1. 已知宽平稳过程 $X(t)$ 和 $Y(t)$ 的自相关函数分别为 $R_X(\tau) = exp(3\tau^2)$ 和 $R_Y(\tau) = \sigma^2 \cdot exp(-6|\tau|)$, 问 $X(t)$ 和 $Y(t)$ 是否均方连续，是否均方可导。

   参考答案:

   由于自相关函数

$$R_X(\tau) = exp(3\tau^2)$$

   和

$$R_Y(\tau) = \sigma^2 \cdot exp(-6|\tau|)$$

   满足

$$\lim_{\tau\to 0} R_X(\tau) = R_X(0),$$

$$\lim_{\tau\to 0} R_Y(\tau) = R_Y(0),$$

   随机过程 $X(t)$ 和 $Y(t)$ 都是均方连续的。要判断两个随机过程是否是均方可导的，只需判断对应的自相关函数的二阶导数是否在 $\tau = 0$ 处存在且连续。$R_X(\tau)$ 的二阶导数为

$$\frac{d^2R_X(\tau)}{d\tau^2} = \frac{d^2exp(3\tau^2)}{d\tau^2} = 6\frac{d[\tau exp(3\tau^2)]}{d\tau} = 6exp(3\tau^2)[1 + 6\tau^2],$$

   上述二阶导数满足

$$\lim_{\tau\to 0} \frac{d^2R_X(\tau)}{d\tau^2} = \frac{d^2R_X(\tau)}{d\tau^2}|_{\tau=0}$$

   故 $X(t)$ 均方可导。由于

$$\lim_{\tau\to 0^+} \frac{R_Y(\tau) - R_Y(0)}{\tau} = -6\sigma^2 exp(-\alpha\tau)|_{\tau=0} = -6\sigma^2,$$

$$\lim_{\tau\to 0^-} \frac{R_Y(\tau) - R_Y(0)}{\tau} = 6\sigma^2 exp(\alpha\tau)|_{\tau=0} = 6\sigma^2,$$

   $R_Y(\tau)$ 在 $\tau = 0$ 不可导，因此 $R_Y(\tau)$ 在 $\tau = 0$ 的二阶导数不存在。所以 $Y(t)$ 不是均方可导的。

2. 设 $N(t)$ 是零均值高斯白噪声，自相关函数为 $R_N(\tau) = \delta(\tau)$,$N(t)$ 通过一个积分器得到 $Y(t) = \alpha\int_0^t N(u)\,du$, 求 $Y(t)$ 的均值 $E[Y(t)]$ 和自相关函数 $R_Y(t,\tau)$, 并证明 $Y(t)$ 不是宽平稳的。

   参考答案:

   $Y(t)$ 的均值

$$E[Y(t)] = E[\alpha\int_0^t N(u)du] = \alpha\int_0^t E[N(u)]du = 0$$

$Y(t)$ 的自相关函数

$$\begin{aligned} R_Y(t,\tau) &= E[Y(t+\tau)Y(t)] \\ &= E[\alpha^2 \int_0^{t+\tau} N(u)\ du \int_0^t N(v)\ dv] \\ &= \alpha^2 \int_0^{t+\tau} \int_0^t E[N(u)N(v)]\ dvdu \\ &= \int_0^{t+\tau} \int_0^t \ \alpha^2 \delta(u-v)\ dvdu. \end{aligned}$$

如果 $\tau < 0$,$t+\tau < t$,

$$R_Y(t,\tau) = \int_0^{t+\tau} \alpha^2\ du = \alpha^2(t+\tau);$$

如果 $\tau \geqslant 0$,$t+\tau \geqslant t$,

$$R_Y(t+\tau) = \int_0^t \ \alpha^2\ dv = \alpha^2 t.$$

因此 $R_Y(t,\tau) = \alpha^2 \min\{t, t+\tau\}$. 由于 $R_Y(t,\tau)$ 和 t 与 τ 都有关，因此 $Y(t)$ 不是宽平稳的。

