第二讲：计算博弈基础知识

李凯

kai.li@ia.ac.cn

2020年9月24日

中国科学院大学
University of Chinese of Academy of Sciences

CASIA 自动化研究所
Institute of Automation

本讲提纲

1 博弈表示方法

2 常见博弈类型

3 博弈的解概念

4 课程设计任务

本讲提纲

1 博弈表示方法

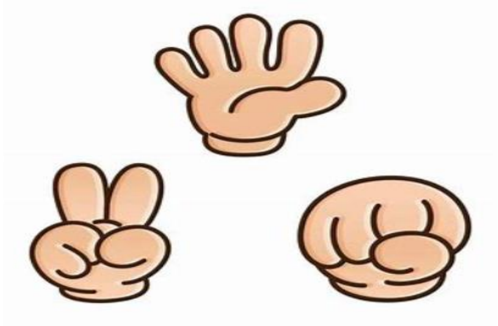
2 常见博弈类型

3 博弈的解概念

4 课程设计任务

博弈论（Game Theory）

- 博弈论的定义
  - 研究互动局势下理性人的策略行为的科学
- 现实世界中的博弈






博弈的基本要素

- **参与人（Players）**：是博弈的行为主体，自然人、智能体、企业、团体等，$N=\{1,2,\ldots,i,\ldots,n\}$表示参与人集合
  - 石头剪刀布博弈中，$N=\{1,2\}$
- **策略（Strategy）**：参与人i的策略集合为$S_i, s_i\in S_i$，$\mathbf{s}=(s_i,\ldots,s_n)$为所有参与人的策略组合（strategy profile），博弈的策略空间为$S=\times_{1\le i\le n} S_i$（笛卡尔积）
  - S_i={石头，剪刀，布}
  - S ={(石头、石头)，（石头、剪刀），(石头、布），…}
- **收益（Utility）函数**：又称支付（Payoff）函数，是参与人最关心的，$\boldsymbol{u}=(u_1,u_2,\ldots,u_n), u_i:\mathbf{s}\to R$
  - u_1(石头，剪刀)=1
  - u_2(石头，剪刀)=-1

纯策略和混合策略

- 参与人在给定情况下只选择一种特定的行动，我们就称该策略为纯（Pure）策略
  - 前面讲的集合S_i中的每一个元素就是参与人i的一个纯策略
- 参与人在给定情况下以某种概率分布随机选择不同的行动，我们就称该策略为混合（ Mixed ）策略

混合策略（Mixed Strategy）

假设i有K个纯策略：$S_i = \{s_{i1}, \ldots, s_{iK}\}$，概率分布$\sigma_i = (\sigma_{i1}, \ldots, \sigma_{iK})$为$i$的一个混合策略，$\sigma_{ik}$是$i$选择纯策略$s_{ik}$的概率

纯策略是混合策略的一个特例

- 对于石头剪刀布博弈来说：
  - 纯策略：只出石头，$\sigma_i = (1,0,0)$
  - 混合策略：等概率出石头剪刀布，$\sigma_i = (1/3,1/3,1/3)$

混合策略的表示

- 参与人i的某一混合策略：$\sigma_i = (\sigma_{i1}, \dots, \sigma_{i2}, \dots, \sigma_{ik})$
- 参与人i的混合策略集合：Σ_i，$\sigma_i \in \Sigma_i$
- 所有参与人的某一混合策略组合：$\sigma = (\sigma_1, \dots, \sigma_i, \dots, \sigma_n)$
- 博弈的混合策略空间：$\Sigma = \times_i \Sigma_i$
- 参与人i的期望收益函数（Expected Utility）：
  - $v_i(\sigma) = v_i(\sigma_i, \sigma_{-i}) = \sum_{\boldsymbol{s}\in S} p(\boldsymbol{s}) u_i(\boldsymbol{s})$
  - $p(\boldsymbol{s}) = \prod_j^n \sigma_j(s_j)$
  - 将参与人i在所有策略组合下的收益按照该策略组合出现的概率进行加权平均
  - 每个策略组合出现的概率等于各个纯策略概率的乘积
  - σ_{-i}代表除了参与人i之外其他参与人的混合策略组合

用矩阵来表示博弈

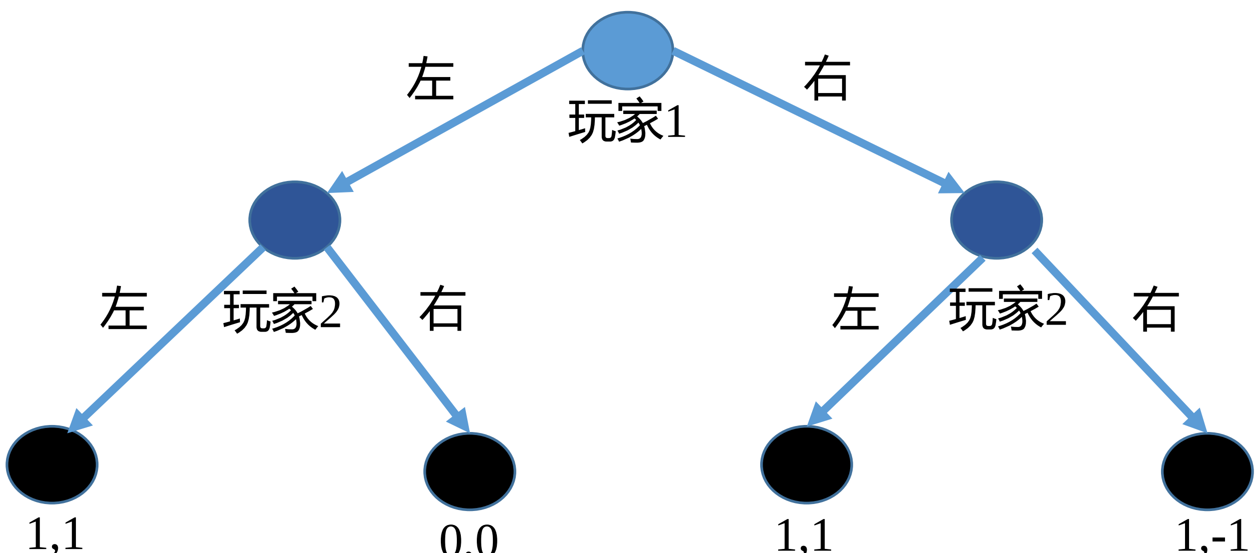
- 通常用来表示参与人**同时选择策略**的博弈，如石头剪刀布、囚徒困境等
- 也称策略式（Strategic-form）表示，或标准式（Normal-form）表示
- 用多维矩阵的方式来表示：
  - 博弈的参与人：$i \in N, N = (1,2,\ldots,n)$，决定矩阵维度
  - 每个参与人的纯策略集合：$S_i, i = 1,2,\ldots,n$，决定每一维大小
  - 每个参与人的收益：$u_i(s_1,\ldots,s_i,\ldots,s_n)$，决定每一个元素

囚徒A \ 囚徒B	坦白	抵赖
坦白	2,2	0,3
抵赖	3,0	1,1

玩家1 \ 玩家2	石头	剪刀	布
石头	0, 0	1,-1	-1,1
剪刀	-1,1	0,0	1,-1
布	1,-1	-1,1	0,0

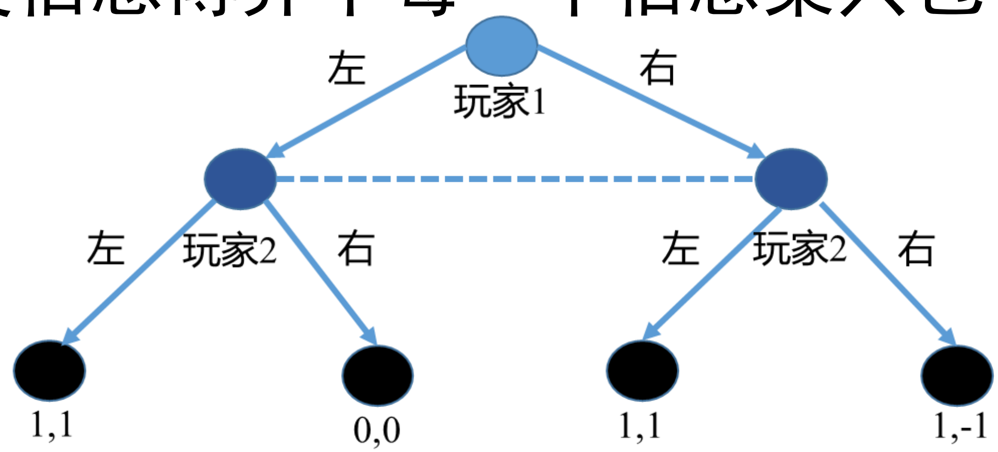
用树来表示博弈

- 通常用来表示参与人**行动有先后顺序**的博弈
- 一般称为博弈的扩展式表示（Extensive-form）
- 用博弈树来表示：
  - 节点：某一参与者的决策点
  - 边：每一个可选动作就代表一条边
  - 叶子：代表博弈结束，并返回每一个参与者的收益



博弈中的不完美信息

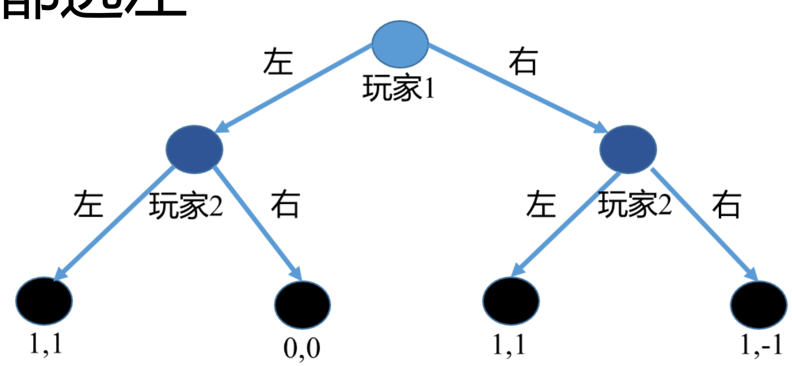
- 不完美信息（Imperfect Information）：一些参与者观测不到其他参与者的动作选择
- 信息集（Information Set，博弈论中非常重要的概念）：
  - 1）集合中的每个节点都是同一个参与人进行决策；2）参与人知道博弈进入该集合，但是不知道自己具体在哪一个节点；3）每一个信息集中节点的可选动作都相同
- 每一个信息集对应一个“决策点”
- 完美信息博弈中每一个信息集只包含一个节点



玩家2不知道玩家1选了左还是右

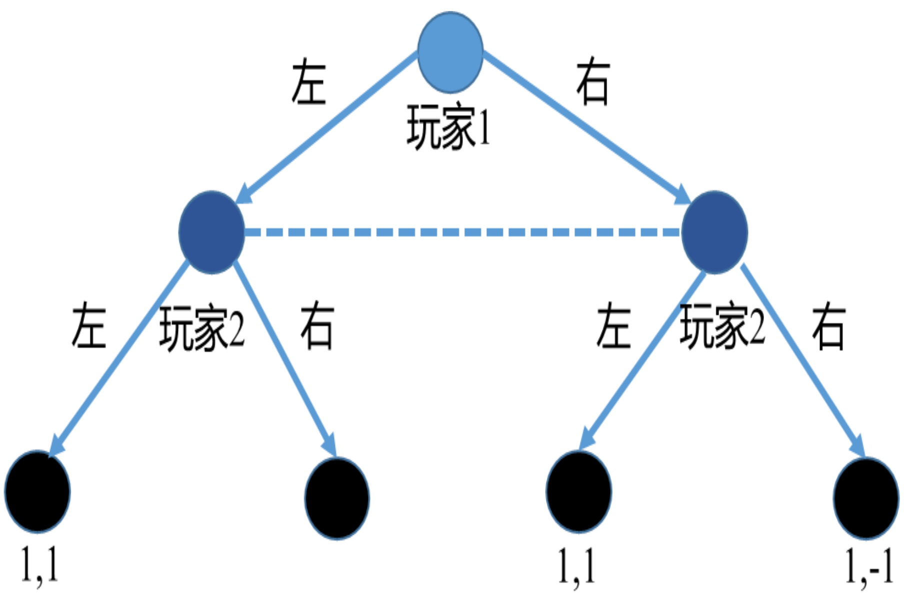
扩展式博弈中的纯策略集合

- 扩展式博弈中的一个纯策略描述了参与者在其所有决策点（信息集）的动作选择
- 每一个参与人i的纯策略集合S_i：
  - S_1 = {左，右}，玩家1有两个纯策略
  - 玩家2有两个决策点，每个决策点2种动作选择→4个纯策略
  - S_2 = {左左，左右，右左，右右}，玩家2有4个纯策略
  - 代表什么含义?
  - 左左：不管玩家1如何选择玩家2都选左
  - 左右：1左2也左，1右2也右
  - 右左：1左2右，1右2左
  - 右右：不管1如何，2都右



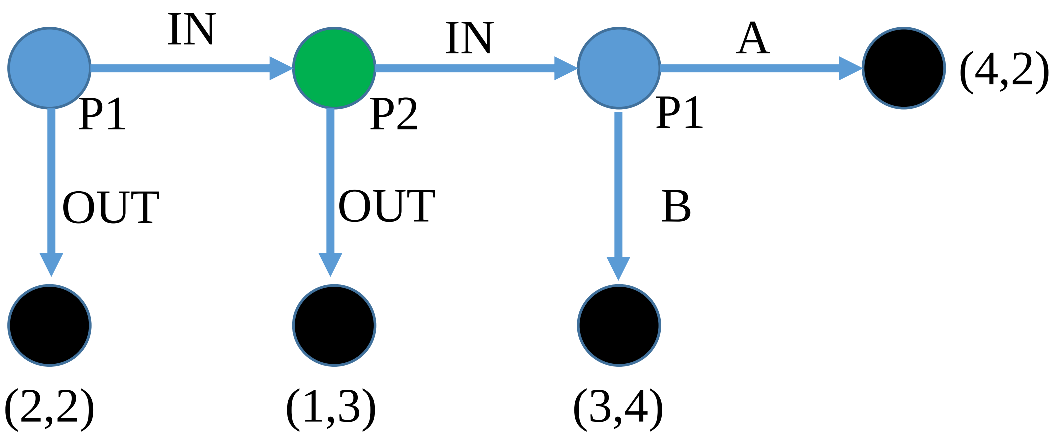
扩展式博弈中的纯策略集合

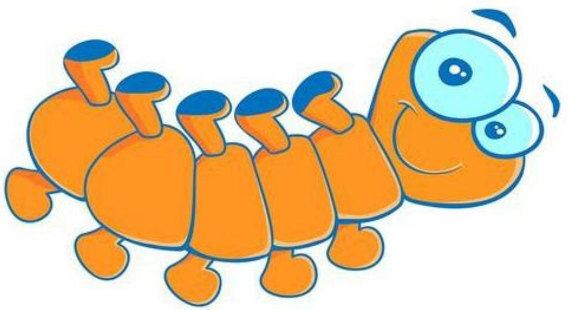
- 不完美信息条件下，每一个参与人i的纯策略集合S_i：
  - S_1 = {左，右}，玩家1有2个纯策略
  - S_2 = {左，右}，玩家2也有2个纯策略
  - 玩家2为什么只有2个纯策略？这和上个例子有什么不同？
  - 因为玩家2只有1个决策点（信息集），该信息集下只有2个动作可供选择，因此玩家2只有两个纯策略



