**第一章 偏微分方程定解问题**

1.1基本概念

常微分方程（ODE）：未知函数为单变量函数

偏微分方程（PDE）：未知函数为多变量函数

具有该形式

方程阶数：出现的未知函数（偏）倒数的最高阶数

齐次方程：

1.2三大经典方程

①波动方程

（推导未整理） 弦的横振动，其中为外力分布

三维波动方程具有形式：

（对应于二阶双曲型方程）

②热传导方程

（推导未整理），为内部热源

（对于稳恒温度场有，；）

（对应于抛物型方程）

③Laplace方程（场位方程）

Poisson方程：

Laplace方程：

（对应于椭圆型方程）

1.3定解问题及其适定性

三种定解问题：

1. 初值问题：只有初始条件
2. 边值问题：只有边界条件
3. 混合问题：既有初始条件也有边界条件

（初始条件：某一时刻的状态）

（边界条件：第I类边界条件，边界处状态已知，如果恒为零，则称为第I类齐次边界条件；第II类边界条件，边界处偏导数已知，存在齐次边界条件；第III类边界条件，第I类和第II类的线性组合，存在齐次边界条件）

如果一个定解问题的解存在、唯一且稳定，则称此定解问题是适定的

解的稳定性：定解条件微小变动蕴含解微小变动

适定性：解存在性+解唯一性+解稳定性

**解法一**

预备知识：

1. 分离，得到
2. ，同乘积分因子，这样有，解得

对于两个自变量的一阶线性偏微分方程：，利用变换：，有，那么由链式法则有，代入变换后，有，如果能够保证关系，那么式子就可以化为，关于积分即可

定理：（常数）是的隐式通解（积分曲线族），则 是的一个解

称为偏微分方程的特征方程，其积分曲线称为特征曲线

进一步拓展为n个自变量的一阶线性偏微分方程，先考虑相应的齐次方程，引入其对应特征方程，选定其中任何一个变量如，则特征方程可以看作一个常微分方程组：，其解为中的曲线，称该积分曲线为原微分方程的特征曲线，如果能将方程组中某些方程凑成全微分形式，得到积分，称为特征方程组的一个首次积分，共有n-1个独立的首次积分，将这些首次积分联立以隐函数形式给出了特征方程组的隐式通解

定理：若是特征方程组的一个首次积分，那么是特征方程组的一个解

假设找到特征方程组的n-1个首次积分，（），那么取一个，使得，那么利用变量代换（），将代入原方程，得到，而由上面的式子有（），这样就有，特别的，若，则，其中为任意元函数

例题：P.61

**解法二**

波动方程的行波解：

将同样积分的部分提取“公因式”

