第五讲：不完全信息静态博弈

兴军亮

Junliang.Xing@ia.ac.cn

2020年10月22日

中国科学院大学
University of Chinese of Academy of Sciences

CASIA 自动化研究所
Institute of Automation

本讲提纲

- 博弈类型介绍和表示
- 博弈均衡分析和求解
- 贝叶斯博弈应用示例
- 混合策略均衡的解释

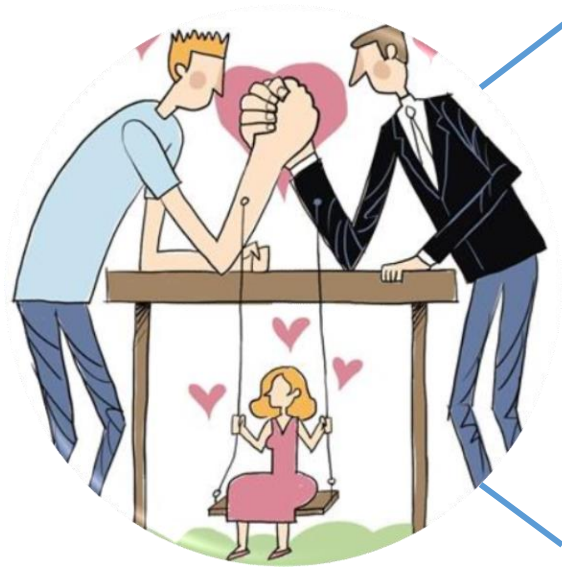
不完全信息博弈

- 现实世界中很多实际问题中博弈参与人存在着私有信息，这种信息不完全对于博弈的均衡分析带来了很大挑战。
- 不完全信息博弈：对于一个博弈，当参与人准备行动时，至少有一个参与人有关于该博弈支付/偏好方面的私人信息（private information），而其他人没有该信息。参与人在其开始行动前拥有的私有信息称为参与人的类型（type），一些常见博弈中的私有信息示例如下：
  - 和陌生人接触对方的喜好
  - 购买商品商家的心理底价
  - 进入市场已有企业的成本
- 这种私有信息的存在使得关于博弈的**损益函数**并不是所有参与人的共同知识（common knowledge）。
- 不完全信息博弈也称为贝叶斯博弈。

完全信息和完美信息之间的比较

- 完全信息：对所有局中人策略（strategies）和损益函数（payoffs）都完全了解；
- 完美信息：对所有局中人已有行动（actions）完全把握。
- 举例说明：
  - 完全并且完美信息博弈：
  - 完全但不完美信息博弈：
  - 不完全但完美信息博弈：
  - 不完全不完美信息博弈：
- 任何不完全信息博弈均可以从术语上转换成一个不完美信息博弈，只需要简单地将“自然”引入作为一个局中人且支付函数受制于自然的未知发展（即自然的选择不可观察）。

不完全信息博弈的分类和特点



不完全信息静态博弈

- 别名：静态贝叶斯博弈
- 定义与表示：同时、策略式、类型
- 示例与分析：竞争、招标、拍卖等
- 均衡与求解：贝叶斯纳什均衡

不完全信息动态博弈

- 别名：动态贝叶斯博弈
- 定义与表示：顺序、展开式、类型
- 示例与分析：扑克、多轮谈判等
- 均衡与求解：精炼贝叶斯均衡

不完全信息博弈示例分析

- 不完全信息下市场进入阻挠博弈
  - 进入者不知道占有者的成本函数，进而不知道占有者决定默许或者斗争，自己可供选择的动作有进入和不进入
  - 占有者有两种可能的成本函数：低成本和高成本，知道进入者的成本，可供选择的动作有默许和斗争。
  - 两种情况对应的不同策略组合的支付矩阵如下所示：
- 分析与求解
  - 高成本：双方最优行动是?
  - 低成本：双方最优行动是?
  - 不完全信息下呢?

占有者 \ 进入者	高成本情况		低成本情况	
	默许	斗争	默许	斗争
进入	40, 50	-10, 0	30, 80	-10, 100
不进入	0, 300	0, 300	0, 40	0, 400

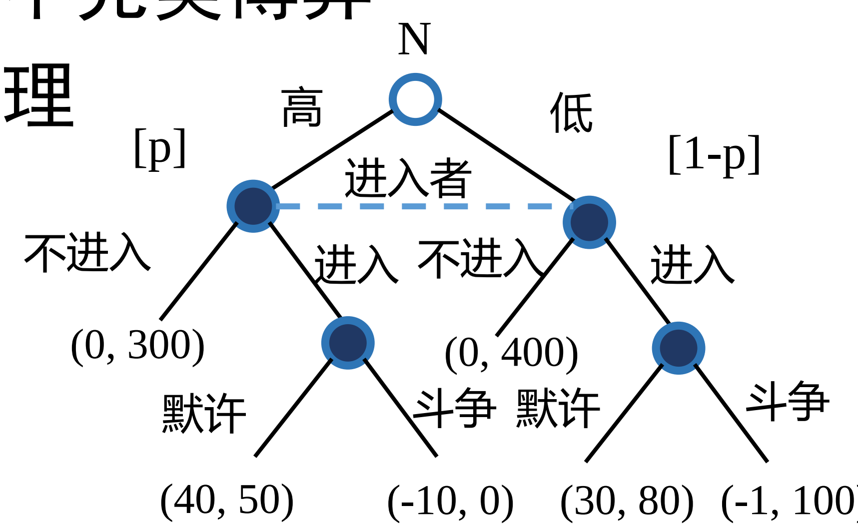
求解：假定进入者认为占有者是高成本的概率为p，低成本的概率为$1-p$，那么进入者选择进入的期望利润是$40p+(1-p)(-10)$，选择不进入的期望收益是0，令$40p+(1-p)(-10)=0$，得到$p=0.2$。
结果：p>=0.2，进入；p<0.2，不进入；

不完全信息博弈示例分析

- 海萨尼（Harsanyi）转换：将不完全博弈转换为完全不完美信息博弈
  - 方法：通过引入一个虚拟的参与人——“自然”（Nature），来对博弈中的相关局中人的不确定性因素进行“行动”，得到其确定性结果（特性，type），然后告知相关局中人，使得博弈继续分析下去。
- 不完全信息下市场进入阻挠博弈进行海萨尼转换：将不完全信息博弈转化为完全信息不完美博弈
- 海萨尼转换的条件：海萨尼公理

