计算智能——模糊系统

中国科学院自动化研究所
复杂系统管理与控制国家重点实验室

模糊系统理论与应用

人工智能

计算智能

模糊系统

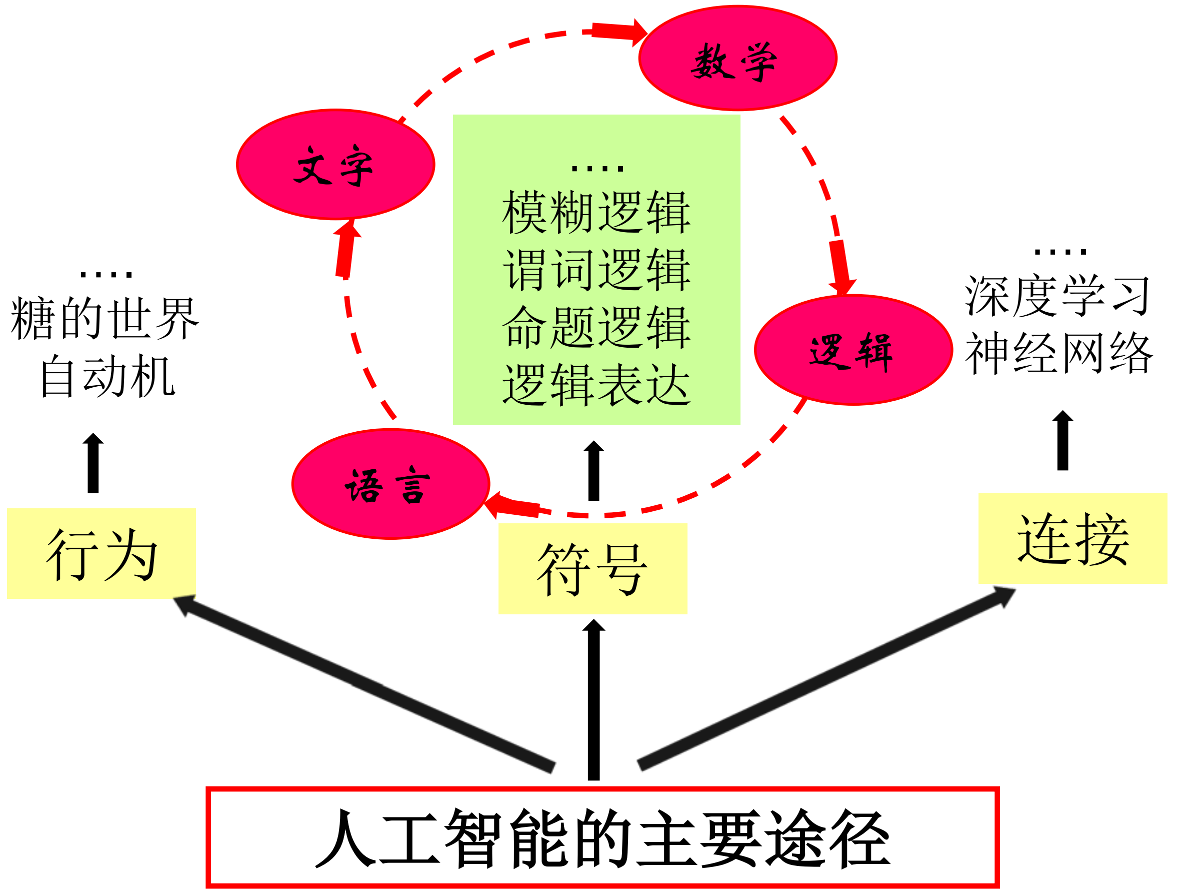
经典控制论　现代控制论　智能控制

智能信息控制

智能信息处理

人工智能发展进程

从逻辑的角度，尚难找到一种简洁的符号逻辑体系，能表述出所有知识



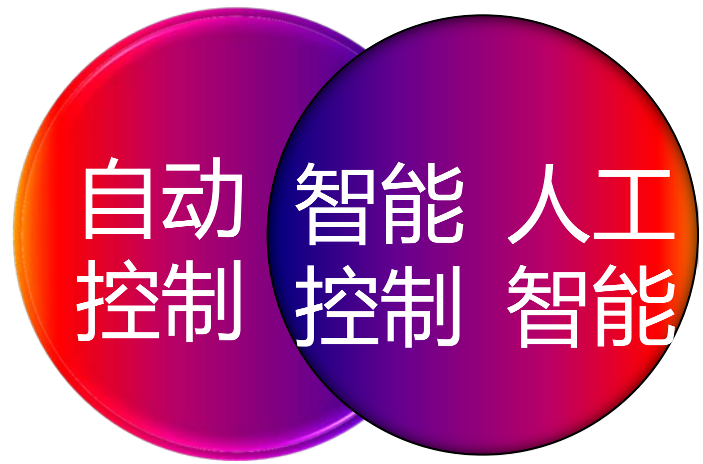
计算智能与智能计算系统

计算经典学科

- 计算化学，计算数学，计算物理学，计算材料学，计算社会.....
- 运用计算机或计算机技术研究某一门类的科学

计算智能

- 人工智能与计算机技术相伴相生
- 智能控制是自动控制与人工智能的融合
- 计算智能强调通过计算的方式实现智能



智能计算**系统**

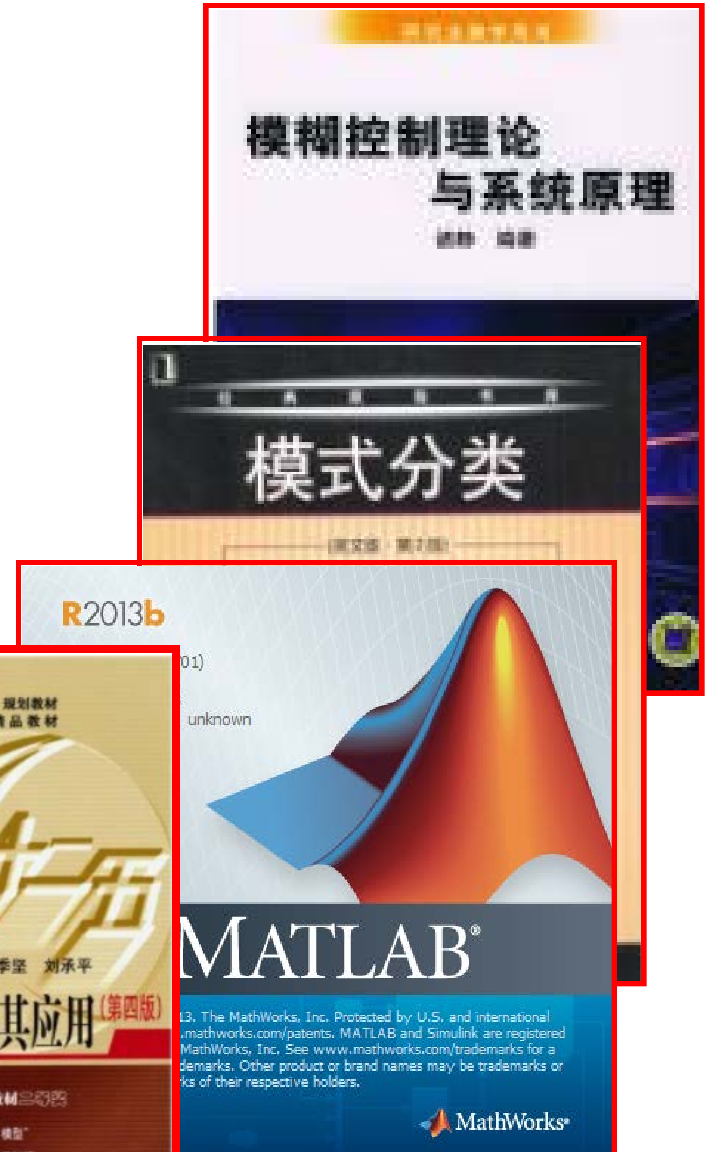
- 智能的**物质**载体
- 集成通用CPU+智能芯片 智能计算编程环境

课程要求、作业及考核方式

1. 背景知识 自动控制原理，矩阵论，经典或现代控制论，非线性稳定性理论，模式识别等,有帮助但非必须
2. Matlab (Simulink,Fuzzybox,demo)，Python等
3. 课程作业 时间三周，随堂展示
4. 考核要点 基本概念、理论、基本方法及应用
5. 问题与讨论 dalei.guo@ia.ac.cn，计算智能2020秋微信群

参考用书及学习软件

1. 诸静编著. 2005. 模糊控制理论与系统原理. 北京：机械工业出版社.
2. Duda R. O., Hart P. E. Stork D. G. 2007. 北京：机械工业出版社.
3. MATLAB, SIMULINK & FUZZY TOOLBOX
4. 谢季坚，刘承平.2012. 模糊数学方法及其应用. 武汉: 华中科技大学出版社.
5. http://ieeexplore.ieee.org



模糊系统主要内容

一 模糊系统概述 1课时

二 模糊集合与模糊变换 1课时

三 模糊逻辑与模糊推理 1课时

四 模糊聚类 2课时

五 模糊控制 4课时

六 模糊控制性能分析 1课时

七 模糊辨识与估计 1课时

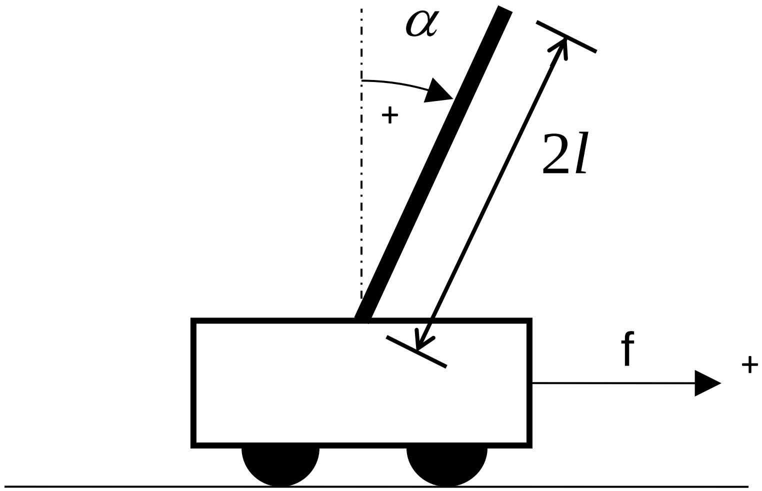
八 模糊理论与应用展望 1课时

概　述

模糊系统研究历程、核心问题和研究现状

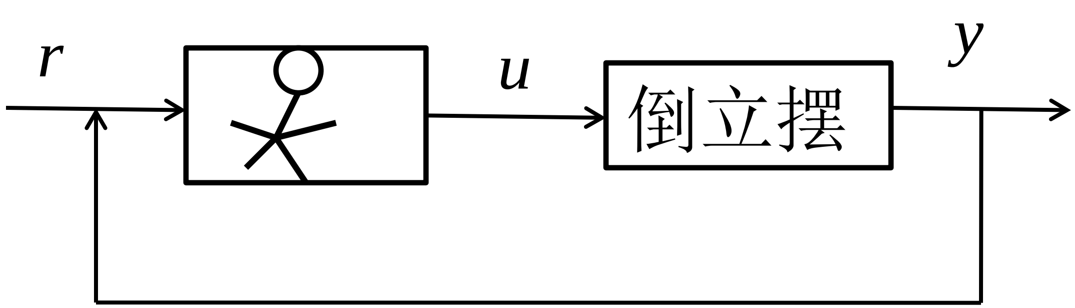
- 模糊系统研究历程简介
- Zadeh模糊理论的提出
- 智能控制
- 复杂、非线性动力学系统的控制
- 智能控制与人工智能

现代控制工程发展历程



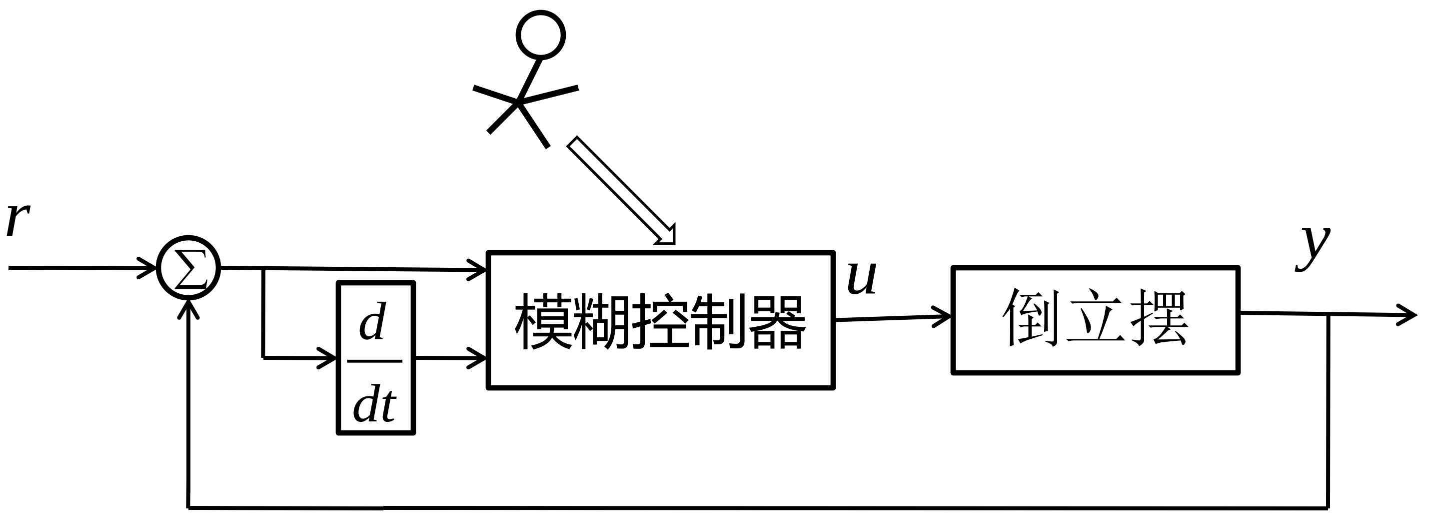
典型例：小车倒立摆受控系统

- 手眼并用：易控
- 自动控制：难稳定，快速性较差



人对倒立摆的控制

小车倒立摆受控系统

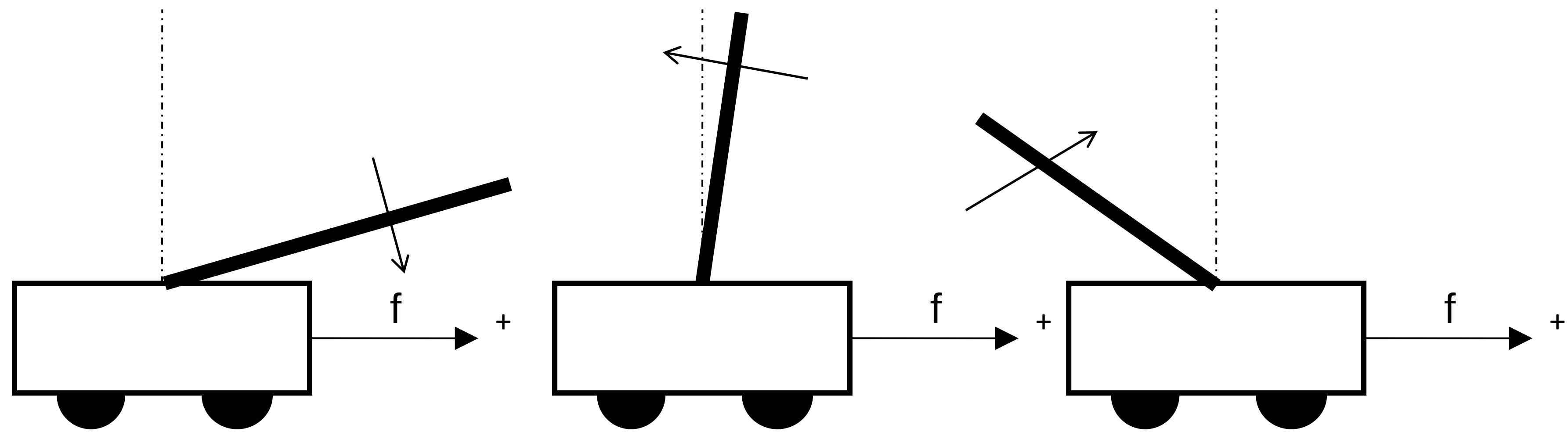


倒立摆的模糊控制器

小车倒立摆受控系统

推理： If 前提，Then 结论

模糊推理： If 误差大（中，小），Then 控制慢(中，快)



不同位置的倒立摆

关于模糊系统

- “模糊理论”——不“模糊”
  - 对象→模糊
  - 理论→精确
- 原因
  - 对难以精确描述的复杂系统，要得到一个合理的模型——须引入模糊的概念
  - 为得到一种能系统描述人类知识，并将其他信息一起嵌入到工程系统中的理论——须引入模糊的概念

概述

确定与模糊

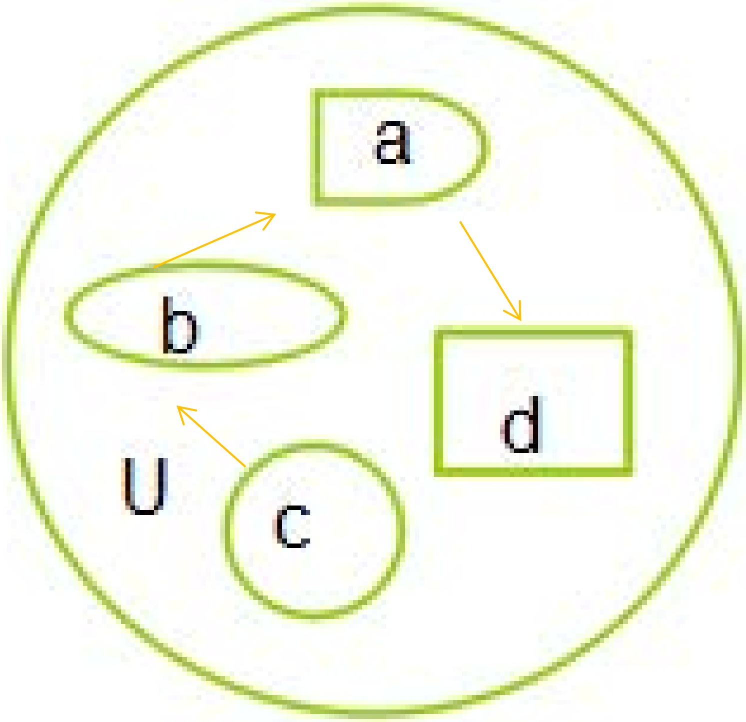
- 确定：把脚抬高10cm

  模糊： 把脚抬高一些！
- 确定： 以1m/s跑步

  模糊：跑快一些！

- 模糊理论在日本工业界的推动下，在日用电子，机器人等领域发展迅猛
- 模糊控制理论亦由此获得推进，如TS模型

日常生活中模糊概念



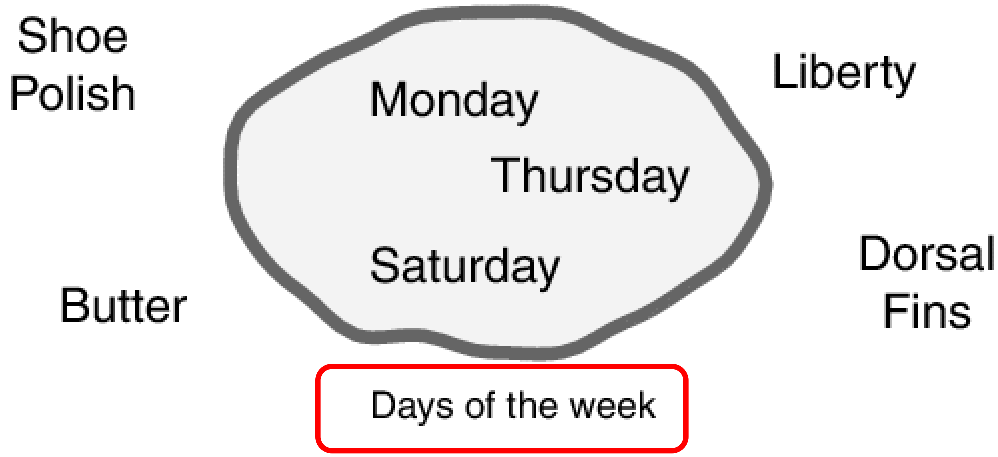
论域U={a, b, c, d}，概念：圆块

- “d”和”c”具有很大的差异，表现为突变
- 中间过渡状态b和a，具有亦此亦彼性状

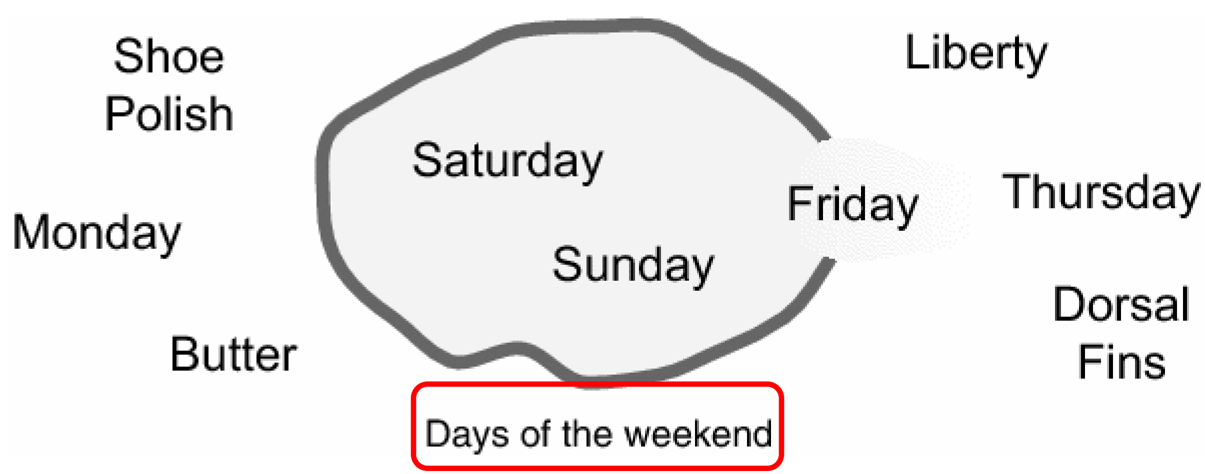
论域U中哪些元素“块”是“圆块”

