

## 《高等微积分 1》第三周作业

本次作业在第五周星期三上课时间交, 希望大家使用订在一起的散页纸.

1 设  $a, b$  是给定的实数, 定义函数

$$f(x) = \begin{cases} 2x, & \text{如果 } x > 0, \\ a \cos x + b \sin x, & \text{如果 } x < 0. \end{cases}$$

当  $a, b$  取哪些值时, 极限  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$  存在?

2 设  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$ .

(1) 证明: 对于正奇数  $k$ , 有  $\lim_{x \rightarrow a} \sqrt[k]{f(x)} = \sqrt[k]{A}$ .

(2) 证明: 对于正偶数  $k$ , 如果  $A > 0$ , 则有  $\lim_{x \rightarrow a} \sqrt[k]{f(x)} = \sqrt[k]{A}$ .

3 计算函数极限.

(1) 给定正整数  $m, n$ . 求极限  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^m - 1}{x^n - 1}$ .

(2) 给定正整数  $n$  与正数  $p$ . 求极限  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[n]{x^n + p^n} - p}{x^n}$ .

(3) 给定正整数  $n$  与正数  $p, q$ . 求极限  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[n]{x^n + p^n} - p}{\sqrt[n]{x^n + q^n} - q}$ .

(4) 求极限  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctan x}{x}$ .

(5) 求极限  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - \sin x}{x^3}$ .

4 (1) 给定正数  $A$ . 证明:  $\lim_{x \rightarrow A} \ln x = \ln A$ .

(2) 给定实数  $c$ . 证明:  $\lim_{x \rightarrow c} e^x = e^c$ .

(3) 设  $\lim_{x \rightarrow x_0} u(x) = a > 0$ ,  $\lim_{x \rightarrow x_0} v(x) = b$ . 证明:  $\lim_{x \rightarrow x_0} u(x)^{v(x)} = a^b$ .

5 设  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$ ,  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = A$ . 设  $r$  是正数, 且对任何  $x \in N^*(x_0, r)$ , 总有  $f(x) \neq 0$ .

(1) 求极限  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\sin(f(x))}{g(x)}$ .

(2) 求极限  $\lim_{x \rightarrow x_0} (1 + f(x))^{1/g(x)}$ .

(3) 给定实数  $a, b \neq 0$ . 求极限  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(ax)}{\sin(bx)}$ .

(4) 求极限  $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{x - \frac{\pi}{2}}$ .

(5) 求极限  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{\sqrt{x+2} - \sqrt{2}}$ .

(6) 给定实数  $k$ . 求极限  $\lim_{x \rightarrow 0} (1 + kx)^{1/x}$ .

(7) 给定实数  $a$ . 求极限  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+a}{x-a}\right)^x$ .

(8) 给定实数  $a, b$ . 求极限  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{a}{x}\right)^{bx}$ .

(9) 求极限  $\lim_{x \rightarrow 0} (\cos 2x)^{1/x^2}$ .

(10) 求极限  $\lim_{x \rightarrow 0} (2 \sin x + \cos x)^{1/x}$ .