Numération binaire

Capacités attendues

✓ Écriture d'un entier positif dans une base b $\geq$ 2 : passer de la représentation d'une base dans une autre.

(Les bases 2, 10 et 16 sont privilégiées.)

La numération usuelle est une numération par position : à chaque chiffre correspond un « poids », d'autant plus élevé qu'il est situé à gauche. Par exemple pour le nombre 496 :

- le chiffre 4 est le chiffre des , de poids ;
- le chiffe 9 est le chiffre des , de poids ;
- le chiffre 6 est le chiffre des , de poids .

En résumé, on peut écrire que : $496 = 4 \times 10^2 +$.

Le rôle des puissances de 10 donne le nom à ce système de numération, appelé système .

Il utilise les 10 chiffres que nous connaissons bien.

1 Conversion binaire $\rightarrow$ décimal

Le système binaire est fondé lui sur les puissances de , et il utilise chiffres, à savoir .

Par exemple :

$$1\,1111\,0000_2 = \mathbf{1} \times 2^8 + \mathbf{1} \times 2^7 + \mathbf{1} \times 2^6 + \mathbf{1} \times 2^5 + \mathbf{1} \times 2^4 + \mathbf{0} \times 2^3 + \mathbf{0} \times 2^2 + \mathbf{0} \times 2^1 + \mathbf{0} \times 2^0$$

Pour convertir ce nombre dans le système décimal, il est utile de connaître les puissances de 2.

$$\begin{array}{rcl} 2^0 = & \quad & 2^8 = \\ 2^1 = & & 2^9 = \\ 2^2 = & & 2^{10} = \\ 2^3 = & & 2^{11} = \\ 2^4 = & & 2^{12} = \\ 2^5 = & & 2^{13} = \\ 2^6 = & & 2^{14} = \\ 2^7 = & & 2^{15} = \end{array}$$

Ainsi : $1\,1111\,0000_2 = 2^8 + 2^7 + 2^6 + 2^5 + 2^4 =$

binaire $\rightarrow$ décimal

- Écrire sous chaque chiffre du nombre binaire la puissance de 2 correspondante en commençant par la à partir de ;
- Multiplier chaque puissance de 2 par 0 ou 1 selon le chiffre sous lequel elle est ;
- Additionner les précédents résultats pour trouver le total en base 10.

Exemple : convertissons 1001 en décimal

$$\begin{array}{cccc} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 \times 2^3 & 0 \times 2^2 & 0 \times 2^1 & 1 \times 2^0 \end{array}$$

qui se traduit par : $1 \times 2^3 + 1 \times 2^0 = 8 + 1 = 9$

Exercice 1

Déterminer les valeurs décimales des nombres ci-dessous.

$1_2 =$	$10_2 =$
$11_2 =$	$100_2 =$
$1001_2 =$	$1011_2 =$
$1101_2 =$	$1110_2 =$
$1000\,0000_2 =$	$1010\,0000_2 =$
$1000\,1101_2 =$	$1010\,1001_2 =$
$1111_2 =$	$1\,1111_2 =$
$11\,1111_2 =$	$1111\,1111_2 =$

2 Opérations en binaires

Exercice 2

Effectuer les opérations ci-dessous et vérifier les résultats obtenus.

$$\begin{array}{ccccc} & 1 & 0 & 1 & 0_2 \\ + & 1 & 0 & 0 & 1_2 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccc} & 1 & 0 & 1 & 1_2 \\ + & 1 & 0 & 0 & 1_2 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccc} & 1 & 0 & 1 & 1_2 \\ + & 1 & 0 & 1 & 1_2 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccc} & 1 & 1 & 1 & 1_2 \\ + & & & & 1_2 \\ \hline \end{array}$$

Exercice 3

Effectuer les opérations ci-dessous et vérifier les résultats obtenus.

$$\begin{array}{ccccc} & 1 & 0 & 1 & 1_2 \\ - & 1 & 0 & 0 & 1_2 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccc} & 1 & 0 & 1 & 0_2 \\ - & & 1 & 1 & 1_2 \\ \hline \end{array}$$

3 Conversion décimal $\rightarrow$ binaire

3.1 Méthode 1

Exercice 4

Convertir les nombres ci-dessous dans le système binaire.

$4 =$	$5 =$
$6 =$	$9 =$
$16 =$	$32 =$
$64 =$	$128 =$
$33 =$	$65 =$
$66 =$	$131 =$
$150 =$	$180 =$
$220 =$	$240 =$

3.2 Méthode 2

L'écriture binaire d'un nombre s'obtient en effectuant des divisions successives par 2.
Explication sur un exemple :

$$\begin{array}{rclcl}
496 & = & 2\times 248 & + & \mathbf{0}\\
248 & = & 2\times 124 & + & \mathbf{0}\\
124 & = & 2\times 62 & + & \mathbf{0}\\
62 & = & 2\times 31 & + & \mathbf{0}\\
31 & = & 2\times 15 & + & \mathbf{1}\\
15 & = & 2\times 7 & + & \mathbf{1}\\
7 & = & 2\times 3 & + & \mathbf{1}\\
3 & = & 2\times 1 & + & \mathbf{1}\\
1 & = & 2\times 0 & + & \mathbf{1}
\end{array}$$

L'écriture binaire de 496 s'obtient alors en

Exercice 5

Déterminer avec cette méthode l'écriture binaire de 903.

décimal $\rightarrow$ binaire

- **Méthode 1 :**
  - on prend la **plus grande puissance de 2 inférieure ou égale** au nombre à convertir ;
  - on enlève sa valeur à la valeur initiale et on recommence le processus jusqu'à atteindre zéro ;
  - on écrit la valeur en binaire en mettant des 1 pour toutes les puissances identifiées, et des 0 pour le reste.

  Exemple : convertissons 5 en binaire
  La plus grand puissance de 2 inférieure ou égale à 5 est $2^2 = 4$. On fait $5 - 4$, il reste 1.
  La plus grand puissance de 2 inférieure ou égale à 1 est $2^0 = 1$. On fait $1 - 1$, il reste 0 et on peut donc arrêter.
  On écrit ainsi : 1 pour 2^2, 0 pour 2^1 (à ne pas oublier !) et 1 pour 2^0.
  Ainsi 5 s'écrit 101 en binaire.

- **Méthode 2 :**
  - on **divise successivement par 2** la valeur décimale et on prend la partie entière du résultat à laquelle on ajoute 0 ou 1 selon le reste ;
  - On lit les reste à l'envers, depuis le bas, pour écrire le nombre en binaire.

Confusion binaire/décimal

Il peut arriver de confondre les bases dans lesquelles on se trouve lorsqu'on en manipule plusieurs à la fois comme dans ce chapitre.
Pour pallier ce souci, on peut préciser dans quelle base on se trouve en l'indiquant en exposant inférieur.

Exemple :
Pour ne pas confondre 1000 en base 2 et en base 10, on peut préciser : 1000_2 et 1000_{10}.
En l'occurrence : $1000_{10} = 1111101000_2$ et $1000_2 = 8_{10}$