Modulo et diviseurs

Le « modulo » est une opération arithmétique très utile, intégrée dans tous les langages informatiques.

Définition

Étant donnés deux nombres entiers a et b strictement positifs, « a modulo b », notée $a \% b$ est défini comme le reste de la division euclidienne de a par b.

Exercice 1

1. Poser la division de 2019 par 19 et en déduire la valeur de 2019 modulo 19 : $2019 \% 19 = 5$.
2. Sans poser les divisions, compléter les égalités ci-dessous.

$20 \% 3 =$ 2	$5347 \% 10 =$ 7	$2016 \% 5 =$ 1
$72 \% 9 =$ 0	$56 \% 8 =$ 0	$130 \% 13 =$ 0

3. À quelle condition sur a et b a-t-on « $a \% b = 0$ » ?

$a \% b = 0$ si et seulement si b est un diviseur de a.

Dans tous les exercices ci-dessous, on répondra aux questions en utilisant des scripts en Python.

Exercice 2

Soient a et b deux entiers naturels. On dit que b est un diviseur de a si $a = b \times d$ où d est un entier naturel.

Par exemple, les diviseurs de 6 sont : 1, 2, 3 et 6.

1. Quels sont les diviseurs de $23\,494$?
2. Combien de diviseurs admet le nombre 12^6 ? (en Python 12^6 s'écrit `12**6`)
3. Parmi tous les nombres de 1 à 1000, quel est celui qui compte le plus de diviseurs ?

Exercice 3 Nombres premiers

Un nombre est dit premier s'il n'admet que deux diviseurs (à savoir 1 et lui-même).

1. Pierre de Fermat (1601–1655) a conjecturé que tous les nombres de la forme $2^{2^n} + 1$ étaient premiers.
   (a) Vérifier que $2^{2^3} + 1$ est un nombre premier.
   (b) Montrer que la conjecture de Fermat est fausse.
2. Les nombres de Mersenne (1588–1648) sont de la forme $2^p - 1$ où p est un nombre premier.

   Est-il vrai que tous les nombres de Mersenne sont premiers ?
3. Combien y a-t-il de nombres premiers inférieurs à 1000 ?

Exercice 4 Somme des diviseurs

On note $\sigma(n)$ (lire « sigma de n ») la somme des diviseurs d'un entier n.

1. Vérifier que $\sigma(2019) = 2696$.
2. Parmi les nombres entiers inférieurs à $1\,000$, quel est celui dont la somme des diviseurs est la plus grande ?

Exercice 5 Nombres parfaits

Un nombre est dit parfait lorsqu'il est égal à la somme de ses diviseurs excepté lui-même.

Par exemple, 6 est parfait car ses diviseurs sont 1, 2, 3 et 6, et $1+2+3=6$.

1. Vérifier que 28 est un nombre parfait.
2. Déterminer tous les nombres parfaits inférieurs à 10000.

Exercice 6 Suites de Syracuse

Les suites de Syracuse sont définies à partir d'un terme initial N, qui est un entier naturel non nul.

On applique alors le procédé suivant au nombre N :

- s'il est pair, on le divise par 2 ;
- s'il est impair, on le multiplie par 3 et on ajoute 1.

Puis on répète l'opération pour obtenir une suite d'entiers.

Par exemple, à partir de $N = 10$, on obtient la suite de nombres : 10, 5, 16, 8, 4, 2, 1, 4, 2, 1, 4, 2, 1, *etc.*

Sur la base de données empiriques (des observations dans un grand nombre de cas), on suppose que pour tout terme initial N, la suite finit par boucler sur la séquence 4, 2, 1, et l'on décide d'arrêter lorsque l'on parvient au nombre 1.

1. On désigne par « temps de vol » le nombre d'étapes aboutissant au nombre 1.
   Pour $N = 10$, il est égal à 6.
   (a) Vérifier que le temps de vol pour $N = 2\,019$ est égal à 112.
   (b) Parmi tous les nombres entiers inférieurs à 1000, quel est celui dont le temps de vol est le plus long ?
2. L'altitude maximale d'une suite de Syracue est le plus grand nombre atteint.
   Il vaut 16 pour $N = 10$.
   (a) Vérifier que l'altitude maximale pour $N = 255$ est égale à $13\,120$.
   (b) Parmi tous les entiers inférieurs à 1000, quel est celui dont l'altitude maximale est la plus grande ?

Exercice 7 Nombres de Fibonacci

La suite de Fibonacci est la suite logique dont les premiers termes sont :

$$1\ ;\ 1\ ;\ 2\ ;\ 3\ ;\ 5\ ;\ 8\ ;\ 13\ ;\ 21\ ;\ 34\ ;\ \textit{etc.}$$

Chaque terme est calculé en faisant la somme des deux précédents.

On numérote $F_1 = 1$, $F_2 = 1$, $F_3 = 2$, $F_4 = 3$, *etc.* les termes de la suite de Fibonacci.

1. Vérifier que $F_{12} = 144$.
2. De combien de chiffres est composé F_{100} ?
3. Parmi les 100 premiers termes de la suite de Fibonacci, lesquels sont premiers ?
4. On définit la suite des quotients de la suite de Fibonacci par

$$Q_1 = \frac{F_2}{F_1} = 1 \qquad Q_2 = \frac{F_3}{F_2} = 2 \qquad Q_3 = \frac{F_4}{F_3} = 1,5 \qquad Q_4 = \frac{F_5}{F_4} \qquad \textit{etc.}$$

   (a) Calculer Q_{10}, Q_{20} et Q_{30}.
   (b) Que remarque-t-on ?