第三讲：完全信息静态博弈

兴军亮

Junliang.Xing@ia.ac.cn

2020年10月8日

中国科学院大学
University of Chinese of Academy of Sciences

自动化研究所
CASIA
Institute of Automation

本讲提纲

- 基本概念和表示
- 均衡分析和求解
- 均衡存在性讨论
- 其他相关的问题

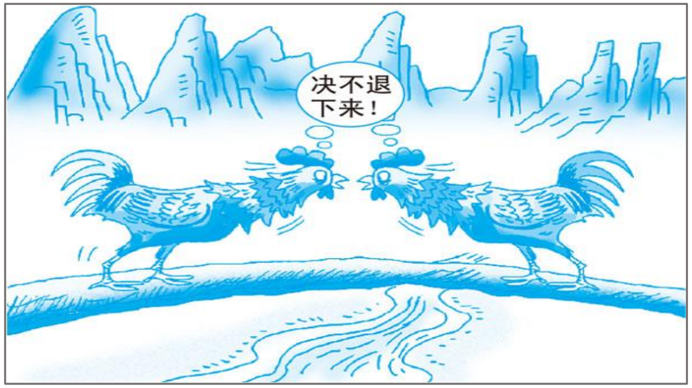
完全信息静态博弈

- 非合作（竞争）条件下的一种基本博弈类型：博弈各参与方了解博弈的相关信息，但互相不知道对方的行动

囚徒困境

警察小偷

智猪博弈



斗鸡博弈

什么是博弈中的信息？

- 信息（Information）：是博弈参与人有关博弈的知识，特别是有关自然的选择、其他人的类型特征、行动、偏好等知识，最终体现在有关博弈的支付函数的知识。
- 信息集（Information Set）：描述博弈参与人信息特征的基本概念，形式上可以将其理解为博弈参与人在特定时刻对博弈相关变量值的知识。
- 完美信息：参与人对其他参与人（包括虚拟参与人）的行动信息有准确的了解，即每个信息集只有一个节点。
- 完全信息：参与人对博弈的支付函数信息有准确的了解。
- 对称信息（Symmetric Information）：博弈的各方参与人对于博弈的相关知识在内容、时间等方面具有完全相同的掌握。

什么是博弈中的信息？

- 共同知识（Common Knowledge）：对于某个事实，如果每个参与者知道该事实，并且每个参与者知道每个参与者知道该事实，如此循环下去，那么该事实就是所有参与者通享的共同知识。
- 相互知识（Mutual Knowledge）：对于某个事实，如果每个参与者知道该事实，但并不要求“每个参与者知道每个参与者知道……每个参与人知道它”，那么该事实就是所有参与者的相互知识。
- 在博弈中，大多数分析需要共同知识这个假设；个别分析仅需要相互知识就足够了。
- 参与者的私有信息（Private Information）是指其拥有的信息，不属于共同知识或者相互知识。

完全信息静态博弈问题定义

- 完全信息静态博弈：博弈过程中参与人预先知道关于博弈的所有信息，但是需要同时行动或者预先不知晓对方行动的博弈。
- 完全信息静态博弈的三要素
  - 局中人：是博弈的行为主体，可能是自然人，也可能是企业、团体、群体，甚至可以是虚拟的参与人、无形的自然。有时候为了分析方便，参与人每个可能信息状态都可以看到代理人。
  - 策略空间：参与人i可选择的行动策略集合记为S_i，则每一个选择的策略$s_i \in S_i$，$s = (s_i, \dots, s_n)$称为n个参与人的策略组合（strategy profile），所有参与人的策略集S的组合就构成了博弈的策略空间$S = \times_{1 \le i \le n} S_i$。
  - 效用函数：或者称为收益函数，或者相反地称为支付函数等，是博弈的局中人最关心的。

完全信息静态博弈的策略式表示

- 完全信息静态博弈是最为简单的一种博弈类型，通常使用策略式（Extensive form）博弈表示，也称为标准式（Normal form）表示，需要同时表示出完全信息静态博弈的三要素：
  - 博弈的参与人集合：$i \in N, N = \{1, 2, \dots, n\}$
  - 每个参与人的策略空间：$S_i, i = 1, 2, \dots, n$；$-i$表示除i外的其他参与人
  - 每个参与人的效用函数：$u_i(s_1, \dots, s_i, \dots, s_n)$
- 上述表示用于离散策略空间的完全信息静态博弈表示。一般地，完全信息静态博弈可以形式化如下形式：

$$\Gamma = \langle N,\ \{S_i\}_{i=1}^{n}, \{\mu_i(s_1, \dots, s_n)\}\rangle$$

其中：S_i可以是受某些因素影响的连续函数，$u_i(s_1, \dots, s_i, \dots, s_n)$ 也可以是定义在连续空间上的函数。

完全信息静态博弈的策略式表示

- 策略式表示是最初用于表示表示博弈的方法，也是其被称为标准式表示的原因。
- 策略式表示背后的思想：参与人的决策问题本质上是选择一个策略能够有效地反击其他参与人选择的策略。这样的策略称为：最优反应策略（Best Response Strategy）

最优反应策略（Best Response Strategy）

给定策略式博弈$\Gamma = \langle N, \{S_i\}_{i=1}^{n}, \{\mu_i(s_1, \dots, s_n)\}\rangle$和策略组合$s_{-i} \in S_{-i}$，对于参与人$i$的策略$s_i \in S_i$，如果$u_i(s_i, s_{-i}) \geq u_i(s_i', s_{-i})$对所有$s_i' \in S_i$成立，那么我们说策略$s_i$是参与人$i$对$s_{-i}$的一个最优反应策略。

完全信息静态博弈的策略式表示

- 策略式表示背后的含义

策略式表示的第一种解释

策略式博弈模拟的是只发生一次的事件。每个参与人知道博弈的所有细节，并且知道每个参与人都是理性的。所有参与人同时且独立地选择自己的策略。每个参与人都不知道其他参与人做出的策略选择。（完全信息静态博弈）

策略式表示的第二种解释

策略式博弈可以多次进行，但模拟的是参与人彼此之间行动不存在策略联系（strategic link）的情况下，参与人是如何先后行动的。不存在策略联系是指参与人只关注自己的瞬时收益，不考虑当前行动对其它参与人未来行为的影响。（考虑策略联系：重复博弈/动态博弈，需要其他形式的表示方式（扩展式）。）

完全信息静态博弈的策略式表示

- 策略式表示可以同时表示有限博弈和无限博弈
- 有限博弈：博弈的参与人是有限的，每个参与人的可选策略个数也是有限的。两人有限博弈的策略式表示可以使用矩阵来直观地表示，此时的表示也叫做矩阵式表示。
  - 矩阵采用列优先方式，用列表示第一个参与人，用行表示第二个参与人。
  - 行和列的具体条目分别表示第一个和第二个参与人的具体策略。
  - 矩阵的每个元素为一个二元组，分别表示第一个和第二个参与人的效益函数。

参与人2 / 参与人1	$s_{2,1}$	$\cdots$	$s_{2,n_{s_2}}$
$s_{1,1}$	$u_1(s_{1,1}, s_{2,1})$ $u_2(s_{1,1}, s_{2,1})$	$\cdots$	$u_1(s_{1,1}, s_{2,n_{s_2}})$ $u_2(s_{1,1}, s_{2,n_{s_2}})$
$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$
$s_{1,n_{s_1}}$	$u_1(s_{1,n_{s_1}}, s_{2,1})$ $u_2(s_{1,n_{s_1}}, s_{2,1})$	$\cdots$	$u_1(s_{1,n_{s_1}}, s_{2,n_{s_2}})$ $u_2(s_{1,n_{s_1}}, s_{2,n_{s_2}})$

