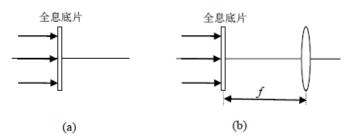
# 傅里叶变换全息资料存储

提起全息照相,首先反应在脑海中的是"三维立体成像",不过那只是种类繁多的全息照相中最具代表性的一种。本实验"傅里叶变换全息资料存储"是非常具有实用性的一种全息术,它是将物光波的波前信息转化为频谱分布并通过全息干涉的方法记录下来的。它能将一个页面的文字图像存储在一个直径约 2mm 的斑点上,其优点是不言自明的。若想成为一名高超的全息照相师,不仅需要对全息照相的原理和傅里叶变换的原理有深刻的理解,要有"细心"、"耐心"的光路调节本领 ,还需要根据实验原理对拍照条件进行摸索、控制、优化。心灵才能手巧,二者缺一不可。

# 思考题

- 1. 全息照相和一般的照相有哪些不同?
- 2. 两束光相干必须满足的条件是什么?
- 3. 一般认为激光是单色光 (波长为  $\lambda$ ),但任何光谱线都会存在一定的展宽 ( $\Delta\lambda$ ),所以激光器都会有相干长度的限制,为什么?请推导出相干长度与  $\lambda$ 、 $\Delta\lambda$  的关系。
- 4. 什么是空间频率? 傅里叶逆变换在光学上应如何实现?
- 5. 什么是傅里叶变换全息照相?要记录准确的傅里叶变换全息图,透明资料片应置于什么 位置?
- 6. 记录傅里叶变换全息图时为什么要有一定的离焦量?
- 7. 记录准确的傅里叶变换全息图后,用平行光直接对傅里叶变换全息图再现时,再现像在何处(图(a))?全息底片置于透镜的前焦面上再现时,再现像应在何处(图(b))?



8. 傅里叶全息照片可否用白光再现? 为什么?

# 引言

全息术是利用光的衍射和干涉原理,将物波的全部信息 (振幅和位相) 以干涉条纹的形式记录在全息底片上,所记录的干涉条纹图样称为全息图。当用光波照明全息图时,由于衍射而再现出原物的全部信息。

全息术是英藉匈牙利物理学家丹尼斯·盖伯在 1947 年为了提高电子显微镜的分辨率,在布拉格和泽尼克工作的启发下发明的。1948 年盖伯和助手首次用实验实现了全息图的记录和再现,他因此而获得 1971 年的诺贝尔物理学奖。早期的全息图是用水银灯记录的同轴全息图,由于缺少高相干性和高强度的光源,直到 50 年代中期全息术的研究一直处于萌芽时期。1960 年激光器的出现以及 1962 年美国科学家利思和乌帕特尼克斯将通信理论中的载频概念推广到空域中,实现了离轴全息图,解决了原始像和共轭像不能分离的问题,使濒临光学古董边缘的全息术大放异彩并获得迅速发展,相继出现多种全息方法,并在光学信息处理、全息干涉计量、全息显示、全息光学元件等方面得到应用。

随着计算机技术的发展,人们不再仅仅用光学干涉的方法记录全息图,而且可以用计算机和绘图设备绘制全息图,使很多光学现象都可以用计算机进行仿真,形成了计算全息。全息术不仅可以用于光波波段,也可以用于电子波、X射线、声波和微波波段。

傅里叶变换全息图记录物光波的频谱分布,即物光波的傅里叶变换。傅里叶变换全息术 在信息存储、光学空间滤波、特征识别和图像处理等方面都得到了广泛应用。

通过实验,了解光学成像中的傅里叶分解和综合的方法,以及光场的频谱分析概念,了解全息术思想,掌握全息图的记录和再现的原理及方法。

## 实验原理

## 1. 光学傅里叶变换

一个二维的空间分布函数,可以看作是由无穷多个不同振幅、不同方向的平面波迭加的结果,即空间频率分布函数,这是从空间振幅和空间频率两个不同的角度描述同一个事物,因而是等价的,在数学上是通过傅里叶变换来实现此目的的。