扩展式博弈中的纯策略集合：练习

- 蜈蚣博弈（The Centipede Game）

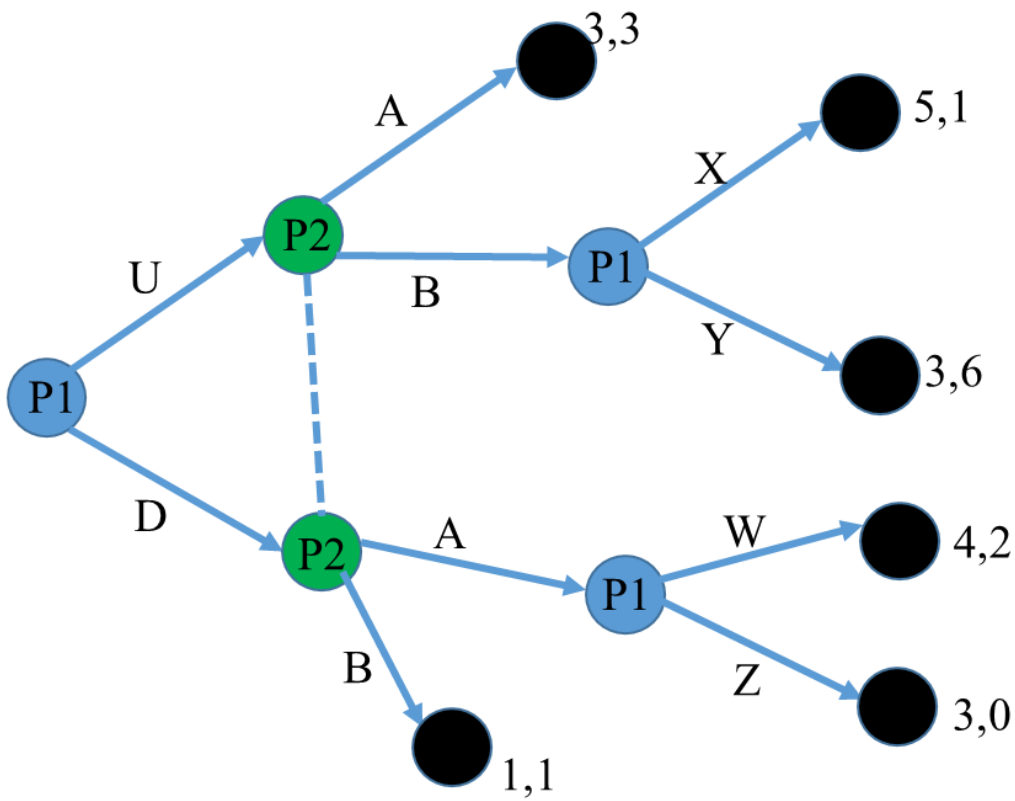




- S_2 ={IN, OUT}
- S_1 ={IN A, IN B, OUT A, OUT B}
  - 很多人会有疑问：P1选了OUT之后博弈就结束了，为什么还要指定后续的动作?
  - 回忆定义：扩展式博弈的一个纯策略描述了参与者在其所有决策点（信息集）的动作选择，不能只指定部分决策点的选择！

扩展式博弈中的纯策略集合：练习

- 不完美信息博弈



- S_1 ={UXW,UXZ,UYW,UYZ,DXW,DXZ,DYW,DYZ }
- S_2 ={A,B}，玩家2只有1个决策点！

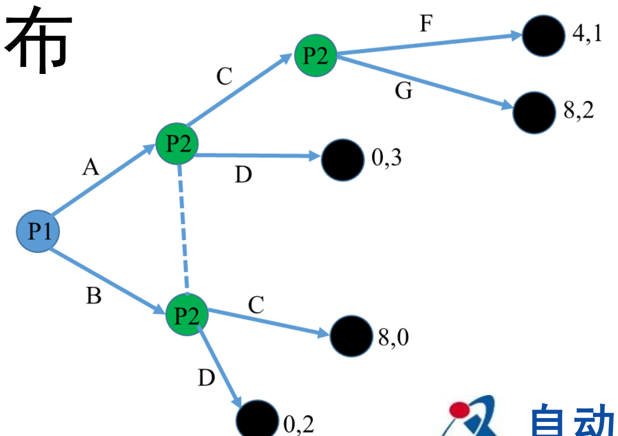
扩展式博弈中的混合策略

- 与矩阵式博弈相同：

混合策略（Mixed Strategy）

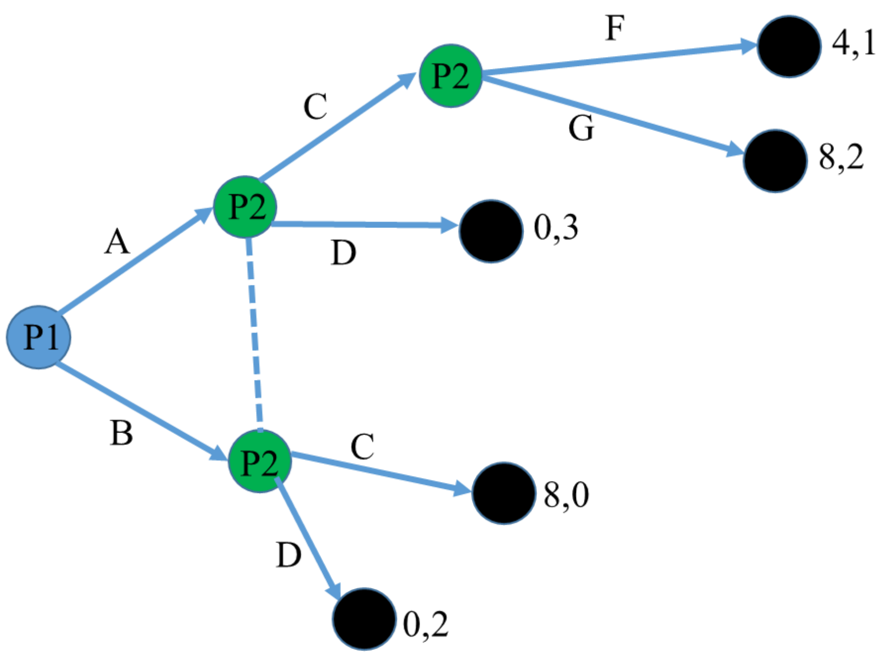
假设i有K个纯策略：$S_i = \{s_{i1}, \dots, s_{iK}\}$，概率分布$\sigma_i = (\sigma_{i1}, \dots, \sigma_{iK})$为$i$的一个混合策略，$\sigma_{ik}$是$i$选择纯策略$s_{ik}$的概率

- 玩家1的纯策略集合S_1 ={A,B}，它的一个混合策略σ_1为S_1上的某一概率分布
- 玩家2的纯策略集合S_2 ={CF,CG,DF,DG}，它的一个混合策略σ_2同样为S_2上的某一概率分布



扩展式博弈中的行为策略

- 玩家i的行为策略（Behavioral Strategy）：
  - 为玩家i每一个决策点指定一个概率分布
  - 玩家1的行为策略：α的概率选A动作，以$1-\alpha$的概率选B动作
  - 玩家2的行为策略：第一个决策点，β概率选C，$1-\beta$概率选D，
    第二个决策点，γ概率选F，$1-\gamma$概率选G



扩展式博弈中纯、混合、行为策略的直观理解

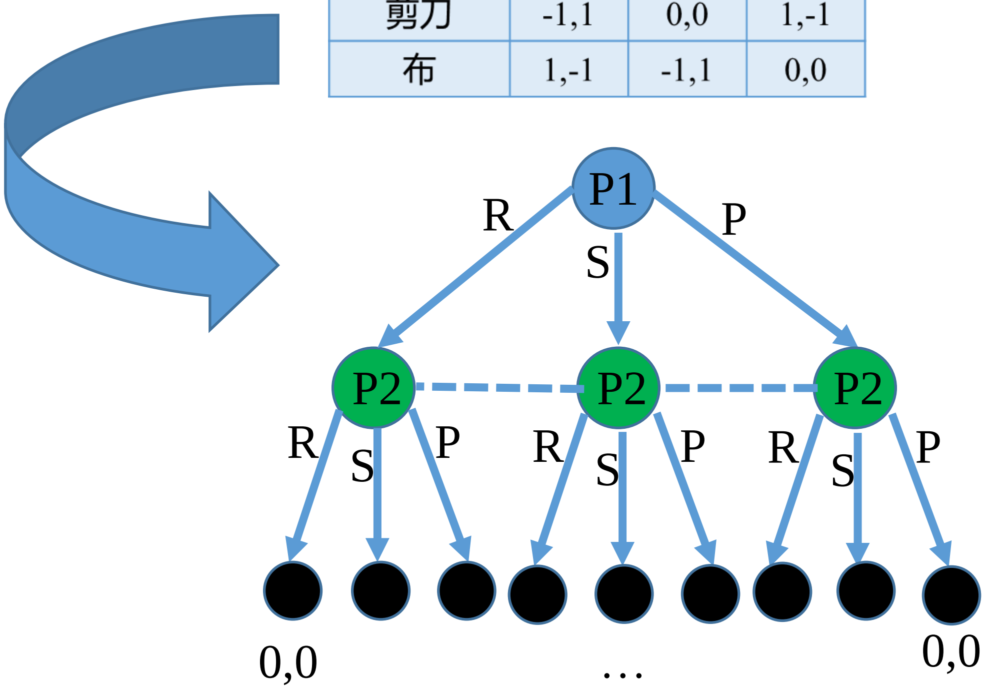
- 假设博弈中某玩家有5个决策点（信息集），那么一个纯策略就是一本书，这本书有5页，每一页说明了在该决策点会选择的动作。因此当采取这个纯策略时，就相当于拿出这本书，在遇到每个决策点时翻开对应的页数根据书上写的选择动作。所有可能的纯策略组成的集合就是一个书柜，里面堆满了不一样的书，每本书对应一个纯策略
- **混合策略**：一个mixed strategy就是随机在这个书柜里面抽取书，也就是说对每一本书给定一个抽取的概率，使其加总起来等于1
- **行为策略**：一个behavior strategy 是一本不一样的书，这本书里的每一页不再要求只能指定一个动作，而是要指定在这个决策点选择每个动作的概率
- 行为策略更加直观且高效
- **Kuhn’s Theorem**：扩展式博弈满足一定条件时（Perfect Recall），对于每一个混合策略，存在一个行为策略与之等价

矩阵式表示↔扩展式表示

- 博弈的矩阵式表示和扩展式表示可以互相转化
- 矩阵式转化为扩展式
  - 利用信息集来表示动作同时进行

玩家1 \ 玩家2	石头	剪刀	布
石头	0, 0	1,-1	-1,1
剪刀	-1,1	0,0	1,-1
布	1,-1	-1,1	0,0

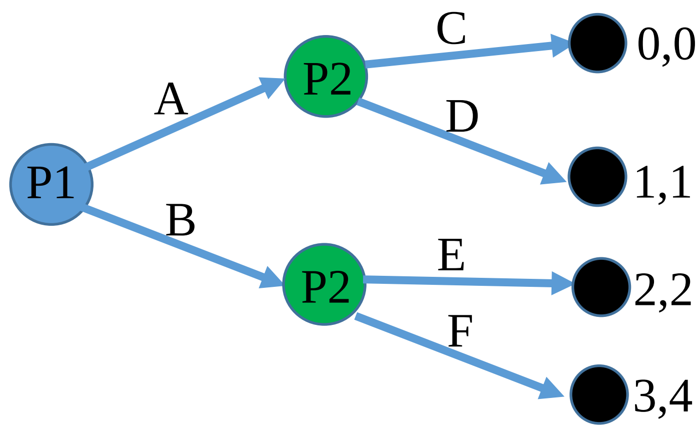
石头剪刀布的矩阵式表示



石头剪刀布的扩展式表示

矩阵式表示↔扩展式表示

- 扩展式转化为矩阵式
  - 首先写出所有玩家的纯策略集合，集合大小确定了矩阵每一维度的大小，然后用收益函数进行填空



扩展式表示

$S_1 = \{A,B\}$

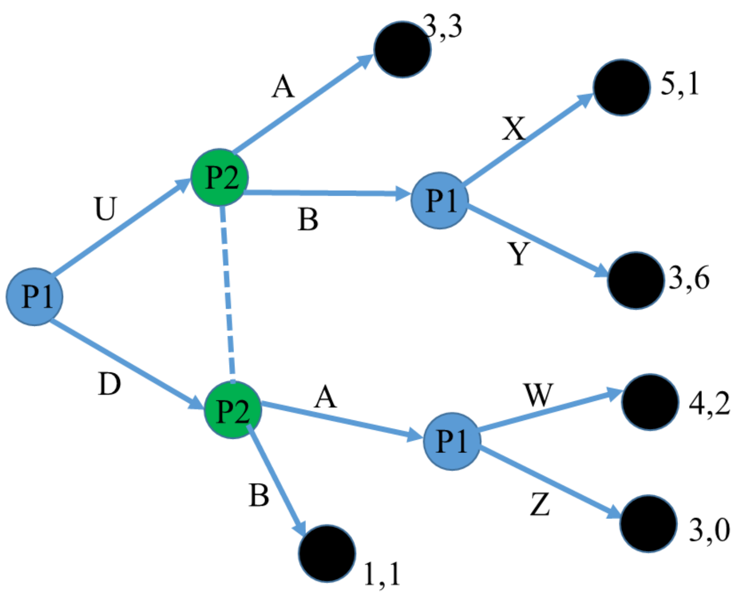
$S_2 = \{CE,CF,DE,DF\}$

	CE	CF	DE	DF
A	0,0	0,0	1,1	1,1
B	2,2	3,4	2,2	3,4

矩阵式表示

矩阵式表示↔扩展式表示

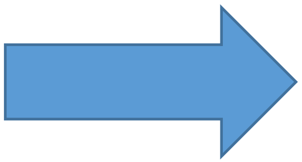
- 扩展式转化为矩阵式



扩展式表示

S_1 ={UXW,UXZ,UYW,UYZ, DXW,DXZ,DYW,DYZ }

S_2 ={A,B}



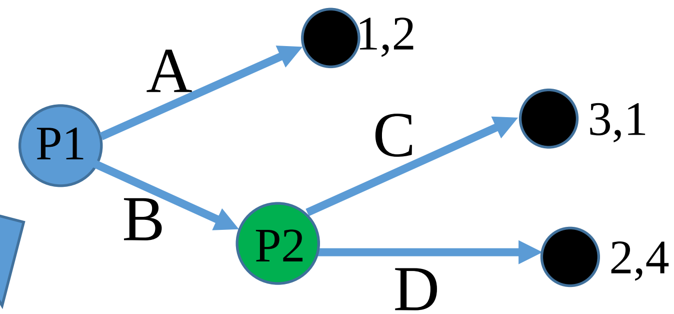
	A	B
UXW	3,3	5,1
UXZ	..	..
UYW	..	..
UYZ	..	..
DXW	..	..
DXZ	..	..
DYW	..	..
DYZ	3,0	1,1