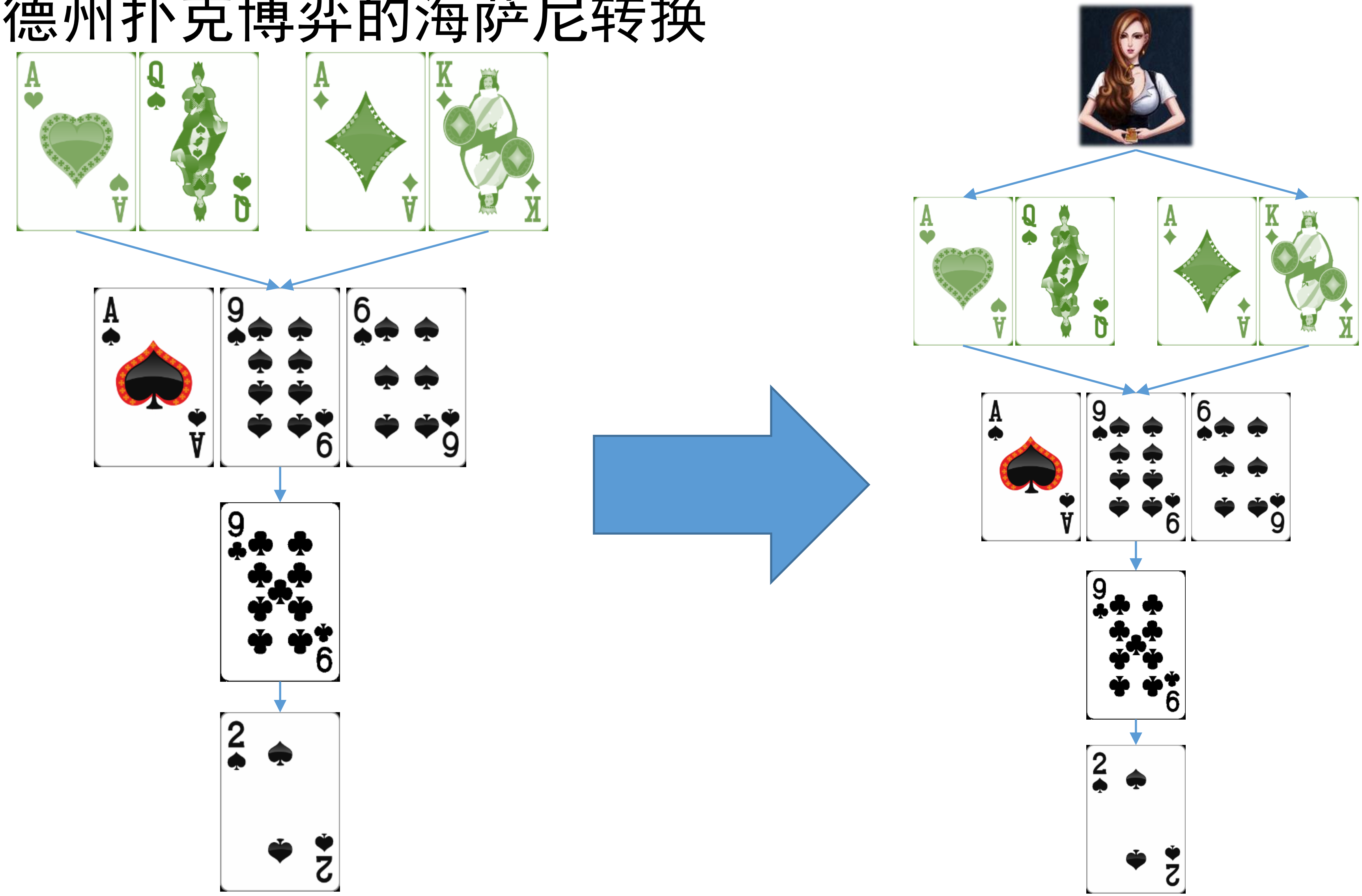
海萨尼公理

关于博弈参与人的类型分布函数$p(\theta_1,\cdots,\theta_n)$是所有参与人的共同知识。



不完全信息博弈示例分析

- 德州扑克博弈的海萨尼转换



不完全信息静态博弈举例

- 当静态博弈中存在不完全信息，就是我们这一讲要讲的不完全信息博弈。实际中的例子包括：二手车市场的交易博弈、大国间的贸易谈判博弈、旅游景点的商品买卖博弈等。

不完全信息静态博弈形式化定义

不完全信息静态博弈

伴随着不完全信息的静态博弈的策略型表示是一个多元组$\Gamma =< N, (\Theta_i), (S_i), (p_i), (u_i) >$，其中：

- $N = \{1,2, \dots, n\}$是参与人集合。
- Θ_i是参与人i 的类型集，其中$i = 1,2, \dots, n$。
- S_i是参与人i的纯策略集（或称为行动集），其中$i = 1,2, \dots, n$。
- 信念函数（belief function）p_i是一个从Θ_i映入$\Delta(\Theta_{-i})$的映射，其中$\Delta(\Theta_{-i})$是Θ_{-i}上的概率分布集。也就是说对任何可能的类型$\theta_i \in \Theta_i$，信念函数p_i都在集合Θ_{-i}上为其指定了一个概率分布$p_i(\cdot|\theta_i)$，其中$p_i(\cdot|\theta_i)$是指当参与人i 的自身类型为θ_i时他对其他参与人类型的信念。
- 收益函数$\mu_i: \Theta_1 \times \cdots \times \Theta_n \times S_1 \times \cdots \times S_n \rightarrow \mathbb{R}$对参与人的每个类型组与每个纯策略组指定了参与人$i$能得到的收益。

不完全信息静态博弈形式化定义

- 静态贝叶斯博弈的等价执行时间顺序

1. 自然赋予博弈各方类型向量$\Theta = \{\theta_1,\ldots,\theta_n\}$

2. 自然告知每一个参与者i的应知相关类型

3. 参与者根据已知类型，从可行集 S_i选择策略s_i

4. 每一个参与者i得到收益$\mu_i = \{s_{i,\ldots,}\ s_{n|}\theta_i\}$

不完全信息静态博弈形式化定义

- 上述定义和表示的一些特例分析
  - 参与人i可能预先知道具有某些参与人类型信息，比如知道参与人j类型信息θ_j, 这种情况下，参与人对于剩下的参与人的类型信息估计变为：$p\left(\theta_{-\{ij\}} \middle| \theta_i, \theta_j\right)$。
  - 如果所有参与人的类型空间只包含一个元素，那么不完全信息静态博弈就退化为完全信息静态博弈。
  - 如果所有参与人的类型是完全相关的，即当参与人i观测到自己的类型也就知道了其他参与人的类型，博弈也退化为完全信息静态博弈了。

研究不完全信息静态博弈的前提假设

- 每个参与人 i 知道如上定义的整个博弈结构。
- 每个参与人i知道他自己的类型$\theta_i \in \Theta_i$。
- 上面的事实对于每个参与人都是共同知识。
- 参与人i的真实类型不为其他参与人所知，尽管他们知道参与人i为各个类型的概率有多大。即p_i也是共同知识。

不完全信息静态博弈的贝叶斯表示

- 海萨尼：使用贝叶斯博弈来描述不完全信息博弈

信念一致性

对于参与人的信念$(p_i)_{i\in N}$，如果参与人的类型组（type profiles）集合Θ上存在着某个共同先验分布，使得每个参与人（在给定他自己的类型的前提下）关于其他参与人类型的信念正好能从上述先验分布计算出的条件概率分布，那么我们说信念$(p_i)_{i\in N}$是一致的（consistent）。

- 判断方法：
  - 对于有限博弈，如果存在某个概率分布$\mathbb{P}\in\Delta(\Theta)$，使得：

$$p_i(\theta_{-i}|\theta_i)=\frac{\mathbb{P}(\theta_i,\theta_{-i})}{\sum_{t_{-i}\in\Theta_{-i}}\mathbb{P}(\theta_i,t_{-i})}\quad \forall\theta_i\in\Theta_i;\ \forall\theta_{-i}\in\Theta_{-i};\ \forall\, i\in N$$

  那么信念就是一致的。

- 对于给定的博弈，若信念的一致性条件得以满足，我们就把它称为**贝叶斯博弈。**

不完全信息静态博弈的贝叶斯表示

- 贝叶斯博弈表示中的信息推理过程
  - 如何推断$p_i(\theta_{-i}|\theta_i)$: 贝叶斯法则

$$p_i(\theta_{-i}|\theta_i)=\frac{p_i(\theta_{-i},\theta_i)}{p(\theta_i)}=\frac{p_i(\theta_{-i},\theta_i)}{\sum_{\theta_{-i}\in\Theta_{-i}}p(\theta_{-i},\theta_i)}$$

当类型的分布是独立的：$p_i(\theta_{-i}|\theta_i)$=$p_i(\theta_{-i})$

  - 每个参与人自己的优化目标：给定参与人i只知道自己的类型θ_i, 而不知道其他人的类型θ_i，参与人i将选择策略$s_i(\theta_i)$来最大化自己的期望效用。

期望效用函数

给定参与人i只知道自己的类型θ_i而不知道其他参与人的类型θ_{-i}，参与人i将选择$s_i(\theta_i)$最大化自己的期望效用。参与人i 的**期望效用函数**定义如下：

$$v_i=\sum_{\theta_{-i}}p_i(\theta_{-i}|\theta_i)u_i(s_i(\theta_i),s_{-i}(\theta_{-i});\theta_i,\theta_{-i})$$

贝叶斯博弈表示举例：两人议价博弈

- 博弈问题描述
  - 有两参与人，卖者是参与人1，买者是参与人2。某件商品不可分割。二者都知道自己对该商品的评价，而认为对方对商品的评价可能是1到100之间的任意整数，概率都为1/100。卖者的类型为销售意愿，买者的类型为支付意愿。假设，必须同时报价，报价为0~100之间的任意整数。买者的报价大于卖者的报价，则按照两个人报价的平均数成交；如果买者的报价小于卖者的报价，交易失败。

