《高等微积分 2》第三周作业

本次作业请在第四周星期五 (3 月 13 日)24 : 00 点之前在网络学堂提交.

1 计算偏导数.

(1) 设 $f \in C^1(\mathbf{R}, \mathbf{R})$, $z = xy + xf(\frac{y}{x})$. 求 $x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y}$.

(2) 设 $f \in C^2(\mathbf{R}^2, \mathbf{R})$, $z = f(x, \frac{x}{y})$. 求 $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$.

(3) 设 $f, g \in C^2(\mathbf{R}, \mathbf{R})$, $z = xf(\frac{y}{x}) + yg(\frac{x}{y})$. 求 $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$.

(4) 设 $f \in C^1(\mathbf{R}, \mathbf{R})$, $z = \frac{y}{f(x^2-y^2)}$. 求 $\frac{1}{x}\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{1}{y}\frac{\partial z}{\partial y}$.

(5) 设 $f \in C^1(\mathbf{R}^3, \mathbf{R})$, $u = f(x, xy, xyz)$. 求 $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial z}$.

这里, 我们称函数 $f : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ 是 C^k 光滑的, 记作 $f \in C^k(\mathbf{R}^n, \mathbf{R})$, 如果 f 的各个 k 阶 (偏) 导函数都存在且连续.

2 给定 C^1 光滑的函数 $F : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}$. 求函数

$$F(u^2 - x^2, u^2 - y^2, u^2 - z^2)$$

对 x, y, z, u 的偏导数.

3 给定 $n \times n$ 的对称实矩阵 $(A_{ij})_{1 \le i,j \le n}$(即对任何 i, j, 有 $A_{ij} = A_{ji}$). 定义二次函数 $Q : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ 为

$$Q(x_1, ..., x_n) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} A_{ij} x_i x_j, \quad \forall (x_1, ..., x_n) \in \mathbf{R}^n.$$

(1) 求 Q 的微分.

(2) 设 $f : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ 是 C^1 光滑的函数. 定义函数

$$g(x_1, ..., x_n) = f(x_1, ..., x_n) e^{-\frac{1}{2} Q(x_1, ..., x_n)}.$$

计算 g 的各个偏导数 $\frac{\partial g}{\partial x_1}, ..., \frac{\partial g}{\partial x_n}$.

4 设 $f:\mathbf{R}^3\to\mathbf{R}$ 是 C^1 光滑的函数, 即 f 的各个偏导数都存在且连续.

(1) 对于给定的点 $(x,y,z)\in\mathbf{R}^3$, 考虑关于 t 的一元函数

$$g(t)=f(tx,ty,tz).$$

求 $g'(t)$.

(2) 证明: 对任何 $(x,y,z)\in\mathbf{R}^3$, 有

$$f(x,y,z)=f(0,0,0)+x\int_0^1 f_x(tx,ty,tz)dt+y\int_0^1 f_y(tx,ty,tz)dt+z\int_0^1 f_z(tx,ty,tz)dt.$$

在本题 (3), (4) 小问中假设 f 满足: 对任何 $(x,y,z)\in\mathbf{R}^3$ 都有

$$xf_x(x,y,z)+yf_y(x,y,z)+zf_z(x,y,z)=nf(x,y,z),$$

其中 n 是某个给定的正整数.

(3) 对于给定的点 $(x,y,z)\in\mathbf{R}^3$, 考虑关于 t 的一元函数

$$h(t)=\frac{f(tx,ty,tz)}{t^n}.$$

求 $h'(t)$.

(4) 证明: 对任何 $(x,y,z)\in\mathbf{R}^3$ 与 $t>0$, 都有

$$f(tx,ty,tz)=t^nf(x,y,z).$$