1. 病人随机地来到诊所就诊，到达的病人数目服从参数为 λ 的泊松分布。若病人就诊的持续时间为 a，在下列两种情况下计算：第一个病人到达后，第二个病人不需要等待候诊的概率以及第二个病人等待时间的均值。

(1) a 为确定性的常数;

(2) a 服从参数为 μ 的指数分布。

参考答案:

(1) a 为确定性常数，两位病人 A 和 B 到达的时间间隔服从指数分布，$f(x)=\lambda e^{-\lambda x}, x>0$，不需要等待的概率为 $\int_a^{\infty}\lambda e^{-\lambda x}dx=e^{-\lambda a}$，当 x<a 时，B 需要等待，等待时间为 a-x，故平均等待时间为 $\int_0^a(a-x)\lambda e^{-\lambda x}dx=a-\frac{1}{\lambda}\left(1-e^{-\lambda a}\right)$.

(2) a 服从参数为 μ 的指数分布，因此不需要等待的概率为 $\int_0^{\infty}e^{-\lambda a}\mu e^{-\mu a}da=\frac{\mu}{\lambda+\mu}$，等待时间的均值为 $\int_0^{\infty}\left[a-\frac{1}{\lambda}\left(1-e^{-\lambda a}\right)\right]\mu e^{-\mu a}da=\frac{\lambda}{\mu(\lambda+\mu)}$.

2. 设有两个相互独立的泊松过程 $N_1(t)$ 和 $N_2(t)$，参数分别为 λ_1 和 λ_2，设 $N_1(0)=m$，$N_2(0)=n$，且有 $N>m,n$，计算过程 $N_2(t)$ 取值 N 早于 $N_1(t)$ 取值 N 的概率。

参考答案:

$N_2(t)$ 取值 N 相当于 $N_2(t)-N_2(0)=N-n$，

在 t=0 后出现 N-n 个事件所需时间 T_2^{N-n} 的概率密度函数为

$f_{T_2^{(N-n)}}(t)=\lambda_2\frac{(\lambda_2 t)^{N-n-1}}{(N-n-1)!}e^{-\lambda_2 t}, t>0$，

在 t 内 $N_1(t)$ 出现 k 个事件的概率为 $P_{N_1(t)}=\frac{(\lambda_1 t)^k}{k!}e^{-\lambda_1 t}$，

故在 T_2^{N-n} 内 $N_1(t)$ 出现 k 个事件的概率为

$\int_0^{\infty}\frac{(\lambda_1 t)^k}{k!}e^{-\lambda_1 t}f_{T_2^{(N-n)}}(t)\,dt=\begin{pmatrix}N-n+k-1\\k\end{pmatrix}\left(\frac{\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2}\right)^k\left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1+\lambda_2}\right)^{N-n}$.

$N_2(t)$ 取值 N 早于 $N_1(t)$ 取值 N 的事件相当于在 T_2^{N-n} 内 $N_1(t)$ 出现 k 为 0，1，2，……，N-m-1 个事件的和，

故过程 $N_2(t)$ 取值 N 早于 $N_1(t)$ 取值 N 的概率为 $\sum_{k=0}^{N-n-1}\begin{pmatrix}N-n+k-1\\k\end{pmatrix}\left(\frac{\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2}\right)^k\left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1+\lambda_2}\right)^{N-n}$.

3. 设 $\{X_1(t),t\geqslant 0\}$ 和 $\{X_2(t),t\geqslant 0\}$，$\{X_3(t),t\geqslant 0\}$ 为三个相互统计独立的泊松过程，$\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$ 分别为 $X_1(t),X_2(t),X_3(t)$ 的参数。若 $X_1(t)+X_2(t)+X_3(t)=n$ 时，求 $X_1(t)=k,X_2(t)=j$ 的条件概率。

