_1}^{t_1+T} f(s)f(s+t_2-t_1)ds \\ &= \frac{1}{T}\int_0^T f(s)f(s+t_2-t_1)ds \\ &= \frac{1}{T}\int_0^T f(s)f(s-\tau)ds,\ \tau = t_1 - t_2 \end{aligned}$$

故 $X(t)$ 为宽平稳随机过程。

2. 定义复随机过程 $X(t) = Yf(t)$，其中 Y 是一个零均值的实随机变量，$f(t)$ 是一个确定性复函数，且 $f(t)$ 不为常数。若 $X(t)$ 是宽平稳过程，请推导 $f(t)$ 具有的一般形式。

参考答案：

若 $X(t)$ 为宽平稳过程，则

$$E[X(t+\tau)X^*(\tau)] = E(Y^2)f(t+\tau)f^*(t)$$

必须与 t 无关，而只是 τ 的函数。若取 $\tau = 0$，则应有

$$|f(t)|^2 = c_1,\ c_1 \text{ 为常数}$$

因此，$f(t)$ 可写成如下形式

$$f(t) = ce^{j\phi(t)},\ c \text{ 为常数}$$

其中 $\phi(t)$ 为待定函数。由于

$$f(t+\tau)f^*(t)=c^2e^{j[\phi(t+\tau)-\phi(t)]}$$

应与 t 无关，因此应该有

$$\tfrac{d}{dt}[\phi(t+\tau)-\phi(t)]=0$$

即对于任意 τ，均有

$$\tfrac{d\phi(t+\tau)}{dt}=\tfrac{d\phi(t)}{dt}$$

因此可令 $\phi'(t)=\lambda$，其中 λ 为实常数。解这个微分方程可得

$$\phi(t)=\lambda t+\theta,\ \theta \text{ 为实常数}$$

故 $f(t)=ce^{j(\lambda t+\theta)}$。

3. 设 $\{\xi_n, n\in\mathbb{Z}\}$ 为白噪声，即 $E(\xi_n)=0, E(\xi_n\xi_m)=\delta_{nm}\sigma^2$，其中

$$\delta_{nm}=\begin{cases}1, & n=m\\ 0, & n\neq m\end{cases}$$

定义 $X_n=\sum_{k=0}^{q}b_k\xi_{n-k}$，其中 $b_0,b_1,\cdot\cdot\cdot,b_q$ 为常数，讨论序列 $\{X_n\}$ 的平稳性。

参考答案:

$E(X_n)=E(\sum_{k=0}^{q}b_k\xi_{n-k})=\sum_{k=0}^{q}b_kE(\xi_{n-k})=0$

显然当 $|r|>q$ 时，$E(X_{n+r}X_n)=0$。

当 $|r|\leqslant q$ 时，先讨论 $0\leqslant r\leqslant q$ 的情况:

$$\begin{aligned}E(X_{n+r}X_n)&=E(\sum_{k=0}^{q}b_k\xi_{n+r-k}\sum_{p=0}^{q}b_p\xi_{n-p})\\&=\sum_{k=0}^{q}\sum_{p=0}^{q}E(\xi_{n+r-k}\xi_{n-p})\\&=\sum_{k=0}^{q-r}b_kb_{k+r}\sigma^2=\sum_{k=r}^{q}b_kb_{k-r}\sigma^2.\end{aligned}$$

同理可得当 $0>r\geqslant -q$ 时，有

$$E(X_{n+r}X_n)=\sum_{k=|r|}^{q}b_kb_{k-|r|}\sigma^2.$$

即

$$E(X_{n+r}X_n)=\begin{cases}0, & |r|>q\\ \sum_{k=|r|}^{q}b_kb_{k-|r|}\sigma^2, & |r|\leqslant q\end{cases}$$

它表明 $\{X_n\}$ 是平稳过程。

4. 质点在直线上做随机运动，即在 $t=1,2,3,\cdots$ 时质点可以在 x 轴上往右或往左做一个单位距离的随机游动。若往右移动一个单位距离的概率为 p，往左移动一个单位距离的概率为 q，即 $P\{\xi(i)=+1\}=p$，$P\{\xi(i)=-1\}=q$，$p+q=1$，且各次游动是相互统计独立的。经过 n 次游走，质点所处的位置为 $\eta_n=\eta(n)=\sum_{i=1}^{n}\xi_i$。

(1) 求 $\{\eta(n)\}$ 的均值函数。

(2) 求 $\{\eta(n)\}$ 的自相关函数 $R_{\eta\eta}(n_1,n_2)$。

(3) 给定时刻 n_1，n_2，求随机过程 $\{\xi(n)\}$ 的二维概率密度函数及相关函数。

参考答案:

(1) 解法一：设在 n 次游走中有 m 次质点正向移动，即有 m 次 $\xi_i=+1$，有 $n-m$ 次质点反向移动，即有 $n-m$ 次 $\xi_i=-1$。

