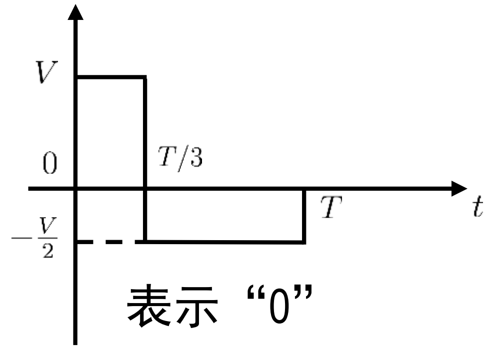
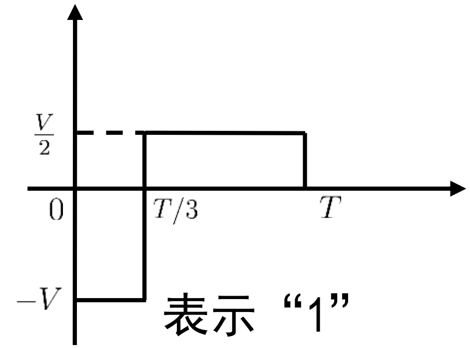
波形信道：传一个符号（一）

1. 二元波形信道用如下波形表示“0”和“1”，两者等概发送。





① 给出 E_s

② 给出最佳接收的内积波形(要求归一化)

③ 给出匹配滤波器(要求在 T 时刻抽样最佳)

④ 给出③中抽样点对应的电平信道

⑤ 计算误比特率，用 V, T, n_0 表示

⑥ 若采用(7, 4)汉明码，则误块率为多少？

⑦ 在⑥问中传送4个bit的总能耗是多少，平均传1个bit的能耗是多少？

⑧ 在⑥问中若传1个bit所用的能量限制为 E_b, 给出 E_s 与 V, T 的关系

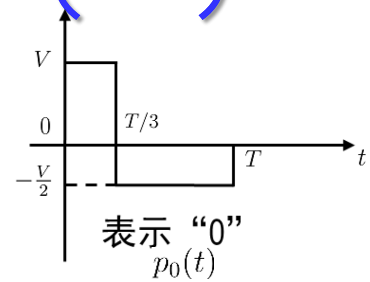
⑨ 画出③中匹配滤波器的输出波形

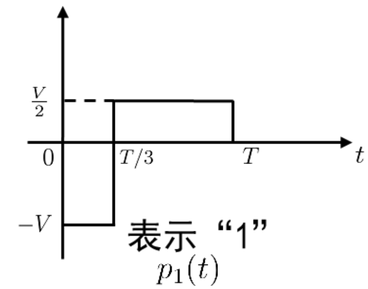
⑩ 若 $p(t) = V\,\mathrm{rect}(\frac{t-T/2}{T})$ 替代匹配滤波器冲激响应，其余不变，重做⑤⑥

波形信道：传一个符号（一）

1. 如下

① $E_s=\frac{1}{2}\int_0^T p_0^2(t)dt+\frac{1}{2}\int_0^T p_1^2(t)dt=\frac{1}{2}V^2T$

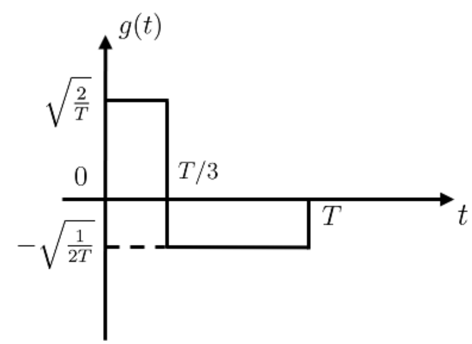




② 最佳接收波形 $g(t)$ 可以有两种选择，一种形似 $p_0(t)$，另一种形似 $p_1(t)$

此处仅提供形似 $p_0(t)$(归一化) 的图像及对应函数：

$$g(t)=\begin{cases}\sqrt{\frac{2}{T}} & 0<t\le\frac{T}{3}\\ -\sqrt{\frac{1}{2T}} & \frac{T}{3}<t\le T\end{cases}$$



③ 与②选择相关，一种归一化的匹配滤波器为 $h(t)=g(T-t)$

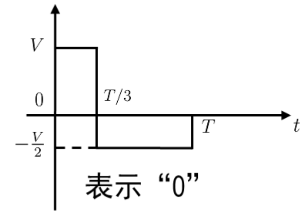
④ $y=x+n$，发送电平符号 $x\in\{-A,A\}=\left\{-\sqrt{\frac{T}{2}}V,\sqrt{\frac{T}{2}}V\right\}$，