- 无限博弈：博弈的参与人个数无限或策略个数无限，其策略式表示只需要将三要素使用具体表示式给出即可。

有限博弈的策略式表示举例

- 课程经常使用到的有限博弈策略式表示

囚徒困境

囚徒A \ 囚徒B	坦白	抵赖
坦白	-5, -5	0, -10
抵赖	-10, 0	-1, -1

智猪博弈

大猪 \ 小猪	行动	不动
行动	5, 1	4, 4
不动	9, -1	0, 0

斗鸡博弈

鸡A \ 鸡B	进攻	后退
进攻	-3, -3	2, -1
后退	-1, 2	-1, -1

集资修路

村民A \ 村民B	出资	不出资
出资	3, 3	2, 4
不出资	4, 2	1, 1

市场进入阻挠

进入者 \ 在位者	默许	斗争
进入	5, 1	4, 4
不进入	9, -1	0, 0

警察小偷

警察 \ 小偷	A区	B区
A区	3, 0	2, 1
B区	1, 2	3, 0

大家尝试说一下每个博弈中的参与者、策略空间、效用函数。

有限博弈的策略式表示举例

- 其他一些常见有限博弈的策略式表示

性别大战

男 \ 女	足球	芭蕾
足球	2, 1	0, 0
芭蕾	0, 0	1, 2

房地产开发博弈

市场需求大

开发商A \ 开发商B	开发	不开发
开发	4, 4	8, 0
不开发	0, 8	0, 0

市场需求小

开发商A \ 开发商B	开发	不开发
开发	-3, -3	1, 0
不开发	0, 1	0, 0

配对博弈

甲方 \ 乙方	正面	反面
正面	1, -1	-1, 1
反面	-1, 1	1, -1

石头剪刀布

红方 \ 蓝方	石头	剪刀	布
石头	0, 0	1, -1	-1, 1
剪刀	-1, 1	0, 0	1, -1
布	1, -1	-1, 1	0, 0

选择博弈

红方 \ 蓝方	L	C	R
U	0, 4	4, 0	5, 3
M	4, 0	0, 4	5, 3
D	3, 5	3, 5	6, 6

无限博弈的策略式表示举例

- 公地悲剧（tragedy of the commons）：一个牧场有n个牧民，即为集合$N=\{1,2,\cdots,n\}$，每个牧民可以养羊（一只）或者不养。
  - 令1表示养一只羊，0表示不养羊，策略集为：$S_1=S_2=\cdots=S_n=\{0,1\}$，每个牧民的策略$s_i\in S_i=\{0,1\}$。
  - 养一只羊的效用（来自于羊奶、羊毛等）为1单位。该牧场的草地有限，当牧民放牧一只羊时，羊对环境的破坏等于5单位，这个代价由所有牧民均摊，那么牧民i的效用为：

$$u_i(s_1,\cdots,s_n)=s_i-\left[\frac{5(s_1+\cdots+s_n)}{n}\right]$$

- 博弈结果：若n>5，每个牧民养羊比不养效用高；若n<5，每个牧民养羊比不养效用底；若n=5，养不养无所谓。
- 两个牧民的情况如右图：
- 如何解决共地悲剧问题？

牧民1 \ 牧民2	不养	养
不养	0, 0	-2.5, -1.5
养	-1.5, -2.5	-4, -4

无限博弈的策略式表示举例

- 双寡头定价博弈：有两个公司1和2，生产一种同质产品。它们试图使自己的利润最大。需求$x(p)$是关于价格的一个连续且严格递减的函数，每单位产品生产成本为c。两公司同时独立选择各自售价p_1和p_2，每个公司销量为：

$$x_1(p_1,p_2)=\begin{cases} x(p_1) & 若 p_1<p_2 \\ \dfrac{x(p_1)}{2} & 若 p_1=p_2 \\ 0 & 若 p_1>p_2 \end{cases} \qquad x_2(p_1,p_2)=\begin{cases} x(p_2) & 若 p_2<p_1 \\ \dfrac{x(p_2)}{2} & 若 p_2=p_1 \\ 0 & 若 p_2>p_1 \end{cases}$$

假设企业仅在产量等于销量时才产生成本。则这个博弈表示为：$N=\{1,2\}$，$S_1=S_2=[0,\infty)$，两个企业的效用函数分别为：

$$u_1(p_1,p_2)=(p_1-c)x_1(p_1,p_2) \qquad u_2(p_1,p_2)=(p_2-c)x_2(p_1,p_2)$$

这个博弈的策略集是无限的，因而是一个无限博弈。

均衡分析和求解的目标和思路

- 均衡分析和求解的目标：获取博弈的稳定结果（均衡）。
- 完全信息静态博弈是最简单的一种博弈，博弈参与者在充分了解博弈的相关信息之后，只要进行一次行动选择就可以形成自己的策略。
- 如何分析完全信息静态博弈的均衡解?
  - 尝试找到每个参与人的“优”策略;
  - 去掉每个参与人的“劣”策略;
  - 不断重复尝试搜索这样的策略或者评估每个候选策略;
  - 当所有参与人的最优响应策略集中在一起，就找到了博弈的稳定解。

优策略和劣策略

- 优策略：博弈参与者的策略一般依赖于其他参与者的策略。在特定情况下，如果参与者的最优策略不依赖于其他参与者的策略选择，即不管其他参与者选择任何策略，参与者的某个策略都是最优的，这样的最优策略称为优策略。
- 劣策略：类似地，如果博弈参与者某个策略不依赖于其他参与者的策略选择都是比另一个策略差，这样的差策略称为劣策略。
- 根据优劣强度的不同，可以将优劣策略分成不同的等级：
  - 强优（劣）势策略：Strongly Dominated Strategy
  - 弱优（劣）势策略： Weakly Dominated Strategy
  - 极弱优（劣）势策略： Very Weakly Dominated Strategy

强劣/优势策略定义

强劣势策略（Strongly Dominated Strategy）：

给定策略式博弈$\Gamma = \langle N, \{S_i\}_{i=1}^{n}, \{\mu_i(s_1, \dots, s_n)\}\rangle$及参与人$i$的两个不同策略$s_i \in S_i$和$s_i' \in S_i$，$s_{-i} = (s_1, \dots, s_{i-1}, s_{i+1}, \dots, s_n)$，若：

$$\mu_i(s_i', s_{-i}) > \mu_i(s_i, s_{-i}),\ \forall s_{-i} \in S_{-i},$$

则相对于策略s_i'来说s_i是**强劣势**的，也可以说：s_i强劣于s_i'，或者s_i'强优于s_i。

强优势策略（Strongly Dominate Strategy）：

给定策略式博弈$\Gamma = \langle N, \{S_i\}_{i=1}^{n}, \{\mu_i(s_1, \dots, s_n)\}\rangle$及参与人$i$的策略$s_i^* \in S_i$，若$s_i^*$强优于此人任何其他策略，即$\forall s_i \in S_i \wedge s_i \neq s_i^*$：

$$\mu_i(s_i^*, s_{-i}) > \mu_i(s_i, s_{-i}),\ \forall s_{-i} \in S_{-i},$$

则称s_i^*是参与人i的**强优势策略**。

理性参与人肯定会选择强优势策略、排除强劣势策略。

强劣/优势策略举例

- 因徒困境：$N=\{1,2\}$，$S_1=S_2=\{坦白，抵赖\}$，收益矩阵如右图。

囚徒A \ 囚徒B	坦白	抵赖
坦白	-5, -5	0, -10
抵赖	-10, 0	-1, -1

- 对于囚徒A，策略抵赖强劣于坦白，因为：

$$u_1(坦白，抵赖) > u_1(抵赖，抵赖)$$
$$u_1(坦白，坦白) > u_1(抵赖，坦白)$$

- 对于囚徒B，策略抵赖强劣于坦白，因为：

$$u_2(抵赖，坦白) > u_2(抵赖，抵赖)$$
$$u_2(坦白，坦白) > u_2(坦白，抵赖)$$

- 所以对于囚徒A和B，抵赖都是强劣势策略，坦白都是强优势策略。
- 理性的囚徒肯定会选择强优势策略，不考虑强劣势策略

弱劣/优势策略定义

弱劣势策略（Weakly Dominated Strategy）：

给定策略式博弈$\Gamma = \langle N, \{S_i\}_{i=1}^n, \{\mu_i(s_1, \dots, s_n)\}\rangle$及参与人$i$的两个不同策略$s_i \in S_i$和$s_i' \in S_i$，$s_{-i} = (s_1, \dots, s_{i-1}, s_{i+1}, \dots, s_n)$，若：

