到達可能圏論

2025 年 12 月 4 日

到達可能圏論についての勉強ノート兼発表資料．モデル理論との関連性は今のところそこまで見えていません．

1 圏論

(圏論の方の自主ゼミに参加している人向け) 到達可能圏論は余極限の解析をすることが多いので，ストリング図でなく可換図式で進めます．

1.1 圏

定義 1.1.1

5 つ組 $C = (\mathrm{Ob}\, C, \mathrm{Ar}\, C, \circ, \mathrm{dom}, \mathrm{cod})$ であって，条件

(i) $\mathrm{dom}, \mathrm{cod}$ は各 $f \in \mathrm{Ar}\, C$ に対して $\mathrm{Ob}\, C$ の要素を対応させる．$\mathrm{dom}\, f = a, \mathrm{dom}\, f = b$ なる $f \in \mathrm{Ar}\, C$ を，$f\colon a \to b$ と書く．

(ii) $f\colon a \to b, g\colon b \to c$ に対し，$g \circ f\colon a \to c$ である．また $g \circ f$ は省略して単に gf とも書く．

(iii) 各 $c \in \mathrm{Ob}\, C$ について，**恒等射** $\mathrm{id}_c\colon c \to c$ が存在し，任意の $f\colon a \to c$ および $g\colon c \to b$ について

$$\mathrm{id}_c f = f,\ g\, \mathrm{id}_c = g$$

が成立する．

を満たすものを**圏**という．なお，$\mathrm{Ob}\, C$ や $\mathrm{Ar}\, C$ は集合である必要はない．さらに，$c \in \mathrm{Ob}\, C$ は単に $c \in C$ と書く．

$a, b \in C$ に対し，

$$C(a, b) := \{f \in \mathrm{Ar}\, C \mid f\colon a \to b\}$$

と書くことにする．任意の $a, b \in C$ に対し $C(a, b)$ が集合となるとき，C は **locally small** であるという．また $\mathrm{Ob}\, C$ が集合であるような圏は **small** であるという．

例 1.1.2

対象が全ての集合，射が全ての写像であるような圏を **Set** と書く．**Set** は small ではないが，locally small ではある．

1.2 関手

定義 1.2.1

C, D を圏とする．また $F_O\colon \mathrm{Ob}\, C \to \mathrm{Ob}\, D, F_A\colon \mathrm{Ar}\, C \to \mathrm{Ar}\, D$ とする．これらが任意の $a, b, c \in C$ について条件

(i) $f \in C(a,b) \implies F_A f \in D(F_O a, F_O b)$
(ii) $F_A(\mathrm{id}_c) = \mathrm{id}_{F_O c}$
(iii) $F_A(gf) = (F_A g)(F_A f)$

をみたすとき，$F = (F_O, F_A)$ を**関手**という．また $F_O c, F_A f$ を単に Fc, Ff と書く．

例 1.2.2

C を locally small な圏，$c \in C$ とするとき，次のような関手 $C \to \mathbf{Set}$ が考えられる．

- $F_O d \coloneqq C(c,d)$
- $f\colon d \to d'$ のとき，$F_A f\colon C(c,d) \to C(c,d')\ ;\ g \mapsto fg$

このようにして定まる関手を，以降は $\square^c$ と書く．

定義 1.2.3

C を圏，I を small な圏とする．関手 $I \to C$ を C における**図式**という．

1.3 極限

定義 1.3.1

$D\colon I \to C$ を C における図式，$c \in C$ とする．$\alpha = (\alpha_i\colon Di \to c)_{i\in I}$ が，任意の $i, j \in I$ および $h\colon j \to i$ に対し図式

$$\begin{tikzcd} Dj \arrow[d, "Dh"'] \arrow[dr, "\alpha_j"] & \\ Di \arrow[r, "\alpha_i"'] & c \end{tikzcd}$$

を可換にするとき，D から c への**余錐**という．

定義 1.3.2

$D\colon I \to C$ を C における図式，$d \in D$ とし，$\kappa = (\kappa_i)_{i \in I}$ を D から d への余錐とする．これらが任意の $j \in I, c \in C$ および D から c への余錐 $\alpha = (\alpha_i)_{i \in I}$ について

$$\begin{tikzcd} Dj \arrow[d, "\kappa_j"'] \arrow[dr, "\alpha_j"] & \\ d \arrow[r, dashed, "\exists! \overline{\alpha}"'] & c \end{tikzcd}$$

を可換にするとき，(d, κ) を D の**余極限**という．とくに d を $\operatorname{colim} D$ と書き，**余極限対象**という．

例 1.3.3

$D\colon I \to \mathbf{Set}$ とし，$X_i \coloneqq Di \in \mathbf{Set}$ とする．直和 $\bigsqcup_{i \in I} X_i$ 上の関係 $\sim_0$ を，$(i, x), (j, y) \in \bigsqcup_{i \in I} X_i$ に対し

$$(i, x) \sim_0 (j, y) :\iff {}^{\exists} f\colon i \to j \ y = Df(x)$$

で定め，これを含む最小の同値関係を $\sim$ とする．こうして商集合 $\left(\bigsqcup_{i \in I} X_i \right) / {\sim}$ が作れるが，実はこれが $\operatorname{colim} D$ である．以下では

$$\coprod_{i \in I} X_i \coloneqq \left(\bigsqcup_{i \in I} X_i \right) / {\sim}$$

