

$$\underline{r}(\underline{\alpha}) = \underline{b} - \underline{A}\underline{\alpha}$$

Einträge?

Modellfunktion

$$\varphi(x; \underline{\alpha}) = \sum_{j=1}^n \alpha_j \Phi_j(x)$$

$$a_{ij} = \Phi_j(x_i), \quad b_i = y_i$$

$$\underline{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}, \underline{b} \in \mathbb{R}^m, \quad m \gg n$$

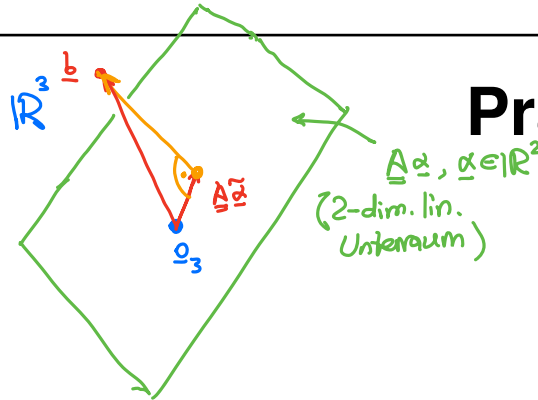
$$s(\underline{\alpha}) = \|\underline{b} - \underline{A}\underline{\alpha}\|^2 \rightarrow \min!$$

$$(\underline{A}\underline{\alpha})^T (\underline{b} - \underline{A}\underline{\alpha}) = \underline{\alpha}^T \underline{A}^T (\underline{b} - \underline{A}\underline{\alpha})$$

$$= \underline{\alpha}^T (\underline{A}^T \underline{b} - \underline{A}^T \underline{A} \underline{\alpha}) = 0$$

Normal-
gleichungen

$$\underline{A}^T \underline{A} \underline{\alpha} = \underline{A}^T \underline{b}$$



Praktikum 4

Simon Stingelin

19.02.2024

Inhaltsverzeichnis

1	Lineare Ausgleichsrechnung	1
1.1	Lernziele	1
1.2	Theorie	1
1.3	Aufträge	2
1.4	Abgabe	4

1 Lineare Ausgleichsrechnung

1.1 Lernziele

- Sie erkennen, ob es sich bei einem gegebenen funktionalen Zusammenhang zu einer Reihe von Messungen um ein lineares Ausgleichsproblem handelt.
- Sie können die zum Ausgleichsproblem gehörende Normalgleichung formulieren.
- Sie kennen den Zusammenhang zwischen Normalgleichung und Minimierung der Fehlerquadratsumme.
- Sie können die Kleinste-Quadrate-Lösung durch Cholesky-Zerlegung von $A^T A$ und Vorwärts- sowie Rückwärts-substitution berechnen.

1.2 Theorie

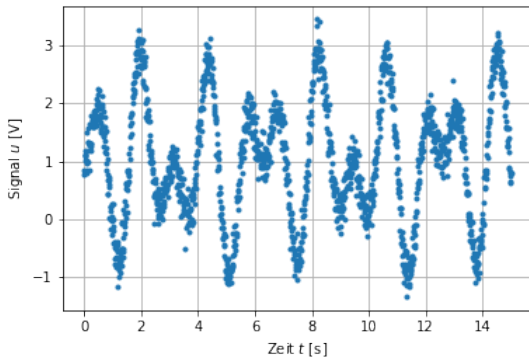
Das Praktikum fokussiert die lineare Ausgleichsrechnung, insbesondere auf die Abschnitte 2.2.1 bis 2.2.3 ohne QR-Zerlegung und Householder-Transformation.

alle Referenzen aus dem Skript von Herrn Stingelin

1.3 Aufträge

Auftrag 1

Wir betrachten das Beispiel 2.10 im Skript. Gegeben sei ein periodischer Vorgang zum Beispiel aus einer Messung (t_i, u_i) ,



für dessen Modellierung durch eine stetige Funktion $f(t)$ mit **gegebener** Periode T eine Linearkombination der trigonometrischen Funktionen

$$\cos(\omega k t), \quad k = 0, \dots, n$$

$$\sin(\omega k t), \quad k = 1, \dots, n$$

$$\omega = \frac{2\pi}{T}$$

verwendet wird. Gesucht sind daher die Koeffizienten a_k und b_k von

was ist die Variable?
was sind die Parameter?
(wieviele?!)

was sind die Φ_j ?

$$f_n(t) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{k=1}^n (a_k \cos(\omega k t) + b_k \sin(\omega k t)).$$

Modellfunktion
(trig. Polynom)

$$\omega = \frac{2\pi}{T}$$

Aufgaben:

1. Laden Sie die gegebenen Messdaten aus dem File „data.txt“

```
data = np.genfromtxt('data.txt')
```

In matlab

```
data = readmatrix('data.txt')
```

$$\begin{pmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \\ \vdots & \vdots \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{m \times 2}$$

2. Visualisieren Sie die Messung. Wie gross ist die Abtastrate? Wie gross schätzen Sie die Grundfrequenz $1/T$ des periodischen Signals?
3. Welche Dimension hat die Systemmatrix für $f_n(t)$?
4. Berechnen Sie die Systemmatrix für $f_5(t)$ mit $\omega = 1$.
5. Welche Dimension hat die Normalgleichung?
6. Lösen Sie mit Hilfe der Cholesky-Zerlegung aus NumPy

```
from np.linalg import cholesky
```

```
L = cholesky(A)
```

$$\underline{\underline{A}}^T \underline{\underline{A}} = \underline{\underline{L}} \underline{\underline{L}}^T$$

$$\underline{\underline{L}} = \begin{pmatrix} * & * & 0 \\ * & * & * \\ * & \ddots & * \end{pmatrix}$$

beliebige Einträge auf der Hauptdiagonale!

1. $A^T A = L L^T$ cholesky
2. $L y = A^T b$ solve-triangular
3. $L^T x = y$ solve-triangular

In matlab

```
L = chol(A,"lower")
```

die Normalgleichung. Wie lautet $f_n(t)$?

Achtung: Da L nicht normiert ist, erfordert das Vorwärtseinsetzen die Division durch das Diagonalelement. In der native SciPy Implementierung wird dies gemacht.

↗ fb Subs anpassen
oder scipy.linalg.solve-triangular

```
from scipy.linalg import solve_triangular
```

In matlab

```
opts.LT = true;  
x = linsolve(L,b,opts);
```

7. Visualisieren Sie Ihre Lösung in den Messdaten. Welche Anteile sind massgebend vorhanden? (**Optional:** Vergleichen Sie das Resultat mit der FFT.) → Für trigonometrische Polynome ist FFT die schnellste Methode!
8. Wie gross ist die quadratische Fehlersumme?
9. (**Optional für Python interessierte Studierende nach der Bearbeitung des Auftrag 2!**) Vervollständigen Sie die python Klasse mit Funktionalität.
 - *Initialisierung* speichert die Messdaten
 - *computeCoefs(n)* berechnet und speichert die Koeffizienten für das Modell $f_n(t)$.
 - *compute(t)* berechnet für ein *np.array* die Modellfunktionen mit den berechneten Koeffizienten.

Sie können sich an der folgenden Vorlage orientieren:

```
class myFit:
    def __init__(self, data):
        self.setData(data)
        self.c = None # Klassen Variable für die Modell Koeffizienten
        self.omega = omega

    def setData(self, data):
        self.ti = data[:,0] # Zeitstempel
        self.ui = data[:,1] # Messwerte

    def computeCoefs(self, n=5):
        self.n = n

        <<snipp>>

        self.c = <<snipp>>

    def compute(self, t):
        if not type(self.c) == np.ndarray:
            self.computeCoefs()

        y = <<snipp>>

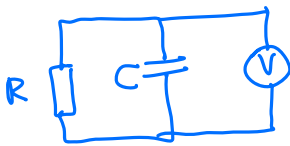
        return y
```

Damit können wir Messdaten effizient analysieren:

```
# Objekt instanzieren
mf = myFit(data)
# Koeffizienten berechnen
mf.computeCoefs(5)
# Visualisieren
plt.plot(t,mf.compute(t))
plt.show()
```

Auftrag 2

Gegeben ist die Entladungskurve eines RC-Netzwerk Kondensators mit der Kapazität C . Der Innenwiderstand R_C beträgt $R_C = 100\Omega$.



Zeit [ms]	Spannung [V]
0.0	5.0
0.03	2.94
0.05	1.73
0.08	1.01
0.10	0.6

Bestimmen Sie mit Hilfe eines RC -Glieds und der linearen Ausgleichsrechnung die Kapazität C des Kondensators.

1. Wie lautet die Differentialgleichung? Berechnen Sie die allgemeine Lösung als Basis für das Modell.
2. Wie lautet die Systemmatrix?
3. Wie gross ist die Kapazität?

Variable t
2 Parameter R, C

1.4 Abgabe

- Auftrag 1: Lösungsfunktion mit Koeffizienten, Graph mit Messung und Modell, quadratische Fehlersumme.
- Auftrag 2: Modell, Kapazität.

Kurzer Bericht mit den Ergebnisse und python Code als Textfile.

Downloads:

- PDF-Dokumentation:
 - Anleitung Praktikum 4
 - data.txt