Praktikum 9: ERK-Verfahren

Praktikum 10: DIRK-Verfahren

Empfehlung: falls Sie am optionalen Praktikum 10 (zur Schrittweitensteuerung) interessiert sind, dann sollten Sie diese Woche schon <u>beide</u> Praktika 9 und 10 bearbeiten.

Praktikum 9

Christoph Kirsch

09.04.2024

Inhaltsverzeichnis

1 Explizite mehrstufige Runge-Kutta-Verfahren

1.1 Lernziele

- Sie implementieren einige explizite mehrstufige Runge-Kutta-Verfahren auf einem Rechner, unter Verwendung der Programmstruktur aus dem Praktikum 8.
- Sie testen Ihre Programme an einfachen Modellproblemen und wenden sie schliesslich auf ein komplexeres Problem an, um die numerischen Lösungen zu vergleichen.

1.2 Theorie

In diesem Praktikum betrachten wir explizite s-stufige Runge-Kutta-Verfahren

$$\begin{array}{c|c} \boldsymbol{c} & \boldsymbol{A} \\ \hline & \boldsymbol{b}^\top \end{array} = \begin{array}{c|ccccc} c_1 & & & 0 & & \\ c_2 & a_{21} & & & & \\ c_3 & a_{31} & a_{32} & & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & & \\ c_s & a_{s1} & a_{s2} & \cdots & a_{s,s-1} & \\ \hline & b_1 & b_2 & \cdots & b_{s-1} & b_s \end{array} \quad (1)$$

$\frac{(s-1)s}{2} + 2s$ Parameter

Konvergenzordnung $p \le s$

($p = s$ ist nur für $p \le 4$ möglich)

Bemerkung: Bei expliziten Verfahren ist es üblich, die Nulleinträge auf der Hauptdiagonale und auf den oberen Nebendiagonalen der Matrix $\boldsymbol{A}$ des Butcher-Tableaus nicht aufzuschreiben.

$$k_j = f\left(x_{i-1} + c_j h,\ y_{i-1} + h \sum_{\ell=1}^{j-1} a_{j\ell} k_\ell\right)$$

rechts stehen nur $k_1, k_2, \dots, k_{j-1}$

$\rightarrow$ explizite sequenzielle Berechnung aller Steigungen

$k_1 = \dots$
$k_2 = \dots$
$\vdots$
$k_s = \dots$
$y_i = \dots$

1.3 Aufträge

1. Schreiben Sie die Verfahren (1) in Standardform auf (s. auch Übungsblatt 9).

2. ($s = 2$) Schreiben Sie ein Programm zur Lösung eines AWPs mit den Verfahren

$$\text{Runge} \quad \begin{array}{c|cc} 0 & & \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \\ \hline & 0 & 1 \end{array} \qquad \text{Heun} \quad \begin{array}{c|cc} 0 & & \\ 1 & 1 & \\ \hline & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array}$$

   Verwenden Sie dafür dieselbe Programmstruktur wie für das Euler-vorwärts-Verfahren im Praktikum 8, wobei Sie einfach noch eine zweite Steigung berechnen.

3. Testen Sie Ihre Programme aus 2. anhand des Modellproblems $y' = -4y$, $y(0) = 1$, mit Endstelle $X = 1$ und $N = 10$ Schritten. Vergleichen Sie die Werte y_i der numerischen Lösung mit den Werten der exakten Lösung, $y(x_i)$, $i \in \{0, 1, \dots, 10\}$. Konvergenzordnung sollte $p=2$ sein

4. ($s = 4$) Schreiben Sie ein Programm zur Lösung eines AWPs mit dem klassischen vierstufigen Runge-Kutta-Verfahren (RK4):

$$\begin{array}{c|cccc} 0 & & & & \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & & & \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & & \\ 1 & 0 & 0 & 1 & \\ \hline & \frac{1}{6} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{6} \end{array}$$

   Verwenden Sie dieselbe Programmstruktur wie in 2., wobei Sie einfach noch zwei weitere Steigungen berechnen.

5. Testen Sie Ihr Programm wie in 3. Konvergenzordnung sollte $p=4$ sein

6. Lösen Sie mit Ihren Programmen aus 2. und 4. das Anfangswertproblem

$$y' + \frac{x^2}{y} = 0, \quad y(0) = -4.$$

   Berechnen Sie für $X = 2$ und $N = 3^j$, $j \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$, jeweils die absoluten Fehler an der Endstelle ($y(2) = -4\sqrt{\frac{2}{3}}$).

7. (optional) Der Rechenaufwand für ein explizites s-stufiges Runge-Kutta-Verfahren mit $N \in \mathbb{N}$ Schritten ist einfach sN (Anzahl der Auswertungen der rechten Seite f der gDgl). Ein explizites RK-Verfahren mit $s > 1$ Stufen ist also s-mal aufwändiger als das einstufige Euler-vorwärts-Verfahren aus dem Praktikum 8. Der globale Fehler nimmt aber für grössere s viel schneller ab mit N als der Aufwand zunimmt, weshalb mehrstufige RK-Verfahren zumindest für grosse Probleme (wo die Auswertung von f teuer ist) sehr lohnenswert sind.

   Überzeugen Sie sich davon, indem Sie für das einstufige Euler-vorwärts-Verfahren aus dem Praktikum 8 und für die drei in diesem Praktikum implementierten mehrstufigen RK-Verfahren ein sog. *Genauigkeits-Aufwand-Diagramm* für das AWP aus 6. erstellen, d. h. den globalen Fehler ("Genauigkeit") gegen den Rechenaufwand in einer doppelt logarithmischen Darstellung aufzeichnen.

   Bemerkung: Die "Genauigkeits"-Achse wird in diesen Diagrammen üblicherweise invertiert, weil ein kleinerer globaler Fehler eine grössere Genauigkeit bedeutet.

wie auf S. 59 in den Vorlesungsnotizen

Rechenaufwand $\propto$ #Auswertungen von f

1.4 Abgabe

Bitte geben Sie Ihre Lösungen bis spätestens vor dem nächsten Praktikum ab.

Downloads:

- PDF-Dokumentation:
  - `Anleitung Praktikum 9`