

阻尼振动与受迫振动

2019012137 物理92 张鸿琳

2020 年 4 月 19 日

摘要

本实验主要探究弹簧振子在存在阻尼和存在外界驱动条件下的振动现象并分析其产生原因。首先，在有阻尼条件下令振子偏离平衡位置开始振动，测量每个振动周期的振幅，进而测得与阻尼常数相关的量 β ，进而得到弹簧在该条件下的品质因数；之后打开驱动器，使振子在有固定阻尼，不同驱动频率条件下受迫振动，等待其到达稳态后，测量不同驱动频率对应的振幅大小，进而拟合出二者对应关系的图像，并据此求得弹簧的品质因数；最后，调整驱动器初始位置，使其初始相位为零，调整驱动频率为振子共振频率，观察振子由静止到稳态的过程，并测量各个周期内的振幅大小，验证达到稳态的条件，绘制出变化曲线，与数学表达式对应图像比较。通过这一系列实验，展示了弹簧振子在不同阻尼和驱动频率下的振动现象，验证了由牛顿定律推导出的弹簧振子的运动方程的正确性，并且探明了振动过程中的一些临界条件和不同状态的过渡过程。

Keywords: 阻尼振动，受迫振动，品质因数，频率，振幅，稳态，共振

目录

1	实验原理	3
2	主要的实验仪器及实验步骤	3
2.1	主要的实验仪器	3
2.2	实验步骤	3
2.2.1	观测有粘滞阻尼时的阻尼振动规律	3
2.2.2	分析弹簧振子受迫振动的基本规律，观测幅频特性	3
2.2.3	探究受迫振动的瞬态过程：弹簧振子在共振频率激励下从静止到稳态的过程，了解共振现象	4
3	数据处理	4
3.1	观测有粘滞阻尼时的阻尼振动规律	4
3.2	分析弹簧振子受迫振动的基本规律，观测幅频特性	6
3.3	探究受迫振动的瞬态过程：弹簧振子在共振频率激励下从静止到稳态的过程，了解共振现象	7
4	讨论	9
4.1	一些问题	9
4.2	一些建议	10
5	原始测量数据	10
5.1	“观测有粘滞阻尼时的阻尼振动规律”的原始数据	10
5.2	“分析弹簧振子受迫振动的基本规律，观测幅频特性”的原始数据	12
5.3	“探究受迫振动的瞬态过程：弹簧振子在共振频率激励下从静止到稳态的过程，了解共振现象”的原始数据	12

1 实验原理

- 在阻尼振动中，阻尼常数为 γ ，欠阻尼条件下，由欠阻尼振动方程 $x = Ae^{-\beta t} \cos(\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}t + \phi)$ ($\beta = \frac{\gamma}{2m}$)，可看出经过单位周期振幅变化倍数几乎是一定的，即 $e^{-\beta T}$ ，故而再取对数之后，振幅的对数符合线性变化关系，进而测得实验数据后，可据此由最小二乘法求出 βT 而周期 T 在较小阻尼系数情况下，几乎等于振子固有周期 T_0 ，所以可以求出 β 。
- 对于弹簧振子的阻尼振动，当阻尼常数 γ 较小时，可以认为弹簧振子的总能量 E 仍近似与振幅的平方成正比，则弹簧振子品质因数 $Q = 2\pi \frac{E}{|\Delta E|} = \frac{\omega_0}{2\beta}$ ， Q 描述了振动系统散失能量的能力，因而与振动中很多量相关，比如共振最大振幅与驱动器振幅之比，对驱动频率的敏感度等，就是因为它反映了有多少能量成功过渡并留存。
- 在有阻尼的受迫振动中，达到稳态后振动方程与简谐运动一致，其振幅为 $A^2 = \frac{\omega_0^4 A_D^2}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (2\beta\omega)^2}$ ，驱动器与振子相位差为 $\phi_0 = \arctan \frac{-2\beta\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}$ ，可见驱动器频率越靠近固有频率，驱动就越有效，从相位差也可见，二者越接近，则相位差越靠近 $\frac{\pi}{2}$ ，保证了驱动器对系统能够更有效率地做功，反应系统能量的振幅也就越大。
- 在有阻尼条件下，从受迫振动开始到达到稳态的过程，其实就是方程 $\frac{d^2x}{dt^2} + 2\beta \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = \omega_0^2 A_D e^{i\omega t}$ 的通解的前期，本质上是粘滞力能量消耗功率随振子振幅增大而增大直到与驱动功率相等的过程。

2 主要的实验仪器及实验步骤

2.1 主要的实验仪器

劲度系数为 $k=237 \text{ N/m}$ 的弹簧，质量 $m=5 \text{ kg}$ 的物块，可调节的驱动器，刻度尺。

2.2 实验步骤

2.2.1 观测有粘滞阻尼时的阻尼振动规律

1. 将物块固定于弹簧上(存在粘滞阻尼)，移动振子使其离开平衡位置约30cm，然后释放；
2. 当振幅介于20到25cm时开始测量每个周期内振子的振幅，直到最小振幅与最大振幅之比 $\frac{A_{min}}{A_{max}} < \frac{1}{5}$ 时停止测量（测量振幅时，使用“模拟速度”进度条将程序模拟速度调整至合适的位置，以慢动作方式显示振动，在判定到达最大幅度时，按“暂停”并测量，具体方式见下列“原始测量数据”截图）；
3. 计算 β , 不确定度 U_β , 品质系数 Q ，不确定度 U_Q 。

2.2.2 分析弹簧振子受迫振动的基本规律，观测幅频特性

1. 打开驱动器开关，将驱动器振幅设置为 0.8 cm ；
2. 在 $0.93f_0$ 到 $1.07f_0$ 范围内调整驱动器振动频率，等待振子达到稳态后记录振子振幅（合理选点，使得数据点分布合理）；
3. 计算品质因数 Q ，并用光滑线条勾勒数据图像。

