第九讲：均衡的低效率性

李凯

kai.li@ia.ac.cn

2020年11月26日

中国科学院大学
University of Chinese of Academy of Sciences

自动化研究所
Institute of Automation

本讲提纲

- 自私路由的低效率性
- 自私路由的改进措施
- 原子自私路由低效性
- 不同类型的均衡解概念

本讲提纲

- 自私路由的低效率性
- 自私路由的改进措施
- 原子自私路由低效性
- 不同类型的均衡解概念

自私路由（Selfish Routing）

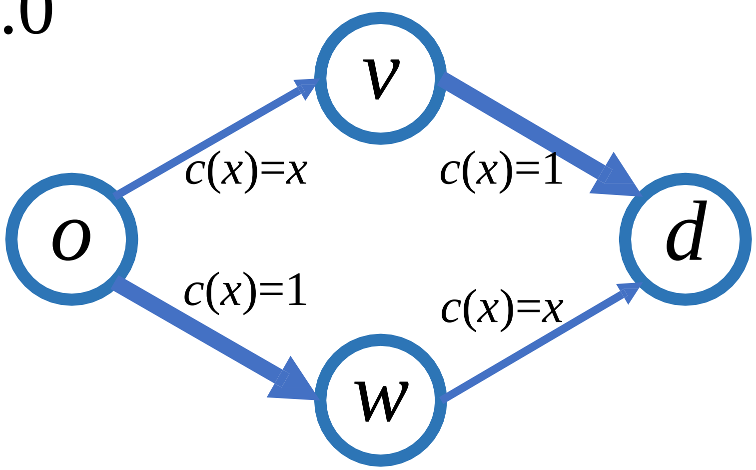
- **自私路由：** 最初由计算机科学家蒂姆·拉夫加登（Tim Roughgarden）提出，每个人在道路网络中的移动方式在自己看来是最佳的（“用户优先”），不过大家的整体行为却不一定是最优的（未达到“系统优先”）

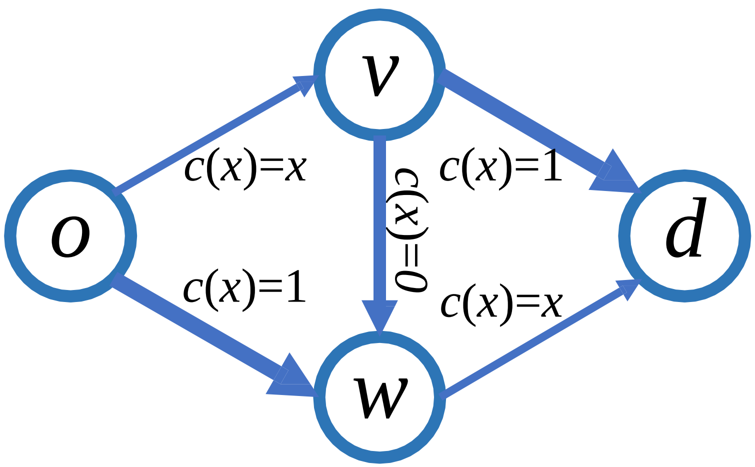
- 每个人都是“自私的出行人”，纳什均衡有可能会陷入局部最优陷阱，没有达到系统最优，这一现象称为均衡的低效率性

- 但是有时候纳什均衡和系统最优很接近，系统满足什么样的条件才能使得纳什均衡接近最优呢？

布雷斯悖论

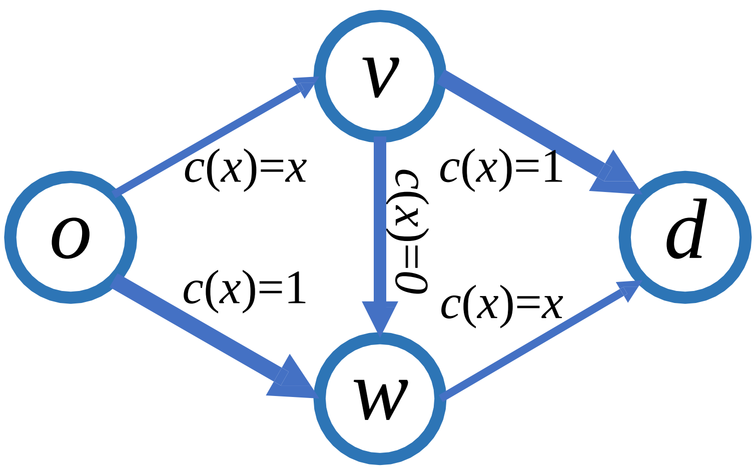
- 符号含义：*o*为起点，*d*为终点，*x*代表路径上的流量比例($x \in [0,1]$)，c(·)为路径的代价函数，即通过时间
- 在原始网络（左图）中，均衡条件下，50%司机选择o-v-d，剩下50%司机选择o-w-d，最终期望代价为1.5
- 在扩展网络（右图）中，加入一条通过时间近于0的v-w，此时所有司机都会选择 o-v-w-d，最终期望代价为2.0





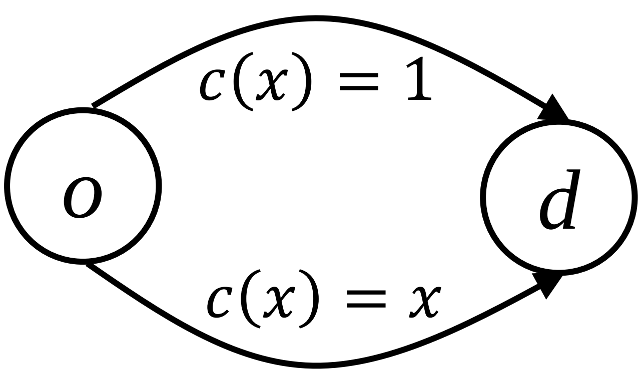
无秩序代价（Price of Anarchy，PoA）

- 无秩序代价：博弈论中用于评测在一个系统中，因为其参与单位的利己行为（或自私行为）而导致的效率下降程度，PoA值越大，说明均衡的效率越低
- $\text{PoA} = \dfrac{\text{均衡策略的代价}}{\text{最优策略的代价}}$
- $\text{PoA} \geq 1$
- 以布雷斯悖论中的扩展网络为例，$\text{PoA} = \dfrac{2}{3/2} = \dfrac{4}{3}$



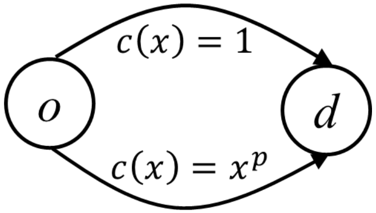
Pigou网络

- Pigou网络：
  - 网络包含两个顶点，出发点o和目标点d
  - 从o到d有两条路径，上路径与下路径
  - x：使用某路径的交通量占所有交通量的比例
  - 在上路径中，代价函数为常数$c(x) = 1$
  - 在下路径中，代价函数为 $c(x) = x$
  - 纳什均衡策略：都选下路径，平均通勤时间1小时
  - 最优策略：上下路各一半，平均通勤时间3/4小时
  - $\mathrm{PoA} = \frac{1}{3/4} = \frac{4}{3}$



非线性Pigou网络

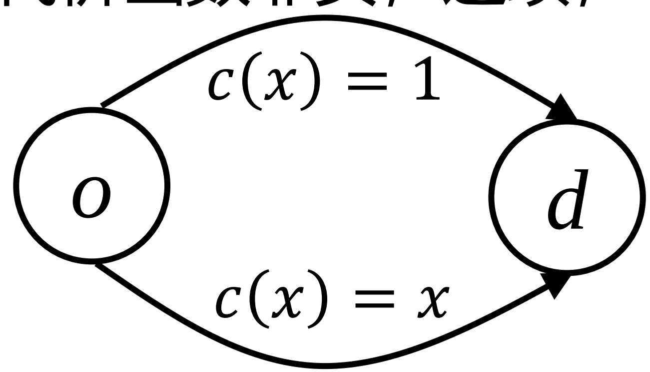
- 如果在下路径中代价函数变为 $c(x) = x^p$， p 可以很大。
- 选择下路径仍然是占优策略，因此，均衡下的平均通勤时间仍然是1小时。



