# Numération binaire

## Capacités attendues

- ✓ Écriture d'un entier positif dans une base b $\geq 2$ : passer de la représentation d'une base dans une autre.
  (Les bases 2, 10 et 16 sont privilégiées.)

La numération usuelle est une numération par position : à chaque chiffre correspond un « poids », d'autant plus élevé qu'il est situé à gauche. Par exemple pour le nombre $496$ :

- le chiffre $4$ est le chiffre des centaines , de poids $100 = 10^2$ ;
- le chiffe $9$ est le chiffre des dizaines , de poids $10 = 10^1$ ;
- le chiffre $6$ est le chiffre des unités , de poids $1 = 10^0$ .

En résumé, on peut écrire que : $496 = 4 \times 10^2 + 9 \times 10^1 + 6 \times 10^0$ .

Le rôle des puissances de 10 donne le nom à ce système de numération, appelé système décimal .

Il utilise les 10 chiffres que nous connaissons bien.

## 1 Conversion binaire → décimal

Le système binaire est fondé lui sur les puissances de 2 , et il utilise 2 chiffres, à savoir 0 et 1 .

Par exemple :

$$1\,1111\,0000_{\,2} = \mathbf{1} \times 2^8 + \mathbf{1} \times 2^7 + \mathbf{1} \times 2^6 + \mathbf{1} \times 2^5 + \mathbf{1} \times 2^4 + \mathbf{0} \times 2^3 + \mathbf{0} \times 2^2 + \mathbf{0} \times 2^1 + \mathbf{0} \times 2^0$$

Pour convertir ce nombre dans le système décimal, il est utile de connaître les puissances de $2$.

| | | | |
|---|---|---|---|
| $2^0 =$ | 1 | $2^8 =$ | 256 |
| $2^1 =$ | 2 | $2^9 =$ | 512 |
| $2^2 =$ | 4 | $2^{10} =$ | 1024 |
| $2^3 =$ | 8 | $2^{11} =$ | 2048 |
| $2^4 =$ | 16 | $2^{12} =$ | 4096 |
| $2^5 =$ | 32 | $2^{13} =$ | 8192 |
| $2^6 =$ | 64 | $2^{14} =$ | 16384 |
| $2^7 =$ | 128 | $2^{15} =$ | 32768 |

Ainsi : $1\,1111\,0000_{\,2} = 2^8 + 2^7 + 2^6 + 2^5 + 2^4 = 256 + 128 + 64 + 32 + 16 = 496$

### binaire → décimal

- Écrire sous chaque chiffre du nombre binaire la puissance de 2 correspondante en commençant par la droite à partir de zéro ;
- Multiplier chaque puissance de 2 par 0 ou 1 selon le chiffre sous lequel elle est ;
- Additionner les précédents résultats pour trouver le total en base 10.

**Exemple :** convertissons $1001$ en décimal

$$\begin{array}{cccc} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 \times 2^3 & 0 \times 2^2 & 0 \times 2^1 & 1 \times 2^0 \end{array}$$

qui se traduit par : $1 \times 2^3 + 1 \times 2^0 = 8 + 1 = 9$

**Exercice 1**

Déterminer les valeurs décimales des nombres ci-dessous.

| | | | |
|---|---|---|---|
| $1_2 =$ | 1 | $10_2 =$ | 2 |
| $11_2 =$ | 3 | $100_2 =$ | 4 |
| $1001_2 =$ | 9 | $1011_2 =$ | 11 |
| $1101_2 =$ | 13 | $1110_2 =$ | 14 |
| $1000\,0000_2 =$ | 128 | $1010\,0000_2 =$ | 160 |
| $1000\,1101_2 =$ | 141 | $1010\,1001_2 =$ | 169 |
| $1111_2 =$ | 15 | $1\,1111_2 =$ | 31 |
| $11\,1111_2 =$ | 63 | $1111\,1111_2 =$ | 255 |

## 2 Opérations en binaires

**Exercice 2**

Effectuer les opérations ci-dessous et vérifier les résultats obtenus.

$$\begin{array}{ccccc} & 1 & 0 & 1 & 0_2 \\ + & 1 & 0 & 0 & 1_2 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}$$

(10+9 = 19)

$$\begin{array}{ccccc} & 1 & 0 & 1 & 1_2 \\ + & 1 & 0 & 0 & 1_2 \\ \hline 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}$$

(11+9 = 20)

$$\begin{array}{ccccc} & 1 & 0 & 1 & 1_2 \\ + & 1 & 0 & 1 & 1_2 \\ \hline 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}$$

(11+11 = 22)

$$\begin{array}{ccccc} & 1 & 1 & 1 & 1_2 \\ + & & & & 1_2 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

