

## 《高等微积分 1》第五周作业

本次作业在第六周星期三上课时间交, 希望大家使用订在一起的散页纸.

1 计算数列极限.

(1) 求极限  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sin^2(\pi \sqrt{n^2 + 1})$ .

(2) 求极限  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sin^2(\pi \sqrt{n^2 + n})$ .

2 (1) 设  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\frac{x^2 + 1}{x + 1} - ax - b) = 0$ , 求  $a, b$  的值.

(2) 设  $\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2 - x + 1} - px - q) = 0$ , 求  $p, q$  的值.

3 (1) 给定正整数  $n$ . 设  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x^n} = A$ . 求极限  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 + f(x)} - 1}{x^n}$ .

(2) 求极限  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{\cos x} - \sqrt{1 + \sin^2 x}}{x^2}$ .

4 (1) 设  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - f(x)}{x^2} = A, \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - g(x)}{x^2} = B$ . 证明:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - f(x) \cdot g(x)}{x^2} = A + B.$$

(2) 给定正整数  $n$ . 设  $f_1, \dots, f_n : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$  是  $n$  个函数, 满足

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - f_k(x)}{x^2} = A_k, \quad \forall 1 \leq k \leq n.$$

计算极限

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - f_1(x) \cdot f_2(x) \cdot \dots \cdot f_n(x)}{x^2}.$$

5 定义函数  $f$  为

$$f(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2}, & \text{如果 } x \neq 0 \\ 0, & \text{如果 } x = 0 \end{cases}$$

判断  $f$  在  $x = 0$  处是否连续, 请详细说明理由.

6 设  $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^{2n+1} + 1}{x^{2n+1} - x^{n+1} + x}$ , 请确定  $f$  的间断点.

7 设  $f \in C([a, b])$ . 证明:  $f$  的值域  $f([a, b]) = \{y | \text{存在 } x \in [a, b] \text{ 使得 } f(x) = y\}$  是一个有界闭区间.