人工智能

中国科学院计算技术研究所
Institute Of Computing Technology Chinese Academy Of Sciences

罗平 luop@ict.ac.cn

模糊计算

- 清晰的概念：对象是否属于这个概念是明确的。
  - 例如；人、自然数、正方形。
- 模糊性的概念：对象从属的界限是模糊的，随判断人的思维而定
  - “最大的”与“较大的”都是有区别的两个概念。但是它们的区别都是逐渐的，而不是突变的，两者之间并不存在明确的界限
  - 一个人很高或很胖，但是究竟多少厘米才算高，多少千克才算胖呢？高和胖都很模糊。
  - 饭什么时候才算熟了？衣服什么样才能算洗干净?
  - 例如：美不美？早不早？便宜不便宜?
- 在客观世界中，上述的模糊概念要比清晰概念多得多。

模糊计算

- “模糊不是罪过”：　　模糊 ≠ ”糊涂”，≠ “朦胧”，≠ ”傻冒”，≠ “痴呆”
- 取得精确数据不可能或很困难
  - 例如：１粒种子肯定不能叫一堆，２粒也不是，３粒也不是……那么多少粒种子叫一堆呢？适当的界限在哪里呢？我们能否说１２３４５６粒种子不叫一堆，而１２３４５７粒种子叫一堆呢？
- 没有必要获取精确数据
  - 例如：要从一片西瓜地里找出一个最大的西瓜，那是件很麻烦的事。必须 把西瓜地里所有的西瓜都找出来，再比较一下，才知道哪个西瓜最大。西瓜越多，工作量就越大。如果按通常说的，到西瓜地里去找一个较大的西瓜，这时精确的问题就转化成模糊的问题，反而容易多了。由此可见，适当的模糊能使问题得到简化。

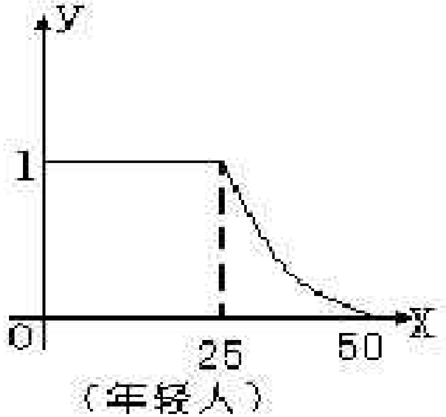
模糊计算

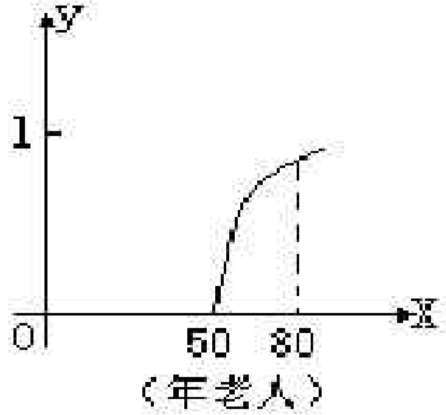
- 美国加州大学扎德(Zadeh, 1921-2017)教授于1965年提出的模糊集合与模糊逻辑理论是模糊计算的数学基础。
  - ✓ 发表了文章《模糊集》（Fuzzy sets, Information and Control，8， 338-353）
  - ✓ 主要用来处理现实世界中因模糊而引起的不确定性。
  - ✓ 模糊理论已经在推理、控制、决策等方面得到了非常广泛的应用

模糊计算

- **要使计算机能够模仿人脑，对复杂系统进行识别和判断，出路何在？**

- 1965年扎德(Zadeh)教授开创了对“模糊数学”的研究。他认为数学是可以模糊的，主张从精度方面“后退”一步。他提出用隶属函数使模糊概念数学化。
  - 例如“年轻”和“年老”这两个模糊概念。扎德教授本人根据统计资料，拟合了这两个概念的隶属函数图象。图中横坐标表示年龄，纵坐标表示隶属程度。





模糊集的定义

- 定义 设U是给定论域，μ_F是把任意u∈U映射为[0，1]上某个实值的函数，即

$$\mu_F \quad : \quad \mathrm{U} \rightarrow [0, 1]$$

- 则称 μ_F为定义在U上的一个隶属函数，由 $\mu_F(u)$（对所有$u \in U$）所构成的集合F称为U上的一个模糊集， $\mu_F(u)$称为u对F的隶属度。

