ЛЕКЦИЯ 7

ЛИНЕЙНЫЕ И КВАЗИЛИНЕЙНЫЕ УРАВНЕНИЯ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ ПЕРВОГО ПОРЯДКА

Пусть $x = (x_1, x_2, ..., x_n) \in R^n$ и $z(x_1, x_2, ..., x_n)$ функция n переменных.

Определение. Уравнение вида

$$X_1(x_1, x_2, ..., x_n, z)\frac{\partial z}{\partial x_1} + X_2(x_1, x_2, ..., x_n, z)\frac{\partial z}{\partial x_2} + ... + X_n(x_1, x_2, ..., x_n, z)\frac{\partial z}{\partial x_n} = R(x_1, x_2, ..., x_n, z) \quad (1)$$

называют ***квазилинейным уравнением в частных производных первого порядка***.

Здесь $z(x_1, x_2, ..., x_n)$ - искомая функция, $X_i(x_1, x_2, ..., x_n, z),\ \mathrm{i} = \overline{1, n}$, $R(x_1, x_2, ..., x_n, z)$ - некоторые заданные функции, непрерывно дифференцируемые в некоторой области переменных $(x_1, x_2, ..., x_n, z)$, и функции $X_i(x_1, x_2, ..., x_n, z),\ \mathrm{i} = \overline{1, n}$ одновременно не обращаются в ноль ни в одной точке рассматриваемой области.

Определение можно сформулировать и иначе: уравнение в частных производных называется ***квазилинейным уравнением***, если оно линейно по отношению к старшим производным.

Если функции $X_i,\ \mathrm{i} = \overline{1, n}$ не зависят от z, т.е. $X_i(x_1, x_2, ..., x_n),\ \mathrm{i} = \overline{1, n}$ и $R(x_1, x_2, ..., x_n, z) \equiv 0$, то уравнение (1) имеет вид

$$X_1(x_1, x_2, ..., x_n)\frac{\partial z}{\partial x_1} + X_2(x_1, x_2, ..., x_n)\frac{\partial z}{\partial x_2} + ... + X_n(x_1, x_2, ..., x_n)\frac{\partial z}{\partial x_n} = 0 \quad (2)$$

В этом случае уравнение (2) называется ***линейным однородным уравнением в частных производных первого порядка***, относительно неизвестной функции $z(x_1, x_2, ..., x_n)$.

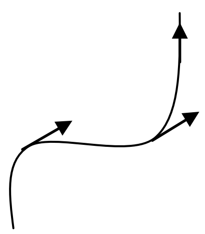
ГЕОМЕТРИЧЕСКАЯ ИНТЕРПРИТАЦИЯ УРАВНЕНИЙ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ ПЕРВОГО ПОРЯДКА

Рассмотрим непрерывное векторное поле $\overline{F}(x, y, z)$

$$\overline{F}(x, y, z) = P(x, y, z)\overline{i} + Q(x, y, z)\overline{j} + R(x, y, z)\overline{k}.$$

Функции $P(x, y, z),\ Q(x, y, z),\ R(x, y, z)$ одновременно не обращаются в ноль и непрерывны.

Определение. Некоторая линия l называется ***векторной линией поля*** $\overline{F}(x, y, z)$, если в каждой точке она имеет касательную совпадающую с направлением поля в этой точке



Тогда направление касательной к кривой l имеет вид

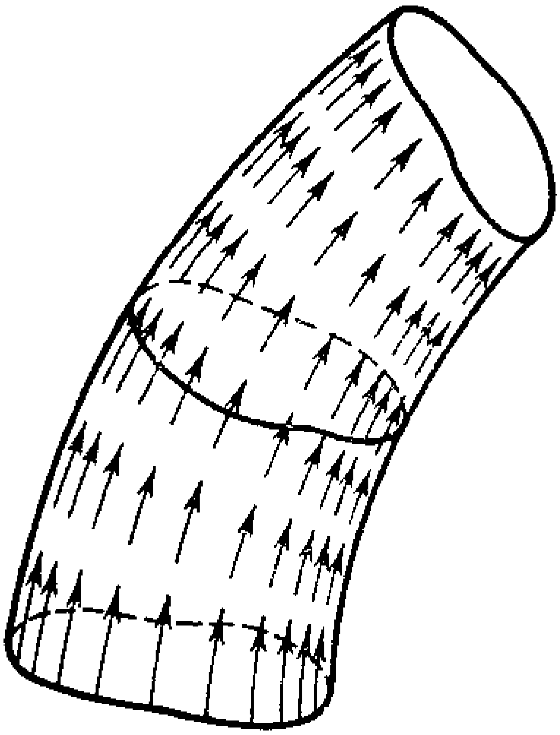
$$\bar{\tau} = dx \cdot \bar{i} + dy \cdot \bar{j} + dz \cdot \bar{k}$$

Т.к. вектор $\bar{\tau}$ параллелен $\bar{F}(x, y, z)$, то их координаты пропорциональны

$$\frac{dx}{P(x, y, z)} = \frac{dy}{Q(x, y, z)} = \frac{dz}{R(x, y, z)} \tag{3}$$

Система (3) это ***система уравнений векторных линий***, являющаяся системой в симметрической форме.

Определение. Поверхности, составленные из векторных линий, точнее, поверхности, целиком содержащие векторные линии, имеющие хотя бы одну общую точку с поверхностью, называются ***векторными поверхностями***.



Поставим задачу: пусть задано непрерывное векторное поле. Найти векторные поверхности этого поля.

При этом возможны два случая:

a) Мы сможем найти уравнение поверхности в явном виде, т.е. $z = f(x, y)$;
b) Уравнение векторной поверхности удастся найти в неявном виде, т.е. $u(x, y, z) = 0$.

