1. 设四维随机变量 $\mathbf{X}=(X_1,X_2,X_3,X_4)\sim N(\mu,C)$, 其中 $\mu=(2,1,1,0)$,$C=\begin{bmatrix}1&2&3&6\\2&3&4&3\\3&4&3&2\\3&3&2&1\end{bmatrix}$，试求 $\mathbf{Y}=(2X_1,X_1+2X_2,2X_3+X_4)$ 的分布。

2. 设 X 和 Y 是相互统计独立的 Gauss 随机变量，均服从 $N(0,\sigma^2)$, 设 $Z=|X-Y|$, 求 $E(Z)$ 和 $E(Z^2)$。

3. n 维正态分布随机矢量 $\xi^T=(\xi_1,\xi_2,...,\xi_n)$，分量的均值 $E(\xi_i)=i, i=1,2,3,...,n$。分量间的协方差为 $b_{m,i}=n-|m-i|, m,i=1,2,3,...,n$。设有随机变量 $\eta=\sum_{i=1}^n\xi_i$，求 η 的特征函数。

4. 设 ξ_1,ξ_2 为相互独立、均值为 0、方差为 1 的正态分布随机变量。定义二维随机矢量 $\eta^T=(\eta_1,\eta_2)=\begin{cases}(\xi_1,|\xi_2|), & \xi_1\geqslant 0\\(\xi_1,-|\xi_2|, & \xi_2<0\end{cases}$，试证：

   (1) η_1 和 η_2 都是正态分布的

   (2) $\eta^T=(\eta_1,\eta_2)$ 不是二维正态分布

5. 设 $\{X_k,k=1,\cdots,2n\}$ 为独立同分布的 Gauss 随机变量，均服从 $N(0,\sigma^2)$，若

$$Z=\frac{\sqrt{\pi}}{2n}\sum_{k=1}^n|X_{2k}-X_{2k-1}|$$

   求 $E(Z)$ 和 $E(Z^2)$。

6. X,Y 服从二元高斯分布，

$$(X,Y)\sim N\left(0,\begin{bmatrix}1&r\\r&1\end{bmatrix}\right)$$

   若 $Z=X-rY$，证明 Y 和 Z 独立, 并写出 Y,Z 的联合分布 $f_{YZ}(y,z)$。

7. 设 X,Y 相互独立，均服从标准正态分布，求：
   (1)$E[(X-3Y)^3|(2X+Y=3)]$
   (2)$E[(X-3Y)^2(2X+Y)]$

8. 设 X,Y 为独立高斯 $N(0,\sigma^2)$ 随机变量，对随机过程 $X(t)$ 求随机变量 X_1,X_2 的数学期望。其中，$X(t)=Xt+Y$，$X_1=\max\limits_{0\leqslant t\leqslant 1}X(t)$, $X_2=\int_0^1X^2(t)dt$。

9. 设 $X(t)$ 是均值为零的平稳高斯过程, 用 $Y(t)=X^2(t)$ 定义一个新的随机这程, 求证:

$$R_Y(\tau)=R_X^2(0)+2R_X^2(\tau)$$

   (提示：利用特征函数来计算随机变量的矩，可证明若 $X=(X_1,X_2,X_3,X_4)^{\mathrm{T}}$ 服从联合 Gauss 分布, 且各分量的均值均为 0，则有 $E(X_1X_2X_3X_4)=E(X_1X_2)E(X_3X_4)+E(X_1X_3)E(X_2X_4)+E(X_1X_4)E(X_2X_3)$)

10. 设 $X(t)$ 为平稳高斯过程, 其均值为零, 自相关函数 $R(\tau) = e^{-1\tau 1}$, 求随机变量 Y

$$Y = \int_0^1 X(t)dt$$

的概率密度函数 $p_Y(y)$ 。

11. 设 $X(t)$ 为一平稳高斯过程, $X(t) \sim N(0,1)$, 试求一无记忆系统 $g(x)$, 使它的输出 $Y(t) = g(X(t))$ 服从 (a,b) 上的均匀分布.

12. 设 $X(t) = A\cos\omega_0 t + B\sin\omega_0 t(-\infty < t < +\infty)$. 其中 A 和 B 是相互独立都服从 $N(0,\sigma^2)$ 的随机变量.
(1) 证明 $\{X(t), -\infty < t < +\infty\}$ 为高斯过程
(2) 写出 $X(t)$ 的概率密度函数和特征函数