参考答案:

$$
\begin{aligned}
&P\{X_1(t)=k,X_2(t)=j/X_1(t)+X_2(t)+X_3(t)=n\}\\
&\quad=P\{X_1(t)=k,X_2(t)=j,X_1(t)+X_2(t)+X_3(t)=n\}/P\{X_1(t)+X_2(t)+X_3(t)=n\}\\
&\quad=P\{X_1(t)=k,X_2(t)=j,X_3(t)=n-k-j\}/P\{X_1(t)+X_2(t)+X_3(t)=n\}\\
&\quad=\frac{(\lambda_1 t)^k}{k!}e^{(-\lambda_1 t}\cdot\frac{(\lambda_2 t)^k}{k!}e^{(-\lambda_2 t}\cdot\frac{(\lambda_3 t)(n-k-j)}{(n-k-j)!}e^{(-\lambda_3 t}/\{[\frac{(\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3)t]^n}{n!}e^{-(\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3)t}\}\\
&\quad=\frac{n!}{k!j!(n-k-j)!}(\frac{\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3})^k(\frac{\lambda_2}{\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3})^j(\frac{\lambda_3}{\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3})^{(n-k-j)}
\end{aligned}
$$

4. 现有一个由两种元件组成的系统，这两种元件当遇到下列不同类型的振动时遭到损坏。如出现第一种类型振动，将使甲失效，如出现第二类型振动，将使元件乙失效，如出现第三种类型振动，将使甲、乙两种元件同时失效。在 (0,t) 内出现第一、二、三种类型振动的事件均服从泊松分布，二、三种类型振动的出现频率分别为 $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$。又设 X_1 代表元件甲的寿命，X_2 代表元件乙的寿命。求以下概率：

(1)$P\{X_1 \geqslant s, X_2 \geqslant t\}$

(2)$P\{X_1 \geqslant s\}$

(3)$P\{X_2 \geqslant t\}$

参考答案:

(1) 由题意得，在 t 时间前没有第一种振动，在 s 时间前没有第二种振动，在 t 和 s 时间前没有第三种振动，因此

$$\begin{aligned}P\{X_1 \geqslant s, X_2 \geqslant t\} &= exp\{-\lambda_1 s\} \cdot exp\{-\lambda_2 t\} \cdot exp\{-\lambda_3 max(t,s)\} \\ &= exp\{-\lambda_1 s - \lambda_2 t - \lambda_3 max(t,s)\}\end{aligned}$$

(2) 由题意得，在 s 时间前既没有第一种振动也没有第三种振动

$$\begin{aligned}P\{X_1 \geqslant s\} &= exp\{-\lambda_1 s\} \cdot exp\{-\lambda_3 s\} \\ &= exp\{-(\lambda_1 + \lambda_3)s\}\end{aligned}$$

(3) 由题意得，在 t 时间前既没有第二种振动也没有第三种振动

$$\begin{aligned}P\{X_1 \geqslant t\} &= exp\{-\lambda_2 t\} \cdot exp\{-\lambda_3 t\} \\ &= exp\{-(\lambda_2 + \lambda_3)t\}\end{aligned}$$

5. 设事件 A 在 $[0,t)$ 内出现的次数 $\{N(t), t \geqslant 0\}$ 是参数为 λ 的齐次 Poisson 过程. 已知在 $[0,t)$ 内事件 A 已经发生 n 次, 求第 $k(k<n)$ 次事件 A 发生的时间 τ_k 的条件概率密度函数.

参考答案:

先求条件分布函数的改变量. 假设第 k 次事件的发生时间满足 $s \leqslant \tau_k < s+h$ ，当 $h \to 0$ 时, 有

$$\begin{aligned}
&P\left\{s \leqslant \tau_k < s+h \mid N(t)=n\right\} = \frac{P\left\{s \leqslant \tau_k < s+h, N(t)=n\right\}}{P\{N(t)=n\}} \\
&= P\left\{s \leqslant \tau_k < s+h, N(t)-N(s+h)=n-k\right\} \cdot \frac{\mathrm{e}^{\lambda t} n!}{(\lambda t)^n} \\
&= P\{N(s)=k-1\} \cdot P\{N(s+h)-N(s)=1\} \\
&\cdot P\{N(t)-N(s+h)=n-k\} \cdot \frac{\mathrm{e}^{\lambda t} n!}{(\lambda t)^n} \\
&= \frac{(\lambda s)^{k-1}}{(k-1)!}\mathrm{e}^{\lambda s} \cdot \frac{(\lambda h)^1}{1!}\mathrm{e}^{\lambda h} \cdot \frac{[\lambda(t-s-h)]^{n-k}}{(n-k)!}\mathrm{e}^{-\lambda(t-s-h)} \cdot \frac{\mathrm{e}^{\lambda t} n!}{(\lambda t)^n} \\
&= k C_n^k \cdot \frac{s^{k-1}(t-s-h)^{n-k} h}{t^n}
\end{aligned}$$