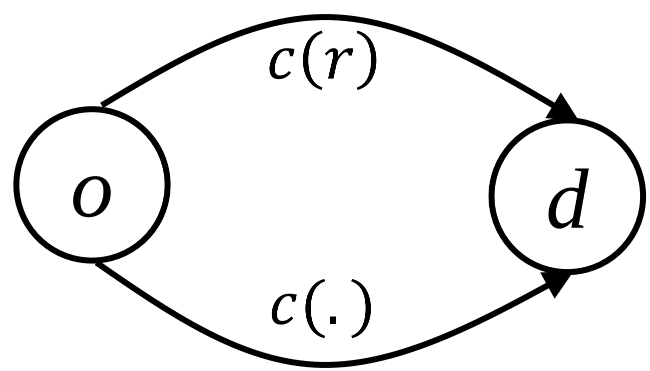
- 但是最优情况会变得明显不同：
- 假设交通还是上下路各一半，当$p \to \infty$时，下路径几乎不费时间，因此平均通勤0.5小时。
- 当$1 - \varepsilon$的流量用下路径，$\varepsilon \to 0, p \to \infty$时，下路径还是几乎不费时间，上路径几乎没车，因此平均通勤时间接近0。
- 因此，非线性Pigou网络的PoA值在$p \to \infty$时，会变得无穷大。

类Pigou网络

- 类Pigou网络：
  - 与前面的Pigou网络类似
  - 网络包含两个顶点，出发点o和目标点d
  - 从o到d有两条路径，上路径与下路径
  - 非负的总交通量r
  - 在上路径中，代价函数为常数$c(r)$
  - 在下路径中，代价函数为 $c(.)$，比如可以是线性、二次等
  - 代价函数非负，连续，非减，代表单位流量的通勤时间



Pigou网络



类Pigou网络

自私路由网络的PoA界

- 线性Pigou网PoA接近1，非线性的PoA则可以无限大。
- 是否是非线性导致了自私路由网络的PoA值变大？
- 定义C为一组类型的代价函数
  - 比如$C = \{ax + b: a, b \geq 0\}$代表仿射类型的代价函数

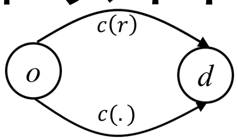
自私路由网络的PoA界

指定代价函数类型C，**任意**代价函数$c \in C$的自私路由网络，**其PoA最大值是通过类Pigou网络得到**

- PoA最差情况的网络结构总是最简单的：类Pigou网络！
- 均衡的低效性和网络结构的复杂度无关，而和代价函数有关！不用遍历所有的网络结构，只需要遍历类Pigou网络就可以找到最差情况的PoA！

自私路由网络的PoA界

- 类Pigou网络，选择下路径仍然是占优策略，因为下路径最大的代价等于$c(r)$：当所有流量都选择下路径时
- 因此，均衡时的总交通时间为$r \cdot c(r)$：总流量乘以单位流量的通勤时间。



- 最小总交通时间：$\min\limits_{0 \le x \le r} \{x \cdot c(x) + (r - x) \cdot c(r)\}$，其中$x$是走下路径的交通量，条件可以从$0 \le x \le r$变为$0 \le x$因为代价函数非减，最小值总是在$0 \le x \le r$中达到。

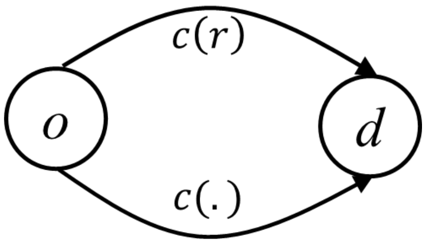
- 类Pigou网的PoA：

$$\max_{0 \le x} \left\{ \frac{r \cdot c(r)}{x \cdot c(x) + (r - x) \cdot c(r)} \right\}$$

自私路由网络的PoA界

- Pigou界（Pigou bound）：对于任意一个包含非负、连续、非减代价函数的集合C，定义Pigou界$\alpha(C)$。
  - $\alpha(C)$为类Pigou网络 PoA的最大值，其中这些类Pigou网络的路径代价函数来源于C，形式上可以表示为：

$$\max_{c\in C}\max_{r\geq 0}\max_{0\leq x}\left\{\frac{r\cdot c(r)}{x\cdot c(x)+(r-x)\cdot c(r)}\right\}$$



  - 分别从代价函数、总交通量、选择下路径的交通量这三个变量里搜索类Pigou网络的PoA的最大值：

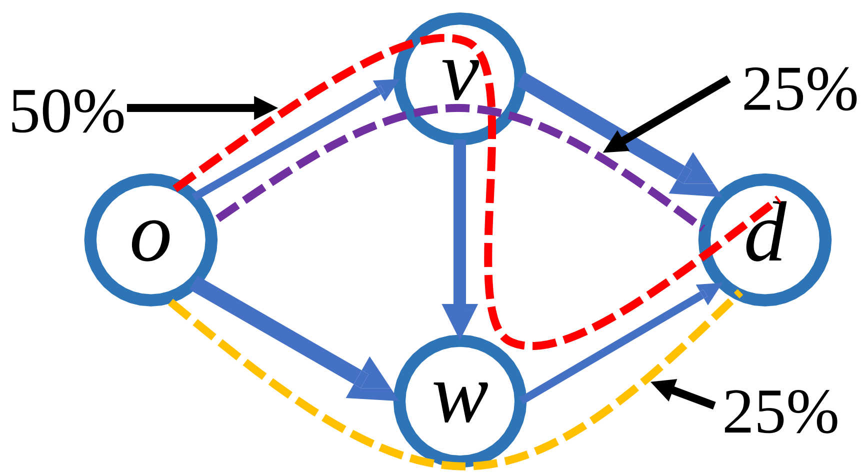
代价函数类型	代表公式	最差情况的PoA值（Pigou界）
线性函数	$x+1$	$4/3\approx 1.3$
二次函数	x^2+x+1	$\frac{3\sqrt{3}}{3\sqrt{3}-2}\approx 1.6$
三次函数	x^3+x^2+x+1	$\frac{4\sqrt[3]{4}}{4\sqrt[3]{4}-3}\approx 1.9$
p次函数	$x^p+x^{p-1}+\cdots+x+1$	$\frac{(p+1)\sqrt[p]{p+1}}{(p+1)\sqrt[p]{p+1}-p}\approx\frac{p}{\ln p}$

自私路由网络的PoA界

- 自私路由网络PoA界再回顾：
- 对于任意形式的自私路由网络，假设它每一条边上的代价函数都属于集合C，那么该网络的最大PoA值（最坏情况下的PoA值）可以在对应的类Pigou网络中达到。
- 重点：对任意的自私路由网络都成立！
- 自私路由网络的PoA值和结构无关，而和代价函数有关。
- 计算复杂网络的最大PoA值问题可以转化为计算相对应的类Pigou网络的最大PoA值，也就是求Pigou界$\alpha(C)$。
- 也就是说对于任意的自私路由网络，其每一条边上的代价函数都属于集合C，则该网络的$\text{PoA} \leq \alpha(C)$。