概述

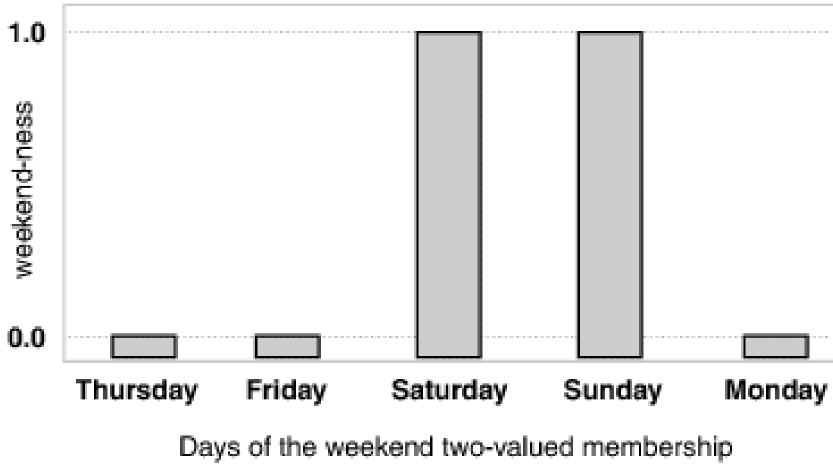
确定
Either asserted or denied

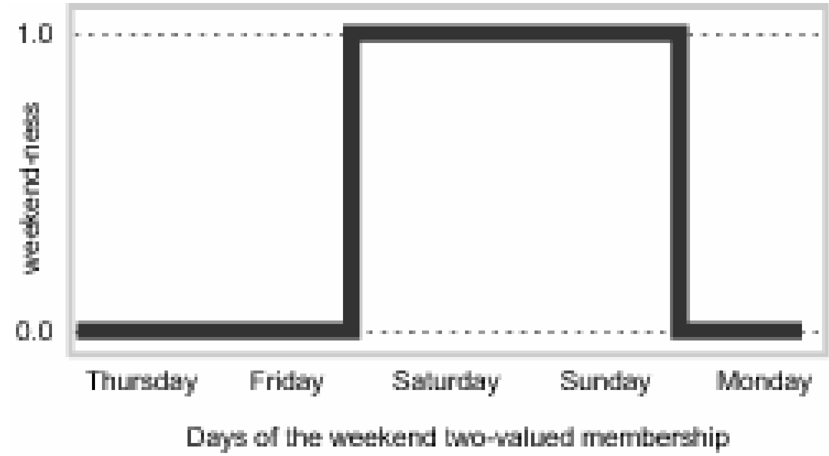


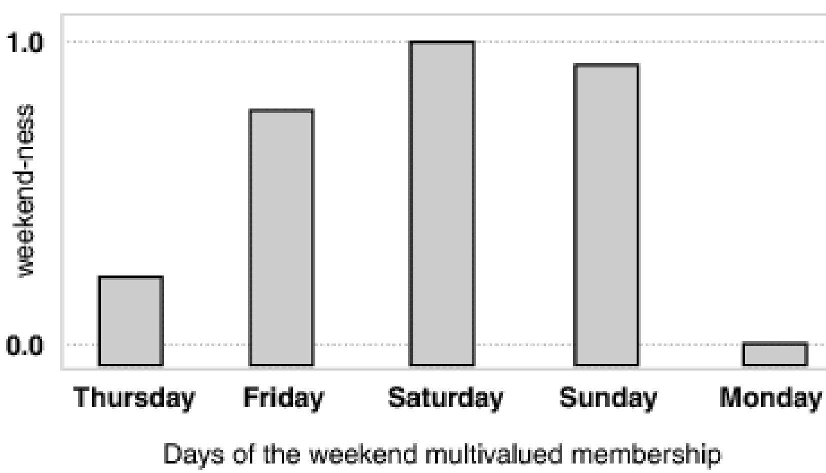
模糊
Partial degree of membership

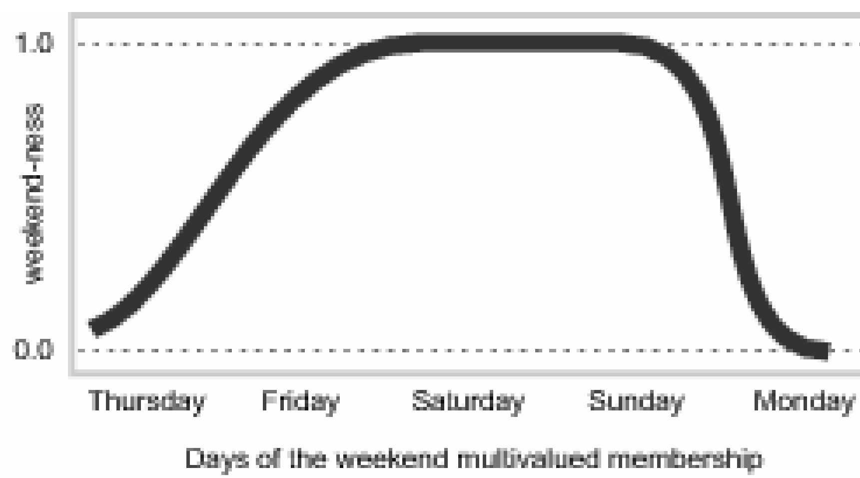


概述


1.0
0.0
weekend-ness
Thursday
Friday
Saturday
Sunday
Monday
Days of the weekend two-valued membership


1.0
0.0
weekend-ness
Thursday
Friday
Saturday
Sunday
Monday
Days of the weekend two-valued membership


1.0
0.0
weekend-ness
Thursday
Friday
Saturday
Sunday
Monday
Days of the weekend multivalued membership


1.0
0.0
weekend-ness
Thursday
Friday
Saturday
Sunday
Monday
Days of the weekend multivalued membership

常见模糊控制过程及要素

例：用模糊系统原理，设计汽车速度控制器

变量： 速度 油门

属性： 快适中慢 较大正常较小

一般环境下，驾驶员采用如下规则驾驶汽车：

If 速度慢， Then 给油门较大的力；

If 速度适中， Then 给油门正常的力；

If 速度快， Then 给油门较小的力。

根据IF-THEN规则，按照某种给定的隶属函数可以构造模糊系统作为汽车速度控制器，该控制器即为模糊控制器

常见模糊控制过程及要素2

举例：为气球充气至爆炸, 这一过程中：

关键的变量: *气球内的空气，空气上升量，表面张力*

变量的属性: *多或少、稍微或显著、 稍微/显著/适度/或非常显著*

根据实际经验，可总结出上述变量间用IF—THEN描述的规则：

If 空气量少 and 空气量稍微上升，Then 表面张力稍微上升；
If 空气量少 and 空气量显著上升，Then 表面张力显著上升；
If 空气量多 and 空气量稍微上升，Then 表面张力适度上升；
If 空气量多 and 空气量显著上升，Then 表面张力非常显著上升

根据这一IF-THEN规则，按照某种给定的隶属函数可构造气球模型模糊系统，该模型反映了*球内空气量与表面张力*之间的关系

概述

结论——模糊系统的构成

I. 来源：基于专家或基于领域的知识

II. 方法：构造模糊IF-THEN规则

III. 应用：将这些规则组合到一个系统中

什么是模糊系统

- 模糊系统

  一种基于知识或规则的系统

- 模糊系统的核心

  IF-THEN规则组成的知识库

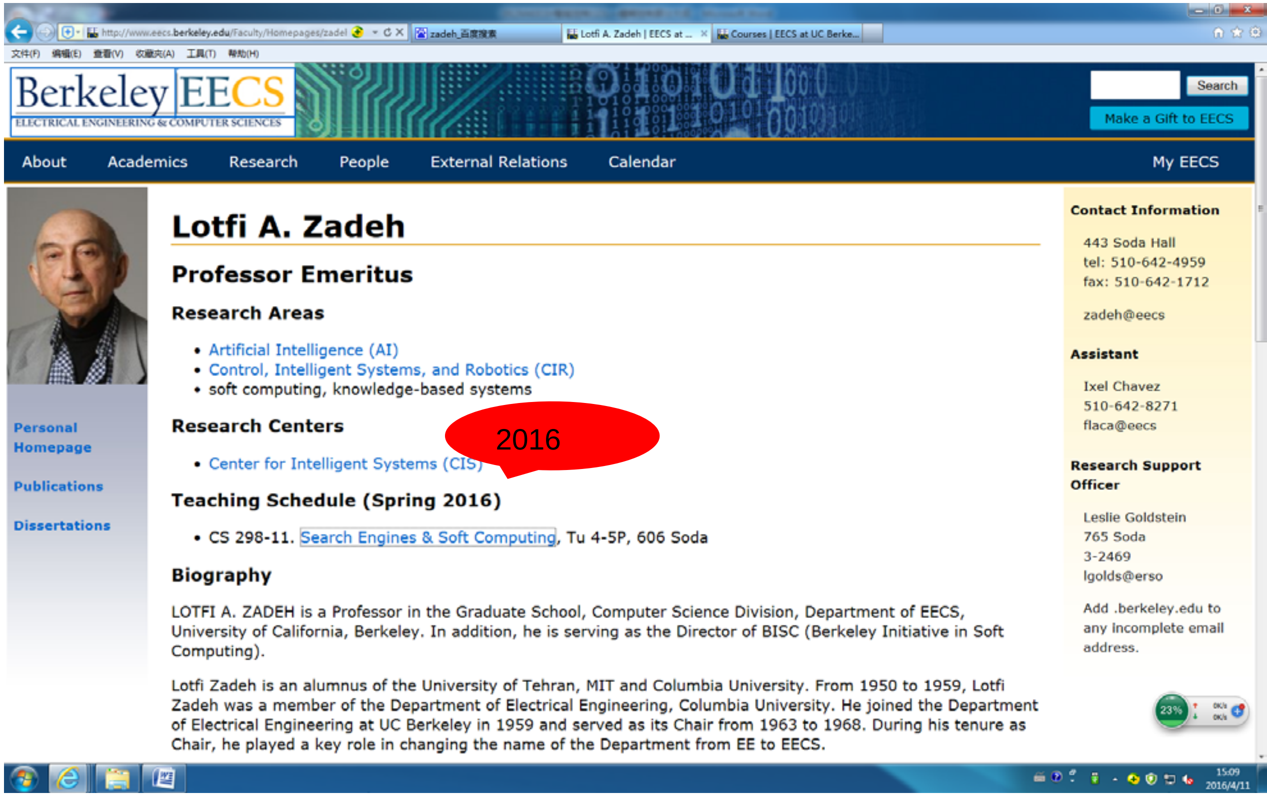
- IF-THEN规则

  由*隶属度函数*对所描述的某些句子所做的

  IF-THEN形式的陈述

模糊理论先驱—— Dr. Zadeh

- 1964年，以L. A. Zadeh的论文《模糊集合》开启模糊数学
- 20世纪70年代，L. A. Zadeh提出模糊算法和模糊排序，模糊理论成为独立的科研领域
- ……
- 2016年，讲授 Search Engines & Soft Computing



模糊理论与技术的发展

- 模糊控制
- 模糊聚类分析
- 模糊模式识别
- 模糊综合评判
- 模糊决策与模糊预测
- 模糊规划
- 模糊信息处理等

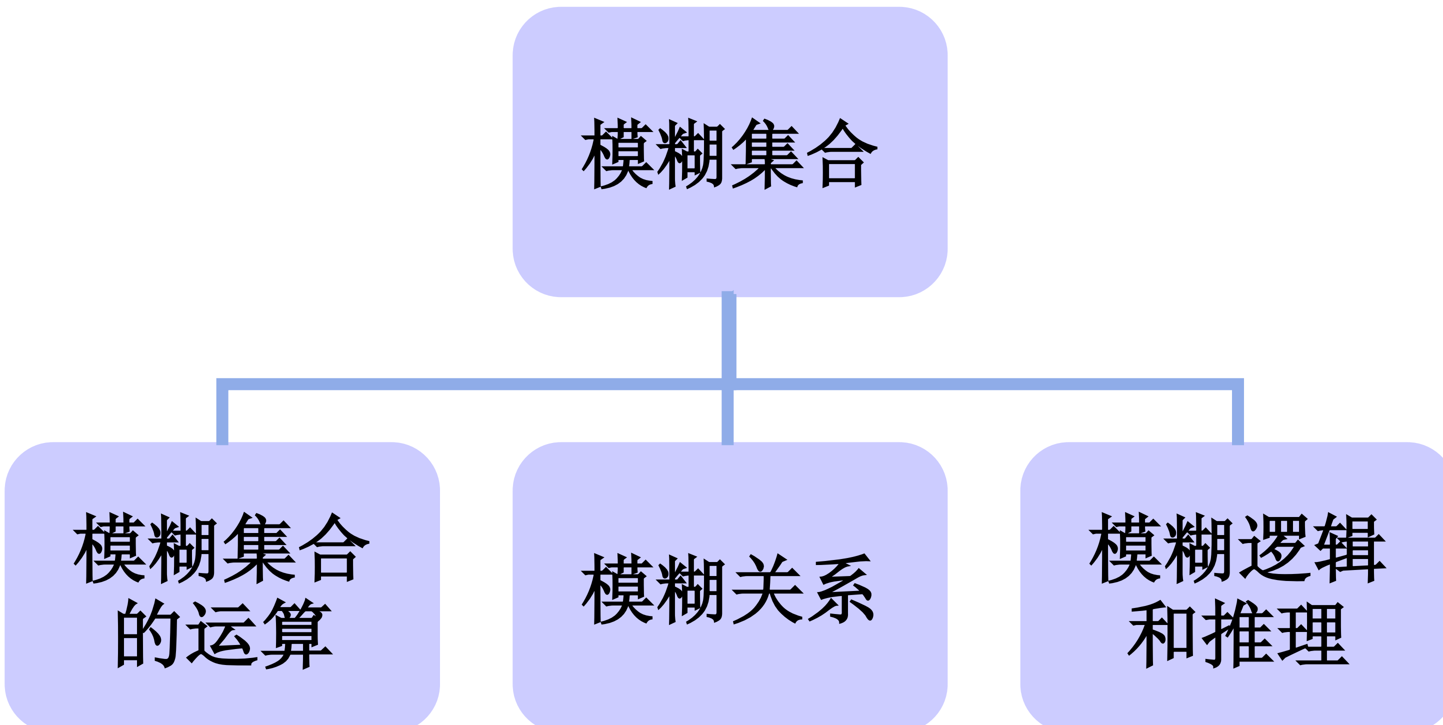
在工业、农业、医学、军事、计算机科学、信息科学、管理科学、系统科学、工程技术等领域应用广泛，经济效益显著

模糊控制研究目前存在的主要问题

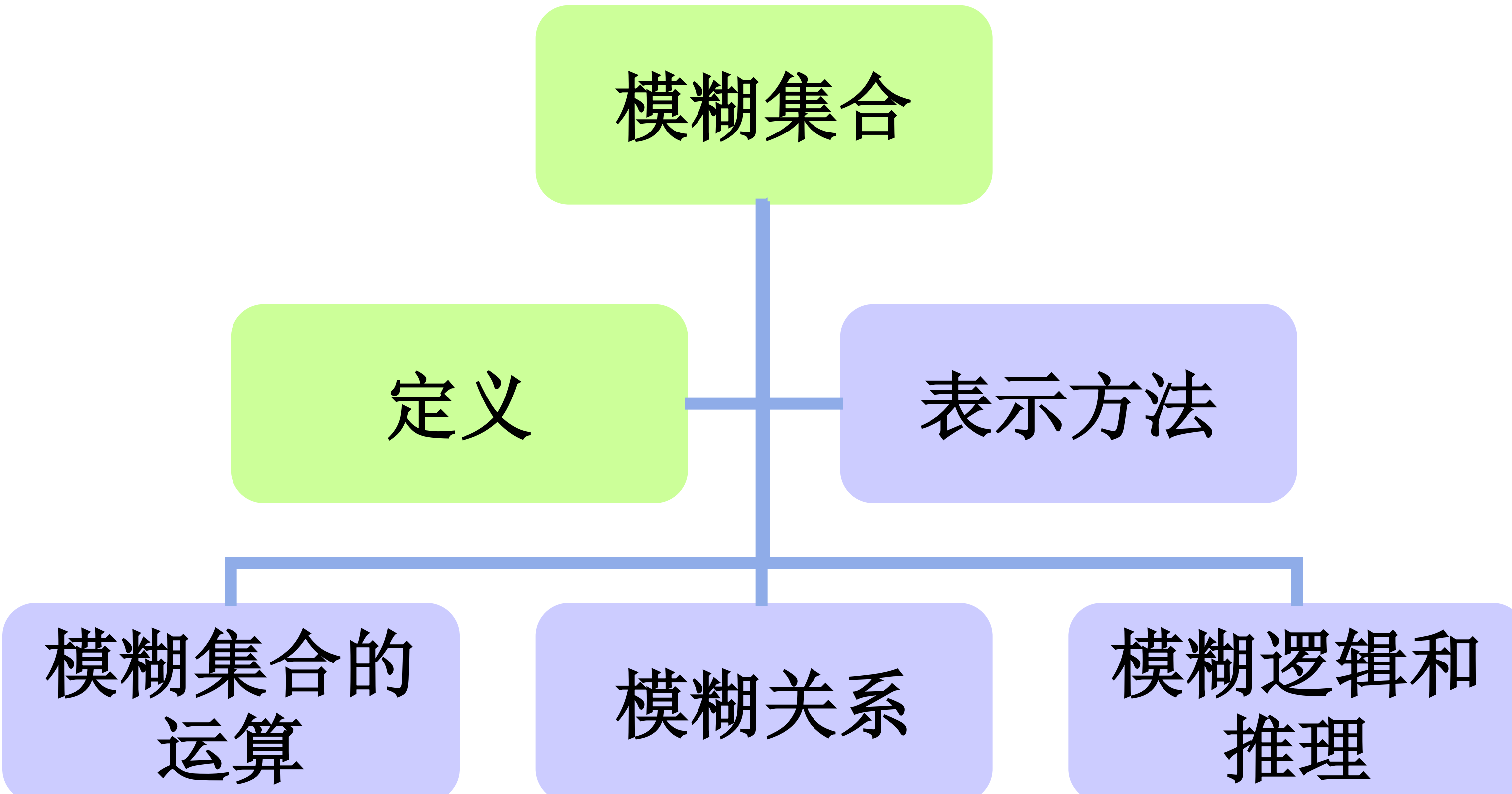
- 模糊建模、模糊规则的获取和建立、模糊推理的研究
- 模糊控制器的结构和参数等的确定与设计
- 模糊推理中合成算子的选取，及非线性程度影响的考虑
- 模糊控制基本理论的研究，如稳定性分析，稳定模糊控制器等
- 模糊集成芯片的研发，推广等
- 模糊辨识
- 模糊系统工程

模糊集合

模糊集合



1模糊集合



1.1模糊集合--定义

模糊集合

设论域U，U 到[0, 1]闭区间的任意映射 $\mu_{\tilde{A}}$

$$\mu_{\tilde{A}}: U \to \boxed{[0,1]}$$

$$u \to \mu_{\tilde{A}}(u)$$

都确定U 的一个模糊集合 $\tilde{A}$

其中：$\mu_{\tilde{A}}$ — $\tilde{A}$ 的隶属函数

$\mu_{\tilde{A}}(u)$—u 对于 $\tilde{A}$ 的隶属度

普通集合

论域 U 中的每个元素 u，对于 U 中的一个子集 A，要么 u 属于 A，要么 u 不属于 A，不允许模棱两可。因此该子集 A 由如下映射唯一确定。

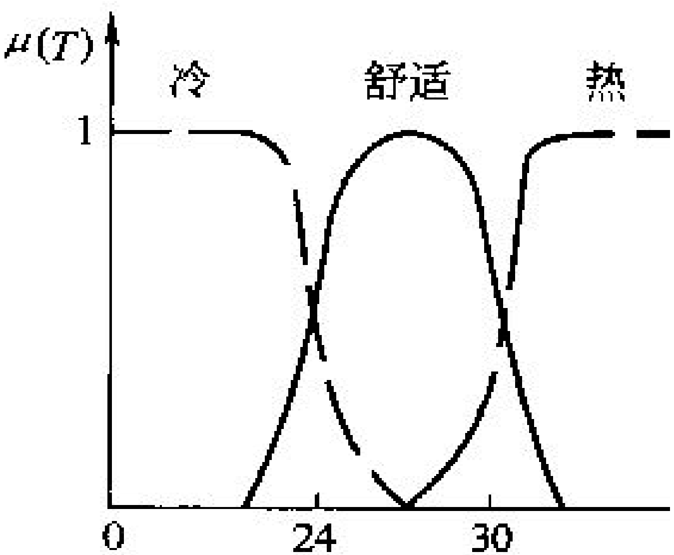
$$C_A: U \to \boxed{\{0,\ 1\}}$$

即，集合A可用如下特征函数表示

$$C_A(u) = \begin{cases} 1 & u \in A \\ 0 & u \notin A \end{cases}$$

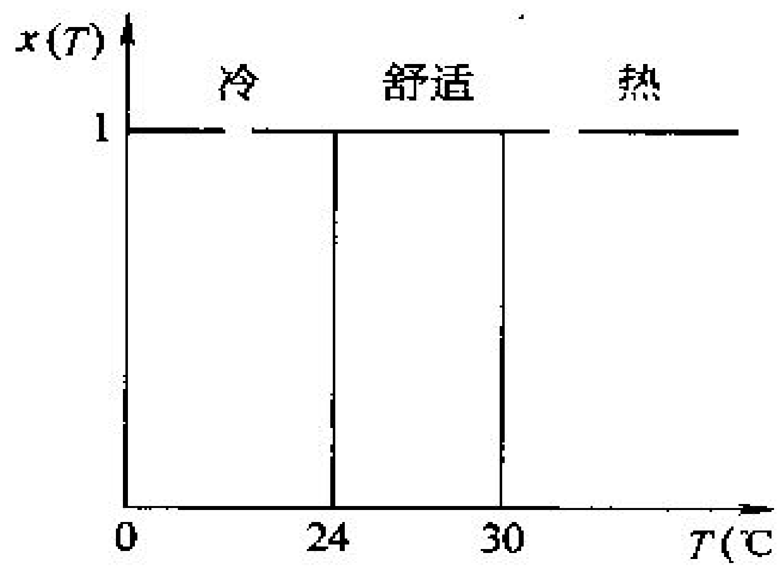
1. 1模糊集合--定义

模糊集合



(b)

