1. 设有齐次马尔科夫链，其状态空间为 $I: 0, 1$, 它的一步转移概率矩阵为：

$$\mathbf{P}=\begin{pmatrix}1-a & a \\ b & 1-b\end{pmatrix} \quad (0<a<1, 0<b<1)$$

试求 $\mathbf{P}^{(n)}$.

参考答案：由矩阵特征值理论可得：$\mathbf{P}=\mathbf{Q}\begin{pmatrix}1 & 0 \\ 0 & 1-a-b\end{pmatrix}\mathbf{Q}^{-1}$, $\mathbf{Q}=\begin{pmatrix}1 & a \\ 1 & -b\end{pmatrix}$

因此，$\mathbf{P}^{(n)}=\mathbf{P}^{n}=\mathbf{Q}\begin{pmatrix}1 & 0 \\ 0 & (1-a-b)^{n}\end{pmatrix}\mathbf{Q}^{-1}=\begin{pmatrix}\frac{b+a(1-a-b)^n}{a+b} & \frac{a-a(1-a-b)^n}{a+b} \\ \frac{b-b(1-a-b)^n}{a+b} & \frac{a+b(1-a-b)^n}{a+b}\end{pmatrix}$

2. 设有齐次马尔可夫链，其状态空间为 $\{1,2,3,4,5\}$，其一步转移概率为

$$P=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.4 & 0.6 & 0 & 0 \\ 0 & 0.5 & 0.5 & 0 & 0 \\ 0.4 & 0.2 & 0.2 & 0.1 & 0.1 \\ 0.5 & 0 & 0.1 & 0.2 & 0.2\end{pmatrix}$$

求从状态 5 出发，被状态集 $\{2,3\}$ 吸收的概率。

参考答案：

设从状态 5 出发，被状态集 $\{2,3\}$ 吸收的概率为 p_1；从状态 4 出发，被状态集 $\{2,3\}$ 吸收的概率为 p_2。由 Markov 性和齐次性可得：

$$\begin{aligned} p_1 &= 0.1+0.2p_1+0.2p_2 \\ p_2 &= 0.4+0.1p_1+0.1p_2 \end{aligned}$$

解方程得，$p_1=0.2429=\frac{17}{70}$.

3. 考虑具有两个状态 I_1 和 I_2 的马尔可夫链，其转移概率为 $p_{11}=p_{22}=p$，$p_{12}=p_{21}=q$ $(0<p<1, p+q=1)$，初始概率为 $P\{X_0=I_1\}=\alpha$，$P\{X_0=I_2\}=1-\alpha$。求 $\{P_{ij}^{(n)}\}$，$P_i(n)=P\{X_n=I_i\}$ 以及对应的极限概率 P_i。

参考答案：由题可知，该马尔可夫链的一步转移概率矩阵为：

$$P=\begin{bmatrix}p & q \\ q & p\end{bmatrix}$$

可求得该矩阵的特征值 $\lambda_1=1$ 和 $\lambda_2=p-q$，特征向量为 $x_1=[\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}]^T$ 和 $x_2=[\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{\sqrt{2}}]^T$。

因此，一步转移概率矩阵可分解为：

$$P=\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0 \\ 0 & p-q\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}}\end{bmatrix}$$

进一步可以求得 n 步转移概率矩阵为：

$$P^{(n)}=\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0 \\ 0 & (p-q)^n\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{1}{2}+\frac{1}{2}(p-q)^n & \frac{1}{2}-\frac{1}{2}(p-q)^n \\ \frac{1}{2}-\frac{1}{2}(p-q)^n & \frac{1}{2}+\frac{1}{2}(p-q)^n\end{bmatrix}$$

因此：

$$
\begin{gathered}
P_1(n)=\alpha P_{11}^{(n)}+(1-\alpha)P_{21}^{(n)}=\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{2}(2\alpha-1)(p-q)^n \\
P_2(n)=\alpha P_{12}^{(n)}+(1-\alpha)P_{22}^{(n)}=\tfrac{1}{2}-\tfrac{1}{2}(2\alpha-1)(p-q)^n \\
P_1=P_2=\tfrac{1}{2}
\end{gathered}
$$