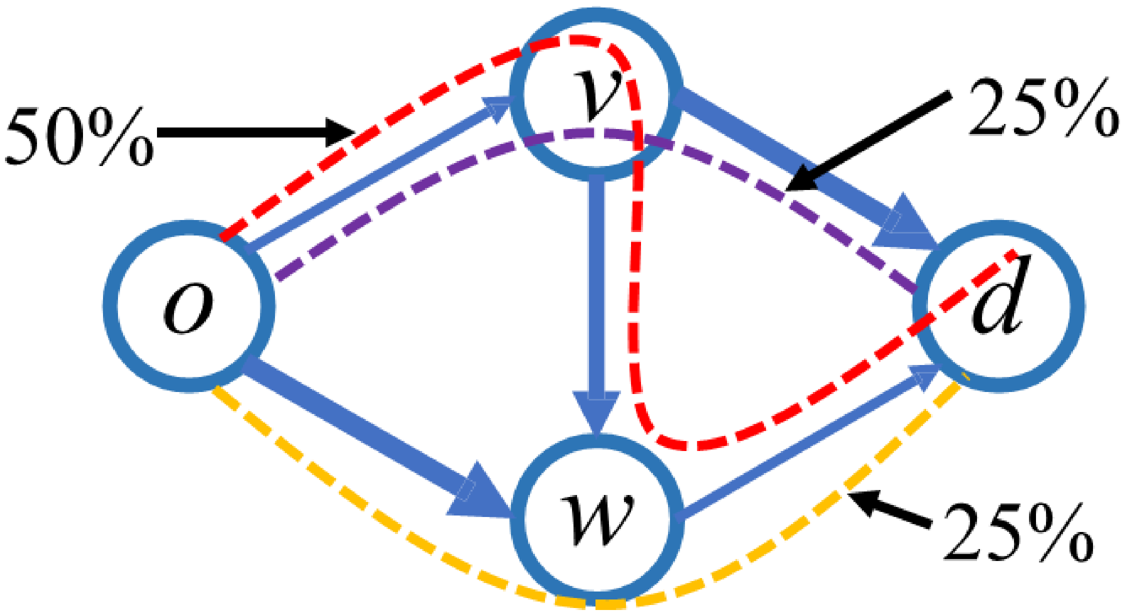
自私路由网络的PoA界：证明

- 网络流（Flow Network）：
  - $G=(V,E)$代表一个自私路由网络，起点o和终点d，总流量r
  - 令P代表所有从o到d的路径。
  - 一个流（Flow）代表总流量在所有路径的一种分配方式，用一个非负向量表示：$\{f_p\}_{p\in P}, \sum_{p\in P} f_p = r$。
  - 如下图所示，从o到d一共3条路径，$P=\{ovd, owd, ovwd\}$。
  - 图中的虚线代表了一个流，其中，50%的流量走$ovwd$，25%的流量走ovd，25%的流量走owd：



自私路由网络的PoA界：证明

- 网络流（Flow Network）：
  - 对于一个流f和自私路由网络的一条边e ∈ E，f_e代表经过e的总流量：$f_e = \sum_{p\in P, e\in p} f_p$
  - $f_{(o,v)} = f_{(w,d)} = \frac{3}{4}r$
  - $f_{(o,w)} = f_{(v,d)} = \frac{1}{4}r$
  - $f_{(v,w)} = \frac{1}{2}r$

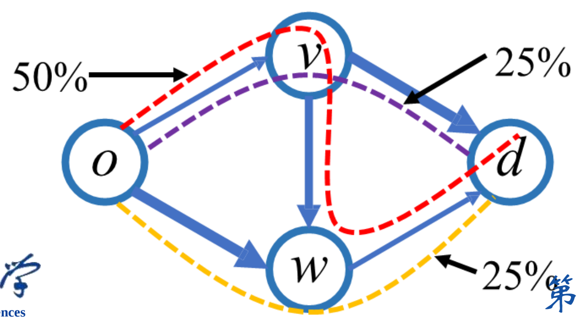


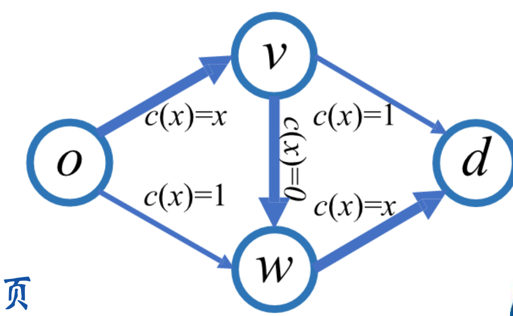
自私路由网络的PoA界：证明

- 均衡流（Equilibrium Flow），一个流f是均衡流，只有单位流量花费时间最少的路径上有流量！其实就是从个体角度来看花费时间最少。
- 也就是说，在一个均衡流f中，如果$f_{\hat{p}} > 0$当且仅当：

$$\hat{p} \in \mathrm{argmin}_{p \in P} \{ \sum_{e \in p} c_e(f_e) \}$$

- 当下图中的代价函数和布雷斯悖论中的一样时，图中所示的流不是均衡流，因为单位流量花费时间最少的路径是$ovwd$，只有该路径有流量才是均衡流。





自私路由网络的PoA界：证明

- 流的代价$C(f)$：所有交通流量的总耗时
- 可以通过两种等价的方式计算
- 以路径为单位，记$\sum_{e\in p} c_e(f_e) = c_p(f)$，代表路径$p$的单位流量花费的总时间，因此：

$$C(f) = \sum_{p\in P} f_p\, c_p(f)$$

- 另外，以边为单位：

$$C(f) = \sum_{e\in E} f_e\, c_e(f_e)$$

- 根据前面f_e的定义$f_e = \sum_{p\in P, e\in p} f_p$，可以证明两者等价

自私路由网络的PoA界：证明

- 给定一个自私路由网络$G = (V, E)$，代价函数$c \in C$，总交通量r，f代表均衡流，f^*代表最优流。
- 首先证明，将每一条边e的代价固定为$c_e(f_e)$时，均衡流f是最优的：
  - 由于f是均衡流，如果$f_{\hat{p}} > 0$，那么对于任意的$p \in P$，$c_{\hat{p}}(f) < c_p(f)$，这是均衡流的定义。
  - 均衡流所使用的路径$\hat{p}$，具有相同的$c_{\hat{p}}(f)$，记作L，$L < c_p(f)$
  - 因此，$\sum_{p \in P} \underbrace{f_p}_{sums\ to\ r} \underbrace{c_p(f)}_{=L\ if\ f_p > 0} = rL \quad (1)$
  - 同时，$\sum_{p \in P} \underbrace{f_p^*}_{sums\ to\ r} \underbrace{c_p(f)}_{\geq L} \geq rL \quad (2)$

自私路由网络的PoA界：证明

- 可以将上述(1)和(2)式子等价转化为基于边的，得到：

$$\sum_{e\in E} f_e\, c_e(f_e) = rL,$$

$$\sum_{e\in E} f_e^*\, c_e(f_e) \geq rL$$

- 两者相减得到：

$$\sum_{e\in E}(f_e^* - f_e)c_e(f_e) \geq 0$$

- 回忆：一个流f花费的总时间记为$C(f) = \sum_{e\in E} f_e\, c_e(f_e)$
- 将每一条边e的代价固定为$c_e(f_e)$时，均衡流f是最优的，得证。

自私路由网络的PoA界：证明

- 接下来我们想证明最优流f^*能比均衡流f好多少
- 回忆Pigou界的定义：$\alpha(C)=\max_{c\in C}\max_{r\geq 0}\max_{0\leq x}\left\{\frac{r\cdot c(r)}{x\cdot c(x)+(r-x)\cdot c(r)}\right\}$
- 对自私路由的任意边e，用c_e代替c，f_e代替r，f_e^*代替x，我们得到：$\alpha(C)\geq\frac{f_e\cdot c_e(f_e)}{f_e^*\cdot c_e(f_e^*)+(f_e-f_e^*)\cdot c_e(f_e)}$，整理下得到：
- $f_e^*\cdot c_e(f_e^*)\geq\frac{1}{\alpha(C)}f_e\cdot c_e(f_e)+(f_e^*-f_e)c_e(f_e)$
- 上式两边分别对e累加得到：
- $C(f^*)\geq\frac{1}{\alpha(C)}C(f)+\underbrace{\sum_{e\in E}(f_e^*-f_e)c_e(f_e)}_{\geq 0}\geq\frac{C(f)}{\alpha(C)}$
- 因此，PoA值$\frac{C(f)}{C(f^*)}\leq\alpha(C)$，得证！

自私路由的低效率性小结

- 布雷斯悖论
- 无秩序代价：均衡/最优，大于等于1，值越大表明均衡越低效
- 线性Pigou网络、非线性Pigou网络
- 自私路由网络的PoA值和结构无关，而和代价函数有关
- 类Pigou网络
- 类Pigou网络的最大PoA值：Pigou界$\alpha(C)$
- 计算复杂网络的最大PoA值问题可以转化为计算相对应的类Pigou网络的最大PoA值，也就是求Pigou界
- 上述定理的证明

