DIRK (diagonally implicit Runge Kutta) - Verfahren aus dem Kap. 5.2 (letzte Woche)

- implementieren
- testen
- Konvergenz illustrieren

Praktikum 10

Christoph Kirsch

09.04.2024

Inhaltsverzeichnis

1 (Diagonal-)implizite Runge-Kutta-Verfahren

1.1 Lernziele

- Sie implementieren zwei implizite Runge-Kutta-Verfahren, unter Verwendung der Programmstruktur aus dem Praktikum 8.
- Sie testen Ihre Programme an einfachen Modellproblemen und wenden sie schliesslich auf ein komplexeres Problem an, um die numerischen Lösungen zu vergleichen.

1.2 Theorie

In diesem Praktikum betrachten wir **d**iagonal-**i**mplizite s-stufige **R**unge-**K**utta-Verfahren mit einem Butcher-Tableau der Form

$$
\begin{array}{c|cccc}
c_1 & a_{11} & & & \\
c_2 & a_{21} & a_{22} & 0 & \\
\vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \\
c_s & a_{s1} & a_{s2} & \cdots & a_{ss} \\
\hline
 & b_1 & b_2 & \cdots & b_s
\end{array}
\tag{1}
$$

Diagonalelemente $a_{jj} \neq 0$

In einem solchen **DIRK-Verfahren** können die Stufengleichungen nacheinander gelöst werden, weil in der j-ten Stufe die Steigungen $r_1, r_2, \ldots, r_{j-1}$ bereits bekannt sind (vgl. Übungsblatt 9, Aufgabe 2).

s-mal nacheinander das Newtonverfahren anwenden auf die Gleichung $F_j(k_j) = 0$,

$j = 1, 2, 3, \ldots, s$

$$F_j(k_j) = k_j - f\Big(x_{i-1} + c_j h, y_{i-1} + h \sum_{\ell=1}^{j-1} a_{j\ell} k_\ell + h a_{jj} k_j\Big)$$

$$F_j'(k_j) = 1 - h a_{jj} \frac{\partial f}{\partial y}\Big(x_{i-1} + c_j h, y_{i-1} + h \sum_{\ell=1}^{j-1} a_{j\ell} k_\ell + h a_{jj} k_j\Big)$$

Newton-Folge $k = k - \frac{F(k)}{F'(k)}$ bis $|F(k)| \leq tol$

ähnlich wie Praktikum 8 Euler implizit

$$\begin{array}{c|c} 1 & 1 \\ \hline & 1 \end{array}$$

$$k = k - \frac{\overbrace{k - f\left(x_{i-1}+c_j h,\, y_{i-1}+h\sum_{\ell=1}^{j-1} a_{j\ell}k_\ell + h a_{jj} k\right)}^{r}}{1 - h a_{jj}\frac{\partial f}{\partial y}\underbrace{\left(x_{i-1}+c_j h,\, y_{i-1}+h\sum_{\ell=1}^{j-1} a_{j\ell}k_\ell + h a_{jj} k\right)}_{J}} = k - \frac{r}{1-h a_{jj} J}$$

1.3 Aufträge

1. ($s = 1$) Schreiben Sie ein Programm zur Lösung eines AWPs mit der impliziten Mittelpunktsregel:

$$\begin{array}{c|c} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \hline & 1 \end{array}$$

$s=1$

anderes F! (anderes G)

   Verwenden Sie dafür dieselbe Programmstruktur wie für das implizite Euler-Verfahren im Praktikum 8.

2. Testen Sie Ihr Programm aus 1. anhand des Modellproblems $y' = -4y,\ y(0) = 1$, mit Endstelle $x_n = 1$ und $n = 10$ Schritten. Vergleichen Sie die Werte y_k der numerischen Lösung mit den Werten der exakten Lösung, $y(x_k),\ k \in \{1, 2, \ldots, 10\}$.

3. ($s = 2$) Schreiben Sie ein Programm zur Lösung eines AWPs mit der impliziten Trapezregel:

$$\begin{array}{c|cc} 0 & 0 & \\ 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \hline & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array}$$

$s=2$, die 1. Stufe ist explizit

4. Testen Sie Ihr Programm wie in 2.

5. Lösen Sie mit Ihren Programmen aus 1. und 3. das Anfangswertproblem

$$y' + \frac{x^2}{y} = 0, \quad y(0) = -4.$$

   Berechnen Sie für $x_n = 2$ und $n = 3^j$, $j \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$, jeweils die absoluten Fehler an der Endstelle. Bestimmen Sie grafisch die Konvergenzordnung der beiden Verfahren. Konvergenzordnung sollte $p=2$ sein

1.4 Abgabe

Bitte geben Sie Ihre Lösungen bis spätestens vor dem nächsten Praktikum ab.

Downloads:

- PDF-Dokumentation:
  - `Anleitung Praktikum 10`