4. 一个航空订票系统有两台相同的计算机，每天至多使用其中的一台机器。工作着的机器在一天内损坏的概率为 p，车间只有一个修理工，他一次只能修理一台计算机，且要花两天时间才能修复。当一台机器损坏后，当天即停止使用，如果另一台。是好的，第二天就使用这台好的，而修理那台坏的 (以一天作为一个时间单位)。系统的状态可以用数偶 (x,y) 表示，其中 x 是一天结束时仍没有损坏的台数，而当损坏的计算机已被修理工修理了一天时，y 取值为 1，其它情况 y 取值为 0，说明这个系统可以用马尔可夫链描述，并：(1) 写出转移概率矩阵；(2) 求平稳分布。

参考答案：说明系统可用马尔可夫链描述言之成理即对。

(1) 转移概率矩阵为：

$$
P=\begin{array}{c}
 \\ (2,0) \\ (1,0) \\ (1,1) \\ (0,1)
\end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{cccc} (2,0) & (1,0) & (1,1) & (0,1) \end{array} \\
\begin{bmatrix}
q & p & 0 & 0 \\
0 & 0 & q & p \\
q & p & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0
\end{bmatrix}
\end{array}
$$

(2) 设平稳分布 $\pi=[\pi_1,\pi_2,\pi_3,\pi_4]$，由 $\pi P=\pi$ 解得：

$$
\pi=[\tfrac{q^2}{p^2+1},\tfrac{p}{p^2+1},\tfrac{pq}{p^2+1},\tfrac{p^2}{p^2+1}]
$$

5. 设有马尔可夫链，它的状态空间为 $I:\{0,1,2\}$，它的一步转移概率矩阵为

$$
P=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1-p & 0 & p \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}
$$

(1) 试求 $P^{(2)}$，并证明 $P^{(2)}=P^{(4)}$

(2) 求 $P^{(n)},n\geqslant 1$

参考答案：(1)

$$
P^{(2)}=P\cdot P=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1-p & 0 & p \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1-p & 0 & p \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1-p & 0 & p \\ 0 & 1 & 0 \\ 1-p & 0 & p \end{bmatrix}
$$

$$
P^{(4)}=P^{(2)}\cdot P^{(2)}=\begin{bmatrix} 1-p & 0 & p \\ 0 & 1 & 0 \\ 1-p & 0 & p \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1-p & 0 & p \\ 0 & 1 & 0 \\ 1-p & 0 & p \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1-p & 0 & p \\ 0 & 1 & 0 \\ 1-p & 0 & p \end{bmatrix}
$$

所以有 $P^{(4)} = P^{(2)}$.

(2) 由 (1) 可知，当 n 为偶数时，

$$P^{(n)} = P^{(2)} = \begin{bmatrix} 1-p & 0 & p \\ 0 & 1 & 0 \\ 1-p & 0 & p \end{bmatrix}$$

当 n 为奇数 $(n = 2k+1)$ 时,

$$P^{(n)} = P^{(2k)} \cdot P = \begin{bmatrix} 1-p & 0 & p \\ 0 & 1 & 0 \\ 1-p & 0 & p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1-p & 0 & p \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1-p & 0 & p \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = P$$

6. 甲、乙两人进行比赛，设每局比赛中甲胜的概率是 p，乙胜的概率是 q，和局的概率是 r，(p+q+r=1)。设每局比赛后，胜者加一分，负者减一分，和局不计分，当两人中有一人获得两分时结束比赛。以 X_n 表示比赛至第 n 局时甲获得的分数。

(1) 写出状态空间和一步转移概率矩阵 **P**

(2) 求 $\mathbf{P}^{(2)}$

(3) 问在甲获得 1 分的情况下，在两局以内可以结束比赛的概率是多少?

参考答案:

(1) 甲所有可能获得的分数情况为-2，-1，0，1，2 共 5 种，将其分别记为状态 1，2，3，4，5。因此 X_n 的状态空间为

$$I = \{1, 2, 3, 4, 5\}$$

根据题意写出一步转移概率矩阵

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ q & r & p & 0 & 0 \\ 0 & q & r & p & 0 \\ 0 & 0 & q & r & p \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(2) 因此有二步转移概率矩阵

$$\begin{aligned} \mathbf{P}^{(2)} &= \mathbf{P}^2 \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ q+rp & r^2+pq & 2pr & p^2 & 0 \\ q^2 & 2rq & r^2+2pq & 2pr & p^2 \\ 0 & q^2 & 2qr & r^2+pq & p+rp \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

(3) 要结束比赛则甲最后获得的分数为-2 分或 2 分，从 $\mathbf{P}^{(2)}$ 中可知甲在获得 1 分的条件下（即状态 4）在两步以内获得-2 分和 2 分的概率分别为 0 和 p+rp，而其中恰好经过一步结束比赛的概率为 p，恰好经过两步比赛结束的概率为 rp。因此题意所求的概率为 $p+rp$。