则 $\eta_n=\sum_{i=1}^{n}\xi_i=m+(n-m)(-1)=2m-n=k$

又各次游走是相互统计独立的，则

$$P(\eta_n=k)=\begin{pmatrix} n \\ m \end{pmatrix}p^m q^{n-m}=\begin{pmatrix} n \\ \frac{n+k}{2} \end{pmatrix}p^{\frac{n+k}{2}}q^{\frac{n-k}{2}}$$

则 $E[\eta(n)=k]=\sum_{m=0}^{n}(2m-n)\begin{pmatrix} n \\ m \end{pmatrix}p^m q^{n-m}=pn-qn$。

解法二：因各次游走是相互统计独立的，则 $E[\eta(n)]=\sum_{i=1}^{n}E[\xi_i]=(p-q)n$。

(2) 假设 $n_1<n_2$，

$$\begin{aligned}R_{\eta\eta}(n_1,n_2)&=E[\eta(n_1)\eta(n_2)]=E\{\eta(n_1)[\eta(n_1)+\eta(n_2)-\eta(n_1)]\}\\&=E[\eta(n_1)]^2+E[\eta(n_1)]E[\eta(n_2)-\eta(n_1)]\\&=\{E[\eta(n_1)]\}^2+Var[\eta(n_1)]+(p-q)^2n_1(n_2-n_1)\\&=(p-q)^2n_1^2+n_1Var[\xi_i]+(p-q)^2n_1(n_2-n_1)\\&=(p-q)^2n_1n_2+n_1[1-(p-q)^2]\end{aligned}$$

当 $n_1>n_2$ 时可得到类似的结论。

(3) 二维概率分布列

$\xi(n_1)$ $\xi(n_2)$	1	-1
1	p^2	pq
-1	pq	q^2

$R_{\xi\xi}(n_1,n_2)=p^2+q^2-2pq$

5. 已知宽平稳过程 $X(t)$ 的自相关函数为

$$R(\tau)=\exp(-3\tau^2)$$

$Y(t) = X(t) + X'(t)$，求 $Y(t)$ 的自相关函数。

参考答案：$Y(t)$ 的自相关函数为

$$
\begin{aligned}
&E[Y(t)Y(t+\tau)] = E\{[X(t)+X'(t)][X(t+\tau)+X'(t+\tau)]\} \\
&= E[X(t)X(t+\tau) + X(t)X'(t+\tau) + X'(t)X(t+\tau) + X'(t)X'(t+\tau)] \\
&= R(\tau) + R'(\tau) - R'(\tau) - R''(\tau) \\
&= R(\tau) - R''(\tau) \\
&= \exp(-3\tau^2) + 6\left[\exp(-3\tau^2) - 6\tau^2\exp(-3\tau^2)\right] \\
&= \exp(-3\tau^2)\left[7 - 36\tau^2\right].
\end{aligned}
$$

6. 设随机过程 $X(t) = U\cos(3t)$，这里 U 是均值和方差都为 1 的随机变量，求

$$Y(t) = \frac{1}{t}\int_0^t X(s)ds$$

的均值、方差和相关函数。

参考答案：$Y(t)$ 的均值为

$$E[Y(t)] = E\left[\frac{1}{t}\int_0^t X(s)ds\right] = \frac{1}{t}\int_0^t E[X(s)]\,ds = \frac{1}{t}\int_0^t E[U]\cos(3t)ds = \frac{1}{t}\int_0^t \cos(3t)ds = \frac{\sin(3t)}{3t},$$

$Y(t)$ 的方差为

$$D[Y(t)] = E\left[Y^2(t)\right] - \{E[Y(t)]\}^2,$$

其中，

$$
\begin{aligned}
E\left[Y^2(t)\right] &= E\left[\frac{1}{t^2}\int_0^t X(s)ds\int_0^t X(v)dv\right] \\
&= E\left[\frac{1}{t^2}\int_0^t U\cos(3s)ds\int_0^t U\cos(3v)dv\right] \\
&= E\left[U^2\right]\frac{1}{t^2}\int_0^t \cos(3s)ds\int_0^t \cos(3v)dv \\
&= \left[D(U) + E^2(U)\right]\frac{1}{t^2}\int_0^t \cos(3s)ds\int_0^t \cos(3v)dv \\
&= 2\left[\frac{\sin(3t)}{3t}\right]^2.
\end{aligned}
$$

由上式可得

$$D[Y(t)] = 2\left[\frac{\sin(3t)}{3t}\right]^2 - \left[\frac{\sin(3t)}{3t}\right]^2 = \left[\frac{\sin(3t)}{3t}\right]^2.$$

$Y(t)$ 的相关函数为

$$\begin{aligned}
R_Y(t_1,t_2) &= E\left[Y(t_1)Y(t_2)\right] \\
&= E\left[\frac{1}{t_1t_2}\int_0^{t_1}X(s)ds\int_0^{t_2}X(v)dv\right] \\
&= E\left[\frac{1}{t_1t_2}\int_0^{t_1}U\cos(3s)ds\int_0^{t_2}U\cos(3v)dv\right] \\
&= E\left[U^2\right]\frac{1}{t_1t_2}\int_0^{t_1}U\cos(3s)ds\int_0^{t_2}U\cos(3v)dv \\
&= 2\frac{1}{t_1t_2}\int_0^{t_1}U\cos(3s)ds\int_0^{t_2}U\cos(3v)dv \\
&= \frac{2\sin(3t_1)\sin(3t_2)}{9t_1t_2}.
\end{aligned}$$

