Lösungsskizze Praktikum 11

1. Die Federkraft bzw. die Reibungskraft sind jeweils entgegen der Auslenkung x bzw. der Relativgeschwindigkeit v_{rel} gerichtet, also erhalten wir die Kräftebilanz

$$\begin{aligned} m\ddot{x} &= -\operatorname{sign}(v_{\mathrm{rel}})kv_{\mathrm{rel}}^2 - k_s x + mg, \quad v_{\mathrm{rel}} = \dot{x} + v_0 & (1)\\ &= -\frac{v_{\mathrm{rel}}}{|v_{\mathrm{rel}}|}k|v_{\mathrm{rel}}|^2 - k_s x + mg, & (2)\\ &= -kv_{\mathrm{rel}}|v_{\mathrm{rel}}| - k_s x + mg = -k(\dot{x}+v_0)|\dot{x}+v_0| - k_s x + mg. & (3) \end{aligned}$$

Nach einer Division durch die Masse m erhalten wir eine autonome gDgl 2. Ordnung für x (t tritt nicht auf):

$$\ddot{x} = -\frac{k}{m}(\dot{x}+v_0)|\dot{x}+v_0| - \frac{k_s}{m}x + g. \tag{4}$$

Wir definieren die vektorwertige Funktion $\boldsymbol{x} := (x, \dot{x})^\top$, und wir erhalten das autonome System

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \ddot{x} \end{pmatrix} \overset{(4)}{=} \begin{pmatrix} \dot{x} \\ -\frac{k}{m}(\dot{x}+v_0)|\dot{x}+v_0| - \frac{k_s}{m}x + g \end{pmatrix} =: \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) \in \mathbb{R}^2, \tag{5}$$

mit Anfangsbedingung $\boldsymbol{x}(0) = \boldsymbol{0}_2$.

Für die gegebenen Werte berechnen wir den Parameter $k = \frac{1}{2}C_a\rho A = \frac{1}{2}C_a\rho\pi R_{\mathrm{Kugel}}^2 \simeq 8.37 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{kgm}^{-1}$, und damit

$$\frac{k}{m} \simeq 0.167\,\mathrm{m}^{-1}, \quad \frac{k_s}{m} = 1\,\mathrm{s}^{-2}. \tag{6}$$

2. Der i-te Schritt von RK4 für das (autonome!) System (5) ist gegeben durch

$$\begin{array}{c|cccc} 0 & & & & \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & & & \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & & \\ 1 & 0 & 0 & 1 & \\ \hline & \frac{1}{6} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{6} \end{array} \qquad \begin{aligned} \boldsymbol{k}_1 &= \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_{i-1}), \\ \boldsymbol{k}_2 &= \boldsymbol{f}\left(\boldsymbol{x}_{i-1} + h\tfrac{1}{2}\boldsymbol{k}_1\right), \\ \boldsymbol{k}_3 &= \boldsymbol{f}\left(\boldsymbol{x}_{i-1} + h\tfrac{1}{2}\boldsymbol{k}_2\right), \\ \boldsymbol{k}_4 &= \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_{i-1} + h\boldsymbol{k}_3), \\ \boldsymbol{x}_i &= \boldsymbol{x}_{i-1} + h\left(\tfrac{1}{6}\boldsymbol{k}_1 + \tfrac{1}{3}\boldsymbol{k}_2 + \tfrac{1}{3}\boldsymbol{k}_3 + \tfrac{1}{6}\boldsymbol{k}_4\right), \end{aligned} \tag{7}$$

mit dem Anfangswert $\boldsymbol{x}_0 = \boldsymbol{0}_2$, wobei jetzt die Grössen $\boldsymbol{k}_j, \boldsymbol{x}_i \in \mathbb{R}^2$ Vektoren sind. Wir speichern die Vektoren $\boldsymbol{x}_i$ als Spalten einer Matrix $\underline{\boldsymbol{X}} = (\boldsymbol{x}_0, \boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_N) \in \mathbb{R}^{2\times(N+1)}$. Für die Zeitpunkte gilt einfach $t_i = t_{i-1} + h$, $i \in \{1, 2, \ldots, N\}$, mit $t_0 = 0$.

