

For office use only

Team Control Number

For office use only

T1 \_\_\_\_\_

**0000000**

F1 \_\_\_\_\_

T2 \_\_\_\_\_

F2 \_\_\_\_\_

T3 \_\_\_\_\_

Problem Chosen

F3 \_\_\_\_\_

T4 \_\_\_\_\_

**A**

F4 \_\_\_\_\_

**2020**

**MCM/ICM**

**Summary Sheet**

对现代武器的性价比的评估模型的建立与分析

摘要

**Keywords: ;**

# 目录

<b>1</b>	<b>介绍</b>	<b>1</b>
1.1	问题背景	1
1.2	问题重述	1
1.3	问题分析	1
<b>2</b>	<b>假设</b>	<b>1</b>
<b>3</b>	<b>符号说明</b>	<b>2</b>
<b>4</b>	<b>模型的建立与分析</b>	<b>3</b>
4.1	模型设计思路	3
4.1.1	质量的计算	3
4.1.2	期望作战天数 $t$ 的计算	3
4.1.3	成本 $cost$ 的计算	3
4.2	模型分析	4
4.2.1	总体积 $v_0$	4
4.2.2	动力源效率 $\eta$	5
4.2.3	关于系数 $v_1, v_2, v_3$ 的讨论	5
<b>5</b>	<b>模型优缺分析</b>	<b>5</b>
5.1	模型优势	5
5.2	模型缺陷	6
5.3	可优化方向	6
	<b>Appendices</b>	<b>6</b>
<b>A</b>	<b>附录 测量所得原始数据</b>	<b>6</b>
<b>B</b>	<b>附录 模型的C++程序实现</b>	<b>6</b>
<b>C</b>	<b>附录 同时考虑各项成本下的不同出水口全部方案对应的各个结 间径流量表</b>	<b>7</b>

# 1 介绍

## 1.1 问题背景

现代武器在不断的发展中，也有巨大化的趋势，比如从开始的小型舰船到后来可以搭载战斗机的航空母舰，那么在影视资料中常常出现的这种直立式巨型战斗机器是否会成为将来的一种可能武器分支呢，从影片中的资料看，在一些特殊战斗中，这种器械有它自身的优势存在，那么这种优势又能否有足够大的吸引力去催生它的诞生呢，我们难以凭空论断，需要建立分析武器性价比的模型。该模型将不仅能用于这类武器的合理性判定，同时也将对未来武器的发展方向产生指导作用。

## 1.2 问题重述

判断一个武器存在的价值和意义我们认为即判断其性价比。我们需要建立一个模型以通过公式定性评估一个武器的性价比，并由此判断武器大型化是否有价值。

## 1.3 问题分析

武器可以考虑为一个将经费转换为战斗力的机器，故性价比就是武器服役的全程中造成伤害的总量与所需经费的比。造成伤害的总量可以用武器的战斗时长乘以武器的威力描述，经费分为建造经费与后续维护、用于购买资源的经费两部分。我们需要把武器拆分成几个功能模块，并逐个分析。

由于实际问题的复杂性过高，我们需要做出一些基本假设与简化。一些假设是浅显的，一些假设需要佐证，现对于几条假设进行简单陈述以说明其合理性。由于研发成本并不属于某个武器特有，某武器使用的科技也可以移植到其他武器上，该武器也可以完全使用已有的科技，故这里不考虑武器的研发成本，仅考虑建造、维护/驱动成本。后勤补给充足则不用考虑弹药问题，认为在一次战斗中不会消耗完弹药。由于需要考虑的参数较多难以分析求解，我们希望对其中部分参数进行简化。查阅了多种坦克的资料后，基于实际作战中的参数，我们认为装甲厚度与体积的三分之一次幂成正比这一假设是可行的，由此得到的装甲厚度不会对我们武器的性价比造成不利影响。

# 2 假设

- 不考虑研发成本，成本只包含建造、维护/驱动成本
- 武器是动力模块、攻击模块、资源模块、管理模块的叠加
- 武器模块的体积/质量不随着战斗的消耗改变（没有弹药限制）

- 不考虑武器的外形设计和具体的战斗情景，认为总的战斗力可以通过以上参数评估
- 除了动力源以外，其它模块均只有一种选择
- 认为装甲的最佳厚度总是正比于总体积的1/3次幂
- 武器带来的收益只有战斗价值，不考虑其威慑力等非直接价值

### 3 符号说明

表 1: 符号说明表

符号	单位	含义
$cop$	无	性价比
$v_0$	$m^3$	总体积
$v_1$	无	武器模块体积占比
$v_2$	无	资源模块体积占比
$v_3$	无	动力模块体积占比
$\eta$	$W/m^3$	动力源效率
$\rho$	$kg/m^3$	总体密度
$k_1$	无	单位武器模块输出
$k_2$	$\$/m^3$	装甲模块单位价格
$k_3$	$\$/m^3$	武器模块单位价格
$k_4$	$\$/m^3$	动力源模块单位价格
$k_5$	day(d)	资源消耗系数
$k_6$	d/kg	赶赴战场的损失系数
$k_7$	$\$/m^3$	每次出击单位成本
$k_8$	$\$/m^3$	每日维护单位成本
$k_9$	d·kg/(W·m)	机动性增加率
$k_{11}$	$1/\eta$	动力源模块增长系数
$\rho_1$	$kg/m^3$	装甲密度
$\rho_2$	$kg/m^3$	装甲外模块密度
$mob_0$	d/m	机动性阈值
$C$	\$	控制模块价格
$h$	m	装甲厚度
$t$	d	总作战时间
$m$	kg	总质量
$cost_1$	\$	建造成本
$cost_2$	\$	维护成本
$mob$	d/m	机动性
$T$	d	单次作战时间

