

## 《高等微积分 2》 第一周作业

本次作业请在第二周星期五 (2 月 28 日)24:00 点之前在网络学堂提交.

1 设  $f, g$  是  $[a, b]$  上的可积函数. 证明:

$$\left( \int_a^b f(x)g(x)dx \right)^2 \leq \left( \int_a^b f(x)^2 dx \right) \cdot \left( \int_a^b g(x)^2 dx \right).$$

2 证明:  $U$  是  $\mathbf{R}^n$  的开集当且仅当  $U$  可以表示成一族开球邻域的并.

3 计算极限.

$$(1) \lim_{(x,y) \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(xy)}{x^2 + y^2}.$$

$$(2) \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{-3x^2y + y^3 - 4xy}{x^2 + y^2}.$$

$$(3) \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{(1 + x^2 + y^2)^{1/(x^2+y^2)} - e}{x^2 + y^2}, \text{ 其中 } e = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n.$$

(4) 求出所有实数  $a, b$  及正数  $\alpha$ , 使得如下极限式成立:

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{ax + by}{(x^2 + y^2)^\alpha} = 0.$$

4 给定  $\mathbf{x}_0 \in \mathbf{R}^n$ . 定义函数  $f: \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$  为

$$f(\mathbf{x}) = d(\mathbf{x}_0, \mathbf{x}), \quad \forall \mathbf{x} \in \mathbf{R}^n.$$

证明:  $f$  是连续函数.

5 设  $D$  是  $\mathbf{R}^n$  的子集,  $f, g: D \rightarrow \mathbf{R}$  是连续函数. 定义函数  $h: D \rightarrow \mathbf{R}$  为

$$h(x) = \min\{f(x), g(x)\}, \quad \forall x \in D.$$

证明:  $h$  是连续函数.