- 贝叶斯博弈表示
  - $N=\{1,2\}$
  - $\Theta_1=\Theta_2=\{1,2,\ldots,100\}$
  - $S_1=S_2=\{0,1,2,\ldots,100\}$
  - $p_1(\theta_2|\theta_1)=1/100 \quad \forall\theta_1\in\Theta_1;\ \forall\theta_2\in\Theta_2$
  - $p_2(\theta_1|\theta_2)=1/100 \quad \forall\theta_1\in\Theta_1;\ \forall\theta_2\in\Theta_2$
  - $\mu_i(\theta_1,\theta_2,s_1,s_2)=\begin{cases}(s_1+s_2)/2-\theta_1 & 若 s_2\geq s_1,\\ 0 & 若 s_2<s_1\end{cases}$
  - $\mu_i(\theta_1,\theta_2,s_1,s_2)=\begin{cases}\theta_2-(s_1+s_2)/2 & 若 s_2\geq s_1,\\ 0 & 若 s_2<s_1\end{cases}$

信念一致性：

$$\mathbb{P}(\theta_1,\theta_2)=\frac{1}{10000}\quad \forall\theta_1\in\Theta_1;\ \forall\theta_2\in\Theta_2$$

其中 $\Theta_1\times\Theta_2=\{1,\cdots,100\}\times\{1,\cdots,100\}$

贝叶斯博弈表示举例：密封拍卖

- 博弈问题描述
  - 拍卖一件不可分割的商品。有参与人1与参与人2两个竞标人。
  - 每个买者都知道自己对该拍卖物的评价，这些评价被认为是买者的类型。两个参与人递交的报价分别为b_1和b_2。
  - 中标规则：谁报价高谁就中标。
  - 若报价相同，则参与人1中标。
  - 假设每个买者的评价集为实区间[0,1] 。
  - 假设每个买者的策略集为实区间[0,1]。
  - 假设每个参与人相信另外一个参与人的评价是根据独立均匀分布而选定

中标者确定函数：

$$f_1(b_1,b_2)=\begin{cases}1, & b_1\geq b_2,\\ 0, & b_1<b_2.\end{cases}$$

$$f_2(b_1,b_2)=\begin{cases}1, & b_2> b_1,\\ 0, & b_2\leq b_1.\end{cases}$$

- 博弈的表示：
  - $N=\{1,2\}$
  - $\Theta_1=\Theta_2=[0,1]$
  - $S_1=S_2=[0,1]$
  - $p_1([x,y]|\theta_1)=y-x \quad \forall\theta_1\in\Theta_1;\ \forall 0\leq x\leq y\leq 1$
  - $p_2([x,y]|\theta_2)=y-x \quad \forall\theta_2\in\Theta_2;\ \forall 0\leq x\leq y\leq 1$
  - $\mu_i(\theta_1,\theta_2,s_1,s_2)=f_i(b_1,b_2)(\theta_i-b_i); i=1,2$

类型代理表示法与泽尔腾博弈

- 给定一个贝叶斯博弈：

$$\Gamma =< N, (\Theta_i), (S_i), (p_i), (u_i) >$$

其等价的类型代理表示法为：

$$\Gamma^S =< N^S, (S_{\theta_i})_{\substack{\theta_i \in \Theta_i,\\ i \in N}}, (U_{\theta_i})_{\substack{\theta_i \in \Theta_i\\ i \in N}} >$$

其中，

- $N^S = \cup_{i \in N} \Theta_i$ ，即将原来参与人i的每个类型都视为一个代理人；
- $S_{\theta_i} = S_i$，即参与人i的每个代理人选择的行动就是原来博弈中参与人i自己选择的行动；
- U_{θ_i}是原来博弈中参与人i以类型θ_i为条件的条件期望效用。

- 这种把不完全信息博弈中每个不同类型的参与人视为一个代理人的博弈表示方法也叫作泽尔腾博弈。

类型代理表示法与泽尔腾博弈

- 贝叶斯定价博弈的泽尔腾表示：
  - 贝叶斯博弈描述：两个参与人，分别是企业1和企业2，企业1生产产品x_1，企业2生产产品x_2或y_2。企业1生产啥是共识，企业2生产哪个产品是他自己的私有信息。所以，$N=\{1,2\}, \Theta_1=\{x_1\}, \Theta_2=\{x_2, y_2\}$. 同时，假设$p_2(x_2|x_1)=0.6$，$p_2(y_2|x_1)=0.4$；$p_2(x_1|x_2)=1, p_2(x_1|y_2)=1$。
  - 企业的决策是为产品定价，企业1可以选择低价a_1，也可以选择高价b_1；企业2可以选择低价a_2，也可以选择高价b_2. $S_1=\{a_1, b_1\}, S_2=\{a_2, b_2\}$. 效益函数如下表：

企业1 \ 企业2	a_2	b_2
a_1	1,2	0, 1
b_1	0,4	1, 3

$\theta_1=x_1, \theta_2=x_2$

企业1 \ 企业2	a_2	b_2
a_1	1,3	0, 4
b_1	0,1	1, 2

$\theta_1=x_1, \theta_2=y_2$

类型代理表示法与泽尔腾博弈

- 贝叶斯定价博弈的泽尔腾表示：
  - 泽尔腾表示：
    - $N^S = \Theta_1 \cup \Theta_2 = \{x_1, x_2, y_2\}$
    - $S_{x_1} = S_1 = \{a_1, b_1\}$
    - $S_{x_2} = S_{y_2} = S_2 = \{a_2, b_2\}$
    - $U_{\theta_\mathrm{i}}: S_1 \times S_2 \times S_2 \rightarrow \mathbb{R}\ \forall \theta_i \in \Theta_i\ \forall \mathrm{i} \in N$
    - 其中$S_1 \times S_2 \times S_2$有八种情况，我们可以分别讨论他们对应三个代理人的期望收益，即，上一页两个表中对应项目的加权求和。
    - 如$U_{x_1}(a_1, a_2, b_2)$

$$= p_1(x_2|x_1)u_1(x_1, x_2, a_1, a_2) + p_1(y_2|x_1)u_1(x_1, y_2, a_1, b_2)$$

$$= 0.6 \times 1 + 0.4 \times 0 = 0.6$$

  - 期望效用函数的表示：

$$\mu_i\left((s_i, s_{-i})|\theta_i\right) = \mathbb{E}_{\theta_{-i}}[u_i(\theta_i, \theta_{-i}, s_i(\theta_i), s_{-i}(\theta_{-i}))]$$

贝叶斯博弈的纳什均衡

纯策略贝叶斯纳什均衡

给定贝叶斯博弈 $\Gamma =< N,(\Theta_i),(S_i),(p_i),(\mu_i) >$及其一个策略组 $(s_1^*,\cdots,s_n^*)$，若$\forall i \in N$； $\forall s_i: \Theta_i \to S_i; \forall s_i: \Theta_{-i} \to S_{-i}; \forall \theta_i \in \Theta_i$,

$$\mu_i((s_i^*, s_{-i}^*)|\theta_i) \geq \mu_i((s_i, s_{-i}^*)|\theta_i)$$

即，若$\forall\, i \in N; \forall\, s_i \in S_i; \forall\, \theta \in \Theta_i;$

$$\mathbb{E}_{\theta_{-i}}\left[\mu_i\left(\theta_i, \theta_{-i}, s_i^*(\theta_i), s_{-i}^*(\theta_{-i})\right)\right] \geq \mathbb{E}_{\theta_{-i}}\left[\mu_i\left(\theta_i, \theta_{-i}, s_i, s_{-i}^*(\theta_{-i})\right)\right]$$

则$(s_1^*,\cdots,s_n^*)$称为Γ的一个纯策略贝叶斯纳什均衡。

- 这里取的是支付函数的期望值来评价纯策略的好坏
- 贝叶斯纳什均衡本质上也是一个一致性预测：每个参与人i都能正确地预测具有类型θ_j 的参与人j将选择$s_j^*\ (\theta_j\ )$，因此对参与人i 来说，唯一重要的是自己的信念p_i 和其它参与人的依存策略$s_{-i}\ (\theta_{-i}\ )$。

