1

ÇOK DEĞİŞKENLİ REGRESYON ANALİZİ: ÇIKARSAMA

Hüseyin Taştan[1]

[1]Yıldız Teknik Üniversitesi
İktisat Bölümü

Ders Kitabı:
Introductory Econometrics: A Modern Approach (2nd ed.)
J. Wooldridge

14 Ekim 2012

2

Çok Değişkenli Regresyon Analizi: Çıkarsama

- Bu bölümde popülasyon parametreleri için hipotez testleri oluşturacağız.
- "Anakütle hata terimleri (u) normal dağılmıştır" varsayımı (MLR.6) altında SEKK (OLS) tahmin edicilerin örnekleme dağılımlarını inceleyeceğiz.
- Önce tek tek parametreler hakkında hipotez testleri kuracağız, sonra birden çok parametreyi içeren testler yapacağız.
- Bir gurup bağımsız değişkenin tümünün birden model dışında bırakılıp bırakılmayacağına nasıl karar vereceğimizi göreceğiz.

3

OLS Tahmincilerinin Örnekleme Dağılımları (Sampling Distributions)

- İstatistiksel çıkarsama (hipotez testleri, güven aralıkları) yapabilmek için $\hat{\beta}_j$'ların beklenen değer ve varyanslarının yanı sıra örnekleme dağılımlarının da bilinmesi gerekir.
- Bunun için hata teriminin normal dağıldığını varsaymamız gerekmektedir. Gauss-Markov varsayımları altında örnekleme dağılımları herhangi bir şekle sahip olabilir.

MLR.6 Normallik Varsayımı

Popülasyon hata terimi u açıklayıcı değişkenlerden bağımsızdır ve ortalaması 0 ve varyansı σ^2 olan normal dağılıma uyar:

$$u \sim N(0, \sigma^2)$$

- Normallik varsayımı önceki varsayımlardan daha kuvvetli bir varsayımdır.
- MLR.6 varsayımı, MLR.3, Sıfır Koşullu Ortalama ve MLR.5 Sabit Varyans varsayımlarının yapıldığı anlamına gelir.

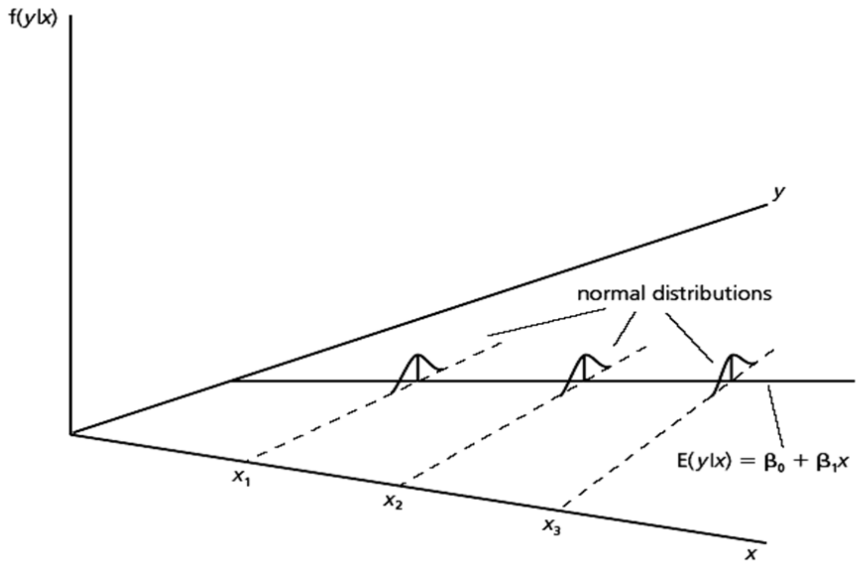
4

OLS Tahmincilerinin Örnekleme Dağılımları (Sampling Distributions)

- MLR.1-MLR.6 varsayımlarına **klasik varsayımlar** denir. (Gauss-Markov varsayımları + Normallik varsayımı)
- Klasik varsayımlar altında OLS tahmin edicileri $\hat{\beta}_j$'ler sadece doğrusal tahmin ediciler arasında değil, doğrusal olsun ya da olmasına, tüm tahmin ediciler arasında sapmasız ve en küçük varyanslı (en iyi) olanlarıdır.
- Klasik varsayımlar özet olarak aşağıdaki gibi gösterilebilir:

$$y|x \sim N(\beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \ldots + \beta_k x_k, \sigma^2)$$

Tek açıklayıcı değişkenli modelde sabit varyanslı normal dağılım



Hata teriminin dağılımını neden normal dağılım sayabiliriz?

- u'lar y'yi etkileyen (x'ler dışında) pek çok faktörün toplam etkisini yansıtır.
- Bu nedenle, merkezi limit teoreminden (central limit theorem, CLT) (App.C) yararlanarak hata teriminin Normal dağıldığını söyleyebiliriz.
- Ancak, bu varsayımın zayıf tarafları da çoktur. Örneğin, u'yu oluşturan faktörlerin anakütle dağılımları çok farklı biçimlerde olabilir. Merkezi limit teoreminin bu durumlarda hala işlediğini varsayıyoruz.
- Bazı durumlarda değişkenlerin dönüştürmeleri (örneğin doğal log) kullanılarak normal dağılıma yakın dağılımlar elde edilebilir.

Hata teriminin dağılımını neden normal dağılım sayabiliriz?

- CLT, u'ları oluşturan gözlenemez faktörlerin toplam (additive) biçiminde yer aldıklarını varsayar.
- Oysa, bunun garantisi yoktur. Eğer, u, bu gözlenemez faktörlerin daha karmaşık bir fonksiyonuysa, CLT bu konuda bize yardımcı olmaz.
- Uygulamada hata teriminin Normal dağılıp dağılmadığı ampirik bir sorundur. Örneğin, ücretlerin; eğitim, tecrübe ve kıdem'e koşullu dağılımının Normal olup olmadığı bir ampirik sorundur.
- Bunun böyle olması gerektiğini söyleyen bir teorem yoktur.
- Ücretlerin negatif değer almaması ve asgari ücret uygulaması, ücretler için Normal dağılım varsayımının fazla geçerli olmadığını telkin eder.

Hata teriminin dağılımını neden normal dağılım sayabiliriz?

- Log dönüştürme dağılımın normale yaklaşmasına oldukça yardımcı olur.
- Örneğin, fiyat değişkeninin dağılımı normalden çok uzak iken logaritmik fiyat Normal dağılıma yakın olmaktadır.
- MLR.6 varsayımının açıkça sağlanamadığı durumlar vardır. Örneğin, sadece birkaç değer alan y'ler böyledir. "ankete katılanların belli bir yılda, 2004 diyelim, hapse giriş sayıları" değişkeni böyledir. Çoğu gözlem için 0, bazı gözlemler için 1,2,3,... gibi değerler alacaktır.
- Daha sonra göreceğimiz gibi, büyük örnek hacimlerine sahipken hata terimlerinin Normal dağılmaması ciddi sorun yaratmayacaktır (asimptotik normallik).

