1.解：

(1) $|g'(x^*)| = \frac{1}{2(x-1)^{\frac{3}{2}}}\Big|_{x=1.5} = 1.414 > 1$ 故而不收敛

(2) $|g'(x^*)| = \frac{2}{x^3}\Big|_{x=1.5} = 0.593 < 1$ 故而收敛

(3) $|g'(x^*)| = \frac{2x}{3(1+x^2)^{\frac{2}{3}}}\Big|_{x=1.5} = 0.4558 < 1$ 故而收敛

不妨利用第(3)种格式迭代，得到迭代过程如下

n	x_n	$x_{n+1} = \sqrt[3]{1+x_n^2}$	$\lvert x_{n+1}-x_n\rvert$
0	1.5	1.48125	0.01875
1	1.48125	1.47271	0.00854
2	1.47271	1.46882	0.00389
3	1.46882	1.46705	0.00177
4	1.46705	1.46624	0.00081
5	1.46624	1.46588	0.00036
6	1.46588	1.46571	0.00017
7	1.46571	1.46563	0.00008

故而该实根近似为 1.46563

2.解：$f(x) = \frac{1}{x} - \alpha = 0$ 的解即为 α 的倒数，

而 $x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = 2x_n - \alpha x_n^2$ 为迭代公式。

n	x_n	$x_{n+1} = 2x_n - 0.324x_n^2$	$\lvert x_{n+1}-x_n\rvert$
0	3	3.084	0.084
1	3.084	3.0864179	0.0024179
2	3.0864179	3.08641975	0.0000018531

故而 0.324 的倒数近似为 3.08642.

3.解：(1) 迭代公式为 $x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = \frac{x_n}{2} + \frac{1}{x_n}$

当 $x_0 = 1$ 时， $x_1 = \frac{1}{2} + 1 = 1.5$

(2) 迭代公式为 $x_{n+1} = x_n - f(x_n) \times \frac{x_n - x_{n-1}}{f(x_n) - f(x_{n-1})}$

当 $x_0 = 1$， $x_1 = 2$ 时

$$x_2 = 2 - 2 \times \frac{1}{2+1} \approx 1.33 \qquad (x_2 = \frac{4}{3})$$

4.解：

$$H = I - 2\frac{V \cdot V^T}{V^T \cdot V}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \frac{18}{50} & \frac{24}{50} & \frac{30}{50} \\ \frac{24}{50} & \frac{32}{50} & \frac{40}{50} \\ \frac{30}{50} & \frac{40}{50} & \frac{50}{50} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{16}{25} & -\frac{12}{25} & -\frac{3}{5} \\ -\frac{12}{25} & \frac{9}{25} & -\frac{4}{5} \\ -\frac{3}{5} & -\frac{4}{5} & 0 \end{bmatrix}$$

5.解： $\alpha = 2$

则 $V = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} - 2\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

那么 $H = I - \frac{2V \cdot V^T}{V^T \cdot V} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

$$= \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}.$$

那么 $H \cdot a = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & +\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$

(也可取 $\alpha = -2$)

6.解：将向量拆分 $\begin{bmatrix}1\\2\\3\\4\\5\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1\\2\\0\\0\\0\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}0\\0\\3\\4\\5\end{bmatrix}$

那么 $\alpha = \sqrt{3^2+4^2+5^2} = 5\sqrt{2}$

$v = \begin{bmatrix}0\\v^*\end{bmatrix}$ 而 $v^* = \begin{bmatrix}3\\4\\5\end{bmatrix} - 5\sqrt{2}\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}3-5\sqrt{2}\\4\\5\end{bmatrix}$

故而 $v = \begin{bmatrix}0\\0\\3-5\sqrt{2}\\4\\5\end{bmatrix}$

而 $\delta = \alpha = 5\sqrt{2}$. （也可取 $\alpha = -5\sqrt{2}$）

7.解：(1) $f(x) = t_0 + t_1 x + t_2 x^2 + t_3 x^3$

$$\begin{bmatrix}1&1&1&1\\1&2&4&8\\1&3&9&27\\1&4&16&64\end{bmatrix}\begin{bmatrix}t_0\\t_1\\t_2\\t_3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}11\\29\\65\\125\end{bmatrix}$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{bmatrix}1&1&1&1\\0&1&3&7\\0&0&2&12\\0&0&0&6\end{bmatrix}\begin{bmatrix}t_0\\t_1\\t_2\\t_3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}11\\18\\18\\6\end{bmatrix}$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{bmatrix}t_0\\t_1\\t_2\\t_3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}5\\2\\3\\1\end{bmatrix}$$

故而 $f(x) = 5 + 2x + 3x^2 + x^3$.