2.2.3 探究受迫振动的瞬态过程：弹簧振子在共振频率激励下从静止到稳态的过程，了解共振现象

1. 关闭驱动器开关，驱动器频率设置为振子的共振频率，振幅设置为0.8 cm，调整驱动器初始相位为零，并且使弹簧振子尽可能静止；
2. 打开驱动器开关，重新使振子从静止状态开始振动，测量每个周期内振子振幅大小（方法与第一个实验一致）；
3. 画出振子振幅的平方随时间变化的曲线。

3 数据处理

3.1 观测有粘滞阻尼时的阻尼振动规律

（本实验原始数据见“原始测量数据”5.1）设振子固有（角）频率为 $\omega_0 = 2\pi f_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ 由牛顿第二定律，在阻尼常数为 γ 条件下，得到微分方程，通过微积分方法得到振子运动方程的解： $x = Ae^{i(\omega t + \phi)}$ ($\omega = i\beta \pm \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$, $\beta = \frac{\gamma}{2m}$)，可见 β 的量纲与 ω_0 一致，为Hz。

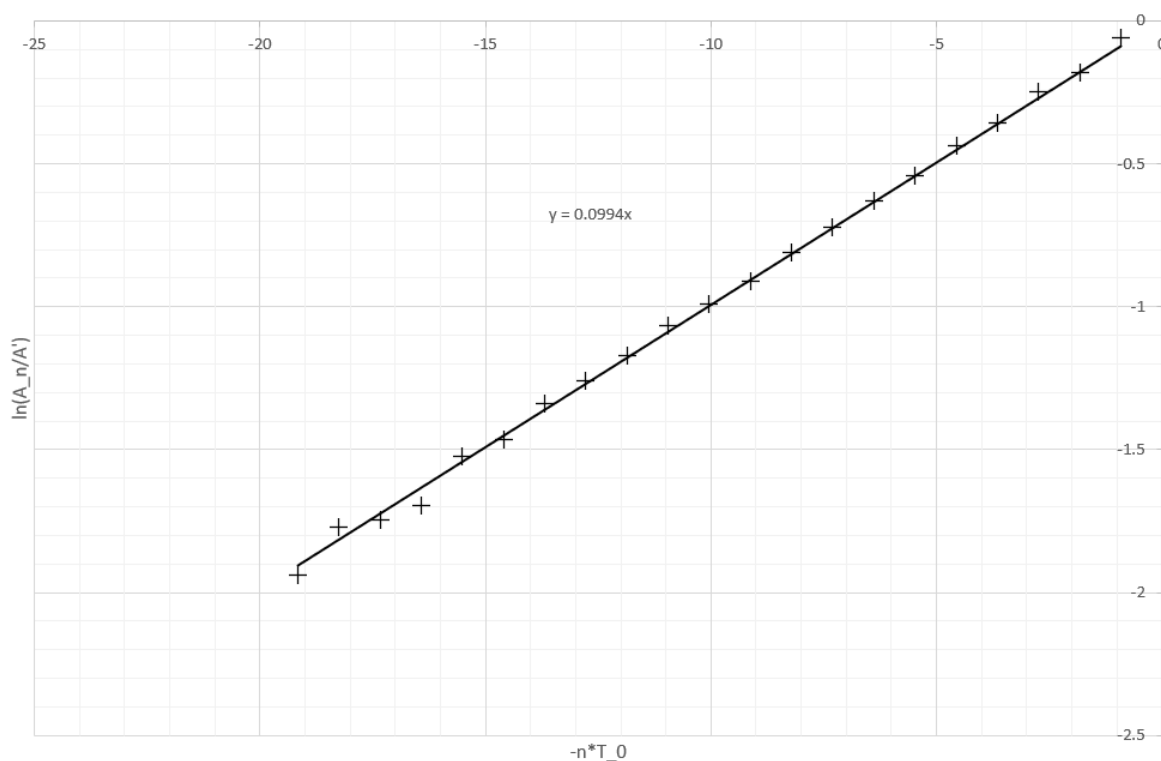
在 γ 相对于 ω_0 发生变化时，由通解可知，振子振动状态也会发生变化：

1. $\beta < \omega_0$: 欠阻尼, $x = Ae^{-\beta t} \cos(\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}t + \phi)$
2. $\beta = \omega_0$: 临界阻尼, $x = A_1 e^{-\omega_0 t}$
3. $\beta > \omega_0$: 过阻尼, $x = Ae^{-\beta t} (A_2 e^{\sqrt{\beta^2 - \omega_0^2}t} + A_3 e^{-\sqrt{\beta^2 - \omega_0^2}t})$

位于临界阻尼状态时，有 $\beta = \omega_0$ ，即 $\gamma_c = 2\sqrt{mk}$ ，带入 m , k 得到 $\gamma_c = 68.848$ 。