(15+1 = 16)

**Exercice 3**

Effectuer les opérations ci-dessous et vérifier les résultats obtenus.

$$\begin{array}{ccccc} & 1 & 0 & 1 & 1_2 \\ - & 1 & 0 & 0 & 1_2 \\ \hline & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}$$

(11-9 = 2)

$$\begin{array}{ccccc} & 1 & 0 & 1 & 0_2 \\ - & & 1 & 1 & 1_2 \\ \hline & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}$$

(10-7 = 3)

## 3 Conversion décimal $\rightarrow$ binaire

### 3.1 Méthode 1

**Exercice 4**

Convertir les nombres ci-dessous dans le système binaire.

| | | | |
|---|---|---|---|
| $4 =$ | $100$ | $5 =$ | $101$ |
| $6 =$ | $110$ | $9 =$ | $1001$ |
| $16 =$ | $1\,0000$ | $32 =$ | $10\,0000$ |
| $64 =$ | $100\,0000$ | $128 =$ | $1000\,0000$ |
| $33 =$ | $10\,0001$ | $65 =$ | $100\,0001$ |
| $66 =$ | $100\,0010$ | $131 =$ | $1000\,0011$ |
| $150 =$ | $1001\,0110$ | $180 =$ | $1011\,0100$ |
| $220 =$ | $1101\,1100$ | $240 =$ | $1111\,0000$ |

## 3.2 Méthode 2

L'écriture binaire d'un nombre s'obtient en effectuant des divisions successives par 2.
Explication sur un exemple :

$$\begin{array}{rcllc}
496 & = & 2 \times 248 & + & \mathbf{0} \\
248 & = & 2 \times 124 & + & \mathbf{0} \\
124 & = & 2 \times 62 & + & \mathbf{0} \\
62 & = & 2 \times 31 & + & \mathbf{0} \\
31 & = & 2 \times 15 & + & \mathbf{1} \\
15 & = & 2 \times 7 & + & \mathbf{1} \\
7 & = & 2 \times 3 & + & \mathbf{1} \\
3 & = & 2 \times 1 & + & \mathbf{1} \\
1 & = & 2 \times 0 & + & \mathbf{1}
\end{array}$$

L'écriture binaire de 496 s'obtient alors en "écrivant les restes à l'envers"
$496_{10} = 1\,1111\,0000_2$.

**Exercice 5**

Déterminer avec cette méthode l'écriture binaire de 903.

$903 = 2 \times 451 + 1$
$451 = 2 \times 225 + 1$
$225 = 2 \times 112 + 1$
$112 = 2 \times 56 + 0$
$56 = 2 \times 28 + 0$
$28 = 2 \times 14 + 0$
$14 = 2 \times 7 + 0$
$7 = 2 \times 3 + 1$
$3 = 2 \times 1 + 1$
$1 = 2 \times 0 + 1 \longrightarrow$ en lisant les restes de bas en haut : $11\,1000\,0111$

### décimal $\longrightarrow$ binaire

- **Méthode 1 :**
  - on prend la **plus grande puissance de 2 inférieure ou égale** au nombre à convertir ;
  - on enlève sa valeur à la valeur initiale et on recommence le processus jusqu'à atteindre zéro ;
  - on écrit la valeur en binaire en mettant des 1 pour toutes les puissances identifiées, et des 0 pour le reste.

  **Exemple :** convertissons 5 en binaire
  La plus grand puissance de 2 inférieure ou égale à 5 est $2^2 = 4$. On fait $5 - 4$, il reste $1$.
  La plus grand puissance de 2 inférieure ou égale à 1 est $2^0 = 1$. On fait $1 - 1$, il reste $0$ et on peut donc arrêter.
  On écrit ainsi : $1$ pour $2^2$, $0$ pour $2^1$ (à ne pas oublier !) et $1$ pour $2^0$.
  Ainsi $5$ s'écrit $101$ en binaire.

- **Méthode 2 :**
  - on **divise successivement par 2** la valeur décimale et on prend la partie entière du résultat à laquelle on ajoute $0$ ou $1$ selon le reste ;
  - On lit les reste à l'envers, depuis le bas, pour écrire le nombre en binaire.

### Confusion binaire/décimal

Il peut arriver de confondre les bases dans lesquelles on se trouve lorsqu'on en manipule plusieurs à la fois comme dans ce chapitre.
Pour pallier ce souci, on peut préciser dans quelle base on se trouve en l'indiquant en exposant inférieur.

**Exemple :**
Pour ne pas confondre $1000$ en base 2 et en base 10, on peut préciser : $1000_2$ et $1000_{10}$.
En l'occurrence : $1000_{10} = 1111101000_2$ et $1000_2 = 8_{10}$