と書くことにする．

とくに I が全順序集合の場合，$\operatorname{colim} D$ は集合の増大列の和集合となる．

定義 1.3.4

C における図式 $D\colon I \to C$ は極限 $\operatorname{colim} D$ をもつとする．また $F\colon C \to E$ を関手とする．$\operatorname{colim}(FD) = F(\operatorname{colim} D)$ が成立するとき，F は**余極限を保存する**という．

1.4 連結性と Amalgamation Property

定義 1.4.1

$a, b \in C$ とする．

- $C(a, b) \neq \emptyset$ あるいは $C(b, a) \neq \emptyset$ であるとき，a と b は**比較可能**であるという．
- C の有限列 $a_0 = a, a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}, a_n = b$ であって，任意の $i < n$ に対し a_i と a_{i+1} が比較可能であるようなものが存在するとき，a と b は**連結**であるという．
- $c \in C$ であって，$C(a, c) \neq \emptyset$ かつ $C(b, c) \neq \emptyset$ となるものが存在するとき，a と b は **jointly connected** であるという．

例えば

$$a \longrightarrow a_1 \longleftarrow a_2 \longleftarrow \cdots \dashrightarrow a_{n-1} \rightarrow b$$

のような状況のとき，a と b は連結である．一方で jointly connected を図示すると

$$\begin{tikzcd} & c & \\ a \arrow[ur] & & b \arrow[ul] \end{tikzcd}$$

である．

定義 1.4.2

(1) C の図式 $c \longleftarrow a \longrightarrow b$ について，

$$\begin{tikzcd} c \arrow[r, "g"] & d \\ a \arrow[u] \arrow[r] & b \arrow[u, "f"'] \end{tikzcd}$$

が可換となるような f と g が存在するとき，(f, g) を $c \longleftarrow a \longrightarrow b$ の **amalgam** という．

(2) C の $c \longleftarrow a \longrightarrow b$ の形をした任意の図式が amalgam をもつとき，C は **Amalgamation Property**(AP) をもつという．

補題 1.4.3

C が (AP) をもつとき，$a, b \in C$ について以下は同値である．

(i) a, b は連結．

(ii) a, b は jointly connected.

証明

(ii) $\Longrightarrow$ (i) は明らかなので，逆を示すことにする．いま $c_1, c_2 \in C$ が連結であることを $c_1 \sim c_2$ と書くことにすると，$\sim$ は「比較可能」を含む最小の同値関係である．また c_1, c_2 が比較可能なとき $\begin{tikzcd}[sep=tiny] & c_2 \arrow[dr, equal] & \\ c_1 \arrow[ur] & & c_2 \end{tikzcd}$ あるいは $\begin{tikzcd}[sep=tiny] & c_1 \arrow[dr, equal] & \\ c_2 \arrow[ur] & & c_1 \end{tikzcd}$ なので，c_1, c_2 は jointly connected である．よって，jointly connected が同値関係であることを示せばよい．なお反射律と対称律は明らかなので，推移律のみ確かめることにする．

$\begin{tikzcd}[sep=tiny] & b & \\ a_0 \arrow[ur] & & a_1 \arrow[ul] \end{tikzcd}$ かつ $\begin{tikzcd}[sep=tiny] & c & \\ a_1 \arrow[ur] & & a_2 \arrow[ul] \end{tikzcd}$ とする．このとき (AP) より

$$\begin{tikzcd} & & d & & \\ & b \arrow[ur] & & c \arrow[ul] & \\ a_0 \arrow[ur] & & a_1 \arrow[ul] \arrow[ur] & & a_2 \arrow[ul] \end{tikzcd}$$

なる d がとれるので，$\begin{array}{ccc} & d & \\ \nearrow & & \nwarrow \\ a_0 & & a_2 \end{array}$ となる． □

2 到達可能圏の定義

2.1 有向半順序集合

定義 2.1.1

$(P, \leq)$ を半順序集合，λ を基数とする．これらが

$$^{\forall}A \subseteq P\ (\#A < \lambda \implies A \text{ は上界をもつ})$$

をみたすとき，P は **λ-有向**であるという．$\aleph_0$-有向であることは単に**有向**という．

例 2.1.2

(1) 空でない半順序集合は常に 2-有向である．

(2) 半順序集合が 3-有向であることと $\aleph_0$-有向であることは同値である．

補題 2.1.3

λ が特異基数，$(P, \leq)$ が半順序集合のとき，以下は同値．

(i) P は λ-有向．

(ii) P は λ^+-有向．

証明

まず一般に，$\alpha < \beta$ なる基数 α, β について，

$$\alpha\text{-有向} \implies \beta\text{-有向}$$

は定義から明らかである．よって (ii) $\implies$ (i) は明らかなので，逆向きを示せばよい．

$\#A < \lambda^+$ すなわち $\#A \leq \lambda$ なる $A \subseteq P$ をとる．$\#A < \lambda$ のときは P は λ-有向であることから，A は上界をもつ．よって以降は $\#A = \lambda$ として考える．いま λ が特異基数であることから，

$$A = \bigcup_{i \in I} A_i$$

なる $(A_i)_{i \in I}$ を，$\#I < \lambda$ かつ $^{\forall}i \in I\ \#A_i < \lambda$ となるようにとれる．各 $i \in I$ に対し A_i は上界をもつので，これを a_i と書くことにする．このとき $B := \{a_i \mid i \in I\}$ も上界をもち，これが A の上界となる． □

