$Sa(t)=\frac{\sin t}{t}$

$sgn(t)=2u(t)-1$

冲激偶函数为奇函数，$\int_{-\infty}^{+\infty}\delta'(t)dt=0$，$\int_{-\infty}^{\infty}\delta'(t)f(t)dt=-f'(0)$

$f(t)=f_D+f_A(t)$，直流分量$f_D=\frac{1}{t_2-t_1}\int_{t_1}^{t_2}f(t)dt$，$\int_{t_1}^{t_2}f_A(t)dt=0$

偶分量与奇分量，$f(t)=f_e(t)+f_o(t)$，$f_e(t)=\frac{1}{2}[f(t)+f(-t)]$，$f_o(t)=\frac{1}{2}[f(t)-f(-t)]$

实部分量与虚部分量

傅里叶级数展开：

$$f(t)=a_0+\sum_{n=1}^{\infty}[a_n\cos(n\omega_1 t)+b_n\sin(n\omega_1 t)] \tag{13}$$

其中$a_0=\frac{1}{T_1}\int_{t_0}^{t_0+T_1}f(t)dt$，$a_n=\frac{2}{T_1}\int_{t_0}^{t_0+T_1}f(t)\cos(n\omega_1 t)dt$，
$b_n=\frac{2}{T_1}\int_{t_0}^{t_0+T_1}f(t)\sin(n\omega_1 t)dt$

方框图：相加、倍乘、积分

动态系统：系统状态随时间变化

可逆系统：系统在不同激励作用下产生不同的响应（每个可逆系统都对应一个“逆系统”，两者级联后的输出信号和输入信号相同）

集总参数系统与分布参数系统：只由集总参数元件组成的系统称为集总参数系统；含有分布参数元件的系统是分布参数系统

稳定系统和不稳定系统：输入有界则输出有界

叠加性、齐次性、线性

时不变性$e(t-t_0)$得到$r(t-t_0)$

线性时不变（LTI）系统具有微分、积分特性：$\frac{d}{dt}e(t)\to\frac{d}{dt}r(t)$，$\int_0^t e(\tau)d\tau=\int_0^t r(\tau)d\tau$

因果性：在t_0时刻的输出只与$t\le t_0$时的输入有关

微分方程的求解？（求特解的例子）

起始点的跳变——从$0-$到$0+$

物理方法

数学方法：δ函数匹配法

零输入响应和零状态响应：没有外加信号时的响应，只取决原始状态；只考虑外加输入，原始状态清零

冲激响应与阶跃响应：$h(t)=\frac{d}{dt}g(t)$

因果性要求在$t<0$时，响应也为0

利用冲激响应求解零状态响应：零状态响应是激励信号和冲激响应的卷积

e^{st}为LTI系统的特征函数，$h(t)$的变换$H(s)$为其特征值

卷积性质：交换律、分配律、结合律

- 两个信号卷积后的导数等于一个的导数和另一个的卷积，可以由此得到冲击偶的卷积特性
- 两个信号卷积后的积分等于一个的积分和另一个的卷积，可以由此得到阶跃函数的卷积特性
- 位移性质：若$f_1(t)*f_2(t)=c(t)$，则$f_1(t-T_1)*f_2(t-T_2)=c(t-T_1-T_2)$
- $\delta(t)$卷积的筛选特性

周期信号的傅里叶级数形式存在的狄利克雷条件：

- 在一个周期内间断点数目有限
- 在一个周期内极大值和极小值的数目有限
- 在一个周期内绝对可积

指数形式的傅里叶级数：

$$f(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}F_ne^{jn\omega_1t} \tag{14}$$

有$F_0=a_0,F_n=\frac{a_n-jb_n}{2},F_{-n}=\frac{a_n+jb_n}{2}$，$\quad(n>0)$

也可以直接计算$F_n=\frac{1}{T_1}\int_{t_0}^{t_0+T_1}f(t)e^{-jn\omega_1t}dt$

函数对称性与傅里叶级数关系：

- 偶函数：$F_n=F_{-n}=\frac{a_n}{2}$
- 奇函数：$F_n=-F_{-n}=-j\frac{b_n}{2}$
- 奇谐函数$f(t)=-f(t\pm\frac{T_1}{2})$：$n$为偶数时，$a_n=b_n=0$；$n$为奇数时，不为零。也就是只存在奇次波分量