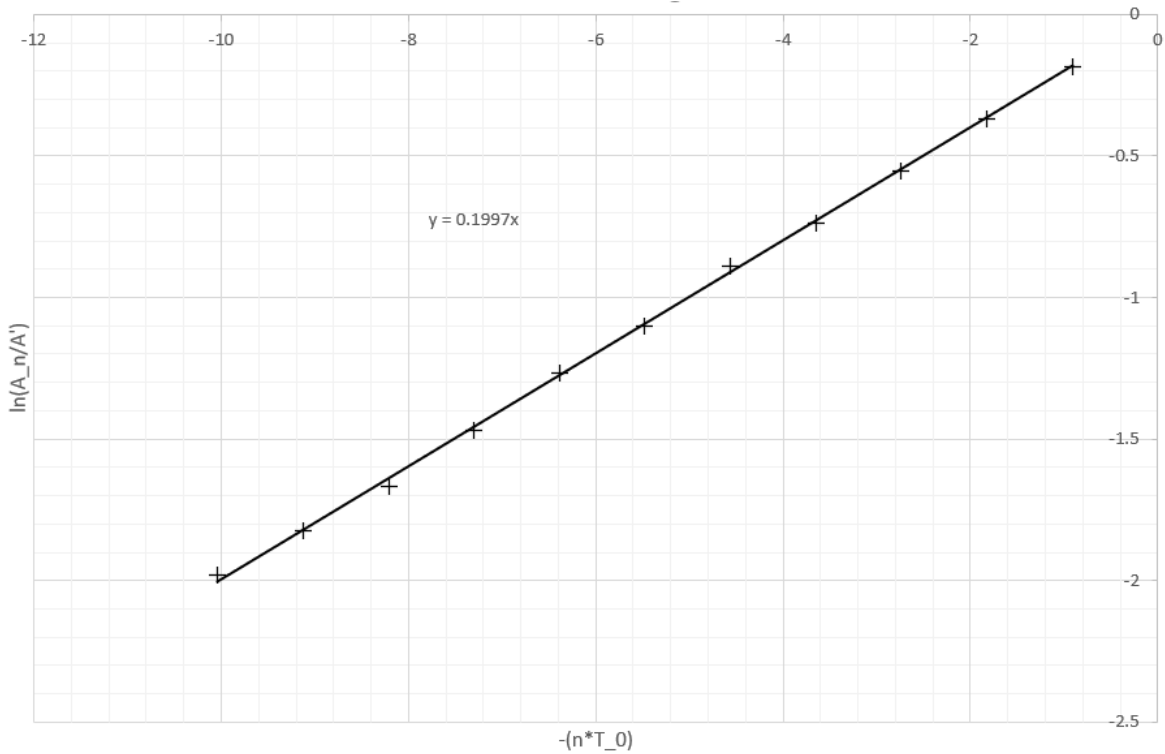
在阻尼常数为1N/(m/s)和2N/(m/s)时，明显为欠阻尼的情况，由上述讨论知，可以得到其周期性震荡频率分别为： $f_1 = \frac{\sqrt{\omega_0^2 - \beta_1^2}}{2\pi} = \frac{\sqrt{6.8848^2 - 0.1^2}}{2\pi} = 1.095629$, $f_2 = \frac{\sqrt{\omega_0^2 - \beta_2^2}}{2\pi} = \frac{\sqrt{6.8848^2 - 0.2^2}}{2\pi} = 1.095282$, 固有频率为 $f_0 = 1.095745$, 可见振荡频率变化很小, $f_0 - f_1 = 0.000116$, $f_0 - f_2 = 0.000463$, 所以在后续问题的处理中，可近似将在该条件下阻尼振动的振子震动频率看做固有频率 f_0 。

由上述推导和近似，可知在第 n 个周期时，振子振幅约为 $A_n = A_0 e^{-\beta(nT_0)}$ ，取对数得到： $\ln(\frac{A_n}{A_0}) = -\beta(nT_0)$ ，将 $\ln(\frac{A_n}{A_0})$ 和 $-nT_0$ 分别看做两个变量 y_i 和 x_i ，可利用截距为零的最小二乘法拟合实验测得的数据，求出 β_1 ，得到 $\beta_1 = 0.099383$ N/(m/s)，拟合图像见下图：



还可求得,测得 β_1 的不确定度为 $U_{\beta_1} = \sqrt{\frac{\sum (y_i - \beta x_i)^2}{20 \sum x_i^2}} = 0.000948183 \text{ N/(m/s)}$,故而 $\beta_1 = (0.09934 \pm 0.0009) \text{ N/(m/s)}$,此时弹簧振子的品质因数约为 $Q_1 = \frac{\omega_0}{2\beta_1} = 34.63758427$,其不确定度,由不确定度的传递公式得, $U_{Q_1} = \frac{\omega_0}{2\beta_1^2} U_{\beta_1} = 0.33046699$,故而 $Q = (34.64 \pm 0.33)$ 。

再次改变实验环境(即改变阻尼常数 γ),(阻尼常数较大情况下)再次进行试验,可得到另一组数据,同样利用截距为零的最小二乘法直线拟合实验数据,得到此时 $\beta_2 = 0.199729132 \text{ N/(m/s)}$,拟合图像见下图:



求得此时不确定度为 $U_{\beta_2} = 0.001576486 \text{ N/(m/s)}$, 故而 $\beta_2 = (0.1997 \pm 0.0016) \text{ N/(m/s)}$, 此时弹簧振子的品质因数约为 $Q_1 = \frac{\omega_0}{2\beta_1} = 17.23525687$, 其不确定度, 由不确定度的传递公式得, $U_{Q_1} = \frac{\omega_0}{2\beta_1^2} U_{\beta_1} = 0.136039982$, 故而 $Q = (17.24 \pm 0.14)$ 。

