1 矩阵性质练习

1. 证明： A 是 $m\times n$的矩阵，那么矩阵A的秩为一的充分必要条件为: A 可以写成 $A=BC$, 这里B是$m\times 1$的非零矩阵，C是$1\times n$的非零矩阵。

2. 证明： 任意一个方阵可以，并且唯一的表为形式, $A=B+C$. 这里B是对称矩阵，而C是反对称矩阵。这里对称矩阵的定义是 $A^T=A$, 反对称矩阵的定义是$A^T=-A$.

3. 矩阵乘法的练习：

a): 求解

$$\begin{bmatrix} a & 1 \\ 0 & a \end{bmatrix}^n \tag{1}$$

b): A是任意的一个2×2的矩阵 $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$，那么$A$满足下列矩阵方程

$$A^2+a_1A+a_2I=0 \tag{2}$$

这里I是一个2×2的单位矩阵。把a_1 和a_2用 矩阵A的分量表示。如果我们定义一个矩阵的操作叫做求迹 $Tr(A)=a+d$ （也就是把对角上的元素加起来）. 你能否把 a_1 和 a_2表示成 $Tr(A)$ 和 $Tr(A^2)$的函数?

c): A是任意的一个3×3的矩阵 $\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & l \end{bmatrix}$，那么$A$满足下列矩阵方程

$$A^3+a_1A^2+a_2A+a_3I=0 \tag{3}$$

这里I是3×3的单位矩阵。 请把a_1, a_2 和 a_3 用 矩阵A的分量表示。同样的，你能否把 a_i 用 $Tr(A), Tr(A^2)$, 还有 $Tr(A^3)$ 表示出来?

d): (这是一个附加题) 对于任何一个 $n\times n$ 的矩阵 A，我们

$$A^n+a_1A^{n-1}+a_2A^{n-2}+\ldots+a_nI=0 \tag{4}$$

你能否可以把a_i用矩阵A^m的迹来表示（提示：试一下用对角矩阵来猜一下结果）

4. 矩阵方程$Ax=b$的解。A是一个$m\times n$的矩阵。假设矩阵A的秩是r. a): r取什么值的时候，如果方程有解，只有唯一解? b): 如果方程有解， 解空间的维数有多少?

5. 证明：一个方块矩阵可逆，当且仅当方程 $Ax=0$ 只有零解。也就是A的列向量是线性无关的。

6. 考虑R^m 中的一个线性子空间 $C(A)$。我们有两组基$A=[v_1,\ldots,v_n]$, 和$B=[v_1',\ldots,v_n']$. 证明: a): A和B可以写成$B=AQ$. 这里Q 是一个 $n\times n$的可逆矩阵。(该题有多种证明办法)

2 投影矩阵

7. 证明： A 是一个 $m\times n$的矩阵，那么A^TA 可逆的充分必要条件是: a) $m\geq n$ 和 b): A 的秩等于n.

8. 我们考虑R^m中的一个线性子空间$C(A)$。 如果我们选取这个空间的一组基$(v_1,\ldots,v_n)$, 并且用来构造一个矩阵 $A=[v_1,\ldots,v_n]$, 那么关于$C(A)$的 投影矩阵是 $P=A(A^TA)^{-1}A^T$, 证明 a): $P^2=P$, $P=P^T$. b): 如果我们选取$C(A)$的另外一组基$(v_1^{'},\ldots,v_n^{'})$, 那么 P怎么变化(利用题6)?

9. $A=\begin{bmatrix}1 & 4\\ 2 & 5\\ 3 & 6\end{bmatrix}$, a): 计算投影矩阵。b): 计算一个向量 $b=\begin{bmatrix}7\\ 8\\ 11\end{bmatrix}$ 在$C(A)$(A的l列向量子空间上)的投影.