#矩形脉冲信号# $\text{Rect}(E,\tau/2) \leftrightarrow E\tau\,\text{Sa}\left(\frac{\omega\tau}{2}\right)$

#抽样脉冲信号# $W/\pi\,\text{Sa}(Wt) \leftrightarrow \text{Rect}(1,W)$

#三角脉冲信号# $\text{Tri}(E,\tau/2) \leftrightarrow \frac{E\tau}{2}\text{Sa}^2\left(\frac{\omega\tau}{4}\right)$

#双边指数信号# $e^{-|a|t} \leftrightarrow \frac{2a}{a^2+\omega^2}$

#单边指数信号# $e^{-at}u(t) \leftrightarrow \frac{1}{a+j\omega}$

#符号函数# $\text{sgn}(t) \leftrightarrow \frac{2}{j\omega}$

#单位阶跃函数# $u(t) \leftrightarrow \pi\delta(t)+\frac{1}{j\omega}$

#单位脉冲信号# $\delta(t) \leftrightarrow 1,\ 1 \leftrightarrow 2\pi\delta(\omega),\ \delta'(t) \leftrightarrow j\omega$

#高斯脉冲信号# $e^{-t^2/(2\sigma^2)} \leftrightarrow \sigma\sqrt{2\pi}e^{-\sigma^2\omega^2/2}$

#半波余弦信号# $\cos\omega_1 t\,\text{Rect}(1,T/4) \leftrightarrow \frac{2\omega_1\cos(\omega T/4)}{\omega_1^2-\omega^2}$

#正余弦信号# $\cos(\omega_1 t) \leftrightarrow \pi[\delta(\omega+\omega_1)+\delta(\omega-\omega_1)]$,
$\sin(\omega_1 t) \leftrightarrow j\pi[\delta(\omega+\omega_1)-\delta(\omega-\omega_1)],\ e^{\pm j\omega_1 t} \leftrightarrow 2\pi\delta(\omega\mp\omega_1)$
$\cos(\omega_1 t)u(t) \leftrightarrow \frac{\pi}{2}[\delta(\omega+\omega_1)+\delta(\omega-\omega_1)]+\frac{j\omega}{\omega_1^2-\omega^2}$
$\sin(\omega_1 t)u(t) \leftrightarrow \frac{j\pi}{2}[\delta(\omega+\omega_1)-\delta(\omega-\omega_1)]+\frac{\omega^2}{\omega_1^2-\omega^2}$
$e^{-at}\cos(\omega_1 t)u(t) \leftrightarrow \frac{a+j\omega}{\omega_1^2+(a+j\omega)^2},\ e^{-at}\sin(\omega_1 t)u(t) \leftrightarrow \frac{\omega_1}{\omega_1^2+(a+j\omega)^2}$

傅里叶变换的充分条件为狄利克雷条件，即在无穷区间（全域）内绝对可积

借助奇异函数，周期信号、阶跃信号和符号函数等许多不满足绝对可积条件的信号也存在傅里叶变换

傅里叶变换：

$$\mathcal{F}\{f(t)\}=F(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}f(t)e^{-j\omega t}dt \tag{15}$$

傅里叶逆变换：

$$\mathcal{F}^{-1}\{F(\omega)\}=f(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}F(\omega)e^{j\omega t}d\omega \tag{16}$$

余弦变换：

$$F_c(\omega)=2\int_0^{\infty}f(t)\cos(\omega t)dt \tag{17}$$

正弦变换：

$$F_s(\omega)=2\int_0^{\infty}f(t)\sin(\omega t)dt \tag{18}$$

偶函数的傅里叶变换就是余弦变换，奇函数的傅里叶变换为$-j$倍的正弦变换，因果信号的傅里叶变换可以表示为余弦变换和正弦变换之和：

$$\mathcal{F}\{f(t)u(t)\}=\frac{1}{2}F_c(\omega)-j\frac{1}{2}F_s(\omega) \tag{19}$$