補題 2.1.3 を根拠に，以降は「λ-有向」といえば λ は正則基数であることを仮定する．

2.2 presentable object

以降，λ は正則基数，$(P, \leq)$ は λ-有向半順序集合とする．また C は圏とする．

定義 2.2.1

(1) 図式 $P \to C$ を C における **λ-有向図式**という．

(2) C における任意の λ-有向図式が余極限をもつとき，C は **λ-有向余完備**であるという．

例 2.2.2

Set における有向余極限を観察してみる．

$D\colon I \to \mathbf{Set}$ を λ-有向図式とし，$i \in I$ に対し $D_i := Di$ とする．

I は λ-有向，とくに 3-有向であるので，

$$^\forall i, j \in I \ ^\exists k \ (i \leq k \wedge j \leq k)$$

が成立し，これは

$$^\forall i, j \in I \ ^\exists k \ (^\exists f_{ik}\colon D_i \to D_k \wedge {}^\exists f_{jk}\colon D_j \to D_k)$$

を意味する．よって $(i, x), (j, y)$ に対し，

- $(i, x) \sim (k, f_{ik}(x))$
- $(j, y) \sim (k, f_{jk}(y))$

なので，

$$\begin{aligned} (i, x) \sim (j, y) &\iff (k, f_{ik}(x)) \sim (k, f_{jk}(y)) \\ &\iff f_{ik}(x) = f_{jk}(y) \end{aligned}$$

を得る．

ここで各 $i \in I$ に対し，

$$\alpha_i\colon D_i \mapsto \coprod_{i \in I} D_i \ ; \ x \mapsto [(i, x)]_\sim$$

と定める．このとき明らかに $\bigcup_{i \in I} \alpha_i(D_i) \subseteq \coprod_{i \in I} D_i$ である．また $[(i, x)]_\sim \in \coprod_{i \in I} D_i$ をとると，$\alpha_i(x) = [(i, x)]_\sim$ なので，逆の包含も成り立つ．よって

$$\bigcup_{i \in I} \alpha_i(D_i) = \coprod_{i \in I} D_i$$

が成立する．したがって，**Set** における有向余極限とは，実は増大列の和集合と思える．

以降，このような $\alpha_i(D_i)$ を指して $\hat{D}_i$ と書くことにする．

補題 2.2.3 : 岩村の補題

C は次の条件を満たすとする．

> 任意の正則基数 λ と $\#P = \lambda$ なる任意の全順序集合に対し，C における任意の図式 $P \to C$ は余極限をもつ．

このとき，C は $\aleph_0$-有向余完備である．

証明

無限基数 κ についての帰納法で，次の主張を示す．

> $\#P < \kappa$ なる有向半順序集合および $F\colon P \to C$ について，F は余極限をもつ．

(I) $\kappa = \aleph_0$ のとき，P は最大元をもつ．よって余極限も存在する．

(II) κ までの成立を仮定し，$\#P = \kappa$ なる有向半順序集合 κ をとる．このとき，以下を満たすような P の部分集合列 $(P_\alpha)_{\alpha<\kappa}$ を構成できる．

- 任意の $\alpha < \kappa$ に対し，$\#P_\alpha < \kappa$
- $\alpha < \beta < \kappa$ なる任意の α, β に対し，$P_\alpha \subseteq P_\beta$
- $P = \displaystyle\bigcup_{\alpha<\kappa} P_\alpha$

このとき仮定より，各 P_α からの図式は余極限をもつので，これを d_α とする．そして $(d_\alpha)_{\alpha<\kappa}$ の極限を d とすれば，これが P からの図式の余極限にもなる．□

定義 2.2.4

$c \in C$ について，$\square^c$ が λ-有向余極限を保つとき，c は **λ-presentable** であるという[†1]．

例 2.2.5

$X \in \mathbf{Set}$ について，以下は同値である．

(i) X は λ-presentable.

(ii) $\#X < \lambda$.

まずは (ii) $\Longrightarrow$ (i) を示す．そのためには $(A_i)_{i\in I}$ を $\mathbf{Set}$ における λ-有向列とし，

$$\left(\coprod_{i\in I} A_i\right)^X = \coprod_{i\in I}({A_i}^X)$$

となることを示せばよい．ただし例 2.2.2 があるので，実質的に示すべきことは

$$\left(\bigcup_{i\in I} A_i\right)^X = \bigcup_{i\in I}({A_i}^X)$$

[†1] 日本語が分からなかった．「表現可能」だと「表現可能関手」と被るし……

である．$\supseteq$ 側の包含は明らかなので，逆向きの包含を確認することにする．
$f\colon X \to \bigcup_{i\in I} A_i$ とする．各 $x \in X$ に対し $f(x) \in A_{i_x}$ なる $i_x \in I$ をとり，

$$J := \{i_x \mid x \in X\}$$

と定める．すると $\#J \leq \#X < \lambda$ なので，I が λ-有向であることから J は上界をもつ．それを $\tilde{i}$ と書くことにすると $f\colon X \to A_{\tilde{i}}$ と思えるので，$\subseteq$ 側の包含も言えた．
続いて (i) $\Longrightarrow$ (ii) を確かめる．$\kappa \geq \#X \geq \lambda$ とし，${}^{\forall}i < \kappa\ \#A_i < \lambda$ なる増大列 $(A_i)_{i<\kappa}$ をとる．このとき明らかに

$$\left(\bigcup_{i<\kappa} A_i\right)^X \supsetneq \bigcup_{i<\kappa} {A_i}^X$$

である．
以上で (i) と (ii) の同値性が示された．

定義 2.2.6

C が以下の 2 つの条件を満たすとき，**λ-到達可能**であるという．

(i) C は λ-有向余完備である．
(ii) λ-presentable な対象からなる集合 $S \subseteq C$ であって，「任意の $c \in C$ はある λ-有向図式 $I \to S$ の余極限で表される」ものが存在する．