3. 设 $\{\xi_n, n \in \mathbb{Z}\}$ 为白噪声，即 $E(\xi_n) = 0, E(\xi_n\xi_m) = \delta_{nm}\sigma^2$，其中

$$\delta_{nm} = \begin{cases} 1, & n = m \\ 0, & n \neq m \end{cases}$$

定义 $X_n - aX_{n-1} = \xi_n, |a| < 1$，分初始条件 $X_0 = 0$ 和 $X_{-\infty} = 0$ 两种情况讨论序列 $\{X_n\}$ 的稳定性。

参考答案:

(1) 初始条件 $X_0 = 0$，利用迭代公式可得

$$X_n = \sum_{k=0}^{n-1} a^k \xi_{n-k} + a^n X_0 = \sum_{k=0}^{n-1} a^k \xi_{n-k}.$$

于是，对 $r \geqslant 0$，有

$$\begin{aligned} E(X_{n+r}X_n) &= E(\sum_{k=0}^{n+r-1} a^k \xi_{n+r-k} \sum_{p=0}^{n-1} a^p \xi_{n-p}) \\ &= E(\sum_{k=0}^{n+r-1} \sum_{p=0}^{n-1} a^k a^p \xi_{n+r-k}\xi_{n-p}) \\ &= \sum_{k=0}^{n+r-1} \sum_{p=0}^{n-1} a^k a^p E(\xi_{n+r-k}\xi_{n-p}) \\ &= \sigma^2 \sum_{p=0}^{n-1} a^p a^{p+r} \\ &= \sigma^2 a^r \frac{1-a^{2n}}{1-a^2} \end{aligned}$$

显然其自相关函数时参数 n 和 r 的函数，表明序列 $\{X_n\}$ 不是平稳过程。

(2) 初始条件 $X_{-\infty}=0$。利用迭代公式可得

$$X_n=\sum_{k=0}^{\infty}a^k\xi_{n-k}$$

于是，对 $r\geqslant 0$，有

$$\begin{aligned}E(X_{n+r}X_n)&=E(\sum_{k=0}^{\infty}a^k\xi_{n+r-k}\sum_{p=0}^{\infty}a^p\xi_{n-p})\\&=E(\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{p=0}^{\infty}a^ka^p\xi_{n+r-k}\xi_{n-p})\\&=\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{p=0}^{\infty}a^ka^pE(\xi_{n+r-k}\xi_{n-p})\\&=\sigma^2\sum_{p=0}^{\infty}a^pa^{p+r}\\&=\sigma^2a^r\frac{1}{1-a^2}\end{aligned}$$

事实上，当 $r<0$ 时，有

$$E(X_{n+r}X_n)=\sigma^2a^{|r|}\frac{1}{1-a^2}$$

显然，利用平稳过程的定义可知，此时 $\{X_n\}$ 是平稳过程。

4. 设 $g(x)$ 是一个确定性的非线性函数, 如果 $X(t)$ 是宽平稳但不严平稳的随机过程, $Y(t)=g(X(t))$ 是否一定不是宽平稳过程？（构造不少于两个例子并说明）

参考答案: 设 X 和 Y 是两个独立但分布不同的随机变量, 且满足 $E[X]=E[Y]$, $E[X^2]=E[Y^2]$, 定义随机过程 $Z(n)$，$n\in N$ 如下

$$Z(n)=\begin{cases}X & \text{n 为偶数},\\ Y & \text{n 为奇数}\end{cases}$$

则 $E[Z(n)]=E[X]$, 自相关函数为

$$R_z(t_1,t_2)=\begin{cases}E[X^2] & |t_1-t_2|\text{为偶数},\\ E[X]E[Y] & |t_1-t_2|\text{为奇数}\end{cases}$$

, 因此 $Z(n)$ 是宽平稳的。而 $F_{0,1}(a,b)=F_{XY}(a,b)=F_X(a)F_Y(b)\neq F_Y(a)F_X(b)=F_{YX}(a,b)=F_{1,2}(a,b)$, 所以 $Z(n)$ 不是严平稳的。