例题：P.65

一维波动方程通解与d’Alembert公式

一维波动方程可以分解为，这样分为两个方程，两个方程分别有一族独立的特征线，分别为，可以解得，，这意为速度为a的两列反向行进的波，称为行波解

对于无界长弦的自由振动，设初始各处位移为，初始时各处位移速度为，那么由上面的式子进行求解可以得到d’Alembert公式：

由上面公式可以看出，其可以分为两个部分，左行波和右行波，波速都为a

有限传播速度点的依赖区间为，区间的决定区域为一个三角区域

奇（偶）初始数据产生奇（偶）函数解

周期初始数据产生周期解

特征平行四边形法则

达朗贝尔解是稳定的

达朗贝尔解的奇延拓和偶延拓

对于有界问题，先延拓然后再整个平面上求解（周期的延拓函数）

例题：被拨动的弦

中心对称的球面波：

在球坐标中，有，，，这样在球坐标中，laplace算子为

如果存在球面对称性，那么可以设

那么，原波动方程就可以化为，这样解函数的解即可，但是对于球面波必然有，故而是半无界一维波动先=弦，需要进行奇延拓或者偶延拓，分为和两个部分

三维波动方程的Poisson公式：

题目：，，

一般情况下，三维波动方程不一定球面对称，给定一个点，用表示以点为球心半径为r的球面

利用球面平均法求解方程组：

定义球面平均为，当M固定，为r,t的函数，对于连续函数有

化简有，因为，同时对r求导，有

再由散度定理，，其中，，而，且故而

其中为点M位球心，r为半径的球

进而有：

再变化：

所以有，即为（球面对称波动方程）

而易得

所以将原方程组化为，，，

其中和表示和在球面上的平均

可以解得满足达朗贝尔公式（在延拓后），进而（具体展开未写）P.105

二维波动方程可以看做三维波动方程与空间变量z无关的解（具体公式未写）

三维解是在三维空间中的一个三维球面上的积分，而二维解是在二维圆上积分，这造成了物理上的不同

对于三维，波的传播有清晰前阵面和后阵面；对于二维，有清晰前阵面，无后阵面，称为波的弥散，或者说具有后效现象（相当于三维中的柱面波，柱面波无法传递信号）

对于三维情况，如果初始在某一片区非零，那么其存在波前和波后，但是对于二维情况，是没有波后的

二阶线性偏微分方程的分类与标准化：

波动方程、扩散方程、Poisson方程都是二阶线性PDE

一般，n个自变量的二阶线性PDE为

考虑两个自变量的二阶线性PDE：

想法是：利用自变量的可逆变换简化二阶导数项

设，，那么有，，，，

代入原方程，得到

其中，，

，，

其中为了方便记忆，有

令，

那么有

故而可逆自变量变换下，符号不变

称为方程判别式：①若大于零，则方程双曲型②等于零，抛物型③小于零，椭圆型

为了化简方程，取适当的或使得：

该方程的解为的解

定理：若是上面微分方程的隐式通解（积分曲线族），那么为原方程的解，这样该微分方程称为原方程的特征方程，积分曲线称为特征曲线

原方程的化简与标准形：（下面假设）

，那么特征方程为，可以得到两族特征线，这样相当于得到两个解，满足特征方程的解，这样就可以使和都为零，原方程化为，且，采用代换和，可以将方程化为，其中，，这两种形式都是双曲型方程的标准型

此时特征方程只有一个解，故而再另取一个二元函数，使得，这样可以保证变换不出问题

代入原方程，可以得到原方程化为，称为抛物型方程的标准型

此时必有，特征方程为，其隐式通解为一对共轭的复特征线

有和，令，

那么由该解可以得到（推导见P.128）

方程化为

例题：P.129

叠加原理与齐次化原理：

线性叠加原理：从一个函数类（定义域）到另一个函数的映射T 称为一个算子

，则为线性算子

N个自变量的二阶线性PDE算子为

那么是n个自变量的二阶线性PDE，laplace算子是其中特殊的一种

为方便，简记初始条件和初值条件为，，

叠加原理：

1. 有限叠加原理：，则时，有
2. 级数叠加原理：有限叠加原理中取无穷
3. 积分叠加原理：设，则当时，有

级数积分叠加原理、与积分叠加原理分别要求函数项级数、 含参变量积分收敛，算子与求和、积分号可交换次序，在经 典意义下这些条件要求过强，实际问题未必满足，我们是在 广义下，认为这些交换总可行。

一个定解问题，可以通过叠加原理化成多个定解问题的叠加。 反映在物理上可以看做是多个源共同作用的结果等于各个源 独立作用的总和，物理上称作独立作用原理。

例题：P.140

齐次化原理（冲量原理）：

对于方程组：，，，相当于弦振动的外力作用，固定时刻，在短时间内受到外力，考虑瞬时作用，有瞬时速度，设时的位移分布为，那么原方程化为：，，，之后再将各个时段的位移效应累加得到总效应（，）