#### 1.1 傅里叶变换

一个空间二维函数 g(x, y) 可以展开为

$$g(x,y) = \int_{-\infty}^{+\infty} G(\xi,\eta) \exp[i2\pi(x\xi + y\eta)] d\xi d\eta$$
 (1)

式中的  $\xi$ 、 $\eta$  分别表示 x、y 方向的空间频率,空间频率指单位长度内空间讯号变化的周期数。 $G(\xi,\eta)$  称为空间函数 g(x,y) 的空间频谱,(x,y) 平面称为空域平面, $(\xi,\eta)$  平面称为频域平面。对于一般图像的空间函数 g(x,y),(1) 式可理解为: 函数 g(x,y) 可分解为无穷多个不同空间频率波的迭加的结果,各频率波的权重为  $G(\xi,\eta)$ d $\xi$ d $\eta$ 。与(1) 式相对应的逆变换为

$$G(\xi, \eta) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x, y) \exp[-i2\pi(\xi x + \eta y)] dxdy$$
 (2)

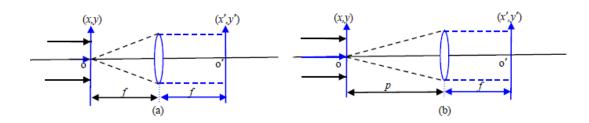
通常,(2) 式称为函数 g(x,y) 的傅里叶变换,(1) 式则称为函数  $G(\xi,\eta)$  的傅里叶逆变换,(1) 式和 (2) 式合称为傅里叶变换对。傅里叶变换对表明: 对一个函数的傅里叶变换再作一次逆变换,就得到了原来的函数。

#### 1.2 会聚透镜的傅里叶变换性质

可以证明: 在光学上, 会聚透镜 (焦距为f) 就是一个傅里叶变换器, 它具有二维傅里

叶变换的本领。

当平行光 (波长为  $\lambda$ ) 垂直入射,将透明物体置于透镜的前焦面上,如图 1(a) 所示。设透明物体的透射系数为 t(x,y),其物函数  $g(x,y)=c\;t(x,y)$ ,c 是与光源有关的复常数,平行光正入射时为实常数。可推得在透镜的后焦面上的光场的复振幅分布 G(x',y')为



透明物体置于透镜前焦面 (a), 非前焦面 (b) 图 1 平行光垂直入射

$$G(x', y') = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x, y) \exp(-ik\frac{x'x + y'y}{f}) dxdy$$
 (3)

式中 k 为波数,  $k = 2\pi/\lambda$ 。若令  $\xi = x'/\lambda f$ , $\eta = y'/\lambda f$  则上式改成

$$G(\xi, \eta) = \int_{-\pi}^{+\infty} g(x, y) \exp[-i2\pi(\xi x + \eta y)] dxdy$$
 (4)

与 (2) 对比可以发现:在这种情况下,物体的物函数与衍射场的复振幅分布存在着准确的傅里叶变换关系, $G(\xi,\eta)$  是 g(x,y) 的傅里叶变换,透镜的后焦面就是变换平面 (称为频谱面或傅氏面)。如果透明物体处在与透镜距离为 p 的任意位置,如图 1(b) 所示,此时透镜的后焦面仍然是变换平面,不过变换存在二次位相因子。

$$G(\xi,\eta) = \exp[i\pi(f-p)\lambda (\xi^2 + \eta^2)] \int_{-\infty}^{+\infty} g(x,y) \exp[-i2\pi(\xi x + \eta y)] dxdy$$
 (5)

我们还可以推导出,光源为点光源时,当透明物体置于透镜前焦面上时,依然存在着严格的傅里叶变换关系,频谱面的位置与光源成共轭关系,其他情况都存在二次位相因子。 二次位相因子的存在只会对再现像的位置有影响,不会影响我们得到傅里叶变换全息图。