- 模糊集F完全是由隶属函数μ_F来刻画的，μ_F把U中的每一个元素u都映射为[0, 1]上的一个值$\mu_F(u)$ 。
- $\mu_F(u)$ 的值表示u隶属于F的程度，其值越大，表示u隶属于F的程度越高。当 $\mu_F(u)$仅取0和1时，模糊集F便退化为一个普通集合。

模糊集的定义

- 例5.15 设论域U={20, 30, 40, 50, 60}给出的是年龄，请确定一个刻画模糊概念“年轻”的模糊集F。
- 解：由于模糊集是用其隶属函数来刻画的，因此需要先求出描述模糊概念“青年”的隶属函数。假设对论域U中的元素，其隶属函数值分别为：

$$\mu_F(20)=1, \mu_F(30)=0.8, \mu_F(40)=0.4,$$
$$\mu_F(50)=0.1, \mu_F(60)=0$$

则可得到刻画模糊概念“年轻”的模糊集

F={ 1, 0.8, 0.4, 0.1, 0}

随机与模糊：是否与多少

- **模糊性:**
  事件发生的程度，而不是一个事件是否发生.

- **随机性:**
  描述事件发生的不确定性, 即, 一个事件发生与否

模糊集的表示

- **离散且为有限论域的表示方法**

设论域 U={u1, u2, … , un}为离散论域，则其模糊集可表示为：

F={$\mu_F(u_1)$, $\mu_F(u_2)$, … , $\mu_F(u_{\text{n}})$}

为了能够表示出论域中的元素与其隶属度之间的对应关系，扎德引入了一种模糊集的表示方式：先为论域中的每个元素都标上其隶属度，然后再用“+”号把它们连接起来，即

$$F=\mu_F(u_1)/u_1+\mu_F(u_2)/u_2+\cdots+\mu_F(u_n)/u_n$$

也可写

$$F=\sum_{i=1}^{n}\mu_F(u_i)/u_i$$

其中, $\mu_F(u_i)$ 为 u_i 对F的隶属度；“$\mu_F(u_i)/u_i$”不是相除关系，只是一个记号；“+”也不是算术意义上的加，只是一个连接符号。

模糊集的表示

- 在这种表示方法中，当某个u_i对F的隶属度=0时，可省略不写。

例如，模糊集F可表示为：

F= 1/20+ 0.8/30+ 0.6/40+ 0.2/50

有时，模糊集也可写成如下两种形式：

$$F=\{\mu_F(u_1)/u_1,\mu_F(u_2)/u_2,\cdots,\mu_F(u_n)/u_n\}$$

或者

$$F=\{(\mu_F(u_1),u_1),(\mu_F(u_2),u_2),\cdots,(\mu_F(u_n),u_n)\}$$

其中，前一种称为单点形式，后一种称为序偶形式。

模糊集的表示

连续论域的表示方法

- 如果论域是连续的，则其模糊集可用一个实函数来表示。
  - 例如，扎德以年龄为论域，取U=[0, 100]，给出了“年轻”与“年老”这两的模糊概念的隶属函数

$$\mu_{年老}(u)=\begin{cases}0 & 当0\le u\le 50\\ [1+(\frac{5}{u-50})^2]^{-1} & 当50<u\le 100\end{cases}\qquad \mu_{年轻}(u)=\begin{cases}1 & 当0\le u\le 25\\ [1+(\frac{u-25}{5})^2]^{-1} & 当25<u\le 100\end{cases}$$

