《高等微积分 2》第九周作业

本次作业请在第十周星期五 (4 月 24 日)24 : 00 点之前在网络学堂提交.

1 设 D 是 Oxy 平面中的区域, 其面积为 S. 定义以 D 为底面, $(0,0,1)$ 为顶点的锥体为

$$V = \{(1-t)(u,v,0) + t(0,0,1) | (u,v,0) \in D, t \in [0,1]\}.$$

求 V 的体积, 要求答案用 S 表示.

2 (1) 给定 $\mathbf{R}^3$ 中三个点 $A(a_1,a_2,a_3)$, $B(b_1,b_2,b_3)$, $C(c_1,c_2,c_3)$. 设这三个点和坐标原点 $O(0,0,0)$ 构成四面体, 求这个四面体的体积.(可以把结果用行列式表示, 不需要完全展开). 你可能需要用到形如 $\Phi(u,v,w) = (a_1u + b_1v + c_1w, a_2u + b_2v + c_2w, a_3u + b_3v + c_3w)$ 的坐标变换.

(2) 给定 $\mathbf{R}^2$ 中两个点 $P(p_1,p_2)$, $Q(q_1,q_2)$. 设这两个点和坐标原点 $O(0,0)$ 构成三角形 D. 计算二重积分

$$\iint_D x^2 dxdy.$$

3 (1) 设 S 是椭球面

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1,$$

请用二重积分表示 S 的面积 (不必计算该积分).

(2) 计算球面 $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ 的面积.

4 设 Σ 为质量均匀的上半球面

$$\Sigma = \{(x,y,z) | x^2 + y^2 + z^2 = 1, z \geq 0\}.$$

求出 Σ 的质心位置, 即计算

$$(\frac{\iint_\Sigma xdS}{\iint_\Sigma dS}, \frac{\iint_\Sigma ydS}{\iint_\Sigma dS}, \frac{\iint_\Sigma zdS}{\iint_\Sigma dS}).$$

5 给定 $a > b > 0$, 定义曲面 T 为

$$T = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 | (\sqrt{x^2 + y^2} - a)^2 + z^2 = b^2\}.$$

求 T 的面积.