Les variables booléennes

Capacités attendues

- Dresser la table d'une expression booléenne.

Définition

Un booléen est une variable informatique qui ne peut prendre que deux valeurs : `True` ou `False`.

Un booléen est représenté en machine par un bit, qui vaut :

- 1 pour la valeur `True`;
- 0 pour la valeur `False`.

Il existe trois opérations élémentaires sur les booléens : disjonction, conjonction et négation.

- La **disjonction** de A et B est notée A `or` B.
  A `or` B vaut `True` si et seulement si A vaut `True` ou B vaut `True`.

A	B	A `or` B
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

- La **conjonction** de A et B est notée A `and` B.
  A `and` B vaut `True` si et seulement si A vaut `True` et B vaut `True`.

A	B	A and B
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

- La **négation** de A est notée `not` A ou encore $\overline{A}$.
  $\overline{A}$ vaut `True` si et seulement si A vaut `False`.

A	`not` A
0	1
1	0

Définition

Une expression booléenne est une combinaison d'opérations élémentaires (`or` , `and` , `not`) portant sur une ou plusieurs variables booléennes.

Exercice 1

Compléter les égalités suivantes.

$A \texttt{ or } A = \dots \qquad A \texttt{ and } A = \dots \qquad \texttt{not}\,(\texttt{not } A) = \dots \qquad A \texttt{ or } (\texttt{not } A) = \dots \qquad A \texttt{ and } (\texttt{not } A) = \dots$

Exercice 2 Formules de Morgan

1. Compléter les tables de vérité ci-dessous.

A	B	$A \texttt{ or } B$	$\overline{A \texttt{ or } B}$
0	0		
0	1		
1	0		
1	1		

A	B	$\overline{A}$	$\overline{B}$	$\overline{A} \texttt{ and } \overline{B}$
0	0			
0	1			
1	0			
1	1			

2. En déduire que $\overline{A \texttt{ or } B} = \overline{A} \texttt{ and } \overline{B}$.
3. Montrer de même que $\overline{A \texttt{ and } B} = \overline{A} \texttt{ or } \overline{B}$.

Exercice 3

1. Dresser la table de vérité de l'expression $S = (A \texttt{ or } B) \texttt{ and } (\overline{A} \texttt{ or } B)$.

A	B	$A \texttt{ or } B$	$\overline{A}$	$(\overline{A} \texttt{ or } B)$	S
0	0				
0	1				
1	0				
1	1				

2. Quelle égalité booléenne peut en déduire ?

Exercice 4

Dresser la table de vérité de l'expression $S = (A \texttt{ and } B) \texttt{ or } (A \texttt{ and not } C) \texttt{ or } (\texttt{not } B \texttt{ and } C)$.

A	B	C	$A \texttt{ and } B$	$A \texttt{ and not } C$	$\texttt{not } B \texttt{ and } C$	S
0	0	0				
0	0	1				
0	1	0				
0	1	1				
1	0	0				
1	0	1				
1	1	0				
1	1	1				

Exercice 5

On donne ci-dessous les tables de vérité de différentes expressions booléennes U, V et W.

Retrouver les expressions de U, V et W en fonction de A et B.

A	B	U
0	0	0
0	1	0
1	0	1
1	1	0

A	B	V
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	0

A	B	W
0	0	1
0	1	0
1	0	1
1	1	0

Proposition *(non exigible)*
Appelons monôme une expression ne comportant que des conjonctions de variables ou de leur négation.
Par exemple, A and B, $\overline{A}$ and $\overline{B}$, A and $\overline{B}$ and C, A sont des monômes.
Alors, étant donnée une expression booléenne, il est toujours possible de la transformer en une disjonction de monômes : cette écriture est appelée forme normale disjonctive.

Exercice 6

L'opération « ou exclusif », noté `xor`, est défini par A `xor` $B = (A$ `or` $B)$ and $\overline{A \text{ and } B}$.

1. Dresser la table de vérité de l'expression A `xor` B.
2. En déduire la forme normale disjonctive de A `xor` B.

Exercice 7

On donne ci-dessous les tables de vérité de différentes expressions booléennes U, V et W.

Retrouver les expressions de U, V et W en fonction de A et B et C.

A	B	C	U
0	0	0	1
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	0
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	0
1	1	1	1

A	B	C	V
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	0
1	0	0	1
1	0	1	0
1	1	0	0
1	1	1	1

A	B	C	W
0	0	0	1
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	0
1	0	0	1
1	0	1	1
1	1	0	0
1	1	1	0

Exercice 8 QCM

Si A et B sont des variables booléennes, quelle est l'expression booléenne équivalente à $($`not` $A)$ `or` B ?

- $(A$ and $B)$ or $($not A and $B)$ or $($not A and not $B)$
- $(A$ and $B)$ or $($not A and $B)$
- $($not A and $B)$ or $($not A and not $B)$
- $(A$ and $B)$ or $($not A and not $B)$