由叠加原理可以得到一般弦振动方程的解：

（推迟势）

齐次化原理（推广）：设L是关于t和，关于t的最高阶导数不超过m-1，若满足齐次方程初值的解：

，，

那么是非齐次方程初值的解：

，

（如果分别增加齐次边界条件，齐次化定理仍然成立）

例题：P.150

**第二章 分离变量法**

预备知识：

2阶微分方程

对于方程，直接解辅助方程

对于变系数、非齐次方程有两种解法：①特解加齐次解；②参数变异法，其中和为其齐次方程的线性无关解（该方程必有特解）

特别的，有欧拉方程，特殊解法，令，则，

2.1分离变量法实例（对于三大经典方程）

对于定义在[-L,L]的函数

Fourier级数：

其中，n=0,1,2,3,…，，n=1,2,3,…

Parserval等式：，其中

收敛的条件：在[-L,L]上是以2L为周期的函数，其而在区间[-L,L]上满足Dirichlet条件：

1. 连续或分段连续，且至多有有限个第一类间断点
2. 至多有有限个极值点

那么就存在关系（），在边界处有（）

还是定义在[-L,L]上的那个它

Fourier正弦级数：，其中

Fourier余弦变换：，其中

对于有界弦的自由振动（边界条件为0），可以考虑方程的解是一系列驻波的叠加（P.11）

考虑驻波解：（分离变量）

代入方程，得到关系式子：

分离两个式子，得到各自的解

对于X，有，同时利用边界条件得到，这样可以得到其对应的解为，考虑到T中也存在系数，所以可以取1

同时对于T，在其对应的特征值的情况下，有，由于没有限制条件，所以有

这样二者结合可以得到

而与由初始条件确定，有，

由傅里叶级数得到，系数为，而

该解为形式解

有限长杆的热传导：

方程如下：

齐次方程，且具有第一、三类边界条件，考虑分离变量，有

代入方程，得到

而边界条件为

可以得到其解（具体见P.25）

圆域上的Laplace方程

方程：

使用极坐标，那么有：

同时有自然条件：，以及关于的周期条件：，

分离变量，有

那么原式子化为：

关于为特征值问题，而关于R是Euler方程问题：

其通解为，，再由自然条件，得到

得到解为，相当于关于傅里叶展开，故而有利用边界条件，可以解得，

具体形式涉及Poisson核，见P.35

坐标变换时要注意挖掘（自然）条件

圆域Laplace方程在极坐标下周期条件类似于直角坐标系下的齐次边界条件

环域也可以类似处理

圆域上的Neumann问题

由格林公式：

进而分离变量，代入上述条件

分离变量法的一般格式：

其中和为关于t和x的二阶线性偏微分算子，该形式总是可以分离变量

那么解题步骤是：

1. 分离变量：
2. 分离可以得到关于X和T的特征值问题，其中对X可以得到特征值
3. 将根据X的条件得到的特征值{}代入关于T的特征方程，得到相应的通解，最终得到一族分离形式的解{}
4. 叠加起来得到，此时代入关于t的初始条件或者边界条件或者根据题意推知的条件，确定系数

特征值，本征值，固有值是等价的称呼，相应的有称呼 特征函数，本征函数，固有函数。

Sturm-Liouville理论

S-L方程：（）

其中为参数，为实函数

对于一般的2阶线性常微分方程：

当，同乘，那么原方程可以化为S-L方程

其中，，

例子将P.48

考虑定义在[a,b]上的实值函数

加权内积；加权正交；加权范数；加权平方可积函数空间

定理：若几个函数在中完备且加权正交，则任意在该空间中的函数有广义傅里叶级数：，其中展开系数为P.53

广义级数与傅里叶级数性质类似

S-L部分 P.46-P.67

非齐次方程的解法：

1. 特解法

令，通过其中的一个消去非齐次项

1. 齐次化原理

利用齐次化原理，将非齐次项移到初始条件中

1. 特征函数法（分离变量）

首先分离变量，找到相应齐次方程的特征函数族，将各个函数沿特征函数展开，再在每个不同的n（特征值）下求解

例子：

首先可以得到其对应齐次方程的特征函数族为{}，将各个涉及的函数按照特征函数展开得到，，

其中，

代入方程，可以得到在某个维度下，有，，进而可以解得，解就完全确定了

利用S-L理论特征函数法的一般步骤：P.88-P.90

例题：P.91

对于高维情况，可以将其中的某个维度当做t

（二重傅里叶展开）

2.4 非齐次边界条件的处理

求解方程时，通常可以用叠加原理，将解分为非齐次边值和齐次边值两个

其中非齐次边值将负责消去非齐次项，通常取多项式结构

高维情形的分离变量法：

P.115

解法类似

**第四章 积分变换法**

4.1 Fourier变换

积分变换：从函数空间到函数空间的算子

Fourier变换：

Laplace变换：

若f在实轴上分段连续且在全实轴上绝对可积，那么其可以进行Fourier变换

基本性质：

1. 线性：
2. 微分：
3. 积分：（这里假定积分存在Fourier变换，同时）
4. 像函数微分：
5. 像函数积分：
6. 时移：
7. 频移：
8. 相似：
9. 卷积：（，）
10. 像函数卷积：
11. 反射：
12. 逆变换：（在非连续点处有

）

高维Fourier变换，将上面的量进行替换

基本性质：

1. 线性
2. 微分：
3. 积分
4. 像函数微分
5. 像函数积分
6. 时移
7. 频移
8. 相似
9. 卷积
10. 像函数卷积
11. 反射
12. 逆变换：

**常见傅里叶变换对**

Fourier变换用于解方程(无界区间上波动方程、热传导方程，带形区域上的Laplace方程，也适于高阶方程)