7. 设有一个电脉冲序列，脉冲幅度为独立同分布随机度量，取值服从集合 $\{1,2,3,\ldots\ldots,n\}$ 上的均匀分布。现测量其幅度值，每隔一个单位时间测量一次，从第一次测量计算起，求测量到最大值 n 的期望时间。

参考答案:

$E\{T\}=\sum_{k=1}^{\infty} k\left(1-\frac{1}{n}\right)^{k-1}\frac{1}{n}=\frac{1}{n}\frac{1}{\left(1-\left(1-\frac{1}{n}\right)\right)^{2}}=n$

即测量到最大值 n 的期望时间为 n.

8. 设 $\{Z_n, n\geqslant 1\}$ 是独立同几何分布的随机变量序列，对于 $k\geqslant 0, P\left(Z_n=k\right)=q^k p, q=1-p, p\in(0,1)$, 设 $X_n=max(Z_1,Z_2,\ldots\ldots,Z_n)$ 是在 n 时刻记录的数值，X_0 为与 $\{Z_n\}_{n\geqslant 1}$ 统计独立的整数值随机变量。试证明 $\{X_n\}$ 为齐次马尔可夫链，并写出其转移概率，以及 X_{n+1} 与 X_n 之间的递推关系。

参考答案:

由于 X_0 与 $\{Z_n\}_{n\geqslant 1}$ 统计独立，X_0 不影响链的转移，

因为 $X_n=max(Z_1,Z_2,\ldots\ldots,Z_n)$,

故 $X_{n+1}=max\left(Z_1,Z_2,\ldots\ldots,Z_n,Z_{n+1}\right)=max(X_n,Z_{n+1})$.

故 $\{X_n\}$ 链为齐次马尔可夫链，其一步转移概率为

$p_{ij}=q^j p, j>i$

$p_{ij}=(p+qp+q^2p+,\ldots\ldots,+q^ip)=\frac{p(1-q^{i+1})}{1-q}=1-q^{i+1}, j=i$

$p_{ij}=0, 0\leqslant j<i.$

概率转移矩阵为

$$P=\begin{pmatrix} p & qp & q^2p & \ldots\ldots \\ 0 & 1-q^2 & q^2p & \ldots\ldots \\ 0 & 0 & 1-q^3 & \ldots\ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots\ldots \end{pmatrix}.$$

9. 设 $X_1,X_2,\cdots,X_n,\cdots$ 是独立随机变量序列，概率密度函数为 $f_{X_n}(x)=f_n(x)$。现在令

$$\begin{aligned} &Y_1=X_1\\ &Y_2=X_1+X_2\\ &\vdots\\ &Y_n=X_1+X_2+\cdots+X_n \end{aligned}$$

求证：$Y_1,Y_2,\cdots,Y_n,\cdots$ 是马尔可夫序列。

参考答案：因为

$$f\left(y_1,y_2\right)=f_{Y_2}\left(y_2\mid Y_1=y_1\right)f_{Y_1}\left(y_1\right)$$

又由已知条件有

$$
\begin{aligned}
& f_{Y_1}(y_1)=f_{X_1}(y_1)=f_1(y_1) \\
& f_{Y_2}(y_2 \mid Y_1=y_1)=f_{X_1+X_2}(y_2|X_1=y_1) \\
= & f_{X_2}(X_2=y_2-y_1 \mid X_1=y_1) \\
= & f_{X_2}(y_2-y_1)=f_2(y_2-y_1)
\end{aligned}
$$

故

$$
f(y_1, y_2)=f_1(y_1) f_2(y_2-y_1)
$$

推广到 n 个随机变量, 有

$$
f(y_1, y_2, \cdots, y_n)=f_1(y_1) f_2(y_2-y_1) \cdots f_n(y_n-y_{n-1})
$$

故

$$
\begin{aligned}
f(y_n \mid y_{n-1}, \cdots, y_1) & =\frac{f(y_1, y_2, \cdots, y_n)}{f(y_1, y_2, \cdots, y_{n-1})} \\
& =f_n(y_n-y_{n-1})
\end{aligned}
$$

由上式可知, $f\left(y_n \mid y_{n-1}, \cdots, y_1\right)$ 与 $y_{n-2}, \cdots, y_1$ 无关, 因此序列 $\{Y_n\}$ 是一马尔可夫序列。