OLS tahmincilerinin örnekleme dağılımları

Örnekleme dağılımları normaldir

MLR.1-MLR.6 varsayımları altında OLS tahmin edicilerinin örnekleme dağılımları normal dağılıma uyar:

$$\hat{\beta}_j \sim N\left(\beta_j, \text{Var}(\hat{\beta}_j)\right)$$

Standardize edersek:

$$\frac{\hat{\beta}_j - \beta_j}{sd(\hat{\beta}_j)} \sim N(0,1)$$

OLS tahmincileri hata teriminin lineer bir kombinasyonu olarak yazılabilir. Normal dağılan rassal değişkenlerin lineer kombinasyları da normal dağılır.

Bir Popülasyon Parametresine İlişkin Testler: t Testi

$$\frac{\hat{\beta}_j - \beta_j}{sd(\hat{\beta}_j)} \sim N(0,1)$$

- Yukarıda paydada yer alan standart sapma (sd) yerine onun bir tahmini olan standart hatayı (se) koyarsak bu oran serbestlik derecesi $n-k-1$ olan t dağılımına uyar:

$$\frac{\hat{\beta}_j - \beta_j}{se(\hat{\beta}_j)} \sim t_{n-k-1}$$

- t testi $H_0 : \beta_j = \beta_j^*$ gibi tek kısıt içeren testlerin yapılmasında kullanılır.

t Testi

Tek Yanlı Anlamlılık Testi (Sağ kuyruk)

$$H_0 : \beta_j = 0$$
$$H_1 : \beta_j > 0$$

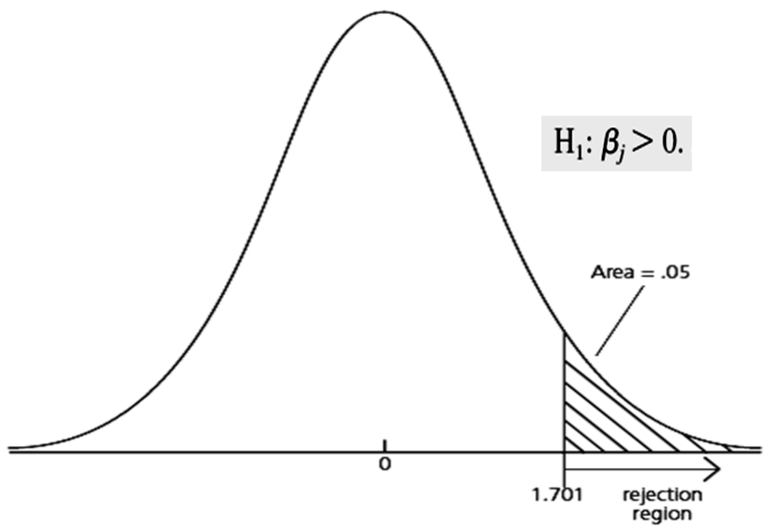
- Boş (null) hipotez şunu söylüyor: $x_1, x_2, \ldots, x_{j-1}, x_{j+1}, \ldots, x_k$'nin etkileri kontrol edildikten sonra x_j'nin y'nin beklenen değeri üzerindeki etkisi sıfırdır.
- Test istatistiği:

$$t_{\hat{\beta}_j} = \frac{\hat{\beta}_j}{se(\hat{\beta}_j)} \sim t_{n-k-1}$$

- Karar kuralı: Hesaplanan $t_{\hat{\beta}_j}$ test istatistiği ilgili anlamlılık düzeyindeki kritik değerden (c) büyükse H_0 reddedilir.

$$t_{\hat{\beta}_j} > c, \quad \text{ise} \quad H_0 \quad \text{RED}$$

28 serbestlik derecesinde sağ kuyruk testi için %5 düzeyinde karar kuralı



13

t Testi

Tek Yanlı Anlamlılık Testi (Sol kuyruk)

$$H_0 : \beta_j = 0$$
$$H_1 : \beta_j < 0$$

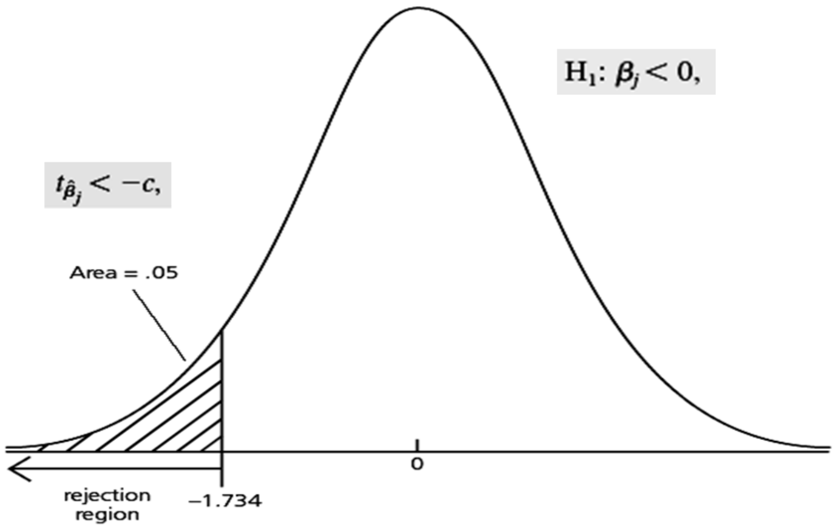
- Test istatistiği:

$$t_{\hat{\beta}_j} = \frac{\hat{\beta}_j}{se(\hat{\beta}_j)} \sim t_{n-k-1}$$

- Karar kuralı: Hesaplanan $t_{\hat{\beta}_j}$ test istatistiği ilgili anlamlılık düzeyindeki kritik değerden $(-c)$ küçükse H_0 reddedilir.

$$t_{\hat{\beta}_j} < -c, \quad \text{ise} \quad H_0 \quad \text{RED}$$

Sol kuyruk testi için karar kuralı, s.d.=18



15

t Testi

İki Taraflı Anlamlılık Testi

$$H_0 : \beta_j = 0$$
$$H_1 : \beta_j \neq 0$$

- Test istatistiği:

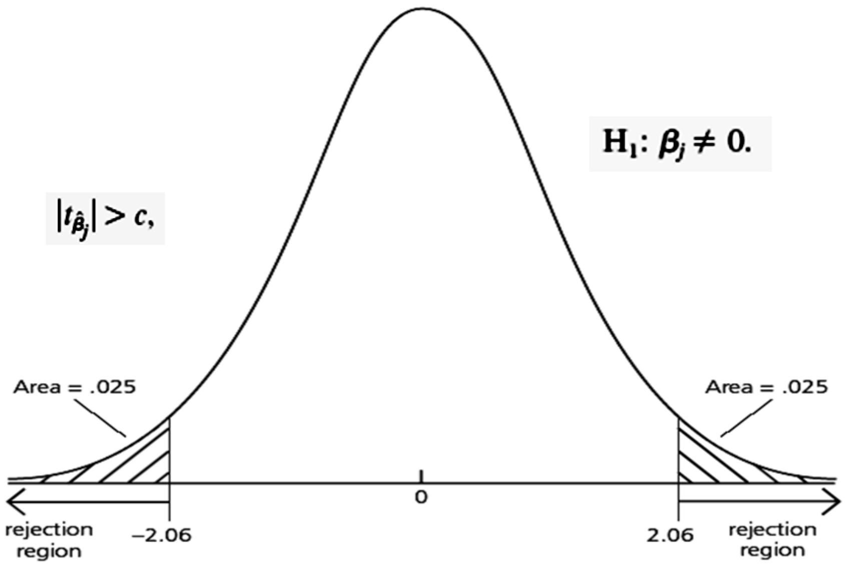
$$t_{\hat{\beta}_j} = \frac{\hat{\beta}_j}{se(\hat{\beta}_j)} \sim t_{n-k-1}$$

- Karar kuralı: Hesaplanan $|t_{\hat{\beta}_j}|$ test istatistiği ilgili anlamlılık düzeyindeki kritik değerden $(c = t_{n-k-1,\alpha/2})$ büyükse H_0 reddedilir.

$$|t_{\hat{\beta}_j}| > c, \quad \text{ise} \quad H_0 \quad \text{RED}$$

- İşaretin ne olacağına dair teorik ön kabul yoksa bu alternatif hipotez formülasyonu kullanılabilir.

İki taraflı karşı hipotez için %5 anlamlılık düzeyinde karar kuralı, s.d.(df)=25



t Testi: Örnekler

Logaritmik Saat Başına Ücret Denklemi: wage1.gdt

$$\widehat{\log(\text{wage})} = \underset{(0.104)}{0.284} + \underset{(0.007)}{0.092}\,\text{educ} + \underset{(0.0017)}{0.004}\,\text{exper} + \underset{(0.003)}{0.022}\,\text{tenure}$$

$$n = 526 \quad R^2 = 0.316$$

(standart hatalar parantez içindedir)

- Tecrübe (exper) değişkeni istatistik bakımından anlamlı mı? $H_0 : \beta_{exper} = 0$ vs. $H_1 : \beta_{exper} > 0$
- Hesaplanan t-istatistiği: $t_{\hat{\beta}_j} = 0.004/0.0017 = 2.41$
- %5 anlamlılık düzeyinde tek taraflı kritik değer $c_{0.05} = 1.645$, %1 anlamlılık düzeyinde tek taraflı kritik değer $c_{0.01} = 2.326$, s.d. = 526-4=522
- $t_{\hat{\beta}_j} > 2.326$ olduğundan H_0 reddedilebilir. Exper değişkeni %1 düzeyinde anlamlıdır. $\hat{\beta}_{exper}$ %1 anlamlılık düzeyinde istatistik bakımından sıfırdan büyüktür.

t Testi: Örnekler

Öğrenci performansı ve okul büyüklüğü: meap93.gdt

$$\widehat{\text{math10}} = \underset{(6.114)}{2.274} + \underset{(0.0001)}{0.00046}\,\text{totcomp} + \underset{(0.0398)}{0.048}\,\text{staff} - \underset{(0.00022)}{0.0002}\,\text{enroll}$$

$$n = 408 \quad R^2 = 0.0541$$

math10: matematik sınav sonuçları (öğrenci performansı), totcomp: öğretmenlere ödenen yıllık ücret ve diğer ödemeler, staff: 1000 öğrenci başına öğretmen sayısı, enroll: öğrenci sayısı (okul büyüklüğü)

- Okul büyüklüğü (enroll) değişkeni istatistik bakımından anlamlı mı? $H_0 : \beta_{enroll} = 0$ vs. $H_1 : \beta_{enroll} < 0$
- Hesaplanan t-istatistiği: $t_{\hat{\beta}_j} = -0.0002/0.00022 = -0.91$
- %5 anlamlılık düzeyinde tek taraflı kritik değer $c_{0.05} = -1.645$
- $t_{\hat{\beta}_j} > -1.645$ olduğundan H_0 reddedilemez.
- $\hat{\beta}_{enroll}$ %5 anlamlılık düzeyinde istatistik bakımından sıfırdan farklı değildir (anlamsızdır).

t Testi: Örnekler

Öğrenci performansı ve okul büyüklüğü: Level-Log modeli

$$\widehat{\text{math10}} = \underset{(48.7)}{-207.67} + \underset{(4.06)}{21.16}\,\text{ltotcomp} + \underset{(4.19)}{3.98}\,\text{lstaff} - \underset{(0.69)}{1.27}\,\text{lenroll}$$

$$n = 408 \quad R^2 = 0.065$$

- Okul büyüklüğü (enroll) değişkeni istatistik bakımından anlamlı mı? $H_0 : \beta_{enroll} = 0$ vs. $H_1 : \beta_{enroll} < 0$
- Hesaplanan t-istatistiği: $t_{\hat{\beta}_j} = -1.27/0.69 = -1.84$
- %5 anlamlılık düzeyinde tek taraflı kritik değer $c_{0.05} = -1.645$
- $t_{\hat{\beta}_j} < -1.645$ olduğundan H_0, H_1 lehine reddedilir.
- $\hat{\beta}_{enroll}$ %5 anlamlılık düzeyinde istatistik bakımından sıfırdan farklıdır (sıfırdan küçüktür).

t Testi: Örnekler

Üniversite Başarısını Belirleyen Faktörler

$$\widehat{\text{colGPA}} = \underset{(0.331)}{1.389} + \underset{(0.094)}{0.412}\,\text{hsGPA} + \underset{(0.011)}{0.015}\,\text{ACT} - \underset{(0.026)}{0.083}\,\text{skipped}$$

$$n = 141 \quad R^2 = 0.23$$

skipped: haftada kaçırılan ortalama ders sayısı

- İki taraflı alternatif ile hangi katsayılar istatistik bakımından anlamlıdır?
- %5 anlamlılık düzeyinde iki taraflı kritik değer $c_{0.025} = 1.96$. Serbestlik derecesi, dof=141-4=137, standart normal dağılımın kritik değerleri kullanılabilir.
- $t_{hsGPA} = 4.38$: hsGPA istatistik bakımından anlamlı.
- $t_{ACT} = 1.36$: ACT istatistik bakımından anlamsız.
- $t_{skipped} = -3.19$: skipped istatistik bakımından anlamlı (%1 düzeyinde bile anlamlı, $c = 2.58$).

