

---

Numerische Lösung eines autonomen Systems  $\dot{x} = f(x)$  für eine Funktion

$$x(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ \dot{x}(t) \end{pmatrix} \quad (n=2, t \text{ tritt nicht auf})$$

- Gleichung aufstellen
- Lösen mit RK4
- Lösen mit implizit Mittelpunkt
- Vergleich der numerischen Lösungen

# Praktikum 11

Simon Stingelin

09.04.2024

## Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Numerische Methoden für Systeme</b>	<b>1</b>
1.1	Lernziele	1
1.2	Theorie	1
1.3	Verständnisfragen	2
1.4	Aufgaben	2
1.5	Abgabe	4

---

## 1 Numerische Methoden für Systeme

### 1.1 Lernziele

Im vorliegenden Praktikum sollen folgende Lernziele erreicht werden:

- Sie verstehen die wesentlichen Unterschiede zwischen impliziten und expliziten Verfahren.
- Sie können verschiedene explizite und implizite Diskretisierungsverfahren für Anfangswertprobleme implementieren.
- Sie können das Netwon-Verfahren zur Lösung eines Systems im Rahmen der Zeitschrittintegration implementieren.
- Sie können den Unterschied zwischen konservativen Diskretisierungsverfahren und nicht konservativen Verfahren erklären, sowie das Verhalten dieser Verfahren insbesondere für physikalische Stabilitätsprobleme verstehen.

### 1.2 Theorie

Der Numerikthorieteil ist in der Vorlesung im Kapitel 3.4 (vgl. Skript) dargestellt. In Natur und Technik treten bei vielen Vorgängen Stabilitätsprobleme auf. So wird z.B. die Strömung über einen Tragflügel bei Verkehrsflugzeugen ab einem bestimmten Punkt instabil und geht vom laminaren zum turbulenten Zustand über. Dieser Umschlagpunkt kann mit Hilfe von numerischen Simulationen gefunden werden. Oder die Ausbreitung von Viren in der Bevölkerung (z.B. Corona-Viren) folgt einem Exponentialgesetz als Lösung von Differentialgleichungen. Wenn der Exponent grösser als 1 ist, steigt die Anzahl der infizierten Personen exponentiell an, wenn er kleiner als 1 ist nimmt die Zahl exponentiell ab.

Andere Stabilitätsprobleme treten zum Beispiel beim harmonischen Oszillator auf, der sich sehr gut für die prinzipielle Untersuchung von Stabilitätsproblemen eignet. Im vorliegenden Projekt sollen die Bewegungsgleichungen eines harmonischen Oszillators numerisch gelöst werden. Wobei der Reibungsterm gegeben durch den Windwiderstand nichtlinear ist.

Wichtig bei der Modellierung ist, dass das Stabilitätsverhalten vom numerischen Verfahren richtig beschrieben wird.

### 1.3 Verständnisfragen

1. Was verstehen Sie unter einem konservativen numerischen Verfahren?
2. Das klassische Runge-Kutta-Verfahren ist "nahezu" konservativ. Was bedeutet das? Worauf müssen Sie achten, wenn Sie das Runge-Kutta-Verfahren für die Lösung von Stabilitätsproblemen einsetzen wollen.

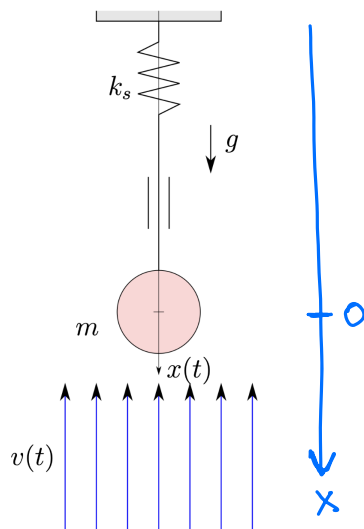
### 1.4 Aufgaben

Wir betrachten eine Kugel mit der Masse  $m$ , welche an einer Feder aufgehängt und von unten mit Luft angeströmt wird. Die Position der Kugel sei  $x(t)$  und seitlich reibungsfrei geführt. Die Luft hat die Geschwindigkeit  $v(t)$ . Diese kann eingestellt werden. Die Auftriebskraft von umströmten Objekten kann wie folgt modelliert werden:

$$F_a = \frac{1}{2} C_a \cdot \rho \cdot A \cdot v_{\text{rel}}^2 = k v_{\text{rel}}^2.$$

Diese Kraft ist abhängig von der Luftdichte  $\rho$ , von dem Auftriebsbeiwert  $C_a$ , von der Querschnittsfläche des Objekts  $A$ , und von der relativen Anströmgeschwindigkeit  $v_{\text{rel}}$ .