本讲提纲

- 自私路由的低效率性
- 自私路由的改进措施
- 原子自私路由低效性
- 不同类型的均衡解概念

对自私路由网络的改进策略

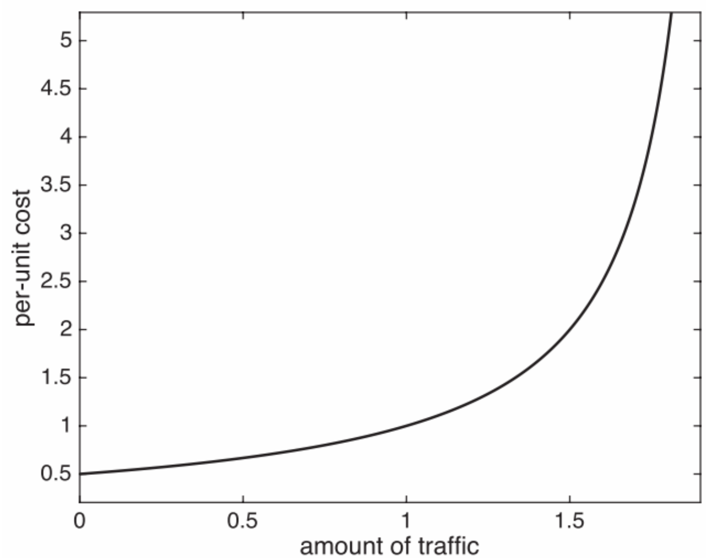
- 网络预留（Network Over-Provisioning）
- 自私路由网络适用于实际中许多不同类型的网络，包括交通、通信和电子网络等。
- 在通信网络中，向网络添加额外的容量通常相对方便，一个常用的管理策略是安装比目前需求更多的容量，这意味着网络的容量通常不会被充分利用。
- 这种网络预留的动机一方面是应对未来需求的增长；另外，过度供应也和性能有关，根据经验，在有额外容量的情况下，网络往往会遭受更少的数据包丢失和延迟
- 能不能从理论上解释网络预留的好处呢？

对自私路由网络的改进策略

- 这里我们假设网络中每条边的代价函数c_e定义如下：

$$c_e(x) = \begin{cases} \frac{1}{u_e - x}, if\ x < u_e \\ +\infty, if\ x \geq u_e \end{cases},\quad u_e\text{代表边}e\text{的容量（Capacity）}$$

- 当流量x小于容量时代价比较平坦，一旦x接近容量，代价会变成+∞，是通信网络里最简单最常用的一种模型



u_e =2

对自私路由网络的改进策略

- 给定一个参数β，我们称一个自私路由网络为β预留（β-over-provisioned）：对于一个均衡流f和每条边e来说，$f_e \leq (1-\beta)u_e$
  - 均衡状态下，所有边最大利用率为$(1-\beta) \times 100\%$
  - 当β不接近0时，均衡流在所有边上的利用率不接近100%，根据前面的图像，此时代价函数近似于低次多项式
  - 自私路由网络PoA界表明，此时PoA值不会很大！
  - 算β预留自私路由最大PoA→ 算β预留类Pigou网络的最大PoA
  - 回忆Pigou界的定义：$\alpha(C) = \max_{c \in C} \max_{r \geq 0} \max_{0 \leq x} \left\{ \frac{r \cdot c(r)}{x \cdot c(x) + (r-x) \cdot c(r)} \right\}$
  - β预留类Pigou网络的最大PoA：

$$\alpha_\beta = \max_{u>0} \max_{r \in [0,(1-\beta)u]} \max_{0 \leq x} \left\{ \frac{r \cdot c(r)}{x \cdot c(x) + (r-x) \cdot c(r)} \right\}, c(x) = \frac{1}{u-x}$$

对自私路由网络的改进策略

- β预留类Pigou网络的最大PoA：

$$\alpha_\beta = \frac{1}{2}\left(1 + \sqrt{\frac{1}{\beta}}\right)$$

  - β趋近1，α_β趋近1，此时代价函数近似常数。
  - β趋近0，α_β趋近$+\infty$，此时代价函数类似高次多项式。
- 实际中只需进行较少的预留，比如设β =0.1，此时均衡状态下，所有边最大的利用率为$(1-\beta)\times 100\% = 90\%$，PoA最大值约为2.1
- 因此，对自私路由网络设置一些预留，可以保证最差情况下的PoA值接近1，大大缓解了均衡的低效性

对自私路由网络的改进策略

- 技术升级

资源扩充界（Resource Augmentation Bound）定理

对于任意自私路由网络：
总流量为r时的均衡流的总代价$C(f)=\sum_{e\in E} f_e\, c_e(f_e)$小于等于
总流量为$2r$时的最优流的总代价$C(f^*)=\sum_{e\in E} f_e^* \cdot c_e(f_e^*)$

等价定理

如果f^*是代价函数为c的自私路由的最优流；f是同样自私路由网络（总流量不变，代价函数变为$\tilde{c}$）的均衡流，$\tilde{c}_e(x)=c_e(x/2)/2$，那么$C(f)<C(f^*)$

- 同一代价函数不同流量的网络比较，等价于对不同代价函数相同流量的网络进行比较。

对自私路由网络的改进策略

- 技术升级

等价定理

如果f^*是代价函数为c的自私路由的最优流；f是同样自私路由网络（总流量不变，代价函数变为$\tilde{c}$）的均衡流，$\tilde{c}_e(x) = c_e(x/2)/2$，那么$C(f) < C(f^*)$

- $\tilde{c}_e(x) = c_e(x/2)/2$，相当于给每一条边提了速，进行了技术升级，达到改进自私路由网络中均衡低效的问题
- 同时，$c_e(x) = \frac{1}{u_e - x}$，那么$\tilde{c}_e(x) = \frac{1}{2u_e - x}$，相当于边的容量扩大了一倍，达到了网络预留的效果。

对自私路由网络的改进策略

- 资源扩充界定理的证明：

资源扩充界（Resource Augmentation Bound）定理

对于任意自私路由网络：
总流量为r时的均衡流的总代价$C(f) = \sum_{e \in E} f_e \, c_e(f_e)$小于等于
总流量为$2r$时的最优流的总代价$C(f^*) = \sum_{e \in E} f_e^* \cdot c_e(f_e^*)$

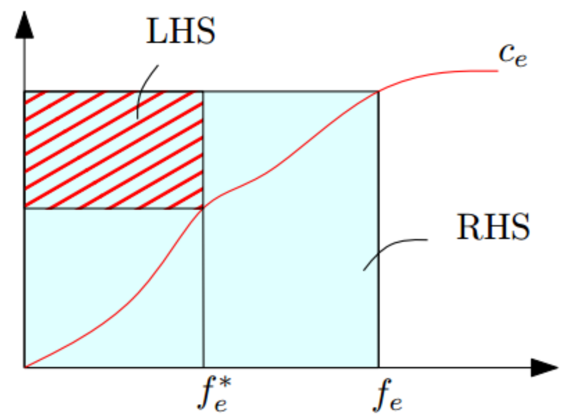
  - 借用上次证明的结论
  - 由于f是均衡流，如果$f_{\hat{p}} > 0$，那么对于任意的$p \in P$，$c_{\hat{p}}(f) < c_p(f)$，这是均衡流的定义
  - 均衡流所使用的路径$\hat{p}$，具有相同的$c_{\hat{p}}(f)$，记作L，$L \leq c_p(f)$
  - $\sum_{e \in E} f_e \, c_e(f_e) = \sum_{p \in P} \underbrace{f_p}_{sums\ to\ r} \underbrace{c_p(f)}_{=L\ if\ f_p > 0} = rL$
  - $\sum_{e \in E} f_e^* \cdot c_e(f_e) = \sum_{p \in P} \underbrace{f_p^*}_{sums\ to\ 2r} \underbrace{c_p(f)}_{\geq L} \geq 2rL$

对自私路由网络的改进策略

- 资源扩充界定理的证明：
  - 接下来我们想证明

$$\underbrace{\sum_{e\in E} f_e^* \cdot c_e(f_e^*)}_{cost\ of\ \ f^*} \geq \underbrace{\sum_{e\in E} f_e^* \cdot c_e(f_e)}_{\geq 2rL} - \underbrace{\sum_{e\in E} f_e\, c_e(f_e)}_{=rL}$$