条件 (ii) を **smallness condition** ともいう．

2.3 Presentable Object の諸性質

定義 2.3.1

図式 $D\colon I \to C$ について，$\#I < \lambda$ のとき D を **λ-小図式**という．

定理 2.3.2

λ を正則基数とする．このとき λ-presentable な λ-小図式の余極限は再び λ-presentable である．

証明

[†2] $D\colon I \to C$ を λ-presentable な λ-小図式とし，$d := \operatorname{colim} D$ とする．また $E\colon J \to C$ を λ-有向図式，$e := \operatorname{colim} E$ とする．さらに $i \in I, j \in J$ に対し $d_i := Di, e_j := Ej$ と書くことにする．
以降，

$$C(d, E-) := \square^d E$$

[†2] だいぶ混乱しながら書いているので，間違っていたらすみません．

と書くことにする．これは J から **Set** への関手である．このもとで

$$e^d \cong \mathrm{colim}(C(d, E-))$$

を示せばよい．

$f \in e^d$ とする．いま各 $i \in I$ について d_i は λ-presentable なので，

$$e^{d_i} \overset{\iota_i}{\cong}_i \mathrm{colim}(C(d_i, E-)) = \coprod_{j \in J} {e_j}^{d_i}$$

が成立する．ここで $\mathrm{colim}\, D$ の普遍射を δ とすると，各 $i \in I$ に対し $\delta_i \colon d_i \to d$，よって $f\delta_i \colon d_i \to e$ である．よって $\iota_i(f\delta_i) \in \coprod_{j \in J} {e_j}^{d_i}$ となり，$\coprod_{j \in J} {e_j}^{d_i}$ の定義から

$$^\exists j_i \in J\ ^\exists g_i \colon d_i \to e_{j_i}\ f\delta_i = [(j_i, g_i)]_\sim$$

すなわち

$$^\exists j_i \in J\ ^\exists g_i \colon d_i \to e_{j_i}\ f\delta_i = \delta_{j_i} g_i$$

となる．この j_i たちを各 $i \in I$ にとっておき $S := \{j_i \mid i \in I\} \subseteq J$ とすると，J が λ-有向であることから，S は上界 $\tilde{j}$ をもつ．$\tilde{j}$ が上界であるということは任意の $i \in I$ に対し射 $h_0^i \colon j_i \to \tilde{j}$ が存在するということなので，これを E で送ることにより $h_i \colon e_{j_i} \to e_{\tilde{j}}$ を得る．$\sim$ の定義から $(j_i, g_i) \sim (\tilde{j}, h_i g_i)$ なので

$$f\delta_i = \delta_{\tilde{j}} h_i g_i$$

となる．ここから $f \colon d \to e_{\tilde{j}}$ であることが従い，$e^d \subseteq \coprod_{j \in J} {e_j}^d$ を得る．逆に関しては，右辺がほぼ $\bigsqcup_{j \in J} {e_j}^d$ であることから従う (これは今後も同様なので適宜省略する)． □

定義 2.3.3

$c, d \in C$ とし，$i \colon c \to d$, $r \colon d \to c$ とする．これらが $ri = \mathrm{id}_c$ をみたすとき，

- i を r の**セクション**
- r を i の**レトラクション**
- c を d の**レトラクト**

という．

命題 2.3.4

$d \in C$ について，

$$\{c \in C \mid d \text{はc のレトラクト}\}/\cong$$

は集合である．

証明

c_1, c_2 を d のレトラクトとし，$k=1,2$ に対し $i_k\colon c_i \to d$, $r_k\colon d \to c_k$ および $r_i k_i = \mathrm{id}_{c_k}$ をみたすとする．このとき $i_k r_k \in C(d,d)$ であるが，もし $i_1 r_1 = i_2 r_2$ であれば

- $(r_2 i_1)(r_1 i_2) = \mathrm{id}_{c_2}$
- $(r_1 i_2)(r_2 i_1) = \mathrm{id}_{c_1}$

より，$c_1 \cong c_2$ である．よって d のレトラクトは (同型を除くと) 高々 $C(d,d)$ の分だけしか存在しないが，$C(d,d)$ は集合なのでレトラクトも (同型を除くと) 集合である． □

命題 2.3.5

λ-presentable な対象のレトラクトも λ-presentable である．

証明

$c \in C$ は λ-presentable とする．また $D\colon I \to C$ を λ-有向図式，$d_i := Di$ とし，余極限錐を $(\mathrm{colim}\, D, \delta)$ とする．すると c が λ-presentable であることから

$$d^c \cong \coprod_{i\in I} {d_i}^c$$

が成立する．

ここで c' を c のレトラクトとし，セクションを i，レトラクションを r とする．また $f\colon c' \to d$ を任意にとる．このとき $fr \in d^c \cong \coprod_{j\in I} {d_j}^c$，すなわち

$$^\exists j \in J \ ^\exists g\colon c \to d_j \ fr = [(j,g)]_\sim$$

すなわち

$$^\exists j \in J \ ^\exists g\colon c \to d_j \ fr = \delta_j g$$

が成立する．この (j,g) をとってしまえば $fri = f = \delta_j g i$ となり，$d^{c'} \subseteq \coprod_{j\in I} {d_j}^{c'}$ を得る． □

