Numération binaire

. . . .

Capacités attendues

✓ Écriture d'un entier positif dans une base b $\geq$ 2 : passer de la représentation d'une base dans une autre.
(Les bases 2, 10 et 16 sont privilégiées.)

. . . .

La numération usuelle est une numération par position : à chaque chiffre correspond un « poids », d'autant plus élevé qu'il est situé à gauche. Par exemple pour le nombre 496 :

- le chiffre 4 est le chiffre des .... , de poids .... ;
- le chiffe 9 est le chiffre des .... , de poids .... ;
- le chiffre 6 est le chiffre des .... , de poids ....

En résumé, on peut écrire que : $496 = 4 \times 10^2 +$ ....

Le rôle des puissances de 10 donne le nom à ce système de numération, appelé système ....

Il utilise les 10 chiffres que nous connaissons bien.

1 Conversion binaire $\rightarrow$ décimal

Le système binaire est fondé lui sur les puissances de .. , et il utilise .. chiffres, à savoir ....

Par exemple :

$$1\,1111\,0000\,_2 = \mathbf{1} \times 2^8 + \mathbf{1} \times 2^7 + \mathbf{1} \times 2^6 + \mathbf{1} \times 2^5 + \mathbf{1} \times 2^4 + \mathbf{0} \times 2^3 + \mathbf{0} \times 2^2 + \mathbf{0} \times 2^1 + \mathbf{0} \times 2^0$$

Pour convertir ce nombre dans le système décimal, il est utile de connaître les puissances de 2.

$2^0 =$	..	$2^8 =$	......
$2^1 =$	..	$2^9 =$	......
$2^2 =$	...	$2^{10} =$	....
$2^3 =$	...	$2^{11} =$	....
$2^4 =$	....	$2^{12} =$	....
$2^5 =$	....	$2^{13} =$	....
$2^6 =$	.....	$2^{14} =$	....
$2^7 =$	......	$2^{15} =$	....

Ainsi : $1\,1111\,0000\,_2 = 2^8 + 2^7 + 2^6 + 2^5 + 2^4 =$ ....

binaire $\rightarrow$ décimal

- Écrire sous chaque chiffre du nombre binaire la puissance de 2 correspondante en commençant par la .... à partir de .... ;
- Multiplier chaque puissance de 2 par 0 ou 1 selon le chiffre sous lequel elle est ;
- Additionner les précédents résultats pour trouver le total en base 10.

Exemple : convertissons 1001 en décimal

$$\begin{array}{cccc} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 \times 2^3 & 0 \times 2^2 & 0 \times 2^1 & 1 \times 2^0 \end{array}$$

qui se traduit par : $1 \times 2^3 + 1 \times 2^0 = 8 + 1 = 9$

Exercice 1

Déterminer les valeurs décimales des nombres ci-dessous.

$1_2 =$	..	$10_2 =$	..
$11_2 =$	..	$100_2 =$	...
$1001_2 =$	...	$1011_2 =$	...
$1101_2 =$	....	$1110_2 =$	....
$1000\,0000_2 =$	......	$1010\,0000_2 =$	......
$1000\,1101_2 =$	.....	$1010\,1001_2 =$	......
$1111_2 =$	....	$1\,1111_2 =$	....
$11\,1111_2 =$	.....	$1111\,1111_2 =$	......

2 Opérations en binaires

Exercice 2

Effectuer les opérations ci-dessous et vérifier les résultats obtenus.

$$\begin{array}{ccccc} & 1 & 0 & 1 & 0_2 \\ + & 1 & 0 & 0 & 1_2 \\ \hline \end{array} \qquad \begin{array}{ccccc} & 1 & 0 & 1 & 1_2 \\ + & 1 & 0 & 0 & 1_2 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccc} & 1 & 0 & 1 & 1_2 \\ + & 1 & 0 & 1 & 1_2 \\ \hline \end{array} \qquad \begin{array}{ccccc} & 1 & 1 & 1 & 1_2 \\ + & & & & 1_2 \\ \hline \end{array}$$

Exercice 3

Effectuer les opérations ci-dessous et vérifier les résultats obtenus.

$$\begin{array}{ccccc} & 1 & 0 & 1 & 1_2 \\ - & 1 & 0 & 0 & 1_2 \\ \hline \end{array} \qquad \begin{array}{ccccc} & 1 & 0 & 1 & 0_2 \\ - & & 1 & 1 & 1_2 \\ \hline \end{array}$$

3 Conversion décimal $\rightarrow$ binaire

3.1 Méthode 1

Exercice 4

Convertir les nombres ci-dessous dans le système binaire.

$4 =$	......	$5 =$	......
$6 =$	......	$9 =$	....
$16 =$	....	$32 =$	....
$64 =$	....	$128 =$	....
$33 =$	....	$65 =$	....
$66 =$	....	$131 =$	....
$150 =$	....	$180 =$	....
$220 =$	....	$240 =$	....

3.2 Méthode 2

L'écriture binaire d'un nombre s'obtient en effectuant des divisions successives par 2.
Explication sur un exemple :

$$\begin{array}{rcllc}
496 & = & 2 \times 248 & + & \mathbf{0} \\
248 & = & 2 \times 124 & + & \mathbf{0} \\
124 & = & 2 \times 62 & + & \mathbf{0} \\
62 & = & 2 \times 31 & + & \mathbf{0} \\
31 & = & 2 \times 15 & + & \mathbf{1} \\
15 & = & 2 \times 7 & + & \mathbf{1} \\
7 & = & 2 \times 3 & + & \mathbf{1} \\
3 & = & 2 \times 1 & + & \mathbf{1} \\
1 & = & 2 \times 0 & + & \mathbf{1}
\end{array}$$

L'écriture binaire de 496 s'obtient alors en ....

Exercice 5

Déterminer avec cette méthode l'écriture binaire de 903.

décimal $\rightarrow$ binaire

- **Méthode 1 :**
  - on prend la **plus grande puissance de 2 inférieure ou égale** au nombre à convertir ;
  - on enlève sa valeur à la valeur initiale et on recommence le processus jusqu'à atteindre zéro ;
  - on écrit la valeur en binaire en mettant des 1 pour toutes les puissances identifiées, et des 0 pour le reste.

  Exemple : convertissons 5 en binaire
  La plus grand puissance de 2 inférieure ou égale à 5 est $2^2 = 4$. On fait $5 - 4$, il reste 1.
  La plus grand puissance de 2 inférieure ou égale à 1 est $2^0 = 1$. On fait $1 - 1$, il reste 0 et on peut donc arrêter.
  On écrit ainsi : 1 pour 2^2, 0 pour 2^1 (à ne pas oublier !) et 1 pour 2^0.
  Ainsi 5 s'écrit 101 en binaire.

- **Méthode 2 :**
  - on **divise successivement par 2** la valeur décimale et on prend la partie entière du résultat à laquelle on ajoute 0 ou 1 selon le reste ;
  - On lit les reste à l'envers, depuis le bas, pour écrire le nombre en binaire.

Confusion binaire/décimal

Il peut arriver de confondre les bases dans lesquelles on se trouve lorsqu'on en manipule plusieurs à la fois comme dans ce chapitre.
Pour pallier ce souci, on peut préciser dans quelle base on se trouve en l'indiquant en exposant inférieur.

Exemple :
Pour ne pas confondre 1000 en base 2 et en base 10, on peut préciser : 1000_2 et 1000_{10}.
En l'occurrence : $1000_{10} = 1111101000_2$ et $1000_2 = 8_{10}$