例题：

1.无界长杆热传导

利用傅里叶变换将关于x的求导消去，转化为关于t的方程

2.n维热传导方程

利用高维傅里叶变换，将其化为关于t的方程

3.n维波动方程

利用高维傅里叶变换，将其化为关于t的方程

4.上半平面Dirichlet问题

5.上半平面Neumann问题

6.半无界杆热传导方程问题1

偶延拓后傅里叶变换

7.半无界杆热传导方程问题2

奇延拓后傅里叶变换

Fourier正弦、余弦变换

设为奇函数，则

为奇函数，则可以进行傅里叶正弦变换，为偶函数可以进行傅里叶余弦变换

（此处的也可以是定义在上的函数，通过奇延拓或者偶延拓变成奇函数或者偶函数形式）

同时有逆变换，

正弦、余弦变换的性质：

1. 线性
2. 微分：

1. 积分：（假设），
2. 像函数微分：，，，
3. 相似：，
4. 反射：，

例题：

1. 半无界杆热传导方程问题

使用傅里叶余弦变换，这需要根据给出的条件确定余弦变换还是正弦变换

1. 半无界弦振动问题

或

需要加上自然边界条件，再根据0端边界条件进行余弦变换或正弦变换

1. 半条形区域上的Dirichlet问题

根据条件，进行傅里叶正弦变换

1. 平面上Laplace方程定解问题

或

同样，根据条件延拓后利用正弦或余弦变换

4.4 Fourier变换与分离变量法

问题：无界区域是否可以进行分离变量法

例题：

1. 无界长杆热传导

首先分离变量，可以得到关于X的特征值问题（，无穷远处有界）以及关于T的常微分方程（），取，得到X的特征函数为，T的特征函数为，由于取值任意，所以可以得到u的积分叠加形式为，可见相当于的傅里叶反变换，再由，进而可以求出，进而可以得到u的积分形式表达，这就是因为特征值是连续分布的，所以其傅里叶展开是积分形式

1. 半无界长杆热传导

同样分离变量，但是由于存在边界条件，所以最好进行关于x的奇延拓，进而利用正弦变换得逆变换，求得，像上面无边界的解法

有限区间上的有限傅里叶变换，本质上就是分离变量法，但是要注意其公式的不同（P.53）

* 1. Laplace变换

定义：定义于，若，其中，收敛，那么这就是的Laplace变换，记作（）

Laplace变换存在定理：定义于，且满足条件：①在的任一有限区间上分段连续②存在，，使得，

那么拉普拉斯变换存在且在半平面上存在且解析

Laplace逆变换为，

公式设计复平面上的积分，有时需要留数计算

，所以两个变换有类似的性质：

1. 线性
2. 微分：，
3. 积分：
4. 像函数微分：，
5. 像函数积分：
6. 复频移与时滞性质：，（其中H(x)为跳跃函数，在0处跳变为1）
7. 相似性质：
8. 卷积性质：
9. 像函数卷积：