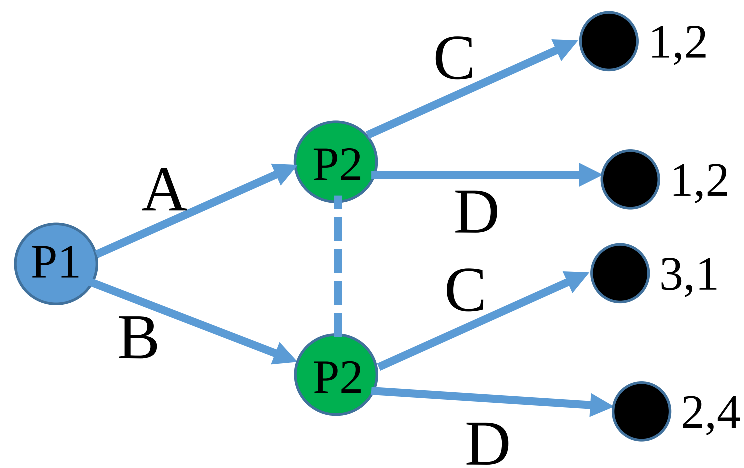
矩阵式表示

矩阵式表示↔扩展式表示

- 扩展式转化为矩阵式是唯一的
- 矩阵式转化为扩展式可能不唯一！

	C	D
A	1,2	1,2
B	3,1	2,4





博弈表示方法小结

- 参与人、策略空间、收益函数
- 矩阵表示
  - 纯策略
  - 混合策略
- 扩展式表示
  - 不完美信息
  - 信息集
  - 纯策略
  - 混合策略
  - 行为策略
- 矩阵式表示↔扩展式表示
  - 转化是否唯一

本讲提纲

1 博弈表示方法

2 常见博弈类型

3 博弈的解概念

4 课程设计任务

常见博弈类型

信息 \ 行动次序	静态	动态
完全信息	完全信息静态博弈	完全信息动态博弈
不完全信息	不完全信息静态博弈	不完全信息动态博弈

↓

重复博弈
Repeated Games

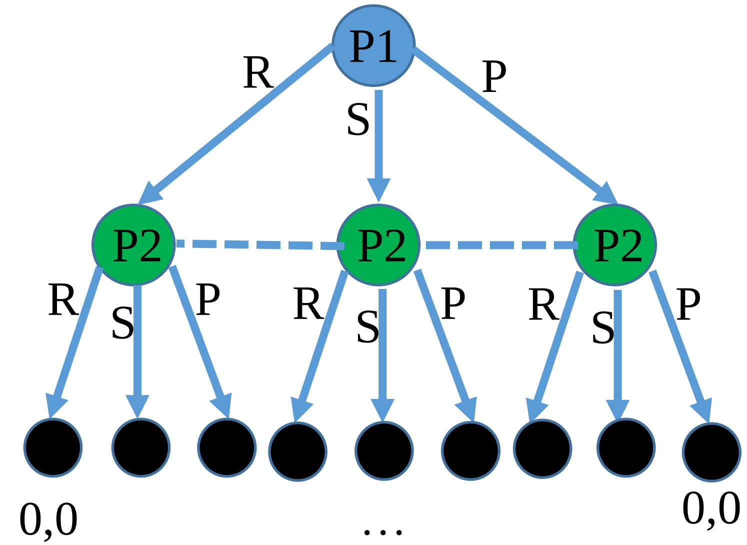
→

随机博弈
Stochastic Game

静态博弈

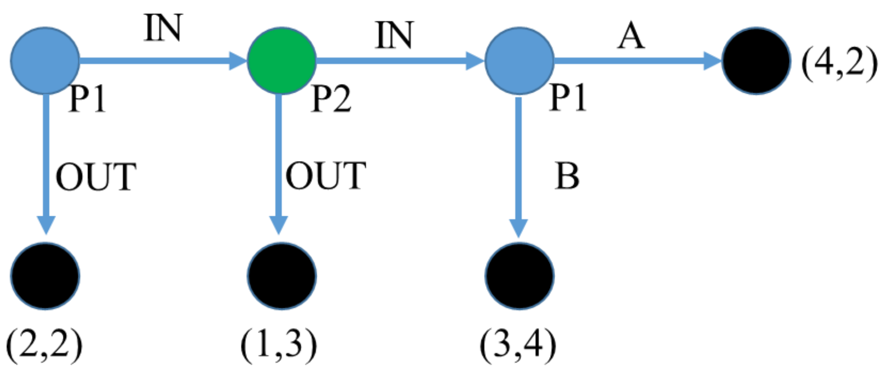
- 博弈中参与者同时采取行动，或者尽管参与者行动有先后顺序，但后行动的不知道先行动的采取的是什么行动，如石头剪刀布、囚徒困境等
- 一般用矩阵式表示
- 也可用扩展式表示，用信息集表示某方动作不可观测
- 可以认为是一种不完美信息博弈

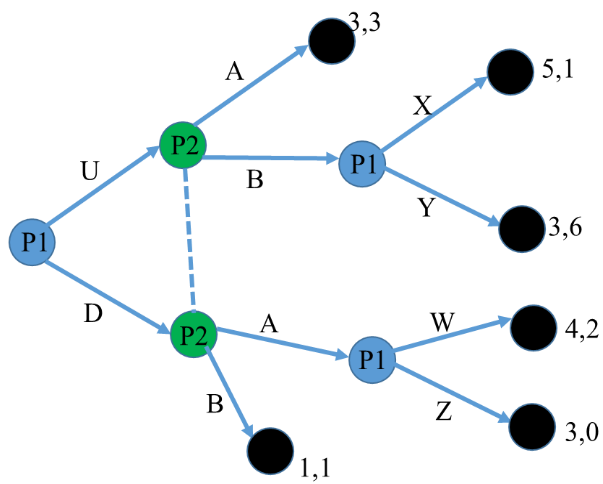
玩家1 \ 玩家2	石头	剪刀	布
石头	0, 0	1,-1	-1,1
剪刀	-1,1	0,0	1,-1
布	1,-1	-1,1	0,0



动态博弈

- 博弈参与人的行动有先后顺序，后行动者可以观察到先行动者的完全或部分动作，并据此作出相应的策略选择
- 一般用扩展式表示
- 扩展式可以转化为矩阵式，但是不够高效
- 同样用信息集表示某方动作不可观测



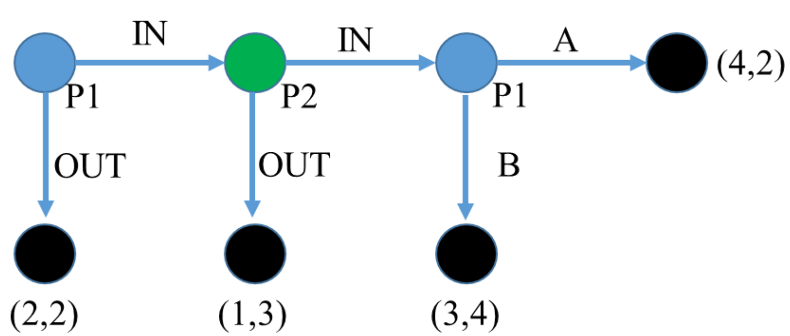


完美信息，可观测到所有动作　　不完美信息，部分动作不可观测

完全信息博弈

- 博弈的所有参与者都对博弈各方的各种情况下的收益完全知晓
- 完全信息静态博弈：完全信息+静态博弈
- 完全信息动态博弈：完全信息+动态博弈

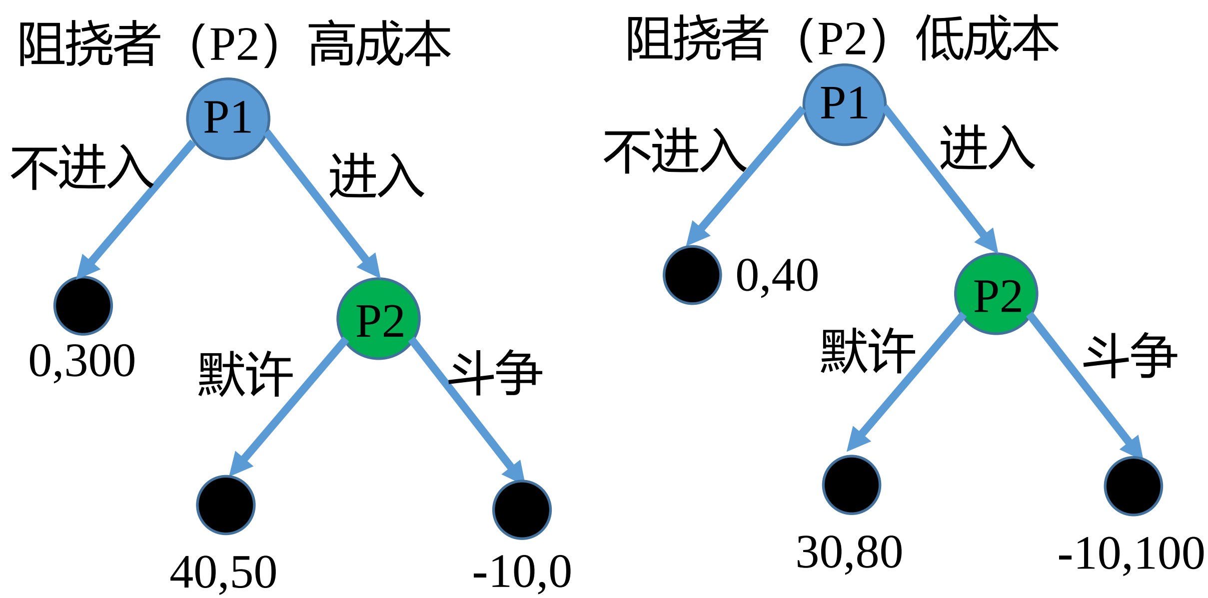
玩家1 \ 玩家2	石头	剪刀	布
石头	0, 0	1,-1	-1,1
剪刀	-1,1	0,0	1,-1
布	1,-1	-1,1	0,0



不完全信息博弈

- 至少有一个参与人有私有信息，而其他人没有该信息，该私有信息称为参与人的类型（type）
- 私有信息的存在导致博弈的其它参与者对最终的收益不完全知晓
- 也称为贝叶斯博弈（Bayesian Game）

阻挠者 / 进入者	高成本情况		低成本情况	
	默许	斗争	默许	斗争
进入	40, 50	-10, 0	30, 80	-10, 100
不进入	0, 300	0, 300	0, 40	0, 400

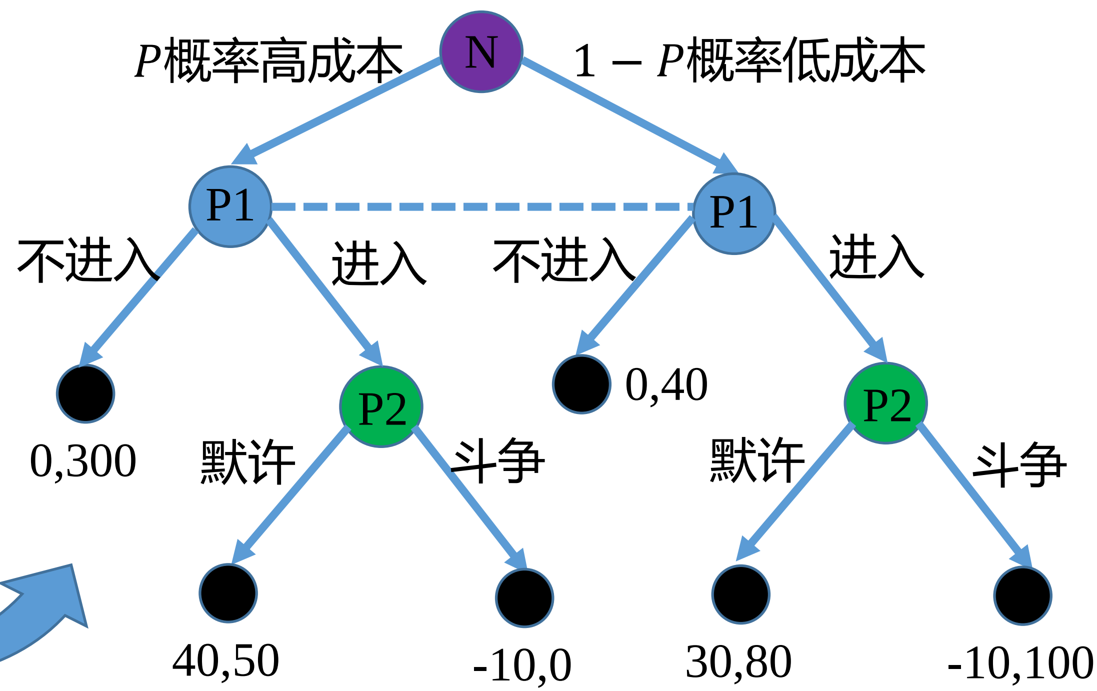


海萨尼转换

- 海萨尼（Harsanyi）转换：将不完全信息博弈转换为完全不完美信息博弈
  - 通过引入一个虚拟的参与人：自然（Nature）
  - 自然决定类型出现的概率，自然没有收益函数