命題 2.3.6

$D\colon I \to C$ を λ-有向図式とし，その余極限錐を $(\mathrm{colim}\, D, \delta)$ とする．もし $\mathrm{colim}\, D$ が λ-presentable であれば，δ_i がレトラクションとなるような $i \in I$ が存在する．

証明

$d^d = \coprod_{i\in I} {d_i}^d$ であることから，

$$^\exists i \in I \ ^\exists f\colon d_i \to d \ id_d = \delta_i f$$

が成立する． □

3 Abstract Elementary Class

3.1 モデル理論・改

以下，κ を無限基数とする．

定義 3.1.1

全ての関数記号や関係記号のアリティが κ 未満である言語を **κ-ary 言語**という．また κ-ary 言語の**構造**や**項**は，普通の言語のときと同様に定める．

普段扱っている有限アリティの言語は，ω-ary 言語である．
以降，$\mathcal{L} = (\mathcal{R}, \mathcal{F})$ を κ-ary 言語とする．

定義 3.1.2

λ を $\lambda \geq \kappa$ なる基数とする．このとき **$\mathcal{L}_{\lambda,\kappa}$-formula** を次のように定める．

- $\top, \bot$ は $\mathcal{L}_{\lambda,\kappa}$-formula である．
- $\mathcal{L}$-項 t_1, t_2 に対し，「$t_1 = t_2$」は $\mathcal{L}_{\lambda,\kappa}$-formula である．
- $R \in \mathcal{R}$ および $\mathcal{L}$-項の (無限でもよい) 列 $\vec{t}$ に対し，$R(\vec{t})$ は $\mathcal{L}_{\lambda,\kappa}$-formula である．
  - ここまでの 3 つを合わせて **atomic formula** という．
- φ, ψ が $\mathcal{L}_{\lambda,\kappa}$-formula のとき，以下はすべて $\mathcal{L}_{\lambda,\kappa}$-formula.
  - $\varphi \to \psi$
  - $\neg\varphi$
  - $\#\vec{x} < \kappa$ のとき，$\forall \vec{x}\, \varphi$ および $\exists \vec{x}\, \varphi$
- $\#S < \lambda$ であり，かつ $(\varphi_\alpha)_{\alpha \in S}$ がすべて $\mathcal{L}_{\lambda,\kappa}$-formula のとき，以下は $\mathcal{L}_{\lambda,\kappa}$-formula.
  - $\displaystyle\bigwedge_{\alpha \in S} \varphi_\alpha, \bigvee_{\alpha \in S} \varphi_\alpha$

  ただし，結果として表れる変数の個数は κ 個未満でなければならない．

$\mathcal{L}_{\lambda,\kappa}$-formula 全体の集合を単に $\mathcal{L}_{\lambda,\kappa}$ と書き，また

- $\displaystyle\mathcal{L}_{\infty,\kappa} := \bigcup_{\lambda} \mathcal{L}_{\lambda,\kappa}$
- $\displaystyle\mathcal{L}_{\infty,\infty} := \bigcup_{\kappa} \mathcal{L}_{\infty,\kappa}$

と定める．

ここまで定義すれば**自由変数**，**文**，**理論**，**モデル**，$\models$ 等は自然と定まるので，定まったものとみなす．以下，$\mathcal{M}, \mathcal{N}, \ldots$ は $\mathcal{L}$-構造とし，そのドメインを $M, N, \ldots$ で表す．

定義 3.1.3

(1) $f\colon M \to N$ が任意の atomic formula $\varphi(\vec{x})$ および $\vec{a} \in M$ に対し

$$\mathcal{M} \models \varphi(\vec{a}) \implies \mathcal{N} \models \varphi(f(\vec{a}))$$

をみたすとき，f を**準同型**といい，$f\colon \mathcal{M} \to \mathcal{N}$ と表記する．

3.2 Abstract Elementary Class の定義

定義 3.2.1

μ を正則基数，$\mathcal{L}$ を μ-ary 言語，K を $\mathcal{L}$-構造の集まり，$\leq$ を K 上の半順序とし，$\mathbb{K} := (\mu, \mathcal{L}, K, \leq)$ とする．これらが以下の条件を満たすとき，**∞-abstract elementary class** あるいは **μ-abstract elementary class** という．

(i)
- K は同型で閉じている．
- $\mathcal{M} \leq \mathcal{N}$ のとき，$\mathcal{M}$ は $\mathcal{N}$ の部分構造である．
- $\mathcal{M} \leq \mathcal{N}$ かつ $f\colon \mathcal{N} \cong \mathcal{N}'$ のとき，$f(\mathcal{M}) \leq \mathcal{N}'$ である．

これらをまとめて **Abstract Class Axiom** といい，(AbC) で表す．

(ii) $\mathcal{M}_0, \mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2 \in K$ かつ $M_0 \subseteq M_1, \mathcal{M}_0 \leq \mathcal{M}_2, \mathcal{M}_1 \leq \mathcal{M}_2$ のとき，$\mathcal{M}_0 \leq \mathcal{M}_1$ である：

$$\begin{array}{ccc} & \mathcal{M}_2 & \\ \rotatebox{45}{$\leq$} & & \rotatebox{-45}{$\geq$} \\ \mathcal{M}_0 & \subseteq & \mathcal{M}_1 \end{array} \implies \begin{array}{ccc} & \mathcal{M}_2 & \\ \rotatebox{45}{$\leq$} & & \rotatebox{-45}{$\geq$} \\ \mathcal{M}_0 & \leq & \mathcal{M}_1 \end{array}$$