典型信号的傅里叶变换：单边指数、双边指数、矩形、三角形、升余弦脉冲、高斯脉冲信号、符号函数、**单位冲激、阶跃函数**

时域波形增加一阶可导，傅里叶变换包络的衰减速度增加ω^{-1}

傅里叶变换基本性质：

- 可逆性
- 对称性：$2\pi f(-t)=\mathcal{F}\{\mathcal{F}\{f(t)\}\}$，$\frac{1}{2\pi}F(-\omega)=\mathcal{F}^{-1}\{\mathcal{F}^{-1}\{F(\omega)\}\}$
- 线性（叠加性和齐次性）
- **奇偶虚实性**：$f(t)$可以写成奇偶分量虚实部四个部分，进而映射出相应的傅里叶变换
- 奇偶虚实性推论：$\mathcal{F}\{f(-t)\}=F(-\omega)$，$\mathcal{F}\{f^*(t)\}=F^*(-\omega)$，$\mathcal{F}\{f^*(-t)\}=F^*(\omega)$
- 尺度变换：$\mathcal{F}\{f(t)\}=F(\omega)$，则$\mathcal{F}\{f(at)\}=\frac{1}{|a|}F(\frac{\omega}{a})$
- 时移：$\mathcal{F}\{f(t)\}=F(\omega)$，则$\mathcal{F}\{f(t-t_0)\}=F(\omega)e^{-j\omega t_0}$
- 频移：$\mathcal{F}\{f(t)\}=F(\omega)$，则$\mathcal{F}\{f(t)e^{j\omega_0 t}\}=F(\omega-\omega_0)$
- 时域微分：$\mathcal{F}\{\frac{d^n}{dt^n}f(t)\}=(j\omega)^nF(\omega)$
- 频域微分：$\mathcal{F}^{-1}\{\frac{d^n}{d\omega^n}F(\omega)\}=(-jt)^nf(t)$
- 时域积分：$\mathcal{F}\{\int_{-\infty}^{t}f(\tau)d\tau\}=\frac{F(\omega)}{j\omega}+\pi F(0)\delta(\omega)$
- 时域卷积：$\mathcal{F}\{f_1(t)*f_2(t)\}=F_1(\omega)F_2(\omega)$
- 频域卷积（时域相乘）：$\mathcal{F}\{f_1(t)\cdot f_2(t)\}=\frac{1}{2\pi}F_1(\omega)*F_2(\omega)$

周期信号的傅里叶变换：

- cos和sin：$\mathcal{F}\{\cos(\omega_1 t)\}=\pi[\delta(\omega+\omega_1)+\delta(\omega-\omega_1)]$，$\mathcal{F}\{\sin(\omega_1 t)\}=j\pi[\delta(\omega+\omega_1)-\delta(\omega-\omega_1)]$
- 一般周期信号：F_n为傅里叶级数系数，则$\mathcal{F}\{f(t)\}=2\pi\sum_{n=-\infty}^{\infty}F_n\delta(\omega-n\omega_1)$
- 周期信号在一个主值区间$f_0(t)$的傅里叶变换：$F_0(\omega)=\int_0^{T_1}f(t)e^{-j\omega t}dt$，而$F_n=\frac{1}{T_1}\int_0^{T_1}f(t)e^{-jn\omega_1 t}dt=\frac{1}{T_1}F_0(n\omega_1)$
- 进而可以得到周期信号的傅里叶变换和主值区间的傅里叶变换关系：$F(\omega)=\omega_1\sum_{n=-\infty}^{\infty}F_0(n\omega_1)\delta(\omega-n\omega_1)$

注意周期单位冲激脉冲序列的傅里叶变换，还是一系列周期冲激脉冲

时域抽样：假设抽样脉冲序列为周期信号$p(t)$，则可得到其傅里叶变换为$P(\omega)=2\pi\sum_{n=-\infty}^{\infty}P_n\delta(\omega-n\omega_s)$，$P_n$为傅里叶级数，那么抽样后$f_s(t)=f(t)p(t)$，得到$F_s(\omega)=\frac{1}{2\pi}F(\omega)*P(\omega)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}P_nF(\omega-n\omega_s)$