$\mu_i(s_i', s_{-i}) \geq \mu_i(s_i, s_{-i})$，对于所有的$s_{-i} \in S_{-i}$，

且 $\mu_i(s_i', s_{-i}) > \mu_i(s_i, s_{-i})$，对于某个$s_{-i} \in S_{-i}$，

则相对于策略s_i'来说s_i是**弱劣势**的，也可以说：s_i弱劣于s_i'，或者s_i'弱优于s_i。

弱优势策略（Weakly Dominate Strategy）：

给定策略式博弈$\Gamma = \langle N, \{S_i\}_{i=1}^n, \{\mu_i(s_1, \dots, s_n)\}\rangle$及参与人$i$的策略$s_i^* \in S_i$，若$s_i^*$弱优于此人任何其他策略，则称$s_i^*$是参会人$i$的**弱优势策略**。

弱劣/优势策略举例

- 修改后囚徒困境：$N=\{1,2\}$，$S_1=S_2=\{$坦白，抵赖$\}$，收益矩阵如右图。

囚徒B / 囚徒A	坦白	抵赖
坦白	-5, -5	-1, -10
抵赖	-10, -1	-1, -1

- 对于囚徒A，策略抵赖弱劣于坦白，因为：

  u_1(坦白，抵赖) ≥ u_1(抵赖

  u_1(坦白，坦白) > u_1(抵赖

- 对于囚徒B，策略抵赖弱劣于坦白，因为：

  u_2(抵赖，坦白) ≥ u_2(抵赖，抵赖)

  u_2(坦白，坦白) > u_2(坦白，抵赖)

- 所以对于囚徒A和B，抵赖都是弱劣势策略，坦白都是弱优势策略。
- 理性的囚徒还是会选择弱优势策略，不考虑弱劣势策略

极弱劣/优势策略定义

极弱劣势策略（Very Weakly Dominated Strategy）：

给定策略式博弈$\Gamma = \langle N, \{S_i\}_{i=1}^n, \{\mu_i(s_1, \dots, s_n)\}\rangle$及参与人$i$的两个不同策略$s_i \in S_i$和$s_i' \in S_i$，$s_{-i} = (s_1, \dots, s_{i-1}, s_{i+1}, \dots, s_n)$，若：

$$\mu_i(s_i', s_{-i}) \geq \mu_i(s_i, s_{-i}),\ \forall s_{-i} \in S_{-i},$$

则相对于策略s_i'来说s_i是**极弱劣势**的，也可以说：s_i极弱劣于s_i'，或者s_i'极弱优于s_i。

极弱优势策略（Very Weakly Dominate Strategy）：

给定策略式博弈$\Gamma = \langle N, \{S_i\}_{i=1}^n, \{\mu_i(s_1, \dots, s_n)\}\rangle$及参与人$i$的策略$s_i^* \in S_i$，若$s_i^*$极弱优于此人任何其他策略，则称$s_i^*$是参会人$i$的**极弱优势策略**。

极弱劣/优势策略举例

- 再修改囚徒困境：$N = \{1,2\}$，$S_1 = S_2 = \{$坦白，抵赖$\}$，收益矩阵如右图。
- 对于囚徒A，由于有：

  u_1(坦白，抵赖) $\geq u_1$(抵赖

  u_1(坦白，坦白) $\geq u_1$(抵赖

  并且：

  u_1(抵赖，抵赖) $\geq u_1$(坦白，抵赖)

  u_1(抵赖，坦白) $\geq u_1$(坦白，坦白)

囚徒B / 囚徒A	坦白	抵赖
坦白	-5, -10	-1, -10
抵赖	-5, -1	-1, -1

- 对于囚徒B类似。
- 所以对于囚徒A和B，坦白和抵赖都是极弱优势策略。
- 理性的囚徒这时候会怎么选？

占优策略均衡定义

- 当每个参与人都存在三种不同强度的优势策略时，其相关的优势策略组合均可构成相应的优势策略均衡，即强优势策略均衡、弱优势策略均衡和极弱优势策略均衡。
- 一个策略式博弈只有存在强优势策略时，该博弈的均衡解才唯一确定，这个时候均衡被称为占优策略均衡。

占优策略均衡（Dominate-Strategy Equilibrium）：

给定策略式博弈$\Gamma = \langle N, \{S_i\}_{i=1}^n, \{\mu_i(s_1, \dots, s_n)\}\rangle$，如果对于每个参与人$i$，$s_i^* \in S_i$都是$i$的强优势策略，即：

$$\mu_i(s_i^*, s_{-i}) > \mu_i(s_i, s_{-i}), \qquad \forall s_{-i} \in S_{-i}, \forall s_i \in S_i \land s_i \neq s_i^*$$

那么策略组合$s^* = (s_1^*, \cdots, s_n^*)$称为该博弈的**占优策略均衡**。

占优策略均衡举例

- 囚徒博弈
  - 囚徒A占优策略：坦白
  - 囚徒B占优策略：坦白
  - 占优均衡：（坦白，坦白）

囚徒A \ 囚徒B	坦白	抵赖
坦白	-5, -5	0, -10
抵赖	-10, 0	-1, -1

- 买家市场房地产开发博弈
  - 开发商A占优策略：开发
  - 开发商B占优策略：开发
  - 占优均衡：（开发，开发）

开发商A \ 开发商B	开发	不开发
开发	4, 4	8, 0
不开发	0, 8	0, 0

- 达到占优均衡的条件
  - 只要求每个参与人是理性的即可
  - 不要求参与人知道其他人是理性的

重复剔除的占优策略均衡

- 对于更多的策略式博弈，并不是每个参与人都存在强优势策略。对于部分参与人存在强优势策略的博弈，能否尝试求取其占优均衡策略呢？

大猪 \ 小猪	行动	不动
行动	5, 1	4, 4
不动	9, -1	0, 0

- 智猪博弈回顾
  - 对于小猪：存在优策略“不动”
  - 对于大猪：不存在优策略
  - 如何求取这个博弈的均衡?

大猪 \ 小猪	~~行动~~	不动
行动	~~5, 1~~	4, 4
~~不动~~	~~9, -1~~	~~0, 0~~

- 一种直观的思路
  - 首先找到某个参与人劣策略
  - 剔除这个劣策略得到新博弈
  - 对新博弈继续重复上述过程

重复剔除劣策略

重复剔除的占优策略均衡定义

- 在一个策略式博弈中，如果策略组合$s^* = (s_1^*, \ldots, s_n^*)$是重复剔除强劣势策略后剩下的唯一策略组合，那么就称该策略组合为该博弈的重复剔除的占优策略均衡。
- 对于一个策略式博弈，如果它存在唯一的重复剔除的占优均衡，那么就称该博弈是重复剔除占优可解的（dominance solvable）。
- 示例：

红方 \ 蓝方	L	M	R
U	1, 0	1, 2	0, 1
D	0, 3	0, 1	2, 0

⇨

红方 \ 蓝方	L	M
U	1, 0	1, 2
D	0, 3	0, 1

⇗

红方 \ 蓝方	L	M
U	1, 0	1, 2

⇩

红方 \ 蓝方	M
U	1, 2

重复剔除的占优策略均衡举例

- 给出右图策略式博弈的重复剔除的占优策略均衡
- 剔除方法1：按照R3-C3-C2-R2进行，（R1, C1）是剩下的策略组合；
- 剔除方法2：按照C2-R2-C1-R3进行，（R1, C3）是剩下的策略组合；