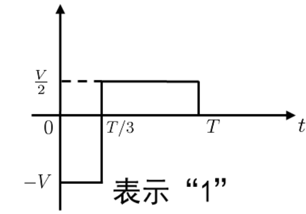
符号能量 $E_A=E\{x^2\}=\frac{1}{2}V^2T$，电平信道噪声 $n\sim N(0,\sigma^2)=N\left(0,\frac{n_0}{2}\right)$

波形信道：传一个符号（一）

1. 续：

⑤ 误比特率 $P_b = P_s = Q\left(\sqrt{\frac{2E_s}{n_0}}\right) = Q\left(\sqrt{\frac{V^2T}{n_0}}\right)$



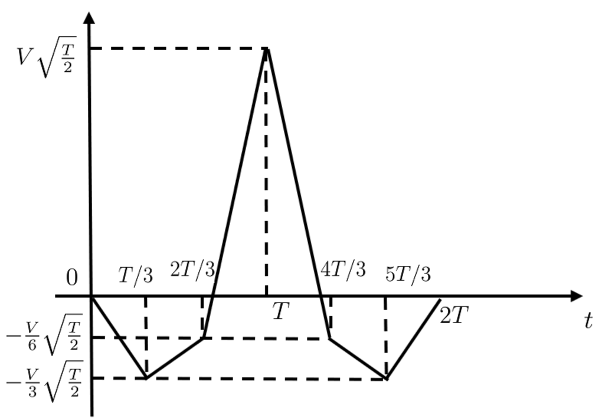


⑥ 误块率 $P_B = 1 - (1-P_b)^7 - 7P_b(1-P_b)^6$

⑦ 总能耗 $7E_s = \frac{7}{2}V^2T$ ，平均传1个bit的能耗是 $\frac{7}{4}E_s = \frac{7}{8}V^2T$

⑧ $E_b \geq \frac{7}{4}E_s = \frac{7}{8}V^2T$

⑨ 基于之前给出的 $h(t)$，符号0的输出波形 $p_0(t) * h(t)$ 如下：



符号1的输出波形 $p_1(t) * h(t)$ 也可以同样给出，此处略去。

⑩ 重新计算误比特率 $P_b = \frac{1}{2}$ ，误块率 $P_B = 1 - (1-P_b)^7 - 7P_b(1-P_b)^6 = \frac{15}{16} = 0.9375$

波形信道：传一个符号（二）

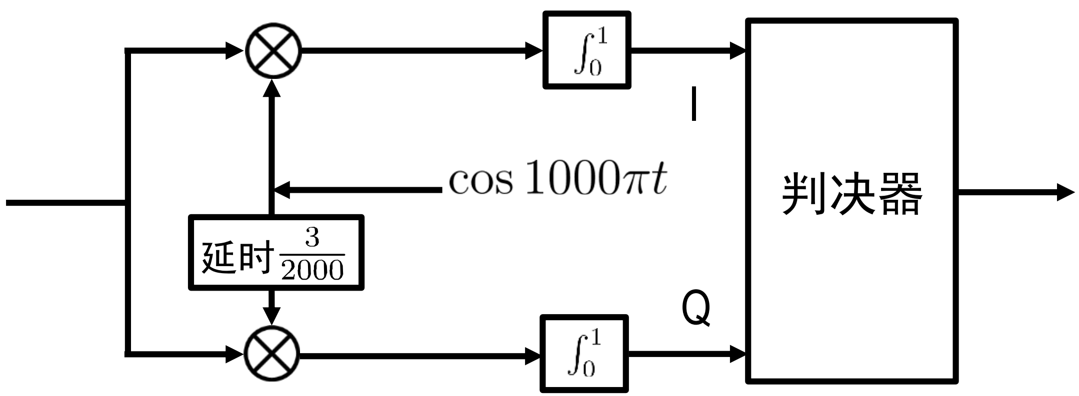
1. 有一复电平的四元波形实现如下：

“00”	$\cos 1000\pi t$	“01”	$\sin 1000\pi t$	$0 \leqslant t < 1$
“11”	$-\cos 1000\pi t$	“10”	$-\sin 1000\pi t$	