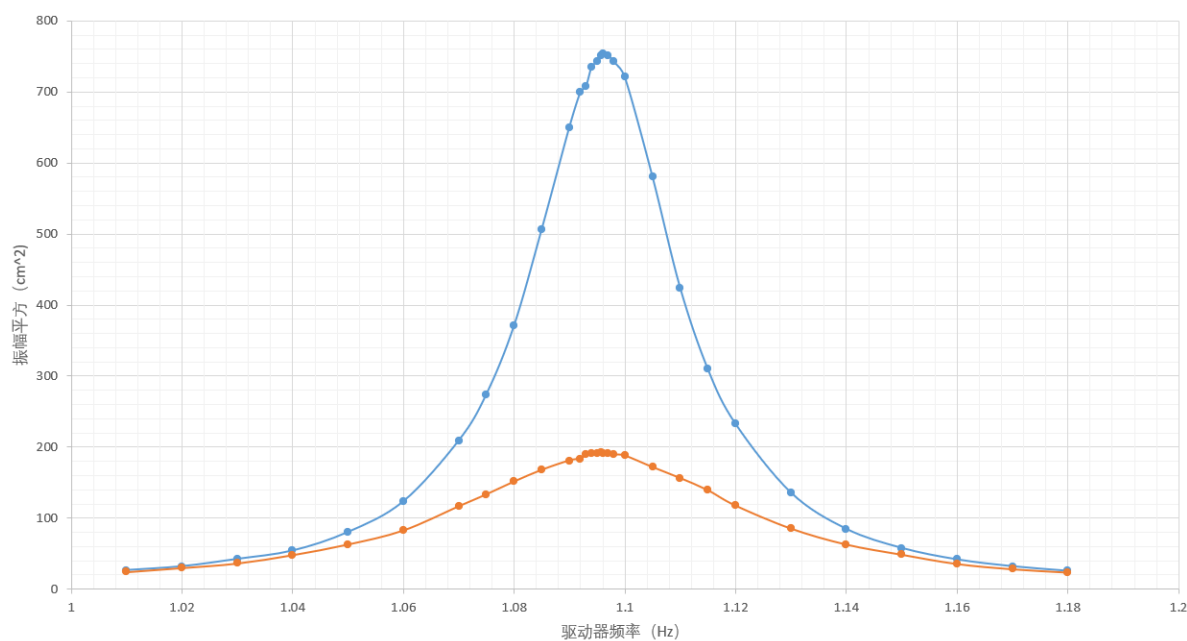
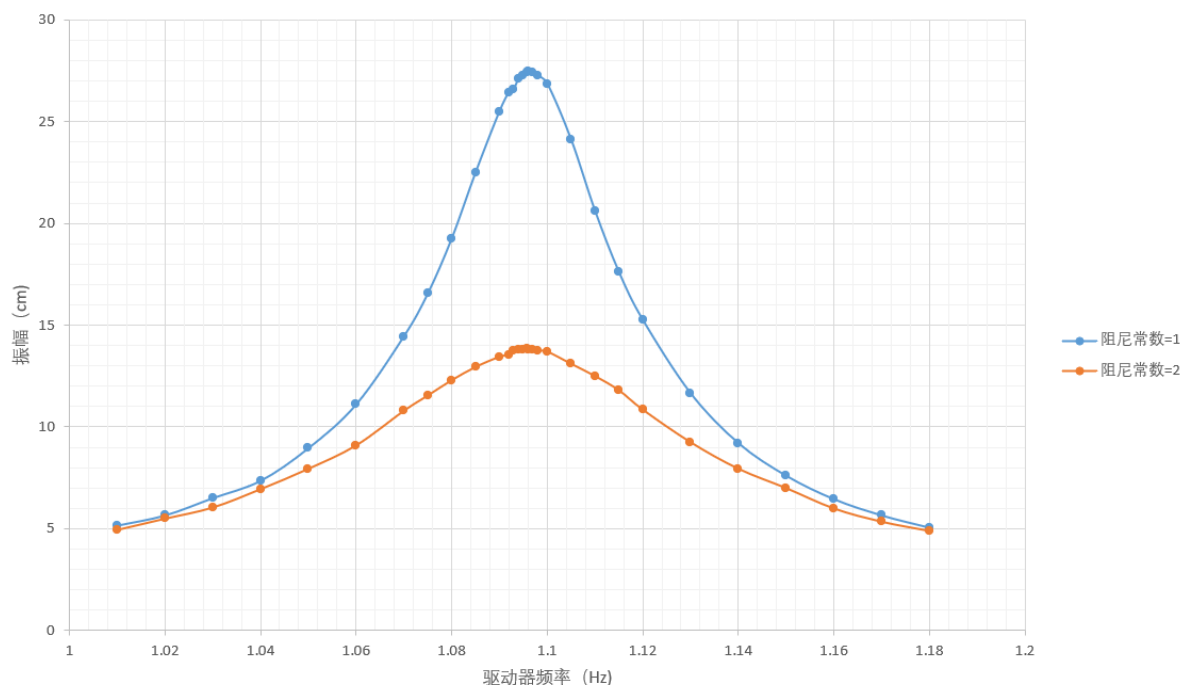
3.2 分析弹簧振子受迫振动的基本规律, 观测幅频特性

(本实验原始数据见“原始测量数据” 5.2) 在有阻尼, 且阻尼常数为 γ , 又有角频率为 ω 、振幅为 A_D 的驱动器驱动的条件下, 弹簧振子的达到稳态时运动方程同样可由微积分方法求得: $x = Ae^{i(\omega t + \phi_0)}$ ($A^2 = \frac{\omega_0^4 A_D^2}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (2\beta\omega)^2}$, $\phi_0 = \arctan \frac{-2\beta\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}$)。

从方程可知, 当驱动频率等于弹簧振子固有频率时平衡态振幅最大, 此时振幅约为 $A_{max} = \frac{\omega_0 A_D}{2\beta}$, 可看出最大振幅与弹簧品质因数成正比, 此时相位差 $\phi_0 = \frac{\pi}{2}$ 。

在之后的实验中, 测量了在不同驱动频率下稳态时振子的振幅大小, 判定是否达到稳态的方法是: 观察振子的振动范围, 当振动范围几乎不再变化, 也就是振幅几乎不再变化, 则判定为已经达到稳态, 开始测量振幅。