7. 随机过程 $X(t)=A\cos\omega t+B\sin\omega t$，$E[A]=E[B]=0$，且 A,B 不相关，$E[A^2]=E[B^2]=\sigma^2$，求证 $X(t)$ 为宽平稳随机过程。

   参考答案:

$$E[X(t)]=0$$

$$\begin{aligned}
E[X(t)X(s)] &= E[A^2]\cos(\omega t)\cos(\omega s)+E[B^2]\sin(\omega t)\sin(\omega s) \\
&= \sigma^2\cos(\omega(t-s))
\end{aligned}$$

8. 随机过程 $X(t)=\cos(\boldsymbol{\omega}t+\boldsymbol{\theta})$，$\boldsymbol{\omega}$ 为任意给定随机变量，$\boldsymbol{\theta}$ 为 $(-\pi,\pi)$ 上的均匀分布且与 $\boldsymbol{\omega}$ 独立，求证 $X(t)$ 为宽平稳随机过程。

   参考答案:

$$E[X(t)]=E_{\boldsymbol{\omega}}[E_{\boldsymbol{\theta}|\boldsymbol{\omega}}cos(\boldsymbol{\omega}t+\boldsymbol{\theta})]=E_{\boldsymbol{\omega}}[0]=0$$

$$E[cos(\boldsymbol{\omega}(t+s)+2\boldsymbol{\theta})]=E_{\boldsymbol{\omega}}[E_{\boldsymbol{\theta}|\boldsymbol{\omega}}cos(\boldsymbol{\omega}(t+s)+2\boldsymbol{\theta})]=E_{\boldsymbol{\omega}}[0]=0$$

$$\begin{aligned}
E[X(t)X(s)]) &= E[cos(\boldsymbol{\omega}t+\boldsymbol{\theta})cos(\boldsymbol{\omega}s+\boldsymbol{\theta})] \\
&= \frac{1}{2}E[cos(\boldsymbol{\omega}(t-s))+cos(\boldsymbol{\omega}(t+s)+2\boldsymbol{\theta})] \\
&= \frac{1}{2}E[cos(\boldsymbol{\omega}(t-s))]
\end{aligned}$$

9. 设随机过程 $Z(t)=Xsin(t)+Ycos(t)$，其中 X 和 Y 是相互独立的二元随机变量，它们都分别以 $\frac{2}{3}$ 和 $\frac{1}{3}$ 的概率取值-1 和 2。求 Z(t) 的均值函数和自相关函数，并证明 Z(t) 是一个宽平稳随机过程，但不是一个严平稳随机过程。

   参考答案:

   根据定义，可以求得均值和自相关函数分别为

   $m_z(t)=E[Xsin(t)+Ycos(t)]=E(X)sin(t)+E(Y)cos(t)$

   和 $R_z(t_1,t_2)=E[(Xsin(t_1)+Ycos(t_1))(Xsin(t_2)+Ycos(t_2))]$

   $=E(X^2)sin(t_1)sin(t_2)+E(XY)[sin(t_1)cos(t_2)+cos(t_1)sin(t_2)]+E(Y^2)cos(t_1)cos(t_2)$

   其中 $E(X)=E(Y)=0$,$E(X^2)=E(Y^2)=2$,$E(XY)=E(X)E(Y)=0$

将上述结果代入 $m_z(t)$ 和 $R_z(t_1,t_2)$ 中可以得到 $m_z(t)=0$，$R_z(t_1,t_2)=2cos(t_1-t_2)$

由上述计算过程可知 Z(t) 是宽平稳随机过程，进一步考察

$E[Z^3(t)]=E[(Xsin(t)+Ycos(t))^3]$

$=E(X^3)(sin(t))^3+3E(X^2Y)(sin(t))^2cos(t)+3E(XY^2)sin(t)(cos(t))^2+E(Y^3)(cos(t))^3$

其中 $E(X^3)=E(Y^3)=2$,$E(X^2Y)=E(XY^2)=0$

将上述结果代入可得：$E[Z^3(t)]=2[(sin(t))^3+(cos(t))^3]$

故 Z(t) 不是严平稳随机过程。

10. 设 $X(t)=X_0+Yt, a\leqslant t\leqslant b$, 其中 X_0 与 Y 是相互独立且服从 N(0,1) 的随机变量。证明：X(t) 是一个二阶矩过程。

参考答案:

X_0, Y 均服从 N(0,1)，所以对于每一个 $t\in T=[a,b]$，X(t) 服从正态分布 $N(0,1+t^2)$。

事实上，有 $E[X(t)]=E[X_0]+E[Y]t=0$

$D[X(t)]=D[X_0]+t^2D[Y]=1+t^2, t\in[a,b]$

$R_X(t_1,t_2)=C_X(t_1,t_2)=1+t_1t_2, t_1,t_2\in[a,b]$

从而 X(t) 是一个二阶矩过程。