普通集合

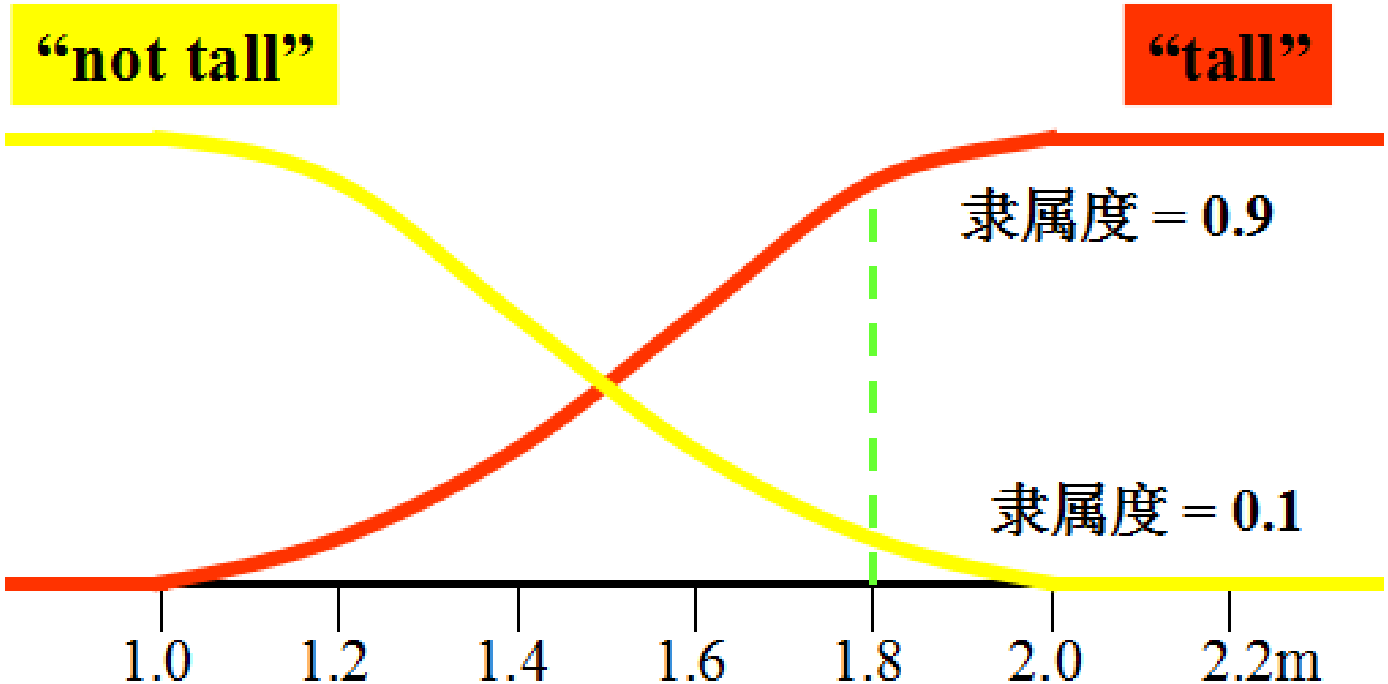


(a)

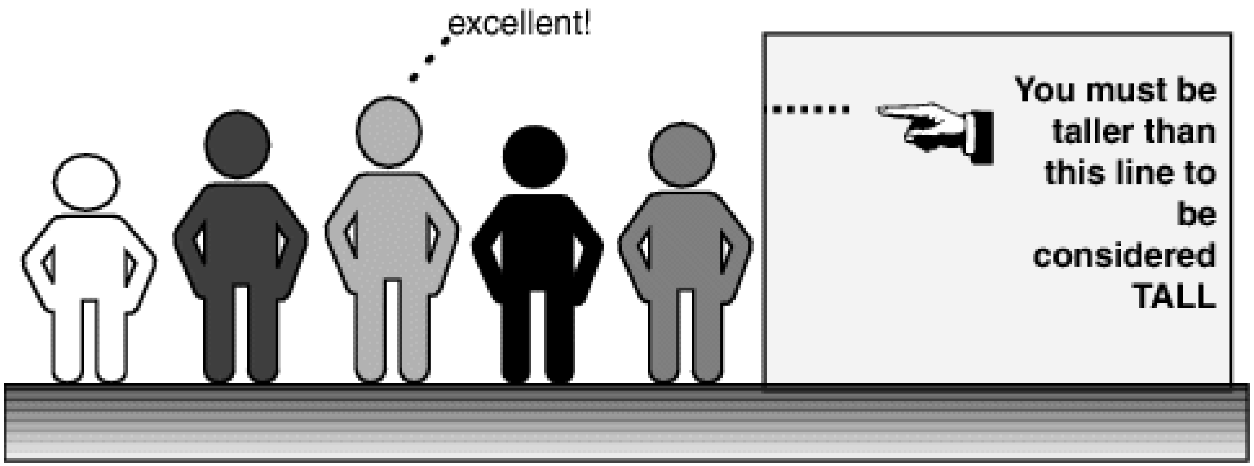
室温的不同定义

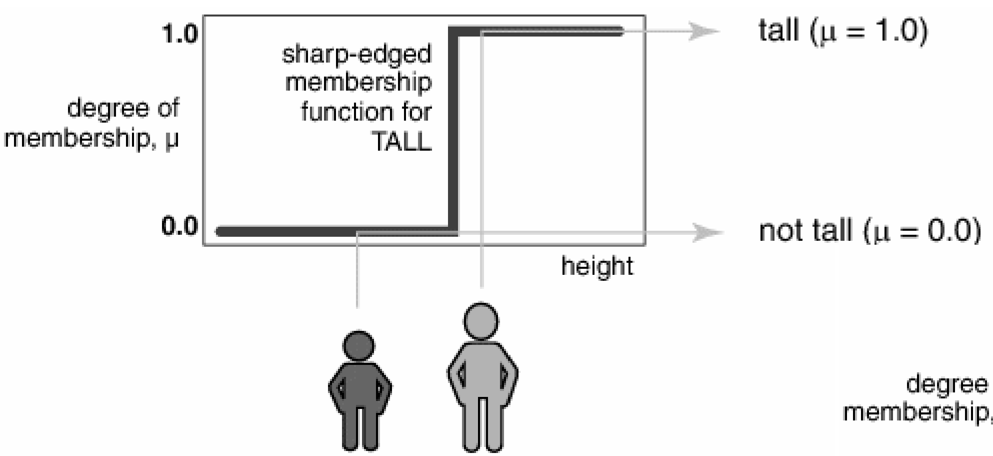
1.1模糊集合—隶属度

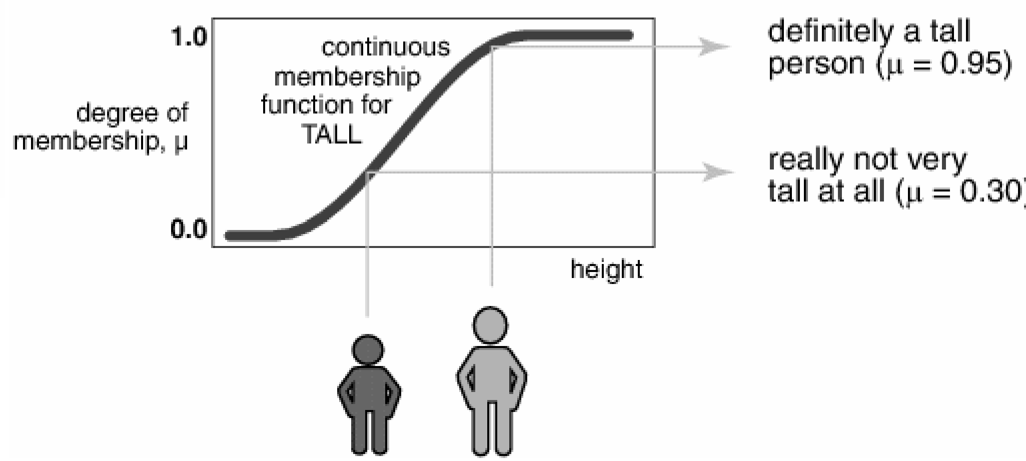
模糊集合表示



1.1模糊集合--定义

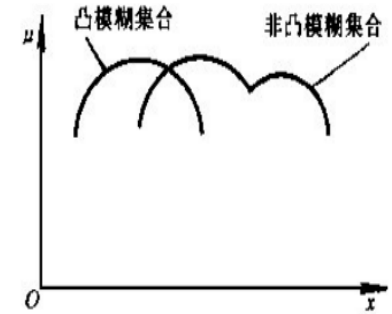

excellent!
You must be taller than this line to be considered TALL


1.0
0.0
degree of membership, μ
sharp-edged membership function for TALL
height
tall (μ = 1.0)
not tall (μ = 0.0)

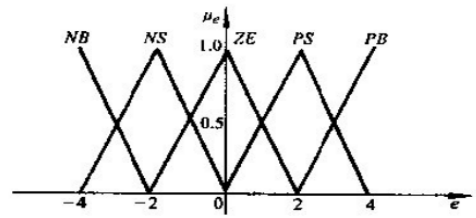

1.0
0.0
degree of membership, μ
continuous membership function for TALL
height
definitely a tall person (μ = 0.95)
really not very tall at all (μ = 0.30)

隶属度函数的原则：

1　表示隶属度函数的模糊集合必须是凸模糊集，即单峰型



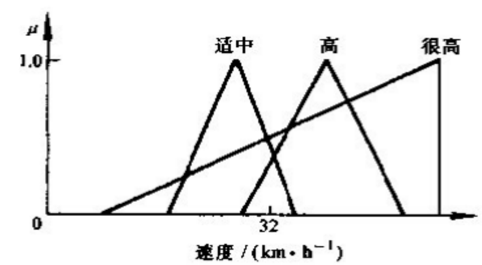
2　通常是对称的、平衡的



3　同一输入只有一个隶属度函数有最大隶属度

4　两个隶属度函数重叠时，重叠部分的最大隶属度无交叉

5　间隔的隶属度函数尽量不相交



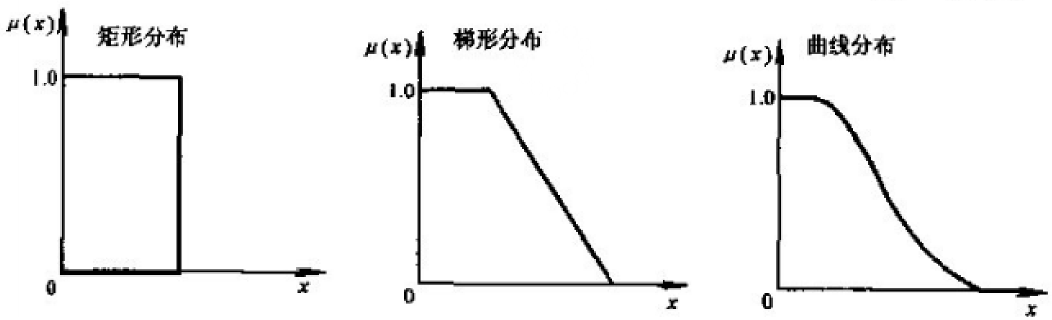
1.1模糊集合—隶属度函数

确定隶属度函数的方法：

- **主观经验法** 论域离散时，根据主观认识或个人经验，直接或间接给出元素隶属度的具体值
- **分析推理法** 连续论域时，据问题性质决定选用某些典型函数，如三角函数，梯形函数
- **调查统计法** 统计经验曲线

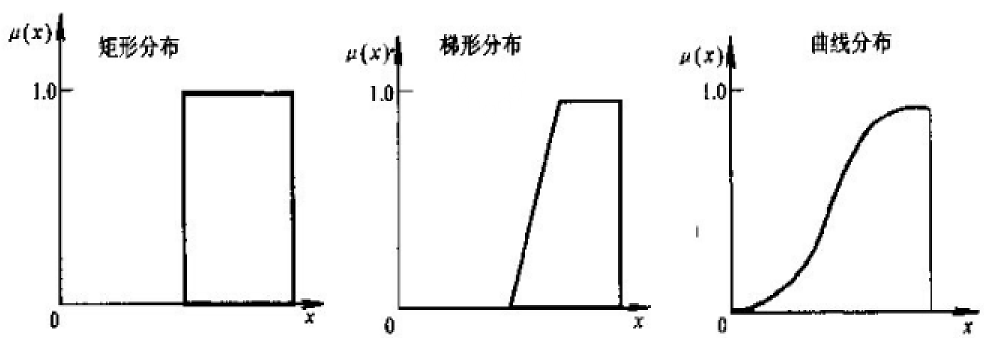
1.1模糊集合——常用隶属度函数

- Z型函数



适用于U中元素为较小值的模糊集

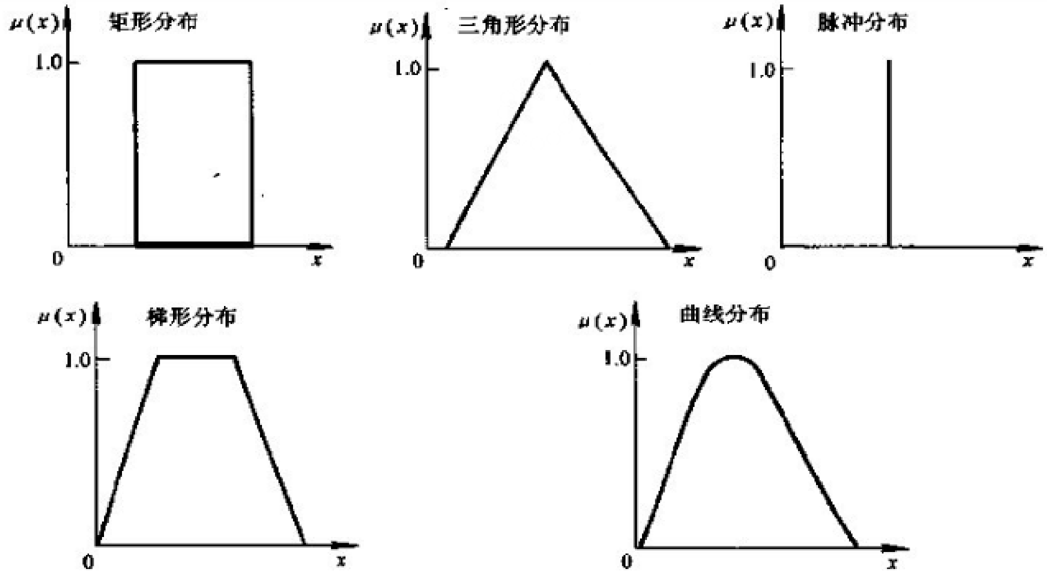
- S型函数



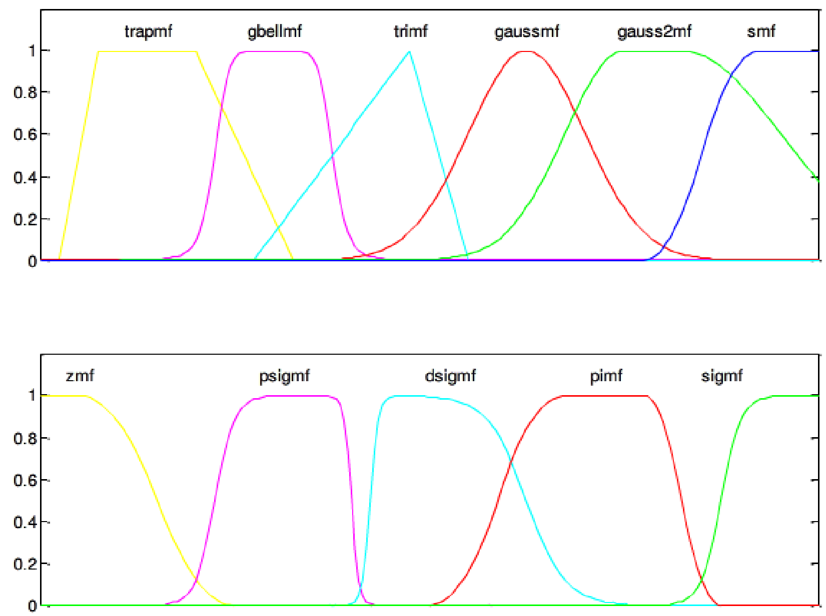
适用于U中元素为较大值的模糊集

1.1模糊集合——常用隶属度函数

➢ ∏型函数



➢Matlab工具箱可选隶属函数

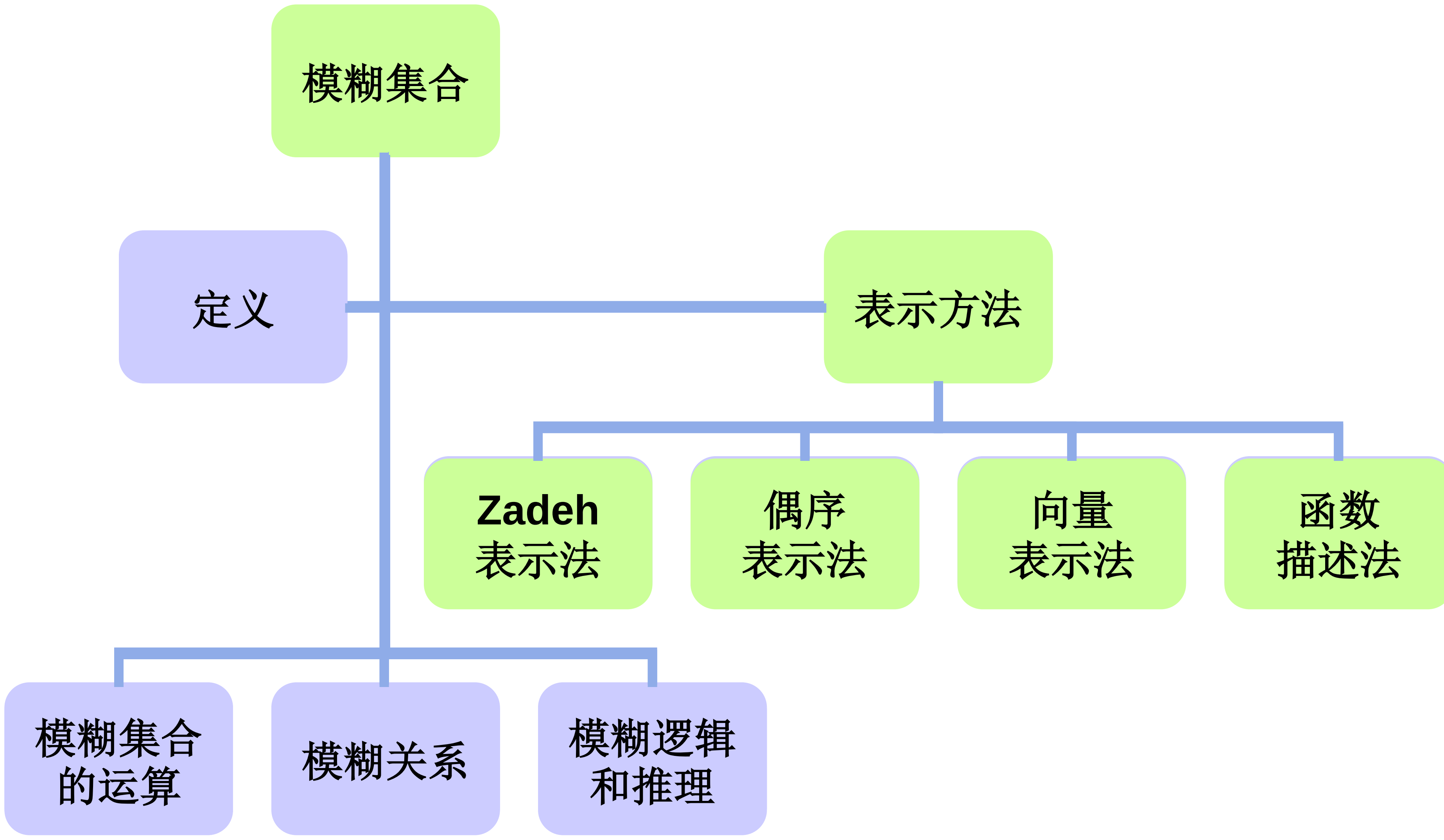


1.1模糊集合—隶属度函数影响

隶属度函数的属性对控制效果的影响：

- 隶属度函数曲线形状较尖的模糊子集，其分辨率较高，控制灵敏度也高
- 隶属度函数曲线形状较平缓，控制特性也比较平缓，稳定性能也较好
- 在误差较大的区域采用低分辨率的模糊集，在误差较小的区域选用较高分辨率的模糊集

1.2模糊集合--表示方法


模糊集合
定义
表示方法
Zadeh
表示法
偶序
表示法
向量
表示法
函数
描述法
模糊集合
的运算
模糊关系
模糊逻辑
和推理

Zadeh表示法

(a) U为离散的有限域$\{u_1, u_2, \cdots, u_n\}$

不代表分式，表示元素ui对于集合A的隶属度μA（ui）和元素ui本身的对应关系

$$\tilde{A} = \boxed{\frac{\mu_{\tilde{A}}(u_1)}{u_1}} + \frac{\mu_{\tilde{A}}(u_2)}{u_2} \boxed{+} \cdots, \frac{\mu_{\tilde{A}}(u_n)}{u_n}$$

不表示加法运算，表示在论域U上，组成模糊集合A的全体元素ui（i=1,2,…，n）间排序与整体间的关系

(b) U为连续有限域

$$\tilde{A} = \boxed{\int_U} \frac{\mu_{\tilde{A}}(u)}{u}$$

不代表积分运算，表示连续论域U上的元素u与隶属度μA（ui）一一对应关系的总体集合

1.2.1模糊集合--表示方法--Zadeh表示法

例：一个由8件服装组成的论域 $U=\{u_1,u_2,\cdots,u_n\}$

模糊子集“漂亮的服装”表示为 $\tilde{A}$

设隶属度依次为 $\mu_{\tilde{A}}(u_i)$ $=0.7, 0.9, 0.6, 0.4, 0, 0.1, 0, 0$

则Zadeh表示法为

$$\tilde{A}=\frac{0.7}{u_1}+\frac{0.9}{u_2}+\frac{0.6}{u_3}+\frac{0.4}{u_4}+\frac{0}{u_5}+\frac{0.1}{u_6}+\frac{0}{u_7}+\frac{0}{u_8}$$