本实验在两个实验环境中分别独立进行, 其分别对应阻尼常数为 $\gamma_1 = 1 \text{ N/(m/s)}$ 和 $\gamma_2 = 2 \text{ N/(m/s)}$, 也就是上个实验中的两个部分对应的环境, 用得到的数据作图, 得到下图 (纵坐标分别为振幅和振幅平方):

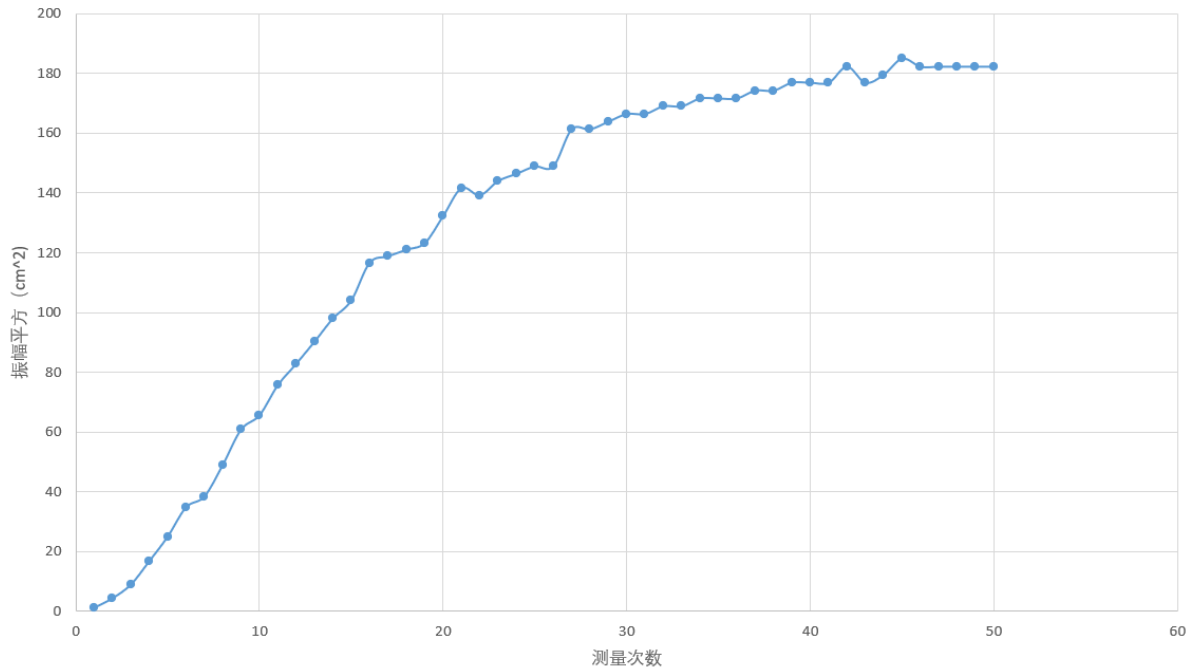


从该幅频特性曲线也可得到弹簧振子的品质因数 Q ，令 f_r 为幅频特性曲线中振幅平方达到最大时对应的频率， f_{\pm} 为振幅平方最大值的一半时对应的两个频率值，则品质因数约为 $Q = \frac{f_r}{|f_+ - f_-|}$ ，通过读图，可得 $Q_1 = \frac{1.096}{0.032} = 34.25$ ， $Q_2 = \frac{1.096}{0.062} = 17.68$ ，与上一个实验的结果符合地很好。

3.3 探究受迫振动的瞬态过程：弹簧振子在共振频率激励下从静止到稳态的过程，了解共振现象

(本实验原始数据见“原始测量数据”5.3) 在启动驱动器后开始的一段时间内，可以明显观察到振子振幅逐渐增大直到稳态，分析可知，这是因为驱动器向弹簧振子系统以一定功率输送能量，而开始

时物块速度较低，粘滞力较低，其导致的能量流失率也较低，故而整个系统持续获得外界的能量，表现其能量大小的振幅也就不断增加，物块速度不断增大，粘滞力也随之增大，这使得粘滞力导致的能量流失率不断逼近驱动器提供的能量功率，直到二者相等后，系统能量总体基本不再发生变化，振幅不再变化，也就是达到了稳态。振幅平方的变化见下图：