  - 为此，我们分析每一条边是否满足：
  - $f_e^*[c_e(f_e) - c_e(f_e^*)] \leq f_e c_e(f_e)$
  - $f_e^* \geq f_e$时，由于c_e非减非负，左边非正，右边非负，成立
  - $f_e^* < f_e$时，左边是红色区域的面积
    右边是整个浅蓝色区域的面积，成立
  - $\underbrace{\sum_{e\in E} f_e^* \cdot c_e(f_e^*)}_{cost\ of\ \ f^*} \geq rL = \underbrace{\sum_{e\in E} f_e\, c_e(f_e)}_{cost\ of\ \ f}$
  - 证毕！



自私路由的改进措施小结

- 网络预留，β预留：对于一个均衡流f和每条边e来说，$f_e \leq (1-\beta)u_e$
- 算β预留自私路由最大PoA→ 算β预留类Pigou网络的最大PoA α_β。
- $\alpha_\beta = \frac{1}{2}(1+\sqrt{\frac{1}{\beta}})$
- 对自私路由网络设置一些预留，可以保证最差情况下的PoA值接近1，大大缓解了均衡的低效性。
- 技术升级，$\tilde{c}_e(x) = c_e(x/2)/2$
- 相当于给每一条边提了速，进行了技术升级。
- 同时相当于边的容量扩大了一倍，达到了网络预留效果。

本讲提纲

- 自私路由的低效率性
- 自私路由的改进措施
- 原子自私路由低效性
- 不同类型的均衡解概念

原子自私路由（Atomic Selfish Routing）

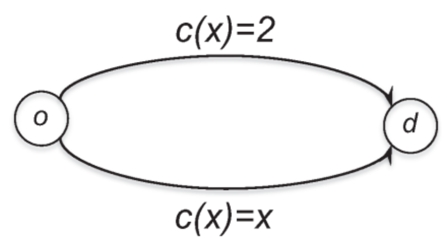
- 我们前面讲述的都是非原子（nonatomic）自私路由
  - 单个智能体的大小可以忽略不计，如交通网中的车流
- 接下来，我们讨论原子自私路由，这里每个智能体可以认为是一个较大的实体：
  - 一个原子自私路由网络可以看作是一个有向图$G=(V,E)$，代价函数非负非减，k个智能体，每个智能体i有一个起点o_i和终点d_i，每个智能体i从o_i到d_i运输1单位的流量，目标是极小化运输的代价。
  - 令P_i代表G中从o_i到d_i的所有路径，一个流可以用一个向量$(p_1,\ldots,p_k)$表示，其中，$p_i\in P_i$
  - **回忆非原子自私路由：**一个流（Flow）代表总流量在所有路径的一种分配方式，用一个非负向量表示：$\{f_p\}_{p\in P}, \sum_{p\in P} f_p=r$
  - 流的代价定义和前面一样$C(f)=\sum_{p\in P} f_p\, c_p(f)=\sum_{e\in E} f_e\, c_e(f_e)$

原子自私路由

- 原子自私路由中的均衡流：
  - $(p_1, \dots, p_k)$是均衡流，如果对任意智能体i，路径$\hat{p}_i \in P_i$：

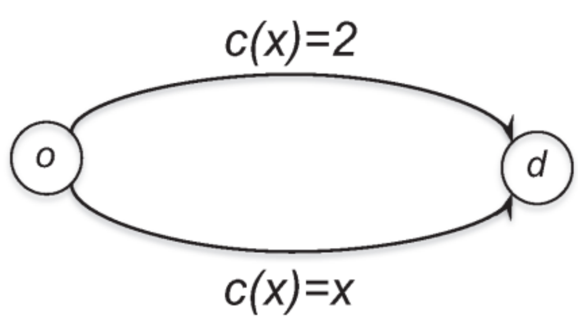
$$\underbrace{\sum_{e \in p_i} c_e(f_e)}_{before\ deviating} \leq \underbrace{\sum_{e \in p_i \cap \hat{p}_i} c_e(f_e) + \sum_{e \in \hat{p}_i \setminus p_i} c_e(f_e + 1)}_{after\ deviating}$$

  - 也就是说，均衡流中没有智能体能通过改变来减小自己的代价
  - **回忆非原子自私路由**，均衡流：只有单位流量花费时间最少的路径上有流量！
  - 一个类Pigou原子自私路由，2个智能体，每个控制1单位流量，最优策略是每条路径1个智能体，总代价$1 \times 2 + 1 \times 1 = 3$，这同样是一个均衡策略，没有人有改变的意愿（思考下）
  - 还有另外一个均衡策略，2个智能体都走下路径（思考下），这个均衡的总代价是$2 \times 2 = 4$



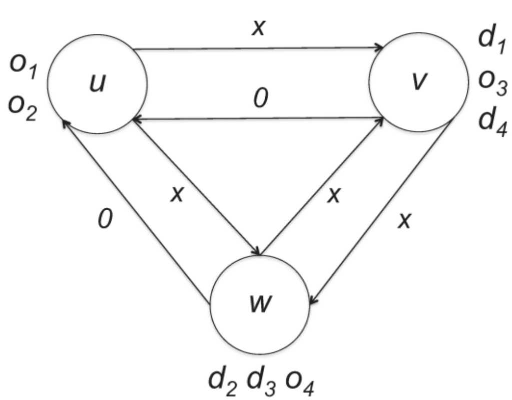
原子自私路由

- 非原子自私路由中的均衡流的总代价总是一样的，而在原子路由中则不成立
- 因此，需要修改原子自私路由的PoA的定义（一般按照最差情况进行定义）
- 原子自私路由的PoA $= \dfrac{\text{最差均衡策略的代价}}{\text{最优策略的代价}}$
- 上个例子中的原子自私路由的PoA $= \dfrac{4}{3}$



原子自私路由

- 另外，原子自私路由的PoA值一般比非原子自私路由的PoA值要大
  - 如下图所示，一共4个智能体，每个智能体从起点到终点都有两种路径选择：一步到达，两步到达
  - 最优策略是每个智能体都选择一步到达，总代价是4，这也是一个均衡策略
  - 但是，还存在另外一个更差的均衡策略，每个智能体都选择两步到达，此时的总代价是10
  - 因此，此原子自私路由网络的PoA $=\frac{10}{4}=\frac{5}{2}$
  - 回忆：对于非原子自私路由网络，如果代价函数是仿射的，PoA最大为$\frac{4}{3}$



原子自私路由的PoA界

- 这里只考虑仿射代价函数，其他代价函数的结果更复杂

原子自私路由的PoA界（PoA Bound for Atomic Selfish Routing）

任意仿射代价函数的原子自私路由网络，它的PoA值最大为2.5

- 接下来我们尝试证明该结论：
  - f代表任意一个均衡流，f^*代表最优流，f_e和f_e^*代表经过e边的智能体数量，仿射代价函数$c_e(x) = a_e x + b_e, a_e > 0, b_e > 0$
  - 我们首先利用f是均衡流这一事实，回忆均衡流的定义，对任意智能体i，假设它选择其他路径$\hat{p}_i \in P_i$只会增大代价：
  - $\underbrace{\sum_{e \in p_i} c_e(f_e)}_{before\ deviating} \le \underbrace{\sum_{e \in p_i \cap \hat{p}_i} c_e(f_e) + \sum_{e \in \hat{p}_i \setminus p_i} c_e(f_e + 1)}_{after\ deviating}$
  - 既然我们要证明f与f^*的关系，何不假设智能体i变换到最优流的路径？

原子自私路由的PoA界

- 原子自私路由PoA界的证明：
  - 智能体i在均衡流f中用的路径是p_i，假设它转而用最优流f^*中的路径p_i^*，通过上述均衡流定义立即可以得到：
  - $\sum_{e\in p_i} c_e(f_e) \le \sum_{e\in p_i\cap p_i^*} c_e(f_e) + \sum_{e\in p_i^*\setminus p_i} c_e(f_e+1)$
  - 上式对所有智能体i都成立，那么对所有智能体累加得到：
  - $\underbrace{\sum_{i=1}^k \sum_{e\in p_i} c_e(f_e)}_{C(f)} \le \sum_{i=1}^k \left(\sum_{e\in p_i\cap p_i^*} c_e(f_e) + \sum_{e\in p_i^*\setminus p_i} c_e(f_e+1)\right)$
  - $\le \sum_{i=1}^k \left(\sum_{e\in p_i^*} c_e(f_e+1)\right)$ 代价函数非减
  - $= \sum_{e\in E} f_e^* c_e(f_e+1)$ 每个智能体i在最优流f^*每条边上贡献一个$c_e(f_e+1)$
  - $= \sum_{e\in E} [a_e f_e^*(f_e+1) + b_e f_e^*]$ 仿射代价函数$c_e(x) = a_e x + b_e$
  - 接下来的任务是能不能把上式子拆分为$C(f)$和$C(f^*)$