频域抽样：频域抽样为$F_1(\omega)=F(\omega)P(\omega)$，这样应该有$f_1(t)=f(t)*p(t)$。假设$P(\omega)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(\omega-n\omega_1)$，其逆变换为$p(t)=\frac{1}{\omega_1}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(t-nT_1)$，这样代入化简有$f_1(t)=\frac{1}{\omega_1}\sum_{n=-\infty}^{\infty}f(t-nT_1)$

时域或者频域为周期的信号，其在另一个域是一系列冲激

时域抽样定理：一个频带受限信号$x(t)$，如果频谱只占据$[-\omega_m,\omega_m]$区间，则信号$x(t)$可以用等间隔的抽样值唯一表示，抽样间隔必须不大于$\frac{1}{2f_m}$（其中$\omega_m=2\pi f_m$），或者说，最低抽样频率为$2f_m$

为了保留某一频率分量的信息，在该分量的一个周期间隔内至少要抽样两次

频域抽样定理：一个时间受限信号，它集中在$[-t_m,t_m]$的时间范围内，若在频域以不大于$\frac{1}{2t_m}$的频率（不是角频率）间隔对$x(t)$的频谱进行抽样，抽样后的$X_1(\omega)$可以唯一表示原信号

拉普拉斯变换：

$$\mathcal{L}\{f(t)\}=F(s)=\int_{0-}^{\infty}f(t)e^{-st}dt \tag{20}$$

拉普拉斯逆变换：

$$\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}=f(t)=\frac{1}{2\pi j}\int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty}F(s)e^{st}ds \tag{21}$$

其中$s=\sigma+j\omega$

一般待研究信号都为因果信号，所以积分下限取$0-$，称为单边拉氏变换，到负无穷则为双边拉氏变换

$\mathcal{L}\{f(t)\}=\mathcal{F}\{f(t)e^{-\sigma t}\}$

拉氏变换存在的条件：原函数分段连续且为指数阶函数（存在一个σ_0使得$\lim\limits_{t\to\infty}f(t)e^{-\sigma t}=0,\forall\sigma>\sigma_0$）

常用拉普拉斯变换对：

原函数	拉氏变换	傅里叶变换
$\delta(t)$	1	1
$u(t)$	$\frac{1}{s}$	$\frac{1}{\mathrm{j}\omega}+\pi\delta(\omega)$
t^n	$\frac{n!}{s^{n+1}}$	$\frac{n!}{(\mathrm{j}\omega)^{n+1}}+\mathrm{j}^n\pi\delta^{(n)}(\omega)$
e^{-at}	$\frac{1}{a+s}$	$\frac{1}{a+\mathrm{j}\omega}$
$\sin(\omega_0 t)$	$\frac{\omega_0}{s^2+\omega_0^2}$	$\frac{\omega_0}{\omega_0^2-\omega^2}+\frac{\pi}{2\mathrm{j}}[\delta(\omega-\omega_0)-\delta(\omega+\omega_0)]$
$\cos(\omega_0 t)$	$\frac{s}{s^2+\omega_0^2}$	$\frac{\mathrm{j}\omega}{\omega_0^2-\omega^2}+\frac{\pi}{2}[\delta(\omega+\omega_0)+\delta(\omega-\omega_0)]$

拉氏变换性质：

- 线性
- 微分：$\mathcal{L}\{\frac{df(t)}{dt}\}=-f(0-)+sF(s)$，高阶微分性质
  $\mathcal{L}\{\frac{d^nf(t)}{dt^n}\}=s^nF(s)-\sum\limits_{r=0}^{n-1}s^{n-r-1}f^{(r)}(0-)$
- 积分：$\mathcal{L}\{\int_{-\infty}^{t}f(\tau)d\tau\}=\frac{F(s)}{s}+\frac{\int_{-\infty}^{0-}f(\tau)d\tau}{s}$
- 时域平移：$\mathcal{L}\{f(t-t_0)u(t-t_0)\}=e^{-st_0}F(s),t_0>0$
- s域平移：$\mathcal{L}\{f(t)e^{-at}\}=F(s+a)$
- 尺度变换：$\mathcal{L}\{f(at)\}=\frac{1}{a}F(\frac{s}{a}),a>0$
- s域微分：$\frac{dF(s)}{ds}=\mathcal{L}\{-tf(t)\}$
- s域积分：$\int_s^\infty F(s_1)ds_1=\mathcal{L}\{\frac{f(t)}{t}\}$
- 初值定理：若$f(t)$和其导数的拉氏变换都存在，则$\lim\limits_{t\to0+}f(t)=f(0+)=\lim\limits_{s\to\infty}sF(s)$
- 终值定理：$f(t)$和其导数的拉氏变换和极限$\lim\limits_{t\to\infty}f(t)$都存在，则$\lim\limits_{t\to\infty}f(t)=\lim\limits_{s\to0}sF(s)$
- 时域卷积：若$\mathcal{L}\{f_1(t)*f_2(t)\}=F_1(s)F_2(s)$
- 频域卷积：$\mathcal{L}\{f_1(t)f_2(t)\}=\frac{1}{2\pi j}F_1(s)*F_2(s)=\frac{1}{2\pi j}\int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty}F_1(p)F_2(s-p)dp$