β_j'nin Sıfırdan Farklı Değerler için Testi

t Testi

Boş Hipotez

$$H_0 : \beta_j = a_j$$

uygun test istatistiği

$$t = \frac{\hat{\beta}_j - a_j}{se(\hat{\beta}_j)} \sim \; t_{n-k-1}$$

ya da

$$t = \frac{tahmin - hipotez\ degeri}{standart\ hata}$$

- t istatistiği tahmin değerinin hipotez değerinden kaç standart sapma uzaklıkta olduğunu ölçmektedir.
- Karar kuralı: alternatif hipotezin türüne göre (sağ kuyruk, sol kuyruk, iki kuyruklu) önceki durumlarla aynıdır.

β_j'nin Sıfırdan Farklı Değerler için Testi: Örnek

Üniversite büyüklüğü ve kampüs suçlar: campus.gdt

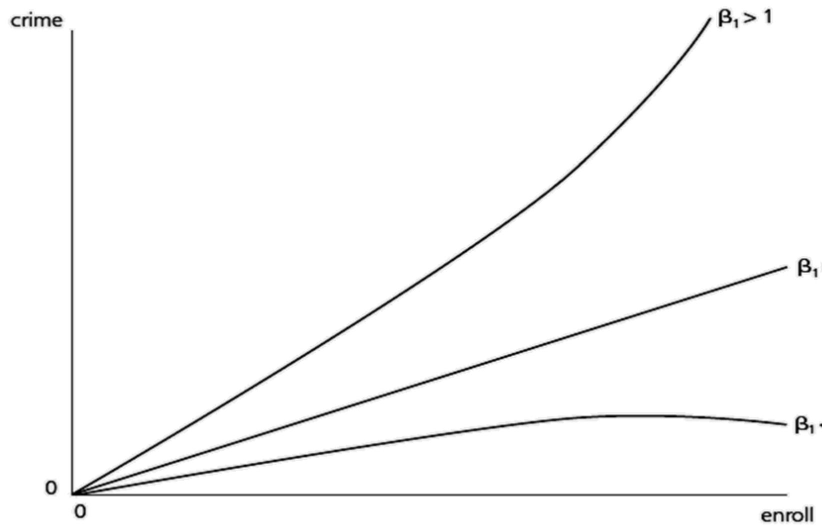
$$crime = \exp(\beta_0) enroll^{\beta_1} \exp(u)$$

Doğal logaritması alınırsa:

$$\log(crime) = \beta_0 + \beta_1 \log(enroll) + u$$

- Veri seti: ABD'deki 97 üniversiteye ilişkin öğrenci sayısı ve suç sayısı
- crime: üniversite kampüslerinde işlenen suç sayısı, enroll: öğrenci sayısı
- Test: $H_0 : \beta_1 = 1,\ H_1 : \beta_1 > 1$

Suç modelinin grafiği: $crime = enroll^{\beta_1}$



β_j'nin Sıfırdan Farklı Değerler için Testi: Örnek

Üniversite büyüklüğü ve kampüs suçları: campus.gdt

$$\widehat{\log(\text{crime})} = \underset{(1.03)}{-6.63} + \underset{(0.11)}{1.27}\ \text{log(enroll)}$$

$$n = 97 \quad R^2 = 0.585$$

- Test: $H_0 : \beta_1 = 1,\ H_1 : \beta_1 > 1$
- Test istatistiği

$$t = \frac{1.27 - 1}{0.11} \approx 2.45 \sim \; t_{95}$$

- %5 düzeyinde kritik değer, c=1.66 ($dof = 120$ için), H_0 Red
- Bu modelde hangi faktörler sabit tutulmuştur? Ceteris paribus etkinin doğru ölçüldüğü söylenebilir mi?

β_j'nin Sıfırdan Farklı Değerler için Testi: Örnek

Hava Kirliliği ve Ev Fiyatları: hprice2.gdt

Bağımlı değişken: o bölgedeki evlerin medyan fiyatının logaritması(log(price))

Açıklayıcı değişkenler:

log(nox): bölgedeki hava kirliliği ölçütünün logaritması,
log(dist): bölgenin iş merkezlerine uzaklığının logaritması,
rooms: bölgedeki evlerin ortalama oda sayısı,
stratio: ortalama öğrenci-öğretmen oranı

- Test: $H_0 : \beta_{log(nox)} = -1$, $H_1 : \beta_{log(nox)} \neq -1$
- Tahmin değeri: $\hat{\beta}_{log(nox)} = -0.954$, standart hata $= 0.117$
- Test istatistiği:

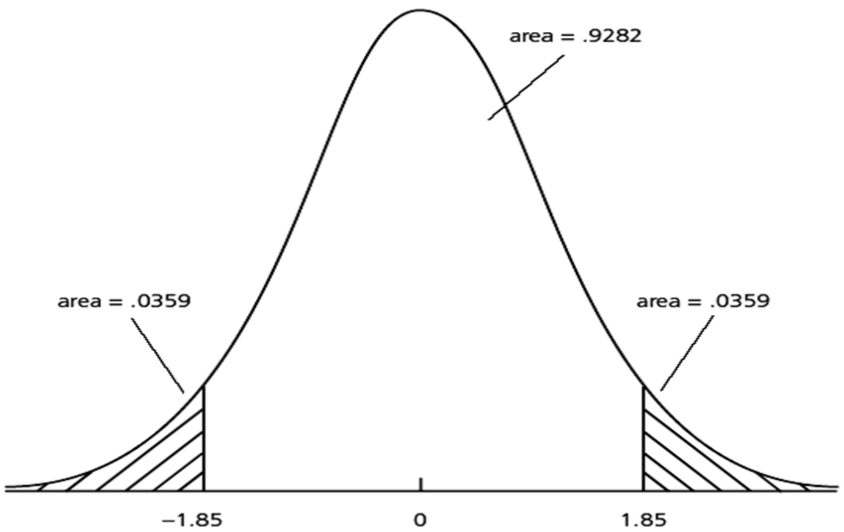
$$t = \frac{-0.954 - (-1)}{0.117} = \frac{-0.954 + 1}{0.117} \approx 0.39 \sim \ t_{501} \sim \ N(0,1)$$

- %5 düzeyinde çift taraflı kritik değer, c=1.96, H_0 Reddedilemez

t Testi için p-değerinin Hesaplanması

- Farklı anlamlılık düzeyleri (%1, %5, %10 gibi), bir başka ifadeyle, farklı 1. tip hata payları, için test yapacağımıza, hesaplanan t değeri için H_0'ı reddedebileceğimiz en düşük anlamlılık düzeyini (α) belirleyebiliriz.
- İşte bu en düşük α düzeyine p-değeri (p-value) denir.
- Standart regresyon paketlerinde otomatik olarak hesaplanan p-değerleri $H0 : \beta_j = 0$ boş hipotezinin iki taraflı testi için hesaplanmış p değerleridir.
- Bu şekilde hesaplanmış p-değeri, ilgili t dağılımında hesaplanan t istatistiğinin mutlak değerinden daha büyük bir sayı çekmenin olasılığını verir.
- p-değeri ne kadar küçükse H_0 aleyhinde kanıt o kadar güçlüdür. Bu durumda boş hipotez daha kolay reddedilebilir.

p-değeri: Örnek Grafiksel Gösterim



p-value = P(|T| > 1.85) = 2P(T > 1.85) = 2(.0359) = .0718,

Büyük standart hatalar ve küçük t değerleri

- Örnek hacmi (n) arttıkça $\hat{\beta}_j$'ların varyansları ve dolayısıyla da standart hataları düşer. Yani, çok daha kesin bir şekilde tahmin yapılabilir.
- Bu nedenle, n büyükken küçük anlamlılık düzeyleri (%1 gibi) ile test yapmak daha uygundur. n küçükken α'yı %10'a kadar düşürerek test yapabiliyoruz.
- Büyük standart hataların diğer bir nedeni bazı x'ler arasındaki yüksek çoklu-bağıntıdır (high multicollinearity).
- Yüksek çoklu-bağıntı durumunda daha fazla gözlem toplamak dışında yapabileceğimiz çok fazla bir şey yoktur.

