1. 病人随机地来到诊所就诊，到达的病人数目服从参数为 $\lambda$ 的泊松分布。若病人就诊的持续时间为 a，在下列两种情况下计算：第一个病人到达后，第二个病人不需要等待候诊的概率以及第二个病人等待时间的均值。

   （1）a 为确定性的常数；

   （2）a 服从参数为 $\mu$ 的指数分布。

2. 设有两个相互独立的泊松过程 $N_1(t)$ 和 $N_2(t)$，参数分别为 $\lambda_1$ 和 $\lambda_2$，设 $N_1(0)=m$，$N_2(0)=n$，且有 $N>m,n$，计算过程 $N_2(t)$ 取值 N 早于 $N_1(t)$ 取值 N 的概率。

3. 设 $\{X_1(t), t\geqslant 0\}$ 和 $\{X_2(t), t\geqslant 0\}$，$\{X_3(t), t\geqslant 0\}$ 为三个相互统计独立的泊松过程，$\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ 分别为 $X_1(t), X_2(t), X_3(t)$ 的参数。若 $X_1(t)+X_2(t)+X_3(t)=n$ 时，求 $X_1(t)=k, X_2(t)=j$ 的条件概率。

4. 现有一个由两种元件组成的系统，这两种元件当遇到下列不同类型的振动时遭到损坏。如出现第一种类型振动，将使甲失效，如出现第二类型振动，将使元件乙失效，如出现第三种类型振动，将使甲、乙两种元件同时失效。在 (0,t) 内出现第一、二、三种类型振动的事件均服从泊松分布，二、三种类型振动的出现频率分别为 $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$。又设 $X_1$ 代表元件甲的寿命，$X_2$ 代表元件乙的寿命。求以下概率：

   (1)$P\{X_1\geqslant s, X_2\geqslant t\}$

   (2)$P\{X_1\geqslant s\}$

   (3)$P\{X_2\geqslant t\}$

5. 设事件 $A$ 在 $[0,t)$ 内出现的次数 $\{N(t), t\geqslant 0\}$ 是参数为 $\lambda$ 的齐次 Poisson 过程. 已知在 $[0,t)$ 内事件 $A$ 已经发生 $n$ 次, 求第 $k(k<n)$ 次事件 $A$ 发生的时间 $\tau_k$ 的条件概率密度函数.

6. 设 $X_0, X_1, \cdots, X_n, \cdots$ 独立同分布于 $N(0,\sigma^2)$, $\{N(t), t\geqslant 0\}$ 是参数为 $\lambda$ 的齐次 Poisson 过程. $Z(t)=X_{N(t)}$ 为一随机过程. 试求: $\{Z(t), t\geqslant 0\}$ 的均值函数、方差函数、相关函数;

7. 乘客按比率为 $\lambda_A$ 的泊松过程到达飞机 $A$ (从 $t=0$ 开始), 当飞机 $A$ 有 $N_A$ 个乘客时就起飞, 与此独立的事件为乘客以比率为 $\lambda_B$ 的泊松过程登上飞机 $B$ (从 $t=0$ 开始)，当飞机 $B$ 有 $N_B$ 个乘客时就起飞。

   (1) 写出飞机 $A$ 在飞机 $B$ 之后离开的概率表示式;

   (2) 对于 $N_A=N_B$ 和 $\lambda_A=\lambda_B$ 的情况下, 计算第 1 小题的概率表示式。

8. 设 $X(t)$ 和 $Y(t)(0\leqslant t<\infty)$ 是分别具有比率 $\lambda_X$ 和 $\lambda_Y$ 的独立泊松过程。证明过程 $X(t)$ 的任意两个相邻事件之间的时间间隔内, 过程 $Y(t)$ 恰好有 $k$ 个事件发生的概率为

$$P=\frac{\lambda_X}{\lambda_X+\lambda_Y}\cdot\left(\frac{\lambda_Y}{\lambda_X+\lambda_Y}\right)^k \quad k=0,1,2,\cdots$$

9. 设有两个相互独立的泊松过程 $X(t)$ 和 $Y(t)$, 参数分别为 $\lambda_X$ 和 $\lambda_Y$，设 $T_1(X)$ 和 $T_1(Y)$ 分别为 $X(t)$ 和 $Y(t)$ 第一次事件出现的时间，计算 $P(T_1(X)<T_1(Y))$。

10. 非齐次泊松过程 $N(t)$ 的时间发生速率 $\lambda(t) = 0.5[1 + cos(t)]$, 求 $N(t)$ 的均值和方差。

11. 设 $X(t)$ 是参数为 $\lambda$ 的泊松过程，令 $X(t)$ 的时间平均为 $M = \frac{1}{T}\int_0^T X(t)dt$，求 $M$ 的均值和方差。