求解微分方程：两边拉氏变换，然后求逆变换

部分分式解法：（分母次数大，为真分式，一般先变为真分式再算）

- 单根（无重根且为实数根）：$F(s)=\sum\frac{K_i}{s-p_i}$，其中$K_i=(s-p_i)F(s)|_{s=p_i}$
- 共轭复数根：两个重根的K_i共轭，可以直接看出结果
- 重根：假设存在一个k阶极点p_1，则$F(s)$中一部分可以分解为$F_1(s)=\sum\frac{K_{1i}}{(s-p_1)^i}$，则$K_{1k}=(s-p_1)^kF(s)|_{s=p_1}$，减去该项成分，再继续进行类似运算（或者也可以考察多重根分母时，分子的情况，即分离出$G(s)=\frac{H(s)}{(s-p_1)^k}$，则$K_{1i}=\frac{1}{(k-i)!}H^{(k-i)}(p_1)$）

留数法分解分式（？）

拉氏变换分析电路（？）

系统函数$H(s)=\mathcal{L}\{h(t)\}$

系统函数求解一般步骤（**求逆矩阵**，**得到转移导纳**？）

$H(s)$零极点分布与$h(t)$波形特征的对应：若极点位于左半平面，则$h(t)$波形衰减，若一阶极点且位于虚轴，则为等幅振荡或常量，位于右半平面或者二阶虚轴等其他情况为增长形式

零点分布不会对时域波形发生实质影响

响应信号的拉氏变换$R(s)=E(s)H(s)$，其极点来自系统$H(s)$和激励源$E(s)$，对应于自由响应和强迫响应

特征方程Δ（行列式）的根为系统的固有频率，$H(s)$的极点属于系统的固有频率，但不一定是全部

- 瞬态响应：无穷时间后趋于0
- 稳态响应：除瞬态响应

稳定系统极点位于左半平面，自由响应必定衰减，为瞬态，而激励信号的极点位于虚轴，所以强迫响应为稳态响应（特例，无损电路在虚轴上有共轭极点，自由响应为稳态响应，输入信号为衰减信号时，强迫响应为瞬态）

拉氏变换$H(j\omega)$可写为$|H(j\omega)|e^{j\varphi(\omega)}$，为幅频响应特性和相频响应特性

s平面分析法

全通函数：极点位于左半平面，原点位于右边平面，且二者相对于虚轴镜面对称，幅频特性为水平线，相频特性单调减

最小相移函数：零点全部位于左半平面或$j\omega$轴的系统函数，相移较小

非最小相移函数可以表示为最小相移函数与全通函数的级联

BIBO稳定性：某系统对每一个有界输入必然产生有界输出（零状态下）

判断系统BIBO稳定的充要条件：$\int_{-\infty}^{\infty}|h(t)|dt<M$，即冲激响应绝对可积

$H(s)$	$h(t)$	m 和 n	**稳定性和功能**
s	$\delta'(t)$	$m=n+1$	临界稳定，一阶极点在（虚轴）无穷远，微分
1	$\delta(t)$	$m=n$	稳定，无极点，直通
$\frac{1}{s}$	$u(t)$	$m<n$	临界稳定，极点在虚轴上，积分（严格意义）
$\frac{1}{s+a}$	$\mathrm{e}^{-at}u(t)$	$m<n$	稳定，极点在左半平面，低通，积分
$\frac{1}{s^2}$	$tu(t)$	$m<n$	不稳定，二阶极点在虚轴上，积分
$\frac{1}{(s+a)^2}$	$t\mathrm{e}^{-at}u(t)$	$m<n$	稳定，极点在左半平面，低通，积分