(1) 例子 1：若 X 和 Y 还满足 $E[X^4]=E[Y^4]$, 则取 $g(x)=x^2$, 则

$$g(Z(n))=\begin{cases}X^2 & n\text{为偶数},\\ Y^2 & n\text{为奇数}\end{cases}$$

$$E[g(Z(n))]=E[X^2]$$

$$R_z(t_1,t_2)=\begin{cases}E[X^4] & |t_1-t_2|\text{为偶数},\\ E[X^2]E[Y^2] & |t_1-t_2|\text{为奇数}\end{cases}$$

因此 $g(Z(n))$ 是宽平稳的。

(2) 例子 2：若 X 和 Y 还满足 $E[|X|]=E[|Y|]$, 则取 $g(x)=|x|$, 则

$$g(Z(n))=\begin{cases}|X| & n\text{为偶数},\\ |Y| & n\text{为奇数}\end{cases}$$

$$E[g(Z(n))]=E[|X|]$$

$$R_z(t_1,t_2)=\begin{cases}E[X^2] & |t_1-t_2|\text{为偶数},\\ E[|X|]E[|Y|] & |t_1-t_2|\text{为奇数}\end{cases}$$

因此 $g(Z(n))$ 是宽平稳的。

5. 给定一个线性时不变系统 $H(\omega)$, 其输人为 $X(t)$, 输出为 $Y(t)$, 证明: 若 $X(t)$ 是宽平稳过程, 且 $R_{XX}(\tau)=\mathrm{e}^{\mathrm{j}\alpha\tau}$, 则

$$R_{YX}(\tau)=\mathrm{e}^{\mathrm{j}\alpha\tau}H(\alpha)\quad R_{YY}(\tau)=\mathrm{e}^{\mathrm{j}\alpha\tau}|H(\alpha)|^2$$

参考答案:

已知:

$$\begin{aligned}S_{YX}(\omega)&=H(\omega)S_X(\omega)\\ S_Y(\omega)&=\overline{H(\omega)}H(\omega)S_X(\omega)=S_X(\omega)|H(\omega)|^2\\ S_X(\omega)&=2\pi\delta(\omega-\alpha)\end{aligned}$$

则:

$$\begin{aligned}S_{YX}(\omega)&=H(\omega)S_X(\omega)=2\pi H(\omega)\delta(\omega-\alpha)\\ S_Y(\omega)&=\overline{H(\omega)}H(\omega)S_X(\omega)=S_X(\omega)|H(\omega)|^2=2\pi|H(\omega)|^2\delta(\omega-\alpha)\\ R_{YX}(\tau)&=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}2\pi H(w)\delta(\omega-\alpha)\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega\tau}d\omega=\mathrm{e}^{\mathrm{j}\alpha\tau}H(\alpha)\\ R_{YY}(\tau)&=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}2\pi|H(\omega)|^2\delta(\omega-\alpha)\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega\tau}d\omega=\mathrm{e}^{\mathrm{j}\alpha\tau}|H(\alpha)|^2\end{aligned}$$

6. $X(t)$ 为实随机过程，$R(\tau)$ 为其自相关函数，证明：

$$R(0)-R(\tau)\geqslant\frac{1}{4^n}[R(0)-R(2^n\tau)]$$

提示：可证 $1-cos\theta\geqslant\frac{1}{4}(1-cos2\theta)$

参考答案：已知：$X(t)$ 为实随机过程，则 $R(\tau)=\mathbb{E}(X(t+\tau)X(t))$ 为实，且为实的偶函数

则：$S(\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty}R(\tau)e^{-j\omega\tau}d\tau=\int_{-\infty}^{+\infty}R(\tau)cos(-j\omega\tau)d\tau$ 也为实的偶函数 (上述实偶对称性在《信号与系统》中学过)

