1. 已知宽平稳过程 $X(t)$ 和 $Y(t)$ 的自相关函数分别为 $R_X(\tau) = exp(3\tau^2)$ 和 $R_Y(\tau) = \sigma^2 \cdot exp(-6|\tau|)$, 问 $X(t)$ 和 $Y(t)$ 是否均方连续，是否均方可导。

2. 设 $N(t)$ 是零均值高斯白噪声，自相关函数为 $R_N(\tau) = \delta(\tau)$,$N(t)$ 通过一个积分器得到 $Y(t) = \alpha \int_0^t N(u)\, du$, 求 $Y(t)$ 的均值 $E[Y(t)]$ 和自相关函数 $R_Y(t,\tau)$, 并证明 $Y(t)$ 不是宽平稳的。

3. 设 $\{\xi_n, n \in \mathbb{Z}\}$ 为白噪声，即 $E(\xi_n) = 0, E(\xi_n\xi_m) = \delta_{nm}\sigma^2$，其中

$$\delta_{nm} = \begin{cases} 1, & n = m \\ 0, & n \neq m \end{cases}$$

定义 $X_n - aX_{n-1} = \xi_n, |a| < 1$，分初始条件 $X_0 = 0$ 和 $X_{-\infty} = 0$ 两种情况讨论序列 $\{X_n\}$ 的稳定性。

4. 设 $g(x)$ 是一个确定性的非线性函数, 如果 $X(t)$ 是宽平稳但不严平稳的随机过程, $Y(t) = g(X(t))$ 是否一定不是宽平稳过程?（构造不少于两个例子并说明）

5. 给定一个线性时不变系统 $H(\omega)$, 其输入为 $X(t)$, 输出为 $Y(t)$, 证明: 若 $X(t)$ 是宽平稳过程, 且 $R_{XX}(\tau) = \mathrm{e}^{\mathrm{j}\alpha\tau}$, 则

$$R_{YX}(\tau) = \mathrm{e}^{\mathrm{j}\alpha\tau}H(\alpha) \quad R_{YY}(\tau) = \mathrm{e}^{\mathrm{j}\alpha\tau}|H(\alpha)|^2$$

6. $X(t)$ 为实随机过程，$R(\tau)$ 为其自相关函数，证明:

$$R(0) - R(\tau) \geqslant \frac{1}{4^n}[R(0) - R(2^n\tau)]$$

提示：可证 $1 - cos\theta \geqslant \frac{1}{4}(1 - cos2\theta)$

7. 设 $X(t)$ 和 $Y(t)$ 是两个相互独立的实宽平稳过程, 均值分别为常数 m_X 和 m_Y, 且 $X(t)$ 的功率谱密度为 $S_X(\omega)$。定义 $Z(t) = X(t) + Y(t)$，求 $S_{XY}(\omega)$ 和 $S_{XZ}(\omega)$。

8. 复随机过程 $Z(t) = Ae^{j\Omega t}$，其中 Ω 的概率密度函数为 $f_\Omega(\omega)$，A 为复常数。求 $Z(t)$ 的功率谱密度 $S_Z(\omega)$。

9. 已知平稳过程 $\{X(t), -\infty < t < +\infty\}$ 的自相关函数 $R_X(\tau)$ 和功率谱密度 $S_X(\omega)$，设

$$Y(t) = X(t + a) - X(t), -\infty < t < +\infty$$

其中 a 为常数，求证 $\{Y(t), -\infty < t < +\infty\}$ 也是平稳过程，并求其自相关函数 $R_Y(\tau)$ 和功率谱密度 $S_Y(\omega)$.

10. 若 $X(t)$ 为一带宽有限的实平稳随机过程, 当 $|\omega| > \omega_c$ 时, $S(\omega) = 0$, 证明: 当 $|\tau| < \frac{\pi}{2\omega_c}$ 时，有

$$R(\tau) \geqslant R(0)cos(\omega_c\tau)$$

11. 设 $S_X(\omega)$ 是一个随机过程的功率谱密度，证明：$\frac{\partial^2}{\partial\omega^2}S_X(\omega)$ 不可能是功率谱密度。

12. (1) 已知宽平稳随机过程的功率谱密度 $S(\omega) = \frac{\omega^2+1}{\omega^4+5\omega^2+6}$, 求其对应的自相关函数。

(2) 已知宽平稳随机过程的自相关函数 $R_X(\tau) = \sigma^2 exp(-\alpha\tau^2)$, 其中 α、σ 为常数，且 $\alpha > 0$, 求其对应的功率谱密度。

13. 设 $X(t)$ 和 $Y(t)$ 为实平稳随机过程，定义窄带平稳过程

$$Z(t) = X(t)\cos\omega_0 t - Y(t)\sin\omega_0 t$$

证明：

(1) $R_Y(\tau) = R_Z(\tau)\cos\omega_0\tau + \hat{R}_Z(\tau)\sin\omega_0\tau$; (2) $R_Z(\tau) = R_X(\tau)\cos\omega_0\tau + R_{XY}(\tau)\sin\omega_0\tau$