将上式两边除以 h, 令 $h \to 0$, 得

$$\begin{aligned} f_{\tau_k \mid N(t)}(s \mid n) &= \lim_{h \to 0} k C_n^k \cdot \frac{s^{k-1}(t-s-h)^{n-k} h}{t^n h} \\ &= k C_n^k \cdot \frac{s^{k-1}(t-s)^{n-k}}{t^n} \end{aligned}$$

6. 设 $X_0, X_1, \cdots, X_n, \cdots$ 独立同分布于 $N\left(0, \sigma^2\right), \{N(t), t \geqslant 0\}$ 是参数为 λ 的齐次 Poisson 过程. $Z(t) = X_{N(t)}$ 为一随机过程. 试求: $\{Z(t), t \geqslant 0\}$ 的均值函数、方差函数、相关函数;

参考答案:

$m_Z(t) = E(Z(t)) = E\left(X_{N(t)}\right) = E\left(E\left(X_{N(t)} \mid N(t)\right)\right) = 0$
当 $\tau \geqslant 0$ 时. 有

$$\begin{aligned} R_Z(t, t+\tau) &= E(Z(t) Z(t+\tau)) \\ &= E\left(X_{N(t)} X_{N(t+\tau)}\right) \\ &= \sum_{k=0}^{+\infty} \sum_{l=0}^{+\infty} E\left(X_k X_l\right) P\{N(t)=k, N(t+\tau)=l\} \\ &= \sum_{k=0}^{+\infty} E\left(X_k^2\right) P\{N(t)=k, N(t+\tau)=k\} \\ &= \sum_{k=0}^{+\infty} \sigma^2 P\{N(t)=k\} \cdot P\{N(\tau)=0\} \\ &= \sigma^2 \mathrm{e}^{-\lambda \tau} \end{aligned}$$

一般地, 有

$$R_Z(t, t+\tau) = \sigma^2 \mathrm{e}^{-\lambda|\tau|}$$

$$D_Z(t) = R_Z(0) - m_Z^2 = \sigma^2$$

7. 乘客按比率为 λ_A 的泊松过程到达飞机 A (从 $t=0$ 开始), 当飞机 A 有 N_A 个乘客时就起飞, 与此独立的事件为乘客以比率为 λ_B 的泊松过程登上飞机 B (从 $t=0$ 开始）, 当飞机 B 有 N_B 个乘客时就起飞。

(1) 写出飞机 A 在飞机 B 之后离开的概率表示式;

(2) 对于 $N_A = N_B$ 和 $\lambda_A = \lambda_B$ 的情况下, 计算第 1 小题的概率表示式。

参考答案:

(1) 令 T_A 表示乘飞机 A 的第 N_A 个乘客的到达时间, T_B 表示乘飞机 B 的第 N_B 个乘客的到达时间, 根据题意, 其飞机 A 在飞机 B 之后离开的概率为 $P\{T_A > T_B\}$。对于简单的泊松过程 $X(t)$, 到达时间的概率密度函数为

$$f_{x_k}(t) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^{k-1}}{(k-1)!} & t \geqslant 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$$

因此有

$$f_{T_A}(t) = \begin{cases} \lambda_A e^{-\lambda_A t} \frac{(\lambda_A t)^{N_A - 1}}{(N_A - 1)!} & t \geqslant 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$$

和

$$f_{T_B}(t)=\begin{cases}\lambda_B e^{-\lambda_B t}\frac{(\lambda_B t)^{N_B-1}}{(N_B-1)!} & t\geqslant 0\\ 0 & t<0\end{cases}$$