Bochner 指出：一个函数是正定的，当且仅当该函数的傅里叶变换是正的（课上结论，可直接用）因此，$R(\tau)$ 正定函数，则 $S(\omega)$ 为正

$$R(\tau)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}S(\omega)e^{j\omega\tau}d\omega=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}S(\omega)cos(\omega\tau)d\omega$$

$$R(0)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}S(\omega)d\omega$$

$$R(2^n\tau)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}S(\omega)cos(\omega 2^n\tau)d\omega$$

已知：

$$1-cos\theta=2sin^2\frac{\theta}{2}\geqslant 2sin^2\frac{\theta}{2}cos^2\frac{\theta}{2}=\frac{1}{2}sin^2\theta=\frac{1}{4}(1-cos2\theta)$$

则有：

$$\begin{aligned}R(0)-R(\tau)&=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}S(\omega)(1-cos(\omega\tau))d\omega\\&\geqslant\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}S(\omega)\frac{1}{4}(1-cos(\omega 2\tau))d\omega\\&\geqslant\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}S(\omega)\frac{1}{4^n}(1-cos(\omega 2^n\tau))d\omega\\&=\frac{1}{4^n}(R(0)-R(2^n\tau))\end{aligned}$$

7. 设 $X(t)$ 和 $Y(t)$ 是两个相互独立的实宽平稳过程，均值分别为常数 m_X 和 m_Y，且 $X(t)$ 的功率谱密度为 $S_X(\omega)$。定义 $Z(t)=X(t)+Y(t)$，求 $S_{XY}(\omega)$ 和 $S_{XZ}(\omega)$。

参考答案：

由维纳-辛钦定理：

$$\begin{aligned}S_{XY}(\omega)&=\int_{-\infty}^{\infty}R_{XY}(\tau)e^{-j\omega\tau}d\tau\\&=\int_{-\infty}^{\infty}E[X(t)Y(t-\tau)]e^{-j\omega\tau}d\tau\\&=m_Xm_Y\int_{-\infty}^{\infty}e^{-j\omega\tau}d\tau\\&=2\pi m_Xm_Y\delta(\omega)\end{aligned}$$

相似地，

$$\begin{aligned}S_{XZ}(\omega)&=\int_{-\infty}^{\infty}R_{XZ}(\tau)e^{-j\omega\tau}d\tau\\&=\int_{-\infty}^{\infty}E[X(t)Z(t-\tau)]e^{-j\omega\tau}d\tau\\&=\int_{-\infty}^{\infty}E[X(t)X(t-\tau)]e^{-j\omega\tau}d\tau+\int_{-\infty}^{\infty}E[X(t)Y(t-\tau)]e^{-j\omega\tau}d\tau\\&=S_X(\omega)+S_{XY}(\omega)\\&=S_X(\omega)+2\pi m_Xm_Y\delta(\omega)\end{aligned}$$

8. 复随机过程 $Z(t)=Ae^{j\Omega t}$，其中 Ω 的概率密度函数为 $f_\Omega(\omega)$，A 为复常数。求 $Z(t)$ 的功率谱密度 $S_Z(\omega)$。

参考答案:
先求 $Z(t)$ 的自相关函数:

$$\begin{aligned} R_Z(\tau) &= E[Z(t)Z(t-\tau)^*] \\ &= E[Ae^{j\Omega t}A^*e^{-j\Omega(t-\tau)}] \\ &= E[|A|^2e^{j\Omega\tau}] \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f_\Omega(\omega_0)|A|^2e^{j\omega_0\tau}d\omega_0 \end{aligned}$$

由维纳-辛钦定理:

$$\begin{aligned} S_Z(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} R_Z(\tau)e^{-j\omega\tau}d\tau \\ &= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f_\Omega(\omega_0)|A|^2e^{j\omega_0\tau}d\omega_0 e^{-j\omega\tau}d\tau \end{aligned}$$