一般表示方法

- 不管论域U是有限的还是无限的，是连续的还是离散的，扎德又给出了一种类似于积分的一般表示形式：

$$F=\int_{u\in U}\mu_F(u)/u$$

- 这里的记号不是数学中的积分符号，也不是求和，只是表示论域中各元素与其隶属度对应关系的总括。

模糊集的运算

- 定义　设F、G分别是U 上的两个模糊集，对任意u∈U，都有$\mu_F(u) = \mu_G(u)$成立，则称F等于G，记为F=G。

- 设F、G分别是U上的两个模糊集，对任意u∈U，都有$\mu_F(u) \le \mu_G(u)$成立，则称F包含G，记为F ⊆ G。

模糊集的运算

- 定义　设F、G分别是U上的两个模糊集，则F⋃G、F⋂G分别称为F与G的并集、交集，它们的隶属函数分别为：

$$F \cup G: \mu_{F \cup G}(u) = \max_{u \in U}\{\mu_F(u), \mu_G(u)\}$$

$$F \cap G: \mu_{F \cap G}(u) = \min_{u \in U}\{\mu_F(u), \mu_G(u)\}$$

- 定义 设F为U上的模糊集，称﹁F为F的补集，其隶属函数为：

$$\neg F: \mu_{\neg F}(u) = 1 - \mu_F(u)$$

模糊集的运算

- 两个模糊集之间的运算实际上就是逐点对隶属函数作相应的运算。

- **例5.16 设U={1,2,3}，F和G分别是U上的两个模糊集，即**

  F=小=1/1+0.6/2+0.1/3

  G=大=0.1/1+0.6/2+1/3

则 $F\cup G=(1\vee 0.1)/1+(0.6\vee 0.6)/2+(0.1\vee 1)/3=1/1+0.6/2+1/3$

$F\cap G=(1\wedge 0.1)/1+(0.6\wedge 0.6)/2+(0.1\wedge 1)=0.1/1+0.6/2+0.1/3$

$\neg F=(1-1)/1+(1-0.6)/2+(1-0.1)/3=0.4/2+0.9/3$

“又矮又瘦”

- U = {甲, 乙, 丙, 丁}

  A = “矮子”　　隶属函数 (0.9, 1, 0.6, 0)

  B = “瘦子”　　隶属函数 (0.8, 0.2, 0.9, 1)

- 找出 C = “又矮又瘦”
- $C = A \cap B = (0.9 \wedge 0.8, 1 \wedge 0.2, 0.6 \wedge 0.9, 0 \wedge 1)$

  $= (0.8, 0.2, 0.6, 0)$

- 因此，　甲和丙比较符合条件

描述数据

- **一组学生共10人，考试成绩为：**
- **72　68　71　70　86**
- **69　70　82　72　75**
- **如何评价上述数据?**

这些学生平均分
73.5分

精确，但是不直观

这次考试成绩大多
数在７０分左右，
个别在８０分以上

“大多在70分左右，个别在80分以上”

- **“大多数”**
  - 0.5/6+0.8/7+1/8+1/9+1/10
- **“70分左右”**
  - 0.5/68+1/69+1/70+1/71+1/72+0.8/73+0.5/74+0.5/75
- **“个别”**
  - 1/1+1/2+0.5/3
- **“80分以上”**
  - 1/80+1/81+1/82+...+1/100

对分数问题的分析

72	68	71	70	86
69	70	82	72	75

- 首先，对10个分数求 '70分左右' 的隶属度：
  - 1 + 0.5 + 1 + 1 + 0 + 1 + 1 + 0 + 1 + 0.5 = 7
  - 表示约7个人次在70分左右。
- 7对于' 大多数' 的隶属度是0. 8
  - T（“大多数'） = 0.8
- 80分以上有2人，2对于' 个别' 的隶属度为1
  - T（“个别'） = 1

模糊关系的定义

- 笛卡尔积：设V与W是两个普通集合，V与W的笛卡尔乘积为

$$\mathbf{V\times W}=\{(\mathbf{v,w})\mid 任意 v\in V，任意 w\in W\}$$

有名的例子

- 从V到W的关系R：V×W上的一个子集，即$\mathbf{R}\subseteq\mathbf{V\times W}$
- 记为

$$V\xrightarrow{R}W$$

- 对于V×W中的元素(v,w)，若(v,w)∈R，则称v与w有关系R；
- 若(v,w) ∉R，则称v与w没有关系。

模糊关系的定义

- 定义 设F_i是U_i (i=1, 2, •••, n) 上的模糊集，则称

$$F_1 \times F_2 \times \cdots \times F_n = \int_{u_1 \times u_2 \times \cdots \times u_n} (\mu_{F_1}(u_1) \wedge \mu_{F_2}(u_2) \wedge \cdots \wedge \mu_{F_n}(u_n))/(u_1, u_2, \cdots, u_n)$$

为$F_1, F_2, \ldots, F_n$的笛卡尔乘积，它是$U_1 \times U_2 \times \ldots \times U_n$ 上的一个模糊集。

- 定义 在$U_1 \times U_2 \times \cdots \times U_n$上的一个n元模糊关系R是指以$U_1 \times U_2 \times \cdots \times U_n$为论域的一个模糊集，记为

$$R = \int_{U_1 \times U_2 \times \cdots \times U_n} \mu_R(u_1, u_2, \cdots, u_n)/(u_1, u_2, \cdots, u_n)$$