#### 1.3 傅里叶变换的光学模拟

数学上傅里叶变换对的运算在光学上可通过图 2 所示的 4f 系统来实现。物函数为 g(x, y) 的透明物体置于焦距为 f 的透镜  $L_1$  的前焦面上,透镜  $L_2$  (焦距为 f) 的前焦面位于频谱面上,平行光垂直入射。在  $L_1$  的后焦面上得到 g(x, y) 的傅里叶变换  $G(\xi, \eta)$ ,见公式 (4)。透镜  $L_2$  对  $G(\xi, \eta)$  再作一次傅里叶变换,在  $L_2$  的后焦面上得到的光场分布为

$$u(x'', y'') = \int_{-\infty}^{+\infty} G(\xi, \eta) \exp[-i2\pi(x''\xi + y''\eta)] d\xi d\eta$$
 (6)

如果令 x'' = -x, y'' = -y, 则 (6) 式改写成:

$$u(x,y) = \int_{-\infty}^{+\infty} G(\xi,\eta) \exp[i2\pi(x\xi + y\eta)] d\xi d\eta$$
 (7)

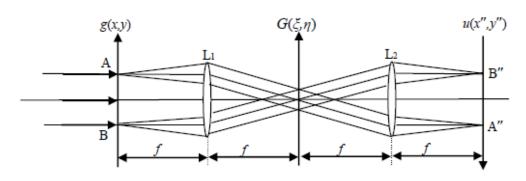


图 2 傅里叶变换对的光学模拟

(7) 式就是傅里叶逆变换式。与 (1) 式相比,可以发现 u(x,y) 与 g(x,y) 完全相同。可见,只要对  $L_2$  的后焦面取反射坐标,就可以实现傅里叶逆变换,所以图 2 的光学系统模拟了傅里叶变换对的运算关系。一个物经过 4f 系统变换后,在像面所成的像与原物完全相同,只是方向反转了。这样,如果我们在频谱面上将物函数 g(x,y) 的傅里叶变换  $G(\xi,\eta)$  的全部信息记录下来,利用这些频谱信息,就能还原出原物函数来 g(x,y)。

## 2. 傅里叶变换全息照相

全息的种类很多,不管哪种全息照相都要分成两步来完成,即用干涉法记录光波信息,称波前记录;用衍射法使原光波波前再现,称波前再现。用全息照相法将物的频谱记录下来,就称为傅里叶变换全息图。

### 2.1 物频谱的记录

傅里叶变换全息图的记录和再现的光学系统有多种,图 3 是其中的一种记录方法。将物

参考光 R

体置于透镜的前焦面,用平行光垂直照射,利用透镜的傅里叶变换性质,在其后焦面位置就得到物光波 g(x,y) 的傅里叶频谱  $G(\xi,\eta)$ ,其振幅记为  $Go(\xi,\eta)$ ,位相记为  $Go(\xi,\eta)$ ,因此频谱函数也可记为  $Go(\xi,\eta)$ exp[i  $\Phi d(\xi,\eta)$ ]。再引入一参考光 R (平行光),参考光在透镜面上与光轴的距离为 b,坐标为 (-b,0),则:

$$b = \begin{cases} G(\xi, \eta) \\ f \end{cases}$$

(8) 图 3 傅里叶变换全息图的记录

$$R(\xi, \eta) = R_o \exp(i2\pi b\xi)$$

这样,频谱面上的光强分布为

$$I(\xi,\eta) = [G(\xi,\eta) + R(\xi,\eta)][G^*(\xi,\eta) + R^*(\xi,\eta)]$$

$$= R_0^2 + |G(\xi,\eta)|^2 + R_0G(\xi,\eta) \exp(-i2\pi b\xi) + R_0G^*(\xi,\eta) \exp(i2\pi b\xi)$$

$$= R_0^2 + G_0^2 + 2R_0G_0 \cos(\Phi_G - \Phi_R)$$
(9)