由于 T_A 和 T_B 是统计独立的, 故

$$P\{T_A>T_B\}=\int_0^{\infty}\int_{t_B}^{\infty}\lambda_A\lambda_B e^{-(\lambda_A+\lambda_B)t}\cdot\frac{(\lambda_A t)^{N_A-1}(\lambda_B t)^{N_B-1}}{(N_A-1)!\,(N_B-1)!}dtdt_B$$

(2) 如果 $f_{T_A}(t)=f_{T_B}(t)$, 则被积函数关于 45° 线对称, 于是有

$$P\{T_A>T_B\}=\frac{1}{2}$$

8. 设 $X(t)$ 和 $Y(t)(0\leqslant t<\infty)$ 是分别具有比率 λ_X 和 λ_Y 的独立泊松过程。证明过程 $X(t)$ 的任意两个相邻事件之间的时间间隔内, 过程 $Y(t)$ 恰好有 k 个事件发生的概率为

$$P=\frac{\lambda_X}{\lambda_X+\lambda_Y}\cdot\left(\frac{\lambda_Y}{\lambda_X+\lambda_Y}\right)^k\quad k=0,1,2,\cdots$$

参考答案:

证明假定 τ 是泊松计数过程 $X(t)$ 的两个相邻事件之间的时间间隔, 根据题意, 由于 $X(t)$ 和 $Y(t)$ 统计独立, 则

$$P\{Y(t+\tau)-Y(t)=k\}=\frac{(\lambda_Y\tau)^k}{k!}\cdot e^{-\lambda_Y\tau}$$

不难理解, 过程 $X(t)$ 的不同到达时刻有下面的概率密度函数

$$f_T(\tau)=\begin{cases}\lambda_X e^{-\lambda_X\tau} & \tau\geqslant 0\\ 0 & \text{其它}\end{cases}$$

并且知道过程 $X(t)$ 是泊松计数过程, 故过程 $Y(t)$ 恰好有 k 个事件发生的概率为

$$\begin{aligned}P&=\int_0^{\infty}\frac{(\lambda_Y\tau)^k}{k!}e^{-\lambda_Y\tau}\lambda_X e^{-\lambda_X\tau}d\tau\\&=\frac{\lambda_X\cdot\lambda_Y^k}{k!}\int_0^{\infty}\tau^k e^{-(\lambda_X+\lambda_Y)\tau}d\tau\\&=\frac{\lambda_X\cdot\lambda_Y^k}{k!}\cdot\frac{k!}{(\lambda_X+\lambda_Y)^{k+1}}\\&=\frac{\lambda_X}{\lambda_X+\lambda_Y}\cdot\left(\frac{\lambda_Y}{\lambda_X+\lambda_Y}\right)^k\end{aligned}$$

9. 设有两个相互独立的泊松过程 $X(t)$ 和 $Y(t)$, 参数分别为 λ_X 和 λ_Y ，设 $T_1(X)$ 和 $T_1(Y)$ 分别为 $X(t)$ 和 $Y(t)$ 第一次事件出现的时间，计算 $P(T_1(X)<T_1(Y))$。

参考答案:

解法一、根据泊松过程的性质，可知 T_1^X 服从参数为 λ_X 的指数分布，T_1^Y 服从参数为 λ_Y 的指数分布。再利用 X 和 Y 之间的独立性，有

$$\begin{aligned}
P(T_1^X < T_1^Y) &= \int_0^{+\infty}\int_x^{+\infty} \lambda_X\lambda_Y e^{-\lambda_X x-\lambda_Y y}dydx \\
&= \int_0^{+\infty} \lambda_X e^{-(\lambda_X+\lambda_Y)}dx \\
&= \frac{\lambda_X}{\lambda_X+\lambda_Y}
\end{aligned}$$