これを **Coherence Axiom** といい，(Ch) で表す．

(iii) $(\mathcal{M}_i)_{i \in I} \subseteq K$ が μ-有向増大列のとき，$\mathcal{M} := \bigcup_{i \in I} \mathcal{M}_i$ とおけば以下が成立する．

- $\mathcal{M} \in K$
- 任意の $i \in I$ に対し，$\mathcal{M}_i \leq \mathcal{M}$
- 「任意の $i \in I$ に対し $\mathcal{M}_i \leq \mathcal{N}$」のとき，$\mathcal{M} \leq \mathcal{N}$

これを **Tarski-Vaught Chain Axiom** といい，(TV) で表す．

(iv) 以下を満たす $\#\mathcal{L} + \mu$ 以上の基数 λ が存在する．

> 任意の $\mathcal{M} \in K$ および $A \subseteq M$ に対し，
>
> - $\mathcal{M}_0 \leq \mathcal{M}$
> - $A \subseteq M_0$
> - $\#M_0 \leq \#A^{<\mu} + \lambda$
>
> を満たす $\mathcal{M}_0 \in K$ が存在する．

この λ のうち最小のものを $\mathrm{LS}(\mathbb{K})$ と書き，**Löwenheim-Skolem-Tarski 数**という．またこ

の条件を **Löwenheim-Skolem-Tarski Smallness Axiom** といい，(LST) で表す．

(iii) は初等鎖によるモデルの構成，(iv) は下方 Löwenheim-Skolem の定理に対応している．これらのことから，AEC はモデル理論を実行するための最低限の枠組みを与えていると考えることができる．

例 3.2.2

$\mathcal{L}$ を $\aleph_0$-ary 言語 (つまり普通の意味での言語)，T を $\mathcal{L}$-理論とする．T のモデル全体を $\mathrm{Mod}(T)$ と書くことにすれば，$(\aleph_0, \mathcal{L}, \mathrm{Mod}(T), \preceq)$ は ∞-AEC である．

以降，$\mathbb{K} = (\mu, \mathcal{L}, K, \leq)$ を ∞-AEC とする．$\mathbb{K}$ は

- $\mathrm{Ob}\,\mathbb{K} = K$
- $\mathcal{M}, \mathcal{N} \in K$ に対し，
$$\mathbb{K}(\mathcal{M}, \mathcal{N}) = \{f \colon \mathcal{M} \to \mathcal{N} \mid f(\mathcal{M}) \leq \mathcal{N}\}$$

なる圏であって追加の公理を満たすものだと思えるので，これも適宜用いることにする．

3.3 タイプ

定義 3.3.1

$\mathcal{M} \in \mathbb{K}$ に対し，圏 $\mathbb{K}^*_{\mathcal{M}}$ を次のように定める．

- $\mathrm{Ob}\,\mathbb{K}^*_{\mathcal{M}} := \{(f, b) \mid f \colon \mathcal{M} \to \mathcal{N}, b \in N\}$
- $f_i \colon \mathcal{M} \to \mathcal{N}_i$ $(i = 1, 2)$ および $b_i \in \mathcal{N}_i$ $(i = 1, 2)$ に対し，
$$\mathbb{K}^*_{\mathcal{M}}((f_1, b_1), (f_2, b_2)) := \{h \in \mathbb{K}(\mathcal{N}_1, \mathcal{N}_2) \mid hf_1 = f_2, h(b_1) = b_2\}$$

この圏を図示するために，$h \colon (f_1, b_1) \to (f_2, b_2)$ であることを

$$\begin{tikzcd}
b_1 \arrow[rrrddd, mapsto] & & & \\
\cap & & & \\
\mathcal{N}_1 \arrow[rdd, "h"] & & & \\
\mathcal{M} \arrow[u, "f_1"] \arrow[r, "f_2"'] & \mathcal{N}_2 & \ni & b_2
\end{tikzcd}$$

と書くことにする．

命題 3.3.2

$\mathbb{K}$ が (AP) をもつとき，$\mathbb{K}^*_{\mathcal{M}}$ も (AP) をもつ．

証明

amalgam を構成したい図式として，以下をとる．

$$
\begin{tikzcd}
a_2 & & & \\
\rotatebox[origin=c]{-90}{$\in$} & & & \\
\mathcal{N}_2 & & & \\
\mathcal{M} \arrow[u, "f_2"] \arrow[r, "f_1"'] \arrow[d, "f_3"'] & \mathcal{N}_1 \arrow[ul, "h_2"'] \arrow[dl, "h_3"] & \ni & a_1 \arrow[uuulll, mapsto] \arrow[dddlll, mapsto] \\
\mathcal{N}_3 & & & \\
\rotatebox[origin=c]{90}{$\in$} & & & \\
a_3 & & &
\end{tikzcd}
$$

まず $\mathbb{K}$ の (AP) より，以下の図式の赤い部分が可換となる $\mathcal{A}, g_2, g_3$ がとれる．

$$
\begin{tikzcd}
 & a_2 & & & \\
 & \rotatebox[origin=c]{-90}{$\in$} & & & \\
 & \textcolor{red}{\mathcal{N}_2} \arrow[dl, red, "g_2"'] & & & \\
\textcolor{red}{\mathcal{A}} & \mathcal{M} \arrow[l, dashed] \arrow[u, "f_2"] \arrow[r, "f_1"'] \arrow[d, "f_3"'] & \textcolor{red}{\mathcal{N}_1} \arrow[ul, red, "h_2"'] \arrow[dl, red, "h_3"] & \ni & a_1 \arrow[uuulll, mapsto] \arrow[dddlll, mapsto] \\
 & \textcolor{red}{\mathcal{N}_3} \arrow[ul, red, "g_3"] & & & \\
 & \rotatebox[origin=c]{90}{$\in$} & & & \\
 & a_3 & & &
\end{tikzcd}
$$