$\tilde{A}$ 的支撑集(子集)

$$\tilde{A}=\frac{0.7}{u_1}+\frac{0.9}{u_2}+\frac{0.6}{u_3}+\frac{0.4}{u_4}+\frac{0.1}{u_6}$$

序偶表示法

$$\tilde{A}=\{(u_1,\mu_{\tilde{A}}(u_1)),(u_2,\mu_{\tilde{A}}(u_2)),\cdots(u_n,\mu_{\tilde{A}}(u_n))\}$$

采用这种方法，上例中的 $\tilde{A}$ 可表示为

$$\tilde{A}=\frac{0.7}{u_1}+\frac{0.9}{u_2}+\frac{0.6}{u_3}+\frac{0.4}{u_4}+\frac{0.1}{u_6}$$

$$\Downarrow$$

$$\tilde{A}=\{(u_1,0.7),(u_2,0.9),(u_3,0.6),(u_4,0.4),(u_6,0.1)\}$$

向量表示法

$$\underset{\sim}{A} = \{\mu_{\underset{\sim}{A}}(u_1), \mu_{\underset{\sim}{A}}(u_2), \cdots \mu_{\underset{\sim}{A}}(u_n)\}$$

采用这种方法，上例中的 $\underset{\sim}{A}$ 可表示为

$$\underset{\sim}{A} = \frac{0.7}{u_1} + \frac{0.9}{u_2} + \frac{0.6}{u_3} + \frac{0.4}{u_4} + \frac{0}{u_5} + \frac{0.1}{u_6} + \frac{0}{u_7} + \frac{0}{u_8}$$

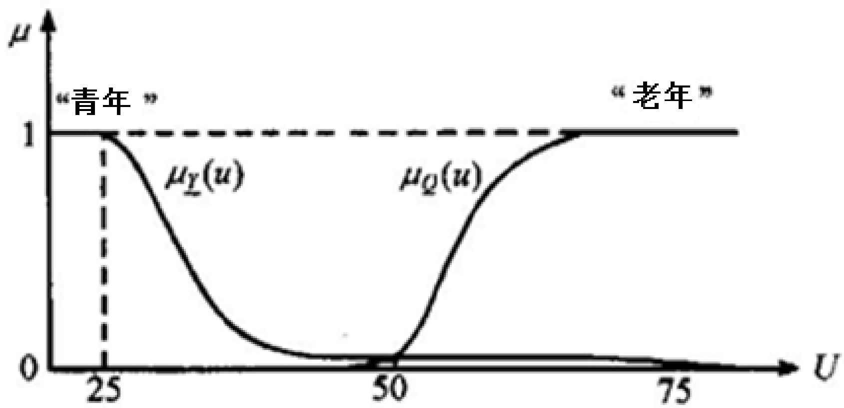
$$\underset{\sim}{A} = \{0.7, 0.9, 0.6, 0.4, 0, 0.1, 0, 0\}$$

函数描述法

例：以年龄为论域，U=[0，200]，

$\tilde{O}$ 表示老年人，

$\tilde{Y}$ 表示青年人。



"青年"和"老年"的隶属函数曲线

函数描述法：

$$\mu_{\tilde{O}} = \begin{cases} 0 & 0 \le u \le 50 \\ [1+(\frac{u-50}{5})^{-2}]^{-1} & 50 < u \le 200 \end{cases}$$

$$\mu_{\tilde{Y}} = \begin{cases} 1 & 0 \le u \le 25 \\ [1+(\frac{u-25}{5})^{2}]^{-1} & 25 < u \le 200 \end{cases}$$

Zadeh表示法：

$$\tilde{O} = \int_{0 \le U \le 50} \frac{0}{u} + \int_{50 < u \le 200} \frac{[1+(\frac{u-50}{5})^{-2}]^{-1}}{u}$$

$$\tilde{Y} = \int_{0 \le U \le 25} \frac{1}{u} + \int_{25 < u \le 200} \frac{[1+(\frac{u-25}{5})^{2}]^{-1}}{u}$$

1.2模糊集合--表示方法--举例

例：设X={1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10}，

以A表示“小的数”，

分别写出上述三种模糊集合的表达方式。

Zadeh表示法：

$$\tilde{A}=\frac{1}{1}+\frac{0.9}{2}+\frac{0.7}{3}+\frac{0.5}{4}+\frac{0.3}{5}+\frac{0.1}{6}+\frac{0}{7}+\frac{0}{8}+\frac{0}{9}+\frac{0}{10}$$

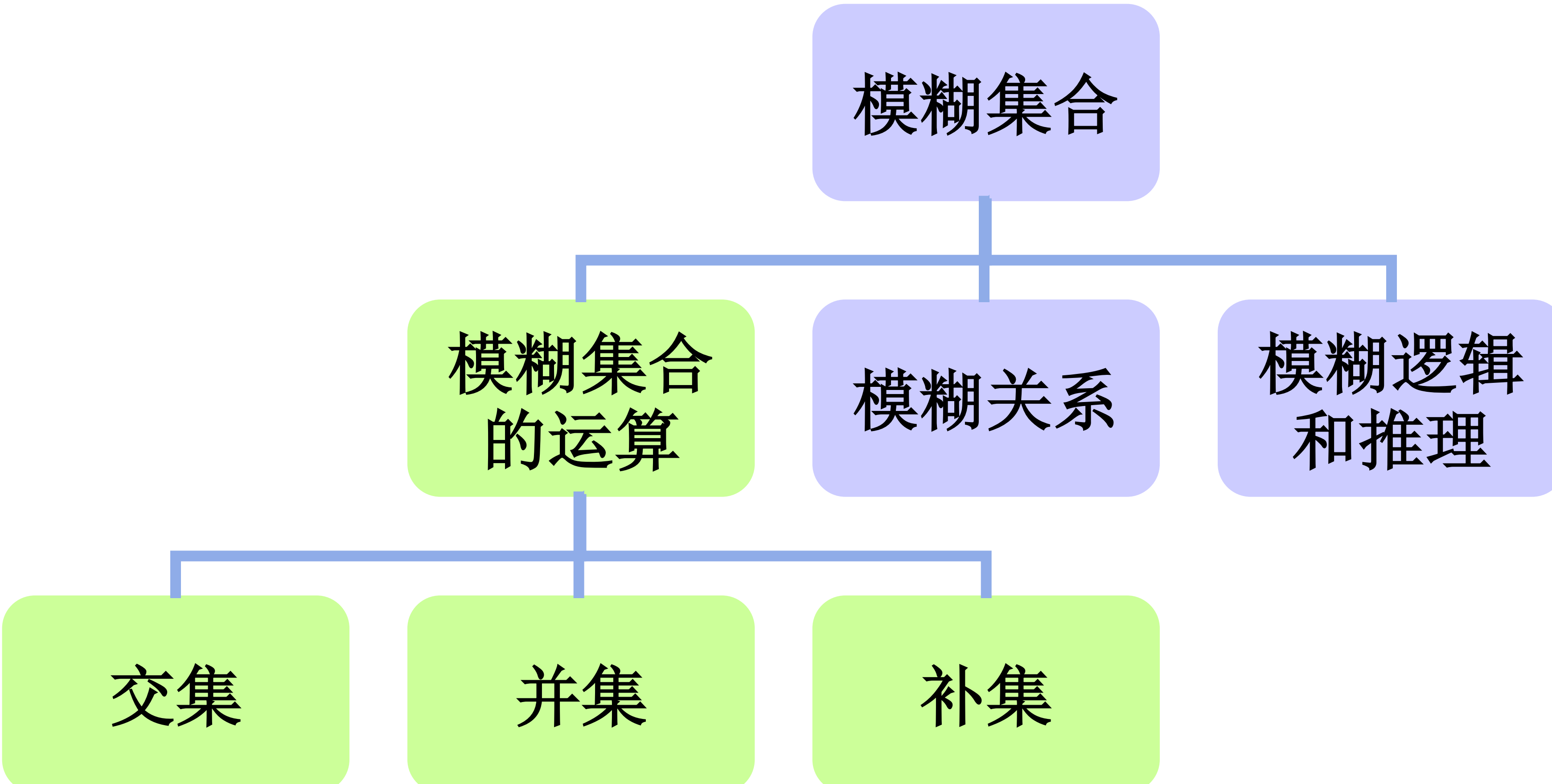
序偶表示法：

$$\tilde{A}=\{(1,1),(2,0.9),(3,0.7),(4,0.5),(5,0.3),(6,0.1)\}$$

向量表示法：

$$\tilde{A}=\{1,0.9,0.7,0.5,0.3,0.1,0,0,0,0\}$$

2模糊集合的运算



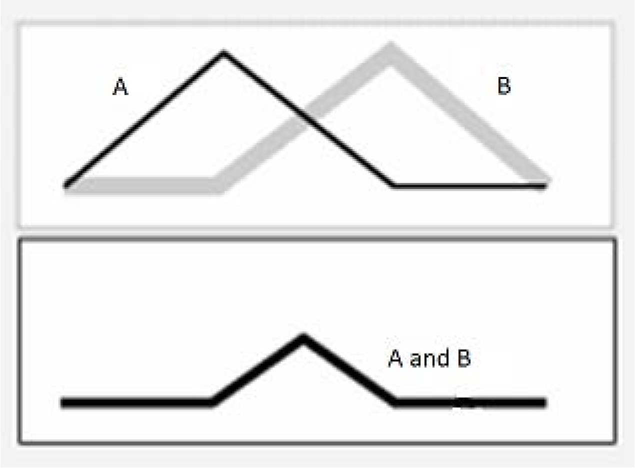
2.1模糊集合的运算--交集

模糊集合

$\tilde{A} \cap \tilde{B} \Leftrightarrow$

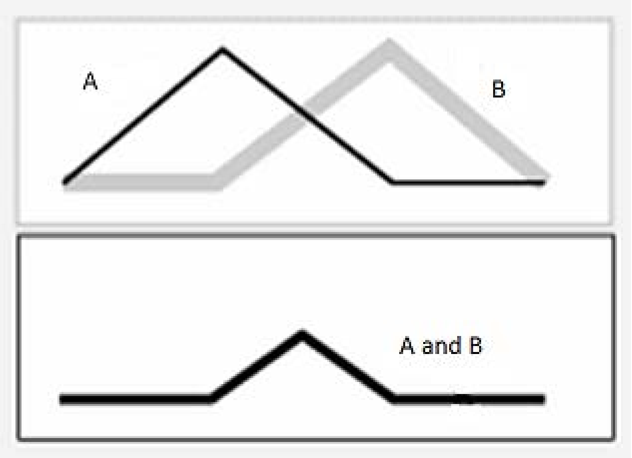
$\mu_{\tilde{A} \cap \tilde{B}}(u) = \min[\mu_{\tilde{A}}(u), \mu_{\tilde{B}}(u)]$

$= \mu_{\tilde{A}}(u) \wedge \mu_{\tilde{B}}(u)$



普通集合

$x_{A \cap B}(x) = \min(x_A(x), x_B(x))$



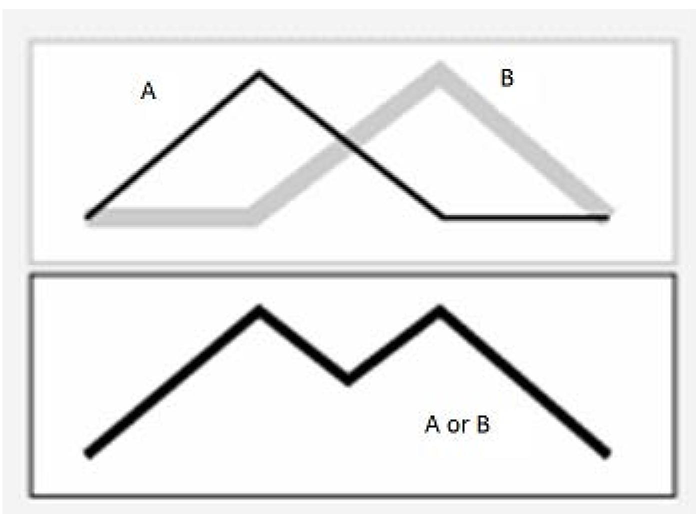
2.2模糊集合的运算--并集

模糊集合

$$\tilde{A} \cup \tilde{B} \Leftrightarrow$$

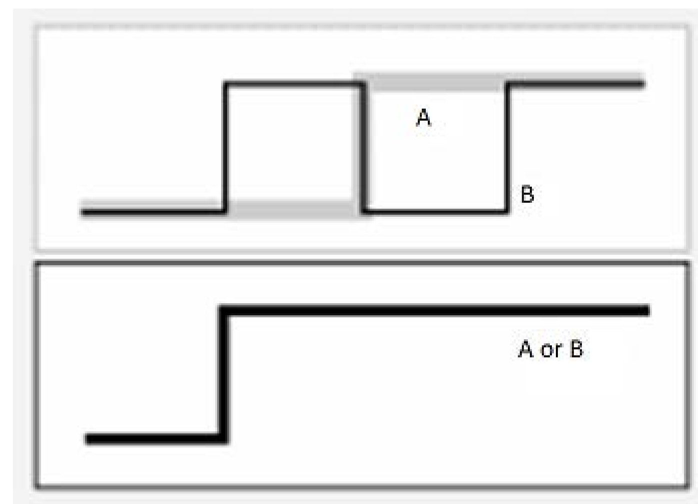
$$\mu_{\tilde{A} \cup \tilde{B}}(u) = \max[\mu_{\tilde{A}}(u), \mu_{\tilde{B}}(u)]$$

$$= \mu_{\tilde{A}}(u) \vee \mu_{\tilde{B}}(u)$$



普通集合

$$x_{A \cup B}(x) = \max(x_A(x), x_B(x))$$

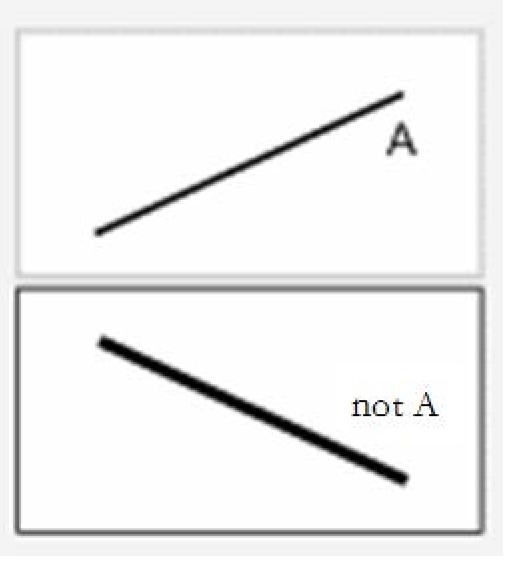


2.3模糊集合的运算--补集

模糊集合

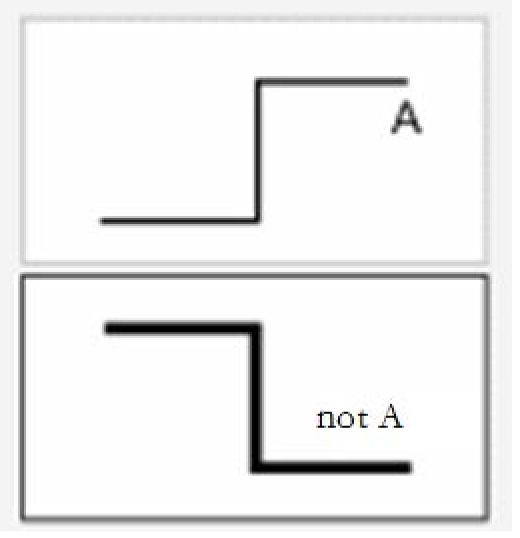
$$\tilde{A}^c \Leftrightarrow$$

$$\mu_{\tilde{A}^c}(u) = 1 - \mu_{\tilde{A}}(u)$$



普通集合

$$x_{\overline{A}(x)} = 1 - x_A(x)$$



2模糊集合的运算--举例

例： 已知论域 $U=\{u_1,u_2,u_3,u_4\}$

$$\tilde{A}=\frac{0.3}{u_1}+\frac{0.5}{u_2}+\frac{0.7}{u_3}+\frac{0.4}{u_4} \quad , \quad \tilde{B}=\frac{0.5}{u_1}+\frac{1}{u_2}+\frac{0.8}{u_3}$$

求：$\tilde{A}^c, \tilde{B}^c, \tilde{A}\cup\tilde{B}, \tilde{A}\cap\tilde{B}$

解：

$$\tilde{A}^c=\frac{0.7}{u_1}+\frac{0.5}{u_2}+\frac{0.3}{u_3}+\frac{0.6}{u_4}$$

$$\tilde{B}^c=\frac{0.5}{u_1}+\frac{0}{u_2}+\frac{0.2}{u_3}+\frac{1}{u_4}=\frac{0.5}{u_1}+\frac{0.2}{u_3}+\frac{1}{u_4}$$

2模糊集合的运算--举例

$$\tilde{A}=\frac{0.3}{u_1}+\frac{0.5}{u_2}+\frac{0.7}{u_3}+\frac{0.4}{u_4} \quad , \quad \tilde{B}=\frac{0.5}{u_1}+\frac{1}{u_2}+\frac{0.8}{u_3}$$

解：

$$\tilde{A}\bigcup\tilde{B}=\frac{0.3\vee 0.5}{u_1}+\frac{0.5\vee 1}{u_2}+\frac{0.7\vee 0.8}{u_3}+\frac{0.4\vee 0}{u_4}$$

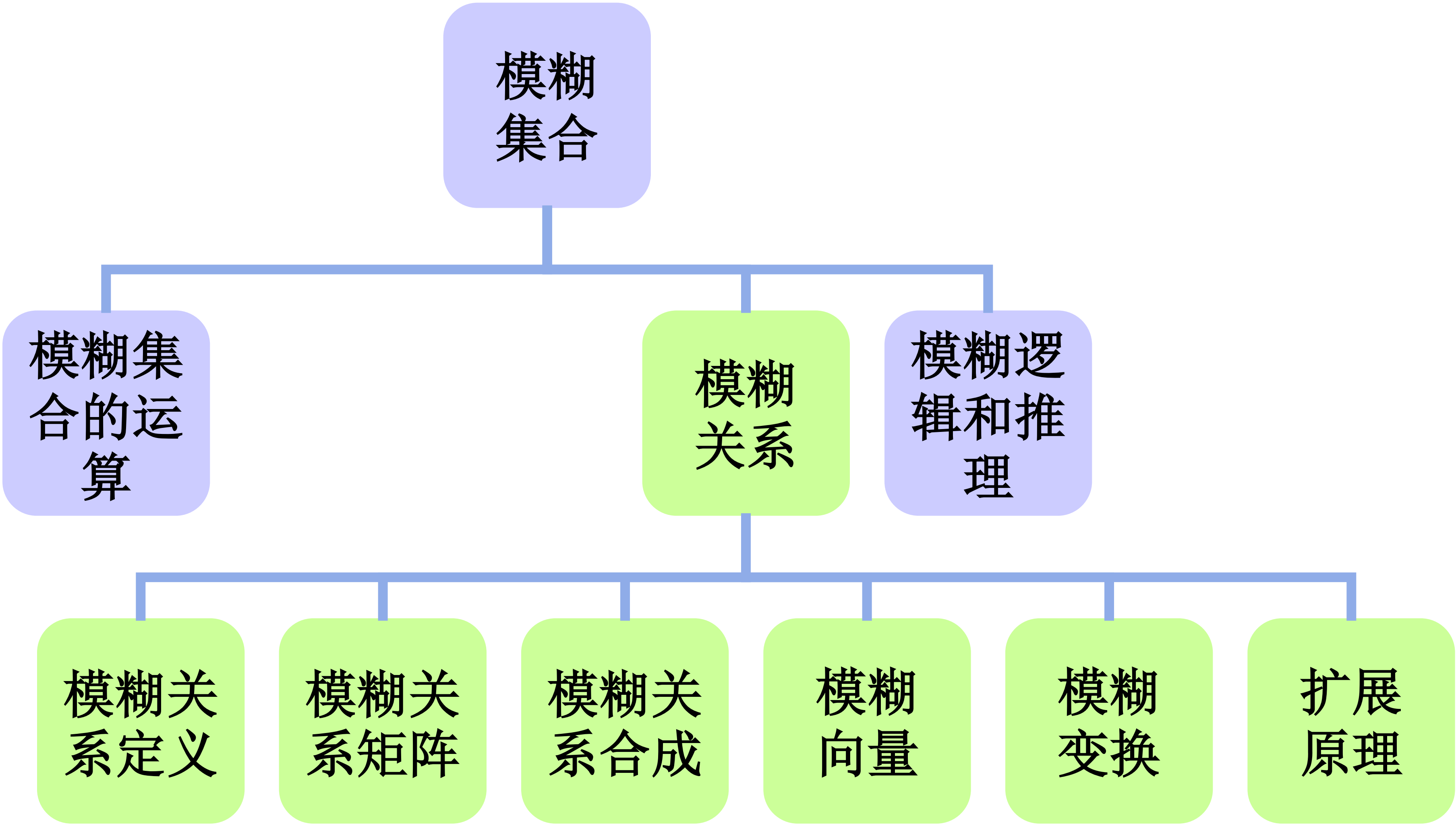
$$=\frac{0.5}{u_1}+\frac{1}{u_2}+\frac{0.8}{u_3}+\frac{0.4}{u_4}$$

$$\tilde{A}\bigcap\tilde{B}=\frac{0.3\wedge 0.5}{u_1}+\frac{0.5\wedge 1}{u_2}+\frac{0.7\wedge 0.8}{u_3}+\frac{0.4\wedge 0}{u_4}$$

$$=\frac{0.3}{u_1}+\frac{0.5}{u_2}+\frac{0.7}{u_3}$$

模糊关系

3模糊关系


模糊集合
模糊集合的运算
模糊关系
模糊逻辑和推理
模糊关系定义
模糊关系矩阵
模糊关系合成
模糊向量
模糊变换
扩展原理

3.1模糊关系--模糊关系定义

模糊关系

- 定义：所谓X、Y两集合的笛卡尔积 $X\times Y=\{(x,y)|x\in X,y\in Y\}$

  中的一个模糊关系R是指以X×Y为论域的一个模糊子集，其序偶（x，y）的隶属度为 $\mu_R(x,y)$ 。

- $\mu_R(x,y)$ 在实轴的闭区间［0，1］取值，其大小反映（x，y）具有关系R的程度。

经典关系

- 集合的笛卡尔积：给定集合X和Y，由全体(x，y)（x∈X，y∈Y）组成的集合称为X与Y的笛卡尔积（也称为直积），记作X×Y。

  $$X\times Y=\{(x,y)|x\in X,y\in Y\}$$

- 经典关系：存在集合X和Y，它们的笛卡尔积X×Y的一个子集R称为X到Y的二元关系，简称（经典）关系

  $$R\subseteq X\times Y$$

  $$\mu_R(x,y)=\begin{cases}1, & (x,y)\in R\\ 0, & (x,y)\notin R\end{cases}$$

3.1模糊关系--模糊关系定义

多元模糊关系

- 一般定义：n （大于1）元模糊关系 R 是定义在笛卡尔积 $X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_n$ 上的模糊集合。
- 形式化表示：

$$R_{X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_n} = \left\{ \left((x_1, \cdots, x_n), \mu_R(x_1, \cdots, x_n) \right) \middle| (x_1, \cdots, x_n) \in X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_n \right\}$$

$$= \int_{X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_n} \mu_R(x_1, \cdots, x_n) / (x_1, \cdots, x_n)$$