式中 $R_0^2$ , $G_0^2$ 分别是物频谱与参考光波各自独立照射底板时的光强。第三项为物频谱与参考

光之间的相干项,它们把物频谱的振幅和位相信息转化成不同光强的干涉条纹。若在此处放置一全息干板,则可在照相底板上记录下来物频谱的全部信息;包括振幅和位相。

## 2.2 全息图

曝光过的全息底板经过冲洗,其上每点的振幅透射率  $\tau$  与此处的曝光量 H 有关 (H = 光强 I 与曝光时间 t 的乘积),其关系曲线可用图 4 来表示。在  $\tau$ -H 曲线上,只有中间一段近似为直线,所以为了实现线性记录,拍照时要取曝光量在  $H_0$  附近的位置,这可以通过选择适当的参考光与物光光强比来实现。在线性记录的条件下有

$$\tau = \alpha + \beta H = \alpha + \beta t I \tag{10}$$

 $\alpha$  和  $\beta$  为常数, $\beta$  等于图 4 中线性区的斜率。将光强公式 (9) 代入 (10) 式中,便可得到拍好的全息图的复振幅透射率

图 4 全息干板的特性

$$\tau = \alpha + \beta t \left[ R_0^2 + |G(\xi, \eta)|^2 + R_0 G(\xi, \eta) \exp(-i2\pi b\xi) + R_0 G^*(\xi, \eta) \exp(i2\pi b\xi) \right]$$

(11)

这样冲洗后的全息底板即是全息图。如果全息图的记录未能满足线性记录条件,将会影响再现光波的质量。

## 2.3 波前的再现

用与记录时相同波长、振幅为 A 的平行光垂直照射全息底板,此再现光波经过全息图后衍射波的复振幅分布为:

$$u(\xi, \eta) = A\tau = (A\alpha + A\beta t R_o^2) + A\beta t |G(\xi, \eta)|^2 + A\beta t R_o G(\xi, \eta) \exp(-i2\pi b\xi) + A\beta t R_o G^*(\xi, \eta) \exp(i2\pi b\xi)$$
(12)

再现时,若将全息底板置于焦距为 f 的透镜的前焦面上,像面 (后焦面) 上的像即是对  $u(\xi,\eta)$  作一次傅里叶变换得到的。(12) 式中的常数项 ( $A\alpha + A\beta tRo^2$ ) 的傅里叶变换为  $\delta$  函数,对应焦点上的亮点。第二项的傅里叶变换为物分布的自相关函数,形成焦点附近的晕轮光。第三项的傅里叶变换为:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} A\beta t R_o G(\xi, \eta) \exp(-i2\pi b\xi) \exp[-i2\pi (x''\xi + y''\eta)] d\xi d\eta$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} A\beta t R_o G(\xi, \eta) \exp\{i2\pi [(-x'' - b)\xi - y''\eta]\} d\xi d\eta$$

$$= A\beta t R_o g[-(x'' + b) - y'']$$
(13)

由此看出,除相差一个常数因子外,与物分布 g(x,y) 完全一样,只是坐标反转了,像的中心位置在 (-b,0) 处,即在 x'' 方向移动了 (-b),这就是再现得到的原始图像。

用同样的方法可以得到第四项的傅里叶变换为  $A\beta tRog^*[(x''-b), y'']$ ,这是物分布的共轭像,像中心位于 (b,0) 处,即在 x'' 方向移动了 b。原始像为倒立实像,共轭像为正立实像。