静态贝叶斯纳什均衡的存在性

- 静态贝叶斯纳什均衡的存在性定理是纳什均衡存在性定理的一个直接推广。

静态贝叶斯纳什均衡的存在性定理

一个有限的静态贝叶斯博弈（即博弈中n是有限的，并且$(\theta_1,\ldots,\theta_n)$，$\left(S_1(\theta_1),\cdots,S_n(\theta_n)\right)$都是有限集）存在贝叶斯纳什均衡，其中的纳什均衡也可以包含混合策略。

- 证明过程同完全信息下有限博弈混合策略纳什均衡存在性证明基本一致。

贝叶斯均衡求解示例：贝叶斯定价博弈

- 博弈问题描述
  - 两个参与人，分别是企业1和企业2
  - 企业1生产产品x_1，企业2生产产品x_2或y_2。企业2生产哪个产品是他自己的私有信息， $p_2(x_2|x_1)=0.6$， $p_2(y_2|x_1)=0.4$。企业1生产啥是共识，$p_2(x_1|x_2)=1, p_2(x_1|y_2)=1$
  - 企业的决策是为产品定价，企业1可以选择低价a_1，也可以选择高价b_1；企业2可以选择低价a_2，也可以选择高价b_2.
  - 效用函数如下表

企业1 \ 企业2	a_2	b_2
a_1	1, 2	0, 1
b_1	0, 4	1, 3

$\theta_1=x_1, \theta_2=x_2$

企业1 \ 企业2	a_2	b_2
a_1	1, 3	0, 4
b_1	0, 1	1, 2

$\theta_1=x_1, \theta_2=y_2$

贝叶斯均衡求解示例：贝叶斯定价博弈

- 博弈问题求解
  - 当$\theta_2 = x_2$时，b_2强劣于a_2；
  - 当$\theta_2 = y_2$时，b_2强优于a_2；
  - 当行动组合为(a_1, a_2)或(b_1, b_2)时，无论参与人2什么类型，参与人1都收益1；在所有其它行动组合中，参与人1收益为0。由于参与人1知道参与人2的类型更可能是x_1，也就是参与人2更倾向于a_2，所以参与人1更倾向于a_1。
  - 因此，纯策略贝叶斯均衡为：

$$\left(s_{x_1}^* = a_1, s_{x_2}^* = a_2, s_{y_2}^* = b_2\right)$$

- 均衡：企业1的策略是定低价，企业2的策略是若生产x_2定低价，y_2定高价

$$p_2(x_2|x_1) = 0.6, \quad p_2(y_2|x_1) = 0.4$$
$$p_2(x_1|x_2) = 1, \quad p_2(x_1|y_2) = 1$$

$\theta_1 = x_1, \theta_2 = x_2$的$\mu_1$和$\mu_2$

企业1 \ 企业2	a_2	b_2
a_1	1, 2	0, 1
b_1	0, 4	1, 3

$\theta_1 = x_1, \theta_2 = y_2$的$\mu_1$和$\mu_2$

企业1 \ 企业2	a_2	b_2
a_1	1, 3	0, 4
b_1	0, 1	1, 2

强优势策略及其均衡

强优势策略（Strongly Dominate Strategy）：

给定策略式博弈$\Gamma = \langle N, (\Theta_i), \{S_i\}_{i=1}^{n}, \{\mu_i(s_1, \dots, s_n)\}\rangle$及参与人$i$的策略$s_i^* \in S_i$，若$s_i^*$强优于此人任何其他策略，即$\forall \theta_i \in \Theta_i, \forall s_i \in S_i \wedge s_i \neq s_i^*: \mu_i((s_i^*, s_{-i})|\theta_i) > \mu_i((s_i, s_{-i})|\theta_i)$，$\forall s_{-i} \in S_{-i}$，则称$s_i^*$是参与人$i$的**强优势策略**。

强优势策略均衡

给定贝叶斯博弈 $\Gamma =< N, (\Theta_i), (S_i), (p_i), (\mu_i) >$ 及其一个策略组$(s_1^*, \cdots, s_n^*)$，若$\forall i \in N$；$\forall s_i: \Theta_i \to S_i; \forall s_i: \Theta_{-i} \to S_{-i}; \forall \theta_i \in \Theta_i$,

$$\mu_i((s_i^*, s_{-i})|\theta_i) > \mu_i((s_i, s_{-i})|\theta_i)$$

即，若$\forall\, \mathrm{i} \in N$; $\forall\, \mathrm{s}_i \in S_i$; $\forall\, \theta \in \Theta_i; \forall s_{-i}: \Theta_{-i} \to S_{-i}$:

$$\mathbb{E}_{\theta_{-i}}\left[\mu_i\left(\theta_i, \theta_{-i}, s_i^*(\theta_i), s_{-i}(\theta_{-i})\right)\right] > \mathbb{E}_{\theta_{-i}}\left[\mu_i\left(\theta_i, \theta_{-i}, s_i, s_{-i}(\theta_{-i})\right)\right]$$

则$(s_1^*, \cdots, s_n^*)$称为Γ的一个**强优势策略均衡**。

弱优势策略及其均衡

弱优势策略（Weakly Dominate Strategy）：

给定策略式博弈$\Gamma = \langle N, (\Theta_i), \{S_i\}_{i=1}^{n}, \{\mu_i(s_1, \dots, s_n)\}\rangle$及参与人$i$的策略$s_i^* \in S_i$，若$s_i^*$弱优于此人任何其他策略，则称$s_i^*$是参与人$i$的**弱优势策略**。

弱优势策略均衡

给定贝叶斯博弈$\Gamma =< N, (\Theta_i), (S_i), (p_i), (\mu_i) >$及其一个策略组$(s_1^*, \cdots, s_n^*)$，若$\forall i \in N$；$\forall s_i\colon \Theta_i \to S_i; \forall s_i\colon \Theta_{-i} \to S_{-i}; \forall \theta_i \in \Theta_i$,

$$\mu_i((s_i^*, s_{-i})|\theta_i) \geq \mu_i((s_i, s_{-i})|\theta_i)$$

且$\mu_i((s_i^*, s_{-i})|\theta_i) > \mu_i((s_i, s_{-i})|\theta_i)$，对于某个$s_{-i} \in S_{-i}$成立.

即，若$\forall i \in N$; $\forall\, s_i \in S_i$; $\forall \theta \in \Theta_i; \forall s_{-i}\colon \Theta_{-i} \to S_{-i}$:

$$\mathbb{E}_{\theta_{-i}}\left[\mu_i\left(\theta_i, \theta_{-i}, s_i^*(\theta_i), s_{-i}(\theta_{-i})\right)\right] \geq \mathbb{E}_{\theta_{-i}}\left[\mu_i\left(\theta_i, \theta_{-i}, s_i, s_{-i}(\theta_{-i})\right)\right]$$

$$\mathbb{E}_{\theta_{-i}}\left[\mu_i\left(\theta_i, \theta_{-i}, s_i^*(\theta_i), s_{-i}(\theta_{-i})\right)\right] > \mathbb{E}_{\theta_{-i}}\left[\mu_i\left(\theta_i, \theta_{-i}, s_i, s_{-i}(\theta_{-i})\right)\right]$$

对于某个$s_{-i} \in S_{-i}$成立,则$(s_1^*, \cdots, s_n^*)$称为Γ的一个弱优势策略均衡。

极弱优势策略及其均衡

极弱优势策略（Very Weakly Dominate Strategy）：

给定策略式博弈$\Gamma = \langle N, (\Theta_i), \{S_i\}_{i=1}^{n}, \{\mu_i(s_1, \dots, s_n)\}\rangle$及参与人$i$的策略$s_i^* \in S_i$，若$s_i^*$ 极弱优于此人任何其他策略，则称s_i^*是参与人i的**极弱优势策略**。