3.1模糊关系--模糊关系定义

- 例：设U={旧金山，香港，东京}，V={波士顿，香港}，需要确定两个城市之间“非常远”这一关系。

模糊关系

以[0，1]中的一个数来表示“非常远”的程度，则该关系可表示为

$$
\begin{array}{cc}
 & \begin{array}{cc} \text{波士顿} & \text{香港} \end{array} \\
R = \begin{array}{c} \text{旧金山} \\ \text{香港} \\ \text{东京} \end{array} & \begin{Bmatrix} 0.30 & 0.90 \\ 1.00 & 0.00 \\ 0.95 & 0.10 \end{Bmatrix}
\end{array}
$$

经典关系

以0和1来表示“非常远”的程度，则该关系可表示为

$$
\begin{array}{cc}
 & \begin{array}{cc} \text{波士顿} & \text{香港} \end{array} \\
R = \begin{array}{c} \text{旧金山} \\ \text{香港} \\ \text{东京} \end{array} & \begin{Bmatrix} 0.00 & 1.00 \\ 1.00 & 0.00 \\ 1.00 & 0.00 \end{Bmatrix}
\end{array}
$$

3.2模糊关系--模糊关系矩阵

- 当X={x_1, x_2, …, x_n}，Y={y_1, y_2, …, y_m}是有限集合时，定义在X×Y上的模糊关系R可用n×m阶模糊(关系)矩阵来表示。
- 模糊关系矩阵的运算：

$$R = [r_{ij}]_{n\times m} = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & \cdots & r_{1m} \\ r_{21} & r_{22} & \cdots & r_{2m} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ r_{n1} & r_{n2} & \cdots & r_{nm} \end{bmatrix}$$

并：$R_{n\times m} \bigcup S_{n\times m} = (r_{ij} \vee s_{ij})_{n\times m}$

交：$R_{n\times m} \bigcap S_{n\times m} = (r_{ij} \wedge s_{ij})_{n\times m}$

补：$R^c_{n\times m} = (1 - r_{ij})_{n\times m}$

3.2模糊关系--模糊关系矩阵

例：设某地区人的身高论域X={140,150,160,170,180}，体重论域Y={40, 50, 60, 70, 80}，下表为身高与体重的相互关系，表示从X到Y的一个模糊关系R。

X　　Y	40	50	60	70	80
140	1	0.8	0.2	0.1	0
150	0.8	1	0.8	0.2	0.1
160	0.2	0.8	1	0.8	0.2
170	0.1	0.2	0.8	1	0.8
180	0	0.1	0.2	0.8	1

模糊矩阵表示为

$$R=\begin{bmatrix} 1 & 0.8 & 0.2 & 0.1 & 0 \\ 0.8 & 1 & 0.8 & 0.2 & 0.1 \\ 0.2 & 0.8 & 1 & 0.8 & 0.2 \\ 0.1 & 0.2 & 0.8 & 1 & 0.8 \\ 0 & 0.1 & 0.2 & 0.8 & 1 \end{bmatrix}$$

3.3模糊关系--模糊关系合成

模糊关系合成是指，由第一个集合和第二个集合之间的模糊关系及由第二个集合和第三个集合之间的模糊关系得到第一个集合和第三个集合之间的模糊关系的一种运算。

- 定义：设Q是X×Y中的模糊关系，R是Y×Z中的模糊关系，则Q到R的合成S是定义在X×Z上的模糊关系，记为 $S = Q \circ R$

注： $$\mu_{Q \circ R}(x, z) = \vee\{\mu_Q(x, y) \wedge \mu_R(y, z)\}$$

3.3模糊关系--模糊关系合成

当X、Y、Z的论域均为有限时，模糊关系的合成可用模糊矩阵的合成表示.

设X×Y的模糊关系对应的模糊矩阵Q，Y×Z的模糊关系对应的模糊矩阵R，X×Z的模糊关系对应的模糊矩阵S分别为:

$$Q=(q_{ij})_{n\times m},R=(r_{jk})_{m\times l},S=(s_{ik})_{n\times l}$$

则模糊矩阵的合成

$$S=Q\circ R$$

$$s_{ik}=\bigvee_{j=1}^{m}(q_{ij}\wedge r_{jk}),\ 1\le i\le n,\ 1\le k\le l$$

3.3模糊关系--模糊关系合成

例：设
$$Q=\begin{bmatrix}1 & 0.8\\ 0.7 & 0\\ 0.5 & 0.5\\ 0.4 & 0.2\end{bmatrix},R=\begin{bmatrix}1 & 0.6 & 0\\ 0.4 & 0.7 & 1\end{bmatrix}$$

则
$$Q\circ R=\begin{bmatrix}1 & 0.8\\ 0.7 & 0\\ 0.5 & 0.5\\ 0.4 & 0.2\end{bmatrix}\circ\begin{bmatrix}1 & 0.6 & 0\\ 0.4 & 0.7 & 1\end{bmatrix}$$

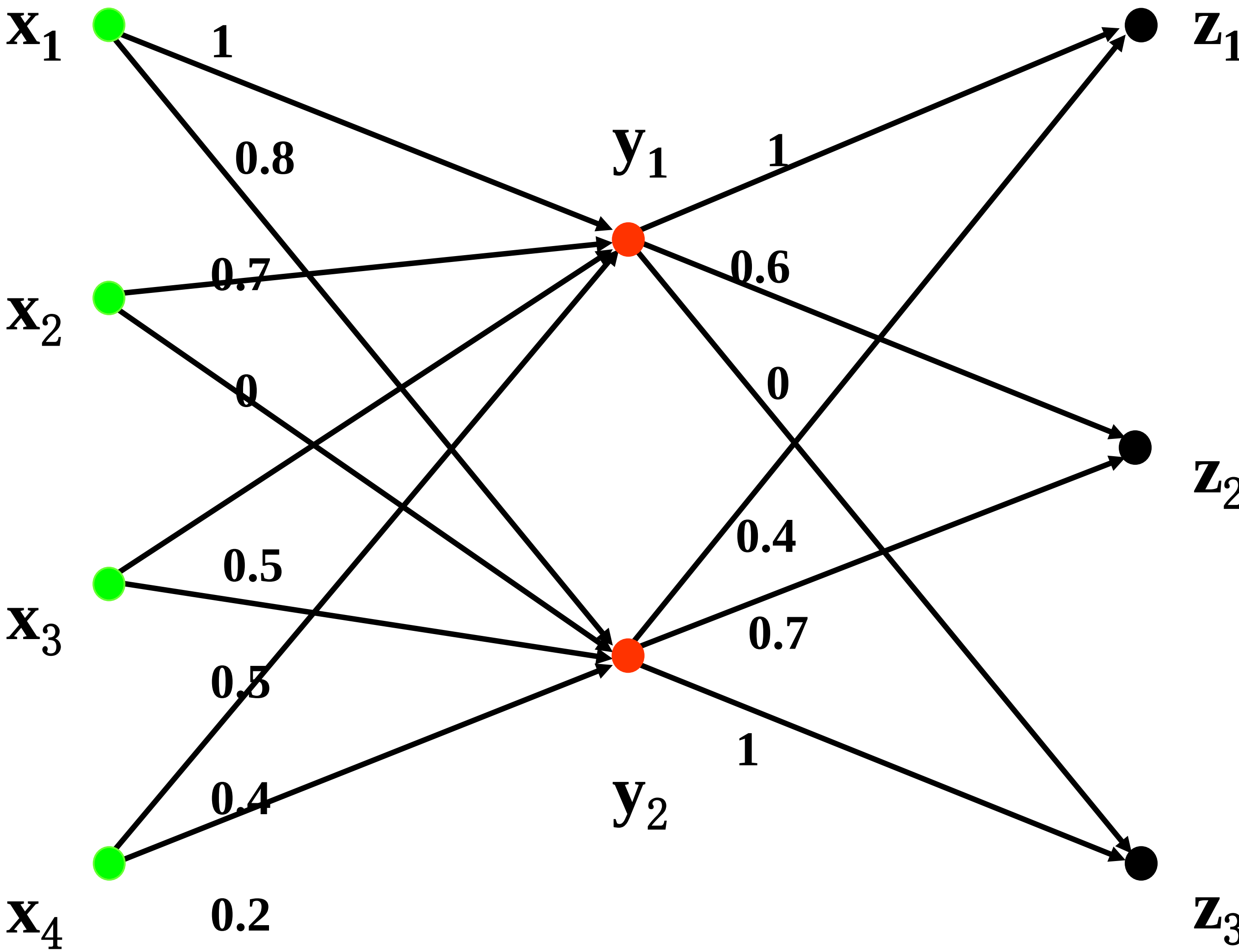
$$=\begin{bmatrix}(1\wedge 1)\vee(0.8\wedge 0.4) & (1\wedge 0.6)\vee(0.8\wedge 0.7) & (1\wedge 0)\vee(0.8\wedge 1)\\ (0.7\wedge 1)\vee(0\wedge 0.4) & (0.7\wedge 0.6)\vee(0\wedge 0.7) & (0.7\wedge 0)\vee(0\wedge 1)\\ (0.5\wedge 1)\vee(0.5\wedge 0.4) & (0.5\wedge 0.6)\vee(0.5\wedge 0.7) & (0.5\wedge 0)\vee(0.5\wedge 1)\\ (0.4\wedge 1)\vee(0.2\wedge 0.4) & (0.4\wedge 0.6)\vee(0.2\wedge 0.7) & (0.4\wedge 0)\vee(0.2\wedge 1)\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}1\vee 0.4 & 0.6\vee 0.7 & 0\vee 0.8\\ 0.7\vee 0 & 0.6\vee 0 & 0\vee 0\\ 0.5\vee 0.4 & 0.5\vee 0.5 & 0\vee 0.5\\ 0.4\vee 0.2 & 0.4\vee 0.2 & 0\vee 0.2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0.7 & 0.8\\ 0.7 & 0.6 & 0\\ 0.5 & 0.5 & 0.5\\ 0.4 & 0.4 & 0.2\end{bmatrix}$$

3.3模糊关系--模糊关系合成

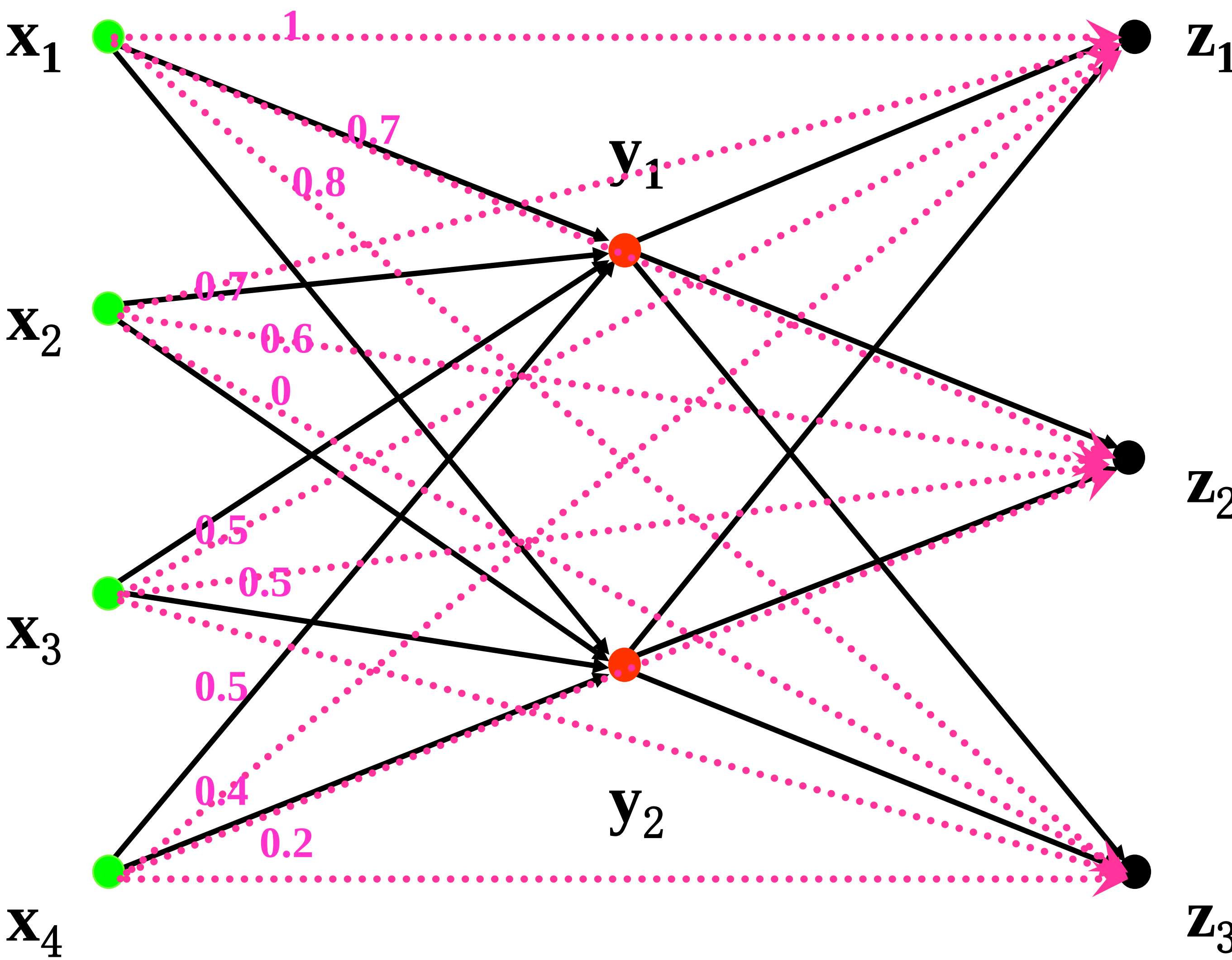
$$Q=\begin{bmatrix}1 & 0.8\\ 0.7 & 0\\ 0.5 & 0.5\\ 0.4 & 0.2\end{bmatrix}$$

$$R=\begin{bmatrix}1 & 0.6 & 0\\ 0.4 & 0.7 & 1\end{bmatrix}$$



3.3模糊关系--模糊关系合成

$$Q=\begin{bmatrix} 1 & 0.7 & 0.8 \\ 0.7 & 0.6 & 0 \\ 0.5 & 0.5 & 0.5 \\ 0.4 & 0.4 & 0.2 \end{bmatrix}$$



3.4模糊关系--模糊向量

1. 模糊向量

向量表示法所得到的模糊集合称之为模糊向量。

2. 模糊向量的笛卡尔积

定义：设模糊向量 A 和 B，则称如下合成运算为模糊向量的笛卡尔积。

$$A \times B = A^T \circ B$$

3.4 模糊关系--模糊向量

例：

设模糊向量A=[0.8　0.6　0.2]，B=[0.2　0.4　0.7　1]，

则它们的笛卡尔积为：

$$A \times B = A^T \circ B$$

$$= \begin{bmatrix} 0.8 \\ 0.6 \\ 0.2 \end{bmatrix} \circ [0.2 \quad 0.4 \quad 0.7 \quad 1]$$

$$= \begin{bmatrix} 0.2 & 0.4 & 0.7 & 0.8 \\ 0.2 & 0.4 & 0.6 & 0.6 \\ 0.2 & 0.2 & 0.2 & 0.2 \end{bmatrix}$$

3.5 模糊关系--模糊变换

- 模糊变换是指给定两个集合之间的一个模糊关系，经过运算，由其中一个集合上的模糊子集得到另一个集合上的模糊子集的过程。

- 设A和B分别是模糊集X和Y中的模糊子集，给定X×Y的模糊关系所对应的一个模糊矩阵R及模糊子集A:

$$R = [r_{ij}]_{n\times m} \qquad A = (x_1,\ x_2,\ \cdots\cdots;\ x_n)$$

模糊变换即模糊子集A与模糊关系矩阵R的合成，表示把X中的模糊集变为Y上的模糊集，实现论域的转换

$$B = A \circ R$$

3.5 模糊关系--模糊变换

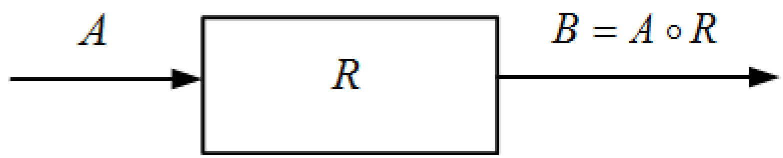
模糊变换是指给定两个集合之间的一个模糊关系，经过运算，由其中一个集合上的模糊子集得到另一个集合上的模糊子集的过程.

- 设A和B分别是模糊集X和Y中的模糊子集，给定X×Y的模糊关系所对应的一个模糊矩阵R及模糊子集A：

$$R=[\mathrm{r}_{ij}]_{n\times \mathrm{m}},\quad A=(x_1,x_2,\cdots\cdots,x_n)$$

- 模糊变换即模糊子集A与模糊关系矩阵R的合成，表示把X中的模糊集变为Y上的模糊集，实现论域的转换: $B=A\circ R$

3.5 模糊关系--模糊变换



- 如果R表示某一控制系统的输入与输出之间的动态关系，则由输入A可以得到对应的输出B.
- 如果R表示某种逻辑因果关系，则模糊变换就是一种模糊推理.
- 如果R表示对一件商品各因素综合评判的总关系矩阵，则输入一组对各因素的权重分配A，就可以获得综合评判结果B.

3.6 模糊关系--扩展原理 The Extension Principle

令 $f: U \to V$表示一个从清晰集U至清晰集V上的函数.

已知U上的模糊集$\tilde{A}$，确定一个V上由 f 诱导出的模糊集

$$\tilde{B} = f\left(\tilde{A}\right)$$

- 如果 f 是一个一一映射，定义B的隶属函数为

$$\mu_{\tilde{B}}(y) = \mu_{\tilde{A}}[f^{-1}(y)], \quad y \in V.$$

- 若 f 不是一一映射，则当U中两个以上的点映射到V中的同一点时，就会产生模糊。解决这种模糊性，取隶属度较大的那个为$\mu_B\left(y\right)$，其中，f^{-1} 为 f 的逆.
- 定义B的隶属度为

$$\mu_B(y) = \bigvee_{x \in f^{-1}(y)} \mu_A(x), \quad y \in V$$

即为扩展原理.