其中“0”“1”等概发送，$n_0 = 0.2$

① 给出 E_s

② 接收机的结构如下图，证明其最优性



③ 给出I,Q两路输入判决器的电平分布

④ 给出判决映射关系，即$f: y_I + jy_Q \longrightarrow \{0,1\}^2$

⑤ 给出误比特率P_b

波形信道：传一个符号（二）

1. 如下：

① $E_s = \int_0^1 \cos^2 1000\pi t dt = \int_0^1 \sin^2 1000\pi t dt = \frac{1}{2}$

② 证明其最优性=I,Q两路各自最佳接收+相互无干扰

发送波形$x(t) = (x_{\mathrm{I}} \cdot 2\cos 1000\pi t - x_{\mathrm{Q}} \cdot 2\sin 1000\pi t) \cdot \mathbb{1}(0 \le t < T)$

符号集合$(x_{\mathrm{I}}, x_{\mathrm{Q}}) \in \{(1/2, 0), (0, -1/2), (-1/2, 0), (0, 1/2)\}$

接收波形$y(t) = x(t) + n(t) = (x_{\mathrm{I}} \cos 1000\pi t - x_{\mathrm{Q}} \sin 1000\pi t) \cdot \mathbb{1}(0 \le t < T) + n(t)$

I,Q两路各自最佳接收：$\cos 1000\pi t \quad -\sin(1000\pi t)$ 符合条件

同样可验证I,Q两路相互无干扰：

$y_{\mathrm{I}} = \langle y(t), \cos 1000\pi t \cdot \mathbb{1}(0 \le t < T)\rangle = x_{\mathrm{I}} + n_{\mathrm{I}}$, 其中 $n_{\mathrm{I}} = \int_0^T n(t)\cos 1000\pi t \cdot dt$

$y_{\mathrm{Q}} = \langle y(t), -\sin 1000\pi t \cdot \mathbb{1}(0 \le t < T)\rangle = x_{\mathrm{Q}} + n_{\mathrm{Q}}$, $n_{\mathrm{Q}} = -\int_0^T n(t)\sin 1000\pi t$

可验证 n_{I}与n_{Q}相互独立，即证

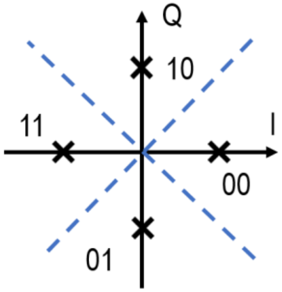
波形信道：传一个符号（二）

1. 续：

③ 由上一问可知n_{I}与n_{Q}为相互独立的高斯分布，方差$\sigma_{\mathrm{I}}^2=E\left[n_{\mathrm{I}}^2\right]=\sigma_{\mathrm{Q}}^2=E\left[n_{\mathrm{Q}}^2\right]=\frac{n_0}{4}=0.05$，于是可得输入判决器的电平分布如下：$y\sim N\left(\begin{pmatrix}x_{\mathrm{I}}\\x_{\mathrm{Q}}\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0.05&0\\0&0.05\end{pmatrix}\right)$，其中符号集合满足$(x_{\mathrm{I}},x_{\mathrm{Q}})\in\{(1/2,0),(0,-1/2),(-1/2,0),(0,1/2)\}$，概率均为1/4。

④ 判决平面如右图所示，角度描述也可

$$f\left(y_I+jy_Q\right)=\begin{cases}00, & y_{\mathrm{I}}\geqslant\|y_{\mathrm{Q}}\|\\10, & y_{\mathrm{Q}}\geqslant\|y_{\mathrm{I}}\|\\11, & y_{\mathrm{I}}\leqslant-\|y_{\mathrm{Q}}\|\\01, & y_{\mathrm{Q}}\leqslant-\|y_{\mathrm{I}}\|\end{cases}$$

