1 行列式的进一步练习

1. 我们现在考虑分块矩阵的行列式：

   (a) 给定一个分块矩阵$M = \begin{bmatrix} A & B \\ 0 & D \end{bmatrix}$. 这里$A$是一个$m \times m$的矩阵，$D$是一个$n \times n$的矩阵， B是一个$m \times n$的矩阵。求证： $|M| = |A||D|$ (提示：考虑对M做初等行变换对A和D的影响。).

   (b) 考虑一个一般的分块矩阵$M = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}$,这里$A$是一个$m \times m$的矩阵，$D$是一个$n \times n$的矩阵， B是一个$m \times n$的矩阵， C是$n \times m$的矩阵. 假设A和D可逆，求证 a): $|M| = |D||A - BD^{-1}C|$, b): $|M| = |A||D - CA^{-1}B|$. (提示：考虑变换把M变成上题中的形式。)

2. 计算下列矩阵的伴随矩阵并利用Cramer法则求逆矩阵

$$A_1 = \begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 6 & 7 \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} 4 & 5 & 6 \\ 6 & 7 & 5 \\ 4 & 6 & 8 \end{bmatrix} \tag{1}$$

3. 利用Cramer法则求矩阵方程$Ax = b$的解

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} \tag{2}$$

4. 对于一个$n \times n$ 矩阵A, 我们定义了它的伴随矩阵 A^* (伴随矩阵的定义是$(A^*)_{ij} = A_{ji}$, 这里A_{ij}是a_{ij}的代数余子式。)。

   (a) 证明： $AA^* = A^*A = |A|I_{n\times n}$.

   (b) 证明： A^* 可逆当且仅当A可逆。

   (c) 证明： $|A^*| = |A|^{n-1}$.

   (d) 假设A可逆，求$(A^*)^*$ (这里是A的伴随矩阵的伴随矩阵，答案用A, A^T, 以及A的行列式来表达。）。

5. 假设A是一个3阶方阵，并且

$$(A^*)^* = \begin{bmatrix} 6 & 4 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 2 \end{bmatrix} \tag{3}$$

   求 A和A^*.

2 特征值和特征向量的初步练习

1. (a) 求下列矩阵的特征多项式，特征值和特征向量：

$$A_1 = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} 4 & 5 & 6 \\ 0 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \tag{4}$$

(b) 找出一个相似变换(利用特征向量)把上面两个矩阵对角化。

2. 证明： 不同特征值对应的特征向量是线性无关的。

3. 证明： AB 和BA 的特征多项式是相同的。

4. 求所有只和自己相似的2×2矩阵。（就是任何相似变换都把自己变成自己）。对于一般的$n\times n$矩阵呢?

5. 考虑两个$n\times n$的对易矩阵$AB=BA$.

   (a) 假设x是A的特征值λ的一个特征向量. 证明：

      i. $B^k x$也是A的特征向量，所对应的特征值是λ.

      ii. $(x, Bx, \ldots)$ 生成一个线性子空间，记这个空间的维数为m, 证明: $x, Bx, \ldots, B^{m-1}x$是这个线性子空间的一组基(提示：用反证法). m是否等于λ的几何重数?

   (b) 考虑A的一个特征值λ_A，和这个特征值对应的特征向量空间V_{λ_A} 中的一个子空间 $V_{\lambda_A}(x)$: 这个空间由 $(x, Bx, \ldots)$生成, x是λ_A的一个特征向量， $(x, Bx, \ldots, B^{m-1}x)$是这个线性子空间的一组基. 假设$B$有一个特征向量$y$(特征值为$\lambda_B$) 也在$V_{\lambda_A}(x)$这个空间里面。 证明:

      i. $A^k y$也在$V_{\lambda_A}(x)$里面, 这里k是任何正整数。

      ii. $(y, Ay, \ldots,)$生成一个子空间，这个子空间记为$V_{\lambda_B}(y)$. 由上题可知，存在一个n, 使得 $(y, Ay, A^2y, \ldots, A^{n-1}y)$是$V_{\lambda_B}(y)$的一组基, 证明： $n\leq m$.

   (c) 证明： 如果A和B都有n个线性无关特征向量，那么我们可以选择一组线性无关的向量，使得每一个向量同时是A和B的特征向量。这也意味着，A和B可以同时用相似变换对角化！

3 特征值，特征向量的一个应用：附加题

1. **测不准原理**。在量子力学的框架里面，物理系统被一个波函数ψ来描述，而物理观测量f是被一个算子来描述。一个重要的特征是，对应于一个给定的物理量H(比如能量)，对于一个一般量子系统的观测不会给我们确定的观测量。但是有 一些特殊的波函数 Φ_n，我们的观测会给出确定的物理量E_n。这样的波函数称之为本征态（Eigenstate）， 而这样的确定的物理量称之为本征值 （Eigenvalue）。 数学的描述就是

$$H\Phi_n = E_n\Phi_n. \tag{5}$$

   这个方程称之为本征方程。我们可以把上述框架用我们学习的线性代数来描述. 用我们矩阵的语言就是说： 一个物理量对应于一个矩阵A, 一个一般的系统态被一个向量x描述。 它的本征态对应于一个特征向量 x_n，它的本征值对应于特征值 λ_n。 本征方程就是我们的特征方程:

$$Ax_n = \lambda_n x_n. \tag{6}$$

   我们现在就用矩阵的语言(量子力学也称之为矩阵力学)来做一些量子力学性质的模拟。

(a) 我们的物理观测量是实数，但是一个一般实矩阵的特征值可能是复数。我们其实需要考虑对称矩阵。证明： 对于一个对称矩阵，它的特征值都是实数。我们接下来考虑的都是对称矩阵。

(b) 考虑一个物理量A, 它有n个线性独立的特征向量: 证明： 我们通过这些向量可以构造一组正交归一基 $x_1, \ldots, x_n$。

(c) 量子力学系统x(被一个向量描述), 我们把这个向量的长度定为一$x^T x = 1$. 那么任何一个x都可以由 上述正交归一基来展开

$$x = a_1 x_1 + a_2 x_2 + \ldots + a_n x_n. \tag{7}$$

证明： $a_1^2 + \ldots + a_n^2 = 1$.

(d) 给定一个物理量M, 那么这个物理量在任何系统x上的观测的期望值是

$$\overline{M} = x^T M x. \tag{8}$$

这个物理量对应的误差平方是$\sigma_A^2 = (M - \bar{M})^2$, 证明:

$$\overline{\sigma_M^2} = \overline{M^2} - (\overline{M})^2. \tag{9}$$

误差就是$\sigma_M = \sqrt{\overline{M^2} - (\overline{M})^2}$. 这个量描述我们对一个物理量观测的确定程度， 问题： 对应于什么物理量，什么系统态下误差最小?

(e) 量子力学里面很重要的一个现象是测不准原理。假设有两个物理量p和q, 它们满足一个矩阵方程$PQ + QP = I$. 假设P和Q的期望值都是0，证明:

$$\sigma_P \sigma_Q \geq \frac{1}{2} \tag{10}$$

提示：考虑不等式$|(aQ + P)x|^2 \geq 0$，这里a是任意实数。这个公式的意义就是如果一个观测量的误差很小，那么另外一个观测量的误差就会很大。