## 4 模型的建立与分析

### 4.1 模型设计思路

一个武器的实际战斗价值应该在于对于地方军队输出的火力，由于武器的单位体积伤害能力固定，因此武器造成的总伤害应该正比于作战时间 $t$ 和武器体积 $v_1v_0$ 。因此，最终评判武器的目标函数应该正比于 $\frac{v_1v_0t}{cost_0}$ ，即

$$cop = \frac{k_1v_1v_0t}{cost_0} \quad (1)$$

#### 4.1.1 质量的计算

质量有两方面组成，装甲质量和其余部分质量

$$m = \rho_1hv_0^{\frac{2}{3}} + \rho_2v_0 \quad (2)$$

这里将 $h$ 简化为关于正比于 $v_0^{\frac{1}{3}}$ 的函数

$$M = k\rho_1v_0 + \rho_2v_0 = \rho v_0 \quad (3)$$

其中 $\rho = k\rho_1 + \rho_2$

#### 4.1.2 期望作战天数 $t$ 的计算

我们假设武器不会随着战场进化而被淘汰，而只有战斗损坏导致退役。那么，自然地 $t$ 应该受机动性受弹率、机动性和装甲厚度的影响，并且受弹率正比于迎击面积， $v_0^{\frac{2}{3}}$ 。将比例系数吸收进 $mob$ 的计算

$$t = \frac{hmob}{v_0^{\frac{2}{3}}} \quad (4)$$

机动性为了方便计算，使用了拥有 $x$ 轴截距的线性函数，正比于动力输出，反比于质量

$$mob = k_9 \frac{\eta v_3 v_0}{m} - mob_0 = k_9 \frac{\eta v_3}{\rho} - mob_0 \quad (5)$$

#### 4.1.3 成本 $cost$ 的计算

成本分为两部分，建造成本 $cost_1$ ，维护成本 $cost_2$ 。

$$cost = cost_1 + cost_2 \quad (6)$$

建造成本 $cost_1$ 是武器成本，装甲成本，固定成本（可以认为是通信装置等）以及动力源成本的加和。因为动力效率的增加带来的制造成本增加往往是指数级的，乘上了 $e^{k_{11}\eta}$ 项作为

修正，在不需要考虑搭载的动力源效率的时候，可以直接删除这一项，整合进 $k_4$ 中；此外，和上文中同样，装甲的体积已经是 $v_0$ 的函数，直接代入，得

$$cost_1 = v_1 v_0 k_3 + v_3 v_0 k_4 \exp(k_{11} \eta) + v_0 k_2 + C \quad (7)$$

$cost_2$ 分为出击整备成本（弹药、推进剂填充等）和总维护成本。出击整备成本正比于出击次数 $\frac{t}{T}$ ，资源模块体积 $v_2 v_0$ ，因此可以表示为 $k_7 v_2 v_0 \frac{t}{T}$ ，其中单次出击时间 $T$ 由总的单次续航时间 $k_5 \frac{v_2 v_0}{m} = k_5 \frac{v_2}{\rho}$ ，减去来回奔赴战场/武器启动的时间消耗 $k_6$ ，整合为

$$T = k_5 \frac{v_2}{\rho} - k_6 \quad (8)$$

另一方面，总维护成本正比于作战天数和武器体积，可写为 $k_8 v_0 t$ ，总成本可写为

$$cost_2 = \frac{t}{T} v_2 v_0 k_7 + t v_0 k_8 \quad (9)$$

将全部变量代入 $cop$ 的表达式中，化简可得

$$cop = k_1 v_1 \left( t^{-1} (v_1 k_3 + v_3 k_4 \exp(k_{11} \eta) + k_2) + \frac{k_7}{\frac{k_5}{\rho} - \frac{k_6}{v_2}} + k_8 + \frac{C}{v_0 t} \right)^{-1} \quad (10)$$

## 4.2 模型分析

### 4.2.1 总体积 $v_0$

作为比较有代表意义的量，我们希望 $v_0$ 在这个函数中不会趋向于0或者无穷大。做以下化简

$$\begin{aligned} A &= \frac{(v_1 k_3 + v_3 k_4 \exp(k_{11} \eta) + k_2)}{h m o b} \\ B &= \frac{k_7}{\frac{k_5}{\rho} - \frac{k_6}{v_2}} + k_8 \\ D &= \frac{C}{m o b h} \end{aligned}$$