稳定性讨论：

- 极点在左半平面为稳定系统：$\lim_{t\to\infty}h(t)=0$
- 右半平面有极点，或在$j\omega$轴上有二阶以上极点为不稳定系统：$\lim_{t\to\infty}h(t)$不存在
- 若$j\omega$轴上有一阶极点，称为临界稳定系统。即$t\to\infty$时，$h(t)$收敛于非零值或呈等幅振荡

双边拉氏变换：

$$\mathcal{L}_B\{f(t)\} = F_B(s) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-st}dt \tag{22}$$

双边拉氏逆变换：

$$\mathcal{L}^{-1}\{F_B(s)\} = f(t) = \frac{1}{2\pi j}\int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty} F_B(s)e^{st}ds \tag{23}$$

这样可以描述非因果信号，但是需要选择合适的收敛域，使得$\lim\limits_{t\to\infty} f(t)e^{-\sigma t} = \lim\limits_{t\to-\infty} f(t)e^{-\sigma t} = 0$

$F_B(s)$的原函数不唯一，必须标注收敛域才能确定$f(t)$

根据拉氏变换收敛边界 σ_0 讨论

- $\sigma_0 > 0$(收敛边界在 s 右半平面)，$F(\omega)$ 不存在

$$\mathscr{L}\left\{e^{at}u(t)\right\} = \frac{1}{s-a}, \quad a > 0$$

- $\sigma_0 < 0$(收敛边界在 s 左半平面)，$F(\omega)=F(s)|_{s=j\omega}$

$$\mathscr{L}\left\{e^{-at}u(t)\right\} = \frac{1}{s+a}, \quad a > 0$$

$$\mathscr{F}\left\{e^{-at}u(t)\right\} = \frac{1}{j\omega+a}, \quad a > 0$$

- $\sigma_0 = 0$(收敛边界在虚轴上)，$F(\omega)$ 存在且有冲激

$$\mathscr{L}\left\{u(t)\right\} = \frac{1}{s}, \quad (\sigma > 0)$$

$$\mathscr{F}\left\{u(t)\right\} = \frac{1}{j\omega} + \pi\delta(\omega)$$

单边拉普拉斯变换与傅里叶变换的关系：

$$\mathcal{F}\{f(t)\} = F(s)|_{s=j\omega} + \sum_{n=1}^{N} K_n\pi\delta(\omega-\omega_n) \tag{24}$$

其中$\sum\limits_{n=1}^{N} K_n\pi\delta(\omega-\omega_n)$，对应于拉氏变换中$\sum\limits_{n=1}^{N}\frac{K_n}{s-j\omega_n}$，也就是位于虚轴上的极点

原函数	拉氏变换	傅里叶变换
$\delta(t)$	1	1
$u(t)$	$\frac{1}{s}$	$\frac{1}{\mathrm{j}\omega}+\pi\delta(\omega)$
t^n	$\frac{n!}{s^{n+1}}$	$\frac{n!}{(\mathrm{j}\omega)^{n+1}}+\mathrm{j}^n\pi\delta^{(n)}(\omega)$
e^{-at}	$\frac{1}{a+s}$	$\frac{1}{a+\mathrm{j}\omega}$
$\sin\omega_0 t$	$\frac{\omega_0}{s^2+\omega_0^2}$	$\frac{\omega_0}{\omega_0^2-\omega^2}+\frac{\pi}{2\mathrm{j}}[\delta(\omega-\omega_0)-\delta(\omega+\omega_0)]$
$\cos\omega_0 t$	$\frac{s}{s^2+\omega_0^2}$	$\frac{\mathrm{j}\omega}{\omega_0^2-\omega^2}+\frac{\pi}{2}[\delta(\omega+\omega_0)+\delta(\omega-\omega_0)]$