实验中,不用透镜也可以再现原始图像(理论上应在无穷远处)。用原参考光照射冲洗 后的全息图,在全息图后适当方向用接收屏接收,可以得到再现的原始图像。

对于一般光学图像特别是文字信息,在它的空间频谱中,通常低频成份远大于高频成份,低频成份反映物的轮廓,高频反映细节,因此只要记录了必要的低频信息,就可以基本上体现物的特征。而且低频成份衍射角小,频谱非常集中,直径仅1mm左右,记录时只要用细

光束作为参考光,可使全息图的面积小于 2 mm², 所以这种全息图特别适用于密度全息存储。 **实验光路** 

整个光学系统安置在光学防振平台上。图 5 是实验光路图,物光束经扩束镜和准直镜后成为平行光束,透明资料片置于傅里叶变换透镜的前焦面上。为了减轻由于物频谱中的低频成份太强而产生的非线性噪声,使全息底片上的光强分布均匀些以提高全息图的衍射效率,全息底片的安置采用离焦法,即让全息底片(记录面)安置在离频谱面的距离(称离焦量)约为傅氏透镜焦距的 5%左右的位置上,使记录面上物光的光斑大小约为 1-2mm 左右,参考光斑的大小约为 2mm 左右。两光斑中心应在记录面上重合,全息底片稍向参考光方向倾斜。为了实现全息底板线性记录、提高衍射效率,要让参考光光强大于物光光强,并选择合适的光强比(参考光和物光的光强比及曝光时间是影响全息图的衍射效率的主要因素)。如果物光太强,会由于散斑效应而降低衍射效率;光强比过大也会降低衍射效率。参考光与物光的光程尽可能相等,参考光光束与物光束之间的夹角也不要太大。

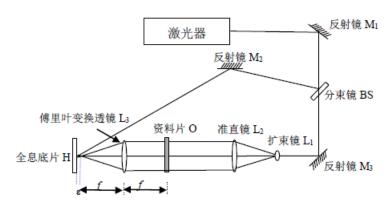


图 5 实验光路图

## 实验内容

- 1. 根据图 5 的光路图和要求安排光路并调节光路等高共轴。
- 2. 透明资料片置于傅里叶变换透镜的前焦面上进行记录。全息底片的感光面迎着光束,选择适当的光强比,改变曝光时间在底片的不同位置进行多次记录。
- 3. 原位再现:将冲洗后的底片放回原位,直接用原参考光作为再现光照明全息底片,观察再现像的大小和位置情况。
- 4. 再现光垂直照射全息底片,观察再现像的情况,分清原始像和共轭像。
- 5. (选做)研究不同光强比,离焦量,光程差,曝光时间等条件对全息成像的影响。

## 参考文献

- 1. 张孔时,丁慎训主编. 物理实验教程(近代物理实验部分). 清华大学出版社, 1991年
- 2. 于美文著, 光全息学及其应用, 北京理工大学出版社, 1996年
- 3. 宋菲君著, 近代光学信息处理, 北京大学出版社, 1998年

# 附录1 傅里叶变换的基本公式

傅里叶变换:

$$G(\xi, \eta) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x, y) \exp[-i2\pi(\xi x + \eta y)] dxdy$$

 $\xi$ 、 $\eta$  分别表示 x、y 方向的空间频率。傅里叶逆变换:

$$g(x,y) = \int_{-\infty}^{+\infty} G(\xi,\eta) \exp[i2\pi(x\xi + y\eta)] d\xi d\eta$$

1. 相移定理

$$\int_{-\infty}^{+\infty} g(x-a, y-b) \exp[-i2\pi(\xi x + \eta y)] dxdy = G(\xi, \eta) \exp[-i2\pi(\xi a + \eta b)]$$

即函数在空域的平移,带来频域中的一个线性相移。

2. 函数的复数共轭傅里叶变换

$$\int_{-\infty}^{+\infty} g^*(x, y) \exp[-i2\pi(\xi x + \eta y)] dxdy = G^*(-\xi, -\eta)$$