则可以将目标函数化简为

$$cop = \frac{k_1 v_1}{A v_0^{\frac{2}{3}} + B + D v_0^{-\frac{1}{3}}} \quad (11)$$

使用简单的均值不等式就可以得到 $\arg\max_{v_0} cop(v_0) = \frac{D}{2A}$

$$V_0 = \frac{C}{2(v_1 k_3 + v_3 k_4 \exp(k_{11} \eta) + 2k_2)} \quad (12)$$

可以看到限制 $v_0$ 不宜过大的项为 $A$ ，也即是因为相对于火力增长 $\Theta(v_0)$ ，建造成本增长是 $\Theta(v_0^{5/3})$ ；同时，固定建造成本 $C$ 的存在则限制了 $v_0$ 不应该太小。整个函数较好地符合了现实里武器体积不应该过大也不过小的情况。

#### 4.2.2 动力源效率 $\eta$

同样，我们希望通过目标函数对  $\eta$  的偏导，值为0的时候  $\eta$  的数值不趋于0或者无穷大，将目标函数分母关于  $\eta$  的部分提出，

$$\frac{k_1 v_1}{cop} - \frac{k_7}{\frac{k_5}{\rho} - \frac{k_6}{v_2}} + k_8 = \frac{D + EF^\eta}{A\eta - B} \quad (13)$$

其中

$$t = A\eta - B$$

$$D = \frac{C}{v_0} + v_1 k_3 + k_2$$

$$E = v_3 k_4$$

$$F = \exp(F)$$

需要计算右式的极小值，对  $\eta$  求偏导等于0得

$$k_{11}EF^\eta(A\eta - B - \frac{A}{k_{11}}) = AD$$

在  $\eta$  趋于0时偏导数为负， $\eta$  趋于正无穷时为正，因此存在有限极小值点。在这个函数里，限制  $\eta$  达不到边界的实际意义在于，过低的动力会导致机动性极低，从而导致战斗天数低，总贡献低；而  $\eta$  在增大的时候，单位动力源的成本会指数级爆炸增长，将其限制在了一定的范围内。

#### 4.2.3 关于系数 $v_1, v_2, v_3$ 的讨论

## 5 模型优缺点分析

### 5.1 模型优势

- 可解释性强：整个模型的设计逻辑非常清楚，对于武器体积、动力源效率、各功能模块占比接近边界时候的性价比降低都有着与现实相符合的解释。
- 可优化范围大：在基础的“作战火力/作战成本”框架下，所有部分都可以进行优化。本模型考虑到数学上的可解性，进行了很高程度的简化，采用的函数基本都是线性函数的叠加，并没有考虑边界效应。但这些部分都可以通过修正替换来提升模型参考价值。
- 可推广性强：在性价比相关的问题上，基本都可以采用“效益/（一次性成本+持续成本）”的模型，例如“汽车评分”，“房屋评分”等。

## 5.2 模型缺陷

- 军械的价值和成本和模型假设相差非常大：在实际中，和平年代的军械设计中，主要成本是研发/技术成本，一般可以占到总成本的50%以上，尤其在大型军械中可以占到几乎全部；而价值则主要存在于其威慑力，国家形象建设等非直接领域，实际战斗的需求相对较低，而且往往会面临没有完成预计战斗时长就因为性能淘汰，敌方针对等原因提前退役。
- 模型没有考虑任何的武器具体属性，如结构，运作方式等：在计算价值的时候只是泛泛地将倾泻的弹药数量作为评价标准。而实际上，这些结构的特殊性往往导致军械的评价是量子化而非连续的。
- 模型没有考虑任何博弈影响：不认为敌人会在遭到武器攻击后调整自己的装备，从而导致模型中参数变化（如杀伤力指标 $k_1$ ），也即是模型为静态的，没有考虑战斗的发展。

## 5.3 可优化方向

- 在原有的模型结构上增加精度：将各个函数进行非线性化，优化结果
- 优化模型结构：模型中对于效益和成本的考量都非常简单，只包含了当下的信息，而实际上一个长时间发挥作用的物品价值需要长久考虑。所以可以增加下列参数：
  - 可以增加时间相关参数，考虑到通货膨胀、物品的性能下降等实际现象可以对它们进行分别修正。
  - 增加风险因素。一般物品的产出量可能达不到统计学范畴，从而简单地用期望代替可能不妥善。在这种情况下，需要先对风险情况下最终受益进行评估再做期望。
  - 增加心理学因素。物品的评估并不只因为客观事实，评价者的主观不可忽略。通过量化“对风险的可接受性”“对于长期价值和短期价值的认识”等心理学因素可以更好地进行价值评估。

# Appendices

## 附录 A 测量所得原始数据

## 附录 B 模型的C++程序实现

见于压缩包中附带的waterpipe final.ver.cpp文件。



## 附录 C 同时考虑各项成本下的不同出水口全部方案对应的各个 结点间径流量表

见于压缩包中附带的5个output.csv文件，文件名中数字代表出水口数量。

## 参考文献

- [1] 姜启源、谢金星、叶俊. 《数学模型》. 高等教育出版社.