
Praktikum 10

Christoph Kirsch

09.04.2024

Inhaltsverzeichnis

1	(Diagonal-)implizite Runge-Kutta-Verfahren	1
1.1	Lernziele	1
1.2	Theorie	1
1.3	Aufträge	2
1.4	Abgabe	2

1 (Diagonal-)implizite Runge-Kutta-Verfahren

1.1 Lernziele

- Sie implementieren zwei implizite Runge-Kutta-Verfahren, unter Verwendung der Programmstruktur aus dem Praktikum 8.
- Sie testen Ihre Programme an einfachen Modellproblemen und wenden sie schliesslich auf ein komplexeres Problem an, um die numerischen Lösungen zu vergleichen.

1.2 Theorie

In diesem Praktikum betrachten wir **diagonal-implizite** s -stufige **Runge-Kutta-Verfahren** mit einem Butcher-Tableau der Form

$$\begin{array}{c|cccc} c_1 & a_{11} & & & \\ c_2 & a_{21} & a_{22} & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \\ c_s & a_{s1} & a_{s2} & \cdots & a_{ss} \\ \hline & b_1 & b_2 & \cdots & b_s \end{array} \quad (1)$$

In einem solchen **DIRK-Verfahren** können die Stufengleichungen nacheinander gelöst werden, weil in der j -ten Stufe die Steigungen r_1, r_2, \dots, r_{j-1} bereits bekannt sind (vgl. Übungsblatt 9, Aufgabe 2).

1.3 Aufträge

1. ($s = 1$) Schreiben Sie ein Programm zur Lösung eines AWP's mit der impliziten Mittelpunktsregel:

$$\begin{array}{c|c} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \hline -\frac{1}{2} & 1 \end{array}$$

Verwenden Sie dafür dieselbe Programmstruktur wie für das implizite Euler-Verfahren im Praktikum 8.

2. Testen Sie Ihr Programm aus 1. anhand des Modellproblems $y' = -4y$, $y(0) = 1$, mit Endstelle $x_n = 1$ und $n = 10$ Schritten. Vergleichen Sie die Werte y_k der numerischen Lösung mit den Werten der exakten Lösung, $y(x_k)$, $k \in \{1, 2, \dots, 10\}$.
3. ($s = 2$) Schreiben Sie ein Programm zur Lösung eines AWP's mit der impliziten Trapezregel:

$$\begin{array}{c|cc} 0 & 0 & \\ \hline 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \hline & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array}$$

4. Testen Sie Ihr Programm wie in 2.
5. Lösen Sie mit Ihren Programmen aus 1. und 3. das Anfangswertproblem

$$y' + \frac{x^2}{y} = 0, \quad y(0) = -4.$$

Berechnen Sie für $x_n = 2$ und $n = 3^j$, $j \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$, jeweils die absoluten Fehler an der Endstelle. Bestimmen Sie grafisch die Konvergenzordnung der beiden Verfahren.

1.4 Abgabe

Bitte geben Sie Ihre Lösungen bis spätestens vor dem nächsten Praktikum ab.

Downloads:

- PDF-Dokumentation:
 - Anleitung Praktikum 10