模糊关系的定义 U, V是论域

- **例** **设有一组学生 U={u_1,u_2}={秦学，郝玩}，一些在计算机上的活动V={v_1,v_2,v_3}={编程，上网，玩游戏}**
- **并设每个学生对各种活动的爱好程度分别为** $\mu_F(u_i, v_j)$ **i=1,2；j=1,2,3，即**

$$\mu_R(\text{秦学},\text{编程}) = 0.9, \mu_R(\text{秦学},\text{上网}) = 0.6\text{，} \mu_R(\text{秦学},\text{玩游戏}) = 0,$$
$$\mu_R(\text{郝玩},\text{编程}) = 0.2, \mu_R(\text{郝玩},\text{上网}) = 0.3\text{，} \mu_R(\text{郝玩},\text{玩游戏}) = 0.8$$

- **则U×V上的模糊关系R为**

$$R = \begin{bmatrix} 0.9 & 0.6 & 0 \\ 0.2 & 0.3 & 0.8 \end{bmatrix}$$

模糊关系的合成

- 定义 设$\mathbf{R}_1$与$\mathbf{R}_2$分别是$\mathbf{U}\times\mathbf{V}$与$\mathbf{V}\times\mathbf{W}$上的两个模糊关系，则$\mathbf{R}_1$与$\mathbf{R}_2$的合成是从$\mathbf{U}$到$\mathbf{W}$的一个模糊关系，记为 $\mathbf{R}_1\mathbf{o}\mathbf{R}_2$。其隶属函数为

$$\mu_{R_1\circ R_2}(u,w)=\vee\{\mu_{R_1}(u,v)\wedge\mu_{R_2}(v,w)\}$$

其中，∧和∨分别表示取最小和取最大。

模糊关系合成举例

- 例 设有：
- 一组学生 $U=\{u_1,u_2\}$={秦学，郝玩}，
- 一些在计算机上的活动$V=\{v_1,v_2,v_3\}$={编程，上网，玩游戏}
- 一些对学生的评价$G=\{g_1,g_2\}$={好，差}
- 若已知U和V的模糊关系，V和G的模糊关系，
- 那么，我们就可以合成出U和G的模糊关系

模糊关系的合成

- **例** **设有以下两个模糊关系**

$$R_1 = \begin{bmatrix} 0.4 & 0.5 & 0.6 \\ 0.8 & 0.3 & 0.7 \end{bmatrix} \qquad R_2 = \begin{bmatrix} 0.7 & 0.9 \\ 0.2 & 0.8 \\ 0.5 & 0.3 \end{bmatrix}$$

