Projekt 8

Simulation eines Transformators

Zürcher Hochschule für angewandte Wissenschaften

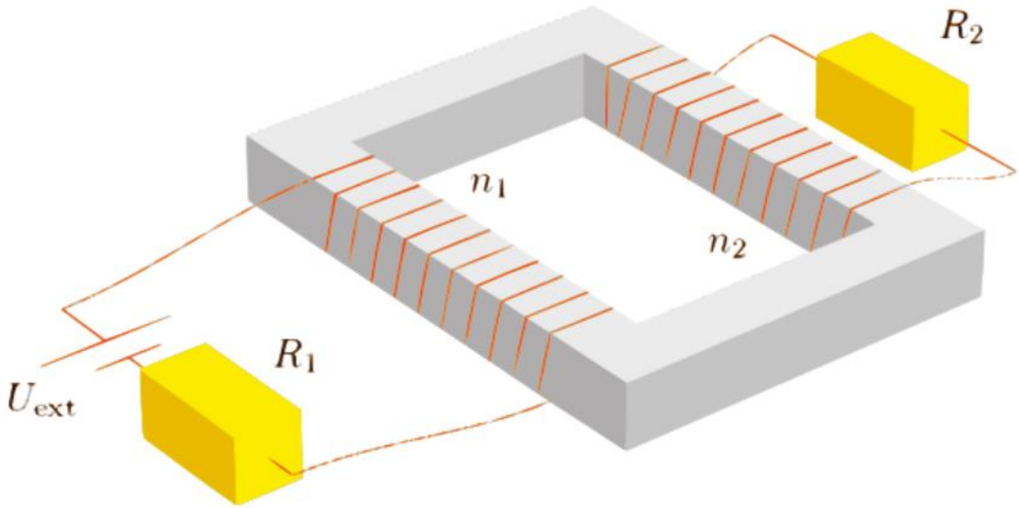

Abbildung 1: Schematische Darstellung des Transformators.

Eingereicht bei:

Dr. Kirsch Christoph

Eingereicht von:

Romann Raphael; Hollenstein Jonathan; Brunner Ivo

Studiengang:

Bachelor of Science Systemtechnik (B.Sc.)

Klasse: ST22a

Winterthur, den 13.05.2024

1 Einleitung

Beschreibung Im Primärkreis des Transformators ist die Spannungsquelle U_{ext} an die n_1 Primärwindungen des Transformators angeschlossen. Der gesamte Ohmsche Widerstand des Primärkreises ist im Widerstand R_1 zusammengefasst. An die n_2 Sekundärwindungen des Transformators ist der Verbraucherwiderstand R_2 angeschlossen. Die Spulen des Primär- und des Sekundärkreises sind über einen Weicheisenkern verbunden.

Seien L_p und L_s die Selbstinduktivitäten der Primär- bzw. der Sekundrspule und L_{ps} bzw. L_{sp} die Induktivitäten der Sekundär- auf die Primärspule und umgekehrt (Gegeninduktivitäten).

Wir gehen bei $U_{ext} = U_0 \sin(\omega t)$ von einer Wechselspannung mit der Amplitude $U_0 = 4$ V und der Kreisfrequenz $\omega = 2\pi f$ aus. Zur Simulation des Transformators berechnen wir die beiden Stromstärken $I_p(t)$ und $I_s(t)$ [A] des Primär- und den Sekundärstromkreises. Dabei verwenden wir folgende Parameter:

$f = 10^5$ Hz, $R_1 = 800\ \Omega$, $L_p = 50\ \mu$H, $L_{ps} = L_{sp} = 150\ \mu$H, $R_2 = 6\ \Omega$, $L_s = 500\ \mu$H.

Die Anfangsbedingungen sind $I_s(0) = I_p(0) = 0$.

2 Aufgaben

2.1 Aufgabe 1

Stellen Sie die beiden Differenzialgleichungen für den Primär- und den Sekundärstromkreis auf.

