1 矩阵的秩

1: 把下列矩阵化成约化行阶梯形式，并且找到λ的值使得下列矩阵的秩 (rank) 最小：

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 & 4 \\ \lambda & 4 & 10 & 1 \\ 1 & 7 & 17 & 3 \\ 2 & 2 & 4 & 3 \end{bmatrix} \tag{1}$$

2. 把下列矩阵化成约化行阶梯形式，并且对于所有 λ的值, 找到矩阵的秩：

$$A = \begin{bmatrix} 1 & \lambda & -1 & 2 \\ 2 & -1 & \lambda & 5 \\ 1 & 10 & -6 & 1 \end{bmatrix} \tag{2}$$

3. A 是任意一个 $m \times n$ 的矩阵， B 是一个任意的 $m \times m$ 的矩阵，证明

$$rank(BA) \leq rank(A) \tag{3}$$

2 线性相关，线性无关

4. 证明: 包含零向量的向量组是线性相关的。

5. 证明：如果向量$(a_1, a_2, \ldots, a_r)$ 线性无关且能用向量 $(b_1, b_2, \ldots, b_s)$ 表示，那么$r \leq s$.

6. 证明：给定一个r维线性空间的线性无关的一个向量组 $(a_1, \ldots, a_s), s < r$, 我们总可以往上述向量组里面添加向量来构造一组基。

7. 证明：给定线性空间 R^m中的两组基 $(a_1, \ldots, a_m)$ 和 $(b_1, \ldots, b_m)$, 证明：1. 存在$m \times m$的矩阵A使得$a_i = \sum_{j=1}^{m} A_{ij} b_j$。2. 矩阵$A$可逆。

3 线性方程的解

求方程 $Ax = b$的通解和特解. 通解写成特解加 $Ax = 0$的任意解的形式。

8.

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 5 & 4 \\ 6 & -4 & 4 & 3 \\ 9 & -6 & 3 & -2 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix} \tag{4}$$