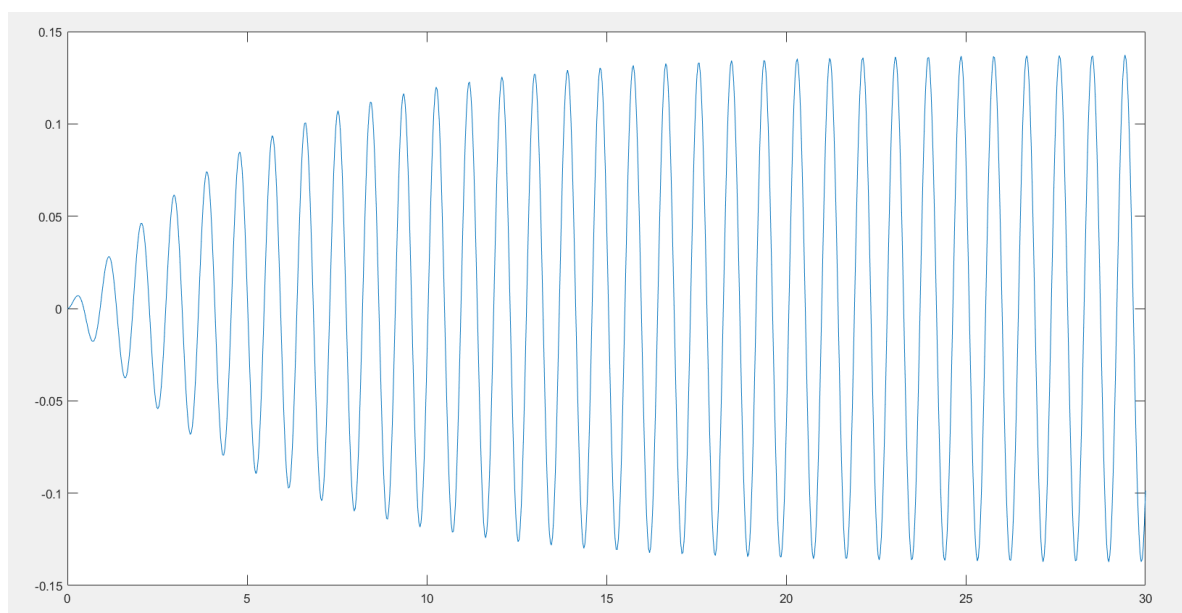
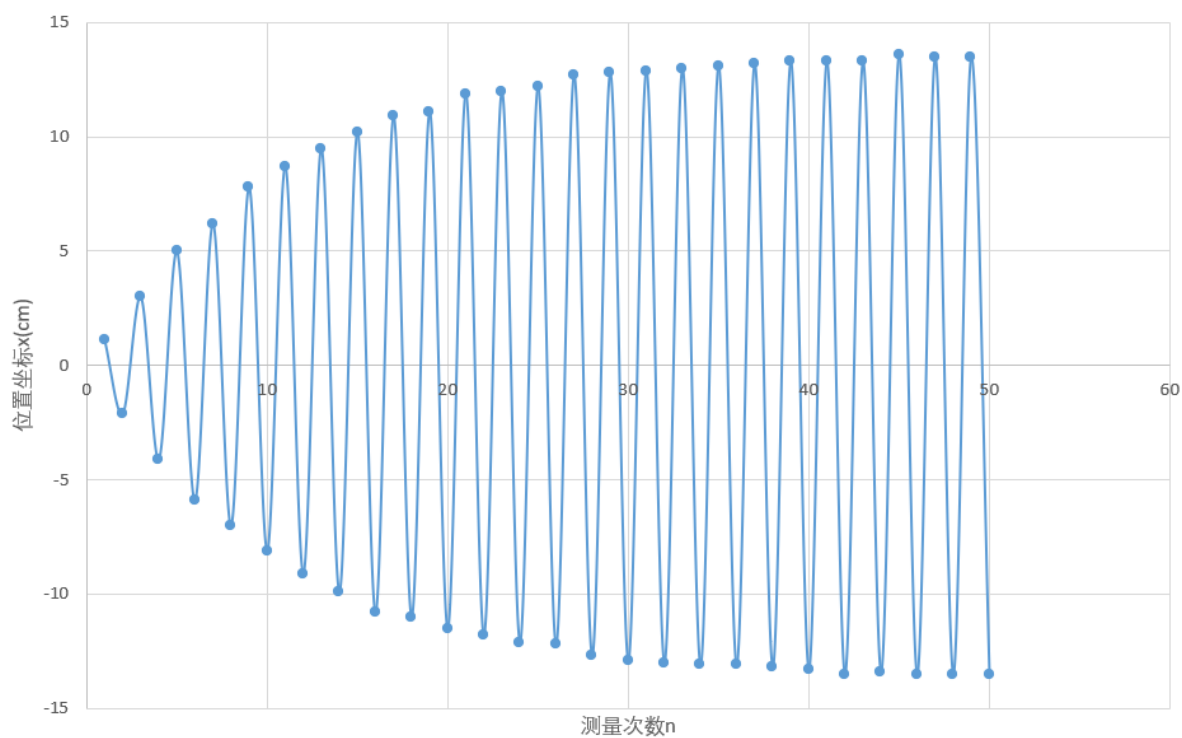


由此可以计算出该实验中振子达到稳态后，驱动器的平均输入功率为 $\bar{P} = \frac{\int \gamma V(x) dx}{T} = \gamma \frac{\omega_0^4 A_D^2}{16\beta^2} = 0.4493520545$ W。

通过matlab作图工具，输入下列代码：

```
>> y=dsolve('D2y+0.4*Dy+6.884765791^2*y=6.884765791^2*0.008*cos(6.884765791*t)', 'y(0)=0', 'Dy(0)=0');
tt=linspace(0,30,1001);
for i=1:1001
    t=tt(i);
    yy(i)=eval(y);
end
plot(tt,yy)
```

画出了振子从开始到达到稳态的位置函数图像（下图），与实际测量的（每个周期内特定位置，即偏离平衡位置最远处）位置数据作图（上图）比较如下（由于二者坐标选取不同，故而未放到同一幅图中进行比较）：



可看出，理论与现实二者符合地非常好。

4 讨论

4.1 一些问题

仍有一些值得实验并讨论的问题：

- 达到稳态所需要的时间。当阻尼常数变大时，最大振幅减小，也就是达到稳态所需要从外界输入的能量减小，但是同时也意味着前期单位周期内损失的能量可能会增加，二者哪个因素影响更明显，或者二者影响能否基本抵消，使得在特定条件下，阻尼常数与达到稳态所需时间无关，这仍需理论推导和实验验证。
- 弹簧本身造成的能量损失。在现实中，存在的做负功或者说消耗系统能量的不一定是粘滞力的形式，比如弹簧本身的能量损耗，可以猜测可能与弹簧伸长量等相关，这些损耗可能对实验结果造成一定影响，并且具有研究价值。

4.2 一些建议

- 为了提高第一个实验的精度，可以添加秒表作为计时工具，这样可以减小一些从一开始就将 T_0 作为周期产生的误差，也使得实验能在更大范围内进行。
- 不仅仅测量振幅或者极限位置，进一步增加测量的密度，在多个过渡位置也可以踩点测量时间，从而使得最后一个实验中描绘的曲线更具有说服力。

