1. 随机过程定义为

$$X(t) = f(t+\epsilon)$$

其中 $f(t)$ 是具有周期 T 的周期波形，ϵ 在区间 $(0,T)$ 内为均匀分布的随机变量。证明：$X(t)$ 是宽平稳随机过程。

2. 定义复随机过程 $X(t) = Yf(t)$，其中 Y 是一个零均值的实随机变量，$f(t)$ 是一个确定性复函数，且 $f(t)$ 不为常数。若 $X(t)$ 是宽平稳过程，请推导 $f(t)$ 具有的一般形式。

3. 设 $\{\xi_n, n \in \mathbb{Z}\}$ 为白噪声，即 $E(\xi_n) = 0, E(\xi_n \xi_m) = \delta_{nm}\sigma^2$，其中

$$\delta_{nm} = \begin{cases} 1, & n = m \\ 0, & n \neq m \end{cases}$$

定义 $X_n = \sum_{k=0}^{q} b_k \xi_{n-k}$，其中 $b_0, b_1, \cdot\cdot\cdot, b_q$ 为常数，讨论序列 $\{X_n\}$ 的平稳性。

4. 质点在直线上做随机运动，即在 $t = 1, 2, 3, \cdots$ 时质点可以在 x 轴上往右或往左做一个单位距离的随机游动。若往右移动一个单位距离的概率为 p，往左移动一个单位距离的概率为 q，即 $P\{\xi(i) = +1\} = p$，$P\{\xi(i) = -1\} = q$，$p + q = 1$，且各次游动是相互统计独立的。经过 n 次游走，质点所处的位置为 $\eta_n = \eta(n) = \sum\limits_{i=1}^{n} \xi_i$。

(1) 求 $\{\eta(n)\}$ 的均值函数。

(2) 求 $\{\eta(n)\}$ 的自相关函数 $R_{\eta\eta}(n_1, n_2)$。

(3) 给定时刻 n_1，n_2，求随机过程 $\{\xi(n)\}$ 的二维概率密度函数及相关函数。

5. 已知宽平稳过程 $X(t)$ 的自相关函数为

$$R(\tau) = \exp(-3\tau^2)$$

$Y(t) = X(t) + X'(t)$，求 $Y(t)$ 的自相关函数。

6. 设随机过程 $X(t) = U\cos(3t)$，这里 U 是均值和方差都为 1 的随机变量，求

$$Y(t) = \frac{1}{t}\int_0^t X(s)ds$$

的均值、方差和相关函数。

7. 随机过程 $X(t) = A\cos\omega t + B\sin\omega t$，$E[A] = E[B] = 0$，且 A, B 不相关，$E[A^2] = E[B^2] = \sigma^2$，求证 $X(t)$ 为宽平稳随机过程。

8. 随机过程 $X(t) = \cos(\boldsymbol{\omega} t + \boldsymbol{\theta})$，$\boldsymbol{\omega}$ 为任意给定随机变量，$\boldsymbol{\theta}$ 为 $(-\pi, \pi)$ 上的均匀分布且与 $\boldsymbol{\omega}$ 独立，求证 $X(t)$ 为宽平稳随机过程。

9. 设随机过程 $Z(t) = Xsin(t) + Ycos(t)$，其中 X 和 Y 是相互独立的二元随机变量，它们都分别以 $\frac{2}{3}$ 和 $\frac{1}{3}$ 的概率取值-1 和 2。求 Z(t) 的均值函数和自相关函数，并证明 Z(t) 是一个宽平稳随机过程，但不是一个严平稳随机过程。

10. 设 $X(t) = X_0 + Yt, a \leqslant t \leqslant b$, 其中 X_0 与 Y 是相互独立且服从 N(0,1) 的随机变量。证明：X(t) 是一个二阶矩过程。