进入者 \ 阻挠者	高成本情况		低成本情况	
	默许	斗争	默许	斗争
进入	40, 50	-10, 0	30, 80	-10, 100
不进入	0, 300	0, 300	0, 40	0, 400

海萨尼转换



完全信息/完美信息

- 完全信息：对所有局中人的收益函数都完全了解
- 完美信息：对所有局中人已有行动完全了解
- 海萨尼转换将不完全信息转换为完全不完美信息博弈
- 举例说明：
  - 完全并且完美信息博弈：围棋、象棋
  - 不完全但完美信息博弈：德州扑克（海萨尼转换之前）
  - 完全但不完美信息博弈：德州扑克（海萨尼转换之后）
  - 不完全不完美信息博弈：战争
- https://en.wikipedia.org/wiki/**Perfect**_information
- https://en.wikipedia.org/wiki/**Complete**_information

重复博弈（Repeated Games）

- 前面讲述的博弈都只进行一次
- 重复博弈，同样结构的博弈重复多次或无限次：
  - 每次博弈称为阶段博弈（Stage Games）
  - 多轮囚徒困境（Iterated Prisoners’ Dilemma）

囚徒A \ 囚徒B	坦白	抵赖
坦白	2,2	0,3
抵赖	3,0	1,1

- 重复博弈中可采取的策略更为丰富多样
  - 以牙还牙策略（Tit-for-tat）：复制对手上次的动作选择

	1	2	3	4
P1	坦白	坦白	坦白	…
P2	坦白	坦白	坦白	…

P2的收益：$2+2\gamma+2\gamma^2+\cdots=\frac{2}{1-\gamma}$

γ是衰减因子（Discount Factors）

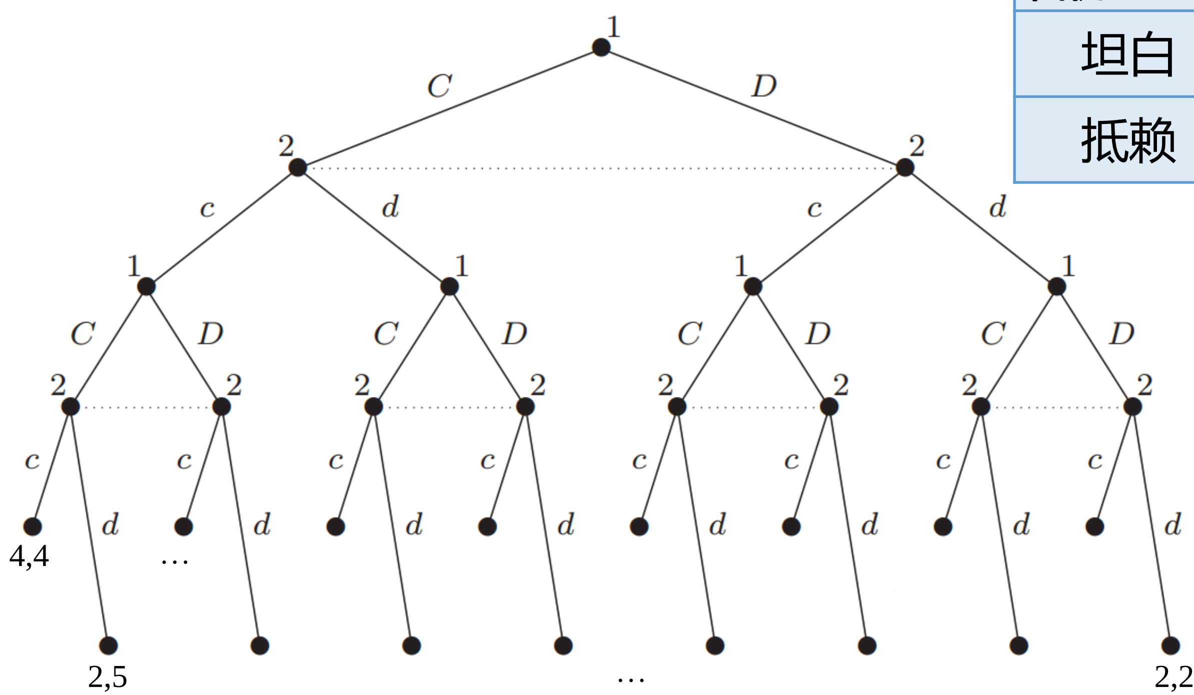
	1	2	3	4
P1	坦白	抵赖	坦白	…
P2	抵赖	坦白	抵赖	…

P2的收益：$3+0+3\gamma^2+0\gamma^3+\cdots=\frac{3}{1-\gamma^2}$

重复博弈

- 多轮囚徒困境的扩展式表示（以两轮为例）
  - 每个阶段博弈中看不到对手动作
  - 但是下一个阶段博弈开始时可以看到对手上次的动作
  - 各玩家收益为每轮博弈收益之和

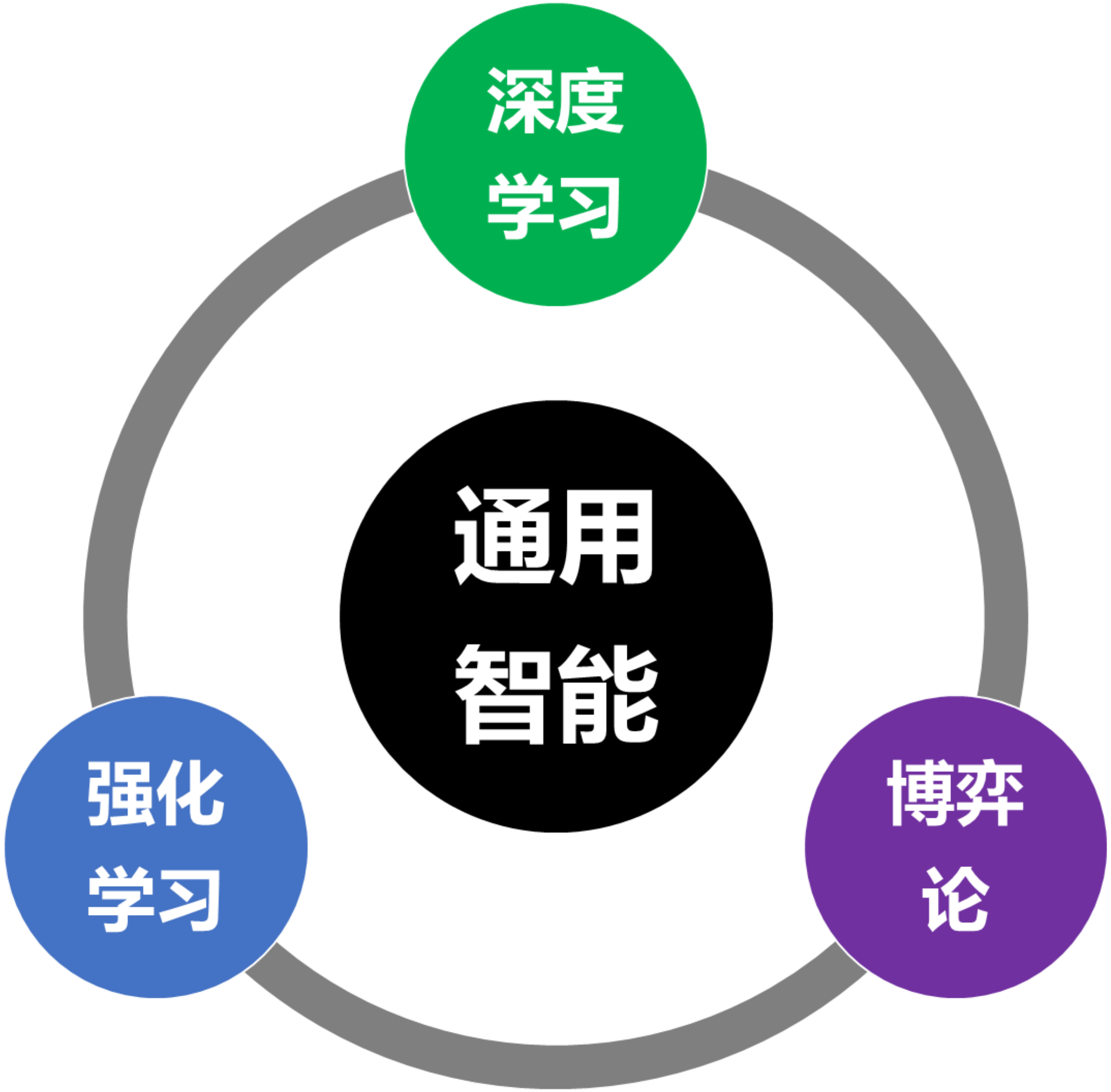
囚徒A \ 囚徒B	坦白	抵赖
坦白	2,2	0,3
抵赖	3,0	1,1



随机博弈（Stochastic Games）

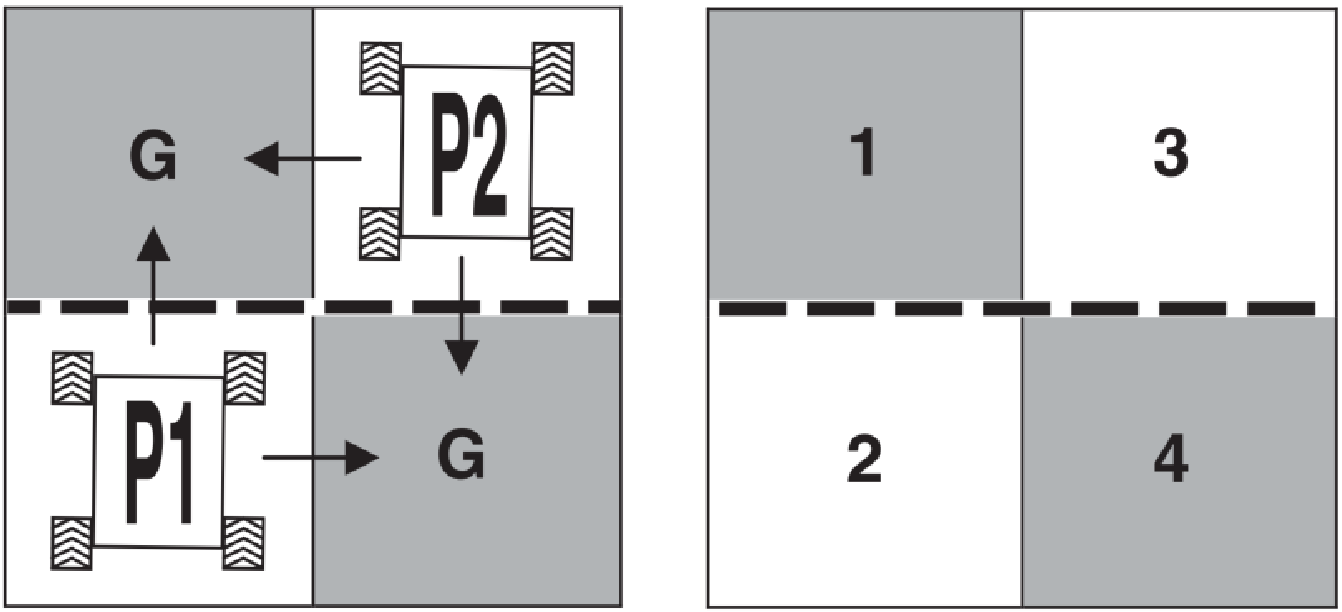
- 随着博弈进行环境发生随机的状态转移 →随机博弈
- 随机博弈可以看作是一个五元组(Q,N,A,P,R)：
  - Q是状态集合，$N = \{1,2,\dots,i,\dots,n\}$是玩家集合
  - $A = A_1 \times \dots \times A_n$，$A_i$是玩家$i$的动作空间
  - $P: Q \times A \times Q \to [0,1]$是状态转移函数
  - $R = r_1,\dots,r_n$，$r_i: Q \times A \to \mathbb{R}$是玩家$i$的奖励
  - 重复博弈是随机博弈的特例，$|Q| = 1$
  - 随机博弈是单智能体强化学习中马尔科夫决策过程（Markov Decision Process，MDP）的推广，$n = 1$
  - 随机博弈是多智能体强化学习的基础
  - 连接博弈论和多智能体强化学习的桥梁