原子自私路由的PoA界

- 原子自私路由PoA界的证明：
  - $\underbrace{\sum_{i=1}^{k}\sum_{e\in p_i} c_e(f_e)}_{C(f)} \le \sum_{e\in E}[a_e f_e^*(f_e+1)+b_e f_e^*]$
  - 接下来的任务是能不能把上式子拆分为$C(f)$和$C(f^*)$
  - **对任意**$\boldsymbol{y,z\in\{0,1,2,3,\dots\}}$，$\boldsymbol{y(z+1)\le\frac{5}{3}y^2+\frac{1}{3}z^2}$
  - $C(f)\le\sum_{e\in E}[a_e(\frac{5}{3}{f_e^*}^2+\frac{1}{3}{f_e}^2)+b_e f_e^*]$
  - $\le\frac{5}{3}[\sum_{e\in E} f_e^*(a_e f_e^*+b_e)]+\frac{1}{3}\sum_{e\in E} a_e\, {f_e}^2$
  - $\le\frac{5}{3}C(f^*)+\frac{1}{3}C(f)$
- $C(f)\le\frac{5}{2}C(f^*)\to\frac{C(f)}{C(f^*)}\le\frac{5}{2}\to \mathrm{PoA}\le\frac{5}{2}$
- 证毕！

原子自私路由低效性小结

- 原子自私路由，每个智能体是一个较大的实体
- 非原子自私路由中的均衡流的总代价总是一样的，而在原子路由中则不成立，修改PoA定义
- 原子自私路由的 $\text{PoA} = \dfrac{\text{最差均衡策略的代价}}{\text{最优策略的代价}}$
- 原子自私路由的PoA值一般比非原子自私路由的PoA值要大
- 原子自私路由的PoA界：任意仿射代价函数的原子自私路由网络，它的PoA值最大为2.5
- 上述定义的证明

本讲提纲

- 自私路由的低效率性
- 自私路由的改进措施
- 原子自私路由低效性
- 不同类型的均衡解概念

不同类型的均衡

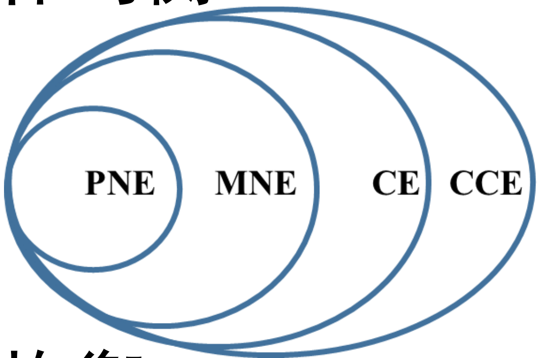
- 前面定义的均衡流可以看作是纯策略纳什均衡
  - $(p_1, \ldots, p_k)$是均衡流，如果对任意智能体i，路径$\hat{p}_i \in P_i$：

$$\underbrace{\sum_{e \in p_i} c_e(f_e)}_{before\ deviating} \leq \underbrace{\sum_{e \in p_i \cap \hat{p}_i} c_e(f_e) + \sum_{e \in \hat{p}_i \setminus p_i} c_e(f_e + 1)}_{after\ deviating}$$

- 因为智能体不随机选择路径
- 许多博弈都不存在纯策略纳什均衡，比如最简单的石头剪刀布。
- 什么时候存在纯策略纳什均衡？
- 原子自私路由是否必然有纯策略纳什均衡？
- 不存在纯策略纳什均衡的时候，怎么分析？

不同类型的均衡

- 如果纯策略纳什均衡不存在，如何分析PoA呢？
- 需要扩大均衡的范围，保证均衡的存在性
- PNE：Pure Nash Equilibria纯策略纳什均衡
  - 不一定存在
- MNE：Mixed Nash Equilibria混合策略纳什均衡
  - 一定存在，难以计算
- CE：Correlated Equilibria相关均衡
  - 一定存在，容易计算
- CCE：Coarse Correlated Equilibria粗相关均衡
  - 一定存在，更容易计算



纯策略纳什均衡

- 代价最小化博弈（Cost-Minimization Games）
  - 包含k个智能体
  - 每个智能体i有一个纯策略集合S_i，$s_i \in S_i$
  - 每个智能体都有一个非负代价函数$C_i(\mathbf{s})$，$\mathbf{s} = (s_1, \dots, s_k)$
- 原子自私路由是一个CMG，$C_i(\mathbf{s})$代表给定其他智能体路径选择的基础上，智能体i在它所选路径上的总耗时

纯策略纳什均衡（Pure Nash Equilibrium，PNE）

一个策略组合$\mathbf{s} = (s_1, \dots, s_k)$是PNE，如果对于任意智能体$i$来说，$C_i(\mathbf{s}) \le C_i(s_i', \mathbf{s}_{-i})$

- 不一定存在

混合策略纳什均衡

混合策略纳什均衡（Mixed Nash Equilibrium，MNE）

一个混合策略组合$\boldsymbol{\sigma} = (\sigma_1, \dots, \sigma_k)$是MNE，如果对于任意智能体$i$和$s_i'$来说，$\mathbf{E}_{\boldsymbol{s}\sim\boldsymbol{\sigma}}[C_i(\boldsymbol{s})] \le \mathbf{E}_{\boldsymbol{s}\sim\boldsymbol{\sigma}}[C_i(s_i', \boldsymbol{s}_{-i})]$

MNE的等价定义

一个混合策略组合$\boldsymbol{\sigma} = (\sigma_1, \dots, \sigma_k)$是MNE，如果对于任意智能体$i$和$\sigma_i'$来说，$\mathbf{E}_{\boldsymbol{s}\sim\boldsymbol{\sigma}}[C_i(\boldsymbol{s})] \le \mathbf{E}_{s_i'\sim\sigma_i', \boldsymbol{s}_{-i}\sim\boldsymbol{\sigma}_{-i}}[C_i(s_i', \boldsymbol{s}_{-i})]$

- 偏离到一个纯策略和偏离到一个混合策略的定义等价
- PNE是MNE的特例
- 代价最小化博弈中MNE一定存在

混合策略纳什均衡

- 在MNE条件下分析代价最小化博弈的PoA
- $\text{PoA} = \dfrac{\text{最差混合纳什均衡的期望代价}}{\text{最优策略的代价}}$
- 但是计算MNE是困难的，普遍认为不存在多项式复杂度的解法
- 如果算都算不出来，智能体怎么会达到MNE呢？
- 如果达不到MNE，那么分析它的PoA又有什么意义呢？

- 找更加容易计算的均衡

相关均衡

相关均衡（Correlated Equilibrium，CE）

一个定义在集合$S_1 \times \cdots \times S_k$上的概率分布$\sigma$是CE，如果对于任意智能体$i$，纯策略$s_i$，$s_i'$来说：

$$\mathbf{E}_{\boldsymbol{s}\sim\sigma}[C_i(\boldsymbol{s})|s_i] \le \mathbf{E}_{\boldsymbol{s}\sim\sigma}[C_i(s_i', \boldsymbol{s}_{-i})|s_i]$$

- $\sum_{\boldsymbol{s}_{-i}} C_i(s_i, \boldsymbol{s}_{-i}) p(s_i, \boldsymbol{s}_{-i}) \le \sum_{\boldsymbol{s}_{-i}} C_i(s_i', \boldsymbol{s}_{-i}) p(s_i, \boldsymbol{s}_{-i})$
- $p(s_i, \boldsymbol{s}_{-i})$是纯策略组合$(s_i, \boldsymbol{s}_{-i})$在$\sigma$中对应的概率
- 混合策略组合$\boldsymbol{\sigma} = (\sigma_1, \dots, \sigma_k)$同样定义了一个$S_1 \times \cdots \times S_k$上的概率分布$\sigma'$，也称为Product Distribution
- 而σ是集合$S_1 \times \cdots \times S_k$上的任意概率分布
- MNE是CE的子集，MNE一定存在，因此CE一定存在