ただし，点線の矢印は $g_1 := g_2 f_2$ である．するともともとの図式の可換性から $g_1 = g_3 f_3$ も従う．

ここで $a := g_2(a_2)$ とおく．すると赤い部分の可換性から $z = g_3(a_3)$ でもある．これをまとめると，以下の図式が可換となる．

$$
\begin{tikzcd}
 & & & a_2 \arrow[dddlll, mapsto] & & & \\
 & & & \rotatebox[origin=c]{-90}{$\in$} & & & \\
 & & & \mathcal{N}_2 \arrow[dl, "g_2"'] & & & \\
a & \in & \mathcal{A} & \mathcal{M} \arrow[l, dashed] \arrow[u, "f_2"] \arrow[r, "f_1"'] \arrow[d, "f_3"'] & \mathcal{N}_1 \arrow[ul, "h_2"'] \arrow[dl, "h_3"] & \ni & a_1 \arrow[uuulll, mapsto] \arrow[dddlll, mapsto] \\
 & & & \mathcal{N}_3 \arrow[ul, "g_3"] & & & \\
 & & & \rotatebox[origin=c]{90}{$\in$} & & & \\
 & & & a_3 \arrow[uuulll, mapsto] & & &
\end{tikzcd}
$$

よって $\mathbb{K}^*_{\mathcal{M}}$ も (AP) をもつ． □

以下，$(f, \mathcal{N}) \in \mathbb{K}^*_{\mathcal{M}}$ に対し，$(f, \mathcal{N})$ を含む “連結成分” を $[(f, \mathcal{N})]$ と書くことにする．

定義 3.3.3

$\mathcal{M} \in \mathbb{K}$ とする.

(1) $S(\mathcal{M}) :=\{[(f, \mathcal{N})] \mid (f, \mathcal{N}) \in \mathbb{K}^*_{\mathcal{M}}\}$ と定め，各 $p \in S(\mathcal{M})$ を $\mathcal{M}$ 上の**タイプ**という.

(2) $\mathcal{M} \leq \mathcal{N}$ とし，$\iota\colon \mathcal{M} \hookrightarrow \mathcal{N}$, $p \in S(\mathcal{M})$ とする．$b \in N$ であって $[(f, b)] = p$ となるものが存在するとき，p は $\mathcal{N}$ で**実現**されるという.

命題 3.3.4

$\mathcal{M} \in \mathbb{K}$ に対し，以下が成立する.

(1) $p \in S(\mathcal{M})$ が $\mathcal{N} \geq \mathcal{M}$ で実現され，しかも $\mathcal{N} \leq \mathcal{N}'$ のとき，p は $\mathcal{N}'$ で実現される.

(2) $p \in S(\mathcal{M})$ のとき，p を実現ししかも $\#N \leq \mathrm{LS}(\mathbb{K}) + \#M$ なる $\mathcal{N} \geq \mathcal{M}$ が存在する.

(3) $M_0 \leq M$, $q \in S(\mathcal{M}_{,})$ かつ $\mathbb{K}$ が (AP) をもつとき，p を実現ししかも $\#N \leq \mathrm{LS}(\mathbb{K}) + \#M$ なる $\mathcal{N} \geq \mathcal{M}$ が存在する.

証明

(1) $p = [(f, a)]$ とする.
$\mathcal{M} \overset{\iota_1}{\hookrightarrow} \mathcal{N} \overset{\iota_2}{\hookrightarrow} \mathcal{N}'$ とする．また $[(\iota_1, b)] = p$ なる $b \in N$ をとる．このとき

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{N}' & \ni \iota_2(b) & \\
\mathcal{N} \arrow[u, hook] \arrow[dr, dashed] & \ni \quad b \arrow[u, mapsto] \arrow[dr, dashed, mapsto] & \\
\mathcal{M} \arrow[u, hook] \arrow[r, "f"'] & \mathcal{N}_0 \quad \ni & a
\end{tikzcd}$$

は可換となる．ただし点線部分には $[(f, a)] = [(\iota_1, b)]$ の witness が入る．ここから $p = [(\iota_2\iota_1, \iota_2(b))]$ となり，p は $\mathcal{N}'$ で実現される.

(2) $p = [(f\colon \mathcal{M} \to \mathcal{N}_0, a_0)]$ とする．このもとで $\mathcal{N} \in \mathbb{K}$ を，fresh な a を用いて

$$\mathbb{N} := M \cup \{a\}$$

で定める．このとき $\tilde{f} := f \cup \{(a, a_0)\}$ とすると

$$\begin{tikzcd}
a \arrow[d, phantom, "\rotatebox{90}{$\in$}"] \arrow[ddrr, mapsto] & & \\
\mathcal{N} \arrow[dr, "\tilde{f}"] & & \\
\mathcal{M} \arrow[u, hook] \arrow[r, "f"'] & \mathcal{N}_0 \quad \ni & a_0
\end{tikzcd}$$

は可換となる．また (LST) より，$\mathcal{N}' \leq \mathcal{N}$ であって，$a \in N'$ かつ $\#N' \leq \mathrm{LS}(\mathbb{K}) + \#M$ なるものがとれる：

$$
\begin{tikzcd}
a & = & a \arrow[rrrddd, mapsto] & & & \\
\rotatebox{90}{$\in$} & & \rotatebox{90}{$\in$} & & & \\
\mathcal{N}' & \leq & \mathcal{N} \arrow[dr, "\tilde{f}"] & & & \\
& & \mathcal{M} \arrow[u, hook] \arrow[r, "f"'] & \mathcal{N}_0 & \ni & a_0
\end{tikzcd}
$$