蓝方 / 红方	C1	C2	C3
R1	2, 12	1, 10	1, 12
R2	0, 12	0, 10	0, 11
R3	0, 12	0, 10	0, 13

蓝方 / 红方	C1	C2	C3
R1	2, 12	1, 10	1, 12
R2	0, 12	0, 10	0, 11
~~R3~~	~~0, 12~~	~~0, 10~~	~~0, 13~~

蓝方 / 红方	C1	C2	~~C3~~
R1	2, 12	1, 10	~~1, 12~~
R2	0, 12	0, 10	~~0, 11~~
~~R3~~	~~0, 12~~	~~0, 10~~	~~0, 13~~

蓝方 / 红方	C1	~~C2~~	~~C3~~
R1	2, 12	~~1, 10~~	~~1, 12~~
R2	0, 12	~~0, 10~~	~~0, 11~~
~~R3~~	~~0, 12~~	~~0, 10~~	~~0, 13~~

蓝方 / 红方	C1	~~C2~~	~~C3~~
R1	**2, 12**	~~1, 10~~	~~1, 12~~
~~R2~~	~~0, 12~~	~~0, 10~~	~~0, 11~~
~~R3~~	~~0, 12~~	~~0, 10~~	~~0, 13~~

蓝方 / 红方	C1	~~C2~~	C3
R1	2, 12	~~1, 10~~	1, 12
R2	0, 12	~~0, 10~~	0, 11
R3	0, 12	~~0, 10~~	0, 13

蓝方 / 红方	C1	~~C2~~	C3
R1	2, 12	~~1, 10~~	1, 12
~~R2~~	~~0, 12~~	~~0, 10~~	~~0, 11~~
R3	0, 12	~~0, 10~~	0, 13

蓝方 / 红方	~~C1~~	~~C2~~	C3
R1	~~2, 12~~	~~1, 10~~	1, 12
~~R2~~	~~0, 12~~	~~0, 10~~	~~0, 11~~
R3	~~0, 12~~	~~0, 10~~	0, 13

蓝方 / 红方	~~C1~~	~~C2~~	C3
R1	~~2, 12~~	~~1, 10~~	**1, 12**
~~R2~~	~~0, 12~~	~~0, 10~~	~~0, 11~~
~~R3~~	~~0, 12~~	~~0, 10~~	~~0, 13~~

重复剔除的占优策略均衡要求理性参与者是共同知识。

纳什均衡的定义

- 市场萎靡下的房地产开发博弈
  - 两个开发商都开发：都损失3
  - 一个开发商开发：收益1
  - 都不开发：收益为0

开发商A \ 开发商B	开发	不开发
开发	-3, -3	1, 0
不开发	0, 1	0, 0

- 该博弈不存在占优策略均衡和重复剔除的占优均衡，但存在均衡：纳什均衡！

纳什均衡

在一个策略式博弈$\Gamma = \langle N, \{S_i\}_{i=1}^{n}, \{\mu_i(s_1, \dots, s_n)\}\rangle$中，对于一个策略组合$s^* = (s_1^*, \dots, s_n^*)$，如果对于每一个参与人$i$，如果$s_i^*$是给定其他参与人策略$s_{-i}^* = (s_1^*, \dots, s_{i-1}^*, s_{i+1}^*, \dots, s_n^*)$的情况下第$i$个人的优势策略，即：$u_i(s_i^*, s_{-i}^*) \geq u_i(s_i, s_{-i}^*)$，$\forall s_i \in S_i, s_i \neq s_i^*$，那么策略组合$s^* = (s_1^*, \dots, s_n^*)$称为纳什均衡。

强纳什均衡和弱纳什均衡

• 纳什均衡也有强弱之分：强纳什均衡和弱纳什均衡

强纳什均衡（Strong Nash Equilibrium）：

在一个纳什均衡中，如果给定其他参与人的策略，每一参与人的最优选择都是唯一的。即：s_i^*是一个强纳什均衡，当且仅当对于所有的$s_i' \in S_i$，$s_i' \neq s_i^*$，$u_i(s_i^*, s_{-i}^*) > u_i(s_i', s_{-i}^*)$。

弱纳什均衡（Weak Nash Equilibrium）：

在一个纳什均衡中，如果给定其他参与人的策略，每一参与人的最优选择不是唯一的。即：s_i^*是一个弱纳什均衡，对于所有的$s_i' \in S_i$，$s_i' \neq s_i^*$，满足：$u_i(s_i^*, s_{-i}^*) \geq u_i(s_i', s_{-i}^*)$，且至少存在一个$s_i' \in S_i$，$s_i' \neq s_i^*$，满足：$u_i(s_i^*, s_{-i}^*) = u_i(s_i', s_{-i}^*)$。

纳什均衡的应用举例

- 求取右图抽象博弈的纳什均衡
  - 对于简单的两人有限博弈，可以根据纳什均衡定义设计方法求取
- 有限策略博弈求取纳什均衡方法
  - 不断固定一方的策略，求取另一方的最优策略，迭代完成后最优策略的交集就是纳什均衡。

红方 \ 蓝方	L	C	R
U	0, 4	4, 0	5, 3
M	4, 0	0, 4	5, 3
D	3, 5	3, 5	6, 6

红方 \ 蓝方	L	C	R
U	0, 4	4, 0	5, 3
M	4, 0	0, 4	5, 3
D	3, 5	3, 5	6, 6

给定红方策略，求蓝方最优策略

红方 \ 蓝方	L	C	R
U	0, 4	4, 0	5, 3
M	4, 0	0, 4	5, 3
D	3, 5	3, 5	6, 6

给定蓝方策略，求红方最优策略

纳什均衡的应用举例

- 库诺特（Cournot）寡头竞争模型
  - 博弈有两个参与人，企业1和企业2，生产同质产品;
  - 参与人i的策略是选择自己的产量$q_i \in [0,\infty)$；
  - 效用函数是利润 $\pi_i(q_1,q_2) = q_i P(q_1+q_2) - C_i(q_i), i=1,2$，其中$C_i(q_i)$是各自的成本，$P(q_1+q_2)$表示该产品市场价格。

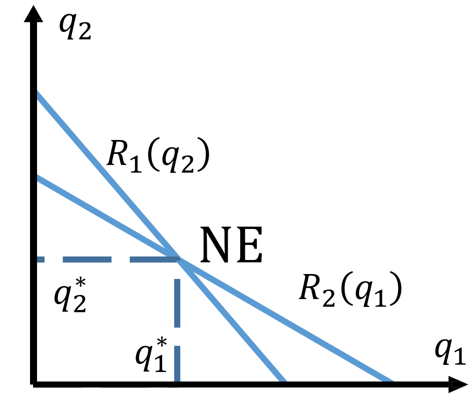
解答：纳什均衡产量记作(q_1^*,q_2^*)，则有：

$$\begin{cases} q_1^* \in \operatorname{argmax} \pi_1(q_1,q_2^*) = q_1 P(q_1+q_2^*) - C_1(q_1) \\ q_2^* \in \operatorname{argmax} \pi_2(q_1^*,q_2) = q_2 P(q_1^*+q_2) - C_2(q_2) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \dfrac{\partial \pi_1}{\partial q_1} = P(q_1+q_2) + q_1 P'(q_1+q_2) - C_1'(q_1) = 0 \\ \dfrac{\partial \pi_2}{\partial q_2} = P(q_1+q_2) + q_2 P'(q_1+q_2) - C_2'(q_2) = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} q_1^* = R_1(q_2) = \dfrac{C_1'(q_1)}{P'(q_1+q_2)} - \dfrac{1}{P'(q_1+q_2)} P(q_1+q_2) \\ q_2^* = R_2(q_1) = \dfrac{C_2'(q_1)}{P'(q_1+q_2)} - \dfrac{1}{P'(q_1+q_2)} P(q_1+q_2) \end{cases}$$