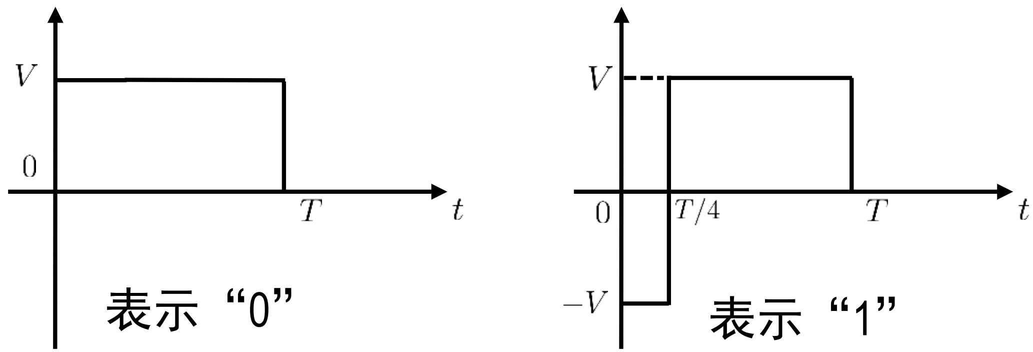


⑤ M=4的PSK调制，且为格雷映射，故误比特率

$$P_b=\frac{2}{\log_2 M}Q\left(\sqrt{\frac{E_s}{\sigma^2}}\cdot\sin\frac{\pi}{M}\right)=Q(\sqrt{10}/2)\approx 0.0569$$

波形信道：传一个符号（二）

2. 有一一般的波形信道如下。“0”和“1”等概发送，$R_n(\tau)=\frac{n_0}{2}\delta(\tau)$

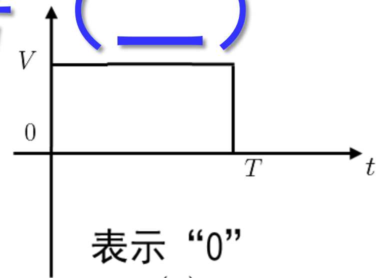


① 计算E_s

② 给出两种标准正交基及其各自对应的电平信道

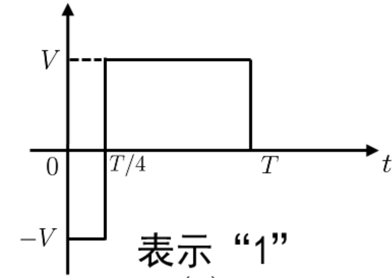
③ 给出误比特率P_b

波形信道：传一个符号（二）



表示“0”

$s_1(t)$



表示“1”

$s_2(t)$

2. 如下

① $E_s = \int_0^T V^2(t)dt = V^2T$

②可采用施密特正交化来构建正交波形，此处答案不唯一，与初始选取的波形有关。一种可能的答案如下：

第一个标准正交基 $p_{\mathrm{I}}(t) = \frac{s_1(t)}{\|s_1(t)\|_2} = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{T}}, & 0 \le t < T \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$

投影系数$a_1^{\mathrm{I}} = \|s_1(t)\|_2 = V\sqrt{T}, a_1^{\mathrm{Q}} = 0$

而$s_2^{\perp}(t) = s_2(t) - s_2(t) - \langle s_2(t), p_{\mathrm{I}}(t)\rangle\, p_{\mathrm{I}}(t)$

所以第二个标准正交基 $p_{\mathrm{Q}}(t) = \frac{s_2^{\perp}(t)}{\|s_2^{\perp}(t)\|_2} = \begin{cases} -\sqrt{\frac{3}{T}}, & 0 \le t < \frac{T}{4} \\ \sqrt{\frac{1}{3T}}, & \frac{T}{4} \le t < T \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$

投影系数$a_2^{\mathrm{Q}} = \|s_2^{\perp}(t)\|_2 = \frac{V}{2}\sqrt{3T}, a_2^{\mathrm{I}} = \langle s_2(t), p_{\mathrm{I}}(t)\rangle = \frac{V}{2}\sqrt{T}$

综上分别对应电平信道为$y_{\mathrm{I}} = x_{\mathrm{I}} + n_{\mathrm{I}}, y_{\mathrm{Q}} = x_{\mathrm{Q}} + n_{\mathrm{Q}}$，其中

$(x_{\mathrm{I}}, x_{\mathrm{Q}}) \in \left\{(V\sqrt{T}, 0), \left(\frac{V}{2}\sqrt{T}, \frac{V}{2}\sqrt{3T}\right)\right\}$，$n_{\mathrm{I}}$与$n_{\mathrm{Q}}$为相互独立的高斯分布$N(0, \frac{n_0}{2})$

③ 二元传输，误比特率$P_b = P_e = Q(\frac{d}{\sqrt{n_0/2}}) = Q(\frac{\sqrt{\left(a_1^{\mathrm{I}} - a_2^{\mathrm{I}}\right)^2 + \left(a_2^{\mathrm{Q}}\right)^2}}{2\sqrt{n_0/2}}) = Q(\sqrt{\frac{V^2T}{2n_0}})$