この図式により，p は $\mathcal{N}'$ で実現されることがわかる．

(3) $q = [(f\colon \mathcal{M}_0 \to \mathcal{N}_0, a)]$ とすると，(2) より

$$
\begin{tikzcd}
{}^{\exists}a \arrow[rrrddd, dashed, mapsto] & & & \\
\rotatebox{90}{$\in$} & & & \\
{}^{\exists}\mathcal{N} \arrow[dr, dashed] & & & \\
\mathcal{M}_0 \arrow[u, hook] \arrow[r, "f"'] & \mathcal{N}_0 & \ni & a_0 \\
\rotatebox{90}{$\leq$} & & & \\
\mathcal{M} & & &
\end{tikzcd}
$$

である．$\mathbb{K}$ が (AP) をもつので，ここからさらに

$$
\begin{tikzcd}
& & & a \arrow[dddlll, dashed, mapsto, "{}^{\exists}g"'] \arrow[rrrddd, mapsto] & & & \\
& & & \rotatebox{90}{$\in$} & & & \\
& & & \mathcal{N} \arrow[dl, dashed] \arrow[dr] & & & \\
g(a) & \in & {}^{\exists}\mathcal{N}' & \mathcal{M}_0 \arrow[u, hook] \arrow[r, "f"'] & \mathcal{N}_0 & \ni & a_0 \\
& & & \rotatebox{90}{$\leq$} & & & \\
& & & \mathcal{M} \arrow[uul, dashed] & & &
\end{tikzcd}
$$

となる．あとはこの $\mathcal{N}'$ に対し (2) の終盤と同様の加工を施せば，それが欲しかった構造となる． □

これ以降，$\mathbb{K}$ は (AP) をもつことを仮定する．すると補題 1.4.3 より次が従う．

系 3.3.5

$(f_1\colon \mathcal{M} \to \mathcal{N}_1, a_1), (g_2\colon \mathcal{M} \to \mathcal{N}_2, a_2) \in \mathbb{K}^*_{\mathcal{M}}$ に対し，以下は同値．

(i) $(f_1, a_1), (f_2, a_2)$ は連結．

(ii) $(f_1, a_1), (f_2, a_2)$ は jointly connected，すなわち以下の図式が可換となる．

$$
\begin{tikzcd}
a_1 \arrow[d, phantom, sloped, "\in"] \arrow[rr, dashed, mapsto] & & {}^{\exists}a \\
\mathcal{N}_1 \arrow[r, dashed] & {}^{\exists}\mathcal{N}' \arrow[ur, phantom, sloped, "\ni"] & \\
\mathcal{M} \arrow[u, "f"] \arrow[r, "g"'] & \mathcal{N}_2 \arrow[u, dashed] \arrow[r, phantom, "\ni"] & a_2 \arrow[uu, dashed, mapsto]
\end{tikzcd}
$$

3.4 Universal Model と Stable Class

定義 3.4.1

λ を無限基数，$\mathcal{M}, \mathcal{N} \in \mathbb{K}$ は $\mathcal{M} \leq \mathcal{N}$ をみたすとする．

(1) $\#M' < \lambda$ なる任意の $\mathcal{M}' \in \mathbb{K}$ および任意の $f\colon \mathcal{M} \to \mathcal{M}'$ に対し，図式

$$
\begin{tikzcd}
\mathcal{N} & \\
\mathcal{M} \arrow[u, phantom, sloped, "\leq"] \arrow[r, "f"'] & \mathcal{M}' \arrow[ul, "g"']
\end{tikzcd}
$$

が可換となるような $g\colon \mathcal{M}' \to \mathcal{N}$ が存在するとき，$\mathcal{M}$ が $\mathcal{N}$ 上 **λ-universal** であるという．

(2) $(\#M)^+$-universal なモデルを単に **universal** という．

定義 3.4.2

任意の $\mathcal{M} \in \mathbb{K}_\lambda$ に対し $\#S(\mathcal{M}) = \lambda$ となるとき，$\mathbb{K}$ は **λ-安定**であるという．

参考として，モデル理論における「universal model」および「安定」の定義は以下の通りであった．

定義 3.4.3

$\mathcal{M} \models T$ が **λ-universal** であるとは，$\#M' < \lambda$ なる任意の $\mathcal{M}' \models T$ に対し $\mathcal{M}' \preceq \mathcal{M}$ が成立することである．

定義 3.4.4

T が **λ-安定**であるとは，任意の $\mathcal{M} \models T$ および $\#A = \lambda$ なる任意の $A \subseteq M$ に対し $\#S_n^{\mathcal{M}}(A) = \lambda$ となること．

よって定義 3.4.1 および定義 3.4.2 はそれぞれ普通の意味での universal model および安定理論を一般化したものといえる．

参考文献

[1] Sebastien Vasey, “Accessible Categories, Set Theory, and Model Theory: an Invitation”, arXiv, 2020, arXiv:1904.11307

[2] 中平健治, “ストリング図で学ぶ圏論の基礎”, 森北出版, 2025

[3] Jiří Adámek & Jiří Rosický, “Locally Presentable and Accessible Categories”, Cambridge University Press, 1994

[4] David Marker, “Model Theory: An Introduction”, Springer, 2002