Ekonomik ve istatistiksel anlamlılığın yorumlanmasında bazı ilkeler

- Öncelikle değişkenin istatistik bakımından anlamlı olup olmadığı kontrol edilmelidir. Eğer anlamlı ise (statistically significant) katsayı tahmininin büyüklüğünden hareketle ekonomik anlamlılık tartışılabilir.
- Bu tartışma özenle yapılmalıdır. Özellikle ölçü birimlerine, log dönüştürmesi olup olmadığına dikkat edilmelidir.
- Eğer bir değişken geleneksel düzeylerde (%1, %5, %10) anlamlı olmasa bile, y üzerindeki etkisinin büyüklüğüne bakılabilir. Bu etki büyükse p-değeri hesaplanıp yorumlanabilir.
- Küçük t-oranlarına sahip değişkenlerin yanlış işarete sahip olmalarına sık rastlanır. Böyle durumda değişkenin etkisi anlamsız olduğundan yorumlanmaz.
- Katsayı tahmini ekonomik ve istatistiksel açıdan anlamlı fakat yanlış işaretli bir değişkenin yorumlanması daha zordur. Bu durumda model spesifikasyonu ve veri problemleri üzerinde durulması gerekebilir.

Güven Aralıkları

- Klasik regresyon modeli varsayımları altında popülasyon parametreleri için güven aralıkları oluşturulabilir.
- Aşağıdaki oranın $n-k-1$ serbestlik derecesi ile t dağılımına uyduğunu biliyoruz:

$$t_{\hat{\beta}_j} = \frac{\hat{\beta}_j}{se(\hat{\beta}_j)} \sim t_{n-k-1}$$

- Bu oranı kullanarak $\%100(1-\alpha)$ güven aralığı şu şekilde oluşturulabilir:

$$\hat{\beta}_j \pm c \cdot \text{se}(\hat{\beta}_j)$$

- Alt ve üst güven sınırları, sırasıyla:

$$\underline{\beta_j} \equiv \hat{\beta}_j - c \cdot \text{se}(\hat{\beta}_j), \quad \overline{\beta_j} \equiv \hat{\beta}_j + c \cdot \text{se}(\hat{\beta}_j)$$

Güven Aralığının Yorumu

$$[\hat{\beta}_j - c \cdot \text{se}(\hat{\beta}_j),\ \hat{\beta}_j + c \cdot \text{se}(\hat{\beta}_j)]$$

- İstatistik dersinde öğrendiğimiz güven aralığı yorumunu burada da yapacağız.
- Olanaklı tüm örneklemleri çeksek ve her örneklem için regresyon tahmin edip, ilgili populasyon katsayısı için güven aralıkları oluştursak, bu güven aralıklarının $\%100(1-\alpha)$ kadarı doğru parametre değerini içerecektir.
- Örneğin 100 güven aralığından 95'inin doğru parametreyi içerdiğini söyleriz. Burada $\alpha/2 = 0.025$ olduğuna dikkat ediniz.
- Pratikte elimizde sadece bir güven aralığı vardır ve biz doğru değerin bu aralık içinde olup olmadığını bilmeyiz.

Güven Aralığının Yorumu

- Güven aralıklarını hesaplayabilmek için üç büyüklüğe ihtiyaç vardır: katsayı tahmini, katsayı tahmininin standart hatası ve kritik değer.
- Örneğin sd=25 ve %95 güven düzeyi ile herhangi bir anakütle parametresi için güven aralığı

$$[\hat{\beta}_j - 2.06 \cdot \text{se}(\hat{\beta}_j),\ \hat{\beta}_j + 2.06 \cdot \text{se}(\hat{\beta}_j)]$$

- $n-k-1 > 50$ ise %95 güven aralığı kısa yoldan $\hat{\beta}_j \pm 2 \cdot \text{se}(\hat{\beta}_j)$ formülü ile bulunabilir.
- Aşağıdaki hipotezi test etmek istediğimizi düşünelim:

$$H_0 : \beta_j = a_j$$

$$H_1 : \beta_j \neq a_j$$

- H_0 ancak ve ancak %95 güven aralığı a_j'yi içermiyorsa %5 anlamlılık düzeyinde H_1 lehine reddedilebilir.

Örnek: Evler için Hedonik Fiyat Modeli

- Bir malın fiyatının o malın karakteristikleriyle açıklanması hedonik fiyat modelinin oluşturur.
- Örneğin bir bilgisayarın fiyatını o bilgisayarın fiziksel özellikleri (CPU gücü, RAM ve görüntü kartının büyüklüğü, vs.)
- Bir evin değerini belirleyen bir çok özelliği bulunur: büyüklüğü, oda sayısı, şehir merkezine, parklara ve okullara uzaklığı, vs.
- Bağımlı değişken: log(price): ev fiyatlarının doğal logaritması
- Açıklayıcı değişkenler: sqrft (square footage) evin büyüklüğü, footkare cinsinden 1 square foot = 0.09290304 m2, yani 100m2 yaklaşık 1076 ftsq, bdrms: evdeki oda sayısı, bthrms: banyo sayısı

Örnek: Evler için Hedonik Fiyat Modeli

Tahmin Sonuçları

$$\widehat{\log(\text{price})} = \underset{(1.15)}{7.46} + \underset{(0.184)}{0.634}\,\text{log(sqrft)} - \underset{(0.059)}{0.066}\,\text{bdrms} + \underset{(0.075)}{0.158}\,\text{bthrms}$$

$$n = 19 \quad R^2 = 0.806$$

- Hem price hem de sqrft logaritmik olduğundan ilgili katsayı bize esnekliği verir: Oda ve banyo sayısı sabitken evin büyüklüğü %1 artarsa fiyatlar %0.634 artar.
- sd=n-k-1=19-3-1=15 olduğundan t_{15} dağılımının 97.5nci yüzdelik değeri c=2.131 olur. Buradan %95 güven aralığı

$$0.634 \pm 2.131 \cdot (0.184) \Rightarrow [0.242, 1.026]$$

- Bu aralık sıfırı içermediğinden katsayının anlamsız olduğunu söyleyen boş hipotez reddedilir.
- Oda sayısı (bdrms) katsayısı beklentilerimizin aksine ($-$) işaretli çıkmış. Neden?