5 原始测量数据

5.1 “观测有粘滞阻尼时的阻尼振动规律”的原始数据

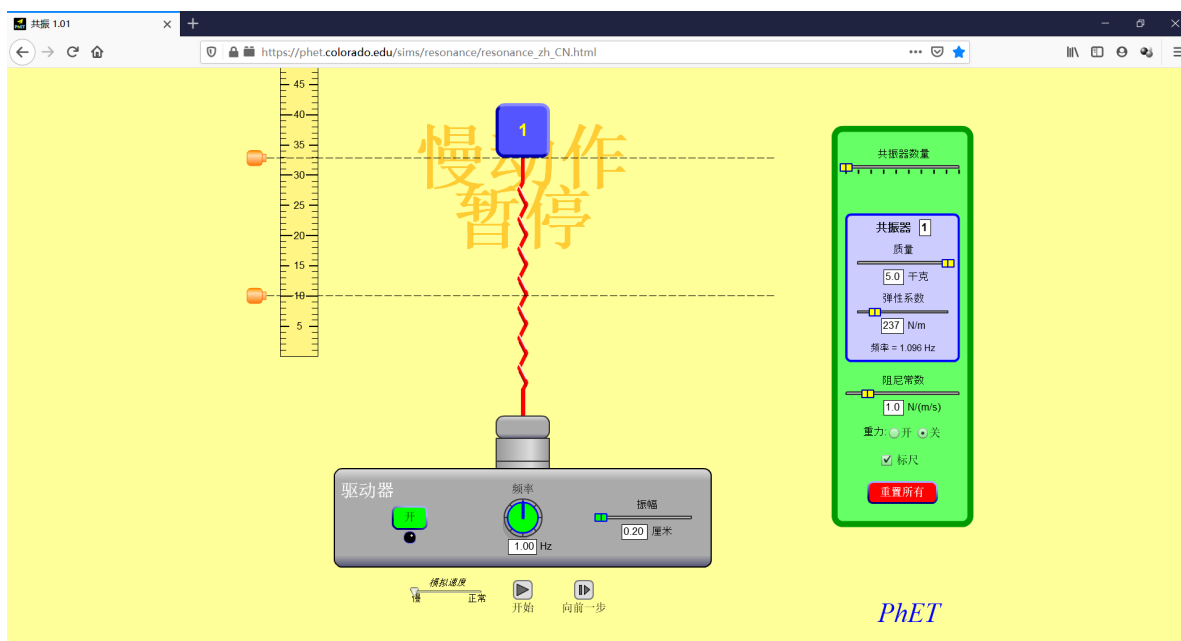
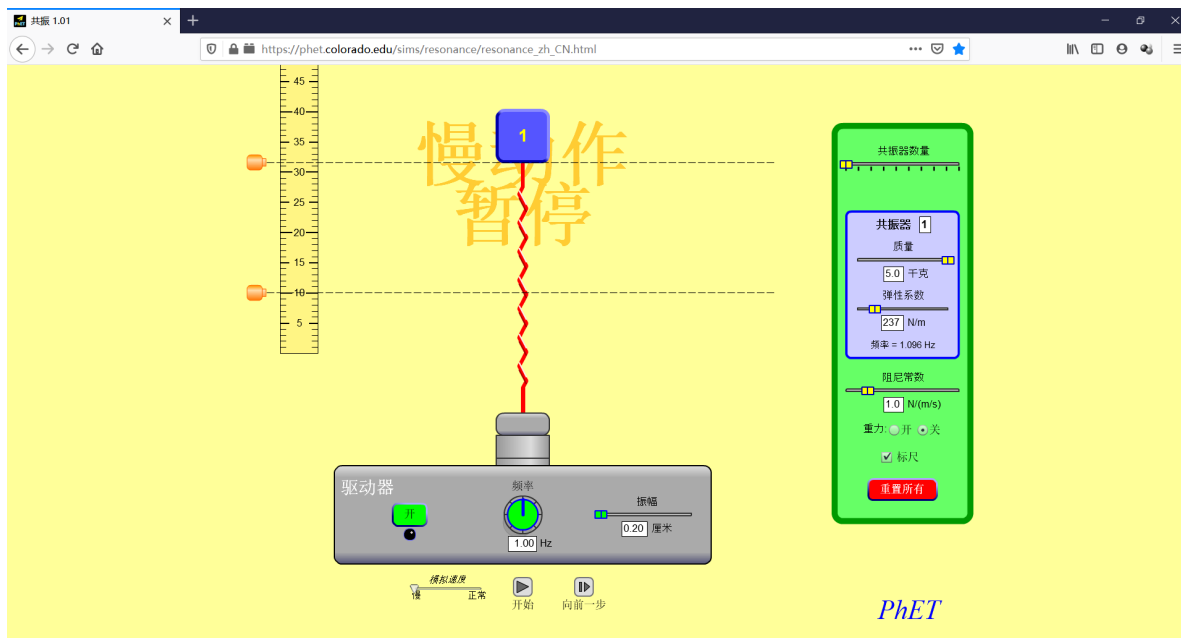
在第一个实验中，阻尼常数较小的情况下，由网站模拟出了下列数据：