反应函数



混合策略纳什均衡定义

- 纯策略（Pure Strategy）和混合策略（Mixed Strategy）
  - 在一个策略式博弈中，如果一个策略规定参与人在一个给定的信息情况下只选择一种特定的行动，我们就称该策略为纯策略。
  - 如果一个策略规定参与人在给定信息情况下以某种概率分布随机地选择不同的行动，我们就称该策略为混合策略。

混合策略（Mixed Strategy）

在一个策略式博弈$\Gamma = \langle N，\{S_i\}_{i=1}^n, \{\mu_i(s_1, \dots, s_n)\}\rangle$中，假定参与人$i$有$K$个纯策略：$S_i = \{s_{i,1}, \dots, s_{i,K}\}$，那么，概率分布$\sigma_i = (\sigma_{i1}, \dots, \sigma_{iK})$称为$i$的一个混合策略，这里$\sigma_{ik} = \sigma(s_{ik})$是$i$选择$s_{ik}$的概率，对于所有的$k = 1, \dots, K$，$0 \le \sigma_{ik} \le 1$，$\sum_i^K \sigma_{ik} = 1$。

混合策略纳什均衡定义

- 混合策略博弈要素的表示
  - 参与人的混合策略：$\sigma_i = (\sigma_{i1}, \dots, \sigma_{i2}, \dots, \sigma_{ik})$
  - 参与人i混合策略空间：Σ_i，其中$\sigma_i \in \Sigma_i$
  - 混合策略组合：$\sigma = (\sigma_1, \dots, \sigma_i, \dots, \sigma_n)$
  - 混合策略组合空间：$\Sigma = \times_i \Sigma_i$
  - 参与人i期望支付函数：$v(\sigma) = v(\sigma_i, \sigma_{-i}) = \sum_s \left(\prod_j^n \sigma_j(s_j)\right) u(s)$
- 混合策略纳什均衡

混合策略纳什均衡

在一个策略式博弈$\Gamma = \langle N, \{S_i\}_{i=1}^n, \{\mu_i(s_1, \dots, s_n)\}\rangle$中，如果对于所有的 $i = 1, \dots, n$，混合策略组合 $\sigma^* = \{\sigma_1^*, \dots, \sigma_i^* \dots, \sigma_n^*\}$都满足：

$$v(\sigma_i^*, \sigma_{-i}^*) \geq v(\sigma_i, \sigma_{-i}^*), \qquad \forall \sigma_i \in \Sigma_i$$

那么，该混合策略组合是一个混合策略纳什均衡。

混合策略纳什均衡举例

- 社会福利博弈：政府$S_1 = \{$救济, 不救济$\}$，流浪汉$S_2 = \{$寻找工作, 游荡$\}$。
  - 政府想帮助流浪汉，但前提是对方必须试图找到工作，否则不予帮助；
  - 流浪汉只在得不到帮助时才找工作。

政府 \ 流浪汉	寻找工作	游荡
救济	3, 2	-1, 3
不救济	-1, 1	0, 0

均衡求解：

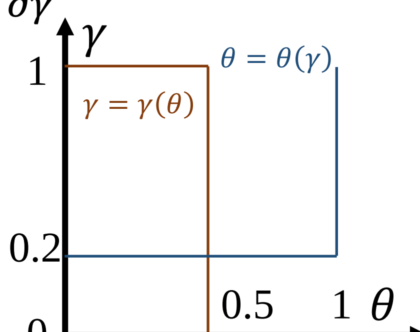
给定政府混合策略$\sigma_G = (\theta, 1-\theta)$，流浪汉混合策略$\sigma_H = (\gamma, 1-\gamma)$，那么政府和流浪汉的期望效用函数分别为：

$$v_G(\sigma_G, \sigma_H) = \theta\big(3\gamma + (-1)(1-\gamma)\big) + (1-\theta)\big(-\gamma + 0(1-\gamma)\big) = \theta(5\gamma - 1) - \gamma$$

$$v_L(\sigma_G, \sigma_H) = \gamma\big(2\theta + 1(1-\theta)\big) + (1-\gamma)\big(3\theta + 0(1-\theta)\big) = -\gamma(2\theta - 1) + 3\theta$$

令$\frac{\partial v_G(\sigma_G,\sigma_H)}{\partial \theta} = 0, \frac{\partial v_H(\sigma_G,\sigma_H)}{\partial \gamma} = 0$，得到：$\gamma^* = 0.2, \theta^* = 0.5$

政府 $\theta = \begin{cases} 0, & \text{if } \gamma < 0.2 \\ [0,1], & \text{if } \gamma = 0.2 \\ 1, & \text{if } \gamma > 0.2 \end{cases}$



流浪汉 $\gamma = \begin{cases} 1, & \text{if } \theta < 0.5 \\ [0,1], & \text{if } \theta = 0.5 \\ 0, & \text{if } \theta > 0.5 \end{cases}$

混合策略纳什均衡举例

- 税收监督博弈：税收机关$S_1 = \{检查, 不检查\}$，纳税人$S_2 = \{逃税, 不逃税\}$。
  - 税务机关检查概率为Θ
  - 纳税人逃税的概率为γ
  - 如何求取其纳什均衡?

税收机关 \ 纳税人	逃税	不逃税
检查	a-C+F, -a-F	a-C, -a
不检查	0, 0	a, -a

均衡求解:

给定逃税概率γ，税收机关选择检查($\Theta = 1$)和不检查($\Theta = 0$)的期望收益分别为:

$$\pi_G(1,\gamma) = (a - C + F)\gamma + (a - C)(1-\gamma) = \gamma F + a - C$$

$$\pi_G(0,\gamma) = 0\gamma + a(1-\gamma) = a(1-\gamma)$$

令$\pi_G(1,\gamma) = \pi_G(0,\gamma)$，得到：$\gamma^* = C/(a+F)$

给定检查概率Θ，税收人选择逃税($\gamma = 1$)和不逃税($\gamma = 0$)的期望收益分别为:

$$\pi_p(\theta,1) = (-a - F)\theta + 0(1-\theta) = (-a - F)\theta$$

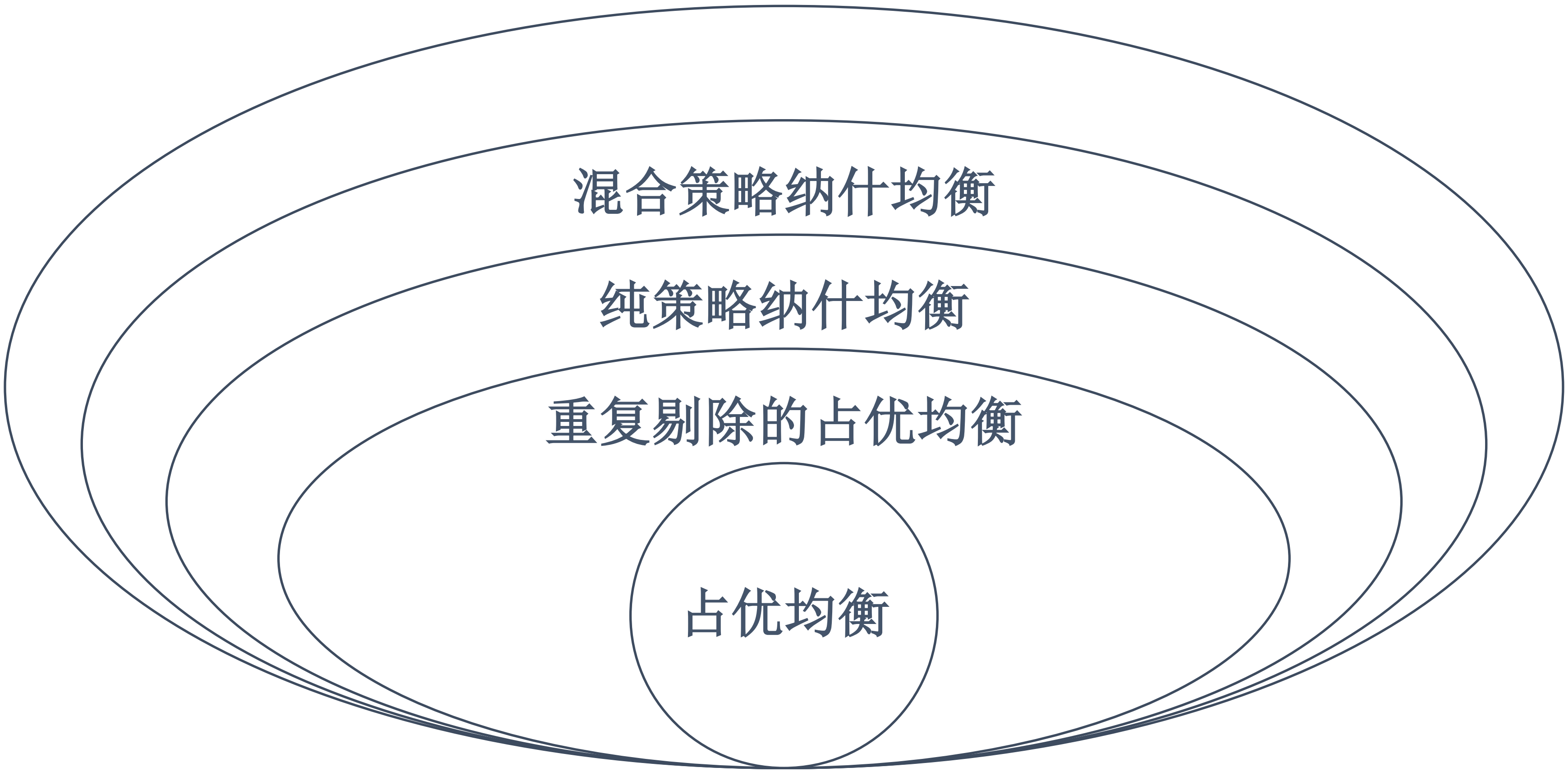
$$\pi_p(\theta,0) = -a\theta + (-a)(1-\theta) = -a$$

令$\pi_p(\theta,1) = \pi_p(\theta,0)$，得到：$\theta^* = a/(a+F)$

混合策略纳什均衡：$\gamma^* = C/(a+F)$，$\theta^* = a/(a+F)$

纳什均衡的一些讨论

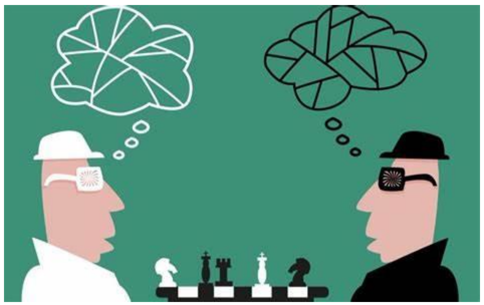
- 四种不同均衡的关系



纳什均衡的存在性问题

- 确定一个博弈是否存在均衡是博弈论中的重要议题。

两人零和博弈



冯·诺依曼
极小极大值定理

证明结果：根据极大极小值得到解即为均衡解。
证明方法：利用初等概率和拓扑学的工具。

其他更多的博弈

?

证明结果：不断证明更多类型的博弈均衡存在性。
证明方法：数学归纳法；凸集分离定理；单纯形理论；各种**不动点定理**等。

不动点定理相关概念介绍

- 对应和集值函数
  - 假设n和k都是正整数，给定集合$X \subset \mathbb{R}^n$以及另一个集合$Y \subset \mathbb{R}^k$，一个从X映射到Y的<u>对应</u>（correspondence），对每个$x \in X$都指定了Y的一个子集（包括Y本身），即$\forall x \in X, f(x) \sqsubseteq Y$。我们将这个对应记为：$f: X \rightrightarrows Y$。这样的函数也称为<u>**集值函数**</u>（set-valued function）。显然，当每个$x, f(x)$恰好只有一个元素时，集函数f就成了普通函数。
- 对应的图和闭图对应
  - 令$X \subset \mathbb{R}^n$，令$Y \subset \mathbb{R}^k$是一个闭集。$f: X \rightrightarrows Y$这个<u>对应的图</u>定义为集合$\{(x, y): x \in X, y \in f(x)\}$。
  - 给定$X \subset \mathbb{R}^n$以及闭集$Y \subset \mathbb{R}^k$，对于对应$f: X \rightrightarrows Y$，若对于任何两个序列$x^m \rightarrow x \in X$以及$y^m \rightarrow y \in Y$（其中对于每个m，$x^m \in X$且$y^m \in f(x^m)$），我们都有$y \in f(x)$），则称$f: X \rightrightarrows Y$有一个闭图。
- 上半连续
  - 给定$X \subset \mathbb{R}^n$以及闭集$Y \subset \mathbb{R}^k$，若$f: X \rightrightarrows Y$这个对应有闭图，而且在f这个对应下，紧集的像是有界的，则称f是<u>上半连续</u>的（upper hemicontinuous）。或者等价地，对于所有的$x_0 \in X$和包含$f(x_0)$的开集V，存在一个x的领域U，使得对所有的$x \in U$，有$f(x) \in V$。

不动点定理相关概念介绍

- 不动点定理为证明均衡方程组的解提供了非常有用的结果。其基本思想是：将问题视为寻找适当构造的函数或者对应的不动点。

映射的不动点（fixed point）

令$X \subset \mathbb{R}^n$，令$f: X \to X$是一个映射。给定$x \in X$,，若$f(x) = x$，则称点x是映射f的一个**不动点**。

举例： $f: [0,1] \to [0,1]$，并且$f(x) = x^2$，那么f有两个不动点0和1，因为$f(0) = 0$， $f(1) = 1$。

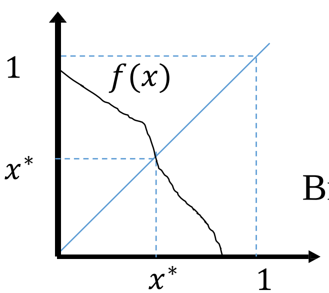
对应的不动点（fixed point）

令$X \subset \mathbb{R}^n$，令$f: X \rightrightarrows X$是一个对应。给定$x \in X$,，若$f(x) = x$，则称点x是对应f的一个**不动点**。

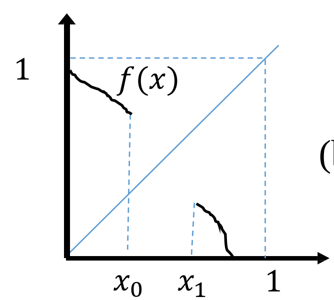
布劳威尔（Brouwer）不动点定理

布劳威尔不动点定理（不动点存在的充分非必要条件）

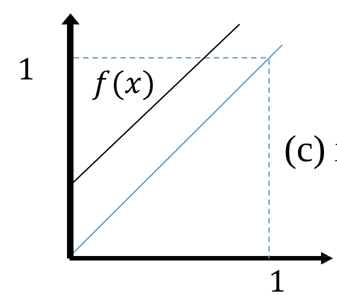
如果$f(x)$是自身对自身的映射（即$f\!: X \to X$），$f(x)$是连续的，X是非空的、闭的、有界的和凸的，那么至少存在一个$x^* \in X$,使得$f(x^*) = x^*$, x^*称为函数f的不动点。