极弱优势策略均衡

给定贝叶斯博弈 $\Gamma =< N, (\Theta_i), (S_i), (p_i), (\mu_i) >$ 及其一个策略组$(s_1^*, \cdots, s_n^*)$，若$\forall i \in N$； $\forall s_i: \Theta_i \to S_i; \forall s_i: \Theta_{-i} \to S_{-i}; \forall \theta_i \in \Theta_i$,

$$\mu_i((s_i^*, s_{-i})|\theta_i) \geq \mu_i((s_i, s_{-i})|\theta_i)$$

即，若$\forall i \in N$; $\forall s_i \in S_i$; $\forall\ \theta \in \Theta_i; \forall s_{-i}: \Theta_{-i} \to S_{-i}$:

$$\mathbb{E}_{\theta_{-i}}\left[\mu_i\left(\theta_i, \theta_{-i}, s_i^*(\theta_i), s_{-i}(\theta_{-i})\right)\right] \geq \mathbb{E}_{\theta_{-i}}\left[\mu_i\left(\theta_i, \theta_{-i}, s_i, s_{-i}(\theta_{-i})\right)\right]$$

则$(s_1^*, \cdots, s_n^*)$称为Γ的一个**极弱优势策略均衡**。

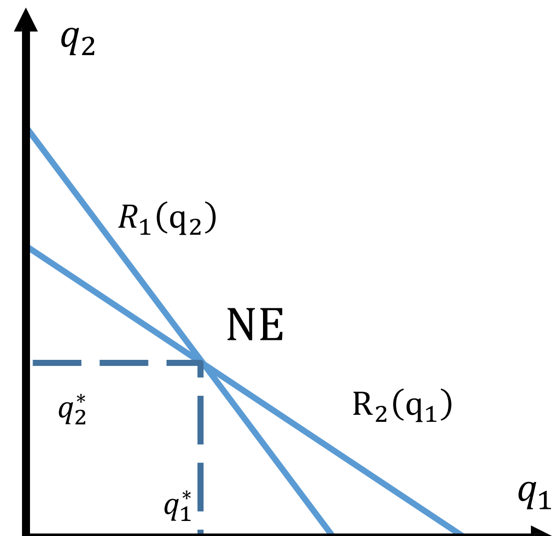
优势策略均衡举例：第二价格密封拍卖

- 问题描述：两买者的第二价格密封拍卖中，θ_i为各自对拍卖品的评价，b_i为各自的出价。
- 分析求解：令买者2报价为b_2，对买者1讨论以下情况：
  - 情形1：$\theta_1 \geq b_2$，$b_1 = \theta_1$为1强优势策略，收益为$\theta_1 - b_2 \geq 0$;
  - 情形2：$\theta_1 < b_2$，$b_1 = \theta_1$为1极弱优势策略，收益为0。
  - 所以，无论情形1还是2，在买者1的出价b_1等于其估价θ_1均为其最优反应。
  - 类似地，无论何种情况，买者2的出价b_2等于其估价θ_2也均为其最优反应。

均衡结果：无论何种情况，买者如实报价都是其最优反应，得到的均衡构成极弱优势策略均衡。
可以证明：该均衡也是一个弱优势策略均衡。

不完全信息双寡头竞争模型

- 库诺特（Cournot）双寡头竞争模型回顾
  - 两寡头（假定A和B）生产同质产品，每个企业的策略是选择产量，支付函数是利润，是产量的函数。
  - 形式化：$q_i \in [0, \infty)$表示第i个企业的产量，$C(q_i)$表示成本函数，$P(q)$表示价格函数，与产量成反比，利润函数$\mu_i(q_1, q_2) = q_i P(q_1 + q_2) - C(q_i), i = 1,2$
  - 令(q_1^*, q_2^*)是纳什均衡产量，则：



$$\begin{cases} q_1^* \in \operatorname{argmax} \mu_1(q_1, q_2^*) = q_1 P(q_1 + q_2^*) - C(q_1) \\ q_2^* \in \operatorname{argmax} \mu_2(q_1^*, q_2) = q_2 P(q_1^* + q_2) - C(q_2) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \dfrac{\partial \mu_1}{\partial q_1} = P(q_1 + q_2) + q_1 P'(q_1 + q_1) - C'(q_1) = 0 \\ \dfrac{\partial \mu_2}{\partial q_2} = P(q_1 + q_2) + q_2 P'(q_1 + q_1) - C'(q_2) = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} q_1^* = R_1(q_2) \\ q_2^* = R_2(q_1) \end{cases}$$

不完全信息双寡头竞争模型

- 博弈问题描述
  - 假设逆价格函数形式为$P(q_1, q_2) = a - q_1 - q_2$, 每个企业具有不变的单位成本，令企业$i$单位成本为$c_i$, 则其利润为$\pi_i = q_i(a - q_1 - q_2 - c_i)$，$i = 1, 2$。
  - 参与人的成本函数互不知道，可令参与人的类型是成本函数
  - 完全信息中：价格函数：$P = a - q_1 - q_2$ 单位成本：$c > 0$。
  - 不完全信息中：企业1的单位成本c_1是共同知识；企业2的单位成本可能是c_2^L也可能是c_2^H，$c_2^L < c_2^H$;参与人2知道自己的成本是c_2^L 还是c_2^H；参与人1只知道$c_2 = c_2^L$的概率是μ，$c_2 = c_2^H$的概率是(1−μ)，μ是共同知识。
  - 为了更加直观一些，假定$a = 2, c_1 = 1, c_2^L = 3/4, c_2^H = 5/4, \mu$=1/2。(这样假设是为了让二者的期望成本相同)

不完全信息双寡头竞争模型

- 博弈问题求解过程

首先，给定企业2知道企业1的成本，企业2将选择q_2最大化利润函数:

$$\pi_2 = q_2\,(a - q_1 - q_2 - c_2)$$

令$\frac{\partial \pi_2}{\partial q_2} = 0$, 得到 $q_2^*(q_1; c_2) = \frac{1}{2}(a - c_2 - q_1)$，进而有:

$$q_2^L = \frac{1}{2}\left(\frac{5}{4} - q_1\right), \quad q_2^H = \frac{1}{2}\left(\frac{3}{4} - q_1\right)$$

其次，企业1不知道企业2的成本，企业1将最大化期望利润函数:

$$\mathrm{E}\pi_1 = \frac{1}{2} q_1 (a - q_1 - q_2^L - c_1) + \frac{1}{2} q_1 (a - q_1 - q_2^H - c_1)$$

令$\frac{\partial \mathrm{E}\pi_1}{\partial q_1} = 0$，得到: $q_1^*(q_2) = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{2} q_1^L - \frac{1}{2} q_1^H\right) = \frac{1}{2}(1 - \mathrm{E}q_2)$

根据纳什均衡，代入具体值，$q_1^*(q_2)$和$q_2^*(q_1; c_2)$达到均衡时满足:

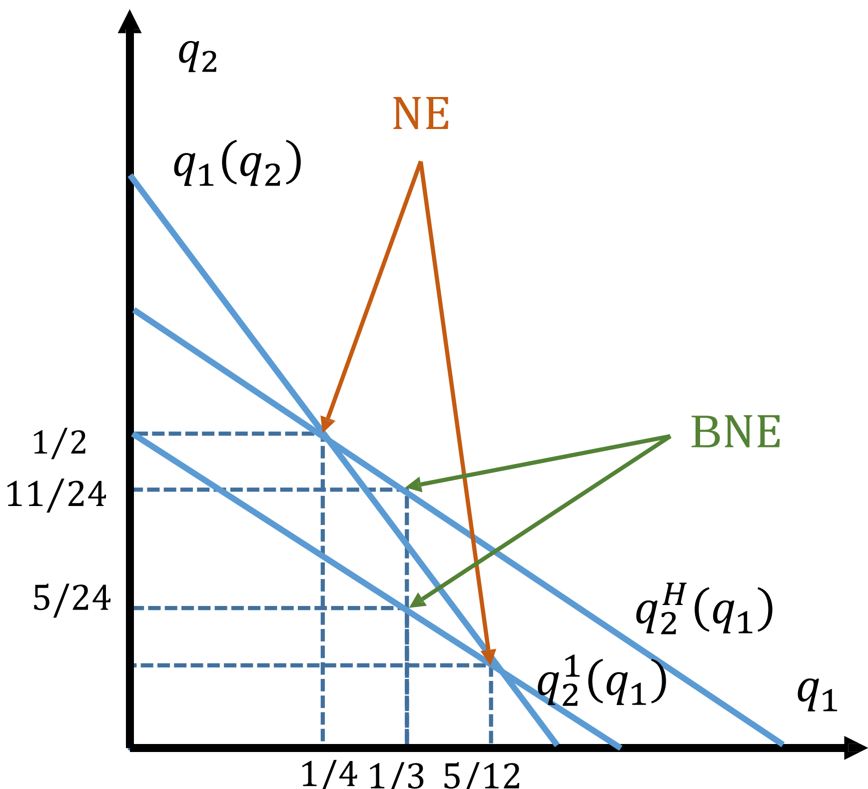
$$q_1^* = \frac{1}{3}, q_2^{L*} = \frac{11}{24}, q_2^{H*} = \frac{5}{24}$$