Örnek: Evler için Hedonik Fiyat Modeli

Tahmin Sonuçları

$$\widehat{\log(\text{price})} = \underset{(1.15)}{7.46} + \underset{(0.184)}{0.634}\,\text{log(sqrft)} - \underset{(0.059)}{0.066}\,\text{bdrms} + \underset{(0.075)}{0.158}\,\text{bthrms}$$

$$n = 19 \quad R^2 = 0.806$$

- β_{bdrms} için %95 güven aralığı $[-0.192,\ 0.006]$ olarak bulunmuştur.
- Bu güven aralığı sıfırı içerdiğinden bdrms değişkeninin ev fiyatları üzerindeki etkisinin istatistik bakımından anlamsız olduğunu söyleyebiliriz.
- Bthrms: banyo sayısı bir arttığında ev fiyatlarının ortalamada yaklaşık %100(0.158)=%15.8 artacağı tahmin edilmektedir.
- Bu değişken için %95 güven aralığı $[-0.002, 0.318]$ olarak bulunmuştur. Teknik açıdan sıfırı içerdiğinden anlamsız olduğu söylenebilir. P-değerini hesaplayıp yorumlamak daha doğru

Parametrelerin tek bir doğrusal kombinasyonuna ilişkin hipotez testleri

- Üniversitede okunan bir yılla yüksek okulda okunan bir yılın ücrete katkısı (getirisi) aynı mıdır?

$$log(wage) = \beta_0 + \beta_1 jc + \beta_2 univ + \beta_3 exper + u$$

jc: yüksekokulda (junior college) okunan yıl sayısı, univ: dört yıllık üniversitede okunan yıl sayısı, exper: tecrübe (yıl)

- İlgilendiğimiz boş hipotez şudur:

$$H_0 : \beta_1 = \beta_2 \ \Leftrightarrow\ \beta_1 - \beta_2 = 0$$

- Alternatif hipotez

$$H_0 : \beta_1 < \beta_2 \ \Leftrightarrow\ \beta_1 - \beta_2 < 0$$

37

Parametrelerin tek bir doğrusal kombinasyonuna ilişkin hipotez testleri

- Boş hipotez parametrelerin sadece bir lineer kombinasyonunu içerdiğinden t testiyle sınanabilir:

$$t = \frac{\hat{\beta}_1 - \hat{\beta}_2}{se(\hat{\beta}_1 - \hat{\beta}_2)}$$

- Paydada yer alan standart hata ilgili lineer kombinasyonun varyansının kareköküdür:

$$se(\hat{\beta}_1 - \hat{\beta}_2) = \sqrt{\mathrm{Var}(\hat{\beta}_1 - \hat{\beta}_2)}$$

$$\mathrm{Var}(\hat{\beta}_1 - \hat{\beta}_2) = \mathrm{Var}(\hat{\beta}_1) + \mathrm{Var}(\hat{\beta}_2) - 2\mathrm{Cov}(\hat{\beta}_1, \hat{\beta}_2)$$

- Bu standart hatanın hesaplanabilmesi için OLS tahminlerinin varyanslarının yanı sıra kovaryanslarının da bilinmesi gerekmektedir.

38

Parametrelerin tek bir doğrusal kombinasyonuna ilişkin hipotez testleri

- $se(\hat{\beta}_1 - \hat{\beta}_2)$'nin hesaplanmasında alternatif bir yöntem regresyonun yeniden düzenlenerek tahmin edilmesidir.
- $\theta = \hat{\beta}_1 - \hat{\beta}_2$ diyelim. Bu durumda boş ve alternatif hipotezler:

$$H_0 : \theta = 0, \quad H_1 : \theta < 0$$

- $\beta_1 = \theta + \hat{\beta}_2$ modelde yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} y &= \beta_0 + (\theta + \hat{\beta}_2)x_1 + \beta_2 x_2 + \beta_3 x_3 + u \\ &= \beta_0 + \theta x_1 + \beta_2(x_1 + x_2) + \beta_3 x_3 + u \end{aligned}$$

39

Örnek

Tahmin Sonuçları

$$\widehat{\log(\text{wage})} = \underset{(0.27)}{1.43} + \underset{(0.031)}{0.098}\,\mathsf{jc} + \underset{(0.035)}{0.124}\,\mathsf{univ} + \underset{(0.008)}{0.019}\,\mathsf{exper}$$

$$n = 285 \quad R^2 = 0.243$$

se regresyonu tahmin Sonuçları

$$\widehat{\log(\text{wage})} = \underset{(0.27)}{1.43} - \underset{(0.018)}{0.026}\,\mathsf{jc} + \underset{(0.035)}{0.124}\,\mathsf{totcoll} + \underset{(0.008)}{0.019}\,\mathsf{exper}$$

$$n = 285 \quad R^2 = 0.243$$

- Not: $totcoll = jc + univ$. $se(\theta) = se(\hat{\beta}_1 - \hat{\beta}_2) = 0.018$.
- t istatistiği: $t = -0.026/0.018 = -1.44$, p-değeri$= 0.075$
- Çok güçlü olmasa da H_0 aleyhine kanıt olduğu söylenebilir.

40

Çoklu Doğrusal Kısıtların Testi

- Regresyondaki t istatistikleri anakitleye ait beta parametrelerinin belli bir sabite eşit olup olmadığını test etmemize yarar.
- Parametrelerin tek bir doğrusal kombinasyonunun (kısıtın) belli bir sabite eşit olup olmadığının testini ise, önceki örnekte gördüğümüz gibi, değişkenleri dönüştürerek modeli yeniden düzenlemek suretiyle yapıyorduk.
- Ancak, şu ana kadar hep tek bir kısıtlamaya ilişkin test yapıyorduk.
- Şimdi çok sayıda kısıt varken nasıl test yapacağımızı görelim.

41

Dışlama Kısıtları (Exclusion Restrictions)

- Regresyonda yer alan bir değişkenler grubunun birlikte y üzerinde anlamlı bir etkisinin olup olmadığını test etmek istiyoruz.
- Örneğin şu modelde

$$y = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \beta_3 x_3 + \beta_4 x_4 + \beta_5 x_5 + u$$

şu hipotezi test etmek istiyoruz:

$$H_0 : \beta_3 = 0, \beta_4 = 0, \beta_5 = 0$$

$$H_1 : \beta_3 \neq 0, \beta_4 \neq 0, \beta_5 \neq 0$$

- Boş hipotez, x_3, x_4 ve x_5 değişkenlerinin birlikte y üzerinde bir etkisinin olmadığını söylemektedir. Alternatif hipotez en az birinin sıfırdan farklı olduğunu söylemektedir.