假设 $f_\Omega(\omega)$ 的逆傅里叶变换为 $h(t)$，即

$$\begin{aligned} h(t) &= \tfrac{1}{2\pi}\textstyle\int_{-\infty}^{\infty} f_\Omega(\omega)e^{j\omega t}d\omega \\ f_\Omega(\omega) &= \textstyle\int_{-\infty}^{\infty} h(t)e^{-j\omega t}dt \end{aligned}$$

因此,

$$\begin{aligned} S_Z(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f_\Omega(\omega_0)|A|^2e^{j\omega_0\tau}d\omega_0 e^{-j\omega\tau}d\tau \\ &= |A|^2\int_{-\infty}^{\infty} 2\pi h(\tau)e^{-j\omega\tau}d\tau \\ &= 2\pi|A|^2 f_\Omega(\omega) \end{aligned}$$

9. 已知平稳过程 $\{X(t),-\infty<t<+\infty\}$ 的自相关函数 $R_X(\tau)$ 和功率谱密度 $S_X(\omega)$，设

$$Y(t)=X(t+a)-X(t),-\infty<t<+\infty$$

其中 a 为常数，求证 $\{Y(t),-\infty<t<+\infty\}$ 也是平稳过程，并求其自相关函数 $R_Y(\tau)$ 和功率谱密度 $S_Y(\omega)$.

参考答案:

Y(t) 的均值为
$E(Y(t))=E(X(t+a)-X(t))=0$(常数)

Y(t) 的自相关函数为

$$
\begin{aligned}
R_Y(\tau) &= R_Y(t,t+\tau) \\
&= R_X(t+a,t+a+\tau) - R_X(t+a,t+\tau) - R_X(t,t+\tau+a) + R_X(t,t+\tau) \\
&= R_X(\tau) - R_X(\tau-a) - R_X(\tau+a) + R_X(\tau) \\
&= 2R_X(\tau) - R_X(\tau-a) - R_X(\tau+a)
\end{aligned}
$$

即自相关函数仅与时间差 τ 有关

同时，$R_Y(0) = 2R_X(0) - R_X(a) < +\infty$，故 $Y(t)$ 是平稳过程

Y(t) 的功率谱密度为

$$
\begin{aligned}
S_Y(\omega) &= \mathscr{F}(R_Y(\tau)) \\
&= \mathscr{F}(2R_X(\tau) - R_X(\tau-a) - R_X(\tau+a)) \\
&= 2S_X(\omega) - e^{-j\omega a}S_X(\omega) - e^{j\omega a}S_X(\omega) \\
&= (2 - e^{-j\omega a} - e^{j\omega a})S_X(\omega) \\
&= 4sin^2(\frac{\omega a}{2})S_X(\omega)
\end{aligned}
$$

10. 若 $X(t)$ 为一带宽有限的实平稳随机过程，当 $|\omega| > \omega_c$ 时，$S(\omega) = 0$，证明：当 $|\tau| < \frac{\pi}{2\omega_c}$ 时，有

$$R(\tau) \geqslant R(0)cos(\omega_c\tau)$$

参考答案:

已知：$X(t)$ 为实随机过程，则 $R(\tau) = E[X(t+\tau)X(t)]$ 为实，且为实的偶函数

则：$S(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} R(\tau)e^{-j\omega\tau}d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} R(\tau)cos(-j\omega\tau)d\tau$ 也为实的偶函数。

$$R(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} S(\omega)e^{j\omega\tau}d\omega = \int_{-\omega_c}^{\omega_c} S(\omega)cos(\omega\tau)d\omega$$

$$R(0) = \int_{-\omega_c}^{\omega_c} S(\omega)d\omega$$

$$R(0)cos(\omega_c\tau) = \int_{-\omega_c}^{\omega_c} S(\omega)cos(\omega_c\tau)d\omega$$

$$R(\tau) - R(0)cos(\omega_c\tau) = \int_{-\omega_c}^{\omega_c} S(\omega)(cos\omega\tau - cos\omega_c\tau)d\omega$$