3.6 模糊关系--扩展原理 (2)

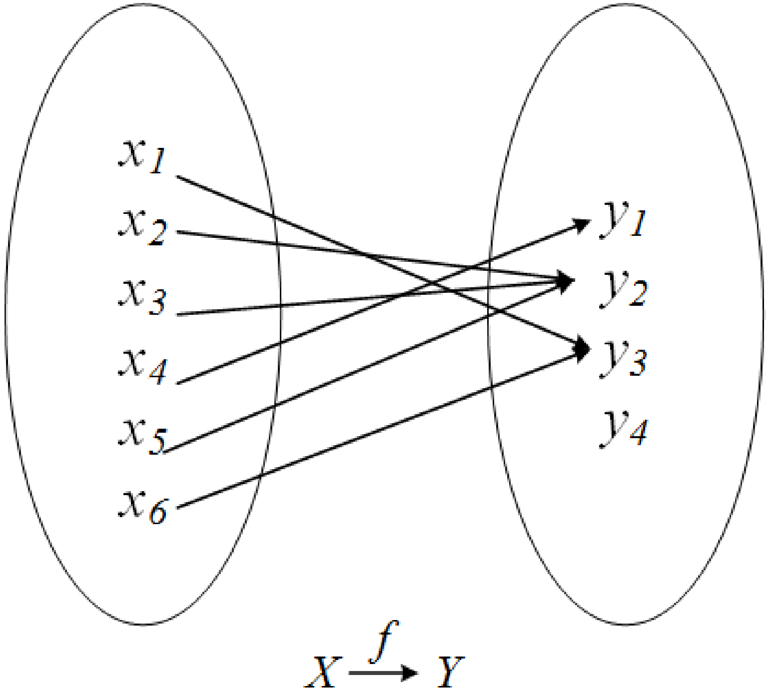
例：设 $X=\{x_1,x_2,x_3,x_4,x_5,x_6\}$， $Y=\{y_1,y_2,y_3,y_4\}$.

$$f: X\to Y.$$

$$f(x_4)=y_1,$$

$$f(x_2)=f(x_3)=f(x_5)=y_2,$$

$$f(x_1)=f(x_6)=y_3.$$



可诱导出： $f^{-1}: Y\to X$

$$f^{-1}(y_1)=\{x_4\},$$

$$f^{-1}(y_2)=\{x_2,x_3,x_5\},$$

$$f^{-1}(y_3)=\{x_1,x_6\}.$$

若 $\tilde{A}=\frac{0.3}{x_1}+\frac{0.7}{x_2}+\frac{1}{x_3}+\frac{0}{x_4}+\frac{0.2}{x_5}+\frac{0.8}{x_6}$

3.6 模糊关系--扩展原理 (3)

可得 $\mu_{f(\tilde{A})}(y_1)=\bigvee_{x\in\{x_4\}}(\mu_{\tilde{A}}(x))=\mu_{\tilde{A}}(x_4)=0,$

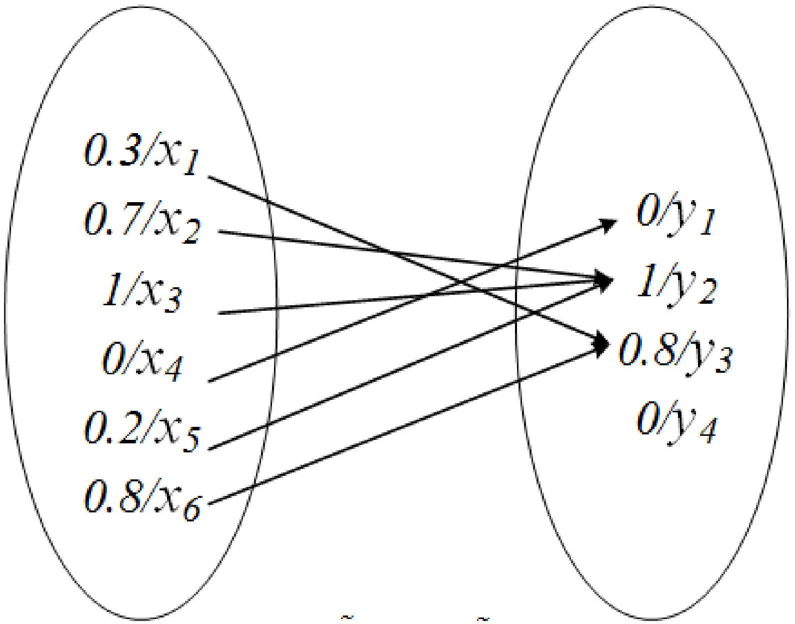
$$\mu_{f(\tilde{A})}(y_2)=\bigvee_{x\in\{x_2,x_3,x_5\}}(\mu_{\tilde{A}}(x))$$

$$=\mu_{\tilde{A}}(x_2)\vee\mu_{\tilde{A}}(x_3)\vee\mu_{\tilde{A}}(x_5)=1,$$

$$\mu_{f(\tilde{A})}(y_3)=\bigvee_{x\in\{x_1,x_6\}}(\mu_{\tilde{A}}(x))$$

$$=\mu_{\tilde{A}}(x_1)\vee\mu_{\tilde{A}}(x_6)=0.8,$$

$$\mu_{f(\tilde{A})}(y_4)=0.$$



$\tilde{A} \longrightarrow \tilde{B}$

有 $f(\tilde{A})=\dfrac{1}{y_2}+\dfrac{0.8}{y_3}.$

可见，当X是有限论域时，根据扩展原理可算出Y上各点对$f(\tilde{A})$的隶属度，然后再根据模糊集的方法列出$f(\tilde{A})$.

可知：$f(\tilde{A})$是$\tilde{A}$的象。

3.6 模糊关系--扩展原理 (4)

类似地，可求 $f^{-1}(\tilde{B})$:

根据扩张原理，$\mu_{f^{-1}(\tilde{B})}(x) = \mu_{\tilde{B}}(y)$ ，

得 $\mu_{f^{-1}(\tilde{B})}(x_1) = \mu_{\tilde{B}}(y_3)=0.8$

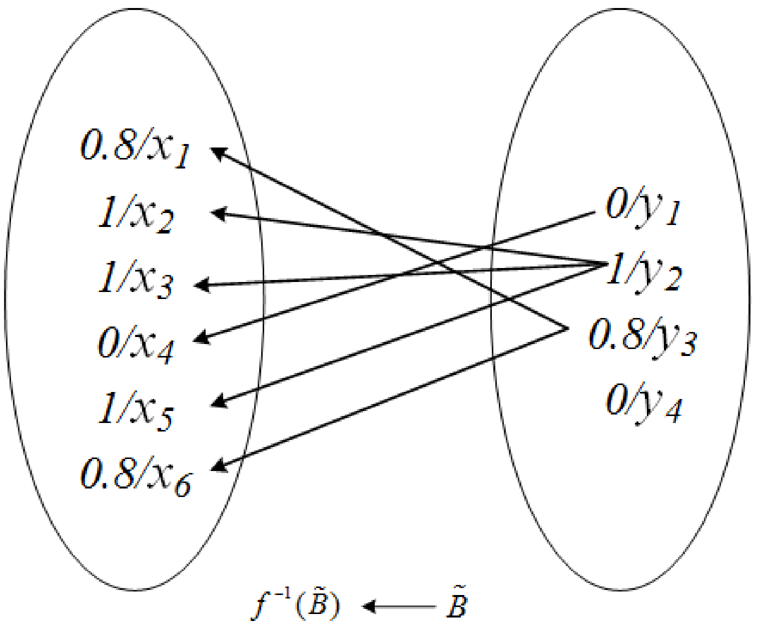
$\mu_{f^{-1}(\tilde{B})}(x_2) = \mu_{\tilde{B}}(y_2)=1$

$\mu_{f^{-1}(\tilde{B})}(x_3) = \mu_{\tilde{B}}(y_2)=1$

$\mu_{f^{-1}(\tilde{B})}(x_4) = \mu_{\tilde{B}}(y_1)=0$

$\mu_{f^{-1}(\tilde{B})}(x_5) = \mu_{\tilde{B}}(y_2)=1$

$\mu_{f^{-1}(\tilde{B})}(x_6) = \mu_{\tilde{B}}(y_3)=0.8$



所以 $f^{-1}(\tilde{B})=\dfrac{0.8}{x_1}+\dfrac{1}{x_2}+\dfrac{1}{x_3}+\dfrac{0}{x_4}+\dfrac{1}{x_5}+\dfrac{0.8}{x_6}$

同理，$f^{-1}(\tilde{B})$是$\tilde{B}$的原象.

- 扩展原理对各种运算给出了一种赋予隶属度的方法

模糊推理

4模糊逻辑与推理

- 模糊集合
  - 模糊集合的运算
  - 模糊关系
  - 模糊逻辑和推理
    - 模糊语言变量
    - 模糊逻辑
    - 模糊推理
    - 模糊条件语句

语言变量

如果一个变量能够取普通言语中的词语为值，称该变量为语言变量。在模糊系统中，词语由定义在论域上的模糊集合来描述，变量也是定义在论域上的。

例　汽车速度是一个变量x，取值范围为$[0, V_{max}]$，V_{max}是汽车的最快速度，定义三个模糊集合慢速、中速、快速。如果x是语言变量，那么它可以取慢速、中速、快速三个值。

模糊语言值

语言变量的取值称为语言值。语言值可以用模糊集合表示，即模糊语言值。

例如：在论域U=[1，2，…，10]上定义语言变量[偏差]，其模糊语言值[大]、[小]为

[大]=0.2/4+0.4/5+0.6/6+0.8/7+1/8+1/9+1/10

[小]=1/1+0.8/2+0.6/3+0.4/4+0.2/5

语气算子

一般来说，一个语言值包括以下三部分：

- 原子单词：“慢”、“快”、“冷”、“热”……
- 连 接 词：“非”、“且”、“或” ……
- 语气算子：“非常”、“很”、“略” ……

$$(H_\lambda \tilde{A}) \equiv [\tilde{A}(u)]^\lambda$$

定义：

其中：$\tilde{A}(u)$为论域U的一个模糊子集，描述一个原子单词； H_λ 为语气算子，λ 为一正实数。

4.1模糊逻辑与推理--模糊语言变量

设语言值A是U上的一个模糊集合（表示一个原子单词），则语言值很A也是U上的一个模糊集合，可以用如下的隶属函数来表示$\mu_{很A}=[\mu_A(x)]^2$

语言值略A也是U上的一个模糊集合，可以用如下的隶属度函数表示$\mu_{略A}=[\mu_A(x)]^{1/2}$

例：令U={1，2，3，4，5}，而语言值[小]定义为如下模糊集合

$$小=1/1+0.8/2+0.6/3+0.4/4+0.2/5$$

则由上述定义可得

$$很小=1/1+0.64/2+0.36/3+0.16/4+0.04/5$$

$$略小=1/1+0.8944/2+0.7746/3+0.6325/4+0.4472/5$$

模糊语言变量

定义一个模糊语言变量为一个五元体

$$(X,\ T(X),\ U,\ G,\ M)$$

其中： X ——模糊语言变量的名称；

$T(X)$——模糊语言变量的语言值集合；

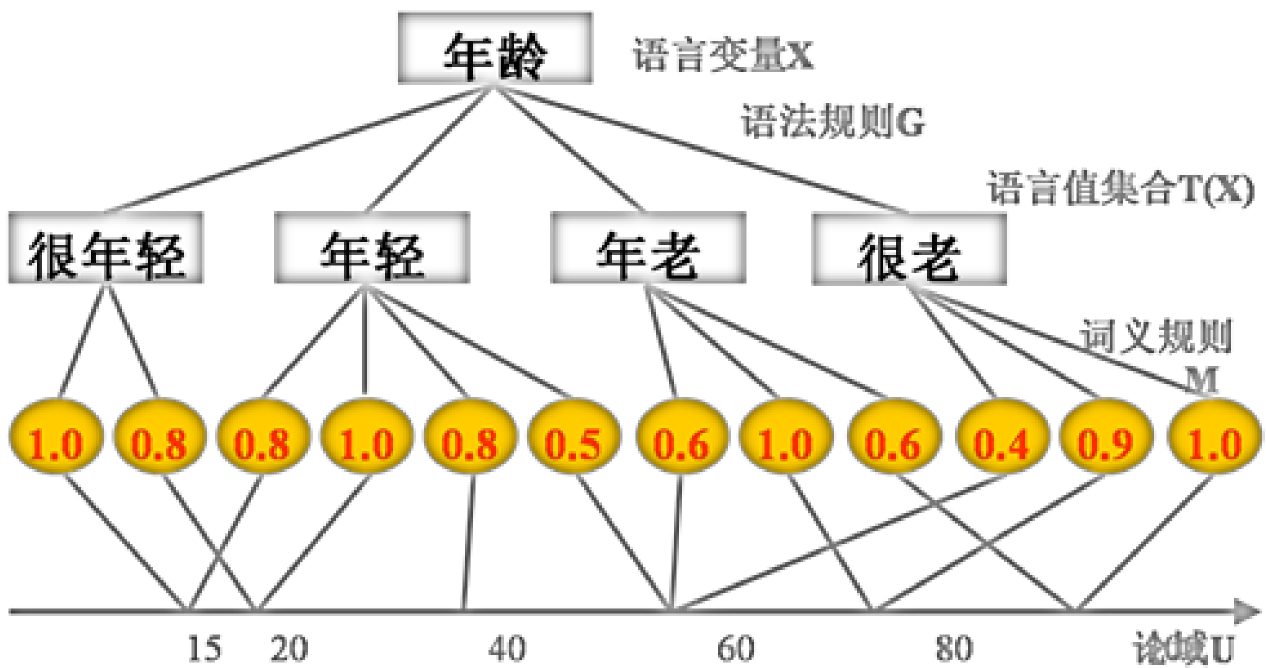
U ——论域；

G ——语法规则；

M ——词义规则。

4.1模糊逻辑与推理--模糊语言变量

以年龄为语言变量的五元体结构图



4.2模糊逻辑与推理--模糊逻辑

模糊命题：含有模糊概念或带有模糊性的陈述句

例 ：

- 这个放大器的零点漂移太严重
- A点的电平太低
- 电动机的转速稍偏高。

模糊命题 $\tilde{P}$ 的真值记作 $V(\tilde{P}) = x, 0 \le x \le 1$

- 当x=1时表示 $\tilde{P}$ 完全真；
- 当x=0时表示 $\tilde{P}$ 完全假。
- 当x介于0、1之间时，表征 $\tilde{P}$ 真假的程度。

模糊命题的运算

模糊命题的一般形式：

$$\widetilde{P}: \quad x \text{ is } \mathrm{A}$$

$$\widetilde{Q}: \quad y \text{ is } \mathrm{B}$$

模糊命题的运算：

1）或 $\widetilde{P} \vee \widetilde{Q} = \mu_A(x) \vee \mu_B(y)$

2）与 $\widetilde{P} \wedge \widetilde{Q} = \mu_A(x) \wedge \mu_B(y)$

3）逆 $1 - \widetilde{P} = 1 - \mu_A(x)$

4.2模糊逻辑与推理--模糊逻辑

二值逻辑与模糊逻辑

二值逻辑：

普通命题只取真、假二值，所以又称二值逻辑，

通常用“1”表示“真”，用“0”表示“假”。

模糊逻辑：

研究模糊命题的逻辑，是二值逻辑的推广，是对经典的二值逻辑的模糊化。

4.3模糊逻辑与推理--模糊推理

判断和推理：

判断是概念与概念的联合

推理则是由已知判断引申出新判断的思维过程

- 判断句：

  例：“u是a”　　是清晰的判断句

  　　“偏差是大的”　　是模糊判断句

- 推理句：

  句型：“若u是a，则u是b”，简记“(a) $\Rightarrow$ (b)”

  例：若他是研究生，则他是学生。

  　　若u是菱形，则u是平行四边形。

4.3模糊逻辑与推理--模糊推理

- 模糊推理：模糊推理也称为模糊逻辑推理，指已知模糊命题，推出新的模糊命题作为结论的过程。
- 模糊推理句：与模糊判断句一样，不能给出绝对的真与假，只能给出真的程度。

例：“若u是晴天，则u很暖和”

其中，晴天及很暖和均为模糊集合。

模糊推理计算

根据Zadeh提出的近似推理中的假言推理方法，设A和B分别为X和Y上的模糊集，隶属函数分别为$\mu_{\tilde{A}}(x)$ 和 $\mu_{\tilde{B}}(x)$，词 a 和 b 分别用X、Y上的模糊集A、B 描述，模糊推理句 “(a) $\rightarrow$ (b)” 可表示为从 X 到 Y的一个模糊关系，记为$\tilde{A}\rightarrow\tilde{B}$，其隶属函数定义为

$$\mu_{\tilde{A}\rightarrow\tilde{B}}(x,y)\overset{\Delta}{=}[\mu_{\tilde{A}}(x)\wedge\mu_{\tilde{B}}(y)]\vee[1-\mu_{\tilde{A}}(x)]$$

或

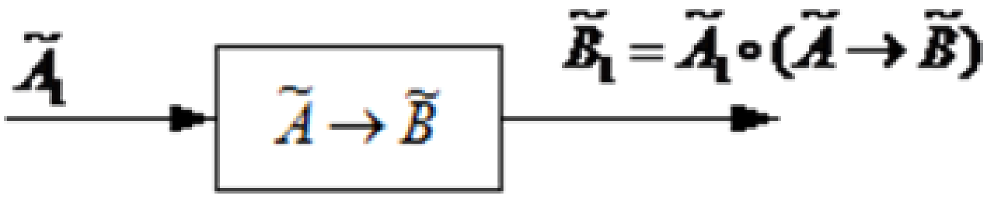
$$(\tilde{A}\rightarrow\tilde{B})(x,y)\overset{\Delta}{=}[\tilde{A}(x)\wedge\tilde{B}(y)]\vee[1-\tilde{A}(x)]$$

简单模糊推理过程

大前提（模糊推理句） $\tilde{A} \to \tilde{B}$

小前提（条件） $\tilde{A}_1$

结论 $\tilde{B}_1 = \tilde{A}_1 \circ (\tilde{A} \to \tilde{B})$



4.3模糊逻辑与推理--模糊推理

例：设论域 $X=\{x_1,x_2,x_3,x_4,x_5\}=\{1,2,3,4,5\}$

$Y=\{y_1,y_2,y_3,y_4,y_5\}=\{1,2,3,4,5\}$

已知 $A\in X$, $A=$"x小", $\mu_A(x)=\frac{1}{1}+\frac{0.5}{2}$

$B\in Y$, $B=$"y大", $\mu_B(y)=\frac{0.5}{4}+\frac{1}{5}$

若A则B，求解模糊关系 $R=A\rightarrow B$。

解：根据$\mu_R(x,y)=\mu_{A\rightarrow B}(x,y)=[\mu_A(x)\wedge\mu_B(y)]\vee[1-\mu_A(x)]$

$$\mu_R(1,3)=\mu_{A\rightarrow B}(1,3)=[\mu_A(1)\wedge\mu_B(3)]\vee[1-\mu_A(1)]=[1\wedge 0]\vee[1-1]=0$$

$$\mu_R(1,4)=\mu_{A\rightarrow B}(1,4)=[\mu_A(1)\wedge\mu_B(4)]\vee[1-\mu_A(1)]=[1\wedge 0.5]\vee[1-1]=0.5$$

$$\mu_R(1,5)=\mu_{A\rightarrow B}(1,5)=[\mu_A(1)\wedge\mu_B(5)]\vee[1-\mu_A(1)]=[1\wedge 1]\vee[1-1]=1$$

$$R=\begin{bmatrix}0&0&0&0.5&1\\0.5&0.5&0.5&0.5&0.5\\1&1&1&1&1\\1&1&1&1&1\\1&1&1&1&1\end{bmatrix}$$

4.3模糊逻辑与推理--模糊推理

例：设论域 $X=Y=\{1, 2, 3, 4, 5\}$，

Y、X上的模糊子集“大”、“小”、“较小”分别给定如下

[大]=0.4/3+0.7/4+1/5

[小]=1/1+0.7/2+0.4/3

[较小]=1/1+0.6/2+0.4/3+0.2/4

若 x 小则 y 大；

如果 x 较小，试确定 y 的大小。

解：首先计算大前提“若 x 小则 y 大”的模糊矩阵 R

{若x小则y大}(x, y) = ([小](x) ∧[大](y)) ∨(1−[小](x))

$$R=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0.4 & 0.7 & 1 \\ 0.3 & 0.3 & 0.4 & 0.7 & 0.7 \\ 0.6 & 0.6 & 0.6 & 0.6 & 0.6 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

由给定的小前提[x较小]及推理规则，可以合成y的大小

$$[y]=[x\text{较小}]\circ[\text{若}x\text{小则}y\text{大}](x,y)$$

$$=(1\quad 0.6\quad 0.4\quad 0.2\quad 0)\circ\begin{bmatrix}0 & 0 & 0.4 & 0.7 & 1\\ 0.3 & 0.3 & 0.4 & 0.7 & 0.7\\ 0.6 & 0.6 & 0.6 & 0.6 & 0.6\\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1\end{bmatrix}$$

$$=(0.4\quad 0.4\quad 0.4\quad 0.7\quad 1)$$

4.4模糊逻辑与推理--模糊条件语句

a. 单输入模糊条件语句

句型： “若A则B，否则C”，可以表示为

$$(a \to b) \vee (a^c \to c)$$

该模糊关系矩阵 $\tilde{R}$ 中各元素根据下式计算

$$\mu_{(\tilde{A} \to \tilde{B}) \vee (\tilde{A}^c \to \tilde{C})}(x, y) = [\mu_{\tilde{A}}(x) \wedge \mu_{\tilde{B}}(y)] \vee [(1 - \mu_{\tilde{A}}(x)) \wedge \mu_{\tilde{C}}(y)]$$

4.4模糊逻辑与推理--模糊条件语句

采用模糊向量的笛卡尔乘积形式，该模糊关系矩阵可表示为

$$\tilde{R}=(\tilde{A}\times\tilde{B})+(\tilde{A}^{c}\times\tilde{C})$$

当输入为 $\tilde{A}_1$ 时，则输出 $\tilde{B}_1$ 的推理过程如下：

大前提　$(\tilde{A}\to\tilde{B})\vee(\tilde{A}^{c}\to\tilde{C})$

小前提　$\tilde{A}_1$

结 论　$\tilde{B}_1=\tilde{A}_1\circ\tilde{R}$

例：设论域X=Y={1，2，3，4，5}

$$\tilde{A}_{轻}=(1,0.8,0.6,0.4,0.2)$$

$$\tilde{B}_{重}=(0.2,0.4,0.6,0.8,1)$$

试确定"若x轻则y重，否则y不很重"所确定的$\tilde{R}$

以及"x很轻"所对应的y的模糊集合。

解：y很重：$\tilde{B}_{很重}=H_2(B_{重})=(0.04,0.16,0.36,0.64,1)$

y不很重：$\tilde{B}_{不很重}=\tilde{B}^c_{很重}=(0.96,0.84,0.64,0.36,0)$

x不轻：$\tilde{A}_{不轻}=(0,0.2,0.4,0.6,0.8)$

4. 4模糊逻辑与推理--模糊条件语句

$$\tilde{R}=(\tilde{A}_{轻}\times\tilde{B}_{重})\cup(\tilde{A}_{不轻}\times\tilde{B}_{不很重})=(\tilde{A}_{轻}^{T}\circ\tilde{B}_{重})\cup(\tilde{A}_{轻}^{c\ T}\circ\tilde{B}_{不很重})$$

$$=\begin{bmatrix}1\\0.8\\0.6\\0.4\\0.2\end{bmatrix}\circ\begin{bmatrix}0.2 & 0.4 & 0.6 & 0.8 & 1\end{bmatrix}\cup\begin{bmatrix}0\\0.2\\0.4\\0.6\\0.8\end{bmatrix}\circ\begin{bmatrix}0.96 & 0.84 & 0.64 & 0.36 & 0\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}0.2 & 0.4 & 0.6 & 0.8 & 1\\0.2 & 0.4 & 0.6 & 0.8 & 0.8\\0.2 & 0.4 & 0.6 & 0.6 & 0.6\\0.2 & 0.4 & 0.4 & 0.4 & 0.4\\0.2 & 0.2 & 0.2 & 0.2 & 0.2\end{bmatrix}\cup\begin{bmatrix}0 & 0 & 0 & 0 & 0\\0.2 & 0.2 & 0.2 & 0.2 & 0\\0.4 & 0.4 & 0.4 & 0.36 & 0\\0.6 & 0.6 & 0.6 & 0.36 & 0\\0.8 & 0.8 & 0.64 & 0.36 & 0\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}0.2 & 0.4 & 0.6 & 0.8 & 1\\0.2 & 0.4 & 0.6 & 0.8 & 0.8\\0.4 & 0.4 & 0.6 & 0.6 & 0.6\\0.6 & 0.6 & 0.6 & 0.4 & 0.4\\0.8 & 0.8 & 0.64 & 0.36 & 0.2\end{bmatrix}$$

