

Numération binaire

Capacités attendues

- ✓ Écriture d'un entier positif dans une base $b \geq 2$: passer de la représentation d'une base dans une autre.

(Les bases 2, 10 et 16 sont privilégiées.)

La numération usuelle est une numération par position : à chaque chiffre correspond un « poids », d'autant plus élevé qu'il est situé à gauche. Par exemple pour le nombre 496 :

- le chiffre 4 est le chiffre des **centaines**, de poids $100 = 10^2$;
- le chiffre 9 est le chiffre des **dizaines**, de poids $10 = 10^1$;
- le chiffre 6 est le chiffre des **unités**, de poids $1 = 10^0$.

En résumé, on peut écrire que : $496 = 4 \times 10^2 + 9 \times 10^1 + 6 \times 10^0$.

Le rôle des puissances de 10 donne le nom à ce système de numération, appelé système **décimal** .

Il utilise les 10 chiffres que nous connaissons bien.

1 Conversion binaire \rightarrow décimal

Le système binaire est fondé lui sur les puissances de **2** , et il utilise **2** chiffres, à savoir **0 et 1** .

Par exemple :

$$111110000_2 = 1 \times 2^8 + 1 \times 2^7 + 1 \times 2^6 + 1 \times 2^5 + 1 \times 2^4 + 0 \times 2^3 + 0 \times 2^2 + 0 \times 2^1 + 0 \times 2^0$$

Pour convertir ce nombre dans le système décimal, il est utile de connaître les puissances de 2.

$2^0 =$	1	$2^8 =$	256
$2^1 =$	2	$2^9 =$	512
$2^2 =$	4	$2^{10} =$	1024
$2^3 =$	8	$2^{11} =$	2048
$2^4 =$	16	$2^{12} =$	4096
$2^5 =$	32	$2^{13} =$	8192
$2^6 =$	64	$2^{14} =$	16384
$2^7 =$	128	$2^{15} =$	32768

Ainsi : $111110000_2 = 2^8 + 2^7 + 2^6 + 2^5 + 2^4 = 256 + 128 + 64 + 32 + 16 = 496$

binaire \rightarrow décimal

- Écrire sous chaque chiffre du nombre binaire la puissance de 2 correspondante en commençant par la **droite** à partir de **zéro** ;
- Multiplier chaque puissance de 2 par 0 ou 1 selon le chiffre sous lequel elle est ;
- Additionner les précédents résultats pour trouver le total en base 10.

Exemple : convertissons 1001 en décimal

$$\begin{array}{cccc} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 \times 2^3 & 0 \times 2^2 & 0 \times 2^1 & 1 \times 2^0 \end{array}$$

qui se traduit par : $1 \times 2^3 + 1 \times 2^0 = 8 + 1 = 9$

Exercice 1

Déterminer les valeurs décimales des nombres ci-dessous.

$$\begin{array}{l} 1_2 = 1 \\ 11_2 = 3 \\ 1001_2 = 9 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} 1101_2 = 13 \\ 1000\,0000_2 = 128 \\ 1000\,1101_2 = 141 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} 1111_2 = 15 \\ 11\,1111_2 = 63 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} 10_2 = 2 \\ 100_2 = 4 \\ 1011_2 = 11 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} 1110_2 = 14 \\ 1010\,0000_2 = 160 \\ 1010\,1001_2 = 169 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} 1\,1111_2 = 31 \\ 1111\,1111_2 = 255 \end{array}$$

2 Opérations en binaires

Exercice 2

Effectuer les opérations ci-dessous et vérifier les résultats obtenus.

$$\begin{array}{r} \\ + \\ \hline 1 \end{array} \quad (10+9 = 19)$$

$$\begin{array}{r} \\ + \\ \hline 1 \end{array} \quad (11+11 = 22)$$

$$\begin{array}{r} \\ + \\ \hline 1 \end{array} \quad (11+9 = 20)$$

$$\begin{array}{r} \\ + \\ \hline 1 \end{array} \quad (15+1 = 16)$$

Exercice 3

Effectuer les opérations ci-dessous et vérifier les résultats obtenus.