42

Dışlama Kısıtları (Exclusion Restrictions)

Kısıtlanmamış (UnRestricted) Model

$$y = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \beta_3 x_3 + \beta_4 x_4 + \beta_5 x_5 + u$$

$$SSR_{ur}, \quad R^2_{ur}$$

Kısıtlanmış (Restricted) Model

$$y = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + u$$

$$SSR_r, \quad R^2_r$$

- H_0 doğru kabul edildiğinde kısıtlanmış modele ulaşılır.
- Her iki model ayrı ayrı tahmin edilerek kalıntı kareleri toplamlarındaki değişim F testi yardımıyla karşılaştırılabilir.

43

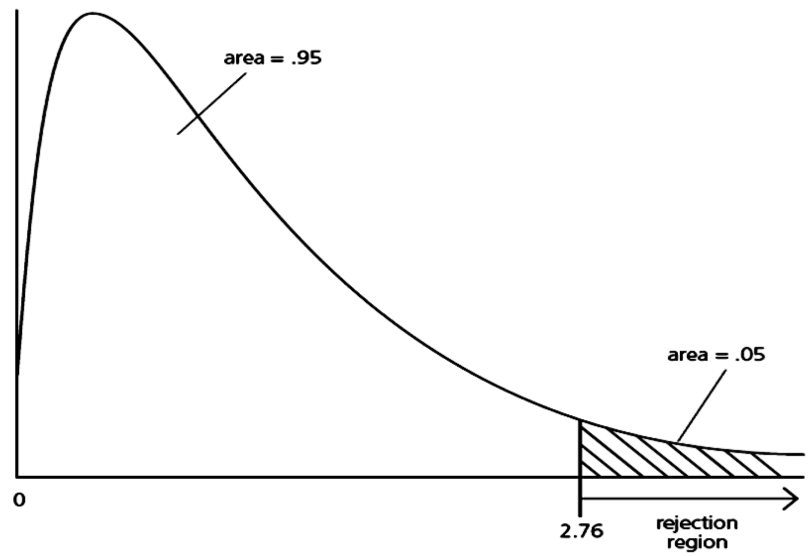
Doğrusal Kısıtların Testi

F-test istatistiği

$$F = \frac{(SSR_r - SSR_{ur})/q}{SSR_{ur}/(n-k-1)} \sim \quad F_{k,n-k-1}$$

- SSR_r kısıtlanmış modelin, SSR_{ur} ise kısıtlanmamış modelin Kalıntı Kareleri Toplamıdır.
- $q = df_r - df_{ur}$: toplam kısıt sayısı, payın serbestlik derecesi (kısıtlanmamış modelin parametre sayısından kısıtlanmış modelin parametre sayısı çıkarılarak bulunabilir)
- Paydanın serbestlik derecesi (df_{ur}) kısıtlanmamış modelin serbestlik derecesine eşittir.
- Karar kuralı: $F > c$ ise H_0 RED. c, ilgili $F_{k,n-k-1}$ dağılımında %100α düzeyindeki kritik değerdir.

$F(3, 60)$ Dağılımında %5 Red Bölgesi



F Testi

- F testi, aralarında yüksek çoklu-bağıntı bulunan x'lerin tümünün birden model dışında tutulmasının testinde başarıyla uygulanabilir.
- Örneğin, firmaların başarı performanslarını açıklayıcı değişkenler olarak kullandığımızı düşünelim. Böyle bir modelde kullanabileceğimiz performans ölçütleri genellikle birbirleriyle ilişkili olacaktır.
- Bu durumda tek tek t testleri yararlı olmayacaktır, çünkü yüksek çoklu-bağıntı yüzünden katsayıların standart hataları yüksek çıkacaktır.
- F testi uygulayarak, tüm performans ölçütlerinin birden (aynı anda) model dışına çıkarılmasının SSR'yi ne ölçüde yükselttiğine bakabiliriz.

t ve F İstatistikleri Arasındaki İlişki

- Tek bir bağımsız değişkene F testi uygulamak t testi ile aynı sonucu (kararı) verir.
- İki taraflı $H_0 : \beta_j = 0$ hipotezi için F testi hesaplanırsa, $q = 1$ olur ve aşağıdaki ilişki geçerlidir:

$$t^2 = F$$

- İki taraflı alternatif hipotezler için

$$t^2_{n-k-1} \sim F(1, n-k-1)$$

- Tek parametrenin test edilmesinde t testi daha esnek ve kolay bir yaklaşım sunar. t istatistiği ile tek taraflı hipotezleri test etmek mümkündür.

F Testinin R^2 Formu

- F test istatistiğini SSR'ler yerine kısıtlanmış ve kısıtlanmamış regresyonlardan elde edilen R^2'ler cinsinden de yazabiliriz.
- Hatırlarsak

$$SSR_r = SST(1 - R^2_r), \quad SSR_{ur} = SST(1 - R^2_{ur})$$

- F test istatistiğinde yerine konarak yeniden düzenlenirse:

$$F = \frac{(R^2_{ur} - R^2_r)/q}{(1 - R^2_{ur})/(n-k-1)}$$

- R^2_{ur}: Kısıtlanmamış modelin determinasyon katsayısı
- R^2_r: Kısıtlanmış modelin determinasyon katsayısı
- $R^2_{ur} \geq R^2_r$

F Testi Örnek

Yeni doğan bebeklerin sağlık düzeyi ve anne-babanın eğitim düzeyi: bwght.gdt

$$y = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \beta_3 x_3 + \beta_4 x_4 + \beta_5 x_5 + u$$

- Bağımlı değişken: $y =$ yeni doğan bebek ağırlıkları (libre)
- Açıklayıcı değişkenler
  - x_1: annenin hamilelik süresince günde içtiği ortalama sigara sayısı
  - x_2: bebeğin doğum sırası
  - x_3: ailenin yıllık geliri
  - x_4: annenin eğitim düzeyi, yıl
  - x_5: babanın eğitim düzeyi, yıl.
- İlgilendiğimiz hipotez: $H_0 : \beta_4 = 0, \beta_5 = 0$, annenin ve babanın eğitim düzeyleri birlikte bebek ağırlıkları üzerinde bir etkiye sahip değildir.