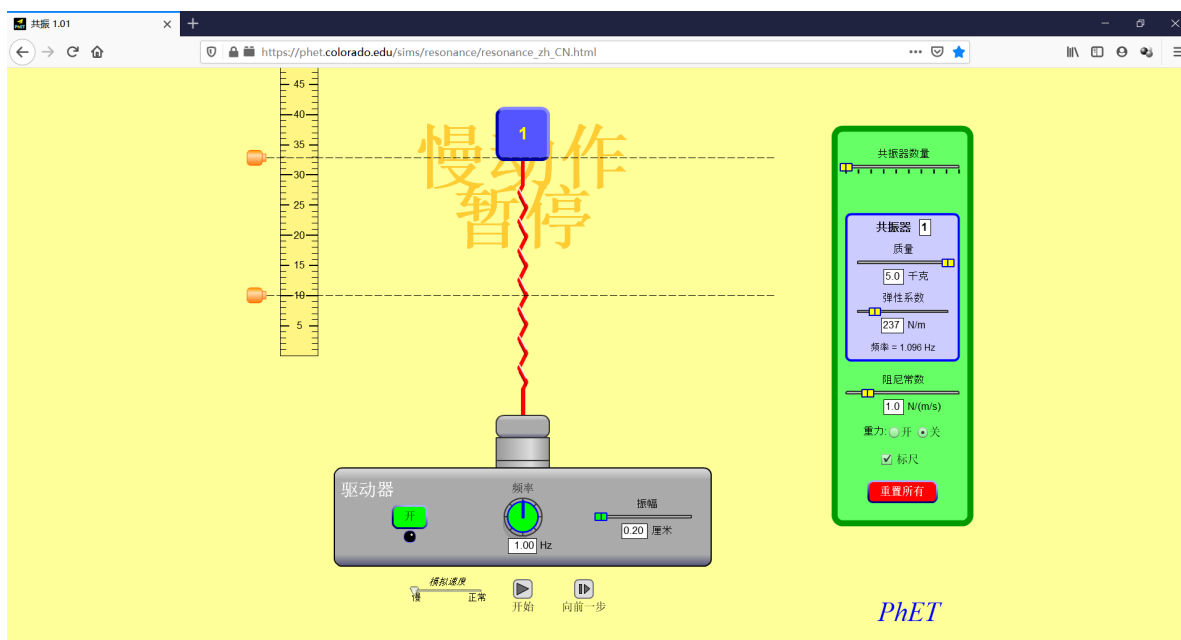
周期数n	振幅大小 $A_n(\text{cm})$	周期数n	振幅大小 $A_n(\text{cm})$
0	22.9	11	8.5
1	21.6	12	7.9
2	19.1	13	7.1
3	17.9	14	6.5
4	16.0	15	6.0
5	14.8	16	5.3
6	13.3	17	5.0
7	12.2	18	4.2
8	11.1	19	4.0
9	10.2	20	3.9
10	9.2	21	3.3

在第一个实验中，阻尼常数较大的情况下，由网站模拟出了下列数据：

测量方式截图如下（其中下方刻度对应振子下端平衡位置，上方则在慢动作条件下不断暂停调整，直到达到最高处）：

周期数n	振幅大小 A_n (cm)	周期数n	振幅大小 A_n (cm)
0	21.7	6	7.2
1	18.0	7	6.1
2	15.0	8	5.0
3	12.5	9	4.1
4	10.4	10	3.5
5	8.9	11	3.0





5.2 “分析弹簧振子受迫振动的基本规律，观测幅频特性”的原始数据

在第二个实验中，由网站模拟出了以下数据：（由于测量时采用了测量稳态时物块最高点和最低点位置差，之后除以二得到振幅的测量方法，故小数最后一位较多为0.05）

驱动器频率 (Hz)	较小阻尼振幅 (cm)	较大阻尼振幅 (cm)	驱动器频率 (Hz)	较小阻尼振幅 (cm)	较大阻尼振幅 (cm)
1.01	5.15	4.95	1.0957	27.4	13.85
1.02	5.65	5.5	1.096	27.45	13.8
1.03	6.5	6.05	1.097	27.4	13.8
1.04	7.35	6.95	1.098	27.25	13.75
1.05	8.95	7.95	1.1	26.85	13.7
1.06	11.1	9.1	1.105	24.1	13.1
1.07	14.45	10.8	1.11	20.6	12.5
1.075	16.55	11.55	1.115	17.6	11.8
1.08	19.25	12.3	1.12	15.25	10.85
1.085	22.5	12.95	1.13	11.65	9.25
1.09	25.5	13.45	1.14	9.2	7.95
1.092	26.45	13.55	1.15	7.6	7
1.093	26.6	13.75	1.16	6.45	6
1.094	27.1	13.8	1.17	5.65	5.35
1.095	27.25	13.8	1.18	5.05	4.9

5.3 “探究受迫振动的瞬态过程：弹簧振子在共振频率激励下从静止到稳态的过程，了解共振现象”的原始数据

在第三个实验中，由网站模拟出了如下数据：

测量次数	位置(cm)	测量次数	位置(cm)	测量次数	位置(cm)	测量次数	位置(cm)	测量次数	位置(cm)
1	1.1	11	8.7	21	11.9	31	12.9	41	13.3
2	-2.1	12	-9.1	22	-11.8	32	-13	42	-13.5
3	3	13	9.5	23	12	33	13	43	13.3
4	-4.1	14	-9.9	24	-12.1	34	-13.1	44	-13.4
5	5	15	10.2	25	12.2	35	13.1	45	13.6
6	-5.9	16	-10.8	26	-12.2	36	-13.1	46	-13.5
7	6.2	17	10.9	27	12.7	37	13.2	47	13.5
8	-7	18	-11	28	-12.7	38	-13.2	48	-13.5
9	7.8	19	11.1	29	12.8	39	13.3	49	13.5
10	-8.1	20	-11.5	30	-12.9	40	-13.3	50	-13.5

参考文献

[1] 朱鹤年. 新概念基础物理实验讲义. 清华大学出版社. 2013.

[2] PhET: 免费的在线物理、化学、生物、地理及数学仿真程序

[3] Wikipedia-共振