相关均衡

- 相关均衡的直观理解
  - 一个受信任的第三方U
  - σ各方都知道
  - U首先从σ中采样一个策略组合$(s_1, \dots, s_k)$
  - 然后U私底下告诉每一个参与者i：$s_i, i \in [1, \dots, k]$
  - 参与者i决定是否按照U的建议s_i行动，或者是采取其他策略
  - 由于i知道s_i也知道σ，因此i可以计算出当所有玩家都采取第三方建议时自身的期望代价$\mathbf{E}_{\boldsymbol{s}\sim\sigma}[C_i(\boldsymbol{s})|s_i]$
  - i也可以计算出自己采取其他策略s_i'，而其他玩家采取第三方建议时自身的期望代价$\mathbf{E}_{\boldsymbol{s}\sim\sigma}[C_i(s_i', \boldsymbol{s}_{-\boldsymbol{i}})|s_i]$
- 相关均衡的含义是，假设其他人都采取第三方建议，每个人采取第三方建议时的期望代价最小，没人愿意偏离第三方的建议！

相关均衡

P1 \ P2	Stop	Go
Stop	1,1	1,0
Go	0,1	5,5

- 相关均衡的例子
  - 注意我们讨论的是代价，值越小越好
  - 两个PNE：（Go，Stop）和（Stop，Go）
  - 不公平！我们想要两方各有一半的时间Go，一半的时间Stop
  - 也就是说$\sigma(\text{Stop}, \text{Go}) = {}^1\!/_2, \sigma(\text{Go}, \text{Stop}) = {}^1\!/_2$
  - σ明显不是一个Product Distribution，不是MNE，是CE
  - 第三方U可以看作是一个信号灯
  - 如果U告诉我们Go，那么通过σ我们知道对方的建议是Stop，如果对方采取建议动作Stop，我们最好也选择建议的动作Go
  - 同理，如果U告诉我们Stop，那么通过σ我们知道对方的建议是Go，如果对方采取建议动作Go，我们最好也选择建议的动作Stop，因此，没人愿意偏离第三方的建议
- CE容易求解，因此通过CE来分析PoA比较有意义

粗相关均衡

粗相关均衡（Coarse Correlated Equilibrium，CCE）

一个定义在集合$S_1 \times \cdots \times S_k$上的概率分布$\sigma$是CCE，如果对于任意智能体$i$，纯策略$s_i'$来说：

$$\mathbf{E}_{\boldsymbol{s}\sim\sigma}[C_i(\boldsymbol{s})] \le \mathbf{E}_{\boldsymbol{s}\sim\sigma}[C_i(s_i', \boldsymbol{s}_{-i})]$$

- $\sum_{\boldsymbol{s}} C_i(\boldsymbol{s})p(\boldsymbol{s}) \le \sum_{\boldsymbol{s}_{-i}} C_i(s_i', \boldsymbol{s}_{-i})p(\boldsymbol{s}_{-i})$, $p(\boldsymbol{s}_{-i}) = \sum_{s_i} p(s_i, \boldsymbol{s}_{-i})$
- 和MNE很像，但MNE是Product Distribution，CCE中概率分布和CE一样，是集合$S_1 \times \cdots \times S_k$上的任意概率分布
- 与CE不同，没有条件，每一个CE都是一个CCE
- 在第三方给出建议之前就决定是否偏离
- 比CE更容易计算

纯策略纳什均衡的存在性问题

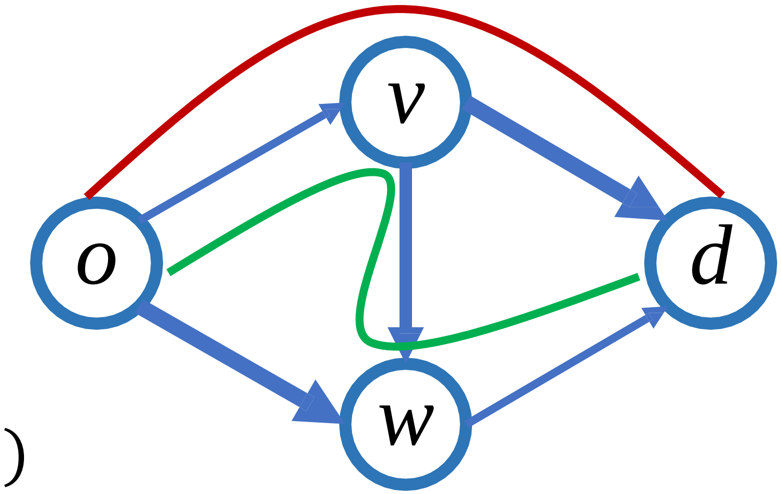
原子自私路由网络PNE存在性定理

原子自私路由网络必定存在至少一个均衡流

- 定义原子自私路由网络中流f上的一个函数Φ：
- $\Phi(f)=\sum_{e\in E}\sum_{i=1}^{f_e}c_e(i)$， f_e是流f中边e上智能体的个数
- i在f中路径为p_i，i更改路径为$\hat{p}_i$，新的流为$\hat{f}$，那么：
- $\Phi(\hat{f})-\Phi(f)=\sum_{e\in\hat{p}_i}c_e(\hat{f}_e)-\sum_{e\in p_i}c_e(f_e)$
- Φ的改变=玩家i的代价的改变
- 也就是说， 每一个玩家的改变都反应在Φ值的改变上

纯策略纳什均衡的存在性问题

- 证明$\Phi(\hat{f}) - \Phi(f) = \sum_{e\in\hat{p}_i} c_e(\hat{f}_e) - \sum_{e\in p_i} c_e(f_e)$
  - $\Phi(f) = \sum_{e\in E}\sum_{i=1}^{f_e} c_e(i)$
  - 红色p_i，绿色$\hat{p}_i$
  - $\Phi(\hat{f}) - \Phi(f) = \sum_{e\in\hat{p}_i\backslash p_i} c_e\,(f_e + 1)$
  - $-\sum_{e\in p_i\backslash\hat{p}_i} c_e\,(f_e)$
  - $\sum_{e\in\hat{p}_i\backslash p_i} c_e\,(f_e + 1) - \sum_{e\in p_i\backslash\hat{p}_i} c_e\,(f_e)$
  - $=$
  - $\sum_{e\in\hat{p}_i} c_e(\hat{f}_e) - \sum_{e\in p_i} c_e(f_e)$
  - 假设一个f^*最小化Φ，这样的f^*一定存在，因为f的数量有限
  - 因此，没有其他f能减小Φ的值，也就是说，没有玩家可以通过改变自己的路径来减少自己的代价，因此，f^*是一个均衡流



势博弈

势博弈（Potential Games）

存在势函数Φ，对于任意玩家i的单方面改变s_i'引起的代价改变等于势函数的变化：

$$\Phi(s_i', \boldsymbol{s}_{-i}) - \Phi(\boldsymbol{s}) = C_i(s_i', \boldsymbol{s}_{-i}) - C_i(\boldsymbol{s})$$