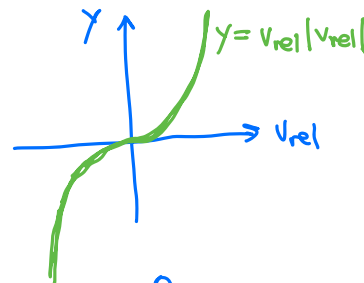
Für die Feder wird angenommen, dass sie eine lineare Charakteristik mit der Federsteifigkeit  $k_s$  hat und masselos ist. Die Ruhelage der Feder ist bei  $x = 0$ . Die Gleichgewichtsposition der Kugel wird mit  $w_e$  bezeichnet.



ohne Luftstrom:  $m\ddot{x} = mg - k_s x$  (lineare gDg/ 2. Ordnung)

$$\underline{x} = \begin{pmatrix} x \\ \dot{x} \end{pmatrix}, \quad \dot{\underline{x}} = \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \ddot{x} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{x} \\ g - \frac{k_s}{m} x \end{pmatrix}$$

mit Luftstrom:  $|F_a| = k v_{\text{rel}}^2, \quad v_{\text{rel}} = \dot{x} + v_0$



nichtlineare  
gDg/ 2. Ordnung  
 $\dot{\underline{x}} = f(t, \underline{x}) \in \mathbb{R}^2$   
(t tritt nicht auf)

Im Weiteren setzen wir voraus, dass die Luftgeschwindigkeit  $v(t) \equiv v_0$  konstant ist und die Parameter wie folgt gegeben sind:

$$\rho = 1.184 \text{ kg/m}^3, \quad C_a = 0.45, \quad R_{\text{Kugel}} = 0.1 \text{ m},$$

$$m = 0.05 \text{ kg}, \quad g = 9.81 \text{ m/s}^2, \quad k_s = 0.05 \text{ N/m},$$

wobei die Federkonstante bewusst sehr klein gewählt ist, um verschiedene Effekte gut zu sehen.

1. Modellieren Sie mit Hilfe einer Differentialgleichung zweiter Ordnung die Bewegung der Kugel. Berücksichtigen Sie dabei, dass  $F_a$  der Bewegung immer entgegen wirkt. In der Kräftebilanz muss daher  $F_a$  unter Berücksichtigung von  $\text{sign}(v_{\text{rel}})$  einfließen. Bilden Sie die Kräftebilanz mit

- Massenkraft  $F_m = m \ddot{x}(t)$
- Nichtlineare Reibungskraft  $F_a = k v_{\text{rel}}^2$ , mit  $v_{\text{rel}} = \dot{x}(t) + v_0$
- Federkraft  $F_k = k_s x(t)$
- Gravitationskraft  $F_g = m g$ .

Die Kugel befindet sich zum Zeitpunkt  $t = 0$  ruhend in der neutralen Position der Feder.

- Wie lautet das Anfangswertproblem mit Hilfe einer Differentialgleichung 2. Ordnung? *skalar*
- Wie lautet das Anfangswertproblem als System 1. Ordnung? *System*

2. Implementieren Sie das **klassische Runge-Kutta-Verfahren 4. Ordnung** für Differentialgleichungssysteme zur Lösung des Anfangswertproblems. *RK4* *aus dem Praktikum 9, für Systeme*

Validieren Sie Ihre Lösung mit Hilfe der folgenden Überlegungen:

1. Bestimmen Sie sich analytisch, gegen welche Auslenkung  $x(t)$  für  $t \rightarrow \infty$  konvergiert? (Gleichgewichtsposition  $w_e$ .) Diesen Wert können Sie später für die Validierung Ihrer numerischen Simulation zu Hilfe nehmen.

Hinweis: Wenn wir davon ausgehen, dass für  $t \rightarrow \infty$  eine stationäre Lösung folgt, so muss in dem Fall  $\lim_{t \rightarrow \infty} \dot{x}(t) = 0$  erfüllt sein. *nichtlineares Gleichungssystem  $f(x) = 0_2$  (analytisch lösbar)*

**Bemerkung:** Im Fall  $v(t) \equiv v_0$  konstant, nennt man die Differentialgleichung auch autonom. Es gilt  $f(t, x) = f(x)$ . In der Theorie ebener autonomer Systeme nennt man den Punkt  $w_0 = (x_0, x_1)^T$  so, dass  $f(w_0) = 0$  gilt, einen **Gleichgewichtspunkt**.