2.1.1 Ergebnisse Aufgabe 1

Durch die physikalischen Zusammenhänge können die folgenden Differenzialgleichungen hergeleitet werden:

$$U_{ext} = L_p \cdot \frac{dI_1}{dt} + L_{ps} \cdot \frac{dI_2}{dt} + R_1 \cdot I_1$$

$$0 = L_s \cdot \frac{dI_1}{dt} + L_{sp} \cdot \frac{dI_2}{dt} + R_2 \cdot I_2$$

Durch Umstellen nach dem Primärstrom ergibt sich:

$$I_1(t) = \left(U_0 - L_p \cdot \frac{dI_1}{dt} - L_{\rho s} \frac{dI_2}{dt}\right) \cdot \frac{1}{R_1}$$

Sowie für den Sekundärstrom:

$$I_2(t) = \left(-L_{sp} \cdot \frac{dI_1}{dt} - L_s \frac{dI_2}{dt}\right) \cdot \frac{1}{R_2}$$

2.2 Aufgabe 2

Formen Sie die Gleichungen aus Aufgabe 1 so um, dass Sie ein Differenzialgleichungssystem erster Ordnung erhalten.

2.2.1 Ergebnisse Aufgabe 2

Durch gegenseitiges Einsetzen entsteht das Gleichungssystem:

$$
\begin{aligned}
\frac{dI_1}{dt} &= \left(U_0 - L_{ps} \cdot \left(\left(-L_{sp} \cdot \frac{dI_1}{dt} - R_2 \cdot I_2\right) \cdot \frac{1}{L_s}\right) - R_1 \cdot I_1 \cdot \frac{1}{L_p}\right) \\
\frac{dI_2}{dt} &= \left(-L_{sp} \cdot \left(\left(U_0 - L_{ps} \cdot \frac{dI_2}{dt} - R_1 \cdot I_1\right) \cdot \frac{1}{L_p}\right)\right)
\end{aligned}
$$

Aufgelöst nach der Höchsten Ableitung ergibt sich die vektorwertige Funktion *f*:

$$
\dot{I} = \begin{pmatrix} \dot{I}_1 \\ \dot{I}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{\left(-U_0 \cdot \frac{1}{L_s} + R_2 \cdot I_2 \cdot \frac{1}{L_s} \cdot L_{ps} - R_1 \cdot I_1 \cdot \frac{1}{L_p}\right)}{\left(1 - L_{ps} L_{sp} \frac{1}{L_s}\right)} \\ \dfrac{-U_0 + R_1 \cdot I_1}{\frac{L_p}{L_{sp}} - L_{ps}} \end{pmatrix} := f(I_1, I_2)
$$

2.3 Aufgabe 3

Lösen Sie das Differenzialgleichungssystem aus Aufgabe 2 für $t \in [0, 50]$ [μs] mit dem expliziten Euler-Verfahren (Euler-vorwärts-Verfahren). Ermitteln Sie experimentell die Stabilitätsgrenze für die Schrittweite τ.

2.3.1 Ergebnisse Aufgabe 3

Durch sukzessives Erhöhen der Schrittweite h konnte die Stabilitätsgrenze experimentell ermittelt werden ergeben. Angefangen haben wir bei $h = 0.1\mu$s.

Stabilitätsgrenze für I_1: $h = 0.00000012530\ \mu$s

Stabilitätsgrenze für I_2: $h = 0.00000012630\ \mu$s

Diese Grenzen stellen die maximalen Schrittweiten dar, bei denen das explizite Euler-Verfahren stabile und zuverlässige Ergebnisse liefert, ohne numerisch zu divergieren. Es hat sich herausgestellt das die Grenze für I_2 ein wenig höher ist als die von I_1. In Abbildung 2 ist das Resultat des Euler-vorwärts-Verfahren mit einer Schrittweite von h = 10 ns geplottet.

