**Projekt 8**

**Simulation eines Transformators**

Zürcher Hochschule für angewandte Wissenschaften

A diagram of a square with a yellow square and red lines

Description automatically generated

Abbildung 1: Schematische Darstellung des Transformators.

Eingereicht bei:

Dr. Kirsch Christoph

Eingereicht von:

Romann Raphael; Hollenstein Jonathan; Brunner Ivo

Studiengang:

Bachelor of Science Systemtechnik (B.Sc.)

Klasse: ST22a

Winterthur, den 13.05.2024

# Einleitung

Beschreibung Im Primärkreis des Transformators ist die Spannungsquelle *U*ext an die *n*1 Primärwindungen des Transformators angeschlossen. Der gesamte Ohmsche Widerstand des Primärkreises ist im Widerstand *R*1 zusammengefasst. An die *n*2 Sekundärwindungen des Transformators ist der Verbraucherwiderstand *R*2 angeschlossen. Die Spulen des Primär- und des Sekundärkreises sind über einen Weicheisenkern verbunden.

Seien *L*p und *L*s die Selbstinduktivitäten der Primär- bzw. der Sekundrspule und *L*ps bzw. *L*sp die Induktivitäten der Sekundär- auf die Primärspule und umgekehrt (Gegeninduktivitäten).

Wir gehen bei *U*ext = *U*0 sin(*ωt*) von einer Wechselspannung mit der Amplitude *U*0 = 4 V und der Kreisfrequenz *ω* = 2*π f* aus. Zur Simulation des Transformators berechnen wir die beiden Stromstärken *I*p(*t*) und *I*s(*t*) [A] des Primär- und den Sekundärstromkreises. Dabei verwenden wir folgende Parameter:

*f* = 105 Hz, *R*1 = 800 Ω, *L*p = 50 *µ*H, *L*ps = *L*sp = 150 *µ*H, *R*2 = 6 Ω, *L*s = 500 *µ*H.

Die Anfangsbedingungen sind *I*s (0) = *I*p (0) = 0.

# Aufgaben

## Aufgabe 1

Stellen Sie die beiden Differenzialgleichungen für den Primär- und den Sekundärstromkreis auf.

### Ergebnisse Aufgabe 1

Durch die physikalischen Zusammenhänge können die folgenden Differenzialgleichungen hergeleitet werden:

Durch Umstellen nach dem Primärstrom ergibt sich:

Sowie für den Sekundärstrom:

## Aufgabe 2

Formen Sie die Gleichungen aus Aufgabe 1 so um, dass Sie ein Differenzialgleichungssystem erster Ordnung erhalten.

### Ergebnisse Aufgabe 2

Durch gegenseitiges Einsetzen entsteht das Gleichungssystem:

Aufgelöst nach der Höchsten Ableitung ergibt sich die vektorwertige Funktion *f*:

## Aufgabe 3

Lösen Sie das Differenzialgleichungssystem aus Aufgabe 2 für *t* ∈ [0, 50] [*µ*s] mit dem expliziten Euler-Verfahren (Euler-vorwärts-Verfahren). Ermitteln Sie experimentell die Stabilitätsgrenze für die Schrittweite τ.

### Ergebnisse Aufgabe 3

Durch sukzessives Erhöhen der Schrittweite h konnte die Stabilitätsgrenze experimentell ermittelt werden ergeben. Angefangen haben wir bei *h* = 0.1*µ*s.

Stabilitätsgrenze für *I*1: *h* = 0.00000012530 *µ*s

Stabilitätsgrenze für *I*2: *h* = 0.00000012630 *µ*s

Diese Grenzen stellen die maximalen Schrittweiten dar, bei denen das explizite Euler-Verfahren stabile und zuverlässige Ergebnisse liefert, ohne numerisch zu divergieren. Es hat sich herausgestellt das die Grenze für *I*2 ein wenig höher ist als die von *I*1. In Abbildung 2 ist das Resultat des Euler-vorwärts-Verfahren mit einer Schrittweite von h = 10 ns geplottet.

Ein Bild, das Text, Reihe, Diagramm, Schrift enthält.

Automatisch generierte BeschreibungEin Bild, das Text, Reihe, Diagramm, Schrift enthält.