随机博弈（Stochastic Games）



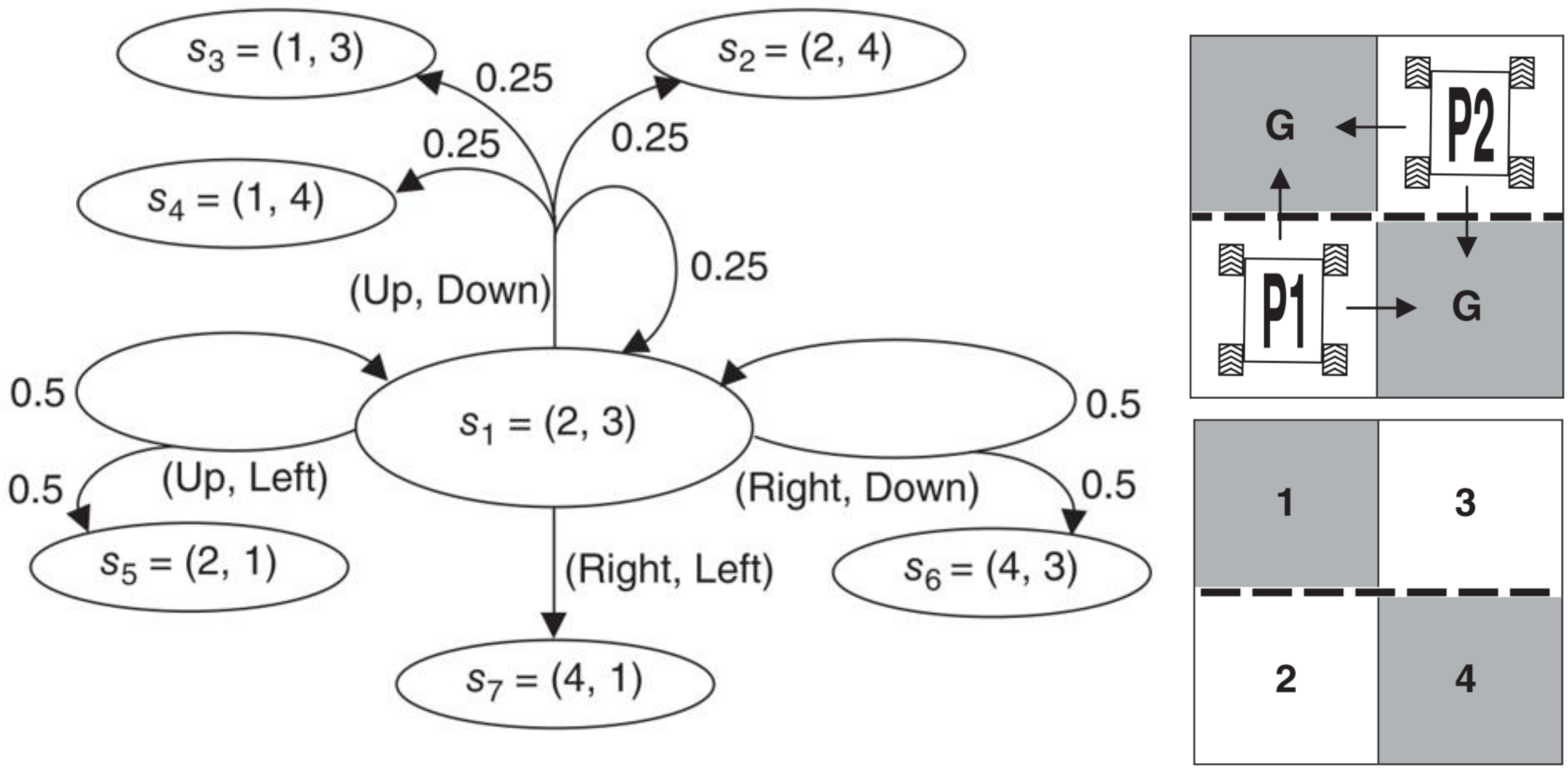
随机博弈例子

- 两小车都想到G位置，任意小车到达G则游戏结束
- P1两个动作，P2两个动作
- 虚线是障碍，只有50%的概率能通过
- 如果双方进入同一个cell，双方直接复位到原始位置



随机博弈例子

- 状态转移示意图：



常见博弈类型小结

- 静态博弈
  - 矩阵式表示，也可用扩展式
- 动态博弈
  - 扩展式表示，也可转化为矩阵式但不高效
- 完全信息博弈
- 不完全信息博弈
  - 海萨尼转换
- 完美信息和完全信息
- 重复博弈
- 随机博弈
  - 多智能体强化学习问题的基础性描述工具

本讲提纲

1 博弈表示方法

2 常见博弈类型

3 博弈的解概念

4 课程设计任务

博弈的解概念

- 我们讲述了博弈表示方法以及常见的博弈类型
- 接下来，我们将对博弈进行分析
- 博弈论中的解概念（Solution Concepts）：
  - 指定了博弈各玩家采取的策略以及最终的收益
  - 可以从不同的角度得到不同的解：从局外人的角度、从当事人的角度等
  - 对于许多博弈，同一类型的解概念可能得到多个解，存在如何选择的问题
  - 得到的解可能存在不合理之处，需要进行精炼（ Refinement ）
- 常见的解概念：帕累托最优（ Pareto Optimality ）、纳什均衡（ Nash equilibrium ）等

帕累托最优

- 从一个客观公正局外人的角度来看，博弈中是否有一些结果优于其他结果？

帕累托占优（Pareto Domination）

策略组合 $\boldsymbol{s} = (s_i, \dots, s_n)$ 帕累托占优$\boldsymbol{s}' = (s_i', \dots, s_n')$：
如果对于任何玩家$i \in N$来说， $u_i(\boldsymbol{s}) \geq u_i(\boldsymbol{s}')$

帕累托最优（Pareto Optimality）

策略组合 $\boldsymbol{s} = (s_i, \dots, s_n)$是帕累托最优：
如果不存在其他策略组合$\boldsymbol{s}'$帕累托占优$\boldsymbol{s}$

- 不存在其他策略组合增长一方收益的同时而不损害他方

帕累托最优：举例

- 帕累托最优：不存在其他策略组合增长一方收益的同时而不损害他方

3,3	0,2
2,0	1,1

3,3	1,4
4,1	2,2

1,-1	-1,1
-1,1	1,-1

- 在两人零和博弈中，所有的策略组合都是帕累托最优的！

纳什均衡（ Nash equilibrium ）

- 接下来，我们从玩家自身角度出发分析博弈
- 纳什均衡是博弈论中最具影响力的解概念

最优反应（ Best Response)

玩家$i \in N$对s_{-i} 的最优反应是s_i^*：
s_i^*满足对任意s_i， $u_i(s_i^*, s_{-i}) \geq u_i(s_i, s_{-i})$

纳什均衡（ Nash Equilibrium ）

一个策略组合$\mathbf{s} = (s_i, \ldots, s_n)$ 是纳什均衡：
如果对任意玩家$i \in N$来说，s_i都是s_{-i}的最优反应

- 纳什均衡是一个稳定状态，每个玩家都没有动机改变自己的策略
- 上述两个定义同样适用于混合策略
- 称作纯策略纳什均衡与混合策略纳什均衡

纯策略纳什均衡求法

- 固定一方的策略，求取另一方的最优反应，最优反应的交集就是纯策略纳什均衡

囚徒B 囚徒A	坦白	抵赖
坦白	2,2	0,3
抵赖	3,0	1,1

0,0	0,0	0,0	0,0
0,0	0,0	-1,1	-1,1
0,0	1,-1	0,0	-1,1
0,0	1,-1	1,-1	0,0

混合策略纳什均衡求法

- 右图不存在纯策略纳什均衡

纳什均衡存在性定理（Nash, 1950）

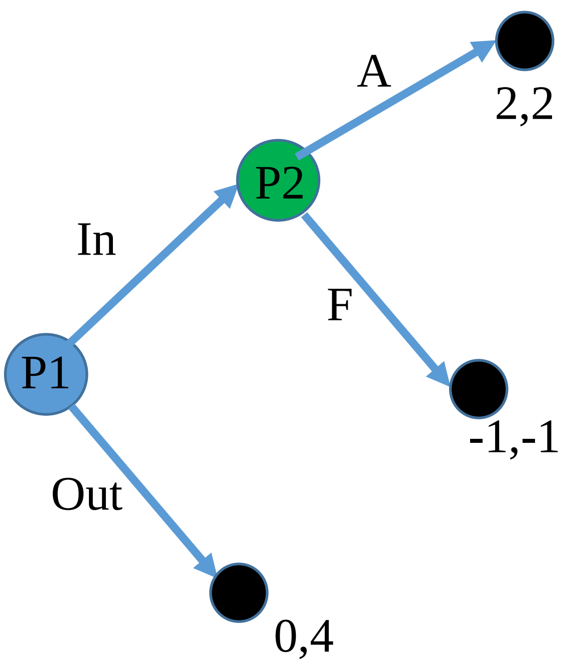
有限博弈至少存在一个纯/混合纳什均衡

	h	t
h	$\boxed{1}$,-1	-1,$\boxed{1}$
t	-1,$\boxed{1}$	$\boxed{1}$,-1

- 因此存在混合策略纳什均衡
  - 假设玩家1以p的概率选h，$1-p$的概率选t
  - 玩家2以q的概率选h，$1-q$的概率选t
  - 既然玩家1要采取混合策略，那么选h或t对他的收益是一样的
  - 如果不一样，玩家1肯定会选收益更大的纯策略！
  - 是玩家2的混合策略导致玩家1认为h和t的收益一样
  - 玩家1选h或t的收益都是q的函数，通过两者相等求取q
  - $q \times 1 + (1-q) \times (-1) = q \times (-1) + (1-q) \times 1 \rightarrow q = 0.5$
  - 同理，可得$p = 0.5$

完全信息动态博弈中的纳什均衡

- 完全信息动态博弈一般用扩展式表示
- 扩展式表示可以转化为矩阵式表示
- 然后用前面的方法求纳什均衡，So Easy! But…

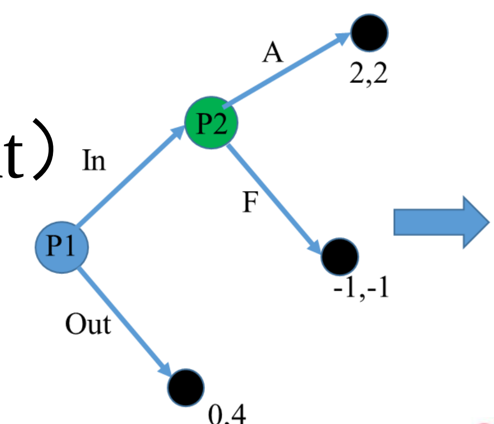


	A	F
In	2,2	-1,-1
Out	0,4	0,4

这两个纳什均衡都合理吗?

完全信息动态博弈中的纳什均衡

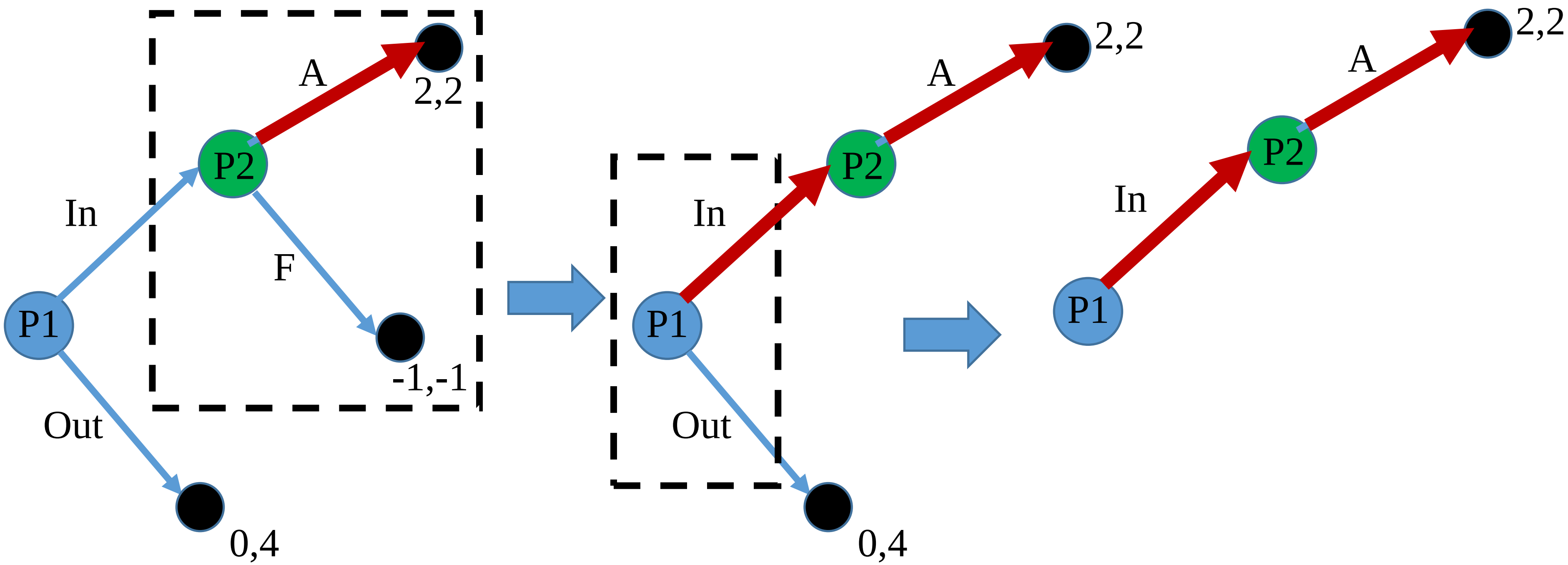
- IN/A合理，Out/F不合理
- Out/F的看似合理之处：
  - Out/F：假设P1选了In，接下来P2选F导致P1收益-1<0，因此P1没有动机更改策略
  - Out/F：P1选Out，P2即使选A，P2收益不变，因此P2也没有动机更改策略，看起来Out/F似乎是一个合理的纳什均衡策略
- Out/F的不合理之处：
  - 但是，假设P1选In，P2会选F吗？不会，P2会选A！P2选F是不理性的
- 不可信的威胁（Incredible Threat）



	A	F
In	2,2	-1,-1
Out	0,4	0,4

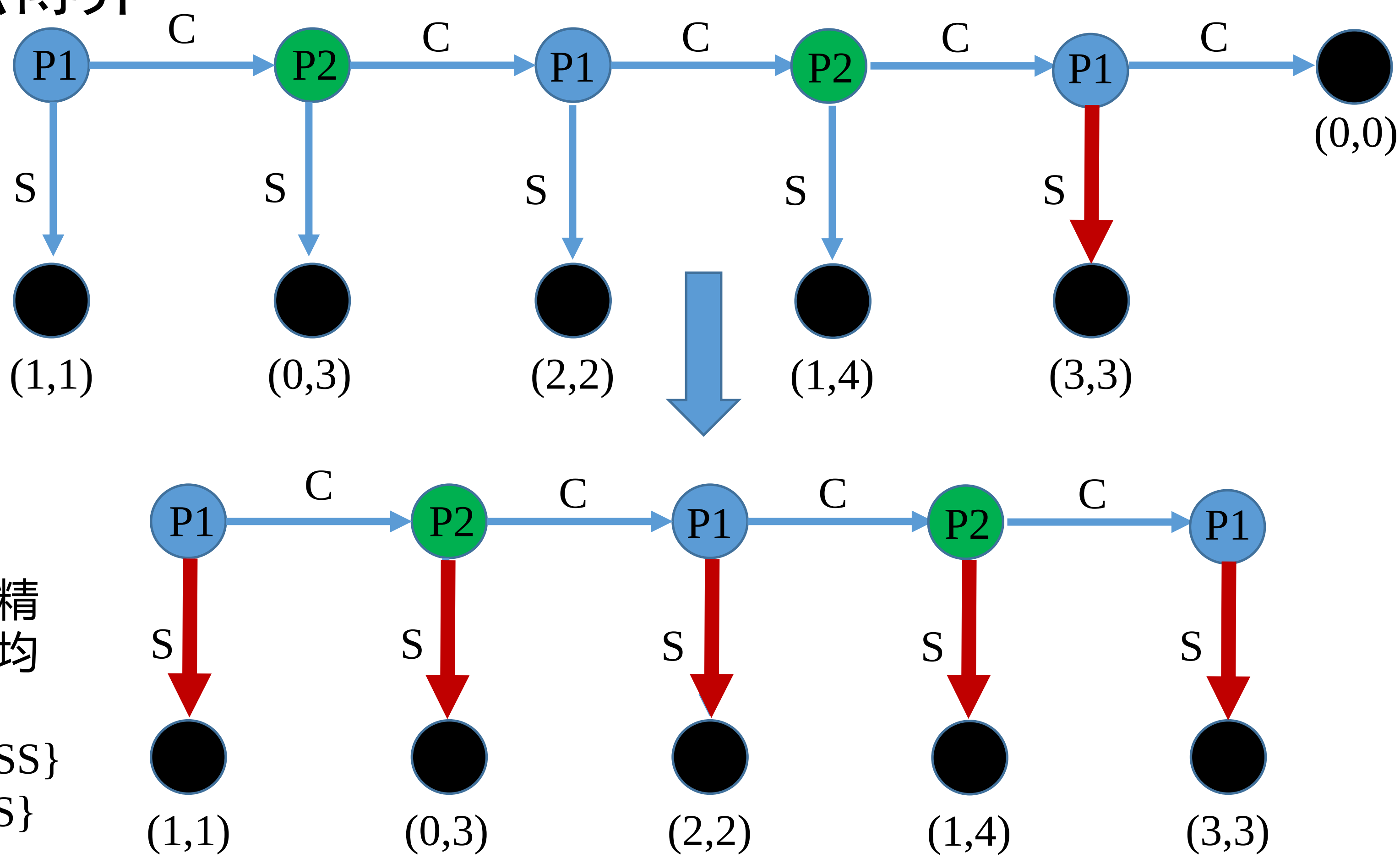
完全信息动态博弈中的纳什均衡

- 子博弈精炼纳什均衡（ Subgame Perfect Equilibrium ）
  - 子博弈可以粗略看作是博弈树的一棵子树
  - 每个子博弈都要满足纳什均衡条件
- 用逆向归纳法（Backward Induction）求解
  - 反方向不断求取各玩家的最优策略