2×3 $\qquad$ 3×2

$0.4 \wedge 0.7$
$0.5 \wedge 0.2$
$0.6 \wedge 0.5$

0.4
0.2
0.5

- **则R_1与R_2的合成是**

$$R = R_1 \circ R_2 = \begin{bmatrix} 0.5 & 0.5 \\ 0.7 & 0.8 \end{bmatrix}$$

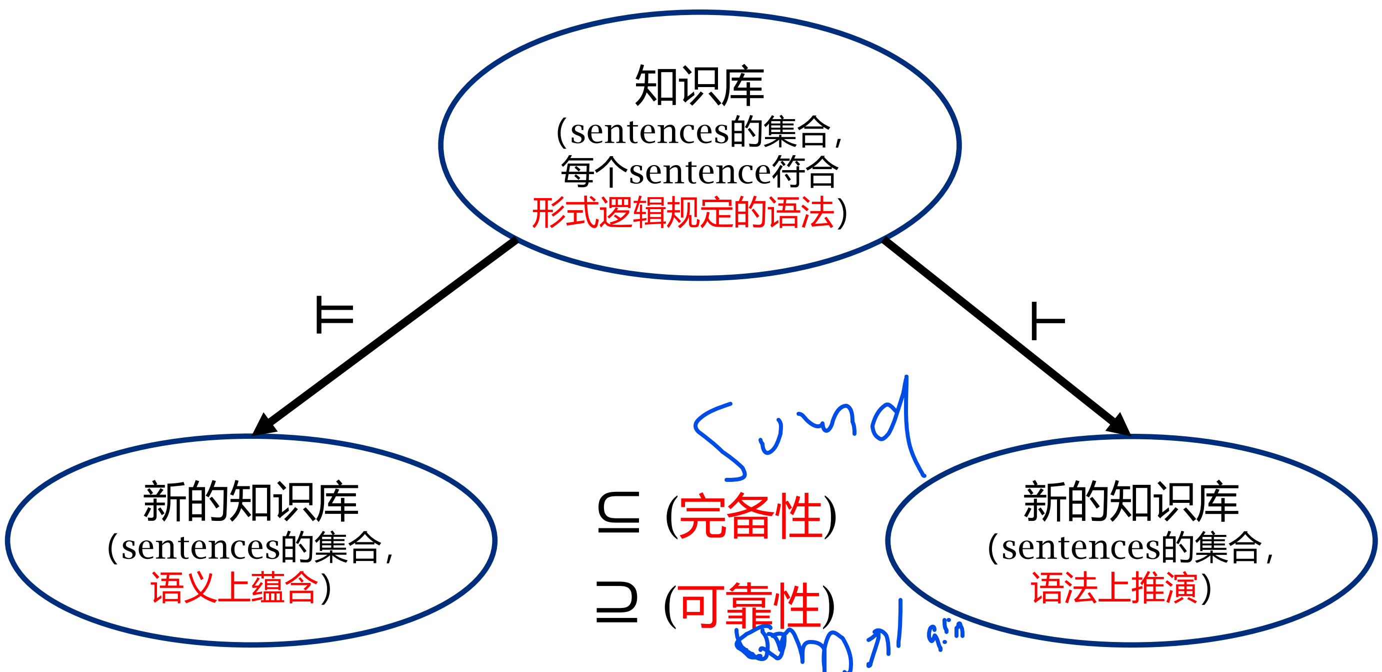
类比矩阵乘法

- **把R_1的第i行元素分别与R_2的第j列的对应元素相比较，两个数中取最小者，然后再在所得的一组最小数中取最大的一个，并以此数作为$R_1 o R_2$的元素R(i,j)。**

逻辑研究的内容

- 研究形式化定义的sentences之间的关系

- 两个角度：
- 语义：entailment 蕴含，逻辑推导
- 语法：inference 演绎，形式推演



模糊逻辑

- **模糊逻辑：定义模糊谓词、模糊量词、模糊修饰语等**

模糊谓词

设$x \in U$，F为模糊谓词，即U中的一个模糊关系，则模糊命题可表示为

$$x \text{ is } F$$

其中的模糊谓词F可以是大、小、年轻、年老、冷、暖、长、短等。

模糊量词

模糊逻辑中使用的模糊量词，如极少、很少、几个、少数、多数、大多数、几乎所有等。

模糊逻辑

- **模糊修饰语**
- **设m是模糊修饰语，x是变量，F谓模糊谓词，则模糊命题可表示为　x is mF，模糊修饰语也称为程度词，常用的程度词有“很”、“非常”、“有些”、“绝对”等。**

- **模糊修饰语的四种主要运算：**
- **① 求补　表示否定，如“不”、“非”等，其隶属函数的表示为**

$$\mu_{非_F}(u) = 1 - \mu_F(u) \qquad u \in [0,1]$$

- **② 集中　表示“很”、“非常”等，其效果是减少隶属函数的值：**

$$\mu_{非常_F}(u) = \mu_F{}^2(u) \qquad u \in [0,1]$$

有平方

- **③ 扩张　表示“有些”、“稍微”等，其效果是增加隶属函数的值：**

$$\mu_{有些_F}(u) = \mu_F{}^{\frac{1}{2}}(u) \qquad u \in [0,1]$$

开根号

- **④ 加强对比　表示“明确”、“确定”等，其效果是增加0.5以上隶 属函数的值，减少0.5以下隶属函数的值：**

$$\mu_{确实_F}(u) = \begin{cases} 2\mu_F{}^2(u) & 若 0 \le \mu_F(u) \le 0.5 \\ 1 - 2(1 - \mu_F(u))^2 & 若 0.5 < \mu_F(u) \le 1 \end{cases}$$

模糊逻辑知识表示举例

例题

- **大多数成绩好的学生学习都很刻苦。**
- **很少有成绩好的学生特别贪玩。**

分别刻画模糊谓词、模糊修饰词、模糊量词

模糊集的应用

- 模式识别
  - 图像
  - 视觉
  - 语音识别
- 智能控制
  - 智能家电…
    - 洗衣机、摄像机、照相机、电饭锅、空调、电梯
  - 日本: 地铁列车自动运转，自来水厂净化处理

模糊数学领域

- 领域
  - 模糊代数，模糊拓扑，模糊逻辑，模糊分析，
  - 模糊概率，模糊图论，模糊优化等模糊数学分支
- 期刊

  IEEE Transactions on Fuzzy Systems

  Int. J. of Fuzzy Sets and Systems

  Int. J. of Approximate Reasoning

  Int. J. Fuzzy Mathematics

  Int. J. Uncertainty, Fuzziness, knowledge-based Systems
- 国际会议

  IFSA (Int. Fuzzy Systems Association)

  EUFIT、NAFIP、Fuzzy-IEEE、IPMU