1. 设有齐次马尔科夫链，其状态空间为 $I:0,1$, 它的一步转移概率矩阵为:

$$\mathbf{P}=\begin{pmatrix}1-a & a\\ b & 1-b\end{pmatrix}\quad (0<a<1, 0<b<1)$$

试求 $\mathbf{P}^{(n)}$.

2. 设有齐次马尔可夫链，其状态空间为 $\{1,2,3,4,5\}$，其一步转移概率为

$$P=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0.4 & 0.6 & 0 & 0\\ 0 & 0.5 & 0.5 & 0 & 0\\ 0.4 & 0.2 & 0.2 & 0.1 & 0.1\\ 0.5 & 0 & 0.1 & 0.2 & 0.2\end{pmatrix}$$

求从状态 5 出发，被状态集 $\{2,3\}$ 吸收的概率。

3. 考虑具有两个状态 I_1 和 I_2 的马尔可夫链，其转移概率为 $p_{11}=p_{22}=p$，$p_{12}=p_{21}=q$ $(0<p<1, p+q=1)$，初始概率为 $P\{X_0=I_1\}=\alpha$，$P\{X_0=I_2\}=1-\alpha$。求 $\{P_{ij}^{(n)}\}$，$P_i(n)=P\{X_n=I_i\}$ 以及对应的极限概率 P_i。

4. 一个航空订票系统有两台相同的计算机，每天至多使用其中的一台机器。工作着的机器在一天内损坏的概率为 p，车间只有一个修理工，他一次只能修理一台计算机，且要花两天时间才能修复。当一台机器损坏后，当天即停止使用，如果另一台。是好的，第二天就使用这台好的，而修理那台坏的 (以一天作为一个时间单位)。系统的状态可以用数偶 (x,y) 表示，其中 x 是一天结束时仍没有损坏的台数，而当损坏的计算机已被修理工修理了一天时，y 取值为 1，其它情况 y 取值为 0，说明这个系统可以用马尔可夫链描述，并：(1) 写出转移概率矩阵；(2) 求平稳分布。

5. 设有马尔可夫链，它的状态空间为 $I:\{0,1,2\}$，它的一步转移概率矩阵为

$$P=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ 1-p & 0 & p\\ 0 & 1 & 0\end{bmatrix}$$

(1) 试求 $P^{(2)}$，并证明 $P^{(2)}=P^{(4)}$

(2) 求 $P^{(n)}, n\geqslant 1$

6. 甲、乙两人进行比赛，设每局比赛中甲胜的概率是 p，乙胜的概率是 q，和局的概率是 r，(p+q+r=1)。设每局比赛后，胜者加一分，负者减一分，和局不计分，当两人中有一人获得两分时结束比赛。以 X_n 表示比赛至第 n 局时甲获得的分数。

(1) 写出状态空间和一步转移概率矩阵 $\mathbf{P}$

(2) 求 $\mathbf{P}^{(2)}$

(3) 问在甲获得 1 分的情况下，在两局以内可以结束比赛的概率是多少?

7. 设有一个电脉冲序列，脉冲幅度为独立同分布随机度量，取值服从集合 $\{1,2,3,\ldots\ldots,n\}$ 上的均匀分布。现测量其幅度值，每隔一个单位时间测量一次，从第一次测量计算起，求测量到最大值 n 的期望时间。

8. 设 $\{Z_n, n \geqslant 1\}$ 是独立同几何分布的随机变量序列，对于 $k \geqslant 0, P(Z_n = k) = q^k p, q = 1-p, p \in (0,1)$, 设 $X_n = max(Z_1, Z_2, ……, Z_n)$ 是在 n 时刻记录的数值, X_0 为与 $\{Z_n\}_{n\geqslant 1}$ 统计独立的整数值随机变量。试证明 $\{X_n\}$ 为齐次马尔可夫链，并写出其转移概率，以及 X_{n+1} 与 X_n 之间的递推关系。

9. 设 $X_1, X_2, \cdots, X_n, \cdots$ 是独立随机变量序列, 概率密度函数为 $f_{X_n}(x) = f_n(x)$。现在令

$$\begin{aligned} &Y_1 = X_1 \\ &Y_2 = X_1 + X_2 \\ &\vdots \\ &Y_n = X_1 + X_2 + \cdots + X_n \end{aligned}$$

求证: $Y_1, Y_2, \cdots, Y_n, \cdots$ 是马尔可夫序列。

10. 设 $\{Y_n, n = 0, 1, 2, \cdots\}$ 是直线上的整数格点上的随机徘徊, 即

$$Y_n = Y_0 + X_1 + X_2 + \cdots + X_n \quad (n \geqslant 1)$$

$\{Y_0, X_1, X_2, \cdots\}$ 相互独立, $\{X_1, X_2, \cdots\}$ 具有公共分布:

$$P(X_n = k) = p_k \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots$$

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} p_k = 1$$

则 $\{Y_n, n = 0, 1, 2, \cdots\}$, 是一个马尔可夫链，并计算一步转移概率。

11. 设某人有 r 把伞，分别放在家里和办公室里，如果出门遇下雨 (概率为 $p, 0 < p < 1$), 手边也有伞，他就带一把用，即从某一地带至另外一地; 如果天晴他就不带伞. 试证: 经过相当长的一段时间后, 这个人遇下雨但手边无伞可用的概率不超过 $\frac{1}{4r}$. (提示：令 $\{X(n), n \geqslant 1\}$ 表示此人第 n 次出门时身边的伞数)