《离散数学》第二次作业

1 证明一般的多项式公式

$$(x_1+\cdots+x_k)^n=\sum_{\alpha_1,\ldots,\alpha_k\in\mathbf{Z}_{\geq 0},\alpha_1+\cdots+\alpha_k=n}\binom{n}{\alpha_1,\ldots,\alpha_k}x_1^{\alpha_1}\cdots x_k^{\alpha_k},$$

上述求和式是对满足 $\alpha_1+\cdots+\alpha_k=n$ 的所有有序非负整数组 $(\alpha_1,\ldots,\alpha_k)$ 求和.

(提示: 可对 n 进行归纳; 或者直接计算

$$\begin{aligned}(x_1+\cdots+x_k)^n&=\sum_{i_1=1}^{k}\sum_{i_2=1}^{k}\cdots\sum_{i_n=1}^{k}x_{i_1}x_{i_2}\cdots x_{i_n}\\&=\sum_{\text{映射}f:[n]\to[k]}x_1^{|f^{-1}(1)|}\cdots x_k^{|f^{-1}(k)|}\\&=\sum_{\alpha_1+\cdots+\alpha_k=n}\left(\sum_{\text{映射}f:[n]\to[k]\text{满足}\#f^{-1}(i)=\alpha_i}x_1^{\alpha_1}\cdots x_k^{\alpha_k}\right)\\&=\sum_{\alpha_1+\cdots+\alpha_k=n}\binom{n}{\alpha_1,\ldots,\alpha_k}x_1^{\alpha_1}\cdots x_k^{\alpha_k}.\end{aligned}$$

)

2 给定 k 个不同的素数 $p_1<p_2<\cdots<p_k$. 从 1 到 n 中有多少个数与 $p_1,\ldots,p_k$ 都互素?

(提示: 令 $A_i=\{x|1\leq x\leq n\text{ 且}x\text{ 是}p_i\text{ 的倍数}\}$, 则 $|A_i|=[\frac{n}{p_i}]$, 其中 $[a]$ 表示不超过 a 的最大整数. 再用容斥原理)

3 给定 m 个实数 $x_1,\ldots,x_m$. 对 $[m]$ 的任何子集 $A\subseteq[m]$, 定义 $P(A)=\sum_{i\in A}x_i$, 约定 $P(\emptyset)=0$.

(1) 设 $A_1, \ldots, A_n$ 是 $[m]$ 的子集. 证明:

$$
\begin{aligned}
&P(A_1 \cup \cdots \cup A_n) \\
=&\sum_{i=1}^{n} P(A_i) - \sum_{i<j} P(A_i \cap A_j) + \sum_{i<j<k} P(A_i \cap A_j \cap A_k) - \cdots + (-1)^{n-1} P(A_1 \cap \cdots \cap A_n) \\
=&\sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \sum_{i_1<\cdots<i_k} P(A_{i_1} \cap \cdots \cap A_{i_k}).
\end{aligned}
$$

(2) 设 $x_1, \ldots, x_m$ 都是非负实数. 证明: 对奇数 r, 如下不等式成立

$$P(A_1 \cup \cdots \cup A_n) \leq \sum_{k=1}^{r} (-1)^{k-1} \sum_{i_1<\cdots<i_k} P(A_{i_1} \cap \cdots \cap A_{i_k});$$

对偶数 r, 如下不等式成立

$$P(A_1 \cup \cdots \cup A_n) \geq \sum_{k=1}^{r} (-1)^{k-1} \sum_{i_1<\cdots<i_k} P(A_{i_1} \cap \cdots \cap A_{i_k}).$$

(提示: 仿照讲义上容斥原理的证明, 利用交换求和的技巧)

4 定义 Lucas 数列为 $L_1 = 1, L_2 = 3$, 且对每个正整数 n 有 $L_{n+2} = L_{n+1} + L_n$.

(1) 求出 Lucas 数列的通项公式.

(2) 证明如下等式:

$$2F_{k+n} = F_k L_n + F_n L_k; \quad 2L_{k+n} = 5F_k F_n + L_k L_n; \quad L_{4k} = L_{2k}^2 - 2; \quad L_{4k+2} = L_{2k+1}^2 + 2,$$

其中 $\{F_n\}$ 是 Fibonacci 数列.

5 (1) 考虑集合 $[n]$ 的子集 A, 要求 A 中不存在两个相邻元素. 设满足条件的子集 A 的数目为 a_n(空子集与 1 元子集都视为满足条件). 求 a_n.

(2) 考虑集合 $[n]$ 的子集 A, 要求 A 中不存在三个相邻元素. 设满足条件的子集 A 的数目为 b_n(空子集, 1 元子集, 2 元子集都视为满足条件). 求 b_n.

(3) 如果将 $[n]$ 的元素按顺时针方向依次放置在圆周上, 约定 i 与 $i+1$ 相邻 $(1 \leq i \leq n-1)$, 且 n 与 1 也相邻. 设在这种意义下, $[n]$ 的不含相邻元素的子集的数目为 c_n. 求 c_n.

(提示: (1) 考虑是否取元素 1, 可得 $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$.

(2) 设从 1 开始连续取了 x 个元素, 则 $0 \leq x \leq 2$, 按照 x 的值分三类, 可得 $b_n = b_{n-1} + b_{n-2} + b_{n-3}$.

(3) 考虑是否取元素 1, 可得 $c_n = a_{n-1} + a_{n-3}$.)