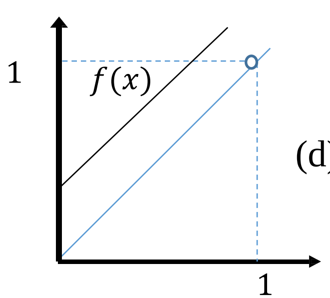
(a) 满足Brouwer条件



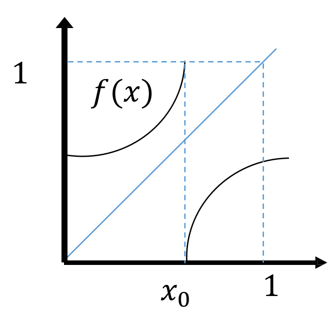
(b) x不是凸集



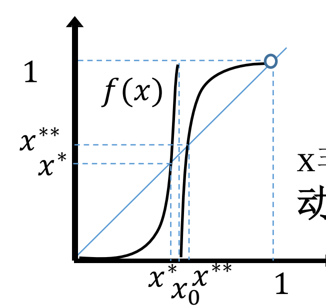
(c) x不是有界的



(d) x不是闭的



(e) $f(x)$不连续



(f) $f(x)$不连续 x非闭集合，但不动点存在

角骨（Kakutani）不动点定理

角骨不动点定理

假设$f: X \rightrightarrows X$是定义在集合X上的一个对应。
如果X是非空的、闭的、有界的和凸的，$f(x)$对于所有的$x \in X$是非空的、凸的，且上半连续，那么f在X中有不动点。

说明： 角骨不动点定理是布劳威尔不动点定理在对应上的拓展。函数是集合上点与点之间的联系规则，对应是集合上点与子集之间的联系规则。函数可以看作是对应的一个特例。

举例： 库诺特模型中，给定企业j的产量q_j，企业i的最优产量q_i是唯一的，在前面我们说$q_i = R_i(q_j)$是反应**函数**。在两人混合策略中，给定参与人j 的混合策略σ_j，参与人i有无穷多个最优混合策略σ_i, 我们称$\sigma_i = r_i(\sigma_j)$是反应**对应**。

纳什均衡存在性定理

- 纳什均衡的存在性

纳什均衡存在性定理一（Nash，1950）

每一个有限博弈至少存在一个纳什均衡（纯策略的或者混合策略的）。

纳什均衡存在性定理二（Debreu，1952；Glickskerg，1952；Fan，1952）

在n人策略式博弈中，如果每个参与人的纯策略空间S_i是欧式空间上一个非空的、闭的、有界的凸集，支付函数$u_i(s)$是连续的且对s_i是拟凹的，那么存在一个纯策略纳什均衡。

纳什均衡存在性定理三（Glickskerg，1952）

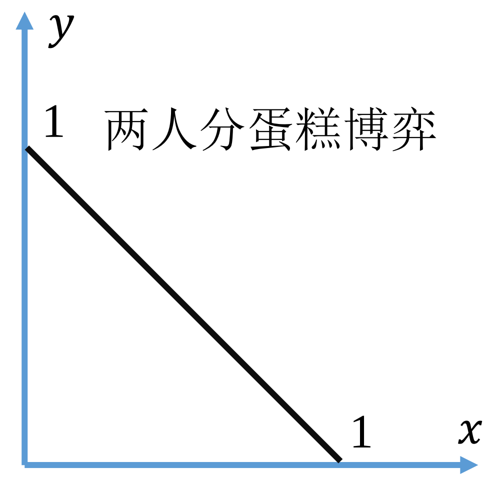
在n人策略式博弈中，如果每个参与人的纯策略空间S_i是欧式空间上一个非空的、闭的、有界的凸集，支付函数$u_i(s)$是连续的，那么存在一个混合策略纳什均衡。

纳什均衡存在性定理—证明思路

- 先说明纳什均衡与不动点定理的关系：
  - n个参与人的混合策略组合$\sigma = (\sigma_1, \dots, \sigma_i, \dots, \sigma_n)$属于混合策略组合空间$\Sigma$(即$\sigma \in \Sigma$)。用$r_i(\sigma)$ 代表i的反应对应，定义为给定其它参与人的混合策略组合是i的最优策略。
  - 如果存在一个不动点$\sigma^* = (\sigma_1^*, \dots, \sigma_i^*, \dots, \sigma_n^*) \in \Sigma$，使得$\sigma^* \in r(\sigma^*)$，且对所有的$i$，$\sigma_i^* \in r_i(\sigma^*)$,这个不动点就是纳什均衡。
- 再验证是否满足角骨不动点定理的条件：
  - 1. X是非空的、闭的、有界的和凸的：
    - 每个参与人的决策空间Σ_i都是一个概率空间，因而是$J-1$维的单纯形。因此，它是非空的、闭的、有界的和凸的。
  - 2. $f(x)$对于所有的$x \in X$是非空的、凸的，且上半连续：
    - 期望效用是混合概率的线性函数，因此是连续的，拟凹的，非空的；
    - 期望效用函数的线性意味着，如果$\sigma' \in r(\sigma), \sigma'' \in r(\sigma)$,那么$\lambda\sigma' + (1-\lambda)\sigma'' \in r(\sigma)$。即$r(\sigma)$是凸的。
    - 用反证法证明$r(\sigma)$是上半连续的。

纳什均衡的多重性讨论

- 纳什均衡的多重性：相对于纳什均衡的存在性，纳什均衡的多重性有时候更为棘手
- 一个博弈纳什均衡可能出现的数目
  - 不存在纳什均衡
  - 有唯一的纳什均衡
  - 有多个纳什均衡
  - 有无数个纳什均衡
- 当一个博弈有多个纳什均衡时
  - 如何保证纳什均衡出现？
  - 如果保证某个纳什均衡出现？



分配规则：

- 每人说出想要得到的蛋糕数量；
- 两人所要数量和不超过蛋糕总量得到所要数量；
- 两人所要数量和超过蛋糕总量则什么都得不到；

纳什均衡的计算问题

- 证明了纳什均衡的存在性，如何得到这个纳什均衡？
- 理论计算机科学家更关心如何利用计算机算法搜索得到博弈的具体均衡解：

求解纳什均衡是极具挑战性的开放难题
- **纳什均衡**这个博弈博弈论解来源于经济学中分析经济现象，经济学家只关心存在性，根本不关心均衡解如何计算。
- 求解一般的**两人博弈纳什均衡**是PPAD-Hard问题（不可解，除非P=NP）。
- 求解四人/三人纳什均衡都是PPAD-Hard问题，但**求解多人（五人及以上）纳什均衡**是否仍是PPAD-Hard问题还不确定。
- **近似纳什均衡**求解相关研究进展缓慢。
- **纳什均衡选择**问题仍然存在很多问题。
- 纳什均衡的**理性假说**实际中可能不成立。

一些**典型问题**的纳什均衡求解复杂度
- **两人变和策略式（矩阵式）博弈**
  - 计算纳什均衡：PPAD-Hard
  - 计算均衡个数：#P-Hard
  - 检查均衡唯一性：NP-Hard
  - 计算个体最少收益：NP-Hard
  - 计算群体最小收益和：NP-Hard
- **随机博弈**（带随机状态转移的动态博弈）
  - 检查纯策略纳什均衡存在性：**PSPACE-Hard**
  - 计算任意策略的最优响应：**Not Turing-computable**
  - 上述结论适用于两人对称博弈

关于博弈计算的复杂性问题后面算法博弈论中有一讲专门讲解

关于效用函数的讨论

- 效用函数反映了博弈参与者对于不同博弈结果的偏好。每个参与者都有一个效用函数，但每个博弈参与者的效用函数都取决于所有参与者的策略组合（结果集），即它以所有参与者的策略组合为自变量，将其映射为一个实数来反应该博弈参与者的这种偏好。
- 效益函数举例
  - 该博弈的策略组合（结果集）是?
  - 参与人1的效用函数是?
  - 参与人2的效用函数是?