(a) Zur Berechnung der Gleichgewichtspunkte lösen wir die nichtlineare Gleichung $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = \mathbf{0}_2$. Mit (5) erhalten wir

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ -\frac{k}{m}(\dot{x}+v_0)|\dot{x}+v_0| - \frac{k_s}{m}x + g \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{8}$$

$$\dot{x} = 0 \quad \wedge \quad -\frac{k}{m}(\dot{x}+v_0)|\dot{x}+v_0| - \frac{k_s}{m}x + g = 0 \tag{9}$$

$$\dot{x} = 0 \quad \wedge \quad -\frac{k}{m}v_0|v_0| - \frac{k_s}{m}x + g = 0 \tag{10}$$

$$\dot{x} = 0 \quad \wedge \quad x = -\frac{k}{k_s}v_0|v_0| + \frac{mg}{k_s}. \tag{11}$$

Der (einzige) Gleichgewichtspunkt ist also $\boldsymbol{x}_\infty = \left(-\frac{k}{k_s}v_0|v_0| + \frac{mg}{k_s}, 0\right)^\top$.

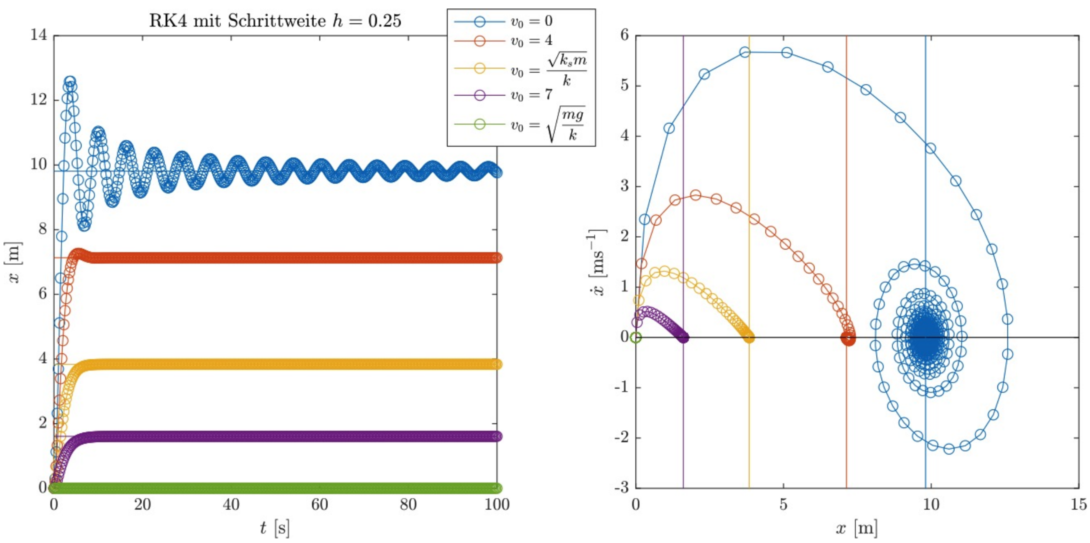
(b) Der Gleichgewichtspunkt entspricht der Ruhelage (keine Bewegung der Kugel), also $\boldsymbol{x}_\infty = \boldsymbol{x}_0 = \mathbf{0}_2$, genau dann, wenn

$$-\frac{k}{k_s}v_0|v_0| + \frac{mg}{k_s} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad v_0|v_0| = \frac{mg}{k} > 0 \quad \Leftrightarrow \quad v_0 = \sqrt{\frac{mg}{k}} \simeq 7.66\,\mathrm{ms}^{-1}. \tag{12}$$

Für die gegebenen Strömungsgeschwindigkeiten erhalten wir die Gleichgewichtsauslenkungen

$$\begin{array}{c|ccccc} v_0 & 0 & 4 & \frac{\sqrt{k_s m}}{k} & 7 & \sqrt{\frac{mg}{k}} \\ \hline x_\infty & \frac{mg}{k_s} & -16\frac{k}{k_s}+\frac{mg}{k_s} & -\frac{m}{k}+\frac{mg}{k_s} & -49\frac{k}{k_s}+\frac{mg}{k_s} & -\frac{mg}{k_s}+\frac{mg}{k_s} \\ [\mathrm{m}] & =9.81 & \simeq 7.13 & \simeq 3.84 & \simeq 1.61 & =0 \end{array}. \tag{13}$$

Wir erhalten die folgenden numerischen Lösungen mit RK4 (farbige Linien bei x_∞):