Kısıtlanmamış Model: bwght.gdt

Model 1: OLS, using observations 1–1388 ($n = 1191$)
Missing or incomplete observations dropped: 197
Dependent variable: bwght

	Coefficient	Std. Error	t-ratio	p-value
const	114.524	3.72845	30.7163	0.0000
cigs	−0.595936	0.110348	−5.4005	0.0000
parity	1.78760	0.659406	2.7109	0.0068
faminc	0.0560414	0.0365616	1.5328	0.1256
motheduc	−0.370450	0.319855	−1.1582	0.2470
fatheduc	0.472394	0.282643	1.6713	0.0949

Mean dependent var	119.5298	S.D. dependent var	20.14124
Sum squared resid $\boldsymbol{SSR_{ur}}$	**464041.1**	S.E. of regression	19.78878
$\boldsymbol{R^2_{ur}}$	**0.038748**	Adjusted R^2	0.034692

Kısıtlanmış Model: bwght.gdt

Model 2: OLS, using observations 1–1191
Dependent variable: bwght

	Coefficient	Std. Error	t-ratio	p-value
const	115.470	1.65590	69.7325	0.0000
cigs	−0.597852	0.108770	−5.4965	0.0000
parity	1.83227	0.657540	2.7866	0.0054
faminc	0.0670618	0.0323938	2.0702	0.0386

Mean dependent var	119.5298	S.D. dependent var	20.14124
Sum squared resid SSR_r	**465166.8**	S.E. of regression	19.79607
R^2_r	**0.036416**	Adjusted R^2	0.033981

Bebek Ağırlıkları

- F istatistiği SSR form

$$F = \frac{(SSR_r - SSR_{ur})/q}{SSR_{ur}/(n-k-1)} = \frac{(465167 - 464041)/2}{464041/(1191-5-1)} = 1.4377$$

- F istatistiği R^2 form

$$F = \frac{(R^2_{ur} - R^2_r)/q}{(1-R^2_{ur})/(n-k-1)} = \frac{(0.0387 - 0.0364)/2}{(1-0.0387)/1185} = 1.4376$$

- F(2, 1185) tablosundan %5 kritik değer c=3, %10 kritik değer 2.3
- Karar: Bu anlamlılık düzeylerinde H_0 reddedilemez. Anne ve babanın eğitim düzeylerinin doğum ağırlıkları üzerinde etkisi yoktur. Başka bir deyişle **bu iki değişken birlikte istatistik bakımından anlamsızdır**.

Regresyonun Bütün Olarak Anlamlılığı

- Boş hipotezimiz şudur: regresyona eklenen açıklayıcı değişkenlerin y üzerinde birlikte etkisi yoktur:

$$H_0 : \beta_1 = \beta_2 = \ldots = \beta_k = 0$$

- Alternatif hipotez: en az biri sıfırdan farklı
- Boş hipoteze göre kurulan modelin bir açıklayıcılığı yoktur. Bu boş hipotez altında

$$y = \beta_0 + u$$

modelin ulaşılır.
- Bu boş hipotez F testiyle sınanabilir.

Regresyonun Bütün Olarak Anlamlılığı

- F test istatistiği

$$F = \frac{R^2/k}{(1-R^2)/(n-k-1)} \sim F_{k,n-k-1}$$

- Buradaki R^2 kısıtlanmamış modelden elde edilen determinasyon katsayısıdır.
- Standart ekonometri paket programları regresyonun bütün olarak anlamlılığını sınayan F istatistiğini otomatik olarak hesaplar.
- Önceki örnekte

$$F - statistic(5, 1185) = 9.5535(p - value < 0.00001)$$

- P-değeri oldukça küçük çıkmıştır. Yani H_0'ı reddedersek 1.tip hata olasılığımız çok küçük olacaktır. Öyleyse H_0 güçlü bir şekilde reddedilir.
- Regresyonun bütününün anlamsız olduğunu söyleyen sıfır hipotezine karşı kanıtlar güçlüdür. Regresyon bir bütün olarak anlamlıdır.

Genel Doğrusal Kısıtların Testi

Evlerin ekspertiz değerleri rasyonel mi?: hprice1.gdt

$$y = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \beta_3 x_3 + \beta_4 x_4 + u$$

- Bağımlı değişken: $y = \log(\text{price})$
- Açıklayıcı değişkenler
  - x_1: log(assess), ekspertiz değerinin logaritması
  - x_2: log(lotsize), evin bulunduğu arsanın büyüklüğü
  - x_3: log(sqrft), evin büyüklüğü
  - x_4: bdrms, oda sayısı
- İlgilendiğimiz hipotez: $H_0 : \beta_1 = 1, \beta_2 = 0, \beta_3 = 0, \beta_4 = 0$
- Evin ekspertiz değerini kontrol ettikten sonra evin özelliklerinin açıklayıcılığı yoktur. Ev değerlemesi rasyonel yapılmıştır.

Evlerin ekspertiz değerleri rasyonel mi?: hprice1.gdt

- Kısıtlanmamış model

$$y = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \beta_3 x_3 + \beta_4 x_4 + u$$

- $H_0 : \beta_1 = 1, \beta_2 = 0, \beta_3 = 0, \beta_4 = 0$ altında kısıtlanmış model

$$y = \beta_0 + x_1 + u$$

- Kısıtlanmış model şu haliyle tahmin edilebilir:

$$y - x_1 = \beta_0 + u$$

- F testinin adımları aynıdır. Her iki model ayrı ayrı tahmin edilerek daha önce gördüğümüz formüller ve karar kuralı kullanılarak test sonuçlandırılır.

Örnek: Ev Değerlemeleri Rasyonel mi?

Örnek: Gretl, hprice1.gdt

- Unrestricted model: SSR_{ur}=1.822

$$\widehat{\text{lprice}} = \underset{(0.56966)}{0.263745} + \underset{(0.15145)}{1.04306}\,\text{lassess} + \underset{(0.038561)}{0.00743824}\,\text{llotsize} - \underset{(0.13843)}{0.103239}\,\text{lsqrft} + \underset{(0.022098)}{0.0338392}\,\text{bdrms}$$

$$T = 88 \quad \bar{R}^2 = 0.7619 \quad F(4, 83) = 70.583 \quad \hat{\sigma} = 0.14814$$

(standard errors in parentheses)

- Restricted Model: SSR_r=1.880

$$\widehat{\text{y1}} = \underset{(0.015671)}{-0.0848134}$$

$$T = 88 \quad \bar{R}^2 = 0.0000 \quad \hat{\sigma} = 0.14701$$

(standard errors in parentheses)

Örnek: Ev Değerlemeleri Rasyonel mi?

- F test istatistiği

$$F = \frac{(1.880 - 1.822)}{1.822}\frac{83}{4} = 0.661$$

- %5 düzeyinde F(4,83) kritik değeri, c=2.5
- H_0 reddedilemez.
- Değerlemelerin rasyonel olduğunu söyleyen sıfır hipotezine karşı kanıt yoktur.

Regresyon sonuçlarının sunulması

- Tahmin edilen beta katsayılarını, ilgili bağımsız değişkenin ve bağımlı değişkenin ölçü birimlerini ve regresyona giriş şekillerini dikkate alarak yorumlayınız.
- Katsayıların tek tek (t testi) ve tümü bir arada (F testi) istatistiksel olarak anlamlı olup olmadıklarını gösteriniz.
- Betaşapkaların standart hatalarını (se) katsayıların altında veriniz. Bazen t değerleri de verilmektedir. Ancak, t yerine standart hataları vermek daha doğrudur. Güven aralıklarını hesaplamak için standart hatalar gerekecektir.
- R^2 ve n mutlaka verilmeli. Bazen SSR ve regresyonun standart hatası ($\hat{\sigma}$) da verilmektedir.