Итак, пусть задано поле $\bar{F}(x, y, z) = P(x, y, z)\bar{i} + Q(x, y, z)\bar{j} + R(x, y, z)\bar{k}$.

Очевидно, векторные поверхности можно получить, рассматривая множество точек, лежащих на произвольно выбранном, непрерывно зависящем от параметра, однопараметрическом семействе векторных линий. Векторная поверхность характеризуется тем, что вектор $\bar{n}$, направленный по нормали к поверхности, в любой точке поверхности ортогонален вектору поля $\bar{F}(x, y, z)$:

$$(\bar{n}, \bar{F}) = 0. \tag{4}$$

В случаях a) и b) векторf нормали имеют вид:

a) $\bar{n} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \bar{i} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \bar{j} - \bar{k}$;

b) $\bar{n} = \frac{\partial u}{\partial x} \cdot \bar{i} + \frac{\partial u}{\partial y} \cdot \bar{j} + \frac{\partial u}{\partial z} \cdot \bar{k}$.

И условие (4) в этих случаях принимает вид:

a) $P(x, y, z)\frac{\partial z}{\partial x} + Q(x, y, z)\frac{\partial z}{\partial y} = R(x, y, z)$; (5)

b) $P(x, y, z)\frac{\partial u}{\partial x} + Q(x, y, z)\frac{\partial u}{\partial y} + R(x, y, z)\frac{\partial u}{\partial z} = 0$. (6)

Итак, для нахождения векторных поверхностей некоторого векторного поля, мы приходим либо к решению квазилинейного уравнениям в частных производных первого порядка, либо линейного уравнениям в частных производных первого порядка в зависимости от того ищем ли мы эту поверхность в явной или неявной формах.

Так как векторные поверхности могут быть составлены из векторных линий, то интегрирование уравнения (5) (или (6)) сводится к интегрированию системы обыкновенных дифференциальных уравнений векторных линий.

Составляем систему дифференциальных уравнений векторных линий

$$\frac{dx}{P(x,y,z)}=\frac{dy}{Q(x,y,z)}=\frac{dz}{R(x,y,z)} \quad . \tag{3}$$

Пусть $\psi_1(x,y,z)=\mathrm{C}_1$ и $\psi_2(x,y,z)=\mathrm{C}_2$ два независимых первых интеграла системы (3). Выделяем из двухпараметрического семейства векторных линий $\psi_1(x,y,z)=\mathrm{C}_1$ и $\psi_2(x,y,z)=\mathrm{C}_2$, называемых характеристиками уравнения (5) (или (6)), произвольным способом однопараметрическое семейство, устанавливая какую-нибудь непрерывную зависимость $\Phi(\mathrm{C}_1,\mathrm{C}_2)=0$ между параметрами C_1 и C_2. Исключая из системы

$$\begin{cases}\psi_1(x,y,z)=\mathrm{C}_1,\\ \psi_2(x,y,z)=\mathrm{C}_2,\\ \Phi(\mathrm{C}_1,\mathrm{C}_2)=0\end{cases}$$

параметры C_1 и C_2, получаем исковое уравнение векторных поверхностей:

$$\Phi(\psi_1(x,y,z),\psi_2(x,y,z))=0\,,$$

где Φ — произвольная функция. Тем самым найден интеграл квазилинейного уравнения (5), зависящий от произвольной функции.

Определение. ***Задача Коши*** для линейного однородного и квазилинейного уравнения в частных производных первого порядка ставится так:

Найти векторную поверхность, которая проходит через заданную линию в пространстве. Если эта линия не является векторной линией, то задача Коши имеет единственное решение. Если же заданная линия векторная, то решений может быть бесконечно много.

Линия l может быть задана как в параметрической форме, так и в виде пересечения двух поверхностей

$$l=\begin{cases}\Phi_1\;\;x,y,z\;\;=0,\\ \Phi_2\;\;x,y,z\;\;=0.\end{cases}$$

Тогда для решения задачи Коши нужно составить систему из четырех уравнений

$$\begin{cases}\psi_1(x,y,z)=\mathrm{C}_1,\\ \psi_2(x,y,z)=\mathrm{C}_2,\\ \Phi_1\;\;x,y,z\;\;=0,\\ \Phi_2\;\;x,y,z\;\;=0.\end{cases}$$

В результате исключения из этой системы переменных x,y,z получим искомую зависимость

$$\Phi(\mathrm{C}_1,\mathrm{C}_2)=0\,,$$

или

$$\Phi(\psi_1(x,y,z),\psi_2(x,y,z))=0\ .$$

Примеры.

1168. $(x+2y)\dfrac{\partial z}{\partial x}-y\dfrac{\partial z}{\partial y}=0$.

Решение. Это линейное однородное уравнение в частных производных первого порядка. Составим соответствующее характеристическое уравнение (система (3), см. лекцию 7)

$$\frac{dx}{x+2y}=\frac{dy}{-y}\ .$$

Составим комбинацию

$$\frac{dx+dy}{x+y}=\frac{dy}{-y},$$

интегрирую которую, получим

$$\ln|x+y|=-\ln|y|+\ln C\ .$$

Первый интеграл имеет вид

$$(x+y)y=C\ .$$

Тогда решение имеет вид

$$z=f((x+y)y)\ .$$

Литература

1. Эльсгольц Л.Е. Дифференциальные уравнения и вариаионное исчисление. Москва: Наука. 1965, стр. 241-247.

2. Филиппов А.Ф. Введение в теорию дифференциальных уравнений. Москва: Ленинград, 2015.-240с., стр. 221-223.

3. Матвеев М.А. Методы интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений. Москва: Высшая школа, стр. 539-540.