10. 设 $\{Y_n, n=0,1,2, \cdots\}$ 是直线上的整数格点上的随机徘徊, 即

$$
\begin{gathered}
Y_n=Y_0+X_1+X_2+\cdots+X_n \quad(n \geqslant 1) \\
\{Y_0, X_1, X_2, \cdots\} \text{ 相互独立, } \{X_1, X_2, \cdots\} \text{ 具有公共分布: } \\
P(X_n=k)=p_k \quad k=0, \pm 1, \pm 2, \cdots \\
\sum_{k=-\infty}^{\infty} p_k=1
\end{gathered}
$$

则 $\{Y_n, n=0,1,2, \cdots\}$, 是一个马尔可夫链，并计算一步转移概率。

参考答案：证明状态空间为 $I=\{0, \pm 1, \pm 2, \cdots\}$, 时间参数集为 $\{0,1,\ 2, \cdots\}$, 其一步抟移概率为

$$
\begin{aligned}
p_{ij} & =P\{Y_n=j \mid Y_{n-1}=i\} \\
& =P\{X_{\mathrm{n}}=j-i\}=p_{i-i} \quad n \geqslant 1, i, j \in I
\end{aligned}
$$

事实. 上, 由 $\{Y_0, X_1, X_2, \cdots\}$ 相互独立得

$$
\begin{aligned}
& P\{Y_n=i_n \mid Y_{n-1}=i_{n-1}, \cdots, Y_0=i_0\} \\
& =\frac{P\{Y_n=i_n, Y_{n-1}=i_{n-1}, \cdots, Y_0=i_0\}}{P\{Y_{n-1}=i_{n-1}, \cdots, Y_0=i_0\}} \\
& =\frac{P\{X_n=i_n-i_{n-1}, X_{n-1}=i_{n-1}-i_{n-2}, \cdots, X_1=i_1-i_0, Y_0=i_0\}}{P\{X_{n-1}=i_{n-1}-i_{n-2}, \cdots, X_1=i_1-i_0, Y_0=i_0\}} \\
& =P\{X_n=i_n-i_{n-1}\} \\
& =P\{Y_n=i_n \mid Y_{n-1}=i_{n-1}\}
\end{aligned}
$$

可以看出 $\{Y_n, n=0,1,2, \cdots\}$ 是可数状态的马尔可夫链, 而且它还是时齐的, 其转移概率为

$$
\begin{aligned}
p_{ij} & =P\{Y_n=j \mid Y_{n-1}=i\} \\
& =P\{X_n=j-i\}=p_{i-i} \quad n \geqslant 1, i, j \in I
\end{aligned}
$$

11. 设某人有 r 把伞，分别放在家里和办公室里，如果出门遇下雨 (概率为 $p, 0 < p < 1$), 手边也有伞，他就带一把用，即从某一地带至另外一地; 如果天晴他就不带伞. 试证: 经过相当长的一段时间后, 这个人遇下雨但手边无伞可用的概率不超过 $\frac{1}{4r}$.（提示：令 $\{X(n), n \geqslant 1\}$ 表示此人第 n 次出门时身边的伞数）

参考答案:

证明：令 $\{X(n), n \geqslant 1\}$ 表示此人第 n 次出门时身边的伞数, 则 $\{X(n), n \geqslant 1\}$ 为齐次 Markov 链. 状态空间为 $E = \{0, 1, 2, \cdots, r\}$. 一步转移概率为

$$p_{0r} = 1, \quad p_{i,r-i} = 1 - p, \quad p_{i.r-i+1} = p, \quad i = 0, 1, \cdots, r$$

一步转移概率矩阵为

$$\boldsymbol{P} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 1-p & p \\ 0 & 0 & \cdots & p & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1-p & p & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

由遍历性, 可知 $\{X(n), n \geqslant 1\}$ 存在极限分布. 设平稳分布 (极限分布) 为 $\Pi = (\pi_0, \pi_1, \cdots, \pi_r)$, 由

$$\begin{cases} \boldsymbol{\Pi} = \boldsymbol{\Pi P} \\ \sum_{i=0}^{r} \pi_i = 1 \end{cases}$$

解得

$$\Pi = \left(\frac{q}{r+q}, \frac{1}{r+q}, \cdots, \frac{1}{r+q} \right)$$

其中 $q = 1 - p$. 所以经过相当长的一段时间后, 这个人遇下雨但手边无伞可用的概率为

$$p\pi_0 = \frac{pq}{r+q} < \frac{pq}{r} \leqslant \frac{1}{4r}$$