解法二、考虑和过程 $Z(t)=X(t)+Y(t), t\geqslant 0$，则 $\{Z(t)\}\sim \mathrm{PP}(\lambda_X+\lambda_Y)$。然后，将和过程按照服从伯努利分布的二值随机变量进行分流，设呼叫以概率 $\frac{\lambda_X}{\lambda_X+\lambda_Y}$ 分流到 $\{X(t)\}$，以概率 $\frac{\lambda_Y}{\lambda_X+\lambda_Y}$ 分流到 $\{Y(t)\}$，这样就得到了 $X(t)$ 与 $Y(t)$。事件 $\{T_1^X < T_1^Y\}$，就等价于过程 $Z(t)$ 中第一次呼叫发生时，将其分流到 $X(t)$ 中的概率，因此 $P(T_1^X < T_1^Y)=\frac{\lambda_X}{\lambda_X+\lambda_Y}$。

10. 非齐次泊松过程 $N(t)$ 的时间发生速率 $\lambda(t)=0.5[1+cos(t)]$，求 $N(t)$ 的均值和方差。

参考答案:

由于 $N(t)$ 的特征函数为

$$\phi_{N(t)} = exp\left\{-(1-e^{jv})\int_0^t \lambda(u)\,du\right\}$$

故 $N(t)$ 的数学期望为

$$\begin{aligned}
E\{N(t)\} &= (-j)\frac{d\phi_{N(t)}(v)}{dv}|_{v=0} \\
&= \int_0^t \lambda(u)\,du = \int_0^t \frac{1}{2}(1+\cos t)\,dt \\
&= \frac{1}{2}(t+\sin t),
\end{aligned}$$

而均方值为

$$\begin{aligned}
E\left\{N^2(t)\right\} &= -\frac{d^2\phi_{N(t)}(v)}{dv^2}|_{v=0} \\
&= [\int_0^t \lambda(u)\,du]^2 + \int_0^t \lambda(u)\,du
\end{aligned}$$

于是可得方差为

$$\begin{aligned}
var\{N(t)\} &= E\left\{N^2(t)\right\} - E^2\{N(t)\} \\
&= \int_0^t \lambda(u)\,du \\
&= \frac{1}{2}(t+\sin t), \omega\neq 0
\end{aligned}$$

11. 设 $X(t)$ 是参数为 λ 的泊松过程，令 $X(t)$ 的时间平均为 $M=\frac{1}{T}\int_0^T X(t)dt$，求 M 的均值和方差。

参考答案:

$$E[M] = \frac{1}{T}\int_0^T E[X(t)]dt = \frac{1}{T}\int_0^T \lambda t dt = \frac{1}{T}\cdot\frac{\lambda t^2}{2}|_0^T = \frac{\lambda T}{2}$$

$$
\begin{aligned}
E[M^2] &= E[\frac{1}{T^2}\int_0^T X(t_1)dt_1 \int_0^T X(t_2)dt_2] \\
&= E[\frac{1}{T^2}\int_0^T \int_0^T X(t_1)X(t_2)dt_1dt_2] \\
&= \frac{1}{T^2}\int_0^T \int_0^T E[X(t_1)X(t_2)]dt_1dt_2
\end{aligned}
$$

不妨设 $t_1 < t_2$, 则

$$
\begin{aligned}
E[M^2] &= \frac{2}{T^2}\int_0^T \int_0^{t_2} \{E[X^2(t_1)] + E[X(t_1)]E[X(t_2) - X(t_1)]\}dt_1dt_2 \\
&= \frac{2}{T^2}\int_0^T \int_0^{t_2} \{(\lambda t_1)^2 + \lambda t_1 + (\lambda t_1)(\lambda t_2 - \lambda t_1)\}dt_1dt_2 \\
&= \frac{2}{T^2}\int_0^T \int_0^{t_2} \{\lambda^2 t_1 t_2 + \lambda t_1\}dt_1dt_2 \\
&= \frac{2}{T^2}\int_0^T \{\frac{\lambda^2 t_2^2}{2} + \frac{\lambda^2 t_2^3}{2}\}dt_2 \\
&= \frac{\lambda T}{3} + \frac{\lambda^2 T^2}{4}
\end{aligned}
$$

因此，$Var[M] = E[M^2] - E^2[M] = \frac{\lambda T}{3}$。