逆向递归法：更多例子

- 蜈蚣博弈



子博弈精炼纳什均衡解

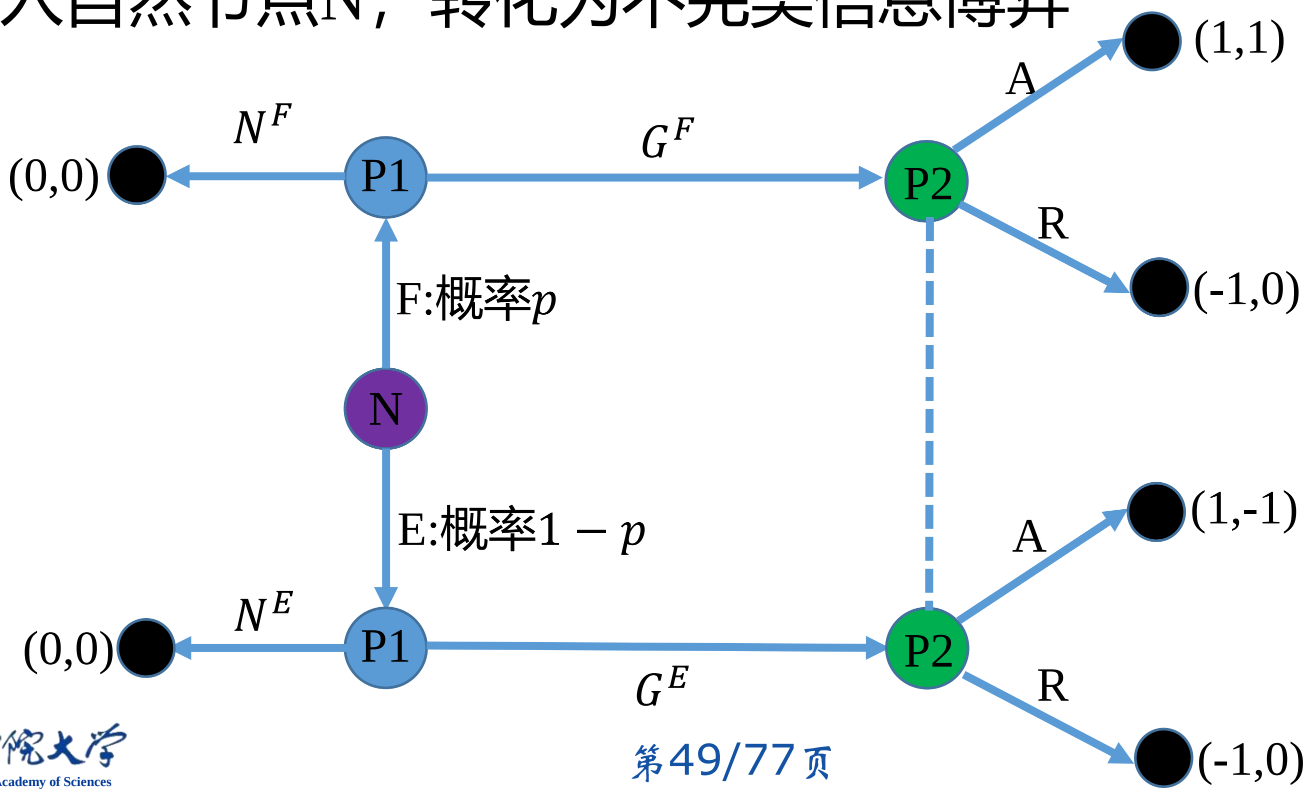
s_1 ={SSS}

s_2 ={SS}

- 回忆：策略描述了参与者在其所有决策点的动作选择！

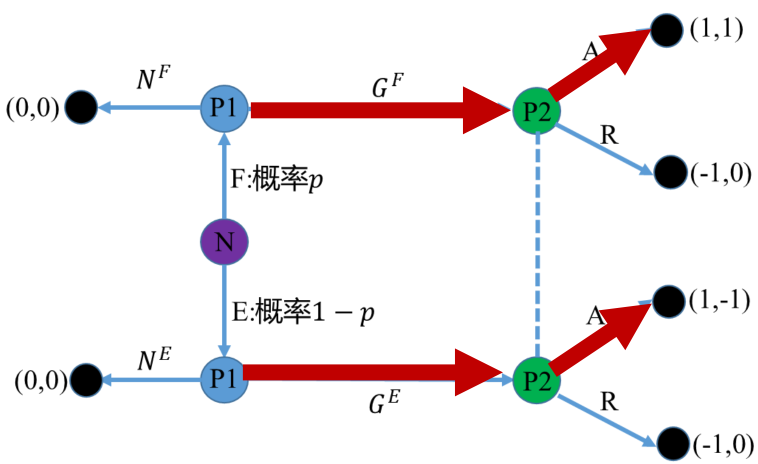
不完全信息博弈中的纳什均衡

- 回忆：海萨尼转换
- 送礼物博弈：
  - P1有两种类型：F友好E敌对，P1知道自己的类型，P2不知道
  - G：送礼物，N：不送，A：接受，R：拒绝
  - 引入自然节点N，转化为不完美信息博弈



不完全信息博弈中的纳什均衡

- 转化为矩阵表示（也称Bayesian Normal Form）：
  - $s_1 = \{G^F G^E, G^F N^E, N^F G^E, N^F N^E\}$
  - $s_2 = \{A, R\}$
  - $(G^F G^E, A)$，P1的期望收益：$p \times 1 + (1-p) \times 1 = 1$，P2的期望收益$p \times 1 + (1-p) \times (-1) = 2p - 1$
  - 其他同理



	A	R
$G^F G^E$	$1, 2p-1$	$-1, 0$
$G^F N^E$	p, p	$-p, 0$
$N^F G^E$	$1-p, p-1$	$p-1, 0$
$N^F N^E$	$0,0$	$0,0$

不完全信息博弈中的纳什均衡

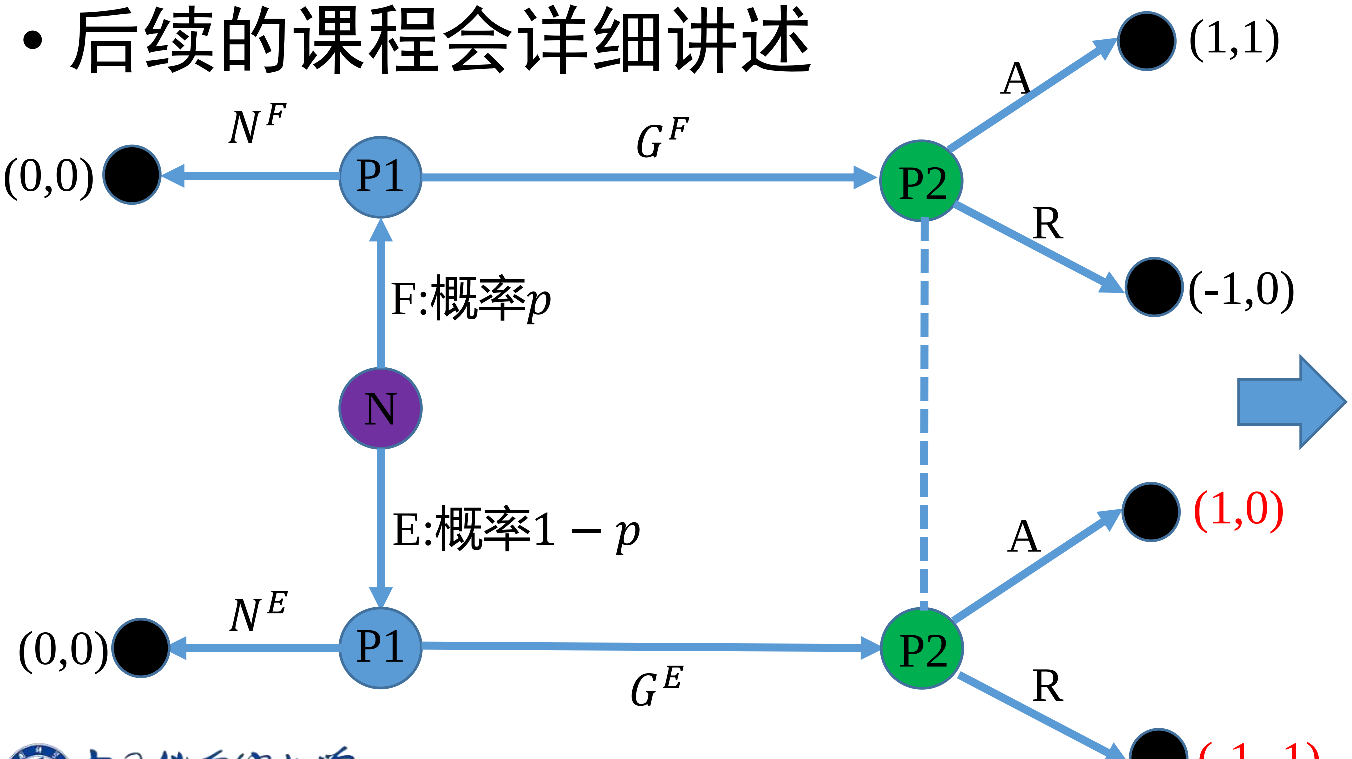
- 如果$p \geq 0.5, 2p-1 \geq 0$：两个贝叶斯均衡
- 如果$p < 0.5, 2p-1 < 0$：一个贝叶斯均衡

	A	R
$G^F G^E$	$1, 2p-1$	$-1, 0$
$G^F N^E$	p, p	$-p, 0$
$N^F G^E$	$1-p, p-1$	$p-1, 0$
$N^F N^E$	$0, 0$	$0, 0$

	A	R
$G^F G^E$	$1, 2p-1$	$-1, 0$
$G^F N^E$	p, p	$-p, 0$
$N^F G^E$	$1-p, p-1$	$p-1, 0$
$N^F N^E$	$0, 0$	$0, 0$

不完全信息博弈中的纳什均衡

- 类比纳什均衡在完全信息动态博弈中的不合理性→子博弈精炼纳什均衡
- 贝叶斯均衡在不完全信息动态博弈中同样可能存在不合理性→精炼贝叶斯均衡（Perfect Bayesian Equilibrium）
- 后续的课程会详细讲述



两个贝叶斯纳什均衡：

$(G^F G^E, A)$

$(N^F N^E, R)$

第二个均衡不合理

纳什均衡小结

- 最优反应，纳什均衡定义
- 完全信息静态博弈博弈：纳什均衡
  - 纯策略：划线法，混合策略：不能区分好坏
- 完全信息动态博弈：子博弈精炼纳什均衡
  - 逆向归纳法，反着算
- 不完全信息静态博弈：贝叶斯均衡
  - 转化成Bayesian Normal Form
- 不完全信息动态博弈：精炼贝叶斯均衡
  - 删除不合理的均衡解
  - 后续的课程详细讲述

极小极大值定理（ Minimax Theorem ）

- 两人零和博弈

两人零和博弈

玩家1 \ 玩家2	石头	剪刀	布
石头	0, 0	1,-1	-1,1
剪刀	-1,1	0,0	1,-1
布	1,-1	-1,1	0,0

非两人零和博弈

囚徒A \ 囚徒B	坦白	抵赖
坦白	2,2	0,3
抵赖	3,0	1,1

- 许多重要的博弈都是两人零和的：如象棋、围棋等
- 因为玩家2的收益 = - 玩家1收益，收益矩阵可以简化

玩家1 \ 玩家2	石头	剪刀	布
石头	0	1	-1
剪刀	-1	0	1
布	1	-1	0

极小极大值定理

- 假设玩家1采用混合策略$\sigma_1 = (\sigma_{11}, \dots, \sigma_{12}, \dots, \sigma_{1k})$
- 玩家2采用混合策略$\sigma_2 = (\sigma_{21}, \dots, \sigma_{22}, \dots, \sigma_{2k})$
- 回忆：σ_1和σ_2每一个元素代表选取某一纯策略的概率
- 假设收益矩阵用A表示
- 那么玩家1的期望收益为：$\sigma_1^T A \sigma_2$
- 玩家2的期望收益为：$-\sigma_1^T A \sigma_2$

σ_{11}	σ_{12}

A^{11}	A^{12}
A^{21}	A^{22}

σ_{21}
σ_{22}

$$\sigma_{11} \times A^{11} \times \sigma_{21} + \cdots + \sigma_{12} \times A^{22} \times \sigma_{22}$$