第一展开定理：设在的邻域内有Laurent展开式，，则，

（因为有）

第二展开定理：设是有理函数，其中和为多项式，且分母的阶数更高，…（留数相关在P.63）

* 1. Laplace变换的应用

例题：P.68

注意什么时候用Laplace，什么时候用Fourier

**第五章 基本解方法**

5.1 函数与广义函数的简介

5.1.1 函数

函数性质：

1. 对称性：
2. 筛选性：
3. ，（Heaviside函数）
4. 设u(x)，且在实轴上只有单零点，则复合函数的表达式为

5.1.2 广义函数

从一个函数空间V到数域F的映射T称为一个泛函

对于F中任意两个数a，b，以及V中任意两个函数u，v，如果，则T为V上的一个线性泛函

定义，这样函数确定了连续函数空间C(R)上的一个线性泛函，即

supp(f)={}，表示实函数f的支集，记，且有界}，则对于，有

为方便，直接以与表示广义函数与，分别称为奇异广义函数与正则广义函数

上所有线性泛函全体构成一个线性空间，称为基本函数空间的共轭空间或对偶空间，记作

两个广义函数的含义是，可以在可列个点上不相等，但在线性泛函意义下，它们表示同一个广义函数

广义函数的导数：

有界}，，定义，

设广义函数，若，则是的一个原函数，此时也是的一个原函数

广义函数的卷积：

给定两个广义函数，卷积，通过如下方式确定：

，

其中

例子：

一般有，L为常系数线性微分算子

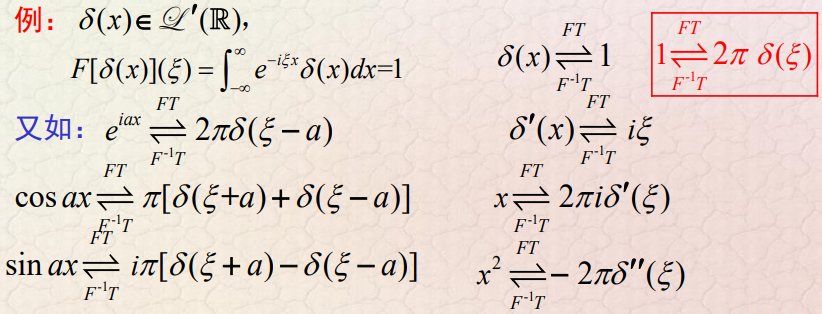
广义函数的Fourier变换：

速降函数空间是的一个子空间，，满足，

这样有

给定广义函数，那么的fourier变换与逆变换也是广义函数，定义为，，对于

形式上仍记，



Fourier展开：

，其中（n=0,1,2…），(n=1,2,…)

广义函数序列的收敛性：

定义：，为广义函数序列，为一个广义函数，若对基本函数空间中任意一个函数，都有，则称为弱收敛到，称作的弱极限，记为

定理：若则

弱收敛到的序列称为序列，比如：

1. 矩形脉冲序列，
2. Cauchy脉冲序列，
3. Gauss脉冲序列，
4. 采样脉冲序列，

设基本函数空间为，则：，

高维函数与广义函数：

，，，

速降函数空间是的一个子空间，，满足：

类似地，可以定义上的广义函数（一点内容未整理）

，作可逆变量代换，那么，其中

广义函数的偏导数：

广义函数的卷积：

广义函数的傅里叶变换：

5.2 型方程的基本解

预备知识：Green公式

1. 第一格林公式：
2. 第二格林公式：

其中

方程：，，为常系数线性偏微分算子

视为广义函数，在广义函数空间内可以自由运算和交换，这样得到的解为广义函数解，简称广义解，如果解是一个正则广义函数，甚至还有足够的光滑性，那么这种解是经典解。

定义方程的解为方程的基本解

基本解可理解为点源产生的物理场，对一般的函，其对应的解是一般的源所产生的物理场， 故基本解也叫点源函数。

设型方程有基本解，即，那么，而，若令，那么由积分叠加原理（自由交换原则），有

基本解不唯一，可以相差齐次方程的解

例题：

1. 求解方程的基本解
2. 求三维Helmholtz方程的基本解
3. 二维Helmholtz方程的基本解
4. 一维Helmholtz方程

5.3Poisson方程格林函数法

5.3.1Poisson方程的Green函数与解的积分公式

Poisson方程第I边值问题：

从物理角度看，这是静电场问题：空间区域V内有电荷体密度，边界上的电位已知为，求V内电位，有叠加原理，可以将解拆分为两个和，其中负责消去非齐次项，而负责满足边界条件

在物理中，表示在边界接地时，体内电荷产生的电场，而表示由于边界约束引起的电场

定解问题：

的解称为Poisson第I 边值问题的Green函数，物理上看，Green函数就是边界接地时，置于V内处点电荷为的点源在V内M点产生的电场，仍然是一个点源函数，一个基本解

定理：设为Poisson第I 边值问题的Green函数，则其解为（证明用到Green公式）

Green函数具有性质：①；②；③对称性：

Green函数求法：

主要考虑Poisson方程第I类边值问题的Green函数

Fourier函数是求Green函数的基本方法，但是对于一些特殊区域可以采用特殊方法

镜像法：

对于Poisson方程第I类边值问题，由叠加原理的，其中满足，是的点电荷产生的电场

而满足，

是的点电荷在边界上的感应电荷产生的电场

区域外的点源子V内产生的电场满足Laplace方程，所以可以将边界感应电荷产生的电场看为某些区域外的虚设电荷产生的等效电场，也就是镜像法

Laplace方程的基本解

例题：P.51

球域内的Poisson方程第I边值问题的Green函数

需要取

利用镜像法得到半球、半圆盘等上的格林函数

Fourier方法：

主要思想是按照特征函数做广义Fourier展开，包括分离变量与积分变换

先分离变量，再考虑傅里叶展开，考虑大于零的部分（这样函数可以视为0）

先积分后求导与先求导后积分的转化

Poisson问题的第II类和第III类边值问题的Green函数

广义Green函数的引入

初值问题的基本解法

1. 问题
2. 问题（热传导）
3. 问题
4. 问题（波动方程）

混合型不考