3. δ函数的傅里叶变换

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x) \exp(-i2\pi\xi x) dx = 1$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} 1 \cdot \exp(-i2\pi\xi x) dx = \delta(\xi)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x - a) \exp(-i2\pi\xi x) dx = \exp(-i2\pi\xi a)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-i2\pi\xi a) \exp(-i2\pi\xi x) dx = \delta(\xi + a)$$

# 附录 2 光学全息

普通照相是根据几何光学成像原理,将空间物体成像在—个平面上,只记录下光波的强度 (即振幅) 信息。由于丢失了光波的相位信息,因而失去了物体的三维信息。全息照相是基于物光与参考光干涉、用干板记录下干涉条纹图像,并在一定条件下再现,则可看到包含物体全部信息的三维像。全息照相的原理可用八个字来概述:干涉记录,衍射再现。

#### 全息照相的基本特点

## 1. 可以形成三维图像

一张全息图看上去很像一扇窗子,当通过它观看时,物体的三维图象就在眼前,让人感觉到图像就要破窗而出。如果观察者的头部上下、左右移动时,可以看到物体的不同侧面。

#### 2. 具有弥漫性

一张全息图即使被打碎成若干小碎片,用其中任何一个小碎片仍可再现所拍摄物体的完整的图象。这是因为全息底片上的每一点都受到被拍摄物体各部位发出的光的作用,所以其上每一点都记录了整个物体的全部信息。不过,当碎片太小时,再现像的亮度和分辨率将降低。

#### 3. 可进行多重记录

对于一张全息相片,记录时的物光和参考光以及再现时的再现光,三者应该是一一对应的。这里包含着两层意思:一是指记录时用什么物,则再现时也就得到它的像;二是指再现光应与原参考光应相同。如果再现光与原参考光有区别 (例如波长、波面或入射角不同),就得不到与原物体完全相同的像。当入射角不同时,则像的亮度和清晰度会大大降低,入射角改变稍大时,像将完全消失。利用这一特点,就可在同一张全息底片上对不同的物体记录多个全息图像,只须每记录一次后改变一下参考光相对于全息底片的入射角即可。如果再现光与原参考光的波长不同,则再现像的尺寸就会改变,得到放大或缩小的像;如果再现光波面形状相对于原参考光发生了变化,则有可能获得畸变的像。

#### 全息图的类型:全息图的类型可以根据其主要特征从不同的观点来分类。

1. 按参物光是否同轴: 同轴全息和离轴全息

同轴全息:记录时物体中心和参考光源位于通过全息底片中心的同一条直线上。它的优点是光路简单,对激光器模式要求较低。缺点是在再现时,原始像和共轭像在同一光轴上不能分离,两个像互相重叠,产生所谓的"孪生像"。

2. 按全息图结构与观察方式:透射全息与反射全息

透射全息图是指拍摄时物光与参考光从全息底片的同一侧射来,再现时,观察者与照明光源分别在全息图的两侧。其优点是影像三维效果好、景深大、幅面宽,形象极其逼真。反射全息图是指在拍摄时物光与参考光分别从全息图两侧射来,再现时,观察者与照明光源则在同一侧。

3. 按全息图的复振幅透过率: 振幅型全息图和相位 全息图

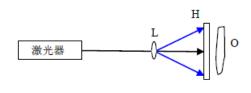


图 6 反射全息光路图

振幅型全息图是指乳胶介质经感光处理后,其吸收率被干涉场所调制,干涉条纹以浓淡不同的黑白条纹被记录在全息干板上;再现时,黑色部分吸收光而造成损失,未被吸收的部分衍射成像,故这种全息图又称为吸收型全息图。相位型全息图又分为折射率型和表面浮雕

型两种,前者是以乳胶折射率被调制的形式记录下干涉图形的,再现时,光经过折射率变化的乳胶而产生相位差;后者则是使记录介质的厚度随曝光量改变,折射率不变。再现光通过位相全息图时,仅仅其相位被调制,而无显著吸收,故一般得到的再现像较为明亮。