易证，在积分区域 $\omega \in (-\omega_c, \omega_c)$，对于任意 $|\tau| < \frac{\pi}{2\omega_c}$，均有 $cos\omega\tau - cos\omega_c\tau \geqslant 0$ (此处可以用三角函数和差化积的方法来证明，$cos(a) - cos(b) = -2sin((a-b)/2)sin((a+b)/2)$，证明两个正弦函数异号；或利用 $cos(\omega_c\tau)$ 的偶函数性质证明。其他方法言之有理即可。)

根据功率谱密度性质，$S(\omega) > 0$，故被积函数在积分区间内大于等于 0，故 $R(\tau) - R(0)cos(\omega_c\tau) \geqslant 0$

11. 设 $S_X(\omega)$ 是一个随机过程的功率谱密度，证明：$\frac{\partial^2}{\partial\omega^2}S_X(\omega)$ 不可能是功率谱密度。

参考答案:

证明：根据相关函数的性质，有 $|R_X(0)| \geqslant |R_X(\tau)|$. 将 $\frac{\partial^2}{\partial\omega^2}S_X(\omega)$ 记为 $S_{X_1}(\omega)$, 由于 $S_{X_1}(\omega)$ 和 $R_{X_1}(\omega)$ 构成一个傅立叶变换对,所以根据傅里叶变换的微分性质有 $R_{X_1}(\tau) = -\tau^2 R_X(\tau)$.

若对应于某一个 $\tau_1 \neq 0$, 有 $R_X(\tau_1) \neq 0$, 则有 $|R_{X_1}(0)| < |R_{X_1}(\tau_1)|$，即 $R_{X_1}(\tau)$ 不可能是相关函数，从而 $\frac{\partial^2}{\partial\omega^2}S_X(\omega)$ 不可能是功率谱密度。

12. (1) 已知宽平稳随机过程的功率谱密度 $S(\omega) = \frac{\omega^2+1}{\omega^4+5\omega^2+6}$, 求其对应的自相关函数。

(2) 已知宽平稳随机过程的自相关函数 $R_X(\tau) = \sigma^2 exp(-\alpha\tau^2)$, 其中 α、σ 为常数，且 $\alpha > 0$, 求其对应的功率谱密度。

参考答案:

(1) 由于 $S(\omega) = \frac{\omega^2+1}{\omega^4+5\omega^2+6} = \frac{\omega^2+1}{(\omega^2+2)(\omega^2+3)} = \frac{2}{\omega^2+3} - \frac{1}{\omega^2+2} = \frac{\frac{1}{\sqrt{3}}*2\sqrt{3}}{\omega^2+\left(\sqrt{3}\right)^2} - \frac{\frac{1}{2\sqrt{2}}*2\sqrt{2}}{\omega^2+\left(\sqrt{2}\right)^2}$

所以 $R(\tau) = \frac{1}{\sqrt{3}}e^{-\sqrt{3}|\tau|} - \frac{1}{2\sqrt{2}}e^{-\sqrt{2}|\tau|}$.

(2) $S_x(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty}\sigma^2 e^{-\alpha\tau^2}e^{-j\omega\tau}d\tau = \sigma^2\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\alpha\left(\tau-\frac{j\omega}{2\alpha}\right)^2-\frac{\omega^2}{4\alpha}}d\tau = \sigma^2\frac{\sqrt{2\pi}}{\sqrt{2\alpha}}e^{-\frac{\omega^2}{4\alpha}} = \sigma^2\sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}e^{-\frac{\omega^2}{4\alpha}}$

13. 设 $X(t)$ 和 $Y(t)$ 为实平稳随机过程，定义窄带平稳过程

$$Z(t) = X(t)\cos\omega_0 t - Y(t)\sin\omega_0 t$$

证明：

(1) $R_Y(\tau) = R_Z(\tau)\cos\omega_0\tau + \hat{R}_Z(\tau)\sin\omega_0\tau$; (2) $R_Z(\tau) = R_X(\tau)\cos\omega_0\tau + R_{XY}(\tau)\sin\omega_0\tau$

