第一题

(1) p(“011100000”)=p(“010101000”)=p(“010010001”)= $\varepsilon^3(1-\varepsilon)^6 \approx 9.4\times 10^{-7}$.

(2)由于码字发送的先验概率不同，需要使用最大后验（MAP)准则进行判决。令m表示$\mathbf{r}$中0的个数, 则判决似然比可表示为

$$\lambda(\mathbf{r}) = \frac{\Pr\{\mathbf{r}|\mathbf{c}=0...0\}\Pr\{\mathbf{c}=0...0\}}{\Pr\{\mathbf{r}|\mathbf{c}=1...1\}\Pr\{\mathbf{c}=1...1\}} = \frac{0.11}{0.89}\left(\frac{1-\varepsilon}{\varepsilon}\right)^{2m-9},$$

其中$\varepsilon=0.01$。令$\lambda(\mathbf{r})>1$则能推出$m\geq 5$，因此有$x=5$。

(3) 此时只有3个bit能够被观察到。令m表示$\mathbf{r}$中能被观察到的0的个数，此时判决此然比可表示为

$$\lambda(\mathbf{r}) = \frac{\Pr\{\mathbf{r}|\mathbf{c}=0...0\}\Pr\{\mathbf{c}=0...0\}}{\Pr\{\mathbf{r}|\mathbf{c}=1...1\}\Pr\{\mathbf{c}=1...1\}} = \frac{0.11}{0.89}\left(\frac{1-\varepsilon}{\varepsilon}\right)^{2m-3},$$

其中$\varepsilon=0.01$。令$\lambda(\mathbf{r})>1$则能推出$m\geq 2$，因此有$x=2$。

信道擦除会导致接收到的信息变少（接收机收到一条消息e，该符号非0也非1，无法辨识），若2bit被擦除，则只能通过剩下7bit信息进行判断。

第二题

第二题：很多同学在计算ML判决准则的时候还考虑了先验，事实上ML隐含了先验等概的条件。课上基于P0、P1的判决准则是MAP准则；当P0=P1时，MAP就退化为ML。

(1) 此信道下判决似然比为$\lambda(\mathbf{r}) = \frac{\Pr\{\mathbf{r}|\mathbf{c}=0...0\}\Pr\{\mathbf{c}=0...0\}}{\Pr\{\mathbf{r}|\mathbf{c}=1...1\}\Pr\{\mathbf{c}=1...1\}}$ 当0，1发送的先验概率为等概时，退化为最大似然判决，此时似然比为

$$\lambda(\mathbf{r}) = \frac{\Pr\{\mathbf{r}|\mathbf{c}=0...0\}}{\Pr\{\mathbf{r}|\mathbf{c}=1...1\}} = \left(\frac{1-\varepsilon-\delta}{\varepsilon}\right)^{\mathbf{r}\text{中0的个数}-\mathbf{r}\text{中1的个数}}$$

因此在ML判决下，若$\frac{1-\varepsilon-\delta}{\varepsilon}>1$, 则$\mathbf{r}$中0的个数大于$\mathbf{r}$中1的个数时，判为0；当$\mathbf{r}$中0的个数小于$\mathbf{r}$中1的个数时判为1;当$\mathbf{r}$中0的个数等于$\mathbf{r}$中1的个数时随便判一个。

若$\frac{1-\varepsilon-\delta}{\varepsilon}<1$, 则$\mathbf{r}$中0的个数小于$\mathbf{r}$中1的个数时，判为0；当$\mathbf{r}$中0的个数大于$\mathbf{r}$中1的个数时判为1;当$\mathbf{r}$中0的个数等于$\mathbf{r}$中1的个数时随便判一个。

若$\frac{1-\varepsilon-\delta}{\varepsilon}=1$,则随便判。

(2) 由于判决准则随$\frac{1-\varepsilon-\delta}{\varepsilon}$而变化，在此处，我们不妨设$\frac{1-\varepsilon-\delta}{\varepsilon}>1$；当擦除了奇数个bit时，若“0”和“1”的数量相等，则认为错误概率为1/2。，因此bit差错概率可表示为

$$P_e = \sum_{i=0}^{k}\frac{1}{2}\binom{2k+1}{2i+1}\delta^{2i+1}\binom{2k-2i}{k-i}(\varepsilon(1-\varepsilon-\delta))^{k-i} + \sum_{m=0}^{2k+1}\binom{2k+1}{m}\delta^m\left(\sum_{j=0}^{\lceil\frac{2k+1-m}{2}\rceil-1}\binom{2k+1-m}{j}(1-\varepsilon-\delta)^j\varepsilon^{2k+1-m-j}\right).$$

这里由于信道擦除，接收端获取的bit数恰好为偶数，且0、1个数相等时，判断为任何一种的错误概率都是1/2。很多同学没有考虑0、1个数相等的情况；或认为无法译码就没有计算。事实上，这种情况下可以选择判全为0或1，错误概率都是1/2。咱们在实验一进行讲解的时候也说明过重复编码n=4的情况，也是类似这种情况，