《高等微积分 2》第二周作业

本次作业请在第三周星期五 (3 月 6 日)24 : 00 点之前在网络学堂提交.

1 设 $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ 是连续函数, 当 $x^2 + y^2 \to +\infty$ 时, $f(x, y) \to +\infty$. 证明: f 在 $\mathbf{R}^2$ 上有最小值, 即存在 $(x_0, y_0) \in \mathbf{R}^2$, 使得

$$f(x, y) \geq f(x_0, y_0), \quad \forall (x, y) \in \mathbf{R}^2.$$

2 令 S 为平面上的单位圆周

$$S = \{(x, y)|x^2 + y^2 = 1\}.$$

(1) 证明: S 是 $\mathbf{R}^2$ 的闭集.

(2) 设 $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ 是连续函数. 证明: f 在 S 上能取到最大值与最小值, 即存在 $(x_0, y_0), (x_1, y_1) \in S$, 使得

$$f(x_0, y_0) \leq f(x, y) \leq f(x_1, y_1), \quad \forall (x, y) \in S.$$

3 对于二元函数 $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$, 判断如下断言是否正确, 并说明理由.

(1) 如果 f 在 (x_0, y_0) 处可微, 则 f 在 (x_0, y_0) 处连续.

(2) 如果 f 在 (x_0, y_0) 处可微, 则 f 在 (x_0, y_0) 处有各个方向的方向导数.

(3) 如果 f 在 (x_0, y_0) 处有各个方向的方向导数, 则 f 在 (x_0, y_0) 处连续.

(4) 如果 f 在 (x_0, y_0) 处有各个方向导数, 则对任何方向 $\mathbf{q} = (a, b)$, 有

$$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{q}}|_{(x_0, y_0)} = a\frac{\partial f}{\partial x}|_{(x_0, y_0)} + b\frac{\partial f}{\partial y}|_{(x_0, y_0)}.$$

4 设 $f(x, y) = \sqrt{|x^2 - y^2|}$. 在 $(0, 0)$ 处沿着哪些方向 f 的方向导数存在?

5 计算函数的各个偏导数.

(1) $f(x,y) = x^y$.

(2) $f(x,y) = \arctan \frac{y}{x}$.

(3) $f(x_1, ..., x_n) = \sqrt{x_1^2 + ... + x_n^2}$.

6 (1) $f(x,y) = \sqrt{|xy|}$ 在 $(0,0)$ 处是否可微?

(2) 设 f 在 $(0,0)$ 点的某个开球邻域 U 中有定义, 且满足 $|f(x,y)| \leq x^2+y^2, \forall x, y \in U$. 证明: f 在 $(0,0)$ 处可微, 并计算它在 $(0,0)$ 处的微分.

(3) 设 g 在 $(0,0)$ 点的某个开球邻域 U 中有定义, 且满足 $|g(x,y)| \leq \sqrt{x^2+y^2}, \forall x, y \in U$. g 在 $(0,0)$ 处是否一定可微?