4.4模糊逻辑与推理--模糊条件语句

[x很轻]：$\tilde{A}_{很轻} = H_2(A_{轻})$

$$= (1,\ 0.64,\ 0.36,\ 0.16,\ 0.04)$$

[x很轻]所对应的y的模糊集合：

$$\tilde{B}_1 = \tilde{A}_{很轻} \tilde{\circ} \tilde{R}$$

$$= [1 \quad 0.64 \quad 0.36 \quad 0.16 \quad 0.04] \circ R$$

$$= [0.36 \quad 0.4 \quad 0.6 \quad 0.8 \quad 1]$$

4.4模糊逻辑与推理--模糊条件语句

b 多输入模糊条件句

句型： “若 $\tilde{A}$ 且 $\tilde{B}$ 则 $\tilde{C}$ ”

其中模糊关系 $\tilde{R}$ 为

$$\tilde{R} = (\tilde{A} \times \tilde{B})^{T列} \times \tilde{C}$$

当输入二个 $\tilde{A}_1$ 和 $\tilde{B}_1$ 则有输出 $\tilde{C}_1$ ，它们之间满足

$$\tilde{C}_1 = (\tilde{A}_1 \times \tilde{B}_1)^{T行} \circ \tilde{R}$$

4.4模糊逻辑与推理--模糊条件语句

例：已知 $\tilde{A}=[1 \quad 0.4], \tilde{B}=[0.1 \quad 0.7 \quad 1], \tilde{C}=[0.3 \quad 0.5 \quad 1]$

求 $\tilde{R}$ ？

解：

$$\tilde{A}\times\tilde{B}=\tilde{A}^T\circ\tilde{B}=\begin{bmatrix}1\\0.4\end{bmatrix}\circ[0.1 \quad 0.7 \quad 1]=\begin{bmatrix}0.1 & 0.7 & 1\\0.1 & 0.4 & 0.4\end{bmatrix}$$

$$(\tilde{A}\times\tilde{B})^{T列}=\begin{bmatrix}0.1\\0.7\\1\\0.1\\0.4\\0.4\end{bmatrix}$$

$$\tilde{R}=(\tilde{A}\times\tilde{B})^{T列}\times\tilde{C}=\begin{bmatrix}0.1\\0.7\\1\\0.1\\0.4\\0.4\end{bmatrix}\circ[0.3 \quad 0.5 \quad 1]=\begin{bmatrix}0.1 & 0.1 & 0.1\\0.3 & 0.5 & 0.7\\0.3 & 0.5 & 1\\0.1 & 0.1 & 0.1\\0.3 & 0.4 & 0.4\\0.3 & 0.4 & 0.4\end{bmatrix}$$

4.4模糊逻辑与推理--模糊条件语句

c　多重模糊条件句

句型：　“若$\widetilde{A}_1$则$\widetilde{B}_1$，若$\widetilde{A}_2$则$\widetilde{B}_2$，…，若$\widetilde{B}_n$则$\widetilde{A}_n$　”

其中模糊关系$\widetilde{R}$为

$$\widetilde{R}=(\widetilde{A}_1\times\widetilde{B}_1)+(\widetilde{A}_2\times\widetilde{B}_2)+\cdots+(\widetilde{A}_n\times\widetilde{B}_n)$$

当输 入一个$\widetilde{A}$，则有输出$\widetilde{B}$，它们之间满足

$$\widetilde{B}=\widetilde{A}\circ\widetilde{R}$$

4.4模糊逻辑与推理--模糊条件语句

d　多重多输入模糊条件句

句型：若 $\tilde{A}_1$ 且 $\tilde{B}_1$ 则 $\tilde{C}_1$ ，

若 $\tilde{A}_2$ 且 $\tilde{B}_2$ 则 $\tilde{C}_2$，

…，

若 $\tilde{A}_n$ 且 $\tilde{B}_n$ 则 $\tilde{C}_n$ 。

其中模糊关系 $\tilde{R}$ 为

$$\tilde{R}=(\tilde{A}_1\times\tilde{B}_1\times\tilde{C}_1)+(\tilde{A}_2\times\tilde{B}_2\times\tilde{C}_2)+\cdots+(\tilde{A}_n\times\tilde{B}_n\times\tilde{C}_n)$$

当输入 $\tilde{A}$ 和 $\tilde{B}$，则有输出 $\tilde{C}$ ，它们之间满足

$$\tilde{C}=(\tilde{A}\times\tilde{B})^{T\text{行}}\circ\tilde{R}$$

举例1

举例

小车倒立摆受控系统——语言描述

误差	$e(t)$
误差的变化	$\frac{d}{dt}e(t)$
作用力	$u(t)$

语言变量

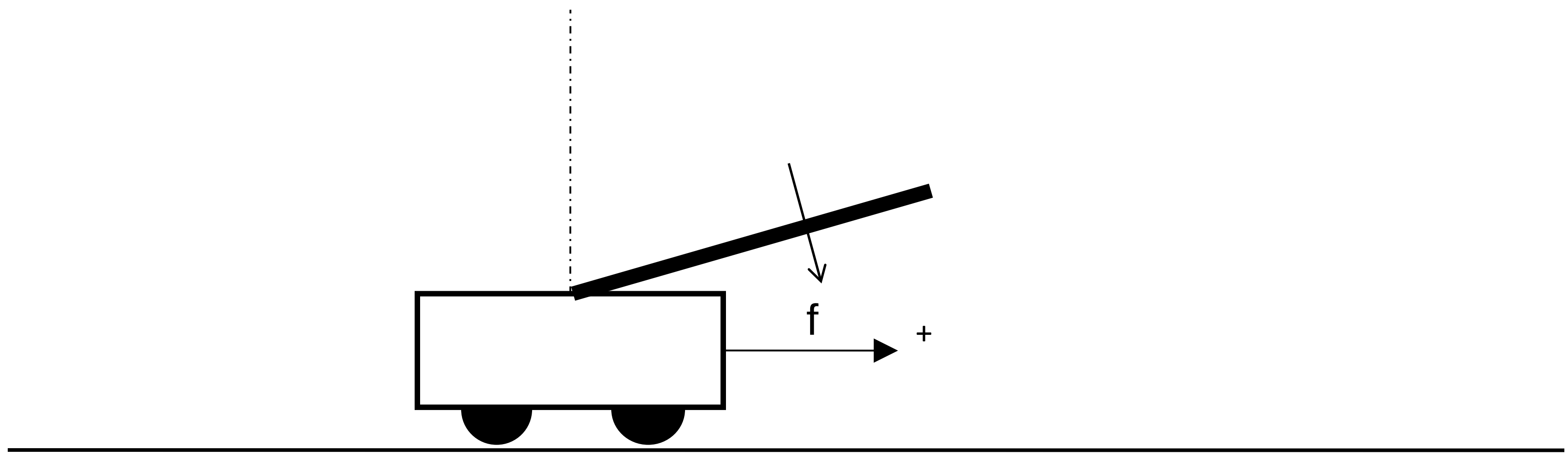
语言变量值	整数简洁表示
负大	-2
负小	-1
零	0
正小	1
正大	2

倒立摆位置描述：

① 误差是正大
② 误差是负小
③ 误差是零
④ 误差为正大且误差变化为正小
⑤ 误差为负小且误差变化为正大

小车倒立摆受控系统——模糊推理

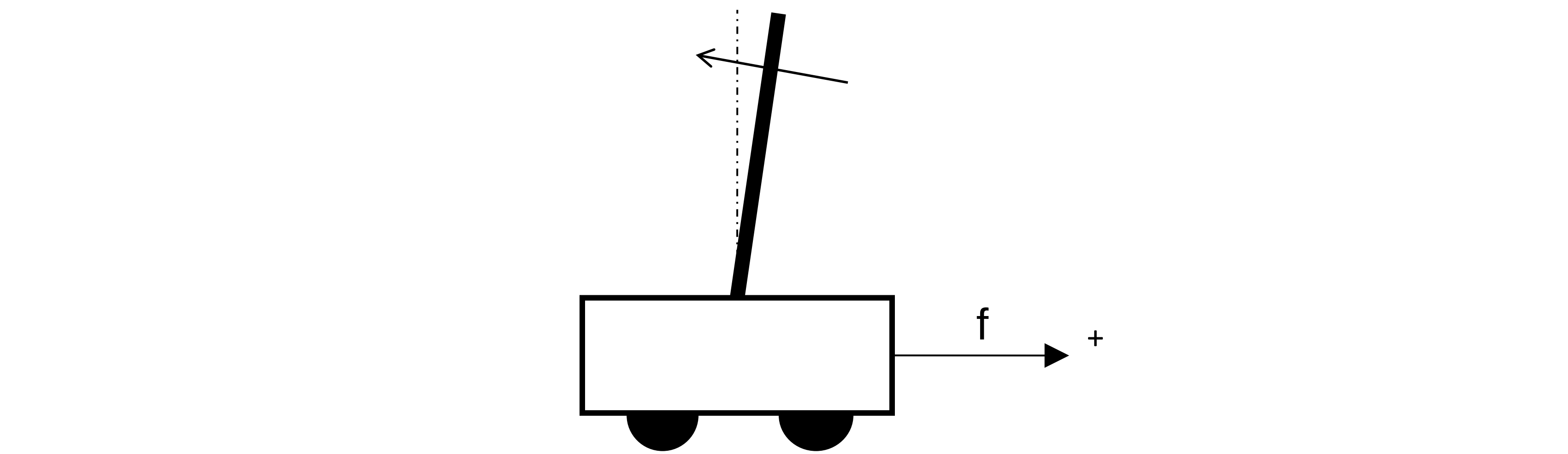
模糊推理： If 误差为负大 且误差变化为负大
Then 作用力为正大



注意：正方向不唯一（此处向右、逆时针为正），可任意设定；
影响推理结论部分的表达；
对控制效果无影响.

小车倒立摆受控系统——模糊推理

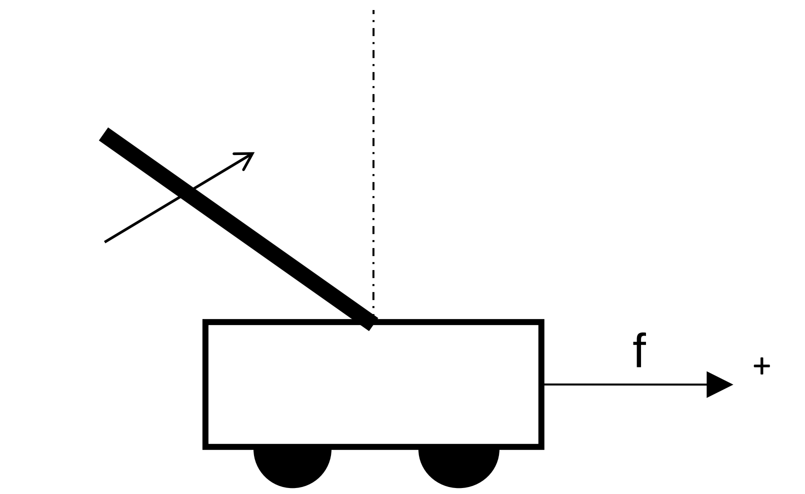
模糊推理： If 误差为零 且误差变化为正小，
Then 作用力为负小



误差是零（比正小或负小更趋近于零）
逆时针转动状态，施加向左的作用力，使其向中

小车倒立摆受控系统——模糊推理

模糊推理：　If 误差为正大 且误差变化为负小，
Then 控制力为负小



单摆在左已以顺时针转动
施加负小（向左较小）的作用力即可

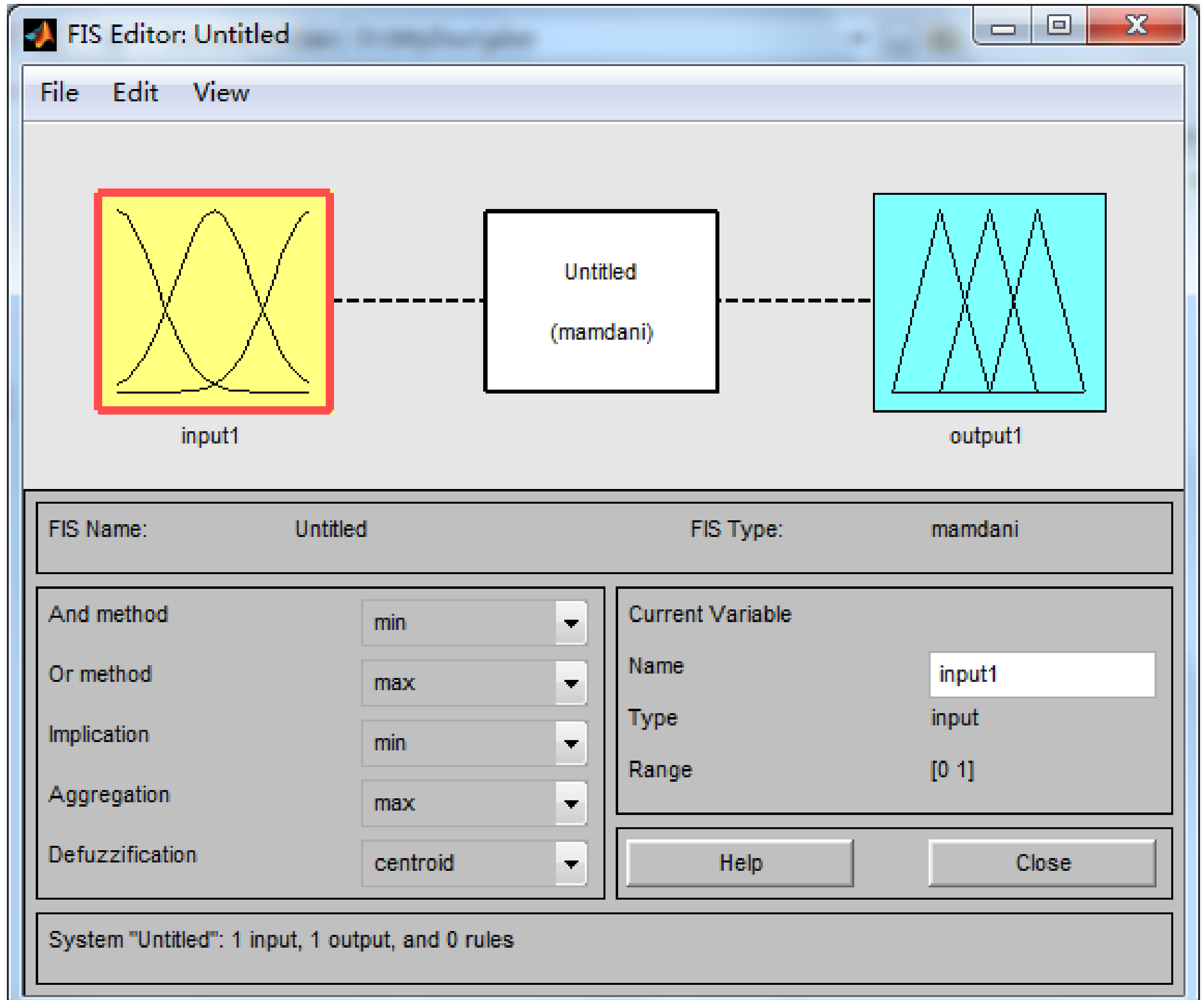
模糊控制表

F		DE				
		-2	-1	0	1	2
E	-2	2	2	2	1	0
	-1	2	2	1	0	-1
	0	2	1	0	-1	-2
	1	1	0	-1	-2	-2
	2	0	-1	-2	-2	-2

MATLAB 教程

MATLAB Fuzzy Toolbox 及 Simulink 演示

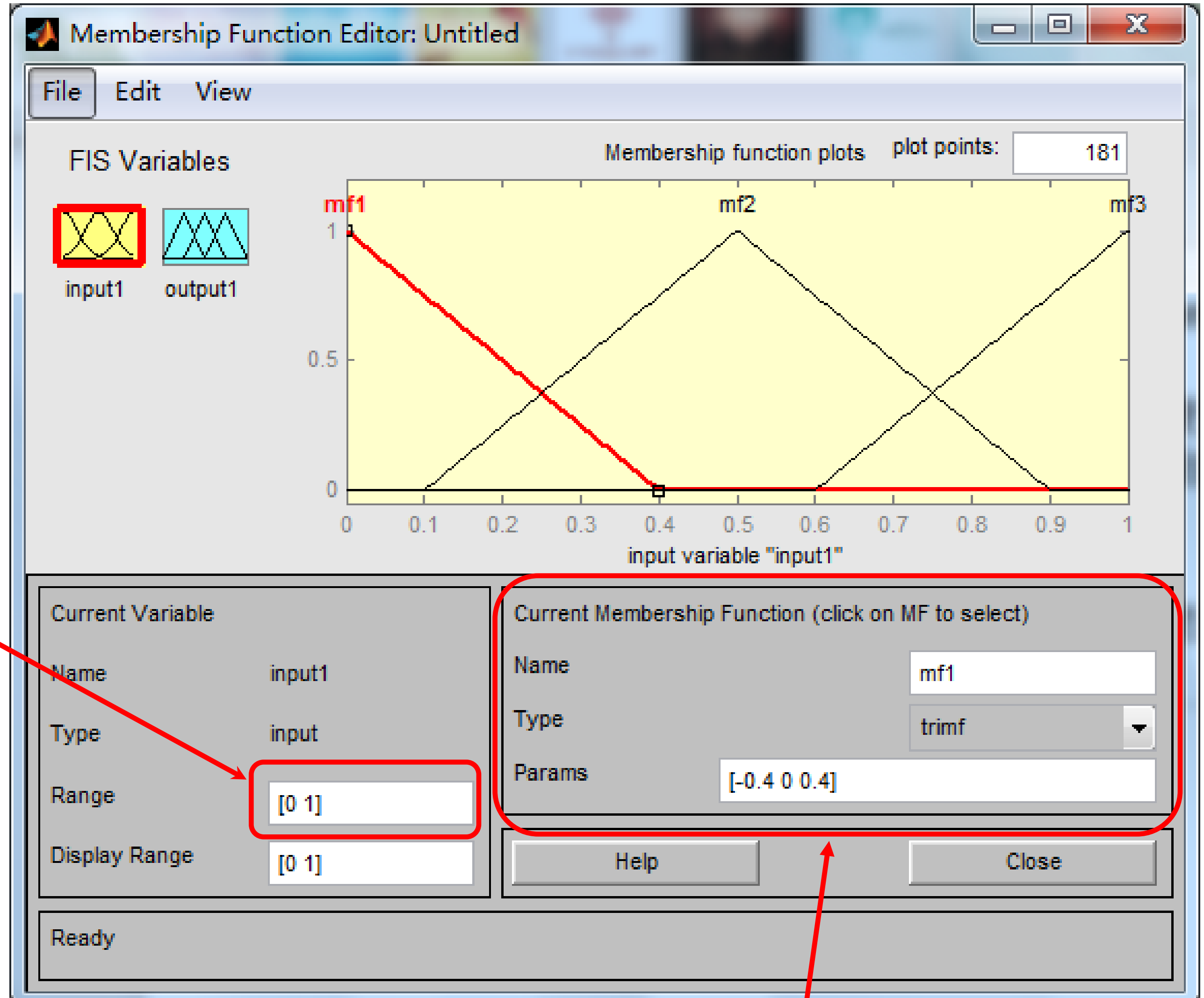
本例中使用matlab 2010b版本
在command窗口中输入“fuzzy”,弹出对话框



MATLAB Fuzzy Toolbox 及 Simulink 演示

- 在File-NewFIS中可以选择模糊模型，分为Mamdani模型和Sugeno；
- 在Edit-Add Variable 中可以增加输入变量和输出变量的个数；
- 在Membership Function中可以设置变量的隶属度函数；在Rules中设置模糊规则；
- 在View中可以将模型可视化表示出来；
- 另外，在上图界面中双击input可以直接进入隶属度函数编辑器。