极小极大值定理

- John von Neumann 1928年就已经在思考两人零和博弈中各方该如何决策的问题
  - 早于纳什均衡概念的出现，Nash，1950
- 极大极小策略（ Maximin Strategy ）：
  - 站在P1的角度思考最差的情况
    - 如果我选择一个策略σ_1
    - P2则会选择一个σ_2来极小化我的收益
    - 我的目标是选择一个σ_1来极大化我最差情况下的收益
  - $V_1^* = max_{\sigma_1} min_{\sigma_2} \sigma_1^T A \sigma_2$
  - V_1^*称为P1的极大极小值
  - 得到的解σ_1^*称为P1的极大极小策略
  - 采用σ_1^*策略，P1至少可以获得V_1^*收益

极小极大值定理

- 极大极小策略与极小极大策略

玩家P1

$$V_1^* = \max_{\sigma_1} \min_{\sigma_2} \sigma_1^T A \sigma_2$$

$$\Downarrow$$

$$\sigma_1^*$$

玩家P2

$$V_2^* = \min_{\sigma_2} \max_{\sigma_1} \sigma_1^T A \sigma_2$$

$$\Downarrow$$

$$\sigma_2^*$$

- V_1^*和V_2^*、 σ_1^*和σ_2^*的关系是什么？

极小极大值定理（Minimax Theorem） Jon von Neumann, 1928

对于两人零和博弈来说：

➢ $V_1^* = V_2^* = V^*$，称为博弈的极大极小值（Minimax Value）

- σ_1^*和σ_2^*其实构成了博弈的纳什均衡解，互为最优反应
- 该定理被视为博弈论的起点

极小极大值定理(伪)证明

- 严格的证明一般采用凸集分离定理、单纯形理论、Brouwer不动点定理等
- 这里我们假设有了纳什均衡的概念
- 证明$V_1^* = V_2^* = V^*$，只需证明$V_1^* \le V_2^*$且$V_1^* \ge V_2^*$
- 证明$V_1^* \le V_2^*$只需证明：

$$\max_x \min_y f(x,y) \le \min_y \max_x f(x,y)$$

$$\min_y f(x,y) \le f(x,y), f(x,y) \le \max_x f(x,y)$$

$$\Downarrow$$

$$\min_y f(x,y) \le \max_x f(x,y)$$

左边对任意x，右边对任意y不等式都成立，证毕

极小极大值定理(伪)证明

- 证明$V_1^* \geq V_2^*$
- 假设$(\tilde{\sigma}_1, \tilde{\sigma}_2)$是纳什均衡：
  - P1的期望收益$\tilde{v} = \tilde{\sigma}_1^T A \tilde{\sigma}_2$
  - $\tilde{\sigma}_1$是P1的最优反应$\tilde{v} = \max_{\sigma_1} \sigma_1^T A \tilde{\sigma}_2$
  - 同理，$\tilde{v} = \min_{\sigma_2} \tilde{\sigma}_1^T A \sigma_2$

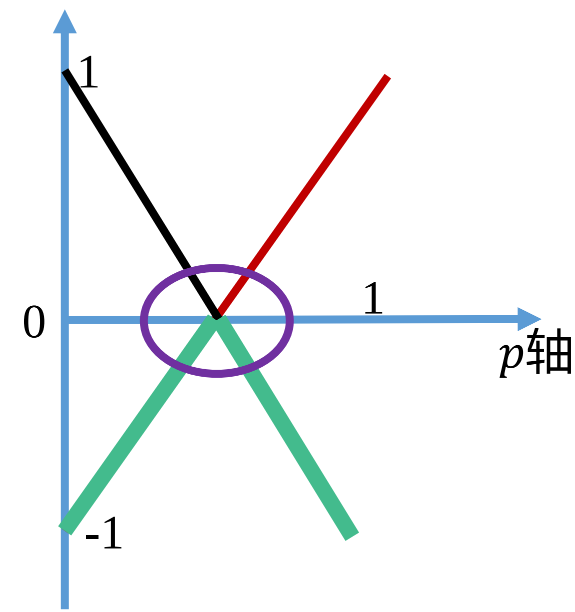
$$V_2^* = \min_{\sigma_2} \max_{\sigma_1} \sigma_1^T A \sigma_2 \leq \max_{\sigma_1} \sigma_1^T A \tilde{\sigma}_2 = \tilde{v}$$
$$= \min_{\sigma_2} \tilde{\sigma}_1^T A \sigma_2 \leq \max_{\sigma_1} \min_{\sigma_2} \sigma_1^T A \sigma_2 = V_1^*$$

- 下面我们通过一个简单例子讲解极大极小策略求法

极大极小策略：例子

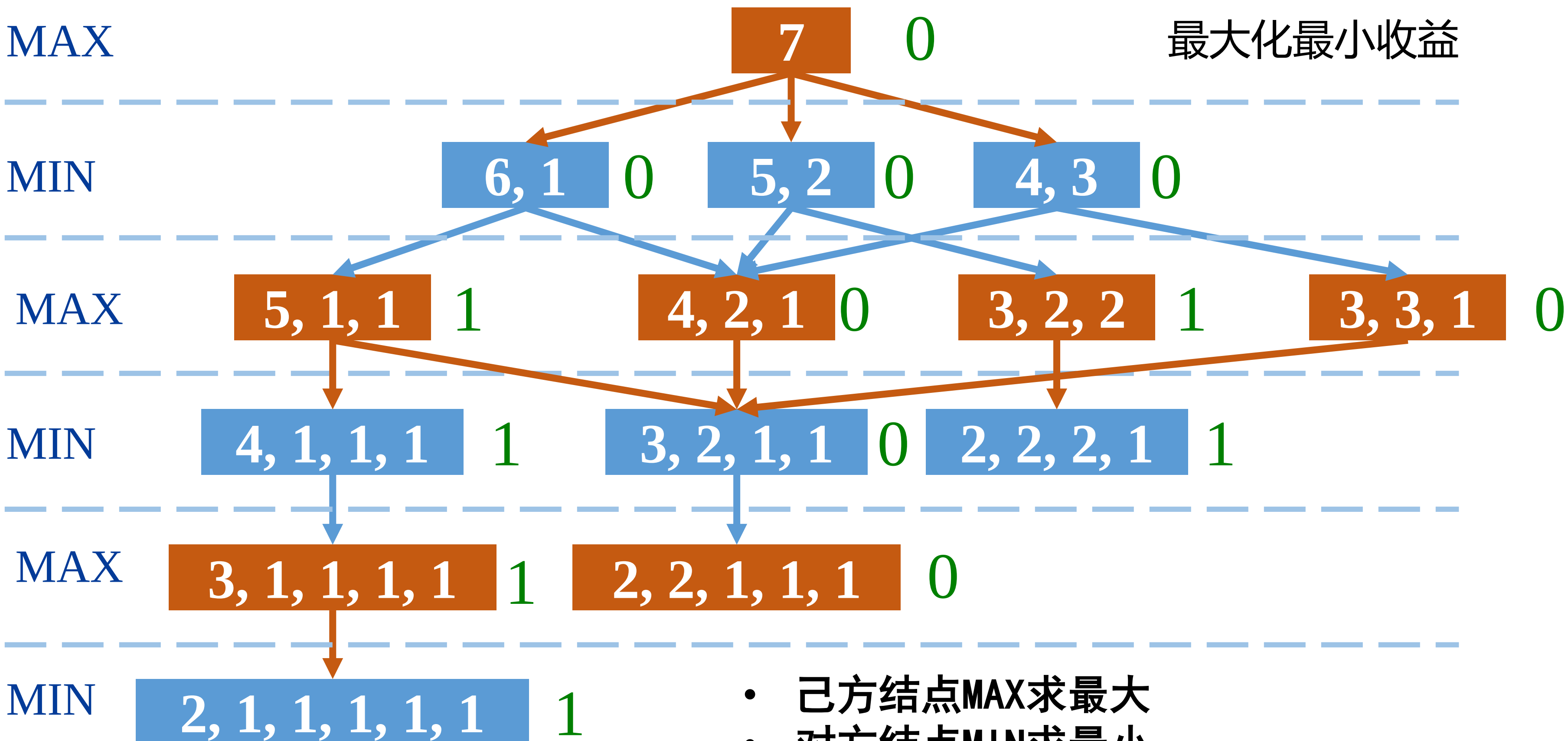
- $V_1^* = max_{\sigma_1} min_{\sigma_2} \sigma_1^T A \sigma_2$
- 假设$\sigma_1 = (p, 1-p)$
- 求$min_{\sigma_2} \sigma_1^T A \sigma_2$
  - 玩家2选h，玩家1的平均收益$1 \times p + (-1) \times (1-p) = 2p - 1$
  - 玩家2选t，玩家1的平均收益$(-1) \times p + 1 \times (1-p) = 1 - 2p$
  - 图像如右图绿色折线所示
- 求得$p = 0.5$
- 极大极小策略$\sigma_1 = (0.5,0.5)$
- 同理，极小极大策略$\sigma_2 = (0.5,0.5)$
- σ_1和σ_2组成博弈的纳什均衡

	h	t
h	1,-1	-1,1
t	-1,1	1,-1



应用：极大极小搜索

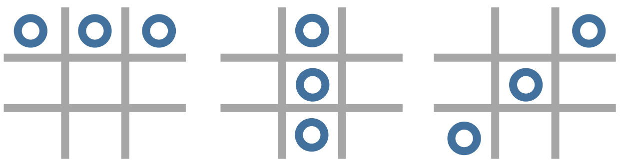
- 分硬币游戏：有7枚硬币，只能将已分好的一堆硬币分成个数不等的两堆，当每堆只有1枚或2枚硬币则不能再分，红蓝双方轮流进行，直到谁不能再分，则为输

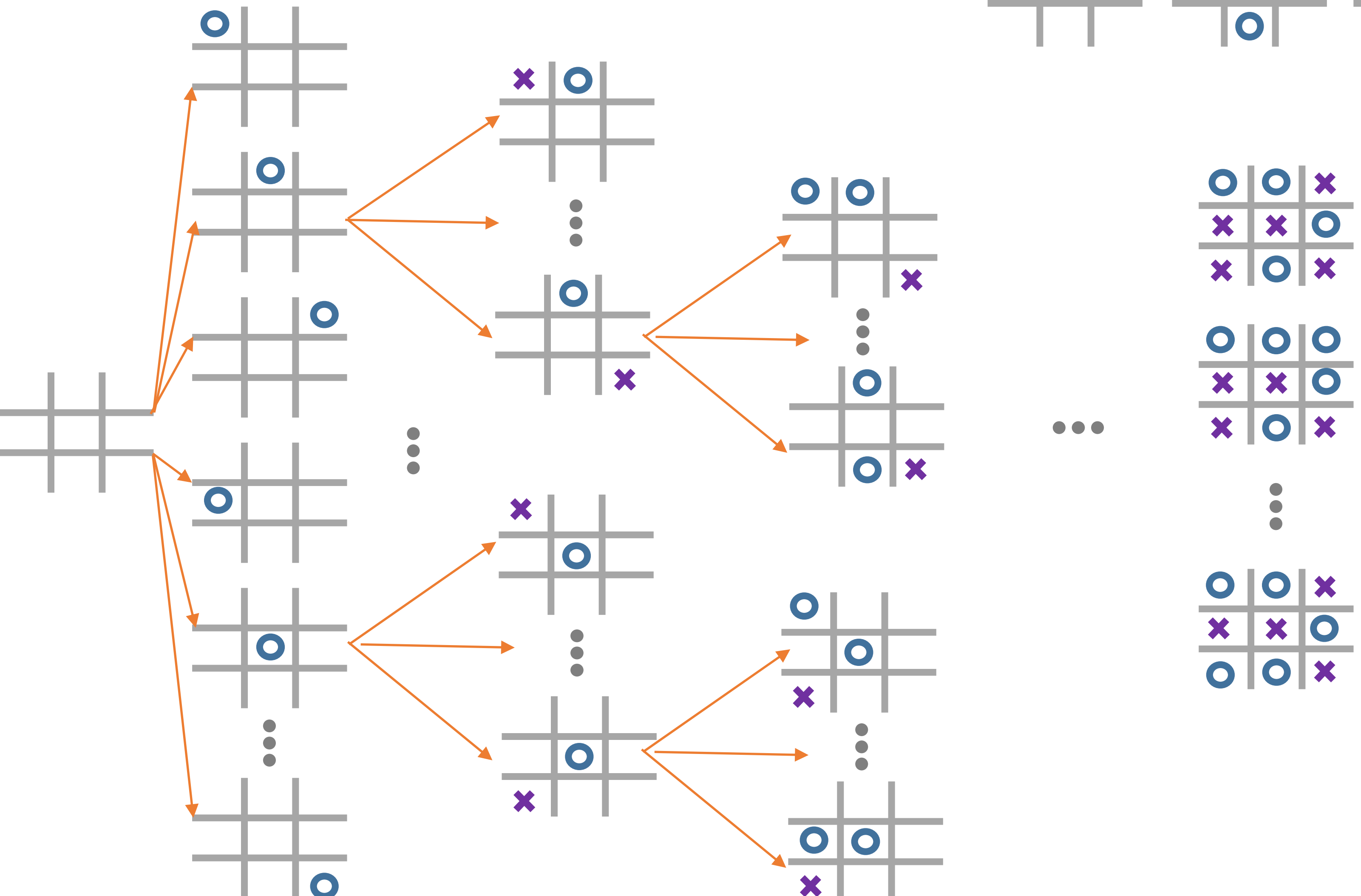


- 己方结点MAX求最大
- 对方结点MIN求最小

极大极小搜索：井字棋AI

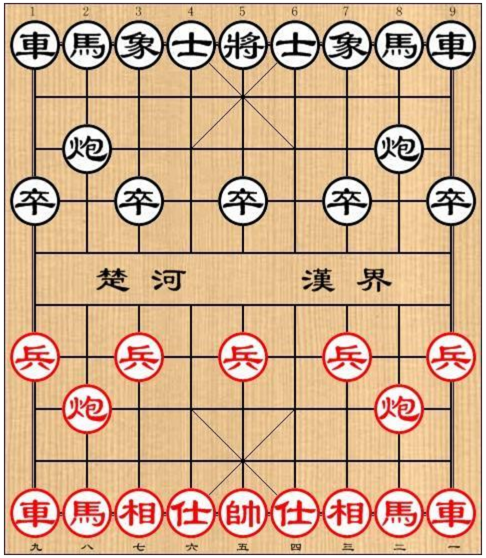
- 井字棋游戏：三子最先成线者胜



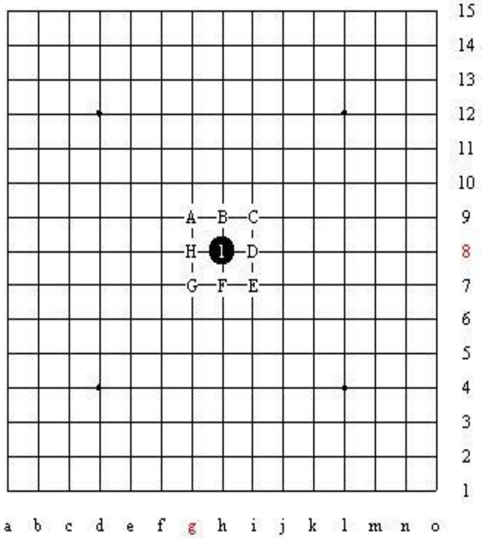


极大极小搜索：中国象棋和五子棋

- 中国象棋AI搜索复杂度
  - 棋盘大小9×10，状态空间复杂度10^{48}
  - 一盘棋平均走50步，每一步大概有20多种走法，决策空间复杂度约为10^{65}

