作业 1. 称两条有公共顶点的边所构成的图形为一个角. 设 G 是 n 阶图, 每个顶点的度分别为 $d_1, \dots, d_n$.

(1) 证明: 图中角的数目 C 为

$$C = \sum_{i=1}^{n} C_{d_i}^2.$$

(2) 对于 G 的两个顶点 u, v, 如果 uv 不是 G 的边, 则在 u, v 之间画一条虚边. 证明: 图中由一实边与一虚边所构成的角的数目 D 为

$$D = \sum_{i=1}^{n} d_i(n-1-d_i).$$

(3) 将 G 的 n 个顶点所构成的 C_n^3 个三角形按照它的边界含有几条实边分类: 设三条实边的三角形共 x 个, 两实边一虚边的三角形共 y 个, 一实边两虚边的三角形共 z 个. 证明:

$$3x + y = C, \quad 2y + 2z = D.$$

(4) 综合前面小问的结论, 证明:

$$x \geq \frac{4|E|}{3n}\left(|E| - \frac{n^2}{4}\right) + \frac{z}{3} \geq \frac{4|E|}{3n}\left(|E| - \frac{n^2}{4}\right).$$

作业 2. 设图 G 共有 n 个顶点与 $m \geq 1$ 条边. 证明: 存在顶点集合 $V(G)$ 的非空子集 H, 使得 H 中每个顶点在 H 中都有至少 $\frac{m}{n}$ 个邻点.

作业 3. (1) 设图 G 中每个顶点的度都不小于 δ, 其中 $\delta \geq 2$ 是给定的正整数. 证明: 图 G 中存在长度至少为 $\delta + 1$ 的简单圈.

(2) 可将 G 的边集表示为若干个简单圈的不交并的充分必要条件是: G 的每个顶点的度都是偶数.

作业 4. 设 n 阶图 G 的边数大于 C_{n-1}^2. 证明: G 是连通的.

作业 5. 定义数列 $\{N_r\}$ 为:

$$N_1 = 3, \quad N_r = r(N_{r-1} - 1) + 2, \forall r \geq 2.$$

证明: 将 N_r 阶完全图的每条边任意的用 r 种颜色之一染色, 则图中必有同色三角形.

作业 6 (Schur). 设 N_r 为上一题中所定义的正整数. 证明: 如果将 $1, 2, \cdots, N_r$ 中的每个数任意的用 r 种颜色之一染色, 则一定存在三个同色的数 x, y, z 满足 $x + y = z$.