14 A $\begin{cases} y_1'(x) = -7y_1(x) + 4y_2(x) \\ y_2'(x) = -6y_1(x) + 7y_2(x) \end{cases}$ $\begin{cases} y_1(0) = 2 \\ y_2(0) = -4 \end{cases}$

Rewrite in matrix form

$$y' = \begin{bmatrix} -7 & 4 \\ -6 & 7 \end{bmatrix} y \qquad y(0) = \begin{bmatrix} 2 \\ -4 \end{bmatrix}$$

$$y = C_1 v_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 v_2 e^{\lambda_2 x}$$

$$\begin{vmatrix} -7-\lambda & 4 \\ -6 & 7-\lambda \end{vmatrix} = (-7-\lambda)(7-\lambda) - (-6)(4) = 0$$

$$\lambda^2 - 25 = 0 \qquad \lambda_1 = -5 \quad \lambda_2 = 5$$

I. $\begin{bmatrix} -7-\lambda_1 & 4 \\ -6 & 7-\lambda_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} -2 & 4 \\ -6 & 12 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ $v_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$

II $\begin{bmatrix} -7-\lambda_2 & 4 \\ -6 & 7-\lambda_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} -12 & 4 \\ -6 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ $v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$

$$y = C_1 \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} e^{-5x} + C_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} e^{5x}$$

$$y(0) = C_1 \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot 1 + C_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} \cdot 1 = \begin{bmatrix} 2C_1 + C_2 \\ C_1 + 3C_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -4 \end{bmatrix}$$

$\begin{cases} 2C_1 + C_2 = 2 \\ C_1 + 3C_2 = -4 \end{cases}$ $\begin{cases} C_1 = 2 \\ C_2 = -2 \end{cases}$

$$y = 2 \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} e^{-5x} - 2 \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} e^{5x}$$

Answer: $y = 2 \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} e^{-5x} - 2 \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} e^{5x}$

14. B $\begin{cases} y_1'(x) = 21y_1(x) - 12y_2(x) \\ y_2'(x) = 24y_1(x) - 15y_2(x) \end{cases}$ $\begin{cases} y_1(0) = 5 \\ y_2(0) = 3 \end{cases}$

Rewrite in matrix form:

$$y' = \begin{bmatrix} 21 & -12 \\ 24 & -15 \end{bmatrix} y \qquad y(0) = \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 21-\lambda & -12 \\ 24 & -15-\lambda \end{vmatrix} = (21-\lambda)(-15-\lambda) - (-12)(24) =$$

$$= \lambda^2 - 6\lambda - 27 \qquad \lambda_1 = -3 \quad \lambda_2 = 9$$

I $\begin{bmatrix} 21-\lambda_1 & -12 \\ 24 & -15-\lambda_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} 24 & -12 \\ 24 & -12 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ $v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$

II $\begin{bmatrix} 21-\lambda_2 & -12 \\ 24 & -15-\lambda_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} 12 & -12 \\ 24 & -24 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ $v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

$$y = C_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} e^{-3x} + C_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} e^{9x}$$

$$y(0) = C_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \cdot 1 + C_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot 1 = \begin{bmatrix} C_1 + C_2 \\ 2C_1 + C_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$\begin{cases} C_1 + C_2 = 5 \\ 2C_1 + C_2 = 3 \end{cases}$ $\begin{cases} C_1 = -2 \\ C_2 = 7 \end{cases}$

$$y(0) = -2 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} e^{-3x} + 7 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} e^{9x}$$

Answer: $-2 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} e^{-3x} + 7 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} e^{9x}$

14 C
$$\begin{cases} y_1'(x) = 6y_1(x) - 3y_2(x) - 8y_3(x) \\ y_2'(x) = 2y_1(x) + y_2(x) - 2y_3(x) \\ y_3'(x) = 3y_1(x) - 3y_2(x) - 5y_3(x) \end{cases} \qquad \begin{cases} y_1(0) = 0 \\ y_2(0) = -1 \\ y_3(0) = -1 \end{cases}$$

Rewrite in matrix form:

$$y' = \begin{bmatrix} 6 & -3 & -8 \\ 2 & 1 & -2 \\ 3 & -3 & -5 \end{bmatrix} y \qquad y(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 6-\lambda & -3 & -8 \\ 2 & 1-\lambda & 2 \\ 3 & -3 & -5-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3 + 2\lambda^2 + 5\lambda - 6$$

$$\lambda_1 = -2 \quad \lambda_2 = 1 \quad \lambda_3 = 3$$

I $\begin{bmatrix} 6-\lambda_1 & -3 & -8 \\ 2 & 1-\lambda_1 & -2 \\ 3 & -3 & -5-\lambda_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & -3 & -8 \\ 2 & 3 & -2 \\ 3 & -3 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

II $\begin{bmatrix} 6-\lambda_2 & -3 & -8 \\ 2 & 1-\lambda_2 & -2 \\ 3 & -3 & -5-\lambda_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & -3 & -8 \\ 2 & 0 & -2 \\ 3 & -3 & -6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$

III $\begin{bmatrix} 6-\lambda_3 & -3 & -8 \\ 2 & 1-\lambda_3 & -2 \\ 3 & -3 & -5-\lambda_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -3 & -8 \\ 2 & -2 & -2 \\ 3 & -3 & -8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad v_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

$$y = C_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} e^{-2x} + C_2 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} e^{x} + C_3 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} e^{3x} \qquad y(0) = \begin{bmatrix} C_1 + C_2 + C_3 \\ -C_2 + C_3 \\ C_1 + C_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} C_1 = -3 \\ C_2 = 2 \\ C_3 = 1 \end{cases} \qquad y = -3 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} e^{-2x} + 2 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} e^{x} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} e^{3x}$$

Answer: $y = -3 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} e^{-2x} + 2 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} e^{x} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} e^{3x}$