不完全信息双寡头竞争模型

- 博弈均衡结果分析
  - 在完全信息条件下，企业1知道企业2的成本函数，双方的反应函数为：$q_1^* = 1/2\,(1-q_2)$，$q_2^* = 1/2\,(5/4-q_1)$
  - 那么，企业2低成本和高成本时的纳什均衡分别为：
    - 低成本：$q_{1L}^{NE} = 1/4, q_{2L}^{NE} = 1/2$
    - 高成本：$q_{1H}^{NE} = 5/12, q_{2H}^{NE} = 1/6$
  - 两种均衡之间的关系：

$$q_{1L}^{NE} = \frac{1}{4} \le q_1^* = \frac{1}{3}; q_{2L}^{NE} = \frac{1}{2} \ge q_2^{L*} = \frac{11}{24}$$

$$q_{1H}^{NE} = \frac{5}{12} \ge q_1^* = \frac{1}{3}; \mathrm{q}_{2H}^{NE} = \frac{1}{6} \le q_2^{H*} = \frac{5}{24}$$



总结：当企业1不知道c_2时，只能生产预期的最优产量，高于完全信息下低成本对手的产量，低于高成本对手的量，企业2相应地做出最优反应。

不完全信息下的公共产品提供博弈

- 博弈问题描述
  - 两个参与人，$i = 1, 2$。
    - 同时决定是否提供公共产品
    - 参与人 i 提供产品的成本为c_i
    - 决策：提供 $a_i = 1$ 或不提供$a_i = 0$
    - 支付矩阵见右图
    - 成本c_1和c_2具有独立、相同的定义在$[\underline{c}, \overline{c}]$上的分布函数 $F(\cdot)$ （因此，$F(\underline{c})$ =0，$F(\overline{c}) = 1$），其中$\underline{c} < 1 < \overline{c}$， $F(\cdot)$是共同知识。

参与人1 \ 参与人2	提供	不提供
提供	1-c_1, 1-c_2	1-c_1, 1
不提供	1, 1-c_2	0, 0

  - 假设：参与人知道自己的成本，不知道对方的成本，双方成本函数的分布是共同知识，公共产品的好处是双方共同知识。
  - 博弈的一个纯策略函数$a_i(c_i)$是从 $[\underline{c}, \overline{c}]$到$\{0,1\}$的一个函数，其中0表示不提供，1表示提供。参与人$i$的支付函数为：

$$u_i(a_i, a_j, c_i) = \max(a_1, a_2) - a_i c_i$$

  - 最优策略组合$\left(a_1^*(\cdot), a_2^*(\cdot)\right)$是使得对于每一个$i$和每一个可能的$c_i$，$a_i^*(\cdot)$最大化参与人$i$的期望效用函数$\mathrm{E}_{c_j}\mu_i\left(a_i, a_j^*(c_j), c_i\right)$

不完全信息下的公共产品提供博弈

- 贝叶斯均衡求解
  - 注意对照右图

参与人1 \ 参与人2	提供	不提供
提供	$1-c_1, 1-c_2$	$1-c_1, 1$
不提供	$1, 1-c_2$	$0, 0$

令$z_j = \text{Prob}\big(a_j^*(c_j) = 1\big)$表示均衡状态下参与人$j$提供的概率，

$1 - z_j$：表示均衡状态下参与人j不提供的概率；

参与人i提供时的预期收益：$\big(1 - z_j\big)(1 - c_i) + z_j(1 - c_i) = 1 - c_i$；

参与人i不提供的预期收益：$\big(1 - z_j\big) \cdot 0 + z_j \cdot 1 = z_j$；

参与人i提供的条件：$1 - c_i \geq z_j$，即：当$c_i \leq 1 - z_j$，$a_i^*(c_i) = 1$；$c_i \geq 1 - z_j$，$a_i^*(c_i) = 0$；分割点$c_i^* = 1 - z_j$；

因为$z_j = \text{Prob}\big(\underline{c} \leq c \leq c_j^*\big) = F\big(c_j^*\big)$，则有$c_i^* = 1 - F\big(c_j^*\big)$；

由于对称性，c_i^*和c_j^*都满足：$c_i^* = 1 - F\big(1 - F(c_i^*)\big)$；

当$F(\cdot)$是[0,2]上的均匀分布时$c^* = 2/3$。

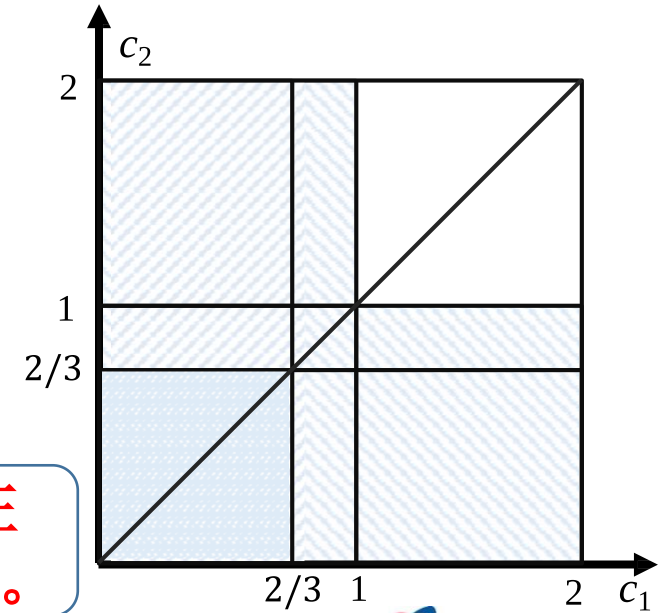
贝叶斯纳什均衡：当$c_i \leq c^* = 2/3$时，参与人i提供；当$c_i > c^* = 2/3$时，不提供。

不完全信息下的公共产品提供博弈

- 与完全信息下的问题比较
  - 当c_1和c_2都小于1时：斗鸡博弈
    - 均衡点1：（提供，不提供）
    - 均衡点2：（不提供，提供）

参与人1 \ 参与人2	提供	不提供
提供	$1\text{-}c_1$, $1\text{-}c_2$	$1\text{-}c_1$, 1
不提供	1, $1\text{-}c_2$	0, 0

  - 当$c_1 < 1, c_2 > 1$或$c_2 < 1, c_1 > 1$时：智猪博弈
    - $c_1 < 1, c_2 > 1$：（提供，不提供）
    - $c_1 < 1, c_2 > 1$：（不提供，提供）
  - 当c1和c_2都大于1时：囚徒博弈
    - 均衡点：（不提供，不提供）
- 具体决策区域和相互关系见右图



囚徒困境博弈的本质特征是：存在唯一一个占优均衡的2×2矩阵博弈。

一级密封价格拍卖

- 拍卖问题：非常重要的一类博弈问题。
- 一级密封价格拍卖博弈问题描述
  - 考虑两个投标人，$i = 1, 2$。
  - 投标人i的出价$b_i \geq 0$。价高者按照他的出价得到拍卖品。
  - 拍卖品对i的真正价值v_i。（私有信息，即参与人类型）
  - 共同知识：两个人都知道对方的v_i取自定义在区间[0,1]上的均匀分布函数。
  - 支付函数：
  - $u_i(b_i, b_j; v_i) = \begin{cases} v_i - b_i, & if\ b_i > b_j, \\ \frac{1}{2}(v_i - b_i), & if\ b_i = b_j, \\ 0, & if\ b_i < b_j. \end{cases}$
  - 假设：投标人i 的出价b_i是其价值v_i的严格递增可微函数。
  - 注：$b_i \leq 1$，没有理性人愿意付出比物品价值本身还高的价格。