参考答案: (1) 由希尔伯特变换的性质可知：

$$Z(t) = X(t)\cos\omega_0 t - Y(t)\sin\omega_0 t$$
$$\hat{Z}(t) = X(t)\sin\omega_0 t + Y(t)\cos\omega_0 t$$

解出 $Y(t)$ 可得：

$$Y(t) = \hat{Z}(t)\cos\omega_0 t - Z(t)\sin\omega_0 t$$

根据相关函数的定义，有：

$$\begin{aligned}
R_Y(\tau) &= E[Y(t)Y(t-\tau)] \\
&= E\{[\hat{Z}(t)\cos\omega_0 t - Z(t)\sin\omega_0 t][\hat{Z}(t-\tau)\cos\omega_0(t-\tau) - Z(t-\tau)\sin\omega_0(t-\tau)]\} \\
&= R_{\hat{Z}}(\tau)\cos\omega_0 t\cos\omega_0(t-\tau) - R_{Z\hat{Z}}(\tau)\sin\omega_0 t\cos\omega_0(t-\tau) \\
&\quad - R_{\hat{Z}Z}(\tau)\cos\omega_0 t\sin\omega_0(t-\tau) + R_Z(\tau)\sin\omega_0 t\sin\omega_0(t-\tau)
\end{aligned}$$

由于 $R_{\hat{Z}}(\tau) = R_Z(\tau)$，$R_{Z\hat{Z}}(\tau) = -\hat{R}_Z(\tau)$，$R_{\hat{Z}Z}(\tau) = \hat{R}_Z(\tau)$，故将上述结果代入 $R_Y(\tau)$ 可得：

$$\begin{aligned}
R_Y(\tau) &= R_Z(\tau)\cos\omega_0 t\cos\omega_0(t-\tau) + \hat{R}_Z(\tau)\sin\omega_0 t\cos\omega_0(t-\tau) \\
&\quad - \hat{R}_Z(\tau)\cos\omega_0 t\sin\omega_0(t-\tau) + R_Z(\tau)\sin\omega_0 t\sin\omega_0(t-\tau) \\
&= R_Z(\tau)\cos\omega_0\tau + \hat{R}_Z(\tau)\sin\omega_0\tau
\end{aligned}$$

(2) 根据相关函数的定义，有：

$$
\begin{aligned}
R_Z(\tau) &= E[Z(t)Z(t-\tau)] \\
&= E\{[X(t)\cos\omega_0 t - Y(t)\sin\omega_0 t][X(t-\tau)\cos\omega_0(t-\tau) - Y(t-\tau)\sin\omega_0(t-\tau)]\} \\
&= R_X(\tau)\cos\omega_0 t\cos\omega_0(t-\tau) - R_{YX}(\tau)\sin\omega_0 t\cos\omega_0(t-\tau) \\
&\quad - R_{XY}(\tau)\cos\omega_0 t\sin\omega_0(t-\tau) + R_Y(\tau)\sin\omega_0 t\sin\omega_0(t-\tau)
\end{aligned}
$$

由于 $R_X(\tau) = R_Y(\tau)$，$R_{XY}(\tau) = -R_{YX}(\tau)$，故将上述结果代入 $R_Z(\tau)$ 可得：

$$
\begin{aligned}
R_Z(\tau) &= R_X(\tau)[\cos\omega_0 t\cos\omega_0(t-\tau) + \sin\omega_0 t\sin\omega_0(t-\tau)] \\
&\quad - R_{XY}(\tau)[\sin\omega_0 t\cos\omega_0(t-\tau) - \cos\omega_0 t\sin\omega_0(t-\tau)] \\
&= R_X(\tau)\cos\omega_0\tau + R_{XY}(\tau)\sin\omega_0\tau
\end{aligned}
$$