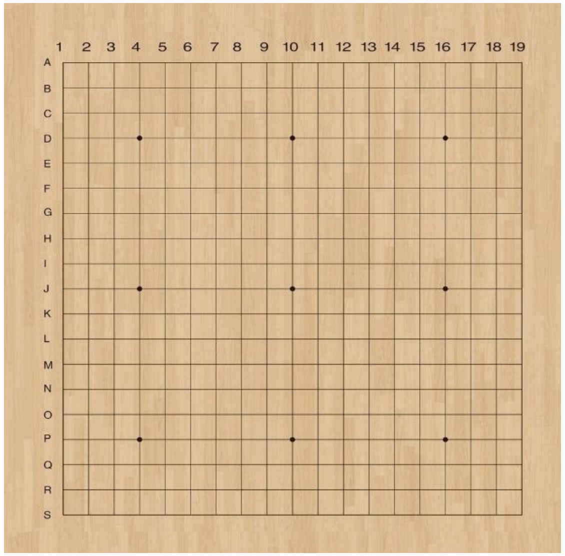


- 五子棋AI的搜素复杂度
  - 棋盘大小15×15
  - 状态空间复杂度$3^{225} \approx 10^{107}$
  - 每一步有几十种走法，决策空间复杂度约为10^{105}

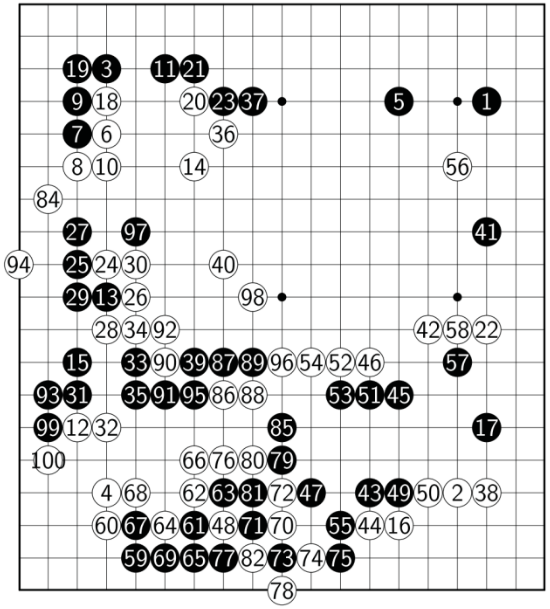


极大极小搜索应用示例：围棋AI

- 围棋AI的搜素复杂度
  - 棋盘大小19×19，每一处三个状态
  - 状态空间大小：$3^{361} \approx 10^{172}$
  - 下完一局围棋约需要150步，每一步约有250走法，决策空间大小：$250^{150} \approx 10^{360}$



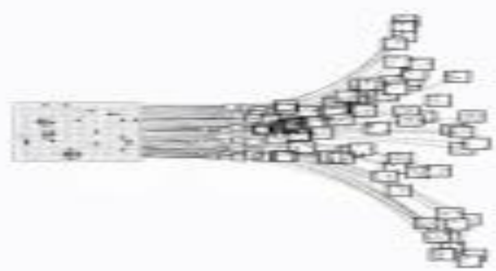
- 假设1微秒走一步，遍历象棋、五子棋、围棋博弈分别需要10^{34}、10^{93}和10^{158}年



- 结论：无论是象棋、五子棋和围棋，都无法穷举搜索！

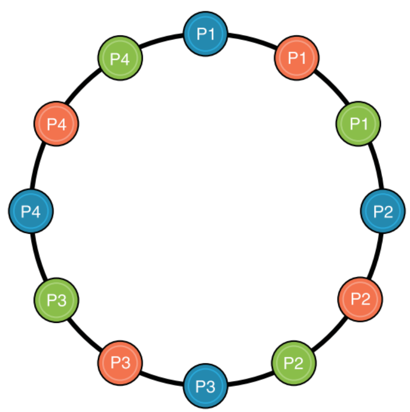
极大极小搜索应用示例：围棋AI

- 国际象棋AI和围棋AI中的博弈树搜索复杂度对比

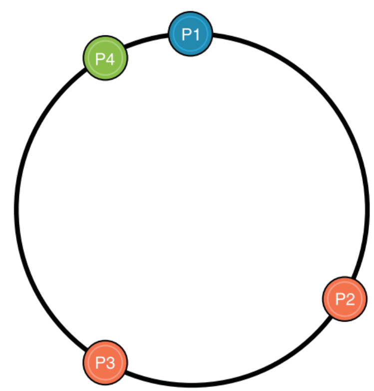


纳什均衡的选择问题

- 两人零和博弈的纳什均衡不存在选择问题，任意两个纳什均衡互相组合同样是纳什均衡
  - $(\sigma_1,\sigma_2),(\sigma_1',\sigma_2')$都是纳什均衡→ $(\sigma_1,\sigma_2'),(\sigma_1',\sigma_2)$都是纳什均衡
- 多人博弈中的纳什均衡存在选择问题，不同纳什均衡的组合通常不再是纳什均衡
- 因此，纳什均衡在多人博弈中并没有特别好的理论和性能保证



彼此之间距离越远越好
存在无穷多个纳什均衡，每一个都是均匀分布在环上



但是不同均衡的组合一般不再是纳什均衡了

重复博弈中的均衡

- 回忆：重复博弈，同样结构的博弈重复多次或无限次
  - 每次博弈称为阶段博弈（stage games）
  - 多轮囚徒困境（Iterated Prisoners’ Dilemma）
- 重复博弈的子博弈精炼纳什均衡：
  - 最后一轮，所有玩家肯定会采取纳什均衡策略
    - 前面轮次的事情已经发生了，我们控制不了
    - 理性玩家会在最后一轮采取最优策略，也就是纳什均衡
  - 每轮都采取纳什均衡组成重复博弈的一个子博弈精炼纳什均衡
    - 数量非常庞大，如果每轮都有3个纳什均衡，共10轮→ 3^{10}个！
      - 将各个轮次看作独立的，不是特别有用
    - 可能有其他形式的子博弈精炼纳什均衡，比如玩家可以通过对手的历史动作来决定自己的行为
      - 可以实现玩家之间的合作，比如实现囚徒困境的合作！

有限轮囚徒困境中的均衡

- 一次囚徒困境博弈，双方都抵赖
- 能否通过多轮博弈实现合作？坦白坦白
- 如果可以需要多少轮博弈才行呢？
- 从两轮开始：
  - 逆向递归法，第二轮会怎么做？互相抵赖
  - 第一轮会怎么做？这里的动作无法影响第二轮，因为第二轮总会互相抵赖，因此理性玩家会极大化自己第一轮的收益，同样会采取纳什均衡策略，也就是互相抵赖
  - 两轮中都互相抵赖（是一个子博弈精炼纳什均衡），无法合作
- 三轮、四轮、N轮同样的逻辑，都不能实现合作
- 有限轮囚徒困境，每轮都抵赖是唯一的子博弈精炼纳什均衡！

囚徒A \ 囚徒B	坦白	抵赖
坦白	3,3	1,4
抵赖	4,1	2,2

无限轮囚徒困境中的均衡

- 每轮都抵赖同样是子博弈精炼纳什均衡，但不唯一
- 冷酷策略（ Grim Trigger Strategies ）：
  - 玩家在开始时选择合作，在接下来的博弈中，如果对方合作则继续合作，而如果对方一旦背叛，则永远选择背叛，永不合作
  - 对任何玩家的一次性不合作将触发永远的不合作，在冷酷策略下，玩家没有改正错误的机会，所以才被称为冷酷
  - 冷酷的结果是双方都没有背叛对方的积极性，可以实现合作!
- 采取冷酷策略是无限轮囚徒困境的子博弈精炼纳什均衡
  - 如果触发背叛进入不合作阶段，双方都抵赖→子博弈精炼纳什均衡
  - 合作阶段，玩家是否有背叛的动机呢?
    - $3+3\sigma+3\sigma^2+\cdots \geq (?)4+2\sigma+2\sigma^2+\cdots \quad \rightarrow \quad \sigma \geq 0.5$
    - 当玩家比较在意未来收益的时候，他们没有动机选择背叛!

囚徒A \ 囚徒B	坦白	抵赖
坦白	3,3	1,4
抵赖	4,1	2,2

随机博弈中的均衡

- 回忆：随机博弈五元组(Q, N, A, P, R)
  - 状态、玩家、动作、转移概率、奖励函数
  - 多智能体强化学习的基础，是目前研究的热点
  - Minimax-Q学习
  - Nash-Q学习
  - …
  - 谷歌搜索multiagent learning survey
  - Multi-agent reinforcement learning: An overview
  - A survey and critique of multiagent deep reinforcement learning
  - Multi-Agent Reinforcement Learning: A Selective Overview of Theories and Algorithms
  - If multi-agent learning is the answer, what is the question?

博弈的解概念小结

- 帕累托最优
- 纳什均衡
  - 最优反应、静态、动态、完全信息、不完全信息
- 极小极大值定理
  - 极大极小策略、极大极小值
- 纳什均衡的选择问题
- 重复博弈中的均衡
  - 有限轮囚徒困境、无限轮囚徒困境、冷酷策略
- 随机博弈中的均衡
  - Minimax-Q学习
  - Nash-Q学习

本讲提纲

1 博弈表示方法

2 常见博弈类型

3 博弈的解概念

4 课程设计任务

课程设计可选任务一

- **任务名称：<u>计算博弈前沿问题调研</u>　　撰写语言：中文**
  - 具体内容：阅读计算博弈领域相关论文或综述，了解与人工智能专业相关的前沿研究领域和方向，选择自己感兴趣的前沿研究问题或者与自己专业相关的研究方向，撰写关于智能博弈某类技术的发展历史、研究现状和发展趋势的调研报告
  - 建议方向
    - 自博弈学习技术、不完美信息博弈学习技术、联盟博弈学习技术等
    - 多智能系统研究、多智能体学习技术、多智能体博弈技术、多智能体深度强化学习技术等
    - 不完美信息博弈性能评估、神经演化计算技术、遗传算法进化目标、多智能体系统学习目标评估等
  - 评分标准
    - 对所选方向调研内容是否全面、是否深入、是否有新的思考
    - 调研报告语言和结构规范性（调研报告模板会提供，篇幅要求加上参考文献最低不少于10页）

课程设计可选任务二

- **任务名称：智能博弈棋牌类AI设计**
  - 具体内容：以极大极小搜索为起步，通过调研Alpha-Beta搜索、蒙特卡洛树搜索、基于模型的树搜索（如MuZero）、深度反事实值最小化（DeepCFR）等相关技术，实现一个两人或多人零和博弈的AI，包括但不限于：五子棋、围棋、中国/国际象棋、麻将、德州扑克、桥牌、星际争霸、王者荣耀等
  - 参考程序：建议采用C++或Python语言，可参考现有已发表相关论文或者GitHub上开源的相关程序，但需在实验报告中说明
    - 已经发表的论文：AlphaGo、AlphaGo Zero、AlphaGo Zero；DeepStack、Libratus、Pluribus；SuphX；AlphaStar、OpenAI Five等
    - GitHub开源程序有很多，比如：https://github.com/Aleum/AlphaGo等
  - 评分准则：1）综合考虑所设计AI的效果和效率以及算法创新性；2）课程设计报告撰写的规范性和质量以及表述的清晰性

课程设计可选任务三

- 任务名称：**计算博弈开放问题求解**
  - 具体内容：结合自己的兴趣爱好和研究方向，在计算博弈前沿研究方向中选择某一具体问题，针对该问题研究现状进行分析，总结现有方法存在的普遍问题，给出解决思路和方法，如有需要，可以对方法进行分析证明或者设计算法进行实验验证
  - 候选问题
    - 选择特定博弈问题，分析其均衡解的存在性、可计算性等
    - 选择特定博弈问题，研究其均衡解和最优解之间的关系
    - 研究智能博弈问题中的非理性因素对博弈结果的影响
    - 研究不完美信息博弈算法的性能评估问题或学习求解框架
  - 撰写语言：英文或者中文
  - 评分标准：1）所选择问题的代表性、解决思路的合理性和完整性等；2）方案报告撰写的质量（方案报告模板会提供，篇幅要求加上参考文献最低不少于6页）

任务完成方式和提交要求

- 完成方式：个人独立完成或组队（不多于三人）完成，组队完成的任务需单独论述每个队员在其中发挥的作用
- 提交时间：课程倒数第三次课之前（预计在12月3日），在课程倒数第二次课上会选择优秀的调研报告、AI程序及方案报告进行现场讲解展示，其中具有原创性的AI程序或方案报告会邀请相关学生参与人工智能顶级国际会议IJCAI2021或者ICML2021论文的投稿
- 提交方法：在课程网站上提交，同时提交Word版实验报告和代码到助教邮箱（kangyongxin2015@ia.ac.cn）
- 邮件发送规范（组队学号为所有队员学号加号串联）
  - 邮件主题：计算博弈课程设计_学号_姓名
  - 附件名称：计算博弈课程设计_学号_姓名.zip

感谢聆听！

李凯
kai.li@ia.ac.cn

2020年9月24日

中国科学院大学
University of Chinese of Academy of Sciences
自动化研究所
Institute of Automation