3. Aus (5) berechnen wir die Jacobi-Matrix (partielle Ableitungen nach x und $\dot{x}$)

$$\underline{\boldsymbol{Df}}(\boldsymbol{x}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k_s}{m} & -\frac{k}{m}2|\dot{x}+v_0| \end{pmatrix}, \quad \underline{\boldsymbol{Df}}(\boldsymbol{x}_\infty) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k_s}{m} & -\frac{k}{m}2|v_0| \end{pmatrix}, \tag{14}$$

mit Eigenwerten $\lambda_{1,2} = -\frac{k}{m}|v_0| \pm \sqrt{\frac{k^2}{m^2}v_0^2 - \frac{k_s}{m}}$ [s^{-1}]. Damit charakterisieren wir die in 2. bestimmten Gleichgewichtspunkte:

v_0	0	4	$\frac{\sqrt{k_s m}}{k}$	7	$\sqrt{\frac{mg}{k}}$
λ_1	i	$-0.670 + 0.743i$	-1	-0.561	-0.480
λ_2	$-i$	$-0.670 - 0.743i$	-1	-1.78	-2.08
	grenz-stabiler Strudel	stabiler Strudel	stabiler entarteter Knoten	stabiler Knoten	stabiler Knoten

(15)

4. Für die implizite Mittelpunktsregel rechnen wir für dieses *autonome* System im i-ten Schritt:

$$\begin{array}{c|c} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \hline & 1 \end{array} \qquad \begin{aligned} \boldsymbol{k} &= \boldsymbol{f}\left(\boldsymbol{x}_{i-1} + h\tfrac{1}{2}\boldsymbol{k}\right), \\ \boldsymbol{x}_i &= \boldsymbol{x}_{i-1} + h\boldsymbol{k}. \end{aligned} \tag{16}$$

Die nichtlineare Stufengleichung in (16) schreiben wir als

$$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{k}) := \boldsymbol{k} - \boldsymbol{f}\left(\boldsymbol{x}_{i-1} + h\frac{1}{2}\boldsymbol{k}\right) \stackrel{!}{=} \boldsymbol{0}_2, \quad \underline{\boldsymbol{DF}}(\boldsymbol{k}) = \underline{\boldsymbol{I}}_2 - h\frac{1}{2}\underline{\boldsymbol{Df}}\left(\boldsymbol{x}_{i-1} + h\frac{1}{2}\boldsymbol{k}\right), \tag{17}$$

und wir approximieren wie in der Vorlesung $\underline{\boldsymbol{Df}}\left(\boldsymbol{x}_{i-1} + h\frac{1}{2}\boldsymbol{k}\right) \simeq \underline{\boldsymbol{Df}}(\boldsymbol{x}_{i-1}) =: \underline{\boldsymbol{J}}$, $\underline{\boldsymbol{DF}}(\boldsymbol{k}) \simeq \underline{\boldsymbol{I}}_2 - h\frac{1}{2}\underline{\boldsymbol{J}} =: \underline{\boldsymbol{M}}$ (unabhängig von $\boldsymbol{k}$). Für einen Startwert $\boldsymbol{k}_0 \in \mathbb{R}^2$ berechnen wir Glieder der inexakten Newton-Folge

$$\boldsymbol{k} \leftarrow \boldsymbol{k} \underbrace{-\underline{\boldsymbol{M}}^{-1}\boldsymbol{F}(\boldsymbol{k})}_{=:\boldsymbol{\delta k}}, \tag{18}$$

bis $|\boldsymbol{F}(\boldsymbol{k})| \leq \mathrm{tol}$ gilt. Der Pseudocode für den i-ten Schritt der impliziten Mittelpunktsregel ist also gegeben durch

$t_i = t_{i-1} + h$
$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{k} - \boldsymbol{f}\left(\boldsymbol{x}_{i-1} + h\frac{1}{2}\boldsymbol{k}\right)$, $\underline{\boldsymbol{J}} = \underline{\boldsymbol{Df}}(\boldsymbol{x}_{i-1})$
$\underline{\boldsymbol{M}} = \underline{\boldsymbol{I}}_2 - h\frac{1}{2}\underline{\boldsymbol{J}}$, berechne eine LR-Zerlegung $\underline{\boldsymbol{PM}} = \underline{\boldsymbol{LR}}$
while $|\boldsymbol{r}| > \mathrm{tol}$
  löse das lineare Gleichungssystem $\underline{\boldsymbol{M}}\boldsymbol{\delta k} = -\boldsymbol{r}$ nach $\boldsymbol{\delta k} \in \mathbb{R}^2$:
    löse $\underline{\boldsymbol{L}}\boldsymbol{y} = -\underline{\boldsymbol{P}}\boldsymbol{r}$ nach $\boldsymbol{y}$ (Vorwärtseinsetzen)
    löse $\underline{\boldsymbol{R}}\boldsymbol{\delta k} = \boldsymbol{y}$ nach $\boldsymbol{\delta k}$ (Rückwärtseinsetzen)
  $\boldsymbol{k} = \boldsymbol{k} + \boldsymbol{\delta k}$, $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{k} - \boldsymbol{f}\left(\boldsymbol{x}_{i-1} + h\frac{1}{2}\boldsymbol{k}\right)$
end
$\boldsymbol{x}_i = \boldsymbol{x}_{i-1} + h\boldsymbol{k}$

Die numerischen Lösungen mit der impliziten Mittelpunktsregel sehen qualitativ natürlich gleich aus wie in 2.