Automatisch generierte Beschreibung

Abbildung 2: Explizites Euler-Verfahren für *I*1 und *I*2

## Aufgabe 4

Lösen Sie das Differenzialgleichungssystem aus Aufgabe 2 im gleichen Zeitintervall mit dem impliziten Euler-Verfahren (Euler-rückwärts-Verfahren).

### Ergebnisse Aufgabe 4

Das Differentialgleichungssystem wurde im gleichen Zeitintervall mit dem impliziten Euler-Verfahren gelöst. Hierfür wird die Jacobi-Matrix *Df* aus der vektorwertigen Funktion *f* berechnet:

Die Anwendung des impliziten Euler-Verfahrens (Abbildung 3) ermöglicht eine robustere numerische Lösung des Systems im Vergleich zum expliziten Verfahren, da es weniger von der Schrittweite τ abhängt und ein stabileres Ergebnis liefert.

Ein Bild, das Text, Reihe, Diagramm, Schrift enthält.

Automatisch generierte BeschreibungEin Bild, das Text, Reihe, Diagramm, Schrift enthält.

Automatisch generierte Beschreibung

Abbildung 3: Implizites Euler-Verfahren für *I*1 und *I*2

Werden die Resultate der beiden verfahren verglichen, kann man in unserem Fall keinen merklichen unterschied erkennen wie Abbildung 4 zeigt.

Ein Bild, das Reihe, Text, Diagramm enthält.

Automatisch generierte Beschreibung

Abbildung 4: Vergleich explizites und implizites Euler-Verfahren für *I*1

## Aufgabe 5

Implementieren Sie die implizite Trapezregel und lösen Sie das Differenzialgleichungssystem aus Aufgabe 2 im gleichen Zeitintervall wie in Aufgabe 3. Vergleichen Sie die numerische Lösung mit derjenigen des impliziten Euler-Verfahrens hinsichtlich Genauigkeit, Rechenaufwand und Konvergenz.

### Ergebnisse Aufgabe 5

Bei der Implementierung der impliziten Trapezregel und dem Vergleich mit dem impliziten Euler-Verfahren wurde die Genauigkeit, der Rechenaufwand und die Konvergenz beider Methoden analysiert. Abbildung 5 zeigt die Lösung der impliziten Trapezregel.

Ein Bild, das Text, Reihe, Diagramm, Schrift enthält.

Automatisch generierte BeschreibungEin Bild, das Text, Reihe, Diagramm, parallel enthält.

Automatisch generierte Beschreibung

Abbildung 5: Implizite Trapezregel für *I*1 und *I*2

Auch hier ist im Vergleich zwischen dem implizites Euler-Verfahren und der implizite Trapezregel kein wesentlicher Unterschied zu erkennen, wenn man die beiden Resultate übereinander plottet, wie Abbildung 6 zeigt.

Ein Bild, das Reihe, Text, Diagramm enthält.

Automatisch generierte Beschreibung

Abbildung 6: Vergleich implizites Euler-Verfahren und implizite Trapezregel

Die implizite Trapezregel benötigte mehr Rechenaufwand aufgrund der aufwendigeren Berechnungen im Vergleich zum impliziten Euler-Verfahren wie in Abbildung 7 dargestellt.

Ein Bild, das Text, Diagramm, Reihe, Zahl enthält.

Automatisch generierte Beschreibung

Abbildung 7: Vergleich des Rechenaufwandes

Im Folgenden werden unsere implementierten Verfahren auf Ihre Genauigkeit überprüft. Dazu haben wir das Gleichungssystem mit scipy berechnet und dargestellt. in Abbildung 8 ist diese Lösung ersichtlich.

Ein Bild, das Text, Reihe, Diagramm, Schrift enthält.

Automatisch generierte Beschreibung

Abbildung 8: Vergleichslösung von scipy

Insgesamt bietet die implizite Trapezregel eine verbesserte numerische Lösung für das Differentialgleichungssystem des Transformators. Abbildung 9 zeigt, je mehr Schritte beim Eulerverfahren für die Berechnung gewählt werden, desto kleiner werden die Schrittweiten und somit werden die Resultate sehr schnell genauer. Bei der Impliziten Trapezregel sieht man, dass das Verfahren sehr schnell eine hohe Genauigkeit erzielt.

Ein Bild, das Text, Reihe, Diagramm, Zahl enthält.

Automatisch generierte Beschreibung

Abbildung 9: Vergleich Genauigkeit