MATLAB Fuzzy Toolbox 及 Simulink 演示

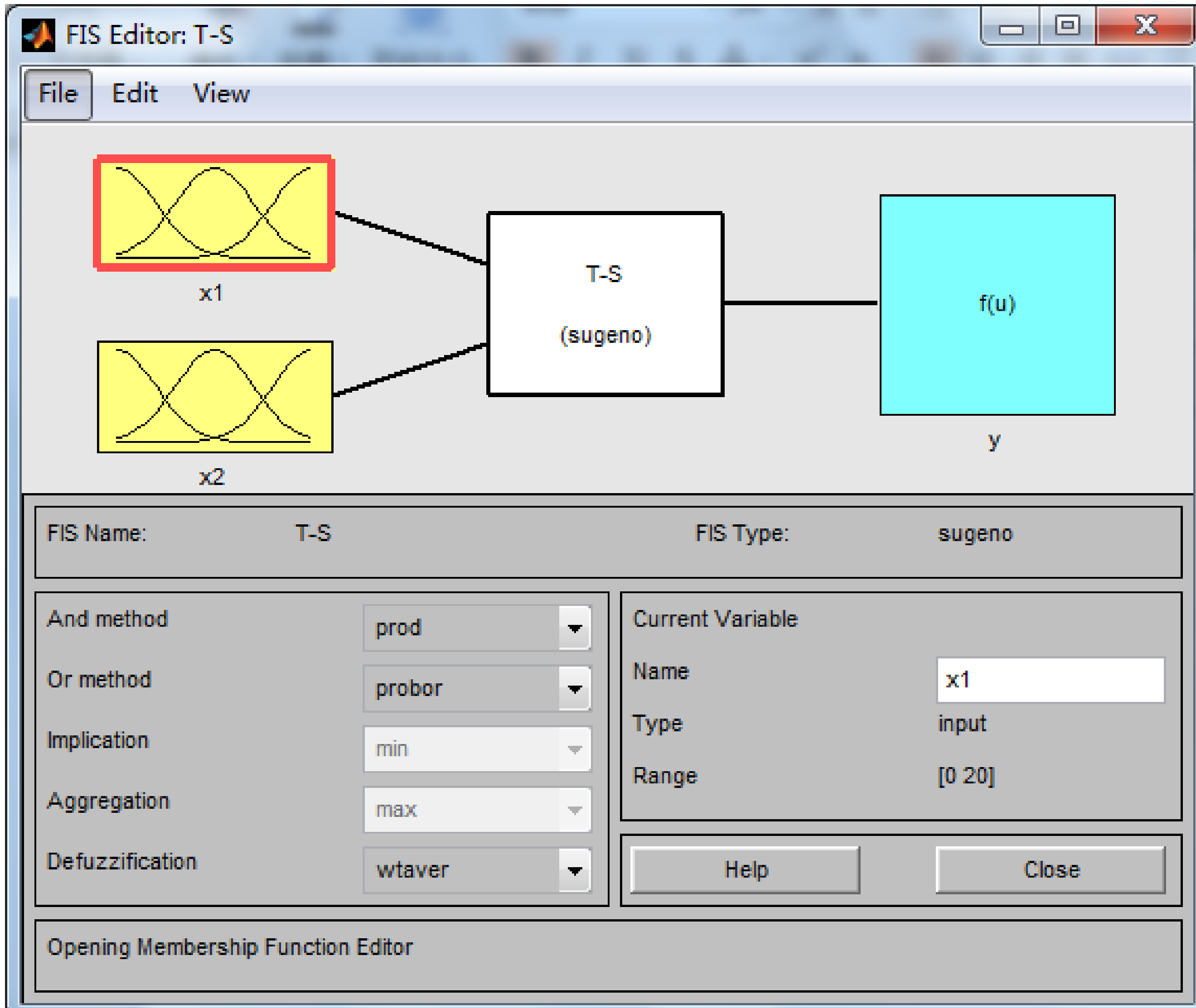


修改变量阈值

修改隶属度函数名称、形状、参数

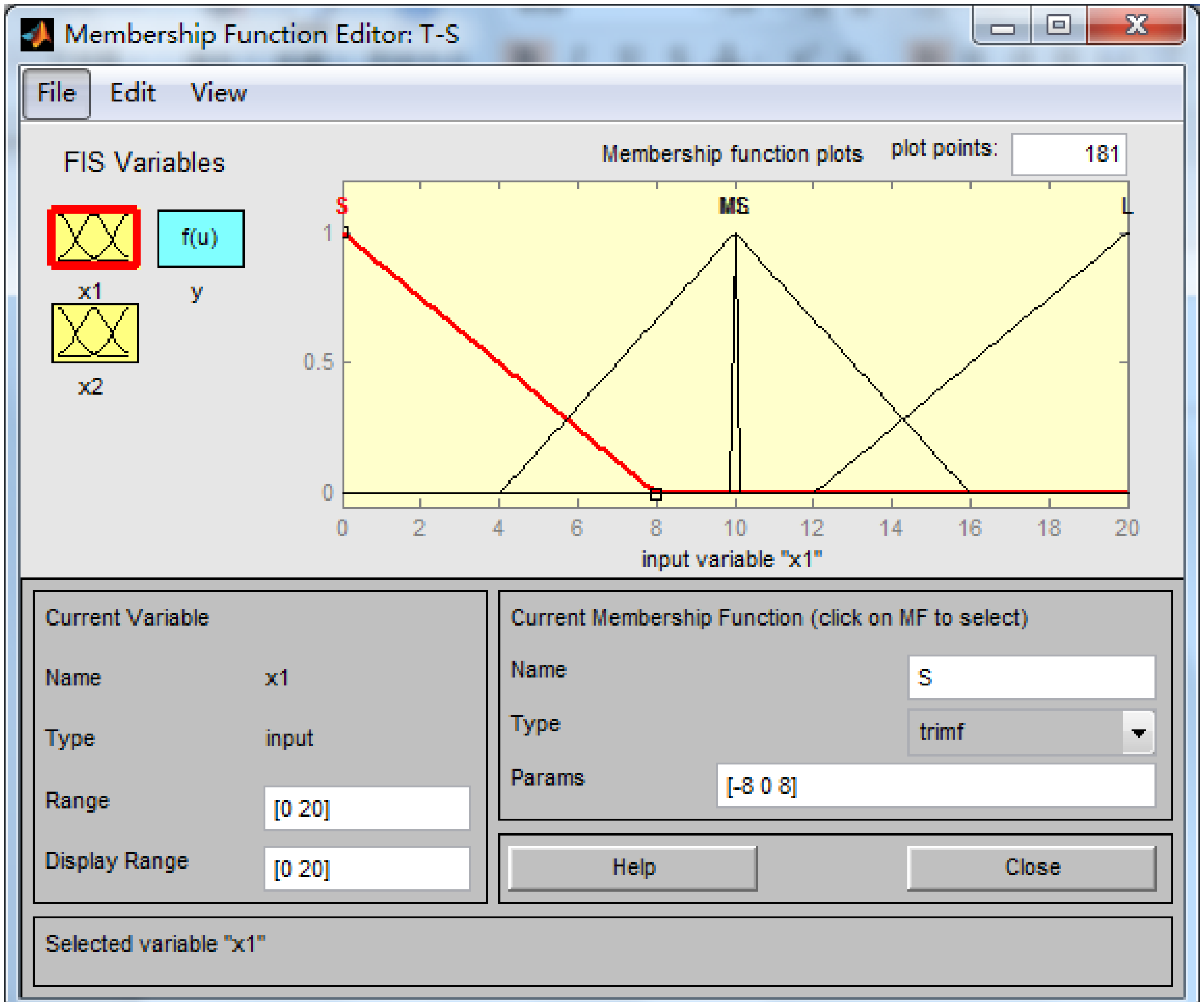
MATLAB Fuzzy Toolbox 及 Simulink 演示

例1 如图新建模型，增加输入变量并修改变量名



MATLAB Fuzzy Toolbox 及 Simulink 演示

如图设置隶属度函数



[Input1]

Name='x1'

Range=[0 20]

NumMFs=4

MF1='S':'trimf',[-8 0 8]

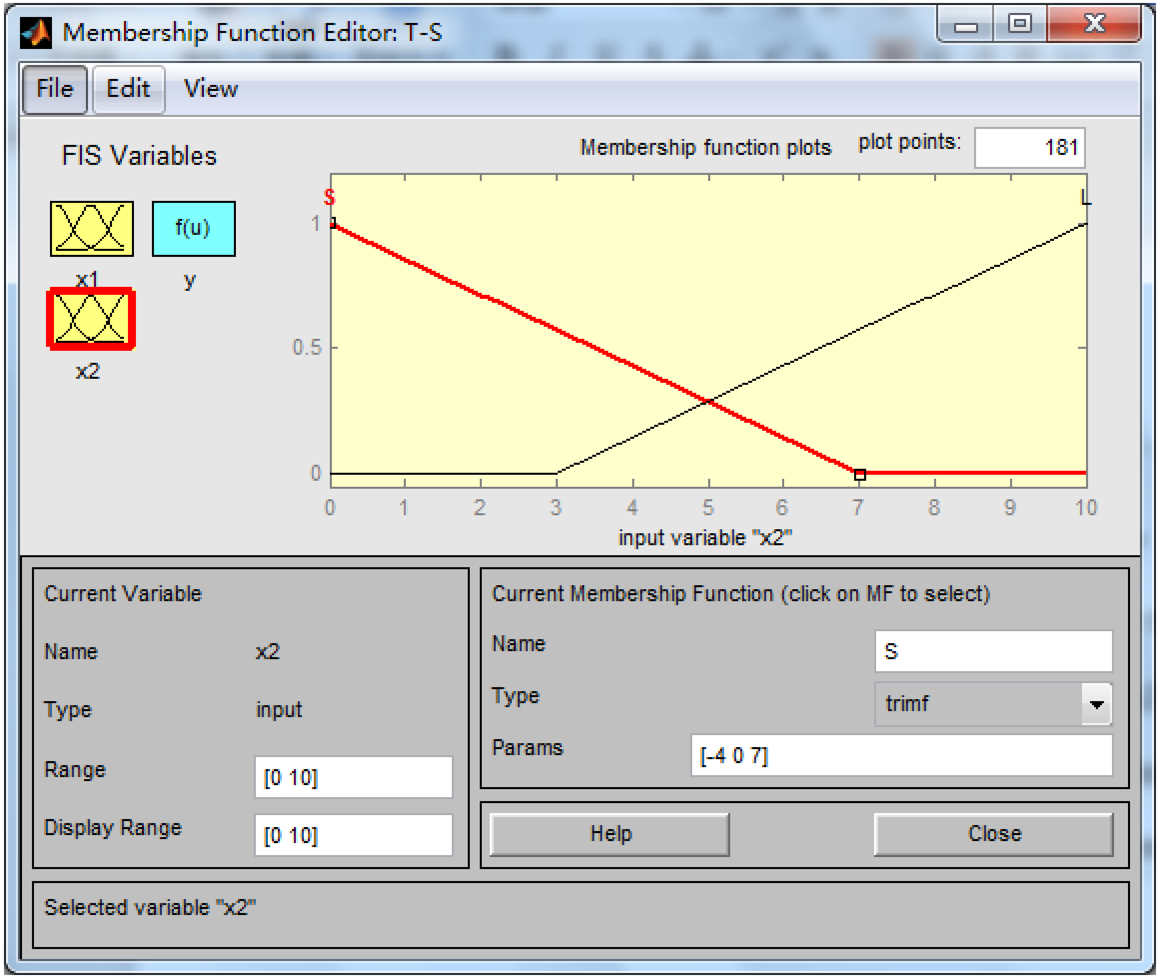
MF2='MS':'trimf',[4 10 10]

MF3='L':'trimf',[12 20 28]

MF4='ML':'trimf',[10 10 16]

MATLAB Fuzzy Toolbox 及 Simulink 演示

如图设置隶属度函数



[Input2]

Name='x2'

Range=[0 10]

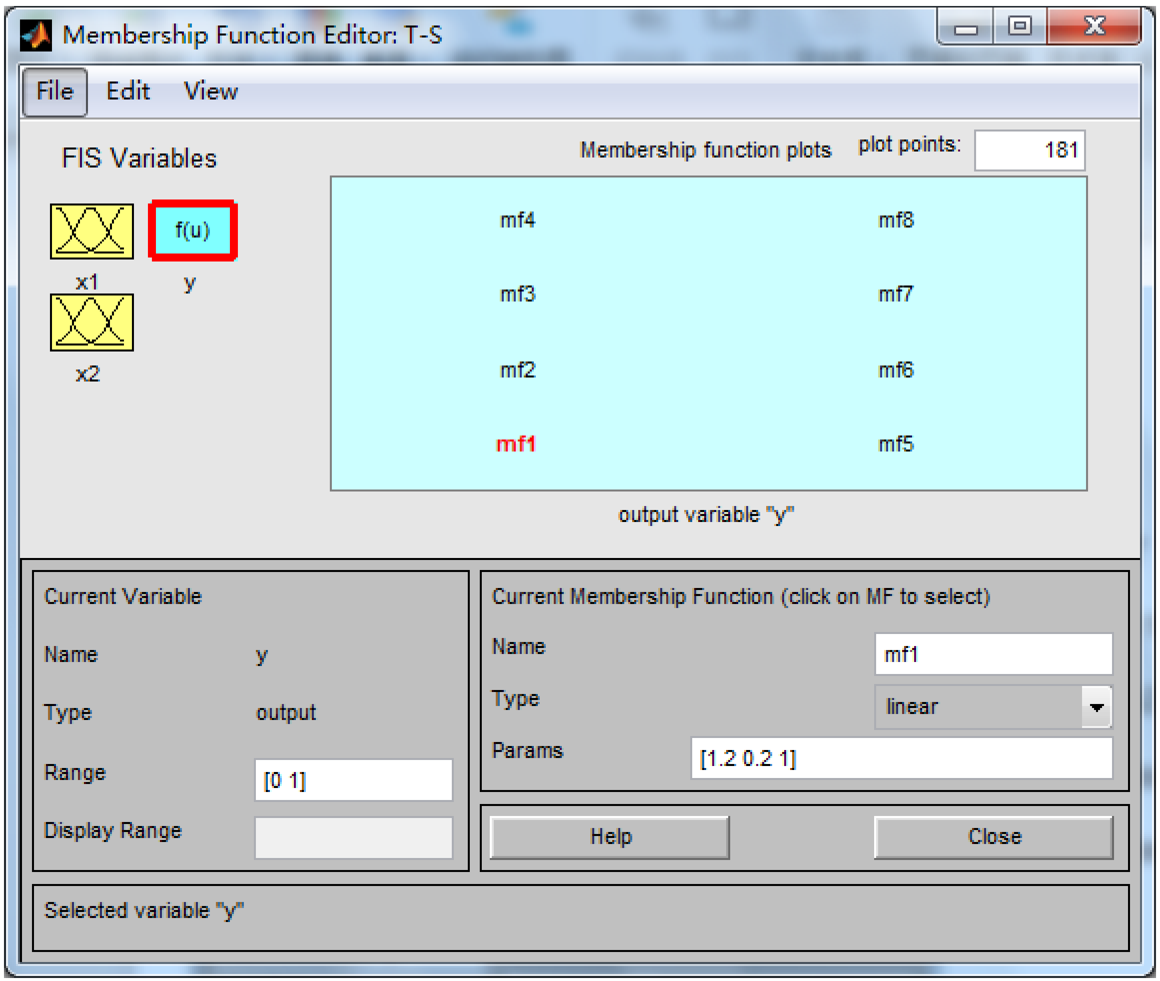
NumMFs=2

MF1='S':'trimf',[-4 0 7]

MF2='L':'trimf',[3 10 14]

MATLAB Fuzzy Toolbox 及 Simulink 演示

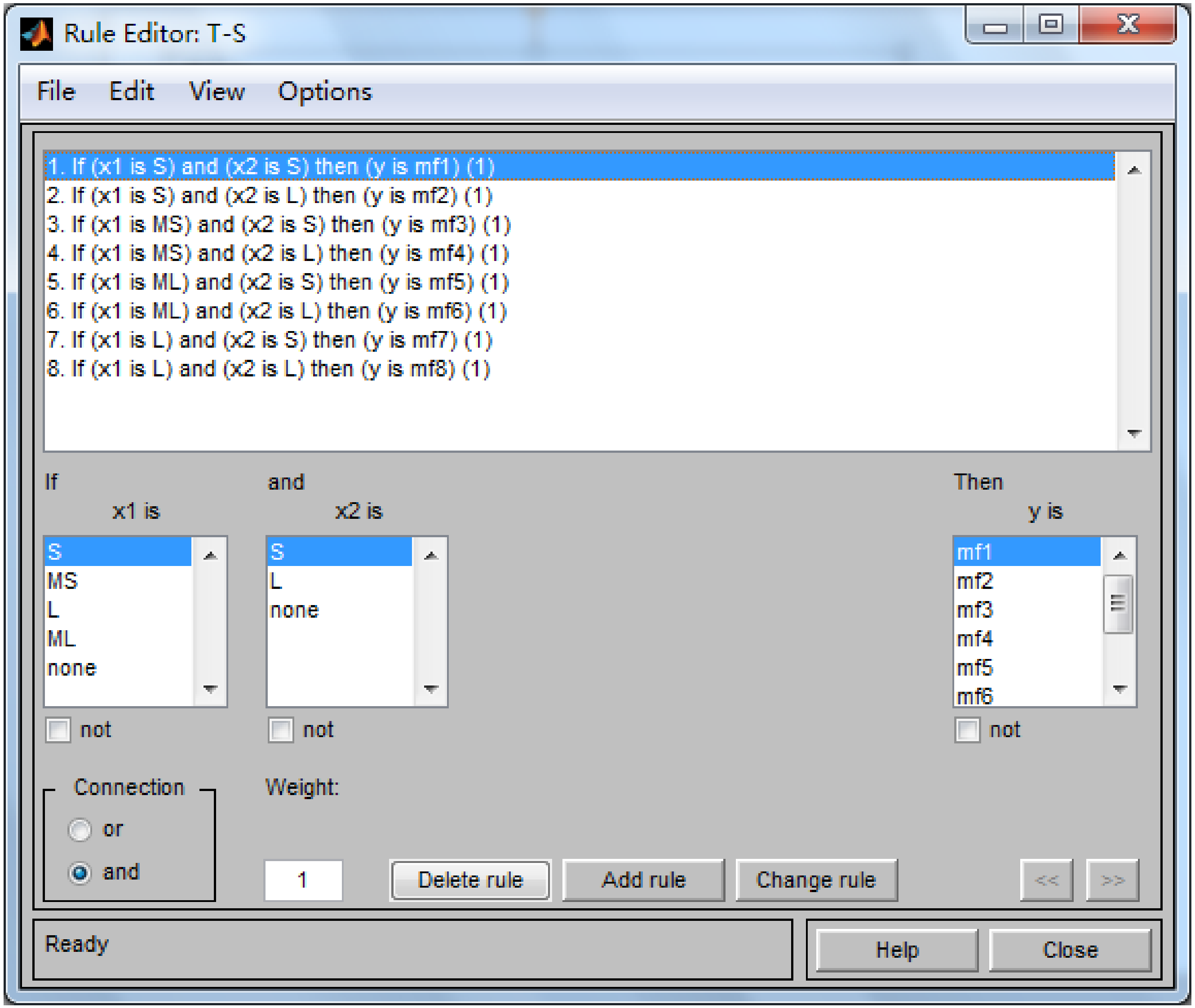
如图在Edit-Add MFs中增加输出函数，并设置输出变量。
mf1参数含义: $y=1.2X_1+0.2X_2+1$



[Output1]
Name='y'
Range=[0 1]
NumMFs=8
MF1='mf1':'linear',[1.2 0.2 1]
MF2='mf2':'linear',[2.5 2.1 4]
MF3='mf3':'linear',[1.7 1.3 2]
MF4='mf4':'linear',[0.5 2.4 8]
MF5='mf5':'linear',[1.7 1.3 2]
MF6='mf6':'linear',[0.5 2.4 8]
MF7='mf7':'linear',[0.3 3 5]
MF8='mf8':'linear',[0.9 0.9 7]

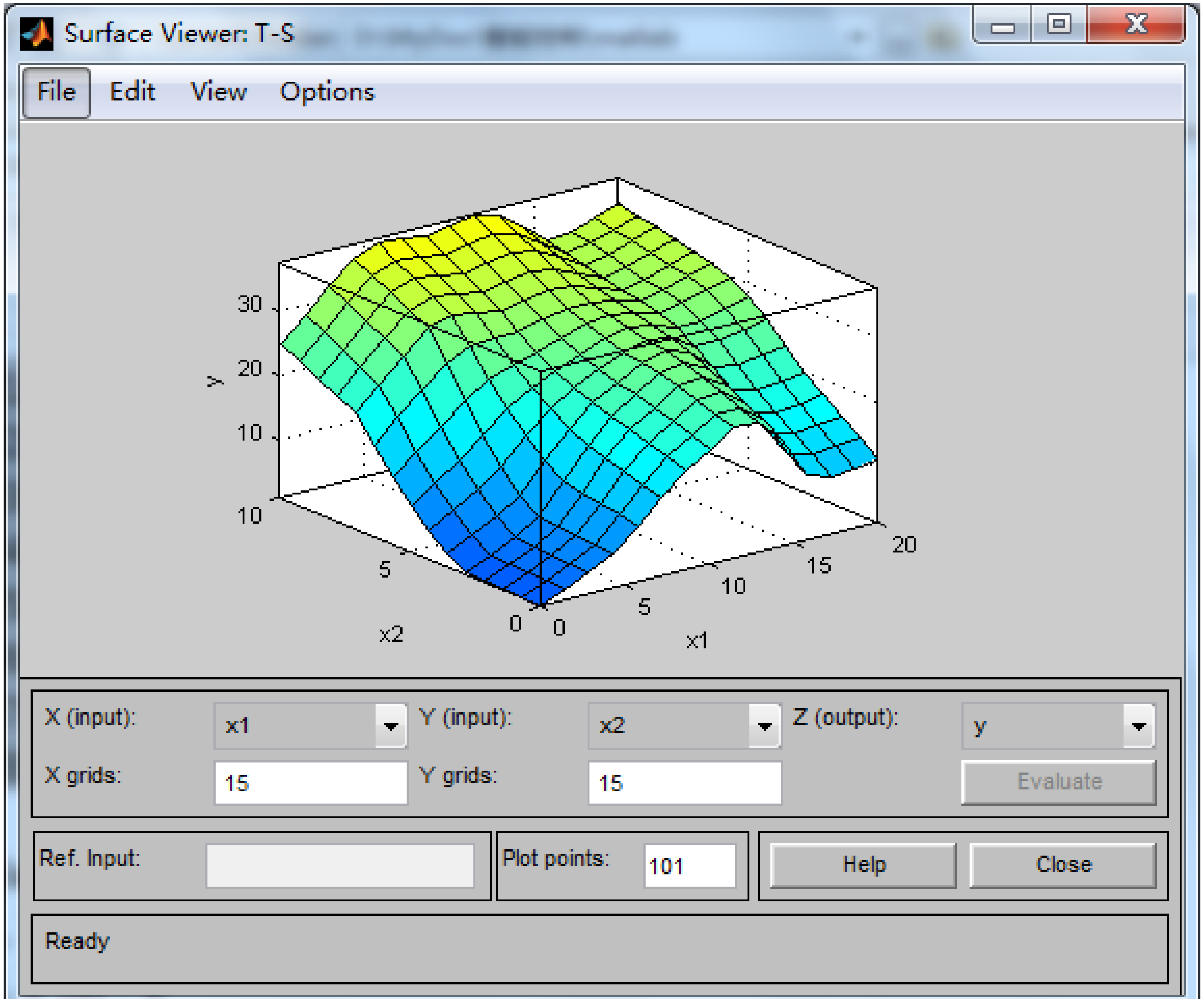
MATLAB Fuzzy Toolbox 及 Simulink 演示

如图在Edit-Rules中设置模糊规则



MATLAB Fuzzy Toolbox 及 Simulink 演示

在View-Surface中可以看到模糊模型



欢迎提问和指正

谢谢!