一级密封价格拍卖

- 博弈均衡求解过程
  - 考虑对称的均衡出价策略：$b = b^*(v)$。
  - 给定v和b，投标人i的期望支付为：$\mu_i = (v - b)Prob\left(b_j < b\right)$
    - 期望支付的第一项表示给定赢的情况下投标人i的净所得。
    - 期望支付的第二项表示能赢的概率
  - 根据对称性，$b_j = b^*\left(v_j\right)$，所以
    - $Prob\left(b_j < b\right) = Prob\left(b^*\left(v_j\right) < b\right) = Prob\left(v_j < b^{*-1}(b)\right)$
    - 记逆函数$b^{*-1}(b) = \Phi(b)$，表示投标人选择b时他的估值是$\Phi(b)$，而对于均匀分布$Prob(x < k) = k$，$Prob\left(b_j < b\right) = \Phi(b)$
  - 投标人i的目标是：
    - $\max\limits_b \mu_i = (v - b)Prob\left(b_j < b\right) = (v - b)\ \Phi(b)$
    - 一阶条件为：$-\Phi(b) + (v - b)\Phi'(b) = 0$
    - 将逆函数的定义$\Phi(b) = v$代入得到：$\Phi(b) = (\Phi(b) - b)\Phi'(b)$
    - 解的$b^* = v/2$

一级密封价格拍卖

- 博弈均衡求解结果
  - 这个不完全信息静态博弈的均衡是：每个投标人出价是其实际价值的一半：$b^* = v/2$
- 博弈结果分析
  - 均衡情况下，拍卖物品被评价最高的投标人获得，这是合理的。
  - 但是卖者只得到买者估值的一半。
  - 若是完全信息，那么卖者将得到买者估值的所有。
  - 若是有更多的参与人而且每个人的都标价格独立：

$$b^*(v) = \frac{n-1}{n} v$$

  - 更多的人竞价，卖者的利益会增加。

双方叫价拍卖

- 一般情况：潜在的卖者和买者同时开价，卖者提出要价，买者提出出价；还存在一个拍卖商，选择成交价格p清算市场。所有要价低于p的卖出，所有出价高于p的买入。在价格p下的总供给等于总需求。
- 简化情况：
  - 一个买者，一个卖者，决定是否交换一单位的商品；
  - 卖者提供成本c，买者提供价值v，$c \in [0,1], v \in [0,1]$;
  - 二者同时给出要价和出价，分别为$p_s \in [0,1], p_b \in [0,1]$;
  - 若$p_s \leq p_b$，双方在$p = (p_s + p_b)/2$上成交；若$p_s > p_b$，则交易取消。
  - 效用函数也分两种情况：
    - 若$p_s \leq p_b, \mu_s = \frac{(p_s+p_b)}{2} - c, \mu_b = v - \frac{p_s+p_b}{2}$;
    - 若$p_s > p_b, \mu_s = \mu_b = 0.$

双方叫价拍卖

- 完全信息情况下的分析：
  - 若c和v是共同知识，若$v > c$，估值比成本高，而且彼此都知道：有连续的纯策略、帕累托有效均衡，$p_s = p_b = p \in [c, v]$，每方都有正的剩余。
  - 还有可能存在无效的均衡：卖者要价高于v, 买者出价低于c，双方都没有认真开价。
- 不完全信息情况下的分析：
  - 只有卖者知道成本c，只有买者知道v，c和v即为二者的类型。
  - 假设c和v是在[0,1]上的均匀分布，分布函数$P(\cdot)$是共识。
  - 卖家的策略（要价）$p_s(c)$，买家的策略（出价）$p_b(v)$。
  - 接下来我们来定义和分析这种情况下的贝叶斯均衡。

双方叫价拍卖

- 问题分析过程：不完全信息情况下的分析
- 如果以下两个条件成立，策略组合$\left(p_s^*(c), p_b^*(v)\right)$是一个贝叶斯均衡：
  - 1.卖者最优：对所有的$c \in [0,1]$， $p_s^*(c)$是下列最优化问题的解：

$$\max_{p_s}\left[\frac{1}{2}\left(p_s + E[p_b(v) | p_b(v) \geq p_s]\right) - c\right]$$
$$Prob\{p_b(v) \geq p_s\}$$

  - 2.买者最优：对所有的$v \in [0,1]$， $p_b^*(v)$是下列最优化问题的解：

$$\max_{p_b}\left[v - \frac{1}{2}\left(p_b + E[p_s(c) | p_b \geq p_s(c)]\right)\right]$$
$$Prob\{p_b \geq p_s(c)\}$$

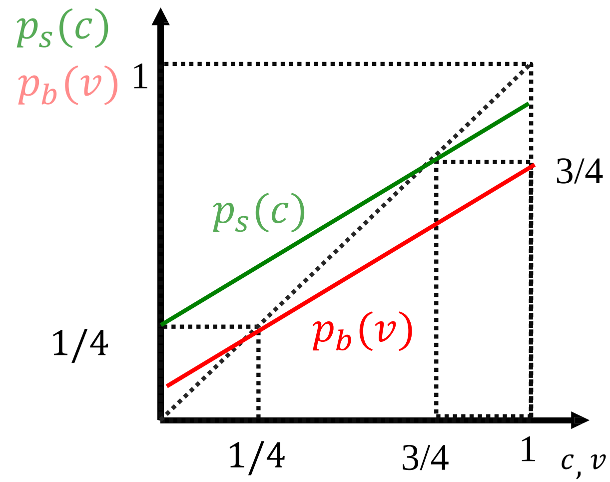
- 满足这种条件的贝叶斯纳什均衡不只一个。

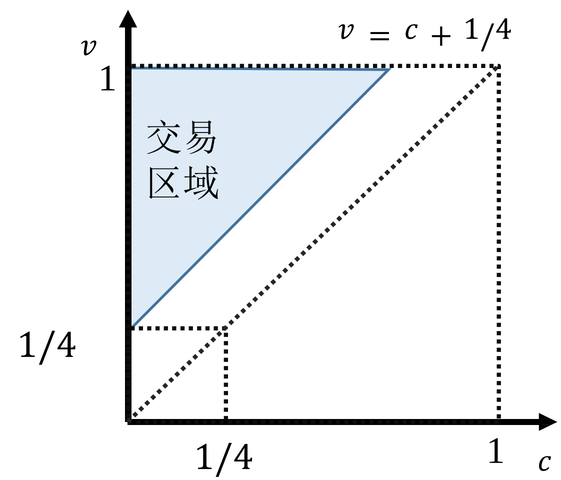
双方叫价拍卖

- 问题分析过程：不完全信息情况下的分析
  - 假设二者均使用线性策略： $p_s(c)=\alpha_s+\beta_s c$， $p_b(v)=\alpha_b+\beta_b v$.
  - 代入卖者最优条件，
    - 对于均匀分布$Prob(x<k)=k$
    - $Prob\{p_b(v)\geq p_s\}= Prob\{\alpha_b+\beta_b v\geq p_s\}=Prob\left\{v\geq\frac{p_s-\alpha_b}{\beta_b}\right\}=\frac{\alpha_b+\beta_b-p_s}{\beta_b}$
    - $E[p_b(v)|p_b(v)\geq p_s]=\frac{\frac{1}{\beta_b}\int_{p_s}^{\alpha_b+\beta_b}xdx}{Prob\{p_b(v)\geq p_s\}}=\frac{1}{2}(p_s+\alpha_b+\beta_b)$
    - 代入 $\max\limits_{p_s}[\frac{1}{2}(p_s+E[p_b(v)|p_b(v)\geq p_s])-c]$ 得：
      - $\max\limits_{p_s}[\frac{1}{2}\left(p_s+\frac{1}{2}(p_s+\alpha_b+\beta_b)\right)-c]\frac{\alpha_b+\beta_b-p_s}{\beta_b}$
    - 最优化一阶条件得到：
      - $p_s=\frac{1}{3}(\alpha_b+\beta_b)+\frac{2}{3}c$

