2021年数据与算法秋季学期第四次作业

2021.12.06

1. 设$x > 0, x$的相对误差为δ，试估计函数$f(x) = \ln x$的绝对误差。

2. 设x的绝对误差为η，求$y = e^{0.2x}$在$x = 1$处的相对误差。

3. 下列的五个计算式在形式上等价，如果$\sqrt{2}$取三位有效数字分别代入各式计算，试分析各个算式计算后的相对误差。

   （1）$(\sqrt{2}-1)^6$ （2）$(3-2\sqrt{2})^3$ （3）$99-70\sqrt{2}$ （4）$\frac{1}{(\sqrt{2}+1)^6}$ （5）$\frac{1}{(3+2\sqrt{2})^3}$

4. 正弦函数可以由无穷级数 $\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots$ 给出

   （1）对$x = 0.1,0.5,1.0$，如果用级数的第一项近似正弦函数，即$\sin x \approx x$，那么向前误差和向后误差各为多少？

   （2）对$x = 0.1,0.5,1.0$，如果用级数的前两项近似正弦函数，即$\sin x \approx x - \frac{x^3}{3!}$，那么向前误差和向后误差各为多少？

5. 在下成对的数中，设x_T为精确值，确定近似值x_A的有效数字的位数
   （1）$x_T = 451.01$，$x_A = 451.023$
   （2）$x_T = -0.04518$，$x_A = -0.045113$
   （3）$x_T = 23.4604$，$x_A = 23.4213$

6. 下列各个算式中的数均精确到末尾数字，请指出其运算结果的精确值所在范围
   （1）$1.23 + 4.6$ （2）$4.6 - 1.23$ （3）3×4

7. 求二次方程$x^2 - 74x + 2 = 0$的两个根，使它们至少具有4位有效数字，已知$\sqrt{1367} = 36.974$。

8. 将下列矩阵按照良态和病态分类：

（1）$\begin{bmatrix} 10^{10} & 0 \\ 0 & 10^{-10} \end{bmatrix}$ （2）$\begin{bmatrix} 10^{10} & 0 \\ 0 & 10^{10} \end{bmatrix}$ （3）$\begin{bmatrix} 10^{-10} & 0 \\ 0 & 10^{-10} \end{bmatrix}$ （4）$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$

9. 用高斯消去法求解下列的线性方程组：

（1）$\begin{cases} 2x_0 - x_1 + 3x_2 = 1 \\ 4x_0 + 2x_1 + 5x_2 = 4 \\ x_0 + 2x_1 = 7 \end{cases}$ （2）$\begin{cases} 2x_0 - x_1 - x_2 = 4 \\ 3x_0 + 4x_1 - 2x_2 = 11 \\ 3x_0 - 2x_1 + 4x_2 = 11 \end{cases}$

10. 用 LU 分解法求解方程组$Ax = b$和$Ax = c$，其中：

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & -2 \\ 4 & 9 & -3 \\ -2 & -1 & 7 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 2 \\ 8 \\ 10 \end{bmatrix}, \quad c = \begin{bmatrix} 4 \\ 8 \\ -6 \end{bmatrix}$$

11. 分别采用雅可比方法和高斯-塞德尔方法求解下面的线性方程组：

$$\begin{cases} 2x_0 - x_1 - x_2 = 4 \\ 3x_0 + 4x_1 - 2x_2 = 11 \\ 3x_0 - 2x_1 + 4x_2 = 11 \end{cases}$$

给出迭代公式，并给出以初值$x_0 = [0 \quad 0 \quad 0]'$开始的四步迭代的结果，比较两个方法的迭代结果。