参与人1 \ 参与人2	A	B
A	2, 1	0, 0
B	0, 0	1, 2

博弈的策略组合（结果集）：X={(A, A), (A, B), (B, A), (B, B)}

参与人1的效用函数：u_1(A, A)=2, u_1(A, B)=0, u_1(B, A)=0, u_1(B, B)=1

参与人2的效用函数：u_2(A, A)=1, u_2(A, B)=0, u_2(B, A)=0, u_2(B, B)=2

关于效用函数的讨论

- 用一个实数能否完全反应参与者偏好而不损失任何信息？
- 偏好表示的具体实例1：确定性效用（ordinal utilities）
  - 某博弈有两个参与人1和2，有四个确定性结果 $X = \{x, y, z, w\}$ 。参与人1最偏好x，其次是y、z和w，我们记为$x \succ y \succ z \succ w$；参与人2偏好完全相反，即$w \succ z \succ y \succ x$。
  - 参与人1： x: 4; y: 3; z: 2; w: 1； 参与人2： x: 2; y: 4; z: 6; w: 9
- 偏好表示的具体实例2：不确定效用（lottery）
  - 某博弈有两个参与人1和2，有四个不确定结果 $X = \{x, y, z, w\}$ 。情况1假设 x, y, z, w发生概率分别为0.5, 0.2, 0.2, 0.1；或者情况2假设x, y, z, w发生概率分别为0.4, 0.3, 0.2, 0.1。表示为： $\sigma_1 = [0.5{:}x;\ 0.2{:}y; 0.2{:}z; 0.1{:}w]$和 $\sigma_2 = [0.4{:}x;\ 0.3{:}y; 0.2{:}z; 0.1{:}w]$
  - 参与人更偏好哪种？

冯·诺依曼-摩根斯坦效用理论

- 令X表示结果集，偏好关系可用X上的二元关系来表示。给定$x_1, x_2 \in X$，对于特定参与人i，我们定义：
  - $x_1 \succcurlyeq x_2$：结果x_1弱偏好于x_2；
  - $x_1 \succ x_2$：结果x_1强偏好于x_2；
  - $x_1 \sim x_2$：结果x_1和x_2无差异。
- 对上述关系根据偏好定义推理可以得到：
  - $x_1 \succ x_2 \Leftrightarrow x_1 \succcurlyeq x_2$且$\dashv (x_1 \sim x_2)$
  - $x_1 \sim x_2 \Leftrightarrow x_1 \succcurlyeq x_2$且$x_2 \succcurlyeq x_1$
  - $x_1 \succcurlyeq x_1$ 且$x_1 \sim x_1$
- 上述二元关系在确定性效用上含义很明确，下面将它们推广到不确定效用上。

冯·诺依曼-摩根斯坦效用理论

- 为了将二元关系推广到不确定效用上，要求偏好关系满足一下六个公理：

公理一：完备性（Completeness）

$$x_1 \succ x_2;\ \text{或} x_2 \succ x_1;\ \text{或} x_1 \sim x_2 \qquad \forall x_1, x_2 \in X$$

公理二：传递性（Transitivity）

$$x_1 \succcurlyeq x_2 \text{ 且 } x_2 \succcurlyeq x_3 \Rightarrow x_1 \succcurlyeq x_3 \qquad \forall x_1, x_2, x_3 \in X$$

公理三：可替代性（Substitutability）

如果$x_1 \backsim x_2$，那么对于满足$p + \sum_{j=3}^{m} p_j = 1$的结果$x_3, \cdots, x_m$以及概率$p, p_3, \cdots, p_m$，参与人对于$\sigma_1 = [p: x_1, p: x_3, \cdots, p_m: x_m]$和$\sigma_2 = [p: x_2, p: x_3, \cdots, p_m: x_m]$两个不确定性策略是无差异的，即：

$$[p: x_1, p: x_3, \cdots, p_m: x_m] \backsim [p: x_2, p: x_3, \cdots, p_m: x_m]$$

冯·诺依曼-摩根斯坦效用理论

公理四：可分解性（Decomposability）

$$P_{\sigma_1}(x_i) = P_{\sigma_2}(x_i), \forall x_i \in X \Longrightarrow \sigma_1 \sim \sigma_2, \forall \sigma_1, \sigma_2 \in \Delta(X)$$

其中$P_\sigma(x_i)$表示x_i被X上的不确定性策略σ选中的概率，$\Delta(X)$ 表示X上的所有不确定性策略组成的集合。

公理五：单调性（Monotonicity）

$\forall x_1, x_2 \in X$，

$x_1 \succ x_2$且$1 \geq p > q \geq 0 \Longrightarrow [p: x_1; 1-p: x_2] \succ [q: x_1; 1-q: x_2]$

公理六：连续性（Continuity）

$\forall x_1, x_2, x_3 \in X$，

$x_1 \succ x_2$且$x_2 \succ x_3 \Longrightarrow \exists p \in [0,1]$使得$x_2 \sim [p: x_1; 1-p: x_3]$

冯·诺依曼-摩根斯坦效用理论

冯·诺依曼-摩根斯坦定理

给定博弈结果集$X=\{x_1,\cdots,x_m\}$，已经定义在X上而且满足完备性、传递性、可替代性、可分解性、单调性和连续性的偏好关系$\succcurlyeq$，则存在满足下来两个性质的效用函数$\mu: X\rightarrow[0,1]$：

（1）$\mu(x_1)\succcurlyeq\mu(x_2)$当且仅当$x_1\succcurlyeq x_2,\forall x_1,x_2\in X$；

（2）$\mu([p_1:x_1;p_2:x_2;\cdots;p_m:x_m])=\sum_{j=1}^{m}p_j\mu(x_j)$。

定理说明：条件（2）说明了如何定义不确定性策略的效用函数，注意其中关于概率 $p_1,\cdots,p_m$ 的线性特点。满足条件（1）和（2）的效用函数被称为冯·诺依曼-摩根斯坦效用函数。

证明思路：先考察$x_1\backsim x_2$这种退化情况，然后再分别证明条件（1）和（2）。具体证明过程留作课程可选作业。

效用函数的等价

- 效用函数反映了局中人在一定条件下对于博弈的偏好
- 局中人偏好如果发生改变，效用函数一定发生了变化
- 效用函数改变后这种偏好可以不变，这样变化前后的效用函数就认为是等价的。
- 博弈的等价：如果两个博弈的效用函数是等价的，那么这两个博弈就是等价的。

博弈的等价

两个博弈G和$\hat{G}$等价的充要条件是：对于参与人集合中的每个人i和策略集中的任意两个策略p和q，如果参与人i在博弈G中对于p偏好胜过q，就等价于在博弈$\hat{G}$中对于p的偏好胜过q，那么我们就说博弈G和$\hat{G}$等价。

本次课程作业

- 作业内容：分别寻找存在纯策略和混合策略的完全信息静态博弈习题各一道，给出习题描述、问题分析、求解过程和最终结果。
  - 评分准则：选取习题的典型性、分析求解过程的完整性以及最终结果的指导性意义。
- 选做作业内容：查找相关材料证明纳什均衡存在定理一和冯·诺依曼-摩根斯坦效用理论定理。
- 提交时间：2020年10月15日17:00之前
- 提交方法：在课程网站上提交，同时提交作业Word版到助教邮箱（ kangyongxin2015@ia.ac.cn ）
- 邮件发送规范
  - 邮件主题：计算博弈第二次作业_学号_姓名
  - 附件名称：计算博弈第二次作业_学号_姓名.docx

感谢聆听！

兴军亮

Junliang.Xing@ia.ac.cn

2020年10月9日

中国科学院大学
University of Chinese of Academy of Sciences

CASIA 自动化研究所
Institute of Automation