$$\begin{array}{r} \\ - \\ \hline 0 \end{array} \quad (11-9 = 2)$$

$$\begin{array}{r} \\ - \\ \hline 0 \end{array} \quad (10-7 = 3)$$

3 Conversion décimal \rightarrow binaire

3.1 Méthode 1

Exercice 4

Convertir les nombres ci-dessous dans le système binaire.

$$\begin{array}{l} 4 = 100 \\ 6 = 110 \\ 16 = 1\,0000 \\ 64 = 100\,0000 \\ 33 = 10\,0001 \\ 66 = 100\,0010 \\ 150 = 1001\,0110 \\ 220 = 1101\,1100 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} 5 = 101 \\ 9 = 1001 \\ 32 = 10\,0000 \\ 128 = 1000\,0000 \\ 65 = 100\,0001 \\ 131 = 1000\,0011 \\ 180 = 1011\,0100 \\ 240 = 1111\,0000 \end{array}$$

3.2 Méthode 2

L'écriture binaire d'un nombre s'obtient en effectuant des divisions successives par 2.

Explication sur un exemple :

$$\begin{array}{rcl} 496 & = & 2 \times 248 + 0 \\ 248 & = & 2 \times 124 + 0 \\ 124 & = & 2 \times 62 + 0 \\ 62 & = & 2 \times 31 + 0 \\ 31 & = & 2 \times 15 + 1 \\ 15 & = & 2 \times 7 + 1 \\ 7 & = & 2 \times 3 + 1 \\ 3 & = & 2 \times 1 + 1 \\ 1 & = & 2 \times 0 + 1 \end{array}$$

L'écriture binaire de 496 s'obtient alors en **“écrivant les restes à l'envers”**

$$496_{10} = 1\,1111\,0000_2.$$

Exercice 5

Déterminer avec cette méthode l'écriture binaire de 903.

$$\begin{array}{l} 903 = 2 \times 451 + 1 \\ 451 = 2 \times 225 + 1 \\ 225 = 2 \times 112 + 1 \\ 112 = 2 \times 56 + 0 \\ 56 = 2 \times 28 + 0 \\ 28 = 2 \times 14 + 0 \\ 14 = 2 \times 7 + 0 \\ 7 = 2 \times 3 + 1 \\ 3 = 2 \times 1 + 1 \\ 1 = 2 \times 0 + 1 \end{array} \rightarrow \text{en lisant les restes de bas en haut : } 11\,1000\,0111$$

décimal \rightarrow binaire

• Méthode 1 :

- on prend la **plus grande puissance de 2 inférieure ou égale** au nombre à convertir ;
- on enlève sa valeur à la valeur initiale et on recommence le processus jusqu'à atteindre zéro ;
- on écrit la valeur en binaire en mettant des 1 pour toutes les puissances identifiées, et des 0 pour le reste.

Exemple : convertissons 5 en binaire

La plus grande puissance de 2 inférieure ou égale à 5 est $2^2 = 4$. On fait $5 - 4$, il reste 1.

La plus grande puissance de 2 inférieure ou égale à 1 est $2^0 = 1$. On fait $1 - 1$, il reste 0 et on peut donc arrêter.

On écrit ainsi : 1 pour 2^2 , 0 pour 2^1 (à ne pas oublier !) et 1 pour 2^0 .

Ainsi 5 s'écrit 101 en binaire.

• Méthode 2 :

- on **divise successivement par 2** la valeur décimale et on prend la partie entière du résultat à laquelle on ajoute 0 ou 1 selon le reste ;
- On lit les restes à l'envers, depuis le bas, pour écrire le nombre en binaire.

Confusion binaire/décimal

Il peut arriver de confondre les bases dans lesquelles on se trouve lorsqu'on en manipule plusieurs à la fois comme dans ce chapitre.

Pour pallier ce souci, on peut préciser dans quelle base on se trouve en l'indiquant en exposant inférieur.

Exemple :

Pour ne pas confondre 1000 en base 2 et en base 10, on peut préciser : 1000_2 et 1000_{10} .

En l'occurrence : $1000_{10} = 1111101000_2$ et $1000_2 = 8_{10}$