4. 按全息底片与物的远近关系: 菲涅耳全息图、像面全息图和傅里叶变换全息图

菲涅耳全息图是指物体与全息底片的距离较近 (菲涅耳衍射区内) 时所拍摄的全息图; 像面全息是指用透镜将物的像呈现在全息底片上所拍摄的全息图;傅里叶变换全息图是指把 物体进行傅里叶变换后,在其频谱面上拍摄其空间频谱的全息图。

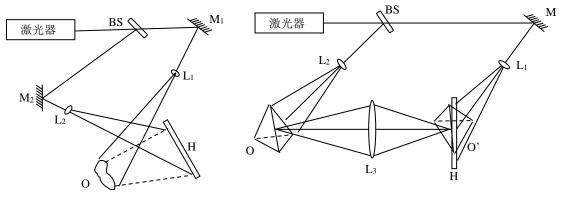


图 7 菲涅耳全息光路图

图 8 像面全息光路图

像面全息:因为种种原因,有时物体无法靠近记录介质时,就可以利用成像系统使物成像在记录介质附近,或者使一个全息图再现的实像靠近记录介质,都可以得到像全息图。像面全息的主要特点是可以用扩展的白光光源照明再现,因此广泛地用于图像的全息显示中。5.按所用再现光源:激光再现与白光再现

早期的全息图需要用激光再现,而许多新型的全息图都可以用白光再现,例如反射全息图、像面全息图、彩虹全息图、真彩色全息图等。

彩虹全息是利用记录时在光路的适当位置加狭缝,再现时同时再现狭缝像,观察再现像时将受到狭缝再现像的限制。当用白光照明再现时,对不同颜色的光,狭缝和物体的再现像位置都不同,在不同位置将看到不同颜色的像,颜色的排列顺序与波长顺序相同,犹如彩虹一样,因此这种全息技术称为彩虹全息。

6. 按记录介质乳胶的厚度: 平面全息和体积 全息图

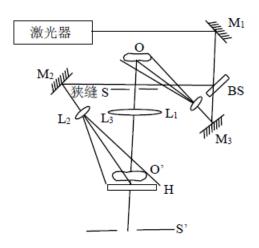


图 9 一步彩虹全息光路图

所谓平面全息图指二维全息图,只需考虑

乳胶平面上的振幅透过率分布,而无需考虑乳胶的厚度。体积全息图则需要考虑乳胶的厚度。 以上6类实际上又是相互穿插、相互渗透的。另外,我们还可以利用全息的原理来制造

以上6类实际上又是相互穿插、相互渗透的。另外,找们还可以利用全息的原理来制造全息光学元件:全息光栅和全息透镜。

全息光栅:由两平面波相干叠加而得到的全息图。目前不仅制出了平面光栅而且还制出了凹光栅和集光光栅。全息光栅也可以用两球面波来制得,这样得到的光栅还具有自聚集能力,用它来制造单色仪可以省去准直镜和会聚镜。

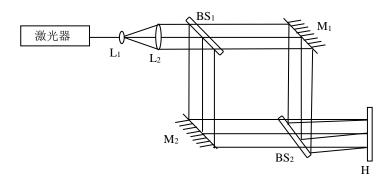


图 10 全息光栅光路图

全息透镜:一般是用两球面波或一平面波与一球面波相干叠加而制得全息图。全息透镜 也有同轴与离轴两种类型,能起到透镜的作用,实际上是菲涅耳波带片或变形了的菲涅耳波 带片。有像差,产生的原因是记录媒质处理前后的形变、再现时的波长的改变及复位精度等。

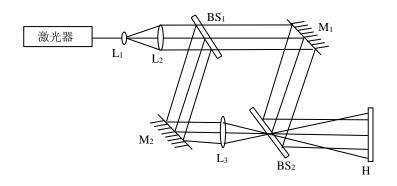


图 11 全息透镜光路图