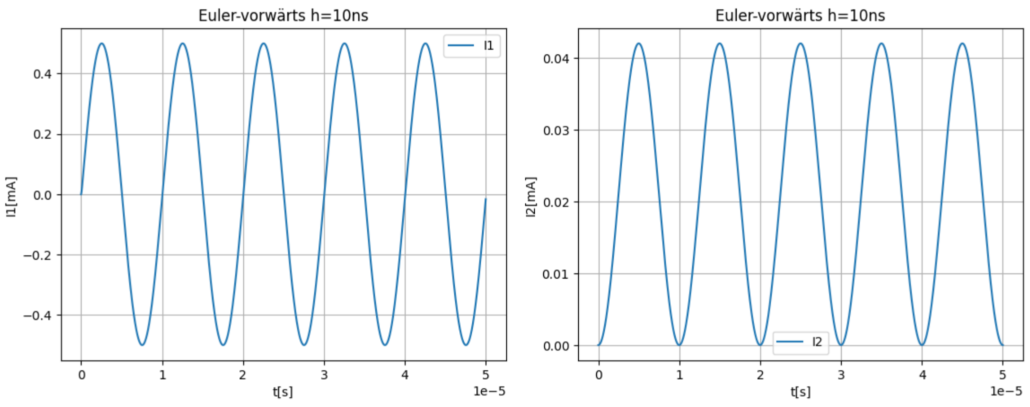

Abbildung 2: Explizites Euler-Verfahren für I_1 und I_2

2.4 Aufgabe 4

Lösen Sie das Differenzialgleichungssystem aus Aufgabe 2 im gleichen Zeitintervall mit dem impliziten Euler-Verfahren (Euler-rückwärts-Verfahren).

2.4.1 Ergebnisse Aufgabe 4

Das Differentialgleichungssystem wurde im gleichen Zeitintervall mit dem impliziten Euler-Verfahren gelöst. Hierfür wird die Jacobi-Matrix *Df* aus der vektorwertigen Funktion *f* berechnet:

$$Df = \begin{pmatrix} -\left(\dfrac{R_1 \cdot \dfrac{1}{L_p}}{1 - L_{ps} \cdot L_{sp} \cdot \dfrac{1}{L_s}}\right) & \left(\dfrac{R_2 \cdot \dfrac{1}{L_s} \cdot L_{ps}}{1 - L_{ps} \cdot L_{sp} \cdot \dfrac{1}{L_s}}\right) \\ \left(\dfrac{R_1}{\dfrac{L_p}{L_{sp}} - L_{ps}}\right) & 0 \end{pmatrix}$$

Die Anwendung des impliziten Euler-Verfahrens (Abbildung 3) ermöglicht eine robustere numerische Lösung des Systems im Vergleich zum expliziten Verfahren, da es weniger von der Schrittweite τ abhängt und ein stabileres Ergebnis liefert.

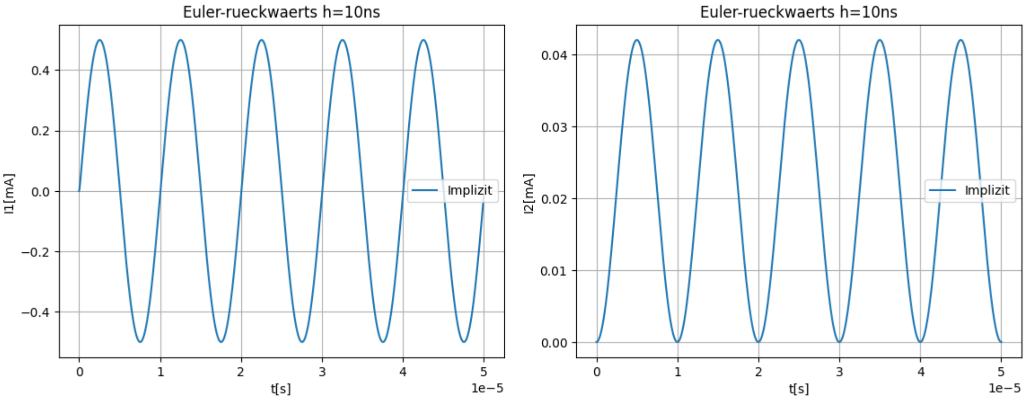

Abbildung 3: Implizites Euler-Verfahren für I_1 und I_2

Werden die Resultate der beiden verfahren verglichen, kann man in unserem Fall keinen merklichen unterschied erkennen wie Abbildung 4 zeigt.