双方叫价拍卖

- 问题分析过程：不完全信息情况下的分析：
  - 假设二者均使用线性策略： $p_s(c) = \alpha_s + \beta_s c$， $p_b(v) = \alpha_b + \beta_b v$.
  - 代入卖者最有条件得到：
    - $p_s = \frac{1}{3}(\alpha_b + \beta_b) + \frac{2}{3}c$
  - 同理，代入买家最优条件得到：
    - $p_b = \frac{1}{3}\alpha_s + \frac{2}{3}v$
  - 解得：
    - $p_s(c) = \frac{1}{4} + \frac{2}{3}c$， $p_b(v) = \frac{1}{12} + \frac{2}{3}v$
  - 在均衡条件下：
    - $c > \frac{3}{4}$,卖家的要价低于成本，交易取消；
    - $v < \frac{1}{4}$,买家的出价高于估值，交易取消；
    - 当且仅当$\alpha_b + \beta_b v > \alpha_s + \beta_s c$，即$v \geq c + 1/4$，交易发生。





贝叶斯博弈与混合策略均衡

不完全信息中的贝叶斯纳什均衡

- 参与人i知道参与人j 的类型分布
- 但参与人i不知道参与人j将要选择那种类型

完全信息中的混合策略纳什均衡

- 参与人i知道参与人j的纯策略分布
- 但参与人i不知道参与人j将要执行哪种策略

- 定理：完全信息情况下的混合策略均衡可以解释为不完全信息情况下的纯策略均衡的极限（海萨尼，1973）。

贝叶斯博弈与混合策略均衡举例

- 抓钱博弈：混合纳什均衡
  - 桌上放了一块钱，两个人伸手去抓
  - 同时抓，每人罚一块
  - 都不抓，什么都不得
  - 只有一人抓，得一块

参与人2 / 参与人1	抓	不抓
抓	-1, -1	1, 0
不抓	0, 1	0, 0

- 均衡分析：两个非对称纯策略均衡（一人抓，一人不抓），一个对称混合策略均衡（两人同时以1/2的概率抓）
- 不完全信息抓钱博弈
  - 参与人 i 具有私有信息θ_i
  - θ_i在$[-\epsilon,+\epsilon]$区间上均匀分布

参与人2 / 参与人1	抓	不抓
抓	-1, -1	$1+\theta_1$, 0
不抓	0, $1+\theta_2$	0, 0

贝叶斯博弈与混合策略均衡举例

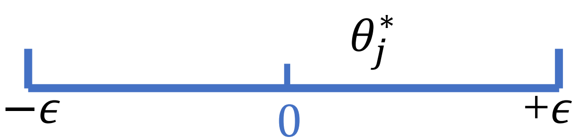
参与人2 / 参与人1	抓	不抓
抓	-1, -1	$1+\theta_1, 0$
不抓	$0, 1+\theta_2$	0, 0

- 不完全信息抓钱博弈
  - 对于参与人i，考虑如下纯策略：
    - 如果$\theta_i \geq \theta_i^*$，选择抓
    - 如果$\theta_i \leq \theta_i^*$，选不抓
  - 参与人i选择抓（用1表示）的期望利润为：

$$u_i(1) = \left(1 - \frac{\theta_j^* + \epsilon}{2\epsilon}\right)(-1) + \left(\frac{\theta_j^* + \epsilon}{2\epsilon}\right)(1 + \theta_i^*)$$

令$u_i(1) = 0$得到$2\theta_j^* + \theta_j^*\theta_i^* + \epsilon\theta_i^* = 0$

由于对称性$\theta_i^* = \theta_j^*$，得到：$\theta_i^* = \theta_j^* = 0$



当$\epsilon \to 0$，上述不完全信息纯策略贝叶斯均衡就收敛为一个完全信息的混合策略纳什均衡。

贝叶斯博弈与混合策略均衡举例

男＼女	足球	芭蕾
足球	2, 1	0, 0
芭蕾	0, 0	1, 2

- 性别战博弈
  - 完全信息静态博弈时，支付矩阵如右图:
    - 纯策略纳什均衡:{足球,足球},{芭蕾,芭蕾}
    - 混合策略均衡：男2/3的概率选择足球；女2/3的概率选芭蕾。
  - 不完全信息静态博弈时：
    - 假设他们对对方的偏好未知，如果都去足球场男生的效用$2+\theta_m$; 如果都去芭蕾女生的效用$2+\theta_f$；θ_m只有男生知道，θ_f只有女生知道，但是二者共同知识是θ_m和θ_f都服从$[0,x]$上的均匀分布。
    - 构造贝叶斯纳什均衡：存在一个$\theta_m^* \in [0,x]$和一个$\theta_f^* \in [0,x]$，如果$\theta_m \geq \theta_m^*$，男生将选择足球；如果$\theta_f > \theta_f^*$，女生将选择芭蕾。男生选足球的概率$\left(1-\frac{\theta_m^*}{x}\right)$，女生选芭蕾的概率$(1-\frac{\theta_f^*}{x})$。

男＼女	足球	芭蕾
足球	$2+\theta_m, 1$	0, 0
芭蕾	0, 0	$1, 2+\theta_f$

贝叶斯博弈与混合策略均衡举例

男 \ 女	足球	芭蕾
足球	$2+\theta_m, 1$	$0, 0$
芭蕾	$0, 0$	$1, 2+\theta_f$

- 性别战博弈：求解纳什均衡
  - 给定男生策略，女生的期望效用函数：
    - 足球：$\left(1-\frac{\theta_m^*}{x}\right)\times 1+\frac{\theta_m^*}{x}\times 0=1-\frac{\theta_m^*}{x}$
    - 芭蕾：$\left(1-\frac{\theta_m^*}{x}\right)\times 0+\frac{\theta_m^*}{x}\times\left(2+\theta_f\right)=\frac{\theta_m^*}{x}\times\left(2+\theta_f\right)$
    - 令$1-\frac{\theta_m^*}{x}=\frac{\theta_m^*}{x}\times\left(2+\theta_f\right)$，化简得到：$x-\theta_m^*=\theta_m^*(2+\theta_j^*)$
  - 根据对称，解得：$\theta^*=(-3+\sqrt{9+4x})/2$
  - 贝叶斯均衡是：
    - 男生：如果$\theta_m\geq\theta^*$，选择足球；否则选择芭蕾；
    - 女生：如果$\theta_f\geq\theta^*$，选择芭蕾；否则选择足球。
    - 给定不完全信息，男生认为女生选芭蕾的概率(女生认为男生选择足球的概率)：$1-\left(-3+\sqrt{9+4x}\right)/2x$
    - 当$x\to 0$，上述概率收敛于2/3，即完全信息下混合策略的概率。

混合策略均衡的纯化定理

混合策略均衡的纯化定理（Harsanyi，1973）

给定策略式表示的博弈$G=\{A_1,\cdots,A_n;u_1,\cdots,u_n\}$，对于所有定义在$[-1,1]$上的独立的二阶可微分布函数$P_i(\cdot)$，以$u_i$为支付函数的博弈的任何均衡都是当$\epsilon\rightarrow 0$时以$\widetilde{u_i}$为不确定化支付函数的博弈的纯策略均衡序列的一个极限。更为准确的说，不确定化博弈纯策略均衡的均衡策略的概率分布收敛于确定博弈的均衡策略的概率分布。

- 完全信息博弈的混合均衡策略均衡可以解释为不完全信息中“微扰动博弈”纯策略均衡的极限。换言之，完全信息博弈是一种非常理想的情形，因为通常情况下参与人关于其它人目标信息至少在某种程度上是不完全的。

本次课程作业

- 作业内容：寻找存在静态贝叶斯博弈应用示例的不完全信息静态博弈习题两道，给出习题描述、问题分析、求解过程和最终结果。
  - 评分准则：选取习题的典型性、分析求解过程的完整性以及最终结果的指导性意义。
- 提交时间：2020年10月29日17:00之前
- 提交方法：在课程网站上提交，同时提交作业Word版到助教邮箱（ kangyongxin2015@ia.ac.cn ）
- 邮件发送规范
  - 邮件主题：计算博弈第四次作业_学号_姓名
  - 附件名称：计算博弈第四次作业_学号_姓名.docx

感谢聆听！

兴军亮

Junliang.Xing@ia.ac.cn

2020年10月24日