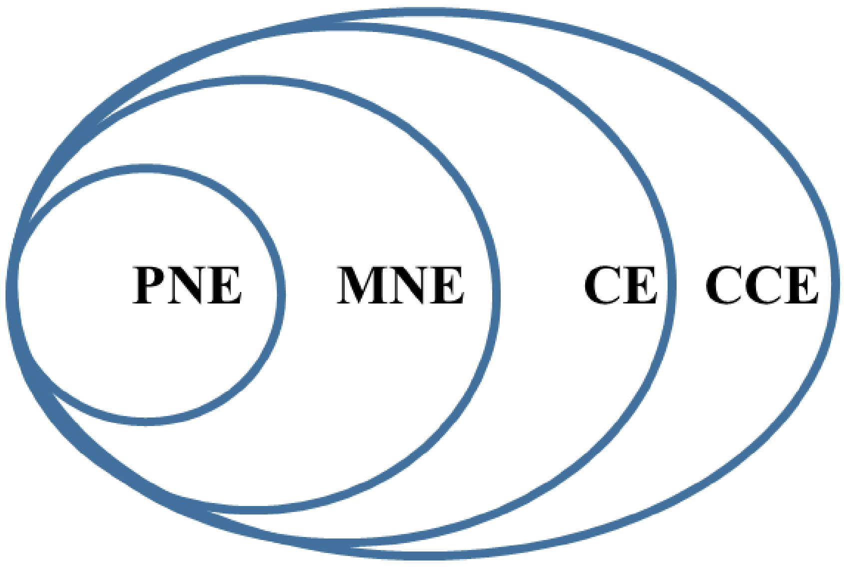
- 原子自私路由网络是一种势博弈

势博弈中PNE的存在性定理

势博弈必定存在至少一个纯策略纳什均衡

Smooth Games

- PNE、MNE、CE、CCE范围越来越大，越来越容易计算，存在性有保证，使得PoA分析越来越有意义
- 但是PoA的值理论上说也会越来越大
- 是否存在一些特殊类型的博弈，使得CCE之类的均衡解的PoA值也比较小？
- 有，Smooth Games！



Smooth Games

Smooth Games的定义

一个代价极小化博弈是(λ, μ)-smooth的，如果对于任何策略组合$\boldsymbol{s}$和$\boldsymbol{s}^*$来说：

$$\sum_{i=1}^{k} C_i(s_i^*, \boldsymbol{s}_{-i}) \leq \lambda \cdot \mathrm{cost}(\boldsymbol{s}^*) + \mu \cdot \mathrm{cost}(\boldsymbol{s}), \ \mathrm{cost}(\boldsymbol{s}) = \sum_{i=1}^{k} C_i(\boldsymbol{s})$$

- 其中，当(λ, μ)取值较小时，玩家i偏离自己策略带来的整体代价是有界的，PoA值一般也比较小
- 比如，前面讲述的原子自私路由是$\left(\frac{5}{3}, \frac{1}{3}\right)$-smooth的
- 其$\mathrm{PoA} \leq \frac{5}{2} = \frac{\lambda}{1-\mu}$，这个式子是否是通用的呢？

Smooth Games

- 对于一个(λ,μ)-smooth博弈，它的PNE解$\boldsymbol{s}$的代价至多是最优解$\boldsymbol{s}^*$代价的$\frac{\lambda}{1-\mu}$倍，也就是$\text{PoA} \le \frac{\lambda}{1-\mu}$：
  - $\text{cost}(\boldsymbol{s}) = \sum_{i=1}^{k} C_i(\boldsymbol{s})$ 定义
  - $\le \sum_{i=1}^{k} C_i(s_i^*, \boldsymbol{s}_{-i})$ 均衡的定义，偏离均衡代价只会变大
  - $\le \lambda \cdot \text{cost}(\boldsymbol{s}^*) + \mu \cdot \text{cost}(\boldsymbol{s})$ Smooth Game的定义
  - 推出$\frac{\text{cost}(\boldsymbol{s})}{\text{cost}(\boldsymbol{s}^*)} \le \frac{\lambda}{1-\mu}$
  - 也就是$\text{PoA} \le \frac{\lambda}{1-\mu}$
- PNE不一定存在，但是这个结论可以推广到一定存在且更容易计算的粗相关均衡CCE上
- 因此，Smooth Games的PoA是鲁棒的（Robust）

Smooth Games

- 对于一个(λ,μ)-smooth博弈，它的CCE解σ的代价至多是最优解$\boldsymbol{s}^*$代价的$\frac{\lambda}{1-\mu}$倍，也就是$\mathrm{PoA} \le \frac{\lambda}{1-\mu}$：
  - $\mathbf{E}_{\boldsymbol{s}\sim\sigma}[\mathrm{cost}(\boldsymbol{s})] = \mathbf{E}_{\boldsymbol{s}\sim\sigma}[\sum_{i=1}^{k} C_i(\boldsymbol{s})]$ cost的定义
  - $= \sum_{i=1}^{k} \mathbf{E}_{\boldsymbol{s}\sim\sigma}[C_i(\boldsymbol{s})]$
  - $\le \sum_{i=1}^{k} \mathbf{E}_{\boldsymbol{s}\sim\sigma}[C_i(s_i^*, \boldsymbol{s}_{-i})]$均衡的定义，偏离均衡代价只会变大
  - $= \mathbf{E}_{\boldsymbol{s}\sim\sigma}[\sum_{i=1}^{k} C_i(s_i^*, \boldsymbol{s}_{-i})]$
  - $\le \mathbf{E}_{\boldsymbol{s}\sim\sigma}[\lambda \cdot \mathrm{cost}(\boldsymbol{s}^*) + \mu \cdot \mathrm{cost}(\boldsymbol{s})]$ Smooth Game的定义
  - $= \lambda \cdot \mathrm{cost}(\boldsymbol{s}^*) + \mu \cdot \mathbf{E}_{\boldsymbol{s}\sim\sigma}[\mathrm{cost}(\boldsymbol{s})]$
- 推出$\frac{\mathbf{E}_{\boldsymbol{s}\sim\sigma}[\mathrm{cost}(\boldsymbol{s})]}{\mathrm{cost}(\boldsymbol{s}^*)} \le \frac{\lambda}{1-\mu}$，也就是$\mathrm{PoA} \le \frac{\lambda}{1-\mu}$
- 证毕

Smooth Games

- 这些良好的性质同样可以扩展到近似纳什均衡上，这里以近似PNE为例，其他均衡同理

ϵ–纯策略纳什均衡（ϵ-PNE）

给定$\epsilon > 0$，策略组合$\boldsymbol{s}$是ϵ-PNE，如果对于任意智能体i，s_i'来说：

$$C_i(\boldsymbol{s}) \leq (1+\epsilon)C_i(s_i', \boldsymbol{s}_{-i})$$

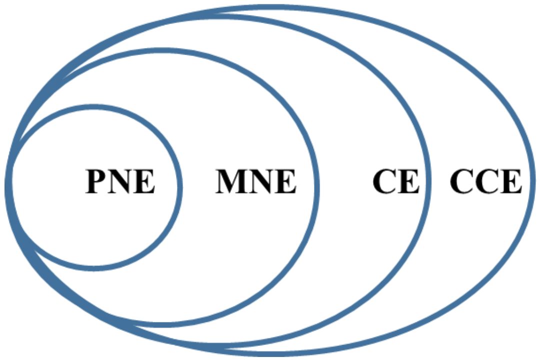
Smooth Game的ϵ-PNE的PoA界

对于一个(λ, μ)-smooth博弈，它的ϵ-PNE的PoA：

$$\text{PoA} \leq \frac{(1+\epsilon)\lambda}{1-\mu(1+\epsilon)}$$

不同类型的均衡解概念小结

- PNE：不一定存在
- MNE：一定存在，难以计算
- CE：一定存在，容易计算
- CCE：一定存在，更容易计算



- 势函数、势博弈：对于任意玩家的单方面改变引起的代价改变等于势函数的变化
- 势博弈必定存在至少一个纯策略纳什均衡
- 原子自私路由网络是一种势博弈
- 均衡解范围越来越大，存在性有保证，但是PoA的值理论上说也会越来越大，而Smooth Games可以保证PoA值不会太大

本次课程作业

- 作业内容：寻找求解CE以及CCE的习题两道，给出习题描述、问题分析、求解过程和最终结果，并分析与MNE的区别
  - 评分准则：选取习题的典型性、分析求解过程的完整性以及最终结果的指导性意义
- 提交时间：2020年12月3日17:00之前
- 提交方法：在课程网站上提交，同时提交电子版到助教邮箱（kangyongxin2015@ia.ac.cn ）
- 邮件发送规范
  - 邮件主题：计算博弈第**七**次作业_**学号**_**姓名**
  - 附件名称：计算博弈第**七**次作业_**学号**_**姓名**.docx

感谢聆听！

李凯

kai.li@ia.ac.cn

2020年11月26日

中国科学院大学
University of Chinese of Academy of Sciences

自动化研究所
CASIA
Institute of Automation