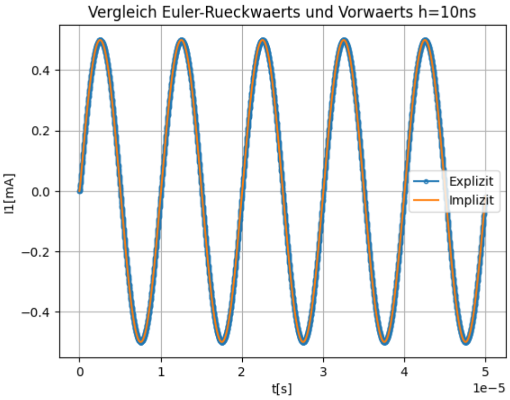

Abbildung 4: Vergleich explizites und implizites Euler-Verfahren für I_1

2.5 Aufgabe 5

Implementieren Sie die implizite Trapezregel und lösen Sie das Differenzialgleichungssystem aus Aufgabe 2 im gleichen Zeitintervall wie in Aufgabe 3. Vergleichen Sie die numerische Lösung mit derjenigen des impliziten Euler-Verfahrens hinsichtlich Genauigkeit, Rechenaufwand und Konvergenz.

2.5.1 Ergebnisse Aufgabe 5

Bei der Implementierung der impliziten Trapezregel und dem Vergleich mit dem impliziten Euler-Verfahren wurde die Genauigkeit, der Rechenaufwand und die Konvergenz beider Methoden analysiert. Abbildung 5 zeigt die Lösung der impliziten Trapezregel.

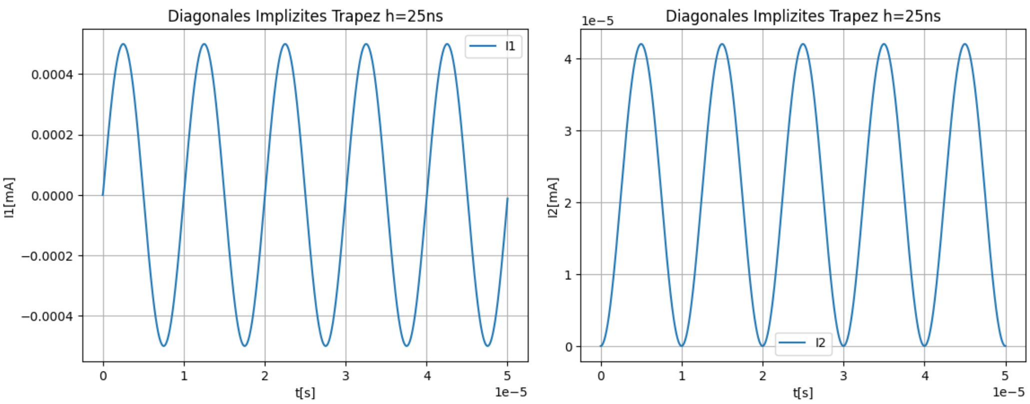

Abbildung 5: Implizite Trapezregel für I_1 und I_2

Auch hier ist im Vergleich zwischen dem implizites Euler-Verfahren und der implizite Trapezregel kein wesentlicher Unterschied zu erkennen, wenn man die beiden Resultate übereinander plottet, wie Abbildung 6 zeigt.