(2)

$$f(x) = 11\cdot\frac{(x-2)(x-3)(x-4)}{-6} + 29\cdot\frac{(x-1)(x-3)(x-4)}{2} + 65\cdot\frac{(x-1)(x-2)(x-4)}{-2} + 125\cdot\frac{(x-1)(x-2)(x-3)}{6}$$

化简得

$$f(x)=x^3+3x^2+2x+5.$$

(3). $f(x)=t_0+t_1(x-1)+t_2(x-1)(x-2)+t_3(x-1)(x-2)(x-3)$

这样有

$$\begin{bmatrix}1&0&0&0\\1&1&0&0\\1&2&2&0\\1&3&6&6\end{bmatrix}\begin{bmatrix}t_0\\t_1\\t_2\\t_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}11\\29\\65\\125\end{bmatrix}$$

解得 $\begin{bmatrix}t_0\\t_1\\t_2\\t_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}11\\18\\9\\1\end{bmatrix}$

代入，化简得

$$f(x)=x^3+3x^2+2x+5.$$

8.解：

(1) $f'(x)=3x^2+12x-15=3(x^2+4x-5)=3(x+5)(x-1)$

$f''(x)=3(x+5)+3(x-1)\Rightarrow f''(1)=18>0,\ f''(-5)=-18<0$

故而 $x_1=-5$ 为极大值点，$x_2=1$ 为极小值点.

但是当 $x\to-\infty$ 时 $f(x)\to-\infty$，而 $x\to\infty$ 时 $f(x)\to\infty$

故而不存在全局最大值或最小值.

(2). $f'(x)=(2x+x^2)e^x=x(x+2)e^x$

$f''(x)=(2x+x^2+2x+2)e^x=(x^2+4x+2)e^x$

$f''(0)=2>0,\ f''(-2)=-2e^{-2}<0.$

故而 $x_1=0$ 为极小值点，$x_2=-2$ 为极大值点.

$x\to\infty$ 时 $f(x)\to\infty$，故而不存在全局最大值，而 $x_1=0$ 为全局最小值点

(3) 首先求临界点，有

$$\begin{cases} x^2-x-xy-y(x-y-1)=0 \\ -6x(x-y-1)+6xy=0 \end{cases}$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{cases} x_1=0 \\ y_1=0 \end{cases} \quad \begin{cases} x_2=0 \\ y_2=-1 \end{cases} \quad \begin{cases} x_3=-1 \\ y_3=-1 \end{cases} \quad \begin{cases} x_4=1 \\ y_4=0 \end{cases}$$

而

$$H_f(x,y)=\begin{bmatrix} 6(2x-2y-1) & 6(-2x+2y+1) \\ 6(-2x+2y+1) & 12x \end{bmatrix}.$$

分别代入四组临界点，可得.

$H_f(0,0)=\begin{bmatrix} -6 & 6 \\ 6 & 0 \end{bmatrix}$ 不定. $(0,0)$为鞍点

$H_f(0,-1)=\begin{bmatrix} 6 & -6 \\ -6 & 0 \end{bmatrix}$ 不定. $(0,-1)$为鞍点

$H_f(-1,-1)=\begin{bmatrix} -6 & 6 \\ 6 & -12 \end{bmatrix}$ 负定 $(-1,-1)$为极大值点

$H_f(1,0)=\begin{bmatrix} 6 & -6 \\ -6 & 12 \end{bmatrix}$ 正定 $(1,0)$为极小值点.

而 $x\to\infty$ 时 $f(x,y)\to\infty$，$x\to-\infty$ 时 $f(x,y)\to\infty$.

所以不存在全局最大值点或最小值点.

9. 解：

(1). 取拉格朗日函数为

$$L(x,y,\lambda)=x^2+y^2+\lambda(x+y-1)$$

求导，得临界点满足

$$\begin{cases} 2x+\lambda=0 \\ 2y+\lambda=0 \\ x+y-1=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=\frac{1}{2} \\ y=\frac{1}{2} \\ \lambda=-1 \end{cases}$$

而 $B=\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ 为正定矩阵

故而 $(\frac{1}{2},\frac{1}{2})$ 为极小值点，$(\frac{1}{2},\frac{1}{2},-1)$ 为拉格朗日函数约束点

(2) 拉格朗日函数为

$$L(x,y,\lambda)=x^2+y^2+\lambda(xy^2-1)$$

求导，得临界点满足

$$\begin{cases} 2x+y^2\lambda=0 \\ 2y+2x\lambda y=0 \\ xy^2-1=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1=2^{-\frac{1}{3}} \\ y_1=2^{\frac{1}{6}} \\ \lambda_1=-2^{\frac{1}{3}} \end{cases} \text{或} \begin{cases} x_2=2^{-\frac{1}{3}} \\ y_2=-2^{\frac{1}{6}} \\ \lambda_2=-2^{\frac{1}{3}} \end{cases}$$

而 $B=\begin{bmatrix} 2 & 2\lambda y \\ 2\lambda y & 2+2\lambda x \end{bmatrix}$

代入数据，得 $B_1=\begin{bmatrix} 2 & -2^{\frac{3}{2}} \\ -2^{\frac{3}{2}} & 0 \end{bmatrix}$ 不定.

$B_2=\begin{bmatrix} 2 & 2^{\frac{3}{2}} \\ 2^{\frac{3}{2}} & 0 \end{bmatrix}$ 不定

但是由几何定义可判定，上面两个点为曲线到原点的两个距离最短的点.

所以 $(2^{-\frac{1}{3}}, 2^{\frac{1}{6}}, -2^{\frac{1}{3}})$ 和 $(2^{-\frac{1}{3}}, -2^{\frac{1}{6}}, -2^{\frac{1}{3}})$ 是拉格朗日函数的约束点，$(2^{-\frac{1}{3}}, 2^{\frac{1}{6}})$ 与 $(2^{-\frac{1}{3}}, -2^{\frac{1}{6}})$ 是极小值点.