2. Wie gross muss die konstante Luftgeschwindigkeit sein, damit sich die Kugel nicht bewegt. Testen Sie den Fall.

Berechnen Sie numerisch mit Hilfe des Verfahrens für folgende Geschwindigkeiten

$$v_0 \in \left\{ 0, 4, \frac{\sqrt{k_s m}}{k}, 7, \sqrt{\frac{m g}{k}} \right\} [\text{m/s}]$$

die Lösungen und stellen Sie diese zusätzlich im Phasendiagramm  $(x(t), \dot{x}(t))$  dar. Wählen Sie für die Schrittweite  $h = 0.25$ . Sie sehen, dass wir unterschiedliche Lösungen von der Charakteristik erhalten.

3. Mit Hilfe der **Eigenwerte**  $\lambda_j$  der **Jacobimatrix**  $\partial_x f(t, x)$ , ausgewertet im **Gleichgewichtspunkt**  $w_0$  können wir diese charakterisieren und eine Aussage bezüglich der **Stabilität** der Lösung machen:

$$\text{Re}(\lambda_j) \begin{cases} < 0 & \text{für alle } j = 1, 2, \text{ so nennt man den Gleichgewichtspunkt stabil} \\ = 0 & \text{gilt zu dem geometrische Vielfachheit ist gleich der algebraischen, so nennt man den Gleichgewichtspunkt grenz stabil} \\ > 0 & \text{andern falls instabil.} \end{cases}$$

Die **Charakteristik** ist gegeben durch

$$\begin{aligned} \lambda_{1,2} \in \mathbb{C} & \quad \text{stabiler (Re}(\lambda_{1,2}) < 0) / \text{instabiler Strudel} \\ \lambda_1 < 0 < \lambda_2 & \quad \text{Sattelpunkt} \\ \lambda_1 = \lambda_2 \in \mathbb{R} & \quad \text{entarteter Knoten (stabil / instabil)} \\ \lambda_{1,2} \in \mathbb{R} & \quad \text{Knoten (stabil / instabil)} \end{aligned}$$

Charakterisieren Sie die verschiedenen Lösungen, indem Sie die Eigenwerte der Jacobimatrix in den Gleichgewichtspunkten analysieren.

4. Berechnen Sie die Lösungen aus 3. nun mit der **impliziten Mittelpunkregel**:

*(inexaktes) Newton-Verfahren*

$$\begin{aligned} r_1 &= f(t_k + h/2, x_k + h/2 \cdot r_1) \in \mathbb{R}^2 \\ x_{k+1} &= x_k + h r_1. \end{aligned}$$

$$\frac{1}{2} \mid \frac{1}{2} \\ \hline 1$$

*aus dem Praktikum 10, aber für Systeme*

*aus meiner Sicht optional*

Hierbei sind  $x_k, x_{k+1}$  Vektoren mit  $x_k = (x(t_k), \dot{x}(t_k))^T$ , und  $f$  ist eine vektorwertige Funktion. Da die erste Gleichung nur implizit gegeben ist, muss in jedem Zeitschritt ein Gleichungssystem gelöst werden. Stellen Sie wieder die Lösung zeitabhängig und im Phasendiagramm dar.

5. Vergleich der beiden Verfahren: Berechnen Sie für  $v_0 = 0, k = 0$  und  $k_s = 0.05$  N/m jeweils mit dem klassische Runge-Kutta-Verfahren 4. Ordnung und der impliziten Mittelpunkregel eine Lösung. Um den Effekt zu verstärken können Sie  $h = 0.8$  oder noch etwas grösser benutzen. Vergleichen Sie die beiden Lösungen, indem Sie die „Energie“

Lösungen  
aus 2. und 4.  
miteinander  
vergleichen

$$E(t) = \frac{1}{2} k_s \left( x(t) - \frac{m g}{k_s} \right)^2 + \frac{1}{2} m \dot{x}(t)^2$$

graphisch darstellen. Betrachten Sie ebenfalls die Lösungen in der **Phasenebene**, in dem Sie Punkte für die Darstellung benutzen. Welche Lösung ist physikalisch korrekt?

## 1.5 Abgabe

Bitte geben Sie Ihre Lösungen bis spätestens vor dem nächsten Praktikum ab.

### Downloads:

- PDF-Dokumentation:
  - Anleitung Praktikum 11