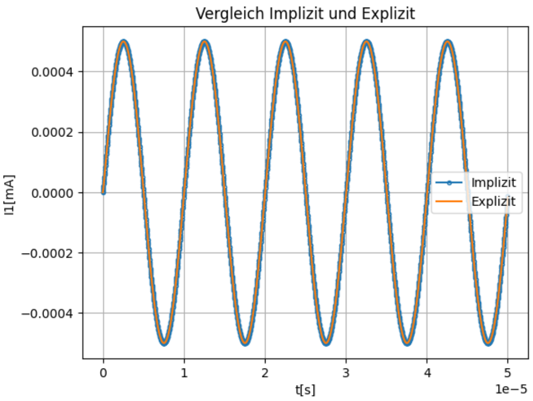

Abbildung 6: Vergleich implizites Euler-Verfahren und implizite Trapezregel

Die implizite Trapezregel benötigte mehr Rechenaufwand aufgrund der aufwendigeren Berechnungen im Vergleich zum impliziten Euler-Verfahren wie in Abbildung 7 dargestellt.

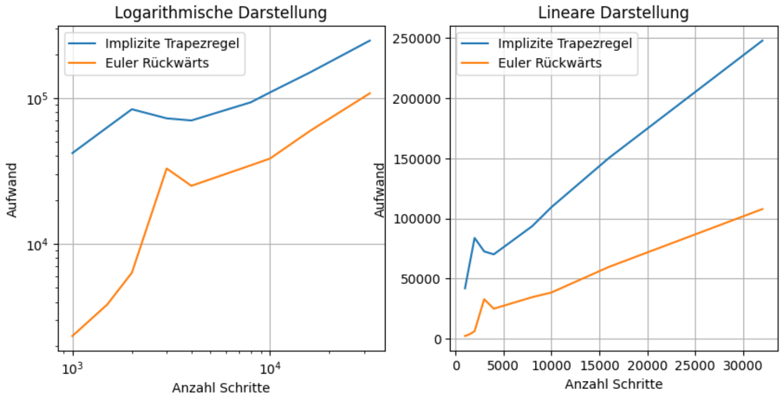

Abbildung 7: Vergleich des Rechenaufwandes

Im Folgenden werden unsere implementierten Verfahren auf Ihre Genauigkeit überprüft. Dazu haben wir das Gleichungssystem mit scipy berechnet und dargestellt. in Abbildung 8 ist diese Lösung ersichtlich.

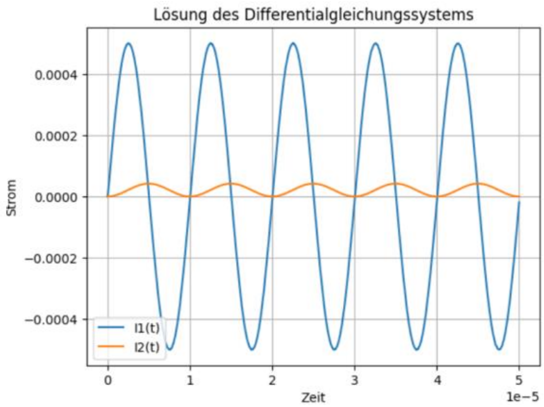

Abbildung 8: Vergleichslösung von scipy

Insgesamt bietet die implizite Trapezregel eine verbesserte numerische Lösung für das Differentialgleichungssystem des Transformators. Abbildung 9 zeigt, je mehr Schritte beim Eulerverfahren für die Berechnung gewählt werden, desto kleiner werden die Schrittweiten und somit werden die Resultate sehr schnell genauer. Bei der Impliziten Trapezregel sieht man, dass das Verfahren sehr schnell eine hohe Genauigkeit erzielt.

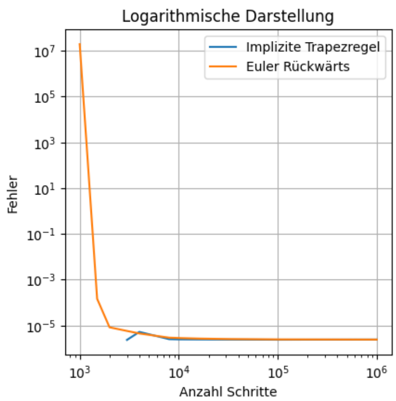

Abbildung 9: Vergleich Genauigkeit