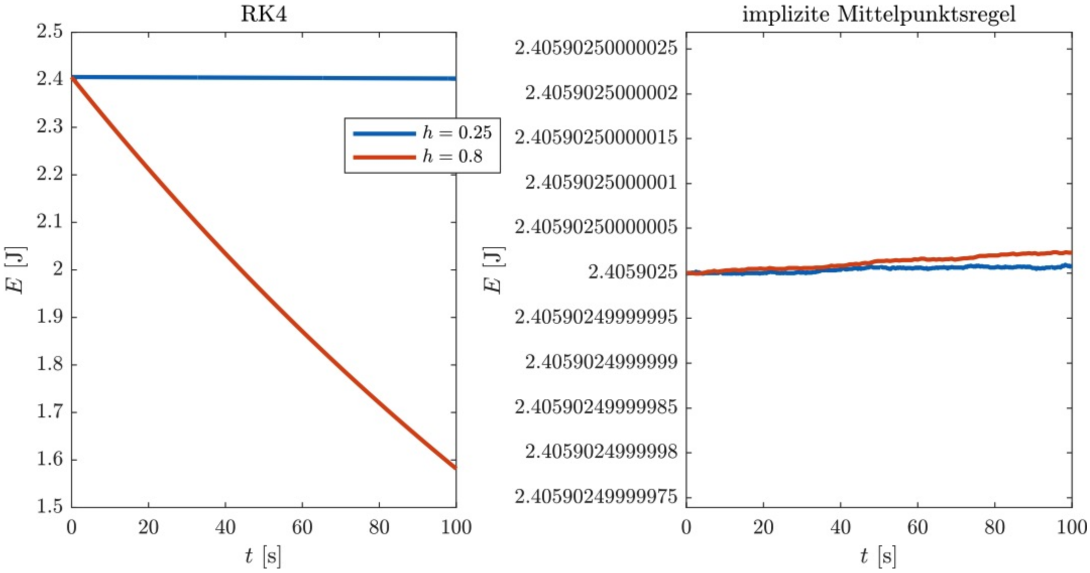
5. Für $k = 0$ (kein Auftrieb) wird (4) zu $\ddot{x} = -\frac{k_s}{m}x + g$, und die Energie $E := \frac{1}{2}k_s\left(x - \frac{mg}{k_s}\right)^2 + \frac{1}{2}m\dot{x}^2$ ist eine Erhaltungsgrösse:

$$\begin{aligned} \dot{E} &= \frac{1}{2}k_s 2\left(x - \frac{mg}{k_s}\right)\dot{x} + \frac{1}{2}m2\dot{x}\ddot{x} = k_s\left(x - \frac{mg}{k_s}\right)\dot{x} + m\dot{x}\left(-\frac{k_s}{m}x + g\right) && (19) \\ &= k_s x\dot{x} - mg\dot{x} - k_s x\dot{x} + mg\dot{x} = 0, && (20) \end{aligned}$$

also gilt $E(t) = E(0) = \frac{1}{2}\frac{m^2g^2}{k_s} \simeq 2.406\,\mathrm{J}$, $\forall\, t \in \mathbb{R}$. Dieses *lineare* System können wir auch exakt integrieren, und wir erhalten die exakte Lösung

$$x(t) = \frac{mg}{k_s}\left(1 - \cos\left(\sqrt{\frac{k_s}{m}}t\right)\right), \quad \dot{x}(t) = \sqrt{\frac{m}{k_s}}g\sin\left(\sqrt{\frac{k_s}{m}}t\right), \quad t \in \mathbb{R}. \qquad (21)$$

Die (konservative) implizite Mittelpunktsregel erhält die Energie über die Zeit auch für grosse Schrittweiten, was bei RK4 nicht der Fall ist:



Beachten Sie, dass trotz fehlender Energieerhaltung RK4 ($p = 4$) über einen langen Zeitraum eine genauere Lösung liefert als die implizite Mittelpunktsregel ($p = 2$):